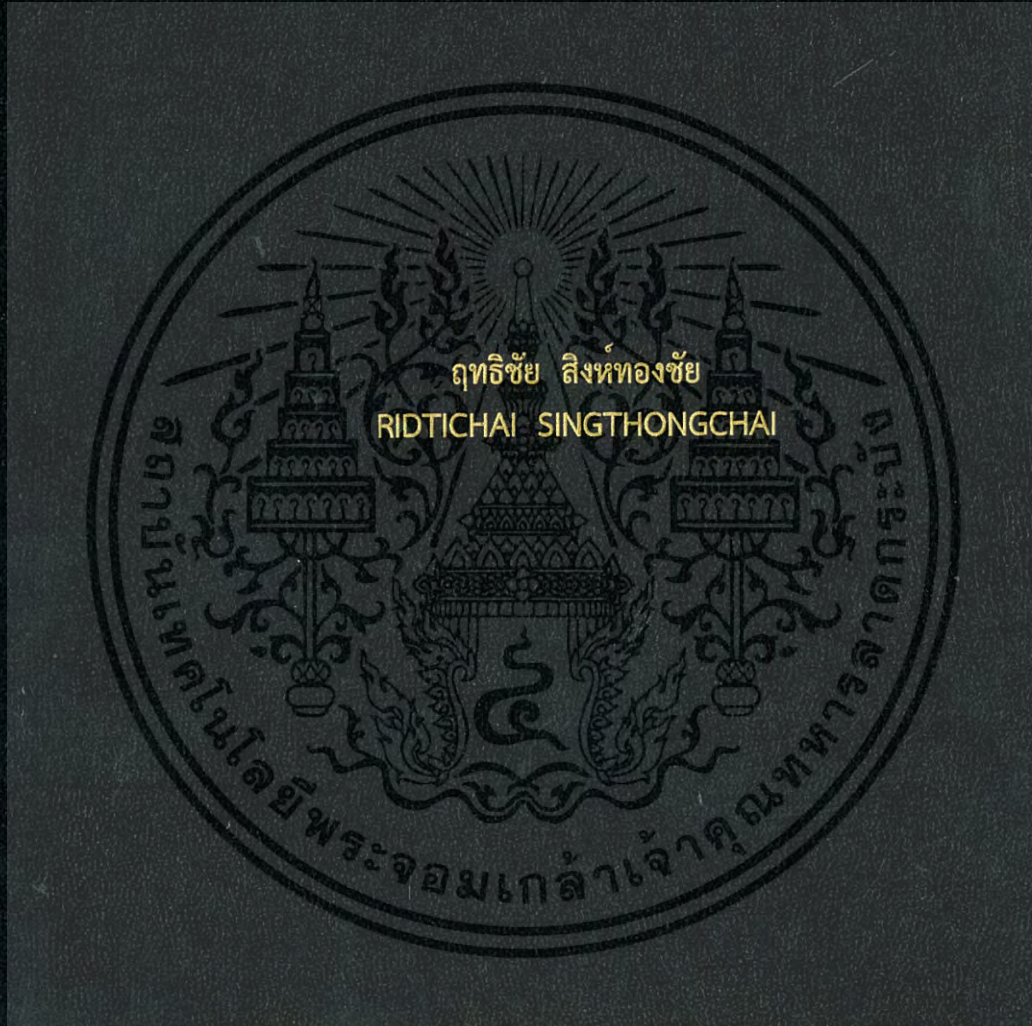


แมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้นโดยใช้ควเบสเซลโพลีโนเมียล

LINEAR PHASE MATCHED FILTER BASED ON
Q-BESSEL POLYNOMIALS



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศ

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2559

KMITL-2016-EN-M-220-214

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

แมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้นโดยใช้คิวเบสเซลโพลีโนเมียล

LINEAR PHASE MATCHED FILTER BASED ON
Q-BESSEL POLYNOMIALS



T148715



ฤทธิชัย สิงห์ทองชัย

RIDTICHAJ SINGTHONGCHAI

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน **148715**
ในเดือนปี **23 11 2560**

00265406

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศ

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2559

KMITL-2016-EN-M-220-214

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LINEAR PHASE MATCHED FILTER BASED ON
Q-BESSEL POLYNOMIALS



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN INFORMATION ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2016
KMITL-2016-EN-M-220-214

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2016

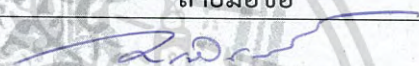

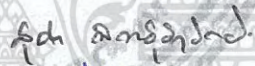


FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ แมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้นโดยใช้ควเบสเซลโพลิโนเมียล
Thesis Title Linear Phase Mated Filter Based on q-Bessel Polynomials
นักศึกษา นายฤทธิชัย สิงห์ทองชัย
รหัสประจำตัว 54614552
ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา วิศวกรรมสารสนเทศ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.พนารัตน์ เข็ญถนอมวงศ์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ (ร่วม) รศ.อรลภา แสงอรุณ
หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2016-EN-M-220-214

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
รศ.ดร.กนก	เจนจิระพงศ์เวช	
รศ.ดร.ชวลิต	เบญจางคประเสริฐ	
ผศ.ดร.สุธีรา	พันธ์ุธีรานุรักษ์	
รศ.ดร.อรรณสิทธิ์	เหล่าสกุล	
ผศ.ดร.พนารัตน์	เข็ญถนอมวงศ์	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันพฤหัสบดีที่ 8 ธันวาคม พ.ศ. 2559 เวลา 10.00-12.00 น.
สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 5 ห้องประชุม 1

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร. คมสัน มาลีสี)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษา **ฉบับนี้ คณะวิศวกรรมศาสตร์** ขอสงวนสิทธิ์ใน
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต่อ **วันที่ 8 ธันวาคม พ.ศ. 2559** ที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	แมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้นโดยใช้ควเบสเซลโพลีโนเมียล
นักศึกษา	นายฤทธิชัย สิงห์ทองชัย
รหัสประจำตัว	54614552
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมสารสนเทศ
พ.ศ.	2559
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.พนารัตน์ เชิญถนอมวงศ์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ (ร่วม)	รศ.อรลภา แสงอรุณ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ ศึกษาการออกแบบตัวกรองแบบแมตซ์ที่มีเฟสเป็นเชิงเส้นหรือแมตซ์ฟิลเตอร์มีเฟสเป็นเชิงเส้นด้วยการใช้โพลีโนเมียลของควเบสเซลเป็นตัวส่วนของสมการฟังก์ชันเศษส่วน และใช้สัญญาณเรสต์โคไซน์เป็นสัญญาณทดสอบประสิทธิภาพของตัวกรองแบบแมตซ์ โดยเปรียบเทียบผลตอบสนองของสัญญาณทางด้านรับกับผลงานวิจัยแมตซ์ฟิลเตอร์มีเฟสเป็นเชิงเส้นซึ่งออกแบบด้วยการใช้โพลีโนเมียลของเบสเซลธรรมดา โดยเปรียบเทียบผลทั้งในรูปแบบของสมการฟังก์ชันเศษส่วนที่ไม่มีคูซิโรและสมการที่มีคูซิโร ในกรณีที่มีคูซิโร จะมีค่าซีโรอยู่ที่ $\pm jk\pi$ เมื่อ k มีค่าเป็น 1,2,3..... จากผลการจำลองการทำงานของระบบ พบว่าแมตซ์ฟิลเตอร์ที่ออกแบบโดยการใช้สมการควเบสเซลโพลีโนเมียล จะให้ผลตอบสนองของสัญญาณทางด้านรับที่มีประสิทธิภาพ มีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณด้านส่งมากกว่าการใช้สมการเบสเซลโพลีโนเมียลธรรมดา ทั้งกรณีที่สมการที่มีลำดับที่เท่ากันหรือน้อยกว่า เมื่อมีการปรับค่า q ที่เหมาะสม ทั้งนี้เนื่องจากค่า q จะเป็นสัมประสิทธิ์ที่ทำให้ผลตอบสนองของสัญญาณทางด้านรับมีค่าใกล้เคียงสัญญาณเดิมมากที่สุดได้ โดยไม่จำเป็นต้องเพิ่มลำดับของสมการฟังก์ชันเศษส่วนให้มากขึ้น

Thesis	Linear Phase Matched Filter Based On q-Bessel Polynomials
Student	Mr.Ridtichai Singthongchai
Student ID.	54614552
Degree	Master of Engineering
Program	Information Engineering
Year	2016
Thesis Advisor	Asst.Prof.Dr.Panarat Cherntanomwong
Thesis Co-Advisor	Assoc.Prof.Ornlarp Sangaroon

ABSTRACT

This thesis presents the linear phase matched filter designed by using q-Bessel polynomials as a denominator of a rational function. In order to approximate a receiver filter with optimum performance, the raised-cosine test pulse is utilized. A rational function of the proposed matched filter consists of transmission zero pairs and non transmission zero pair. In case of a transmission zero pairs, the zero pairs are $\pm jk\pi$ when $k = 1, 2, 3, \dots$. The denominator of the rational function is approximated by using q-Bessel polynomials, as known that they have more parameters to be adjusted than the simple Bessel polynomials have. Simulation results show that in the same order of the rational function, or less, the performance of the matched filter is better than one obtained from conventional Bessel polynomials. Moreover, the simulation results agree with the theoretical results.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.พนารัตน์ เชิญถนอมวงศ์ ที่ให้ความช่วยเหลือที่ดีแก่ข้าพเจ้า และคอยชี้แนะให้คำปรึกษาแก่ข้าพเจ้าเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณ รศ.อรลภก แสงอรุณ ที่ได้ให้ความรู้ คำปรึกษาคำแนะนำ การสนับสนุนต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์นี้และให้คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหาตลอดจนให้ประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้า

ขอขอบคุณ รศ.ดร.กนก เจนจิระพงศ์เวช ที่คอยควบคุมความเป็นไปของวิทยานิพนธ์ นำเสนอ ทฤษฎีใหม่ๆ ที่น่าสนใจที่ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อวิทยานิพนธ์ตลอดมาและคอยให้ความรู้แก่ข้าพเจ้า

ขอขอบคุณ บิดาของข้าพเจ้า คุณบุญเพ็ง สิงห์ทองชัย ที่คอยเป็นกำลังใจและแรงผลักดันให้ข้าพเจ้าให้เรียนหนังสือตามที่ข้าพเจ้าได้ตั้งใจไว้

ขอขอบคุณ มารดาของข้าพเจ้า คุณอำภา สิงห์ทองชัย ที่คอยเป็นกำลังใจและแรงผลักดันให้ข้าพเจ้าให้เรียนหนังสือตามที่ข้าพเจ้าได้ตั้งใจไว้

ขอขอบคุณภรรยาของข้าพเจ้า คุณวิไลวรรณ จรรย์สีปศรี ที่เป็นเสมือนคู่คิดและเป็นกำลังใจที่ดีตลอดมา

สุดท้ายต้องขอบคุณเด็กชายชิววิษณุ สิงห์ทองชัย ที่เป็นกำลังใจที่ดีให้ข้าพเจ้ามีแรงที่จะสู้ต่อไปไม่ว่าปัญหาจะหนักหนาเพียงใด

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดามารดาและครอบครัว ซึ่งเป็นที่รักและเคารพยิ่ง ตลอดจนครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ และถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้แก่ข้าพเจ้า

ฤทธิชัย สิงห์ทองชัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ii
กิตติกรรมประกาศ.....	iii
สารบัญ.....	iv
สารบัญตาราง.....	vi
สารบัญรูป.....	vii
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 สมมุติฐานของการศึกษา.....	3
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	3
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	4
1.6 ขั้นตอนของการศึกษา.....	4
1.7 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์.....	4
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	5
2.1 บทนำ.....	5
2.2 แมตซ์ฟิลเตอร์.....	6
2.2.1 คุณสมบัติของแมตซ์ฟิลเตอร์.....	12
2.3 ช่องสัญญาณไมสควิสในอุดมคติ.....	15
2.4 สเปกตรัมของสัญญาณเรสต์โคไซน์.....	18
2.5 ทฤษฎีเบสเซลโพลีโนเมียล.....	20
2.6 ทฤษฎีคิวเบสเซลโพลีโนเมียล.....	22
2.7 สรุป.....	25
บทที่ 3 การออกแบบสัญญาณทดสอบที่เป็นเฟสเชิงเส้นโดยใช้สมการของเบสเซลโพลีโนเมียล.....	26
3.1 บทนำ.....	26
3.2 สัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์.....	26

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
3.3 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด.....	28
3.4 รูปแบบการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์.....	30
3.4.1 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงความถี่.....	30
3.4.2 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงเวลา.....	33
3.5 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์.....	34
3.5.1 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่สาม.....	34
3.5.2 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่ห้า.....	36
3.5.3 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่เจ็ด.....	38
3.6 สรุป.....	46
บทที่ 4 การออกแบบวงจรกรองแบบแมตซ์เฟสเชิงเส้น.....	47
4.1 บทนำ.....	47
4.2 ผลตอบสนองของอิมพัลส์เชิงสาเหตุเฟสเชิงเส้น.....	47
4.3 สัญญาณเรสต์โคไซน์ในขอบข่ายของเวลา.....	49
4.4 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่ไม่มีคูซิเว.....	50
4.5 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่มีคูซิเว.....	53
4.6 การออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์ที่เป็นเฟสเชิงเส้นบนพื้นฐานคิวเบสเซลโพลิโนเมียล.....	55
4.6.1 ระบบเฟสเชิงเส้นของคิวเบสเซลโพลิโนเมียล.....	56
4.6.2 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์โดยใช้คิวเบสเซล.....	57
4.7 สรุป.....	64
บทที่ 5 เปรียบเทียบผลการวิจัยและสรุปผลการวิจัย.....	65
5.1 เปรียบเทียบผลการวิจัย.....	65
5.2 สรุปผลการวิจัย.....	70
เอกสารอ้างอิง.....	71
ประวัติผู้เขียน.....	73

สารบัญตาราง

ตารางที่

	หน้า
4.1 แสดงค่าซีโรและโพลของสมการฟังก์ชันเศษส่วนโดยใช้เบสเซลโพลีโนเมียล.....	55
4.2 แสดงค่าซีโรและโพลของสมการฟังก์ชันเศษส่วนโดยใช้คิวเบสเซลโพลีโนเมียล.....	60



สารบัญรูป

รูปที่

	หน้า
2.1 ระบบการสื่อสารเบสแบนด์.....	5
2.2 แบบจำลองเครื่องรับสัญญาณ	7
2.3 รูปแบบของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม.....	14
2.4 วงจรรวม.....	15
2.5 ผลตอบสนองทางขนาดเป็นรูปแบบปกติของฟังก์ชันความถี่ และแสดงผลตอบสนองของอิมพัลส์ ของตัวกรองความถี่ต่ำผ่านในอุดมคติ.....	17
2.6 ผลตอบสนองสำหรับความแตกต่างขององค์ประกอบการม้วนลงของสัญญาณ.....	19
3.1 สัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ.....	27
3.2 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม.....	35
3.3 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม เทียบกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ ในอุดมคติ.....	35
3.4 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม.....	36
3.5 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้าโดยใช้วิธีการหาราก.....	37
3.6 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้าเทียบกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ ในอุดมคติ.....	37
3.7 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้า.....	38
3.8 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด.....	40
3.9 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ดเทียบกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ ในอุดมคติ.....	40
3.10 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด.....	41
3.11 เปรียบเทียบลักษณะทางขนาดของผลตอบสนองของการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วน ในเชิงเวลา.....	44
3.12 เปรียบเทียบความผิดพลาดทางขนาดของการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วน.....	44
4.1.1 สัญญาณพัลส์สมมาตร.....	48
4.1.2 สัญญาณพัลส์สมมาตรเวลาประวิง.....	48
4.2 ผลตอบสนองการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ.....	50

VII

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญรูป(ต่อ)

รูปที่

	หน้า
4.3 ผลตอบสนองที่เป็นเฟสเชิงเส้นในเชิงเวลา.....	51
4.4 ผลตอบสนองการลดทอนและเวลาประวิงในเชิงความถี่.....	52
4.5 ผลตอบสนองจากการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์เฟสเชิงเส้นในเชิงความถี่.....	54
4.6 ผลตอบสนองจากการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์เฟสเชิงเส้นในเชิงเวลา.....	54
4.7 สัญญาณเรสต์โคไซน์โดยตัวเศษมีค่าทางขนาดเท่ากับ 1 และใช้คิวเบสเซิลโพลีโนเมียล เป็นตัวส่วน.....	59
4.8 ผลตอบสนองของการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์โดยใช้คิวเบสเซิลโพลีโนเมียล.....	59
4.9 ผลตอบสนองเฟสเชิงเส้นของสัญญาณในเชิงเวลา (แสดงตามค่า n)	61
4.10 ผลตอบสนองทางการลดทอนของการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์เฟสเชิงเส้น (แสดงตามค่า n).....	61
4.11 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง q-Bessel $n=5, n=7$ กับสัญญาณเรสต์โคไซน์ ในอุดมคติ.....	62
4.12 ผลตอบสนองเฟสเชิงเส้นของสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่ $n=7$ ในเชิงเวลา (แสดงตามค่า q).....	62
4.13 ผลตอบสนองทางการลดทอนที่ $n=7$ ของการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์เฟสเชิงเส้น (แสดงตามค่า q).....	63
4.14 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดของ q-Bessel ตามค่า q ต่างๆ ที่ $n=7$	63
4.15 ผลตอบสนองทางการลดทอนของการตัวกรองด้านส่งและด้านรับ.....	64
5.1 ผลตอบสนองทางการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ ที่ $n=5$	65
5.2 ผลตอบสนองของสัญญาณเรสต์โคไซน์ของ Bessel และ q-Bessel ที่ $n=5$ และสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติในเชิงเวลา.....	66
5.3 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง Bessel และ q-Bessel ที่ $n=5$ กับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ.....	66
5.4 ผลตอบสนองทางการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ ที่ $n=7$	67
5.5 ผลตอบสนองของสัญญาณ ที่ $n=7$ เทียบกับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติในเชิงเวลา.....	67
5.6 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง Bessel และ q-Bessel ที่ $n=7$ กับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ.....	68

VIII

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่

หน้า

5.7 ผลตอบสนองทางการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ระหว่าง Bessel ที่ $n = 9$ และ q-Bessel ที่ $n = 7$ เทียบกับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติในเชิงความถี่.....	68
5.8 ผลตอบสนองของสัญญาณเรสต์โคไซน์ระหว่าง Bessel $n = 9$ และ q-Bessel $n = 7$ เทียบกับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติในเชิงเวลา.....	68
5.9 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง Bessel $n = 9$ และ q-Bessel $n = 7$ กับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ.....	68



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการส่งสัญญาณข้อมูลดิจิทัลซึ่งมีสเปกตรัมกว้าง มีแถบความถี่ต่ำ ผ่านไปบนช่องสัญญาณเบสแบนด์ (baseband channel) ซึ่งมีความกว้างของแบนด์จำกัด (band-limited) จำเป็นต้องใช้ช่องสัญญาณความถี่ต่ำ (low-pass channel) ที่มีแบนด์วิดท์ (bandwidth) กว้างพอที่จะรองรับแถบความถี่ของกระแสข้อมูลที่สำคัญ อย่างไรก็ตาม ปกติแล้วช่องทางที่จะกระจายผลตอบสนองของความถี่ออกไปตามต้องการก็คือ วงจรกรองความถี่ต่ำในอุดมคติ (ideal low-pass filter) ผลของการส่งข้อมูลผ่านไปบนช่องสัญญาณดังกล่าว คือสัญญาณพัลส์ที่ได้รับจะได้รับผลกระทบจากสัญญาณพัลส์ที่อยู่ติดกัน เกิดเป็นสัญญาณรบกวนเนื่องจากการแทรกสอดของสัญญาณที่เรียกว่าการแทรกสอดทางสัญลักษณ์ (inter symbol interference, ISI) ซึ่งเป็นแหล่งที่มาของการเกิดความผิดพลาดของบิตข้อมูล (bit errors) ในการนำกระแสข้อมูลกลับออกมา (reconstructed data stream) ทางเอาต์พุตของเครื่องรับ (receiver output) และเพื่อป้องกันให้เกิด inter symbol interference ในเบื้องต้น จะต้องมีการควบคุมรูปร่าง (pulses shape) ของคลื่นสัญญาณตลอดเส้นทางการส่งให้เป็นรูปแบบเดียวกัน ซึ่งการส่งผ่านช่องสัญญาณซึ่งมีความกว้างของช่องสัญญาณที่จำกัดดังกล่าว ผลตอบสนองในขอบข่ายของเวลาของสัญญาณที่ส่งในระบบจะต้องมีคุณสมบัติสอดคล้องตามกฎของไนควิสต์ (nyquist criterion) [1] ซึ่งรูปร่างของสัญญาณไนควิสต์นี้สามารถทำให้สมบูรณ์ได้ ตั้งแต่ต้นทางที่ส่งและปลายทางที่รับสัญญาณ ฉะนั้นภายใต้สมมติฐานเบื้องต้นในการแก้ไข คือการใช้วงจรกรองความถี่หรือฟิลเตอร์ (filter) ในการตรวจจับสัญญาณ (detection pulse signal) ทางด้านรับให้สอดคล้องตรงกัน (matching) กับสัญญาณที่ส่งจากทางด้านส่ง โดยในวิทยานิพนธ์นี้ เริ่มจากการศึกษาผลรับเบื้องต้นในระบบการส่งสัญญาณซึ่งเกี่ยวข้องกับการตรวจจับรูปร่างของคลื่นสัญญาณ (detect wave shaping) ที่รวมมากับสัญญาณรบกวนขาว (white noise) อุปกรณ์ที่เหมาะสมสำหรับการตรวจจับสัญญาณ คือฟิลเตอร์ที่มีเฟสคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (linear time invariant filter) ที่รู้จักกันดี คือวงจรกรองความถี่แบบแมตช์ หรือ แมตช์ฟิลเตอร์ (matched filter) และเพื่อให้สัญญาณไม่เกิดสภาวะการเลื่อนเฟส (phase shift) แมตช์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้น (linear phase matched filter) จึงถูกนำเสนอในขอบข่ายของการวิจัยที่จะกล่าวถึงในวิทยานิพนธ์นี้

แมตช์ฟิลเตอร์ มีการใช้งานกันอย่างกว้างขวางในระบบการสื่อสารทั้งระบบที่เป็นแอนะล็อกและดิจิทัล โดยแต่ละประเภทของการใช้งานอยู่บนพื้นฐานของการปรับปรุงการตรวจจับสัญญาณพัลส์จาก

ด้านส่งให้ปราศจากการแทรกสอดทางสัญญาณ นอกจากนั้นฟิลเตอร์จะต้องมีผลตอบสนองความถี่ที่ดีและสามารถลดทอนการแทรกสอดของสัญญาณรบกวนได้เป็นอย่างดี [2] และมีเฟสเป็นเชิงเส้น ในงานวิจัยก่อนหน้านี้ [3] [4] มีการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์ที่เป็นเฟสเชิงเส้นโดยใช้คู่ของ Transmission Zero และสมการเบสเซลโพลิโนเมียลเผยแพร่ในหลาย ๆ แห่ง แม้แต่วิธีการแก้ปัญหาด้านผลตอบสนองต่อการลดทอนยังไม่สมบูรณ์มากนัก ฉะนั้นเพื่อเป็นการปรับปรุงผลตอบสนองต่อการลดทอนของแมตซ์ฟิลเตอร์ดังกล่าวแล้วนั้น วิทยานิพนธ์นี้ จึงนำเสนอการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นโดยใช้สมการคิวเบสเซลโพลิโนเมียล (q-Bessel polynomial) [5][6] ที่สามารถปรับค่าพารามิเตอร์ q ได้ตามความเหมาะสมเพื่อศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพการทำงานของสัญญาณพัลส์ที่ได้รับหรือสัญญาณทางด้านรับ โดยแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นที่นำเสนอใหม่ในวิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยคู่ของ Transmission Zero และคิวเบสเซลโพลิโนเมียลซึ่งจะใช้เป็นส่วนหนึ่งของสมการฟังก์ชันเศษส่วนแทนการใช้สมการเบสเซลเดิม จากนั้นทำการปรับค่า q ที่เหมาะสม ($0 < q < 1$) เพื่อให้ได้แมตซ์ฟิลเตอร์ที่เป็นเฟสเชิงเส้นซึ่งมีผลตอบสนองต่อการลดทอนของสัญญาณที่ได้รับทางด้านรับมีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณทางด้านส่งมากที่สุด

วิทยานิพนธ์นี้แบ่งการการศึกษาวิจัยเป็น 2 ตอน โดยตอนแรกเป็นการศึกษาคูณลักษณะของสมการเบสเซลโพลิโนเมียล (Bessel polynomial) และนำมาออกแบบสร้างสัญญาณทดสอบไซน์กำลังสองพัลส์ที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น ตามเอกสารอ้างอิงที่ได้นำเสนอ [7] และตอนที่ 2 เป็นการศึกษาแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นโดยใช้สมการคิวเบสเซลโพลิโนเมียล ตามเอกสารอ้างอิงที่นำเสนอ [8][9][10] โดยได้กล่าวถึงรายละเอียดตามเนื้อหาในบทต่อไปนี้ บทที่ 2 จะเป็นการกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นแนวทางในการทำงานวิจัยของวิทยานิพนธ์นี้ ในบทที่ 3 จะกล่าวถึงการออกแบบสร้างสัญญาณทดสอบที่มีเฟสเชิงเส้นใช้สมการของเบสเซลโพลิโนเมียล บทที่ 4 จะกล่าวถึงแมตซ์ฟิลเตอร์ที่เป็นเฟสเชิงเส้นโดยใช้คิวเบสเซลโพลิโนเมียล ส่วนในบทที่ 5 จะเป็นการแสดงถึงการพิจารณาผลงานวิจัยของแมตซ์ฟิลเตอร์ที่นำเสนอและสรุปผลงานวิจัย

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อศึกษาผลกระทบของสัญญาณรบกวนและข้อจำกัดของแบนด์วิดท์ ต่อประสิทธิภาพในการส่งสัญญาณในระบบการสื่อสารเบสแบนด์ (baseband communication system)

1.2.2 เพื่อศึกษาทฤษฎีของเบสเซลโพลิโนเมียลที่มีผลตอบสนองต่อความถี่เป็นเชิงเส้น และนำมาประยุกต์ใช้งาน ในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณและสร้างสัญญาณทดสอบในระบบ

1.2.3 เพื่อศึกษาทฤษฎีและหลักการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์ เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาต่อ ให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น โดยศึกษาจากการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้น โดยใช้สมการเบสเซลโพลีโนเมียล และ transmission zero

1.2.4 เพื่อออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์โดยใช้สมการคิวเบสเซลโพลีโนเมียล และ transmission zero โดยศึกษาเปรียบเทียบผลตอบสนองของความถี่กับแมตซ์ฟิลเตอร์ที่ออกแบบโดยใช้สมการเบสเซลโพลีโนเมียล และ transmission zero ที่ศึกษาใน 1.2.3

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

1.3.1 การปรับปรุงประสิทธิภาพของแมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้นซึ่งออกแบบจากการใช้สมการเบสเซลโพลีโนเมียล และ transmission zero มาเป็น ใช้สมการคิวเบสเซลโพลีโนเมียล ที่สามารถปรับค่าพารามิเตอร์ q ได้ และ transmission zero จะสามารถปรับปรุงผลตอบสนองต่อการลดทอนของสัญญาณที่ได้รับให้มีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณด้านส่ง มากที่สุด

1.3.2 สมการคิวเบสเซลโพลีโนเมียล และ transmission zero สามารถนำไปใช้ออกแบบวงจรแมตซ์ฟิลเตอร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

ปัญหาเบื้องต้นที่พบบ่อยๆในการศึกษาระบบการสื่อสารเบสแบนด์ คือการตรวจจับ (detecting) ความผิดเพี้ยนของสัญญาณที่ส่งไปในช่องสัญญาณเนื่องจากสัญญาณรบกวนในช่องสัญญาณ (channel noise) เช่น additive noise ที่เครื่องรับปลายทาง ซึ่งเป็นสัญญาณรบกวนที่มีลักษณะไม่นิ่งทางสถิติ (stochastic) หรือสัญญาณที่เกิดแบบสุ่ม (random) เป็นสัญญาณที่ไม่สามารถทำนายลักษณะการเกิดล่วงหน้าได้ สำหรับทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัยในวิทยานิพนธ์นี้ สมมุติให้ สัญญาณรบกวนในช่องสัญญาณเป็นข้อจำกัดหลักของระบบ เครื่องรับ (receiver) ซึ่งประกอบด้วย วงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน (low-pass filter) ที่มีความกว้างของ แบนด์วิดท์ จำกัด สามารถปรับปรุงค่า SNR ได้ 3 วิธี คือ

1.4.1 การเพิ่มกำลังส่ง

1.4.2 การจำกัดแบนด์วิดท์ของข่าวสาร

1.4.3 การขจัดสัญญาณรบกวนที่เครื่องรับ

ในวิทยานิพนธ์นี้ นำแนวคิดในการขจัดสัญญาณรบกวนทางเครื่องรับมาใช้ โดยใช้แมตซ์ฟิลเตอร์ (Match Filter) เป็นเครื่องมือและแนวคิดที่สำคัญที่นำมาใช้ในการวิจัย

1.5 ขอบเขตการวิจัย

- 1.5.1 ทำการศึกษาการออกแบบสร้างสัญญาณทดสอบที่มีเฟสเชิงเส้นใช้สมการของเบสเซลโพลีโนเมียล
- 1.5.2 ทำการศึกษาใช้ทฤษฎีแมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้นโดยใช้ควเบสเซลโพลีโนเมียล
- 1.5.3 ทำการทดลองและสรุปผลของสิ่งที่ได้ทำการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้

1.6 ขั้นตอนของการศึกษา

- 1.6.1 นำงานวิจัยที่ใกล้เคียงกับงานที่เราสนใจมาทำการศึกษา
- 1.6.2 ศึกษาทฤษฎีแมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้นโดยใช้ควเบสเซลโพลีโนเมียล
- 1.6.3 ทำการทดลองตามทฤษฎีที่ได้ศึกษา
- 1.6.4 ทำการเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นๆ ที่ใกล้เคียงกัน ว่าสิ่งที่ได้ศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้มีประสิทธิภาพดีกว่าหรือไม่อย่างไร
- 1.6.5 สรุปผลงานวิจัยที่ได้ศึกษา

1.7 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์

- 1.7.1 ได้ความรู้ในการศึกษาแมตซ์ฟิลเตอร์แบบใหม่ๆ ที่สามารถให้ผลตอบสนองที่มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น
- 1.7.2 สามารถที่จะนำความรู้ที่ได้จากการศึกษาไปทำการสร้างวงจรเพื่อไปปรับใช้งานได้จริงในระบบการสื่อสาร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

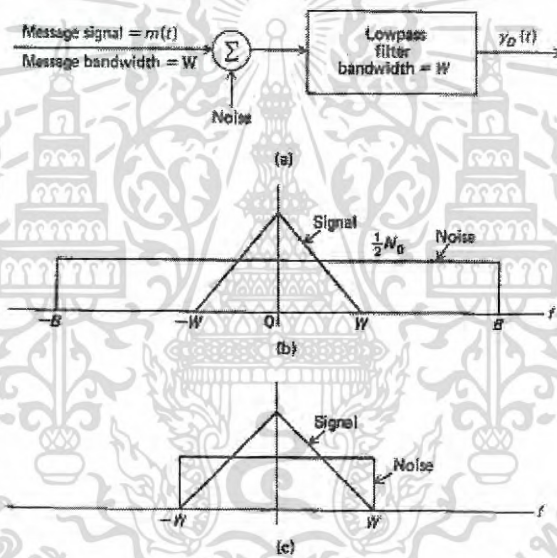
บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

ในระบบการสื่อสารเบสแบนด์ ดังแสดงในโมเดลในรูปที่ 2.1(a)

เมื่อ คือสัญญาณข้อมูลข่าวสารที่ถูกจำกัดแบนด์ (band-limited) และ
คือแบนด์วิดท์ของข้อมูลข่าวสาร (message bandwidth)



รูปที่ 2.1 ระบบการสื่อสารเบสแบนด์ [1]

(a) โมเดลของระบบ (b) สเปกตรัมของสัญญาณที่อินพุตของวงจกรอง

(c) สเปกตรัมของสัญญาณที่เอาต์พุตของวงจกรอง

ตัวอย่างของความหนาแน่นของสเปกตรัมของสัญญาณ (power spectral density, PSD) แสดงตามรูปที่ 2.1(b) ค่ากำลังเฉลี่ยของสัญญาณ ถูกกำหนดโดยพื้นที่ภายใต้ส่วนโค้งรูปสามเหลี่ยมสัญญาณ และ กำหนดให้แทนด้วย —

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าสมมุติว่า additive noise เกิดขึ้นทั้งสองข้าง (double sided white PSD) ของสัญญาณรบกวนขาว $\frac{N_o}{2}$ กรณีที่ $B > W$ ตามรูปที่ 2.1(b) สำหรับระบบส่งเบสแบนด์เบื้องต้น กำลังส่งของตัวส่งสัญญาณ จะมีค่าเท่ากับ กำลังของข้อมูลข่าวสาร คือ $P = P_T$

เครื่องรับสัญญาณประกอบด้วย ตัวกรองความถี่ต่ำผ่าน ซึ่งมีค่า แบนด์วิดท์กว้าง เท่ากับ W โดยวัตถุประสงค์ของแมตช์ฟิลเตอร์ คือขจัดสัญญาณรบกวนให้เหลือน้อยที่สุด เพื่อให้สามารถส่งข่าวสารข้อมูลได้มากที่สุด โดยค่าของค่าความหนาแน่นของสเปกตรัม ของสัญญาณรบกวนที่ เอาต์พุตของตัวกรองความถี่ต่ำ แสดงดังรูปที่ 2.1(c) และค่ากำลังเฉลี่ยของสัญญาณรบกวน แสดงดัง สมการ (2.1)

$$\int_{-W}^W \frac{N_o}{2} df = N_o W \quad (2.1)$$

ดังนั้นค่า สัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (SNR) ที่ เอาต์พุตของเครื่องรับคือ

$$SNR_{\text{bandsband}} = \frac{P_T}{N_o W} \quad (2.2)$$

จากสมการ (2.2) จะเห็นได้ว่า ในระบบการสื่อสารเบสแบนด์สามารถปรับปรุง ค่าของ SNR ดังได้กล่าวไว้แล้วคือ การเพิ่มกำลังส่ง การจำกัดแบนด์วิดท์ของข่าวสาร และการขจัดสัญญาณรบกวนทางด้านเอาต์พุตของเครื่องรับสัญญาณ ซึ่งในบทวิจยนี้เลือกการขจัดสัญญาณรบกวนทางด้านเอาต์พุตของเครื่องรับสัญญาณ โดยใช้แมตช์ฟิลเตอร์ (match filter) เป็นเครื่องมือ ในการขจัดสัญญาณรบกวน ดังจะได้อีกกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

2.2 แมตช์ฟิลเตอร์ (Match Filter)

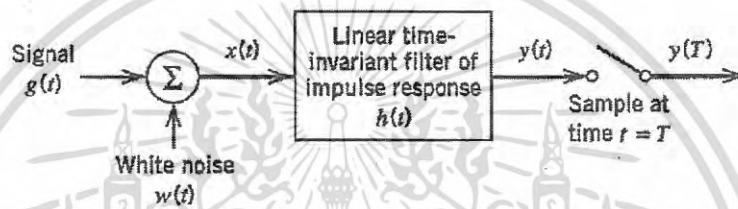
แมตช์ฟิลเตอร์ เป็นวงจรกรองความถี่แบบเชิงเส้นที่ดีที่สุดเหมาะสมสำหรับการเพิ่มอัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (SNR) ในกรณีที่เกิดสัญญาณรบกวน ในช่องสัญญาณ (channel noise) เช่น additive noise ที่เครื่องรับปลายทาง ซึ่งเป็นสัญญาณรบกวนที่มีลักษณะไม่นิ่งทางสถิติ (stochastic) หรือสัญญาณที่เกิดแบบสุ่ม (random) เป็นสัญญาณที่ไม่สามารถทำนายลักษณะการเกิดล่วงหน้าได้

แมตซ์ฟิลเตอร์โดยทั่วไปมีการใช้งานอย่างกว้างขวางในระบบเรดาร์ และ ในการประมวลผลภาพ เพื่อปรับปรุงค่าของ SNR ของภาพเอ็กซ์เรย์

แบบจำลอง (model) ของเครื่องรับสัญญาณซึ่งประกอบด้วยวงจรกรองความถี่แบบเชิงเส้น ซึ่งมีผลตอบสนองต่อสัญญาณอิมพัลส์ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (linear time-invariant filter of impulse response) แสดงตาม รูปที่ 2.2

โดยที่ $h(t)$ คือ ผลตอบสนองของระบบ

$x(t)$ คือ อินพุตของวงจรกรองประกอบด้วยสัญญาณพัลส์ $g(t)$ และสัญญาณรบกวน $w(t)$
แสดงดังสมการที่ (2.3)



รูปที่ 2.2 แบบจำลองเครื่องรับสัญญาณ [1]

$$x(t) = g(t) + w(t), 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

โดย T คือช่วงเวลาที่กำหนด

$g(t)$ หมายถึงสัญญาณไบนารี 1 หรือ 0 ในระบบการสื่อสารแบบดิจิทัล

$w(t)$ เป็นฟังก์ชันสุ่มของกระบวนการสัญญาณรบกวนขาว

PSD ของสัญญาณรบกวนขาว คือ $\frac{N_0}{2}$

PSD (power spectrum density) ความหนาแน่นสเปกตรัมกำลัง ของสัญญาณรบกวนขาว คือ $\frac{N_0}{2}$

เครื่องรับสัญญาณมีหน้าที่สำคัญคือการตรวจสอบสัญญาณพัลส์ $g(t)$ ที่ส่งจากต้นทาง เพื่อให้ได้รับสัญญาณทางด้านรับ $x(t)$ เหมือนด้านส่งโดยไม่ผิดเพี้ยน ปราศจากสัญญาณรบกวนขาว (white noise) เพื่อตอบสนองความต้องการนี้เราจะต้องเพิ่มประสิทธิภาพในการการออกแบบวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน เพื่อลดผลกระทบของสัญญาณรบกวนของสัญญาณด้านส่ง และเพิ่มการตรวจสอบสัญญาณพัลส์ เนื่องจากตัวกรองสัญญาณเป็นแบบเชิงเส้น เอาต์พุตที่ส่งออก $y(t)$ แสดงด้วย สมการ (2.4)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y(t) = g_0(t) + n(t) \quad (2.4)$$

เมื่อ $g_0(t)$ และ $n(t)$ เป็นสัญญาณและองค์ประกอบของสัญญาณรบกวนที่เกิดจากสัญญาณอินพุต $x(t)$ ตามลำดับ โดยต้องกำหนดให้ ส่วนประกอบของสัญญาณเอาต์พุตที่ต้องการต้องมีค่ามากกว่า ส่วนประกอบของสัญญาณรบกวน

$$g_0(t) > n(t)$$

นั่นคือ การที่สัญญาณเอาต์พุตมีกำลังชั่วขณะ (instantaneous power in output signal) ของสัญญาณเอาต์พุต $g_0(t)$ วัดที่เวลา $t = T$ มีขนาดใหญ่เท่าที่จะเป็นไปได้ เมื่อเทียบกับพลังงานเฉลี่ย (average power of output noise) ของสัญญาณรบกวนเอาต์พุต $n(t)$ จะได้สมการ ค่าสูงสุดของสัญญาณพัลส์ต่อสัญญาณรบกวน (peak pulse signal to noise ratio) คือ $\left(\frac{S}{N}\right)_{Out}$ ตาม สมการ (2.5)

$$\eta = \frac{|g_0(T)|^2}{E[n^2(t)]} \quad (2.5)$$

โดย $|g_0(T)|^2$ คือ กำลังงานชั่วขณะในสัญญาณเอาต์พุต

E คือ ตัวแปรที่เกิดจากการประมาณ

$E[n^2(t)]$ คือ ค่ากำลังเฉลี่ยสัญญาณรบกวนเอาต์พุต

โดยข้อกำหนดที่ต้องการคือผลตอบสนองของสัญญาณอิมพัลส์ $h(t)$ ของตัวกรองดังกล่าวคือเอาต์พุตของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนในสมการที่ (2.5) มีค่าสูงสุด

ให้ $G(f)$ แทน ฟูเรียทรานฟอร์ม (fourier transform) ของสัญญาณ $g(t)$ และ $H(f)$ แทน ผลตอบสนองเชิงความถี่ของตัวกรอง (the frequency response of the filter) ดังนั้น ค่า fourier transform ของสัญญาณเอาต์พุต $g_0(t)$ จะเท่ากับ $H(f)G(f)$ และ $g_0(t)$ ถูกกำหนดโดยค่า inverse fourier Transform แสดงดัง สมการ (2.6)

$$g_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (2.6)$$

ดังนั้น เมื่อตัวกรองเอาต์พุตถูกเลือกที่ เวลา $t = T$ จะได้เป็นค่า $|g_o(T)|^2$ ในกรณีที่ช่องสัญญาณปราศจากสัญญาณรบกวนช่องสัญญาณ (absence of channel noise) ตาม สมการ (2.7)

$$|g_o(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2 \quad (2.7)$$

พิจารณาต่อถึงผลกระทบของตัวกรองสัญญาณเอาต์พุตเนื่องจากสัญญาณรบกวน $w(t)$ เพียงอย่างเดียว ความหนาแน่นของสเปกตรัมกำลัง (the power spectral density, $S_N(f)$) ของสัญญาณรบกวนเอาต์พุต $n(t)$ เท่ากับ ความหนาแน่นของสเปกตรัมกำลังของสัญญาณรบกวนอินพุต $w(t)$ เวลาการตอบสนองทางขนาดกำลังสอง $|H(f)|^2$ เนื่องจาก $w(t)$ คือความหนาแน่นสเปกตรัมกำลัง $N_0/2$ แสดงดัง สมการ (2.8)

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \quad (2.8)$$

ดังนั้น ค่ากำลังเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนเอาต์พุต $n(t)$ จึงได้เป็น

$$\begin{aligned} E[n^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \end{aligned} \quad (2.9)$$

ดังนั้น เมื่อ แทนสมการที่ (2.7) และ สมการที่ (2.9) ลงในสมการ (2.5) จะสามารถเขียนใหม่ แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่าสูงสุดของสัญญาณพัลส์ต่อสัญญาณรบกวนได้ดังสมการ (2.10)

$$\eta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (2.10)$$

จากสมการ (2.10) จะพบปัญหาสำหรับการกำหนด $G(f)$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง จากผลตอบสนองเชิงความถี่ $H(f)$ ของตัวกรองความถี่ที่ทำให้ η มีค่าสูงสุด เพื่อหาวิธีการแก้ไขปัญหการเพิ่มประสิทธิภาพนี้ ผลทางคณิตศาสตร์ของ Schwarz 's inequality จึงถูกนำมาใช้ที่ตัวส่วนของสมการ (2.10)

อนุพันธ์ของของความไม่เท่ากันของ Schwarz (Schwarz 's inequality) กล่าวไว้ว่า ถ้ามีฟังก์ชันที่ซับซ้อนสองฟังก์ชัน คือ $\phi_1(x)$ และ $\phi_2(x)$ ในตัวแปรจริง x ฟังก์ชันจะสอดคล้องตามเงื่อนไขดังสมการต่อไปนี้คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2 dx < \infty$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2 dx < \infty$$

จากนั้นจะเขียนสมการใหม่ได้ตามสมการ (2.11)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x)\phi_2(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2 dx \quad (2.11)$$

สมการที่ (2.11) จะเท่ากัน ถ้า

$$\phi_1(x) = k\phi_2^*(x) \quad (2.12)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ และเครื่องหมาย $*$ หมายถึง คู่สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugation)

กลับไปปัญหาในสมการ (2.11) โดยใช้ความไม่เท่ากันของ Schwarz ในสมการที่ (2.11) และกำหนด $\phi_1(x) = H(f)$ และ $\phi_2(x) = G(f) \exp(j\pi fT)$ ตัวเศษในสมการที่ (2.10) เขียนใหม่เป็น

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi fT)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (2.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (2.10) หาค่าใหม่ของอัตราส่วนค่าสูงสุดของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนได้ดังสมการ (2.14)

$$\eta \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (2.14)$$

โดยด้านขวามือของความสัมพันธ์นี้ไม่ได้ขึ้นอยู่กับผลตอบสนองเชิงความถี่ $H(f)$ ของตัวกรองความถี่ แต่เฉพาะในสัญญาณพลังงาน และความหนาแน่นของสเปกตรัมกำลังของสัญญาณรบกวน ดังนั้นค่าสูงสุดของสัญญาณพัลส์ต่อสัญญาณรบกวน η จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $H(f)$ ถูกเลือกให้มีค่าเท่ากับ นั่นคือ

$$\eta_{\max} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (2.15)$$

ในทำนองเดียวกัน $H(f)$ กำหนดค่าที่เหมาะสมโดย $H_{opt}(f)$ หาค่าที่เหมาะสมนี้โดยใช้สมการที่ (2.12) หาค่าได้ ดังนี้

$$H_{opt}(f) = kG^*(f) \exp(-j2\pi fT) \quad (2.16)$$

โดยที่ $G^*(f)$ คือ คู่สังยุคเชิงซ้อนของสมการ fourier transform ของสัญญาณอินพุต $g(t)$ และ k คือ scaling factor ของมิติที่เหมาะสม ความสัมพันธ์นี้ระบุข้อยกเว้นสำหรับ ตัวคูณ (factor) $k \exp(j2\pi fT)$ ผลตอบสนองเชิงความถี่ของตัวกรองที่เหมาะสมนี้ เหมือนกับคู่สังยุคเชิงซ้อนของสมการ fourier transform ของสัญญาณอินพุต

สมการที่ (2.16) ระบุตัวกรองที่เหมาะสมในเชิงความถี่ สำหรับในเชิงเวลาทำได้โดยใช้ฟูเรียร์ทรานฟอร์มผกผัน (inverse fourier transform) ของ $H_{opt}(f)$ ในสมการที่ (2.16) ที่จะให้ผลตอบสนองอิมพัลส์ (impulse response) ของตัวกรองที่เหมาะสมตาม สมการ (2.17)

$$h_{opt}(t) = k \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) \exp[-j2\pi f(T-t)] df \quad (2.17)$$

เนื่องจากสัญญาณที่แท้จริง $g(t)$ มี $G^*(f) = G(-f)$ สามารถเขียนสมการที่ (2.17) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 h_{opt}(t) &= k \int_{-\infty}^{\infty} G^*(-f) \exp[-j2\pi f(T-t)] df \\
 &= k \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) \exp[-j2\pi f(T-t)] df \\
 &= kg(T-t)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

สมการที่ (2.18) แสดงถึงผลตอบสนองสัญญาณอิมพัลส์ของตัวกรองที่เหมาะสม โดยปราศจากค่า scaling factor, k เป็นค่า times reversed และ ส่วนประวิง (delayed version) ของสัญญาณอินพุต $g(t)$ นั่นคือ “แมตซ์” กับสัญญาณอินพุต ตัวกรองสัญญาณแบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาที่กำหนดไว้ในลักษณะนี้เรียกว่า แมตซ์ฟิลเตอร์ ซึ่งจะสังเกตได้ว่า แมตซ์ฟิลเตอร์ ที่ได้ เป็นสมมุติฐานที่ได้จากการป้อนสัญญาณรบกวน $w(t)$ แบบหยุดนิ่งและสัญญาณรบกวนขาวมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความหนาแน่นของสเปกตรัมกำลัง $N_0/2$

2.2.1 คุณสมบัติของแมตซ์ฟิลเตอร์

เป็นที่ทราบกันว่าวงจรกรองความถี่ผ่านที่ แมตซ์ กับสัญญาณพัลส์ $g(t)$ ซึ่งมีคาบเวลา T ถูกกำหนดคุณลักษณะ โดยผลตอบสนองของอิมพัลส์ที่เป็นเวลาตรงข้าม (times reversed) และ ส่วนประวิงเวลา (delayed version) ของสัญญาณอินพุต $g(t)$ แสดงโดยสมการ

$$h_{opt}(t) = kg(T-t)$$

ผลตอบสนองของอิมพัลส์ $h_{opt}(t)$ นี้อาจแสดงในรูปแบบอื่นๆ อาจไม่มีค่าเวลาประวิง T (the delay T) และค่า scaling factor k โดยคลื่นสัญญาณพัลส์ $g(t)$ จะส่งผ่านตัวกรองสัญญาณ แมตซ์ฟิลเตอร์ ในขอบข่ายของความถี่ แมตซ์ฟิลเตอร์จะถูกกำหนดโดยลักษณะของผลตอบสนองทางความถี่ ที่ไม่มีส่วนประกอบของเวลาประวิง (delayed factor) ค่าคู่สังยุคเชิงซ้อนของสมการ Fourier transform แสดงดังสมการ

$$H_{opt}(f) = kG^*(f) \exp(-j2\pi fT)$$

ความสำคัญที่สุดของการคำนวณประสิทธิภาพการทำงานของระบบการประมวลผลสัญญาณโดยใช้แมตซ์ฟิลเตอร์ ที่อาจจะเป็นไปได้ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- ค่าสูงสุดของสัญญาณพัลส์ต่อสัญญาณรบกวนของแมตซ์ฟิลเตอร์ ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของพลังงานสัญญาณต่อความหนาแน่นของสเปกตรัมกำลังของสัญญาณรบกวนสีขาวที่อินพุตของตัวกรองสัญญาณ เพื่อแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัตินี้ เมื่อพิจารณา แมตซ์ฟิลเตอร์ ที่รู้ค่า สัญญาณ $g(t)$ ผลลัพธ์ของการทำ fourier transform แมตซ์ฟิลเตอร์ เอาต์พุต $g_0(t)$ คือ

$$\begin{aligned} G_0(f) &= H_{opt}(f)G(f) \\ &= kG^*(f)G(f)\exp(-j2\pi fT) \\ &= k|G(f)|^2 \exp(-j2\pi fT) \end{aligned} \quad (2.19)$$

การใช้สมการที่ (2.19) ในสมการสำหรับ inverse fourier transform เราสามารถหาเอาต์พุตของแมตซ์ฟิลเตอร์ที่เวลา $t = T$ คือ

$$\begin{aligned} g_0(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(f)\exp(j2\pi fT)df \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} |G_0(f)|^2 df \end{aligned}$$

ตามทฤษฎีพลังงานของเลย์ไคฟ (Rayleigh's energy) อินทิเกรทของสเปกตรัมขนาดกำลังสองของสัญญาณพัลส์ที่ส่วนที่เกี่ยวกับความถี่มีค่าเท่ากับพลังงานสัญญาณ E

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_0(f)|^2 df$$

ดังนั้น

$$g_0(T) = kE \quad (2.20)$$

แทนสมการที่ (2.16) ลงในสมการที่ (2.9) จะพบว่ากำลังเฉลี่ยของเอาต์พุตของสัญญาณรบกวนเป็น

$$\begin{aligned} E[n^2(t)] &= \frac{k^2 N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_0(f)|^2 df \\ &= k^2 N_0 E / 2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

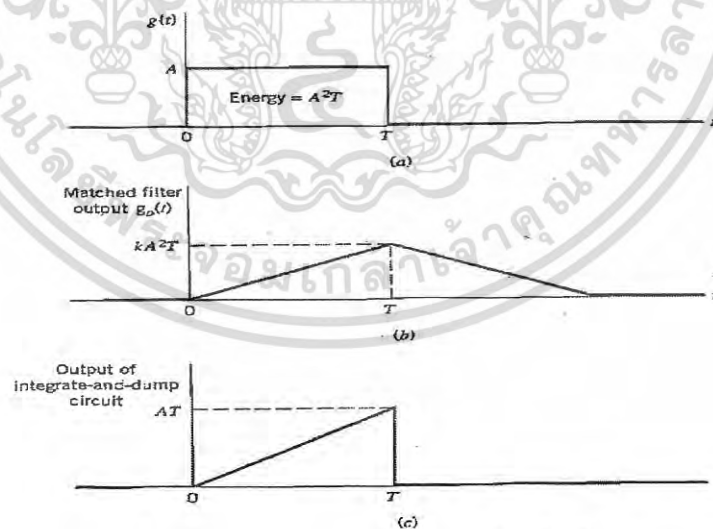
โดยใช้ ทฤษฎีพลังงานของ Rayleigh's อีกครั้ง จะได้ค่าสูงสุดของสัญญาณพัลส์ต่อสัญญาณรบกวนมีดังสมการ (2.22) ซึ่ง สมการนี้คือ matched filter design criterion

$$\eta_{\max} = \frac{(kE)^2}{(k^2 N_0 E/2)} = \frac{2E}{N_0} \quad (2.22)$$

จากสมการที่ (2.22) เราจะเห็นว่า การอาศัยรูปแบบของคลื่นของสัญญาณอินพุต $g(t)$ ได้ถูกลบออกอย่างสมบูรณ์โดยใช้ แมตซ์ฟิลเตอร์ ดังนั้นในการทดลองได้ใช้ความสามารถของแมตซ์ฟิลเตอร์ในด้านรับเพื่อกำจัดสัญญาณรบกวน เราพบว่าสัญญาณทั้งหมดที่มีพลังงานเดียวกันจะมีประสิทธิภาพเท่าเทียมกัน สังเกตได้ว่าพลังงานสัญญาณ E ในหน่วยของจูล (joules) และสเปกตรัมความหนาแน่นของสัญญาณรบกวน $N_0/2$ ในหน่วยวัตต์ต่อเฮิรตซ์ ดังนั้น อัตราส่วน $2E/N_0$ ไม่มีมิติ (dimensionless) อย่างไรก็ตาม ปริมาณทั้งสอง มีความหมายทางกายภาพที่แตกต่างกัน อ้างถึง E/N_0 ซึ่งเป็น อัตราส่วนของสัญญาณพลังงาน ต่อความหนาแน่นสเปกตรัมของสัญญาณรบกวน

ตัวอย่างแมตซ์ฟิลเตอร์สำหรับสัญญาณรูปสี่เหลี่ยม (Matched Filter for Rectangular pulse)

พิจารณาสัญญาณ $g(t)$ ในรูปแบบของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม (rectangular pulse) มีขนาด (amplitude) A และมีช่วงเวลา T ดังแสดงในรูปที่ 2.3(a)



รูปที่ 2.3 รูปแบบของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม [1]

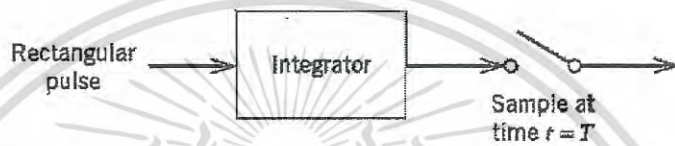
(a) สัญญาณอินพุต (b) เอาต์พุตตัวกรองแบบแมตซ์ (c) เอาต์พุตของวงจรรวม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในตัวอย่างนี้ผลตอบสนองของสัญญาณอิมพัลส์ $h(t)$ ของแมตช์ฟิลเตอร์ (Match Filter) มีรูปคลื่นสัญญาณรูปแบบเดียวกับ กับสัญญาณเดิม สัญญาณเอาต์พุต $g_0(t)$ ของแมตช์ฟิลเตอร์ เกิดผลตอบสนองต่อสัญญาณอินพุตที่มีรูปแบบของสัญญาณเป็นสามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 2.3(b)

ค่าสูงสุดของสัญญาณเอาต์พุต $g_0(t)$ จะเท่ากับ kA^2T ซึ่งเป็นพลังงานของสัญญาณอินพุต $g(t)$ โดย ถูกปรับ ด้วย scaling factor k ซึ่งค่าสูงสุดเกิดเวลา ที่ $t=T$ แสดงดังรูปที่ 2.3(b)

สำหรับเงื่อนไขพิเศษสำหรับ สัญญาณรูปสี่เหลี่ยมนี้ ตัวกรองแบบแมตช์ อาจจะถูกสร้างขึ้น โดยใช้ วงจรที่รู้จักกันดี เช่น วงจรรวมและวงจรมัด (integrate-and-dump circuit) บล็อกไดอะแกรมแสดงในรูป ที่ 2.4



รูปที่ 2.4 วงจรรวม (integrate-and-dump circuit) [1]

การคำนวณภายใต้พื้นที่ รูปสี่เหลี่ยม และ เอาต์พุตที่ถูกสุ่มตัวอย่างที่เวลา $t=T$ โดยที่ T คือ คาบเวลาของสัญญาณพัลส์ในทันทีหลังจากที่ $t=T$ วงจรรวมจะกลับสู่สภาพเริ่มต้น จึงเป็นชื่อของวงจร รูปที่ 2.3(c) แสดงให้เห็นถึงสัญญาณเอาต์พุตของวงจรรวมสำหรับสัญญาณสี่เหลี่ยม ของรูป 2.3(a) ซึ่งจะเห็นว่าสำหรับ $0 \leq t \leq T$ สัญญาณเอาต์พุตของวงจรนี้จะมีรูปแบบของสัญญาณเช่นเดียวกับสัญญาณ ทางด้านส่งของตัวกรองแบบแมตช์

2.3 ช่องสัญญาณไนสควิสในอุดมคติ

ตามที่ทราบกันดีว่า ระบบการสื่อสารใด ๆ มีแบนด์วิดท์ที่จำกัดในการส่งข้อมูลข่าวสาร นั่นคือ สัญญาณที่ถูกส่งไปถึงปลายทางที่รับจะต้องมีความแตกต่างเนื่องจากสัญญาณสัญญาณรบกวนต่างๆ ความแตกต่างดังกล่าวขึ้นอยู่กับความกว้างของแบนด์วิดท์ของช่องสัญญาณเปรียบเทียบกับอัตราสัญลักษณ์ของสัญญาณ (symbol rate in the signal) ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า การแทรกสอดทางสัญลักษณ์ (intersymbol interference ,ISI)

เงื่อนไขของการการไม่เกิด Intersymbol Interference ในระบบการส่งสัญญาณแบบเบสแบนด์ แสดงตามสมการ (2.3.1)

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} P(f - nR_b) = T \quad (2.3.1)$$

ในที่นี้เน้นที่ เกณฑ์ของไนท์ควิส (Nyquist criterion) สำหรับการส่งผ่านช่องสัญญาณเบสแบนด์โดยไม่มีสัญญาณรบกวน ส่วนฟังก์ชันของความถี่ $P(f)$ นี้ อ้างถึง ระบบโดยรวมซึ่งหมายถึง ตัวกรองด้านส่ง (transmit filter) ช่องสัญญาณ (channel) ตัวกรองด้านรับ (receiver filter) สอดคล้องตามสมการ

$$\mu p(f) = G(f)H(f)C(f)$$

เมื่อ μ เป็น scaling factor in amplitude change

$p(f), G(f), H(f), C(f)$ เป็น fourier transform ของ $p(t), g(t), h(t)$ และ $c(t)$ ตามลำดับ โดยมีการระบุฟังก์ชันของความถี่ $P(f)$ ในรูปแบบของฟังก์ชันรูปสี่เหลี่ยม แสดงตามสมการ

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W}, & -W < f < W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad (2.3.2)$$

$$= \frac{1}{2W} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

เมื่อ $\text{rect}(f)$ หมายถึงหน่วยทางขนาดของฟังก์ชันรูปสี่เหลี่ยม และ รองรับ กรณี $f = 0$ W เป็นแบนด์วิดท์ทั้งหมดของระบบ หาได้จาก

$$W = \frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2}$$

ตามเงื่อนไขในสมการ ถ้า ทำ fourier transform จะได้รูปสัญญาณ ที่ไม่มี intersymbol interference ถูกกำหนดโดย sinc function ดังสมการที่ (2.3.3)

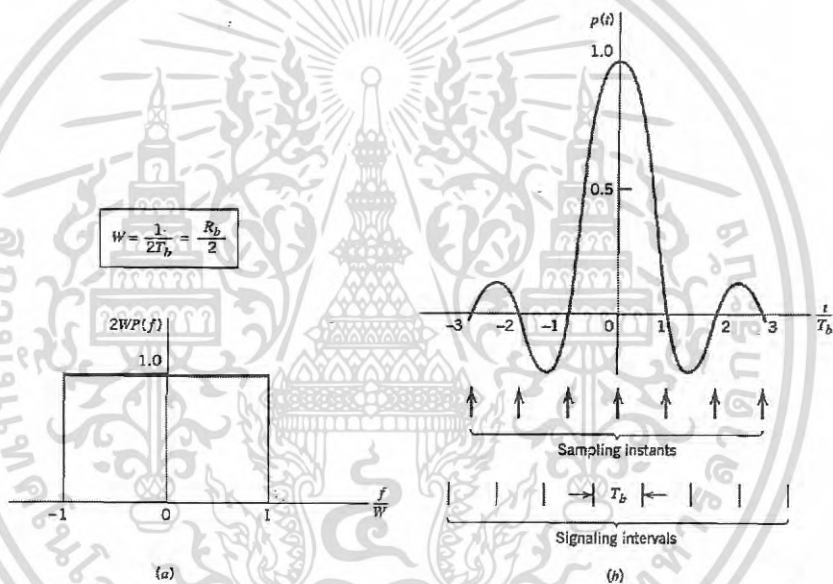
$$p(t) = \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt} = \text{sinc}(2Wt) \quad (2.3.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย ค่าพิเศษของ bit Rate $R = 2W$ เรียกว่า nyquist rate

W คือ nyquist bandwidth

ในลักษณะเดียวกันนี้ในขอบข่ายของความถี่ ระบบการส่งสัญญาณเบสแบนด์ ในอุดมคติสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ (2.3.2) ซึ่งเขียนแทนกันได้โดยขอบข่ายของเวลาตามสมการที่ (2.3.3) เป็นช่องสัญญาณไนสควิสในอุดมคติ (ideal nyquist channel) รูปที่ 2.5 แสดงภาพของ $P(f)$ และ $p(t)$ ตามลำดับ โดยรูปที่ 2.5 (a) แสดงผลตอบสนองทาง ขนาดเป็นรูปแบบปกติของฟังก์ชันความถี่ รูปที่ 2.5(b) แสดงผลตอบสนองของอิมพัลส์ของตัวกรองความถี่ต่ำผ่านในอุดมคติเป็นฟังก์ชันของ $p(t)$ ซึ่งมีผลตอบสนองทางขนาดของช่วงความถี่ผ่าน (passband magnitude) ขนาด $1/2 W$ และมีแบนด์วิธเท่ากับ W



รูปที่ 2.5 ผลตอบสนองทางขนาดเป็นรูปแบบปกติของฟังก์ชันความถี่ [1]

และแสดงผลตอบสนองของอิมพัลส์ของตัวกรองความถี่ต่ำผ่านในอุดมคติ

(a) ideal magnitude response (b) ideal pulse shape

2.4 สเปกตรัมของสัญญาณเรสต์โคไซน์

อ้างอิงสมการ (2.3.1) ถ้ากำหนดให้ ผลตอบสนองของความถี่โดยรวม $P(f)$ สอดคล้องตามเงื่อนไขของ ideal nyquist channel และจำกัดแถบความถี่ ที่ $[-W, W]$ ตามสมการ

$$P(f) + P(f - 2W) + P(f + 2W) = \frac{1}{W}, -W \leq f \leq W \quad (2.4.1)$$

จากสมการนี้สามารถเขียน สเปกตรัมของสัญญาณเรสต์โคไซน์ ได้โดยผลตอบสนองของความถี่ประกอบด้วยส่วนของความราบเรียบ (flat portion) และส่วนของ การม้วนตัวลง (rolloff portion) เป็นรูป sinusoidal ดังสมการ (2.4.2)

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} & \text{for } 0 \leq |f| < f_1 \\ \frac{1}{4W} \left(1 - \sin \frac{\pi(|f| - W)}{2W - 2f_1} \right) & \text{for } f_1 \leq |f| < 2W - f_1 \\ 0 & \text{for } |f| \geq 2W - f_1 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

ความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ของ f_1 และ bandwidth หาได้จาก

$$\alpha = 1 - \frac{f_1}{W} \quad (2.4.3)$$

โดย α เป็น rolloff factor และ transmission bandwidth, B_T หาได้จาก

$$B_T = 2W - f_1 = W(1 + \alpha)$$

โดยการคูณ $P(f)$ ด้วย $2W$ นำไปพล็อตรูปได้ ตามรูปที่ 2.6(a)

สำหรับ ค่าของ $\alpha = 0, 0.5, 1$ จะเห็นว่าฟังก์ชันของ $P(f)$ จะค่อยๆ เข้าสู่จุด cut off เมื่อเปรียบเทียบกับช่องสัญญาณในอุดมคติ ($\alpha = 0$) ดังนั้นจะทำให้ง่ายต่อการใช้ในทางปฏิบัติ สำหรับผลตอบสนองในขอบข่ายเวลา $p(t)$ ได้จากการทำ fourier transform ของ $P(f)$

ได้ตามสมการ

$$p(t) = \sin c(2Wt) \left(\frac{\cos 2\pi\alpha Wt}{1-16\alpha^2 W^2 t^2} \right) \quad (2.4.4)$$

จากนี้ นำไปพล็อตรูปได้ตามรูปที่ 2.6(b)

สำหรับ $\alpha = 0, 0.5, 1$ ผลตอบสนองทางเวลา $p(t)$ ประกอบด้วย 2 ตัวประกอบคือ $\sin c(2Wt)$ ซึ่งบอกลักษณะของ ช่องสัญญาณ Nyquist ในอุดมคติ และตัวประกอบที่สองที่ลดลงตาม $\frac{1}{|t|^2}$ สำหรับ $|t|$ ที่มีค่ามาก

โดยตัวประกอบตัวแรกคือ จุดข้ามตัดศูนย์ (zero crossing) ของ $p(t)$ ที่ตำแหน่งการสุ่มตัวอย่าง (sampling time) ที่ได้รับ อยู่ที่ $t = iT$ เมื่อ i เป็น integer มีค่าได้ทั้งบวกและลบ

ตัวประกอบต่อมาคือปลายของสัญญาณพัลส์ที่ต่ำกว่าที่ควรจะเป็นของช่องสัญญาณในสควิส ในอุดมคติ ฉะนั้นเพื่อไม่ให้เกิดข้อผิดพลาดในการสุ่มตัวอย่างได้

สำหรับ กรณีที่ $\alpha = 0$, การม้วนตัวลงของขนาดของ $p(t)$ น้อยที่สุด ที่ปลายคลื่น ดังนั้นค่าของสัญญาณรบกวน intersymbol ที่เกิดจากข้อผิดพลาดในระยะเวลาของการม้วนลง เพิ่มขึ้นจากศูนย์ถึงหนึ่ง



รูปที่ 2.6 ผลตอบสนองสำหรับความแตกต่างขององค์ประกอบการม้วนลงของสัญญาณ [1]

(a) ผลตอบสนองทางความถี่ (b) ผลตอบสนองทางเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไข $\alpha = 0$, ผลตอบสนองของความถี่ จากสมการ (2.4.4) เขียนใหม่ได้ดังสมการ (2.4.5)

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{4W} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi f}{2W}\right) \right], & 0 < |f| < 2W \\ 0, & |f| \geq 2W \end{cases} \quad (2.4.5)$$

ในส่วนของ $p(t)$ เขียนใหม่ได้ดังสมการ (2.4.6)

$$p(t) = \frac{\sin c(4Wt)}{1 - 16W^2t^2} \quad (2.4.6)$$

ผลตอบสนองทางเวลาดังกล่าวแล้วนี้ มีคุณสมบัติที่น่าสนใจ 2 ประการคือ

1. ที่เวลา $t = \pm T_b/2 = \pm 1/4W$, $p(t) = 0.5$ วัตที่ครึ่งของขนาดของสัญญาณที่มีความกว้างของบิต เท่ากับ T_b
2. มีค่า crossing zero ที่เวลา $t = \pm 3T_b/2, \pm 5T_b/2$ นอกเหนือไปจากค่าปกติศูนย์ ในช่วงเวลาการสุ่มตัวอย่างที่ $t = \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$

ซึ่งคุณสมบัติทั้งสองนี้มีประโยชน์อย่างมากในการแยกสัญญาณเวลาจากสัญญาณที่ได้รับ สำหรับวัตถุประสงค์ของการทำข้อมูลให้ตรงกันนี้ อย่างไรก็ตาม ราคาค่าใช้จ่ายสำหรับคุณสมบัติที่ต้องการ ที่พึงประสงค์นี้คือการใช้สองช่องแบนด์วิดท์ที่จำเป็น ที่ต้องใช้สำหรับช่องสัญญาณ nyquist ในอุดมคติอย่างเหมาะสม

2.5 ทฤษฎีเบสเซลโพลีโนเมียล

เบสเซลโพลีโนเมียล [12] เป็นสมการ orthogonal ซึ่งตอบสนองสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$a) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x+2) \frac{dy}{dx} = n(n+1)y \quad (2.5.1)$$

เมื่อ n มีค่าเป็น $1, 2, 3, \dots$ ซึ่งโดยปกติจะขยายคำนิยามนี้ในทางลบ โดยการกำหนดให้ $y_{-n}(x)$ เป็น $y_{n-1}(x)$ ดังนั้น $y_{-1}(x) = y_0(x)$, $y_{-2}(x) = y_1(x)$, เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ในทำนองเดียวกันถ้ากำหนดให้เงินเนอไรซ์เบสเซลโพลีโนเมียล $y_n(x, a, b)$ เป็นโพลีโนเมียลกำลัง n และด้วยค่าคงที่ที่เป็น 1 ซึ่งตอบสนองสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$b) x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (ax + b) \frac{dy}{dx} = n(n + a - 1)y \quad (2.5.2)$$

เมื่อ n เป็น non-negative integer, a ไม่เป็น negative integer หรือเป็นศูนย์ และ b ไม่เท่ากับศูนย์และ เงื่อนไขพิเศษ เมื่อ $a = b = 2$ เบสเซลโพลีโนเมียลจะมีค่าเหมาะสม จากสมการเชิงอนุพันธ์ ที่ (2.5.1) สามารถเขียนสูตรใหม่ได้ สมการที่ชัดเจนมากขึ้นคือ

$$c) y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \quad (2.5.3)$$

$$= 1 + n(n+1)\frac{x}{2} + \dots + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} + \frac{2n!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

เพื่อความสะดวกในการอ้างอิง สามารถแสดงรายการของสมการ เบสเซลโพลีโนเมียล ได้ดังสมการ (2.5.4)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x + 1 \\ y_2(x) &= 3x^2 + 3x + 1 \\ y_3(x) &= 15x^3 + 15x^2 + 6x + 1 \\ y_4(x) &= 105x^4 + 105x^3 + 45x^2 + 10x + 1 \\ y_5(x) &= 945x^5 + 945x^4 + 420x^3 + 105x^2 + 15x + 1 \\ y_6(x) &= 10395x^6 + 10395x^5 + 4725x^4 + 1260x^3 + 210x^2 + 21x + 1 \\ y_7(x) &= 135135x^7 + 135135x^6 + 62370x^5 + 17325x^4 + 3150x^3 + 378x^2 + 28x + 1 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

โดย โพลีโนเมียล อาจหาได้ง่าย จากความสัมพันธ์ของ

$$y_{n+1} = (2n+1)xy_n + y_{n-1} \quad (2.5.5)$$

และอีกสมการหนึ่ง ที่นิยมใช้ในทางวิศวกรรมไฟฟ้า ที่เรียกกันในชื่อเบสเซลโพลีโนเมียลแบบย้อนกลับ (reverse Bessel polynomials) แสดงดังสมการ (2.5.6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\theta_n(x) = x^n y_n \left(\frac{1}{x} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(2n+k)!}{(n-k)! k!} \frac{x^k}{2^{n-k}} \quad (2.5.6)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ ที่หาได้จะเหมือนกัน แต่เรียงอยู่หน้า สมการลำดับที่กลับกัน ตัวอย่าง สมการของเบสเซลโพลิโนเมียลจะอยู่ในรูปของสมการ (2.5.7)

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= x + 1 \\ \theta_2(x) &= x^2 + 3x + 3 \\ \theta_3(x) &= x^3 + 6x^2 + 15x + 15 \\ \theta_4(x) &= x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 105x + 105 \\ \theta_5(x) &= x^5 + 15x^4 + 105x^3 + 420x^2 + 945x + 945 \\ \theta_6(x) &= x^6 + 21x^5 + 210x^4 + 1260x^3 + 4725x^2 + 10395x + 10395 \\ \theta_7(x) &= x^7 + 28x^6 + 378x^5 + 3150x^4 + 17325x^3 + 62370x^2 + 135135x + 135135 \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

โดยเบสเซลโพลิโนเมียลแบบย้อนกลับนี้จะนำไปใช้ในการออกแบบตัวกรองสัญญาณทาง อิเล็กทรอนิกส์

ข้อดีของเบสเซลโพลิโนเมียลจะพบว่า ค่าโพล (pole) ที่ได้มาจากการใช้สมการเบสเซลโพลิโนเมียล จะอยู่ในครึ่งซ้ายของวงกลมหนึ่งหน่วยเสมอ ซึ่งจะสามารถบอกได้เลยว่าเมื่อนำสมการนี้ไปใช้ในระบบ ระบบจะมีความเสถียร

สมการของเบสเซลโพลิโนเมียลจะให้สัญญาณที่มีเฟสเป็นเส้นตรง (linear phase) ซึ่งคุณสมบัติของ เฟสที่เป็นเส้นตรงนั้นจะให้ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ (Impulse response) ที่มีความสมมาตร เมื่อนำสมการนี้ไปสร้างสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ รูปสัญญาณที่ได้จะมีความสมมาตรตามไปด้วย

2.6 ทฤษฎีควเบสเซลโพลิโนเมียล

เงินเนอไรซ์เบสเซลโพลิโนเมียล $y_n(a, b, c)$ เป็นโพลิโนเมียลที่มีดีกรี n และมีเทอมที่เป็น ค่าคงที่เป็น 1 (unity) ซึ่งตอบสนองสมการเชิงอนุพันธ์ดังสมการ (2.5.2)

ถ้าทำอนุพันธ์สมการ (2.5.2) จะได้สมการ (2.6.1)

$$x^2 \frac{d^2 y'}{dx^2} + (ax + 2x + b) \frac{dy'}{dx} = n(n + a + 1) y' \quad (2.6.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีศึกษา กำหนดเงื่อนไขที่ดีที่สุดให้ $a = 0, -1, -2, \dots$ และให้ α เป็น weight function ดังนั้นสมการสามารถแสดงในเทอมของ ฟังก์ชัน $y(x, a)$ ดังสมการ

$$y(x, a) = x^a \left(\frac{1}{a} + \frac{x}{a(a+1)} + \frac{x^2}{a(a+2)} + \dots \right) \quad (2.6.2)$$

The classical generalized Bessel polynomials ถูกกำหนดเป็น

$$y_n(s, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^n (-n)_k \frac{(\alpha + n - 1)_k}{k!} \left(-\frac{s}{\beta}\right)^k \quad (2.6.3)$$

เมื่อ

$$\frac{(-n)_k}{k!} = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! k!}$$

ในกรณีนี้ นำฟังก์ชันพิเศษของควิบเบสเซลโพลิโนเมียล (q-Bessel polynomial) มาใช้ในการออกแบบ แมตซ์ฟิลเตอร์ สมการควิบเบสเซลโพลิโนเมียล [5] แสดงตามสมการที่ (2.6.4)

$$y_n(s, \alpha, \beta, q) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(-n)_k (a + n - 1)_k}{k! \beta^k} \right]_q \left(\frac{-s}{\beta} \right)^k \quad (2.6.4)$$

จาก (2.6.4) กำหนดให้ $\alpha = \beta = 2$

ดังนั้น สมการ (2.6.4) เขียนใหม่เป็นกลายเป็น classical q-Bessel polynomial [6]

ในสมการ (2.6.5)

$$y_n(s, 2, 2, q) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(-n)_k (n+1)_k}{k!} \right]_q \left(\frac{-s}{2} \right)^k \quad (2.6.5)$$

เมื่อ

$$(n+1)_k = \frac{(n+k)!}{n!}$$

จาก (2.6.5) เขียน สมการใหม่ ได้ในรูปแบบ ของการกระจายเครื่องหมาย (fractional notation) คือ

$$y_n(s, 2, 2, q) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(n+k)_q!}{(n-1)_k!} \right] \cdot \frac{1}{(k)_q!} \cdot \frac{1}{2^k} s^k \quad (2.6.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ไม่เป็นลบ จำนวนเต็ม $(n)_q$ สามารถหาได้จาก

$$(n)_q = \frac{(1-q^n)}{1-q}; 0 < q < 1$$

และ กระจาย $[n]_q!$ ได้ดังนี้

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q (n-1)_q \dots [1]_q \dots \dots \dots \text{if } n \geq 1 \\ 1 \dots \dots \dots \text{if } n = 0 \end{cases}$$

ถ้า integer k มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ n ; $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}$

จาก q-pochammers symbol, $\{a\}_n = \prod_{m=0}^{n-1} (a+m)_q$

Inverse q-Bessel polynomial, $\theta_{2,q}(s) = s^n y_{n,q}\left(\frac{1}{s}\right)$

$$\theta_{2,q}(s) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)_q!}{(n-k)_q! (k)_q! 2^k} s^{n-k} \tag{2.6.7}$$

$\theta_{2,q}(s)$ เป็นสมการ อันดับ 2 ของ q-Bessel polynomial โดย $n=2$ ในสมการ (2.6.7)

$$\theta_{2,q}(s) = s^2 + \frac{(1+q)(1+q+q^2)}{2} s + \frac{(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)}{4} \tag{2.6.8}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7 สรุป

ในระบบการสื่อสารใดๆ มีแบนด์วิดท์ที่จำกัด ในการส่งข้อมูลข่าวสาร นั่นคือสัญญาณที่ถูกส่งไปถึงปลายทางที่รับสัญญาณ จะมีความแตกต่างเนื่องจากสัญญาณรบกวนต่างๆ ความแตกต่างดังกล่าวขึ้นอยู่กับความกว้างของแบนด์วิดท์ของช่องสัญญาณเปรียบเทียบกับอัตราสัญลักษณ์ของสัญญาณ (symbol rate in the signal) ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า การแทรกสอดทางสัญลักษณ์ (intersymbol interference ,ISI) ในบทวิจัยนี้ศึกษา การขจัดสัญญาณรบกวนทางด้านเอาต์พุตของเครื่องรับสัญญาณ โดยใช้แมตซ์ฟิลเตอร์ เป็นเครื่องมือ บนพื้นฐานของบนพื้นฐานของเบสเซลโพลิโนเมียล (Bessel polynomial) ซึ่งมีข้อได้เปรียบที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น และ คิวเบสเซลโพลิโนเมียลที่มีข้อได้เปรียบที่ ซึ่งสามารถปรับพารามิเตอร์ได้ และใช้สัญญาณ สัญญาณเรสต์โคไซน์ กำหนดโดย sinc function ตามเงื่อนไขของ ideal nyquist channel



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การออกแบบสัญญาณทดสอบที่เป็นเฟสเชิงเส้น โดยใช้สมการของเบสเซลโพลิโนเมียล

3.1 บทนำ

การออกแบบวงจรกรองความถี่แอนาล็อกต่างๆ มีข้อคำนึงถึงคุณสมบัติที่สำคัญคือ การมีเฟสเป็นเชิงเส้น (linear phase) ซึ่งปกติขึ้นอยู่กับวิธีการประมาณค่าที่นำมาใช้ออกแบบและฟังก์ชันที่นำมาออกแบบวงจรกรองความถี่นั้น ในวิทยานิพนธ์นี้เริ่มศึกษาจากการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วนในขอบข่ายเวลา เพื่อให้ได้ผลตอบสนองต่อสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ (sine-squared pulse) [11] ที่ดีที่สุด เป็นกรณีศึกษาของการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วนของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในขอบข่ายของเวลา (the time domain sine-squared pulse) [13][15] ของสมการฟังก์ชันเศษส่วน (transfer function) ของระบบ ซึ่งผลตอบสนองที่ได้จะต้องใกล้เคียงกับผลตอบสนองของฟังก์ชันในอุดมคติมากที่สุด การประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วนดำเนินการประมาณบนพื้นฐานของสมการเบสเซลโพลิโนเมียล (Bessel polynomial) โดยได้ศึกษาวิธีการประมาณฟังก์ชันเพื่อหาสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสมหลายวิธี เช่น วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square) วิธีโมเมนต์ (moments approximation method) และวิธี rational transform approximation และวิธีอื่นๆ สำหรับงานวิจัยที่ได้นำเสนอในงานวิชาการแล้วนี้ [7] ได้เสนอวิธีการใหม่ในการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันของสมการเศษส่วน (rational function) มีตัวส่วนเป็นเบสเซลโพลิโนเมียล (Bessel polynomial) ที่มีเฟสเป็นเส้นตรง (linear phase) แล้วจึงทำการประมาณหาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษที่เหมาะสม ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square) เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสม ดังจะนำเสนอในรายละเอียดต่อไป

3.2 สัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ

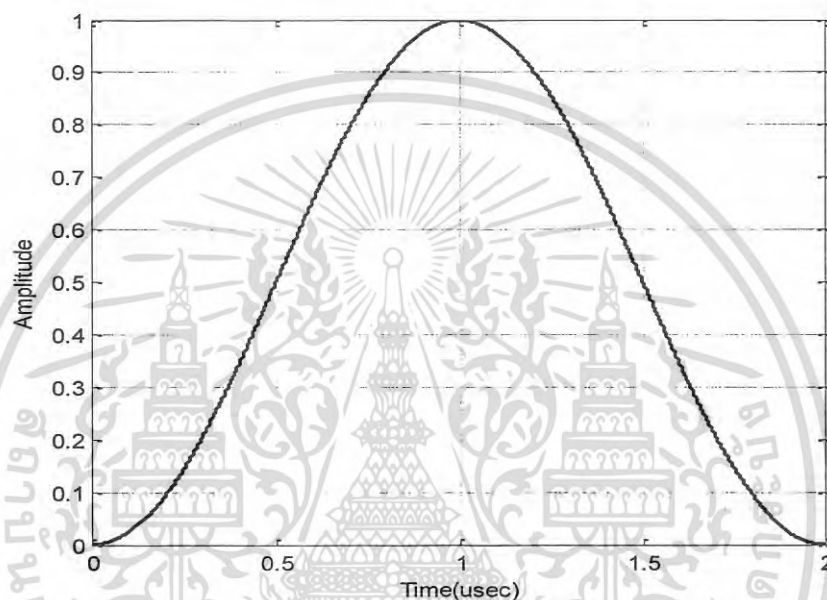
สัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์เป็นสัญญาณที่นิยมใช้เป็นสัญญาณทดสอบในระบบการส่งสัญญาณสำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้นำสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ดังกล่าวมาเป็นสัญญาณทดสอบในระบบการส่งเบสแบนด์ในรูปของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในขอบข่ายของเวลาแต่เนื่องจากสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติไม่สามารถสร้างเป็นวงจรจริงในระบบได้ จึงต้องทำการประมาณสมการเพื่อการสร้างวงจรจริงในระบบ

สัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติแสดงโดยสมการ (3.1)

$$h(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) ; 0 \leq t \leq 2\tau \quad (3.1)$$

จากสมการ (3.1) สัญญาณในอุดมคติมีค่าเฉลี่ยเริ่มที่ $t=0$ มีขนาดของสัญญาณเป็น unity มีค่าเป็น 1 ดังแสดงในรูปที่ 3.1

โดย 2τ เป็นแบนวิทช์ของสัญญาณความถี่ต่ำ



รูปที่ 3.1 สัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ

การประมาณลักษณะความกว้างและทางขนาดของสัญญาณที่มีความผิดเพี้ยนทางเฟส เราจะพิจารณาสมการเบสเซลโพลิโนเมียล y_n ของอันดับ n ค่าสัมประสิทธิ์เชิงเส้นจะแสดงดังสมการ (3.2)

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \quad (3.2)$$

อันดับที่ 1 ถึง อันดับที่ 7 ของสมการเบสเซลโพลิโนเมียลแสดงไว้ ตามสมการ (2.5.4)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยทั่วไปสมการฟังก์ชันเศษส่วนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของโพลีโนเมียล คือ

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \quad (3.3)$$

$$H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\alpha s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\beta s^n + \beta_{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0} \quad (3.4)$$

โดยที่ $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นโพลีโนเมียลของตัวเศษและโพลีโนเมียลของตัวส่วนตามลำดับ m เป็นอันดับของโพลีโนเมียลตัวเศษ และ n เป็นอันดับของโพลีโนเมียลตัวส่วน

โดยที่ อันดับของ $n \geq m$ อยู่หนึ่งอันดับ

α และ β เป็นสัมประสิทธิ์ที่เป็นตัวเลขจำนวนจริง

s เป็นตัวแปรความถี่เชิงซ้อน (complex-frequency variable)

ให้ตัวส่วน $Q_n(s)$ เป็นเบสเซลโพลีโนเมียลที่มีเฟสเป็นเชิงเส้นที่มีอันดับ n^{th} $P_m(s)$ เป็นเบสเซลโพลีโนเมียลที่มีอันดับ m^{th} และ $m = n$

การออกแบบ $Q_n(s)$ จะเริ่มต้นด้วยเบสเซลโพลีโนเมียลที่เป็นเฟสเชิงเส้นอันดับที่ 3 และ $P_m(s)$ ก็เป็นอันดับที่ 3 เช่นเดียวกันดังแสดงได้ในสมการที่ (3.4) สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{(s^2 + 3s + 3)(s + 1)} \quad (3.5)$$

วิธีการบวนการประมาณฟังก์ชัน ที่ได้สัญญาณที่มีผลตอบสนองของสัญญาณมีคุณลักษณะใกล้เคียงกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ นำเสนอในหัวข้อต่อไป

3.3 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

การหาสัมประสิทธิ์เทอมเศษนั้น เป็นการง่ายที่จะนำเอาวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมาเป็นเกณฑ์ในการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของเทอมต่างๆ เพื่อประมาณผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ และการประมาณค่าฟังก์ชันโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ฟังก์ชันที่ดีที่สุดของข้อมูล เพราะเกิดจากการเฉลี่ยค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลให้เหลือน้อยที่สุด ซึ่งวิธีกำลังสองน้อยที่สุดนั้น แสดงดังสมการ (3.6)

$$h^*(t) = \sum_{v=1}^m [2A_v e^{-\alpha_v t} \cos \beta_v t + 2B_v e^{-\alpha_v t} \sin \beta_v t] + \sum_{\mu=1}^m C_\mu e^{-\alpha_\mu t} \quad (3.6)$$

แต่ละค่าของ v จะเป็นค่าโพลของคู่สังยุคเชิงซ้อน และแต่ละค่าของ μ จะเป็นค่าโพลที่เป็นจำนวนจริง

$$E_2 = \int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)]^2 dt \quad ; t_1 < t < t_2 \quad (3.7)$$

โดยกำหนดให้

$$\frac{\partial E_2}{\partial A_v} = 0, \frac{\partial E_2}{\partial B_v} = 0, \frac{\partial E_2}{\partial C_v} = 0$$

จะได้ $2M + N$ สมการ :

$$\int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)] e^{-\alpha_v t} \cos \beta_v t dt = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)] e^{-\alpha_v t} \sin \beta_v t dt = 0 \quad (3.9)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)] e^{-\alpha_\mu t} dt = 0 \quad v=1,2,\dots,M, \mu=1,2,\dots,N \quad (3.10)$$

ตั้งแต่ว่าค่าของ A_v , B_v และ C_v ที่ประกอบอยู่ในสมการที่ (3.6) เรายังไม่ทราบค่า เราสามารถทำได้โดยง่ายด้วยการอินทิเกรต ในกลุ่มของสมการ $2M + N$ ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งเป็นค่าคงที่ ก็จะได้มาจากการอินทิเกรตของแต่ละรูปแบบตามสมการข้างล่างนี้

$$\int_{t_1}^{t_2} h(t) e^{-\alpha_v t} \cos \beta_v t dt = 0 \quad (3.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_{t_1}^{t_2} h(t) e^{-\alpha t} \sin \beta t \, dt = 0 \quad (3.12)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} h(t) e^{-\sigma t} \, dt = 0 \quad (3.13)$$

3.4 รูปแบบการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์

3.4.1 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงความถี่

วิธีการสร้างเริ่มจากนำสมการที่ (3.1) มาทำการแปลงลาปลาซ (laplace transform)

$$h(s) = L\{h(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt \quad ; s > 0 \quad (3.14)$$

จะได้

$$h(s) = \left(\frac{4}{s^2 + 4} \right) \left(\frac{1}{1 + \coth\left(\frac{s\tau}{2}\right)} \right) \quad (3.15)$$

จากสมการ (3.15) หาค่า $\coth\left(\frac{s\tau}{2}\right)$ ได้ดังสมการ (3.16)

$$\coth\left(\frac{s\tau}{2}\right) = \frac{2}{s} + \sum_{k:\text{even} \neq 0}^m \frac{4s}{s^2 + k^2 \pi^2} \quad (3.16)$$

แทนสมการ (3.16) ลงในสมการ (3.15) จะได้สมการที่นำไปใช้ในการคำนวณจริง

$$h(s) = \left(\frac{4}{s^2 + 4} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{s} + \sum_{k:\text{even} \neq 0}^m \frac{4s}{s^2 + k^2 \pi^2}} \right) \quad (3.17)$$

โดย m คือ ลำดับของสมการ และ k คือค่าเริ่มต้น ที่ต้องใช้จำนวนคู่ เช่น 0, 2, 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือกจำนวนลำดับที่ขึ้นต่ำมาคำนวณก่อน เพื่อสังเกตผลลัพธ์ของสมการ เช่น ประมาณสมการลำดับที่สอง แทนค่า $m=2$ ลงในสมการ (3.17)

$$h(s) = \left(\frac{4}{s^2 + 4} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{s} + \sum_{k:0,2}^m \frac{4s}{s^2 + k^2 \pi^2}} \right) \quad (3.18)$$

$$= \left(\frac{4}{s^2 + 4} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{s} + \left(\frac{4s}{s^2 + 0^2 \pi^2} + \frac{4s}{s^2 + 2^2 \pi^2} \right)} \right)$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$h(s) = \frac{(4s^3 + 157.914)}{(s^5 + 10s^4 + 43.478s^3 + 279.870s^2 + 157.914s + 947.482)} \quad (3.19)$$

ต่อมาทำการประมาณสมการลำดับที่สี่ แทนค่า $m=4$ ลงในสมการ (3.17)

$$h(s) = \left(\frac{4}{s^2 + 4} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{s} + \sum_{k:0,2,4}^4 \frac{4s}{s^2 + k^2 \pi^2}} \right) \quad (3.20)$$

$$= \left(\frac{4}{s^2 + 4} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{s} + \left(\frac{4s}{s^2 + 0^2 \pi^2} + \frac{4s}{s^2 + 2^2 \pi^2} + \frac{4s}{s^2 + 4^2 \pi^2} \right)} \right)$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$h(s) = \frac{(4s^2 + 24936.727s)}{s^7 + 30s^6 + 181.653s^5 + 2013.921s^4 + 7023.750s^3 + 45300.775s^2 + 24936.727s + 149620.364} \quad (3.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการศึกษาจะพบว่า การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงความถี่ เมื่อนำสมการไซน์กำลังสองพัลส์ ในอุดมคติมาแปลงลาปลาซ สมการจะติดอยู่ในรูปไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic) ดังสมการที่ (3.15) ซึ่งมีความซับซ้อนในการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้เสนอการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงของเวลา แต่ทั้งนี้การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงของเวลาก็ยังสามารถทำได้ ด้วยสมการต่อไปนี้

จากสมการ

$$e^{-s} = \frac{1}{e^s} = \frac{1}{\cosh(s) + \sinh(s)} \quad (3.22)$$

และ

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{M(s) + N(s)} \\ &= \frac{1}{N(s) \left\{ 1 + \frac{M(s)}{N(s)} \right\}} \\ &= \frac{1}{N(s) \left\{ 1 + \frac{\cosh(s)}{\sinh(s)} \right\}} = \frac{1}{\sinh(s) [1 + \coth(s)]} \end{aligned} \quad (3.23)$$

โดยที่

$$\cosh(s) = 1 + \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^6}{6} + \dots \quad (3.24)$$

$$\sinh(s) = s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \frac{s^7}{7} + \dots \quad (3.25)$$

จะได้

$$\frac{\cosh(s)}{\sinh(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{1}{\left[\frac{2n-1}{s} \right]}}}} \quad (3.26)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาค่า $n = 2, 3, 4$ จะได้

$$n = 2$$

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s}} = \frac{s^2 + 3}{3s} \quad (3.27)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{N(s) \left(1 + \frac{s^2 + 3}{3s}\right) (3s)} = \frac{1}{\left[\frac{s^2 + 3s + 3}{3s}\right] (3s)} \quad (3.28)$$

$$n = 3$$

$$H_3(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \quad (3.29)$$

$$n = 4$$

$$H_4(s) = \frac{105}{s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105} = \frac{1}{B_n(s)} \quad (3.30)$$

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} k!(n-k)!} s^k \quad (3.31)$$

3.4.2 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงเวลา

ในวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเชิงเวลา เพราะรูปแบบสมการเข้าใจได้ไม่ยาก และการคำนวณหาที่ไม่ซับซ้อนมากนัก จากทฤษฎีพื้นฐานในบทที่ 2 โดยกำหนดค่าเน็ทเวิร์กฟังก์ชันเป็นทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปสมการโพลีโนเมียล เพื่อสะดวกในการนำไปสร้างวงจร

รูปแบบของสมการแสดงดังสมการ (3.32)

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (3.32)$$

เมื่อ $P(s)$ เป็นฟังก์ชันตัวเศษ

$Q(s)$ เป็นฟังก์ชันตัวส่วน

การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์จึงต้องเลือกใช้วิธีการที่สะดวก เหมาะสมจึงเลือกใช้วิธีการของเบสเซลโพลีโนเมียลในการหาค่า $Q(s)$ ส่วนการหาค่า $P(s)$ ใช้วิธีการวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

3.5 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์

3.5.1 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่สาม

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{(s^2 + 3s + 3)(s + 1)} \quad (3.33)$$

$$H(s) = \frac{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{(s + 1.5 + j0.866)(s + 1.5 - j0.866)(s + 1)} \quad (3.34)$$

$$= \frac{As + B}{(s + 1.5)^2 + 0.866^2} + \frac{C}{s + 1} \quad (3.35)$$

ดังนั้น

$$h^*(t) = 2Ae^{-1.5t} \cos(0.866t) + 2Be^{-1.5t} \sin(0.866t) + Ce^{-t} \quad (3.36)$$

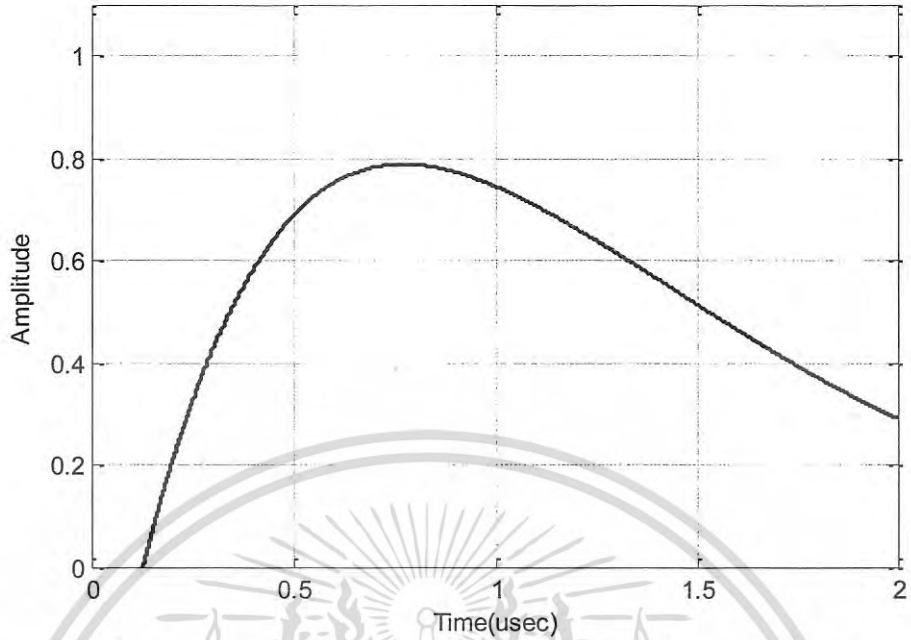
หาสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

$$E_2 = \int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)]^2 dt$$

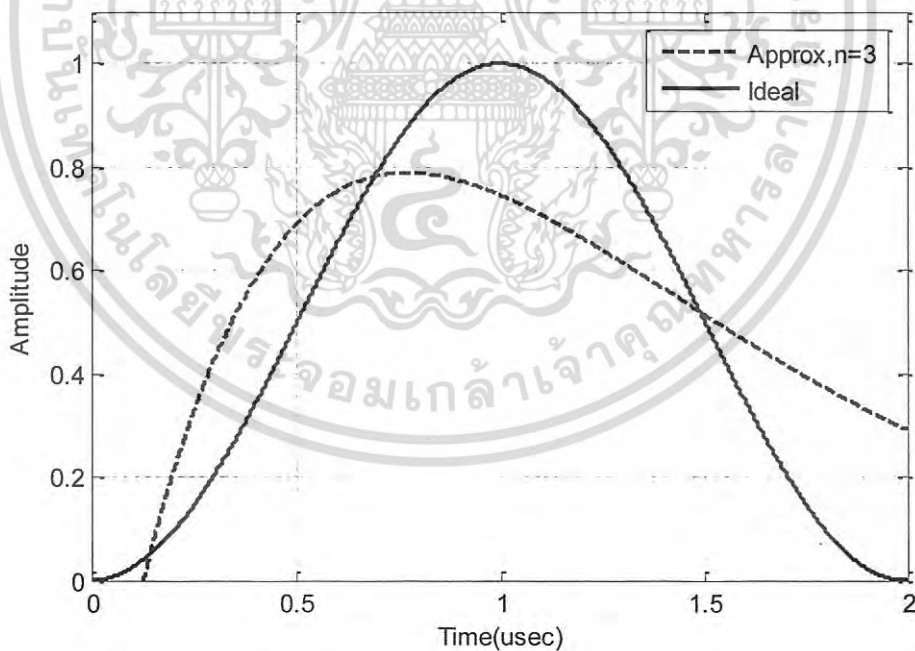
$$\frac{\partial}{\partial A} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial B} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial C} E_2 = 0$$

$$A = -0.572, \quad B = 1.962, \quad C = 0.664$$

จากนั้นนำค่า A, B, C ที่หาได้แทนลงในสมการที่ (3.36) นำมาพล็อตในเชิงเวลา แสดงได้ดังรูปที่ 3.2

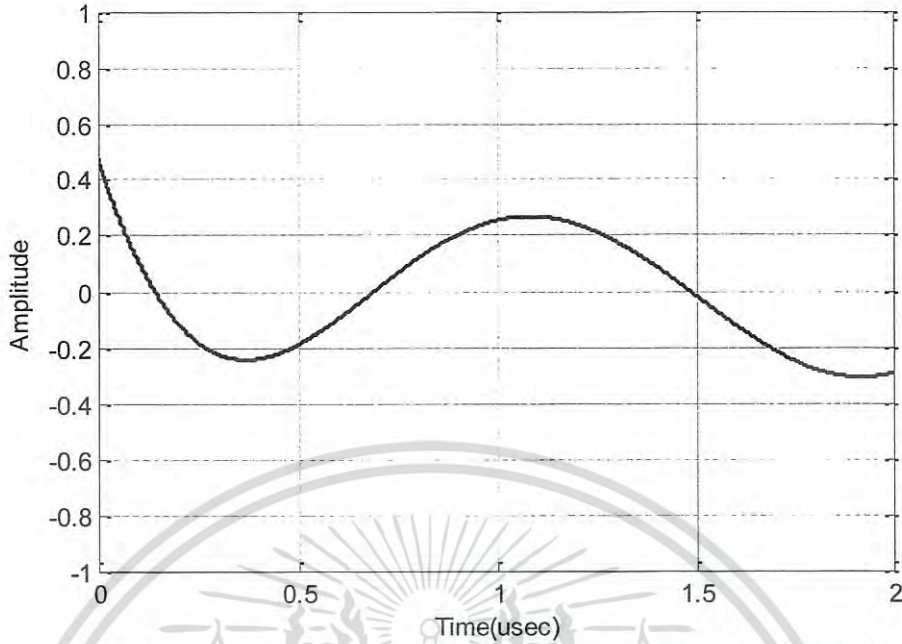


รูปที่ 3.2 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม ตามสมการที่ (3.26)



รูปที่ 3.3 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม ตามสมการที่ (3.26) เทียบกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ ตามสมการที่ (3.1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม

3.5.2 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่ห้า

$$H(s) = \frac{s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945} \quad (3.37)$$

$$= \frac{As + B}{(s + 2.325)^2 + 3.571^2} + \frac{Cs + D}{(s + 3.352)^2 + 1.743^2} + \frac{E}{s + 3.647}$$

ดังนั้น

$$h^*(t) = 2Ae^{-2.325t} \cos(3.571t) + 2Be^{-2.325t} \sin(3.571t) + 2Ce^{-3.352t} \cos(1.743t) + 2De^{-3.352t} \sin(1.743t) + Ee^{-3.647t} \quad (3.38)$$

หาสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

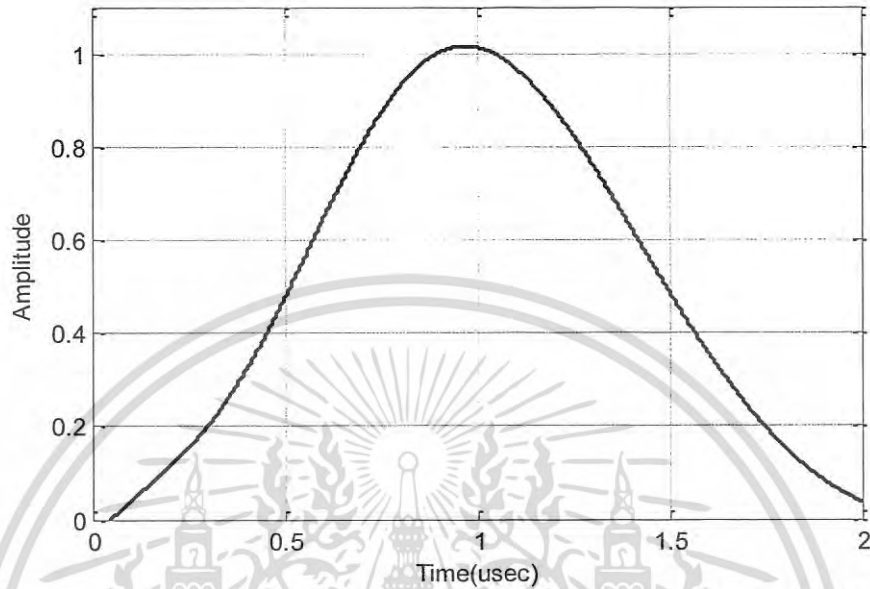
$$E_2 = \int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)]^2 dt$$

$$\frac{\partial}{\partial A} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial B} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial C} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial D} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial E} E_2 = 0$$

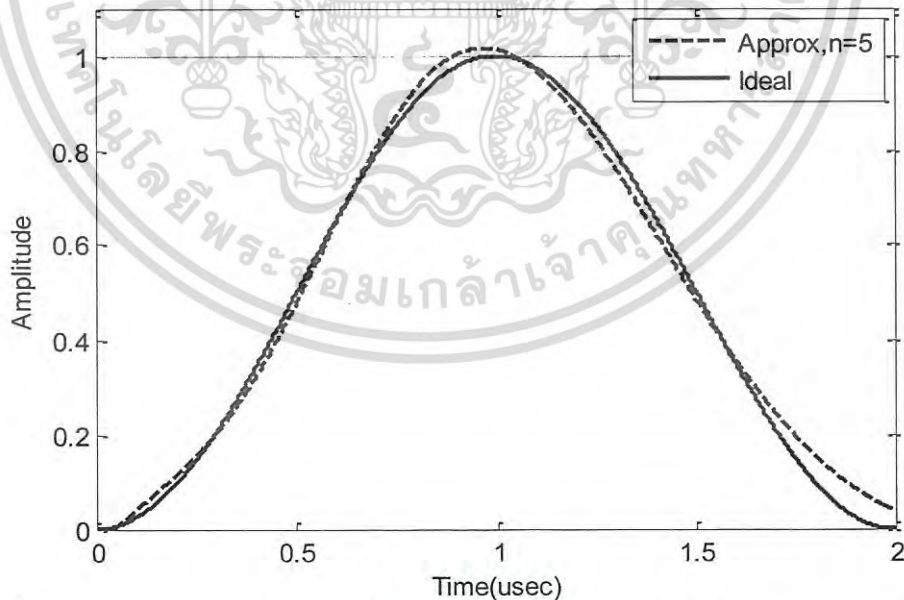
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A = 2.015, B = -2.225, C = -14.214, D = 5.579, E = 24.365$$

นำค่า A, B, C, D และ E ที่หาได้แทนลงในสมการที่ (3.38) นำมาพล็อตในเชิงเวลาแสดงได้ดังรูปที่ 3.5

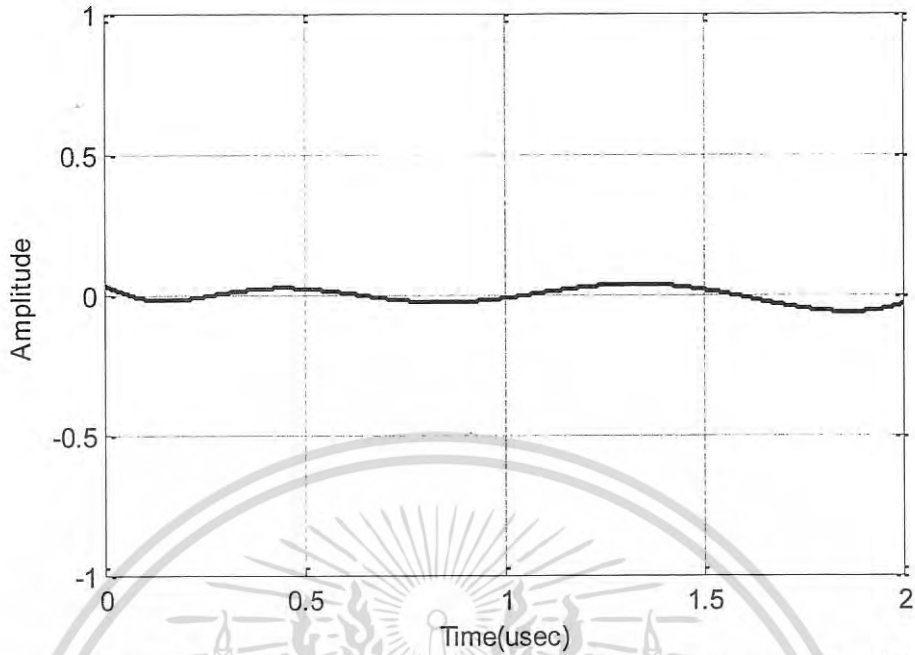


รูปที่ 3.5 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้าโดยใช้วิธีการหารากตามสมการที่ (3.38)



รูปที่ 3.6 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้า ตามสมการที่ (3.38) เทียบกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ ตามสมการที่ (3.1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.7 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ สมการลำดับที่ห้า

3.5.3 การประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่เจ็ด

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{s^7 + \alpha_6 s^6 + s^5 + \alpha_4 s^4}{s^7 + 28s^6 + 378s^5 + 3150s^4} \\
 &\quad + \frac{\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{+ 17325s^3 + 62370s^2 + 135135s + 135135} \\
 &= \frac{As + B}{(s + 2.6857)^2 + 5.4207^2} + \frac{Cs + D}{(s + 4.0701)^2 + 3.5172^2} \\
 &\quad + \frac{Es + F}{(s + 4.7583)^2 + 1.7393^2} + \frac{G}{s + 4.9718}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 h^*(t) = & 2Ae^{-2.6857t} \cos(5.4207t) + 2Be^{-2.6857t} \sin(5.4207t) \\
 & + 2Ce^{-4.0701t} \cos(3.5172t) + 2De^{-4.0701t} \sin(3.5172t) \\
 & + 2Ee^{-4.7583t} \cos(1.7393t) + 2Fe^{-4.7583t} \sin(1.7393t) \\
 & + Ge^{-4.9718t}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

หาสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

$$E_2 = \int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)]^2 dt$$

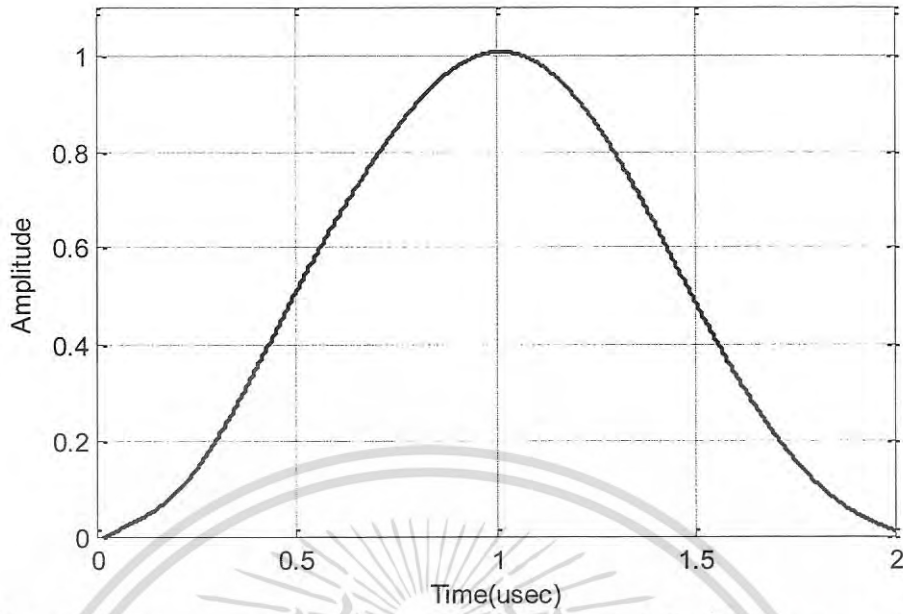
$$\frac{\partial}{\partial A} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial B} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial C} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial D} E_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial E} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial F} E_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial G} E_2 = 0$$

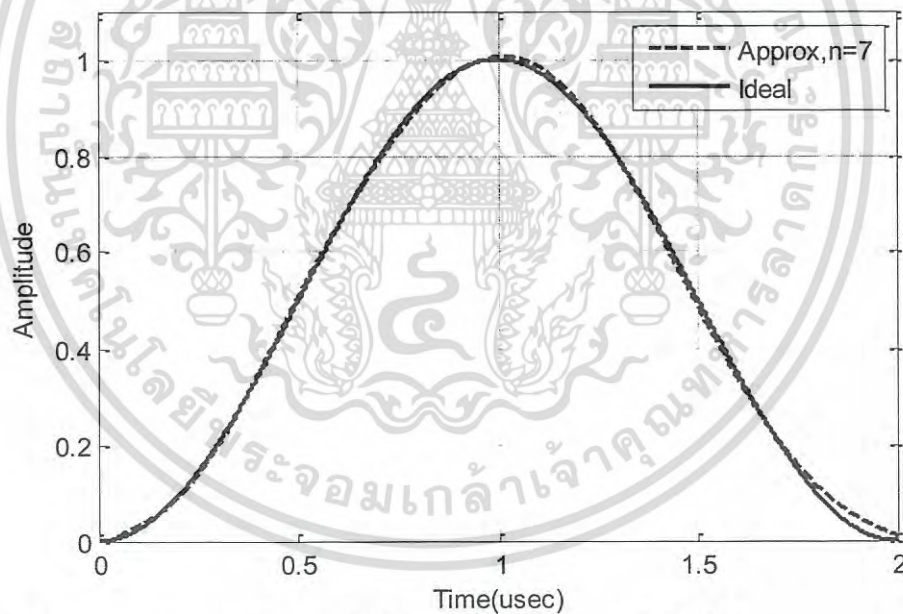
$$A = -1.611, \quad B = 1.868, \quad C = 27.851, \quad D = -17.542,$$

$$E = -110.333, \quad F = 30.974, \quad G = 168.175$$

นำค่า A, B, C, D, E, F และ G ที่หาได้แทนลงในสมการที่ (3.40) นำมาพล็อตในเชิงเวลา แสดงได้ดังรูปที่ 3.8

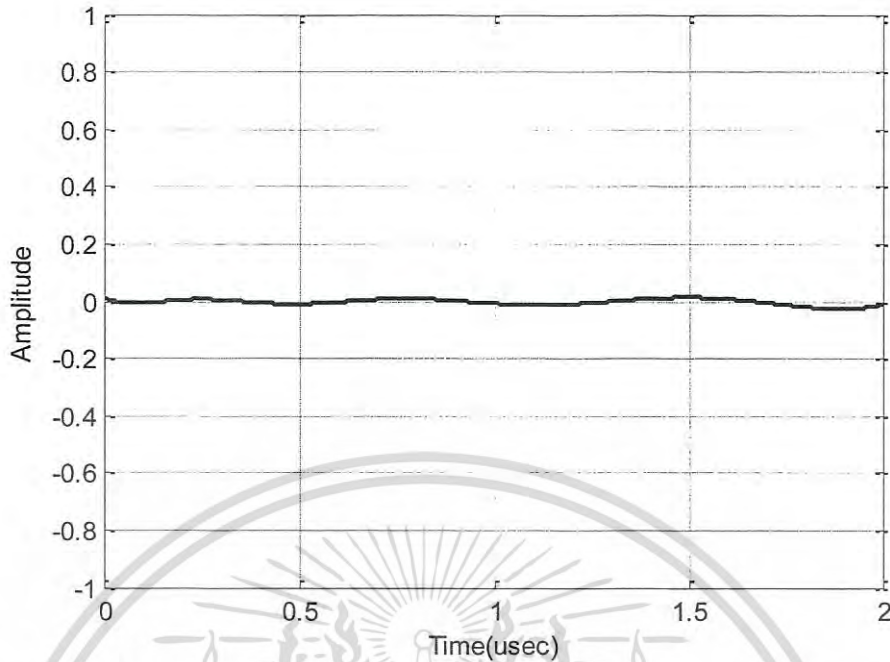


รูปที่ 3.8 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด ตามสมการที่ (3.40)



รูปที่ 3.9 ผลการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด ตามสมการที่ (3.40) เทียบกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ ตามสมการที่ (3.1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.10 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด

จากการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับต่างๆ จะเห็นได้ว่าเมื่อจำนวนลำดับสมการเพิ่มมากขึ้นรูปสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ที่สร้างขึ้น ก็ยิ่งใกล้เคียงกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ แต่ในทางตรงกันข้ามเมื่อสมการลำดับยิ่งสูงวงจรวงจรของสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์จะมีขนาดวงจรถ้าใหญ่ขึ้น ใช้อุปกรณ์มากขึ้น และการต่อวงจรถ้าจะยากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้สัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ลำดับที่เจ็ด ดังนั้นจะหาค่าสัมประสิทธิ์ α ได้จาก

$$A = -1.611$$

$$B = 1.868$$

$$C = 27.851$$

$$D = -17.542$$

$$E = -110.333$$

$$F = 30.974$$

$$G = 168.175$$

$$A = 0.00002\alpha_0 + 0.00018\alpha_1 - 0.00166\alpha_2 + 0.0022\alpha_3 + 0.04893\alpha_4 - 0.3435\alpha_5 + 0.005442\alpha_6 + 12.27867 \quad (3.41)$$

$$B = 0.00028\alpha_0 - 0.00068\alpha_1 - 0.0067\alpha_2 + 0.0608\alpha_3 - 0.0807\alpha_4 - 1.7906\alpha_5 + 12.5321\alpha_6 - 1.9921 \quad (3.42)$$

$$C = 0.00012\alpha_0 - 0.0017\alpha_1 + 0.0103\alpha_2 - 0.0347\alpha_3 - 0.0165\alpha_4 + 1.1375\alpha_5 - 8.7813\alpha_6 + 38.5677 \quad (3.43)$$

$$D = -0.00072\alpha_0 - 0.0035\alpha_1 + 0.0492\alpha_2 - 0.2989\alpha_3 + 1.0031\alpha_4 + 0.4780\alpha_5 - 32.9139\alpha_6 + 254.0997 \quad (3.44)$$

$$E = -0.00086\alpha_0 + 0.00507\alpha_1 - 0.02630\alpha_2 + 0.12017\alpha_3 - 0.46850\alpha_4 + 1.37415\alpha_5 - 1.05249\alpha_6 - 25.2535 \quad (3.45)$$

$$F = -0.0031\alpha_0 + 0.02135\alpha_1 - 0.13012\alpha_2 + 0.67511\alpha_3 - 3.08437\alpha_4 + 12.02474\alpha_5 - 35.26960\alpha_6 + 27.01366 \quad (3.46)$$

$$G = 0.00071\alpha_0 - 0.0035\alpha_1 + 0.01764\alpha_2 - 0.08771\alpha_3 + 0.43608\alpha_4 - 2.1681\alpha_5 + 10.77939\alpha_6 - 53.59295 \quad (3.47)$$

จะได้ค่า α ดังนี้

$$\alpha_0 = 3002153.472$$

$$\alpha_1 = 2017652.450$$

$$\alpha_2 = 678612.257$$

$$\alpha_3 = 137392.437$$

$$\alpha_4 = 17613.116$$

$$\alpha_5 = 1390.305$$

$$\alpha_6 = 51.702$$

ฉะนั้นจะได้

$$H(s) = \frac{s^7 + 51.702s^6 + 1390.305s^5 + 17613.116s^4 + 137392.437s^3 + 678612.257s^2 + 2017652.45s + 3002153.472}{s^7 + 28s^6 + 378s^5 + 3150s^4 + 17325s^3 + 62370s^2 + 135135s + 135135} \quad (3.48)$$

$$H(s) = \frac{[(s+16.9348 + j18.2539)(s+16.9348 - j18.2539)]}{[(s+2.6857 + j5.4207)][(s+2.6857 - j5.4207)]}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{[(s + 2.7627 + j5.3692)(s + 2.7627 - j5.3692)]}{[(s + 4.0701 + j3.5172)(s + 4.0701 - j3.5172)]}$$

$$\frac{[(s + 3.4506 + j3.5582)(s + 3.4506 - j3.5582)][(s + 5.4058)]}{[(s + 4.7583 + j1.7393)(s + 4.7583 - j1.7393)][(s + 4.9718)]} \quad (3.49)$$

$$H(s) = \frac{[(s + 16.9348)^2 + 18.2539^2][(s + 2.7627)^2 + 5.3692^2]}{[(s + 2.6857)^2 + 5.4207^2][(s + 4.0701)^2 + 3.5172^2]}$$

$$\frac{[(s + 3.4506)^2 + 3.5582^2][s + 5.4058]}{[(s + 4.7583)^2 + 1.7393^2][(s + 4.9718)]} \quad (3.50)$$

$$H(s) = \frac{[s^2 + 33.8696s + 619.9923][s^2 + 5.5254s + 36.4608]}{[s^2 + 5.3714s + 36.597][s^2 + 8.1402s + 28.9364]} \quad (3.51)$$

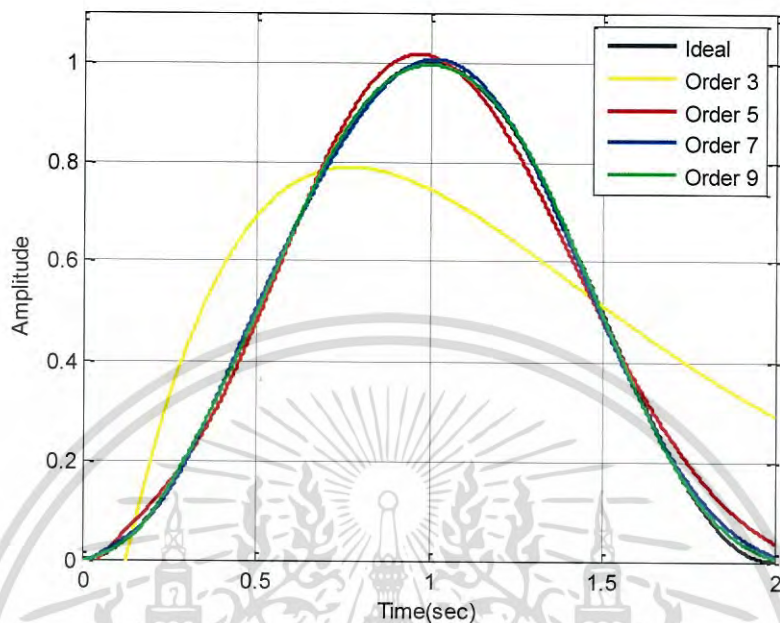
$$\frac{[s^2 + 6.9012s + 24.5674][s + 5.4058]}{[s^2 + 9.5166s + 25.6666][s + 4.9718]}$$

จัดรูปใหม่ จะได้

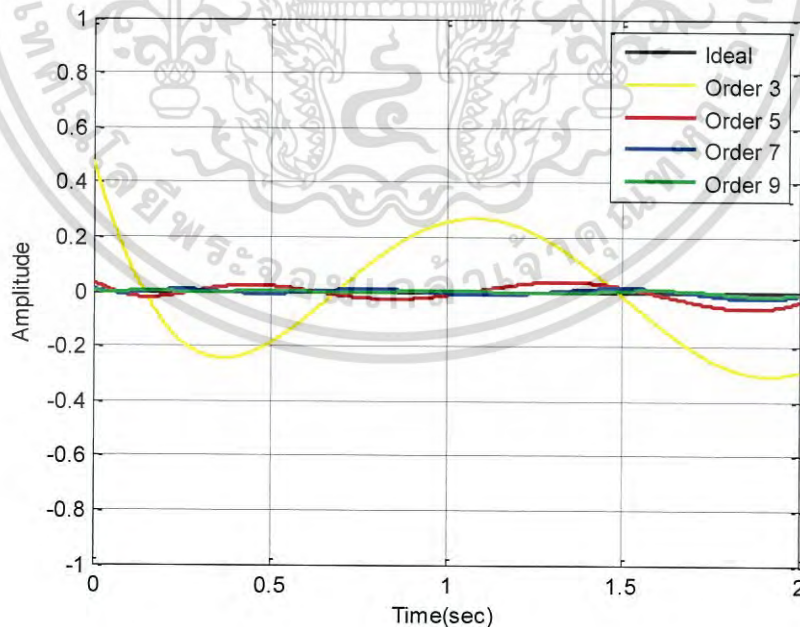
$$H(s) = \frac{[s^2 + 5.5254s + 36.4608][s^2 + 6.9012s + 24.5674]}{[s^2 + 5.3714s + 36.597][s^2 + 9.5166s + 25.6666]}$$

$$\frac{[s^2 + 33.8696s + 619.9923][s + 5.4058]}{[s^2 + 8.1402s + 28.9364][s + 4.9718]} \quad (3.52)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.11 เปรียบเทียบลักษณะทางขนาดของผลตอบสนองของการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วน
ในเชิงเวลา



รูปที่ 3.12 เปรียบเทียบความผิดพลาดทางขนาดของการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากขนาดของผลตอบสนองในเชิงเวลาและทางขนาดดังแสดงในรูปที่ 3.11 และ รูปที่ 3.12 นั้นจะเห็นว่าสัญญาณกำลังสองพัลส์ที่จำนวนอันดับสูงๆ สมการฟังก์ชันเศษส่วนสามารถสร้าง สัญญาณไซน์กำลังพัลส์สมมาตรที่เป็นเฟสเชิงเส้นและมีความผิดเพี้ยนเพียงเล็กน้อย ผลลัพธ์ของผลตอบสนองเชิงเวลาของสมการฟังก์ชันเศษส่วนที่ขนาดสูงสุดเท่ากับ 1

เมื่อเราพิจารณาผลการตอบสนองผิดเพี้ยนของจำนวนอันดับ 7 และ 9 ของสมการฟังก์ชันเศษส่วนจะไม่แตกต่างกันมากนัก งานวิทยานิพนธ์นี้เราจะใช้จำนวนอันดับ 7 ด้วยเหตุที่ว่าการนำไปใช้งานออกแบบสร้างวงจรใช้งานจริง จำนวนอันดับที่น้อยจะมีองค์ประกอบของวงจรที่น้อยกว่าและไม่ซับซ้อน

วิธีการของสมการฟังก์ชันเศษส่วนอันดับ 7 ให้ค่าสัมประสิทธิ์ที่กำหนดต่างในตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วน แสดงได้ในสมการที่ (3.53)

$$H(s) = \frac{s^7 + \alpha_6 s^6 + \alpha_5 s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^7 + 28s^6 + 378s^5 + 3150s^4 + 17325s^3 + 62370s^2 + 135135s + 135135} \quad (3.53)$$

จากสมการที่ (3.11) สามารถเขียนสมการในเชิงเวลาได้ดังสมการที่ (3.54)

$$\begin{aligned} h^*(t) = & 2Ae^{-2.6857t} \cos(5.4207t) + 2Be^{-2.6857t} \sin(5.4207) + \\ & 2Ce^{-4.070t} \cos(3.5172t) + 2De^{-4.070t} \sin(3.5172) + \\ & 2Ee^{-4.7583t} \cos(1.7393t) + 2Fe^{-4.7583t} \sin(1.7393) + \\ & Ge^{-t} \end{aligned} \quad (3.54)$$

จากการวิเคราะห์ของสมการฟังก์ชันเศษส่วนอันดับ 3 วิธีกำลังสองน้อยที่สุดสามารถปรับใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วน ดังนั้นสัญญาณชายนนกำลังสองพัลส์จะได้ค่าพารามิเตอร์ที่ดังแสดงต่อไปนี้

$$\alpha_0 = 3002153.472, \alpha_1 = 2017652.450, \alpha_2 = 678612.257, \alpha_3 = 137392.427, \\ \alpha_4 = 17613.116, \alpha_5 = 1390.305, \alpha_6 = 51.702$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นทำการแทนค่า α ลงในสมการที่ (3.53) และสามารถนำมาเขียนสมการฟังก์ชันเศษส่วนของสัญญาณกำลังพัลส์ได้ใหม่แสดงดังสมการที่ (3.55)

$$H(s) = \frac{[s^2 + 5.5254s + 36.4608] + [s^2 + 6.9012s + 24.5674][s^2 + 33.8696s + 619.9923]}{[s^2 + 5.3714s + 36.597][s^2 + 9.5166s + 25.6666][s^2 + 8.1402s + 28.9364]} \frac{[s + 5.4058]}{[s + 4.9718]} \quad (3.55)$$

จากสมการที่ (3.55) เราสามารถนำไปสร้างวงจรเพื่อการใช้งานจริงได้ เช่นเดียวกับการนำไปจำลองสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์โดยได้โปรแกรมประยุกต์ PSpice [14]

3.6 สรุป

จากการทดลองวิธีต่างๆที่ใช้ในการหาสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ พบว่าการใช้วิธีการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในขอบข่ายของเวลาจะทำได้ง่ายกว่าการประมาณในขอบข่ายของความถี่ ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้ทฤษฎีของเบสเซลโพลีโนเมียลเข้ามาช่วยในการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในเทอมส่วน เพราะสมการของเบสเซลโพลีโนเมียลจะมีรากอยู่ทางด้านลบ โดยระบบที่จะเสถียรได้นั้นต้องมีรากอยู่ทางด้านลบ ส่วนสัมประสิทธิ์ของเทอมเศษ ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการหาค่าที่เหมาะสม นอกจากนี้ยังมีวิธีการประมาณสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ด้วยวิธีอื่นๆเช่นวิธี moments approximation method โดยใช้สมการของเบสเซลโพลีโนเมียลนี้ สามารถสร้างสัญญาณที่มีความใกล้เคียงกับสัญญาณไซน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติมากที่สุดเช่นกัน

บทที่ 4

การออกแบบวงจรกรองแบบเมตซ์เฟสเชิงเส้น

4.1 บทนำ

การออกแบบตัวกรองเฟสเชิงเส้นสำหรับการส่งสัญญาณพัลส์เพื่อป้องกันการเกิดการแทรกสอดระหว่างสัญญาณที่เรียกว่า intersymbol interference ในวิทยานิพนธ์นี้ เริ่มจากการพิจารณาเวลาประวิง(delayed time) ของสัญญาณเรสตีโคไซน์ในเชิงของเวลาสำหรับสัญญาณเอาต์พุตของการสร้างตัวกรองทางด้านส่ง ซึ่งในการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วน (rational function) ของตัวกรองสัญญาณด้านส่ง กำหนดให้ส่วนของสมการฟังก์ชันเศษส่วน เป็นแบบเฟสเชิงเส้น (linear phase) ส่งด้วยคู่อีโร (transmission zero pairs) สังกะเชิงซ้อน เพื่อให้สอดคล้องกับผลตอบสนองการลดทอนของสัญญาณเรสตีโคไซน์ในเชิงของเวลา การรวมกันของคู่สมมาตรของผลตอบสนองทางเวลา และการส่งคู่อีโรสังกะเชิงซ้อน นำไปสู่การสร้างฟิลเตอร์แบบเมตซ์เฟสเชิงเส้น จำนวนสูงสุดของการส่งคู่อีโร ถูกจำกัดด้วยความกว้างของพัลส์ที่ได้รับสำหรับขนาดของพัลส์ ที่ = สัญญาณพัลส์ที่สร้างขึ้นเป็นสัญญาณที่มีช่วงเวลาจำกัด และพลังงานสัญญาณรวมอยู่นอกเมนลูป (main loop) จะถูกตัดทิ้ง สัญญาณที่รับได้จะถูกจำกัดแบนด์และจำกัดเวลา

สำหรับ ขั้นตอนในการออกแบบตัวกรองแบบเมตซ์เฟสเชิงเส้นสำหรับการส่งสัญญาณโดยไม่มีการแทรกสอดทางสัญญาณลักษณะ ที่จะนำเสนอในที่นี้ มีข้อความที่สำคัญตามหัวข้อต่อไป

4.2 ผลตอบสนองของอิมพัลส์เชิงสาเหตุเฟสเป็นเชิงเส้น (causal real symmetric impulse response and linear phase)

ความหมายของข้อพิจารณานี้ คือผลตอบสนองของสัญญาณอิมพัลส์ทางเอาต์พุตไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากอินพุตใดและมีเฟสเชิงเส้น ซึ่งผลตอบสนองทางเอาต์พุตของตัวกรอง $H(j\omega)$ ที่ด้านส่งซึ่งส่งสัญญาณอินพุต ผ่านช่องสัญญาณ สมมติว่าช่องสัญญาณนั้นมีแบนด์วิดท์กว้างเพียงพอ ดังนั้นสัญญาณอินพุต ที่ได้จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงแต่อย่างใด ยกเว้นสัญญาณรบกวน (additive noise) ที่เกิดขึ้นที่อินพุตของตัวกรองด้านรับสัญญาณ

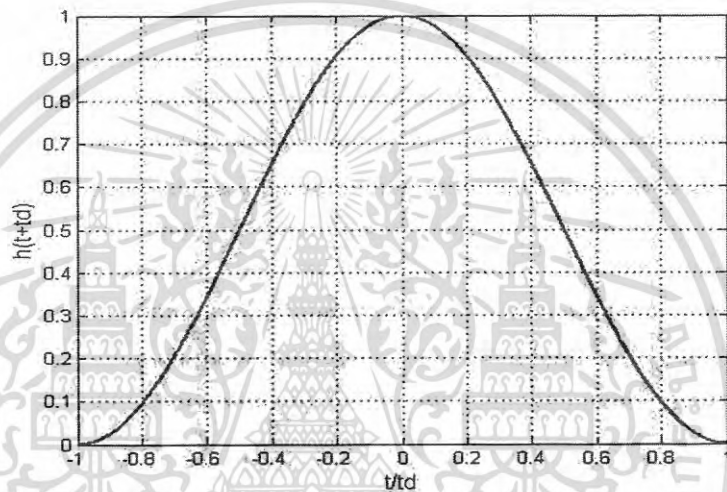
ตัวกรองสัญญาณด้านรับจะต้องทำการกรองสัญญาณด้านรับให้สอดคล้องตรงกันกับสัญญาณที่ถูกส่งมาแต่จะกลับกันทางเวลา (reversed in time) และเลื่อนไป (shifted) d โดยที่ d เป็นช่วงเวลาทีประวิง (delay) อยู่ระหว่างพัลส์ที่มาถึงไปถึงจุดยอดสูงสุดของสัญญาณพัลส์ ดังนั้นผลตอบสนองของอิมพัลส์คือ $- +$ สัญญาณเอาต์พุตที่ไม่เปลี่ยนแปลงหรือต่อไปเรียกว่า พัลส์สมมาตร

แสดงตามรูปที่ 4.1.1 ส่วนสัญญาณพัลส์สมมาตรของการประวิงเวลา (delayed) จะแสดงในรูปที่ 4.1.2 ถ้าเวลาประวิงเป็น t_d แล้ว พัลส์สมมาตรประวิงเวลายังคงรูปร่างเดิม

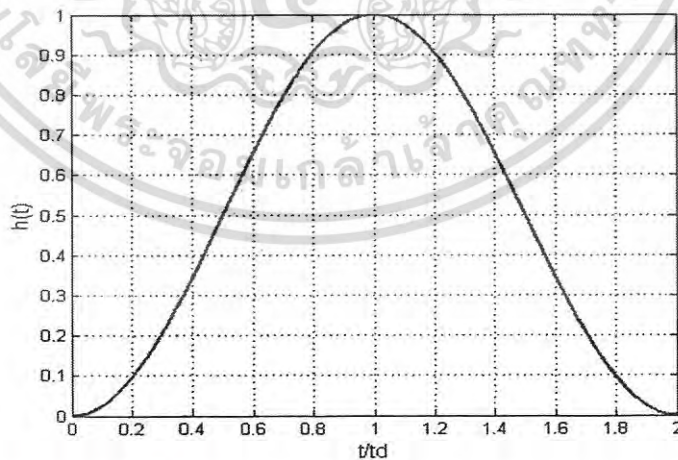
$$h(t) = h(-t + 2t_d) \quad (4.1)$$

การแปลง Fourier ทั้งสองข้างของสมการ

$$F\{h(t)\} = H(j\omega) = F\{h(-t + 2t_d)\} \quad (4.2)$$



รูปที่ 4.1.1 สัญญาณพัลส์สมมาตร (Real symmetric pulse) [9]



รูปที่ 4.1.2 สัญญาณพัลส์สมมาตรเวลาประวิง (Real delayed symmetric pulse) [9]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t + 2t_d) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega(2t_d - \tau)} d\tau = e^{-j\omega 2t_d} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

ผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ เป็น จริง ดังนั้น

$$H(j\omega) = e^{-j\omega 2t_d} H(-j\omega) = e^{-j\omega 2t_d} H^*(j\omega) = e^{-j\omega 2t_d} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau \quad (4.4)$$

ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวกรองแมตซ์เป็น complex conjugate ของสเปกตรัมแมตซ์ฟิลเตอร์ของด้านส่งคูณด้วย phase factor ที่แสดงในรูปของ sampling delay ของ เวลา $2t_d$ ดังนั้น

$$H(j\omega) e^{j\omega t_d} = H^*(j\omega) e^{-j\omega 2t_d} = (H(j\omega) e^{j\omega t_d})^*$$

4.3 สัญญาณเรสต์โคไซน์ในขอบข่ายของเวลา

จากสมการทั่วไป

$$\cos^m\left(\frac{\pi t}{mt_d}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{m\pi t}{mt_d}\right) \right]$$

แทน $m = 2$ จะได้

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{2t_d}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{2t_d}\right) \right]$$

ดังนั้น สัญญาณเรสต์โคไซน์ ในขอบข่ายของเวลา กำหนดได้โดยสมการ (4.5)

$$p_{rc}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi t}{t_d}\right) \right), & |t| \leq t_d \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.5)$$

เรสต์โคไซน์เป็นชื่อที่มักจะใช้ในการอ้างอิงถึงสเปกตรัมการม้วนลงของสเปกตรัม ในขอบข่ายความถี่ เป็นสัญญาณเรสต์โคไซน์มาตรฐาน หรือ สเปกตรัมสัญญาณเรสต์โคไซน์ สมการที่ (4.5) แสดง สัญญาณเรสต์โคไซน์ในขอบข่ายของเวลา ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1.1) ที่มี $p_{rc}(t) = h(t + t_d)$ และเป็นสัญญาณแบบง่าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

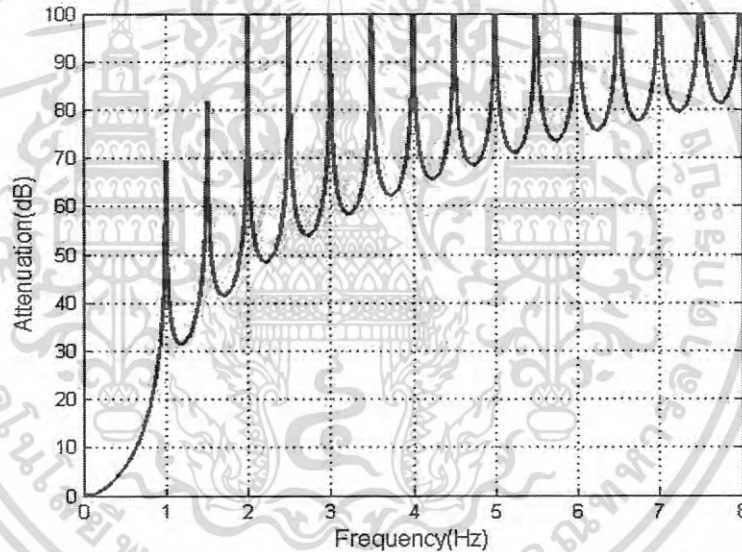
คลื่นความถี่ที่สอดคล้องกับสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่มีขนาดสูงสุดเท่ากับ 1 กำหนดได้ด้วยสมการ

$$P_{rc}(f) = t_d S_a(2\pi f t_d) + \frac{t_d}{2} S_a(2\pi f t_d + \pi) + \frac{t_d}{2} S_a(2\pi f t_d - \pi) \quad (4.6)$$

โดยที่ $S_a(x) = \sin(x)/x$ สเปกตรัมนี้เป็นจริงและเฟสมีค่าเป็นศูนย์

การนำเสนอสัญญาณเรสต์โคไซน์ในขอบข่ายของความถี่ ที่กำหนดจากสมการ (4.6) ที่ $t_d = 1$ ชี้ให้เห็นว่า มีคู่ซีโรที่คูณด้วยจำนวนเต็มของ π โดยเริ่มที่ 2π ดังแสดงในรูปที่ 4.2 ซึ่งแสดงผลตอบสนองสเปกตรัมนี้เป็นจริงและมีเฟสเป็นศูนย์ สัญญาณเรสต์โคไซน์ที่มีประกอบเป็นคู่ซีโร ที่

$$s = j\omega = \pm jk\pi t_d, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (4.7)$$



รูปที่ 4.2 ผลตอบสนองการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ [9]

4.4 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่ไม่มีคู่ซีโร[3]

ตามที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ 4.2 สัญญาณเรสต์โคไซน์เป็นสัญญาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามสัญญาณอินพุต (causal raised-cosine pulse) เนื่องจากเป็นสัญญาณที่รูปแบบสมมาตร ที่สามารถทำการประมาณผลตอบสนองอิมพัลส์ของตัวกรองที่เป็นเฟสเชิงเส้นได้

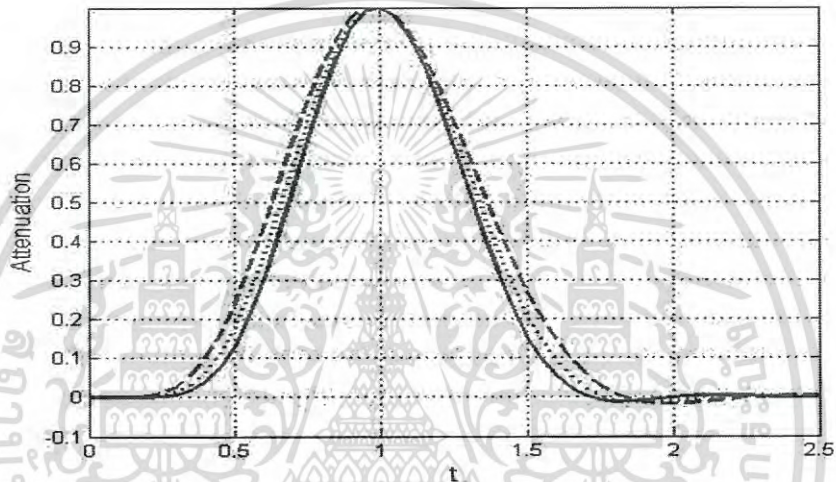
สมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรองสัญญาณที่มีสมการอันดับที่ n สามารถเขียนเป็น

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \quad (4.8)$$

โดยที่ m คือ อันดับของตัวเศษที่เป็นโพลิโนเมียล

n คือ อันดับของตัวส่วนที่เป็นโพลิโนเมียล

โดยที่ $m \leq n$ และ s คือ ตัวแปรความถี่



รูปที่ 4.3 ผลตอบสนองที่เป็นเฟสเชิงเส้นในเชิงเวลา [9]

โดย ตัวส่วน $Q_n(s)$ ของสมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรองเฟสเชิงเส้นที่เป็นโพลิโนเมียลของอันดับ n ซึ่งถูกสร้างขึ้นโดยความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} Q_1(s) &= s + 1, \\ Q_2(s) &= s^2 + 3s + 3, \\ Q_{n+1}(s) &= (2n + 1)Q_n(s) + s^2Q_{n-1}(s), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

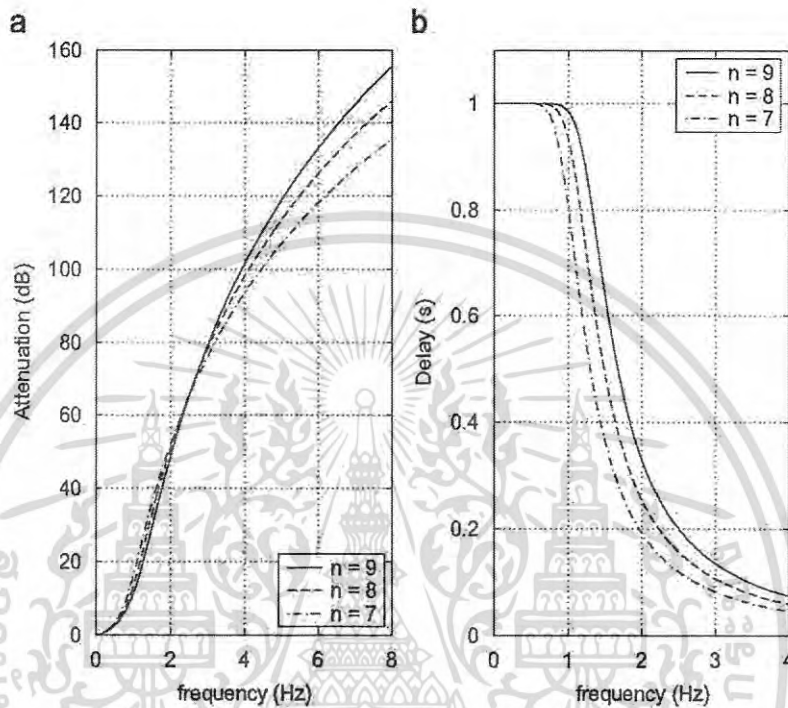
ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียล $Q_n(s) = \sum_{k=0}^n b_k s^{n-k}$

โดย

$$b_k = \frac{\binom{n}{k} 2^k}{\binom{2n}{k} k!}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่มีคุณสมบัติเป็น causal จะแสดงได้ในรูปที่ 4.1.1 และการสร้างสัญญาณพัลส์สมมาตรที่เป็นเฟสเชิงเส้นโพลีโนเมียล $Q_n(s)$ ซึ่งถูกนำมาใช้เป็นส่วนของสมการฟังก์ชันเศษส่วนที่มีตัวเศษเป็นโพลีโนเมียล ($P_m(s) = 1$) โดยผลตอบสนองของสมการฟังก์ชันเศษส่วนที่มีขนาดเท่ากับ 1 ดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.4 ผลตอบสนองการลดทอนและเวลาประวิงในเชิงความถี่ [9]

สำหรับ $n = 7, 8, 9$ เมื่อ n คืออันดับของตัวส่วนของสมการ สัญญาณพัลส์ที่แสดง โดยผลตอบสนองในเชิงเวลานี้เรียกว่า สัญญาณพัลส์สมมาตรเชิงสาเหตุ (causal real symmetric pulse, CRS) โดยสัญญาณพัลส์ที่นี้จะแคบลงในขณะที่จำนวนอันดับ n เพิ่มขึ้น ผลตอบสนองการลดทอน (attenuation) และการประวิงเวลาจะแสดงในรูปที่ 4.4(a) และ 4.4(b) ตามลำดับ ผลตอบสนองของการประวิงเวลาแสดงถึงเฟสเชิงเส้นและมีตัวเศษที่เป็นโพลีโนเมียลเป็นตัวกำหนดส่วนพื้นราบของการตอบสนองของการประวิงเวลาและขยายช่วงความถี่ให้กว้างขึ้นเมื่ออันดับ n เพิ่มขึ้น ซึ่งในความเป็นจริงตอบสนองทั้งหมดถูกหาโดยโพลีโนเมียลตัวส่วนในกรณีที่โพลีโนเมียลตัวเศษเป็น 1

4.5 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่มีคู่ซีโร[3]

ผลตอบสนองต่อการลดทอนทอน จากรูปที่ 4.4 (a) ไม่มีขอบแถบความถี่หยุด (stop band) จึงสามารถประมาณผลตอบสนองของสัญญาณการลดทอนเรสต์โคไซน์เชิงสาเหตุได้ใกล้เคียงกับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ โดยใช้โพลีโนเมียลตัวเศษซึ่งมีคู่ซีโรจำกัด ที่ $\pm jk\pi$, $k = 2, 3, 4, \dots, m$, ตามที่แสดงในรูปที่ 4.2 ในกรณี $t_d = 1$ และ สำหรับสมการฟังก์ชันเศษส่วน $H(s)$ จำนวน m ต้องสอดคล้องตาม เงื่อนไขของ $m \leq n$

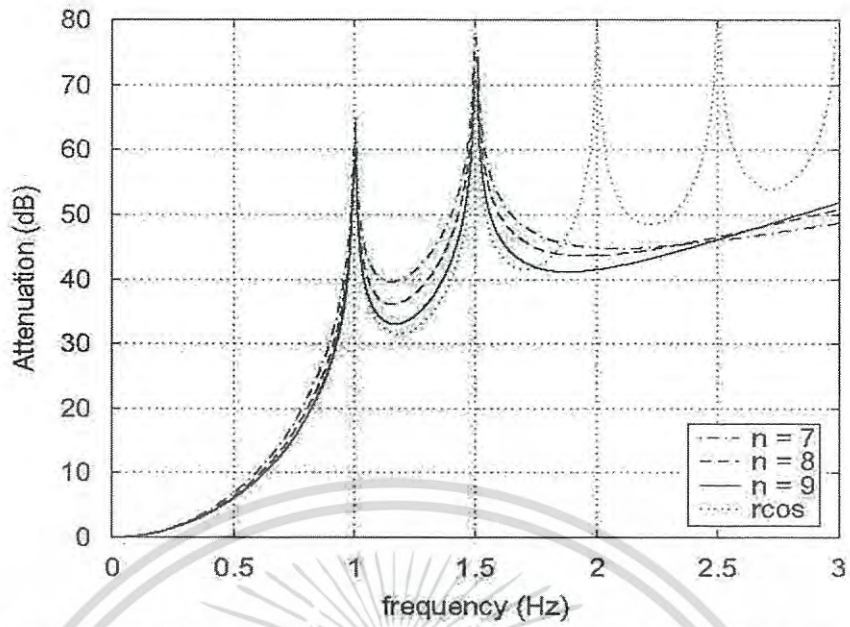
ต่อไปเป็นการรวมการคู่ซีโรในตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วนและสมการ (4.8) เขียนใหม่ได้ดังสมการ (4.10)

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = K \prod_{k=1}^{m/2} (s^2 + \omega_k^2) / \prod_{k=1}^n (s - p_k) \quad (4.10)$$

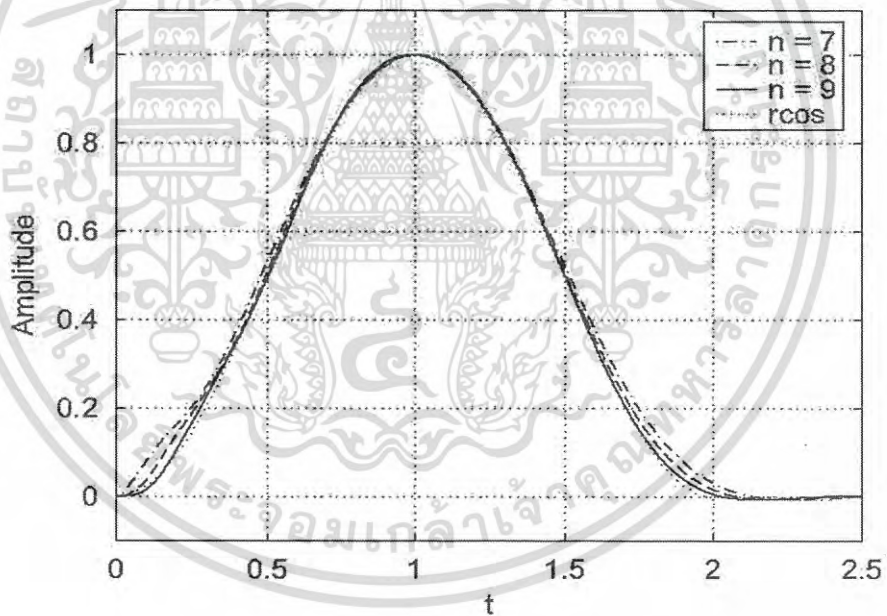
โดยที่ m คืออันดับของโพลีโนเมียลตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วนซึ่งจำเป็นต้องเป็นอันดับเลขคู่ K คือค่าจริงคงที่ จำนวนจริง $\pm j\omega_k$ คือ คู่ซีโร สังยุคตึงซ้อน p_k คือโพลีโนเมียลตัวเศษของระนาบ S (s-plane)

สมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรองถูกออกแบบด้วยคู่ซีโรที่ช่วยให้สามารถสร้างวงจรกรองด้วยโครงข่ายวงจร LC ladder ในการประมาณผลตอบสนองการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ แสดงในรูปที่ 4.2 2 คู่ซีโรที่ $\pm j2\omega, \pm j3\omega$ ถูกใช้เป็นตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วน จากหัวข้อก่อนหน้า ผลการตอบสนองต่อการลดทอน และผลการตอบสนองในเชิงเวลาสามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.5 และ รูปที่ 4.6 ตามลำดับ จะสังเกตความเป็นสมมาตรของผลตอบสนองในเชิงเวลาที่เกิดขึ้นเป็นคุณลักษณะที่สำคัญถ้าผลตอบสนองนี้คือพัลส์เอาต์พุตของตัวกรองที่ด้านส่งและเป็นพัลส์อินพุตของตัวกรองที่ด้านรับ

ในการประมาณผลตอบสนองการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ แสดงในรูปที่ 4.2 2 คู่ซีโรที่ $\pm j2\omega, \pm j3\omega$ ถูกใช้เป็นตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วน จากหัวข้อก่อนหน้า ผลการตอบสนองต่อการลดทอน และผลการตอบสนองในเชิงเวลาสามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.5 และ รูปที่ 4.6 ตามลำดับ



รูปที่ 4.5 ผลตอบสนองจากการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์เฟสเชิงเส้นในเชิงความถี่ [9]



รูปที่ 4.6 ผลตอบสนองจากการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์เฟสเชิงเส้นในเชิงเวลา [9]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าสังเกตความเป็นสมมาตรของผลตอบสนองในเชิงเวลาที่เกิดขึ้นคือ คุณลักษณะที่สำคัญถ้าผลตอบสนองนี้คือสัญญาณพัลส์เอาต์พุตของตัวกรองที่ด้านส่งและเป็นสัญญาณพัลส์อินพุตของตัวกรองที่ด้านรับด้วย จะเห็นว่า

การเพิ่มคู่สังยุคเชิงซ้อนที่มีค่าจำนวนจริงเป็นศูนย์ที่สาม ที่ $\pm j4\omega$ จะสร้างผลตอบสนองของอิมพัลส์ที่เป็นสมมาตรน้อยกว่า ที่ $t = 0$ สำหรับ $n = 7$ การออกแบบพัลส์สมมาตรเชิงสาเหตุที่แท้จริงจะขึ้นอยู่กับสิ่งที่สังเกตต่อไปนี่

1. ตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรองซึ่งเป็นเฟสเชิงเส้นโพลิโนเมียลเป็นตัวกำหนดรูปร่างสัญญาณพัลส์เมื่อไม่มีการส่งผ่านศูนย์

2. ขอบเขตการส่งผ่านจำนวนจิตภาพศูนย์ในคู่สังยุคจะต้องเพิ่มการลดทอนแถบหยุด แต่จะมีผลกระทบต่อรูปร่างของสัญญาณพัลส์

3. การส่งผ่านศูนย์มีความเป็นไปได้ที่อินพินิต์จะปรับปรุงรูปร่างของสัญญาณพัลส์

เพื่อรักษาความสมบูรณ์ของรูปร่างสัญญาณพัลส์ จำนวนการส่งผ่านคู่ศูนย์จะต้องไม่เกินค่าการกำหนดตัวกรองที่กำหนดอันดับ n

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าซีโรและโพลของสมการฟังก์ชันเศษส่วนโดยใช้เบสเซลโพลิโนเมียล

Zeros	Poles, $n = 7$	Poles, $n = 8$	Poles, $n = 9$
$\pm j2\pi$	$-2.6857 \pm j5.4207$	$-2.8390 \pm j6.3539$	$-2.9793 \pm j7.2915$
$\pm j3\pi$	$-4.0701 \pm j3.5172$	$-4.3683 \pm j4.4144$	$-4.6384 \pm j5.3173$
	$-4.7583 \pm j1.7393$	$-5.2048 \pm j2.6162$	$-5.6044 \pm j3.4982$
	-4.9718	-5.58798676	$-6.1294 \pm j1.7378$
			-6.2970

4.6 การออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์ที่เป็นเฟสเชิงเส้นบนพื้นฐานคิวเบสเซลโพลิโนเมียล (q-Bessel polynomials for linear phase matched filter)

ในงานวิจัยก่อนหน้านี [3][4] มีการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์ที่เป็นเฟสเชิงเส้นโดยใช้คู่ของ transmission zero และสมการเบสเซลโพลิโนเมียล มีการเผยแพร่ในหลาย ๆ แห่ง แต่วิธีการแก้ปัญหาด้านผลตอบสนองต่อการลดทอนยังไม่สมบูรณ์มากนัก ฉะนั้นเพื่อเป็นการปรับปรุงผลตอบสนองต่อการลดทอนของแมตซ์ฟิลเตอร์ดังกล่าวแล้วนั้น วิทยานิพนธ์นี้ นำเสนอการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นโดยใช้สมการคิวเบสเซลโพลิโนเมียล (q-Bessel polynomial) [5][6] ที่สามารถปรับค่าพารามิเตอร์ q ได้ตามความเหมาะสม เพื่อศึกษาการเปรียบเทียบประสิทธิภาพการทำงานของ

สัญญาณพัลส์ที่ได้รับที่เครื่องรับปลายทาง โดยแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นที่นำเสนอใหม่ในบทวิจัยนี้ ประกอบด้วยคู่ของ transmission zero และคิวเบสเซลโพลิโนเมียลซึ่งจะใช้เป็นส่วนหนึ่งของสมการฟังก์ชันเศษส่วนแทนการใช้สมการเบสเซลเดิม จากนั้นทำการปรับค่า q ที่เหมาะสม ($0 < q < 1$) จนกระทั่งได้แมตซ์ฟิลเตอร์ที่เป็นเฟสเชิงเส้นซึ่งมีผลตอบสนองต่อการลดทอนของสัญญาณทางด้านรับมีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณทางด้านส่งมากที่สุด

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์แบบเฟสเชิงเส้น โดยกำหนดให้ฟังก์ชันของสมการเศษส่วน (rational function) มีตัวส่วนเป็น คิวเบสเซลโพลิโนเมียล (q-Bessel polynomial) ซึ่งมีเฟสเป็นเส้นตรง (linear phase) โดยทำการประมาณค่า q เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสม ดังจะกล่าวถึงรายละเอียดการออกแบบในหัวข้อต่อไป

4.6.1 ระบบเฟสเชิงเส้น (linear phase system) ของคิวเบสเซลโพลิโนเมียล (q-Bessel polynomial)

เนื่องจากสมการ เบสเซลโพลิโนเมียล มีคุณสมบัติที่มีเฟสเชิงเส้น จากสมการ (2.6.3) ที่ได้แสดงไว้แล้ว ในบทที่ 2

The classical generalized Bessel polynomials

$$y_n(s, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=0}^n (-n)_k \frac{(\alpha+n-1)_k}{k!} \left(-\frac{s}{\beta}\right)^k$$

เมื่อ

$$\frac{(-n)_k}{k!} = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!k!}$$

ในกรณีนี้ นำฟังก์ชันพิเศษของคิวเบสเซลโพลิโนเมียล(q-Bessel polynomial) มาใช้ในการออกแบบ แมตซ์ฟิลเตอร์ สมการคิวเบสเซลโพลิโนเมียล แสดงตามสมการดังนี้

$$y_n(s, \beta, q, q) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(-n)_k (a+n-1)_k}{k! \beta^k} \right]_q \left(\frac{-s}{\beta} \right)^k$$

โดย กำหนดให้ $\alpha = \beta = 2$

ดังนั้น สมการ เขียนใหม่กลายเป็น q -Bessel polynomial ดังสมการ

$$y_n(s, 2, 2, q) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(-n)_k (n+1)_k}{k!} \right] \left(\frac{-s}{2} \right)^k$$

เมื่อ $(n+1)_k = \frac{(n+k)!}{n!}$

inverse q -Bessel polynomial

$$\theta_{2,q}(s) = s^2 + \frac{(1+q)(1+q+q^2)}{2} s + \frac{(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)}{4}$$

เพื่อให้ได้ผลสนองของเอาต์พุตที่ส่ง ใกล้กับสัญญาณอินพุต ขั้นตอนแรก หาค่าลำดับที่เหมาะสมของโพลีโนเมียล ตัวส่วนของ ของคิวเบสเซลโพลีเมียล เราสามารถหาสมการ q -Bessel polynomial ได้จากโดยการแทนค่าจำนวนอันดับ n ตามที่เราต้องการลงในที่นี้เริ่มจาก $n=5$ และ 7 ตามลำดับ และปรับค่า q จะได้ดังสมการ (4.11) และ (4.12)

เมื่อให้ $n=5, q=0.85$ จะได้

$$y_5(s) = s^5 + 16.8s^4 + 134.7s^3 + 631.6s^2 + 1705.5s + 2095.8 \quad (4.11)$$

เมื่อให้ $n=7, q=0.85$ จะได้

$$y_7(s) = s^7 + 30s^6 + 530s^5 + 5450s^4 + 37700s^3 + 174890s^2 + 500180s + 676400 \quad (4.12)$$

4.6.2 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์โดยใช้คิวเบสเซล

4.6.2.1 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่ไม่มีคู่ซีโร่

(the approximation of causal raised-cosine pulse without transmission zeros)

สมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง สามารถเขียนเป็น

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \quad (4.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ m คือ อันดับของตัวเศษที่เป็นโพลิโนเมียล n คือ อันดับของตัวส่วนที่เป็นโพลิโนเมียลโดยที่ $m \leq n$ และ s คือ ตัวแปรความถี่ เพื่อให้ได้สัญญาณเรสโตโคไซน์ที่มีคุณสมบัติเป็นอิมพัลส์เชิงสาเหตุ ดังแสดงแสดงได้ในรูปที่ 4.1

กำหนดให้ $Q_n(s)$ เป็น ตัวส่วนของสมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง ของ linear phase คิวเบสเซลโพลิโนเมียลเฟสเชิงเส้น และ

ให้ $P_m(s)$ เป็นตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง ของคิวเบสเซลโพลิโนเมียลเฟสเชิงเส้นมีค่าเป็น 1 ดังนั้น สมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง เขียนใหม่เป็น

$$H(s) = \frac{1}{Q_{n,q}(s)} \quad (4.14)$$

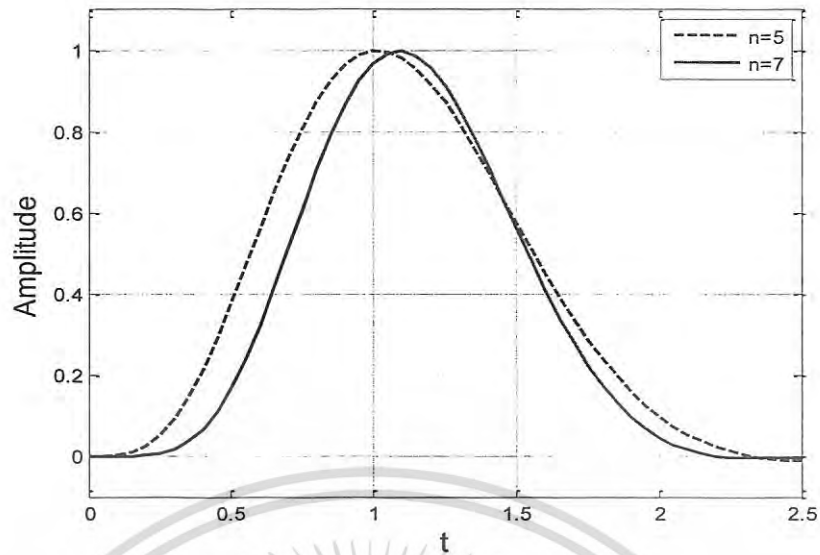
ให้ $Q_{n,q}(s)$ เป็นคิวเบสเซลโพลิโนเมียล ที่มีลำดับเป็นเลขคี่ เริ่มตั้งแต่ $n=1,3$ และ 7 แล้ว ปรับค่า q ผลตอบสนองแบบเชิงเส้นของ สมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง ในขอบข่ายของเวลา สำหรับสัญญาณ ที่มี ขนาดของสัญญาณ มีค่าสูงสุด เป็น 1 โดย ปรับค่า $n=5$ และ $n=7$ เมื่อ $q=0.85$ ตามลำดับ จากนั้นนำไปเขียนกราฟ ผลของการประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง ในรูปของขนาดและผลตอบสนองการลดทอนได้ตามรูปที่ 4.7 และ 4.8 ตามลำดับ

$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 16.8s^4 + 134.7s^3 + 631.6s^2 + 1705.5s + 2095.8} \quad (4.15)$$

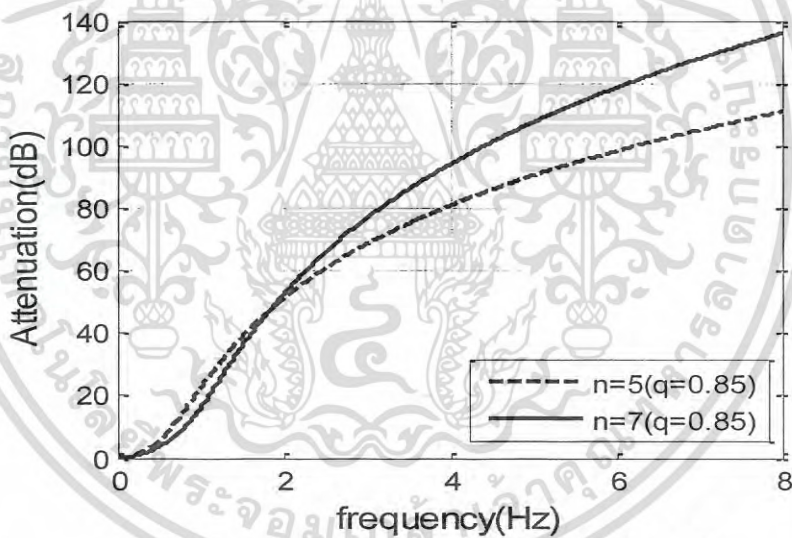
และ

$$H(s) = \frac{1}{s^7 + 30s^6 + 530s^5 + 5450s^4 + 37700s^3 + 174890s^2 + 500180s + 676400} \quad (4.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.7 สัญญาณเรสต์โคไซน์โดยตัวเศษมีค่าทางขนาดเท่ากับ 1 และใช้คิวเบสเซลโพลิโนเมียลเป็นตัวส่วน



รูปที่ 4.8 ผลตอบสนองของการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์โดยใช้คิวเบสเซลโพลิโนเมียล

จากผลตอบสนองของสัญญาณเฟสเชิงเส้น ที่แสดงในรูปที่ 4.7 ก็พบว่า ผลที่ได้รับภายใน main lobe ที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 2 ซึ่งอ้างถึง สัญญาณเชิงสาเหตุที่เป็นเชิงเส้น ถ้าสมการลำดับ n ของสมการฟังก์ชันเศษส่วนหลักเพิ่มขึ้น ช่วงเวลาของพัลส์จะมีช่วงแคบลง

สำหรับการประมาณผลตอบสนองของการลดทอนของสัญญาณพัลส์เชิงสาเหตุ โดยไม่มีคู่ส่ง ซีโร ที่แสดงในรูปที่ 4.8 ซึ่งไม่มีการหาขอบหยุดของพัลส์ ผลจากการประมาณพัลส์ที่เกิดขึ้น สอดคล้องกับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลตอบสนองของสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ นั้นคือโพลีโนเมียลตัวเศษคู่ซีโรที่จำกัดถูกนำมาใช้ได้ รายละเอียดของการประมาณจะกล่าวถึงต่อไป

4.6.2.2 การประมาณฟังก์ชันของสัญญาณเรสต์โคไซน์ที่มีคู่ซีโร

(the approximation of causal raised-cosine pulse with transmission zeros)

ผลตอบสนองของสัญญาณการลดทอนเรสต์โคไซน์ ส่งผ่านเป็นคู่คอมเพล็กซ์คอนจูเกตที่มีค่าจำนวนจริงเป็นซีโรที่ $\pm jk\pi, k=2,3,4,5,6,\dots,m$, และ ผลตอบสนองของสัญญาณการลดทอนเรสต์โคไซน์ ในทางอุดมคติ ที่แสดงตามรูปที่ 4.2 ในขั้นตอนนี้ตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วนมีคู่ซีโรที่ $\pm jk\pi, k=2,3,4,5,6,\dots,m$, ระบบโดยรวม จะมีย่านความถี่หยุดของการลดทอน ดังนั้นสมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง เขียนใหม่เป็น

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_{n,q}(s)} = K \prod_{k=1}^{m/2} (s^2 + \omega_k^2) / \prod_{k=1}^n (s - p_k) \quad (4.17)$$

โดยที่ m คืออันดับของตัวเศษของสมการฟังก์ชันเศษส่วนที่เป็นโพลีโมเมียล

K คือค่าคงที่จำนวนจริง $\pm j\omega_k$ และ

p_k คือโพลในครึ่งซ้ายของระนาบ S (s -plane)

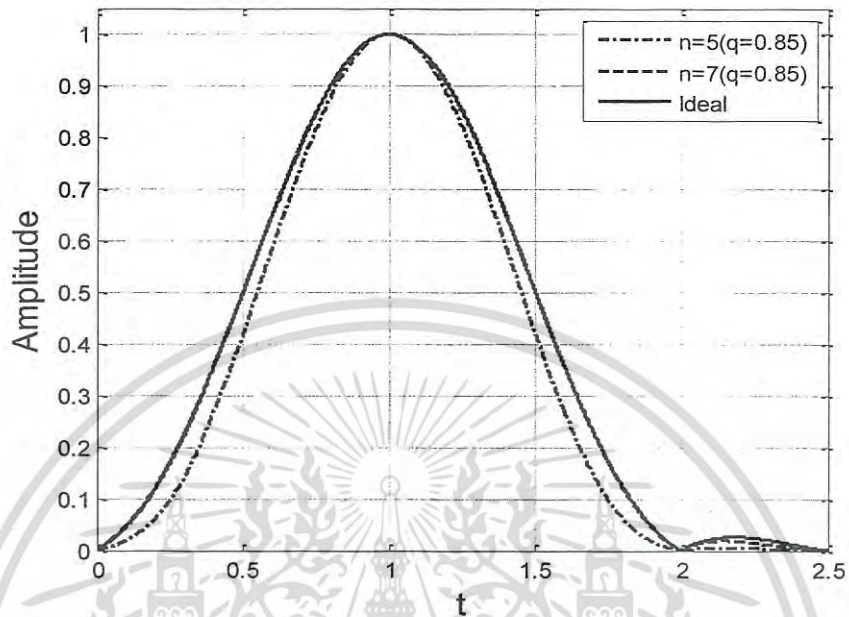
การประมาณสมการฟังก์ชันเศษส่วนที่เป็นโพลีโมเมียล ด้วยคู่ซีโรที่ $\pm j2\pi, \pm j3\pi, \pm j4\pi, \pm j5\pi$ สามารถใช้เป็นต้นแบบของสมการฟังก์ชันเศษส่วนของตัวกรอง โดยค่าของซีโรและโพลของฟังก์ชันที่เกิดขึ้นแสดงตามตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าซีโรและโพลของสมการฟังก์ชันเศษส่วนโดยใช้ควเบสเซลโพลีโนเมียล

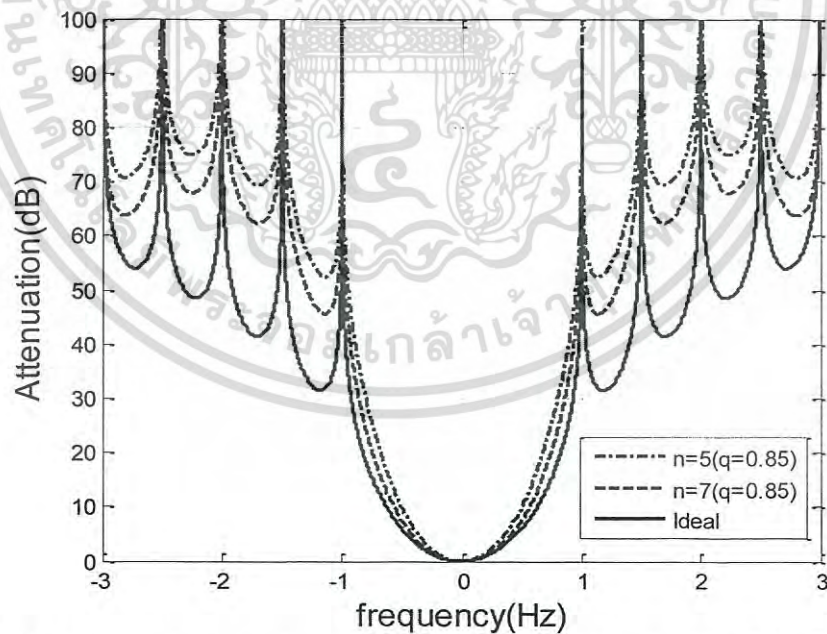
Zeros	Poles, $n = 5$	Poles, $n = 7$
$\pm j2\pi$	$-2.3511 \pm j4.3299$	$-2.4597 \pm j6.9925$
$\pm j3\pi$	$-3.8778 \pm j2.2092$	$-4.7707 \pm j4.8193$
$\pm j4\pi$	-4.3344	$-5.9932 \pm j2.4541$
$\pm j5\pi$		-6.3828
$\pm j6\pi$		

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลของสมการที่มีค่า โพลและซีโร ตามตารางที่ 4.2 ให้ผลตอบสนองทางขนาดเฟสเชิงเส้น และ ผลตอบสนองทางการลดทอน ตามรูป ที่ 4.9, 4.10, 4.11 และ 4.12 ตามลำดับ

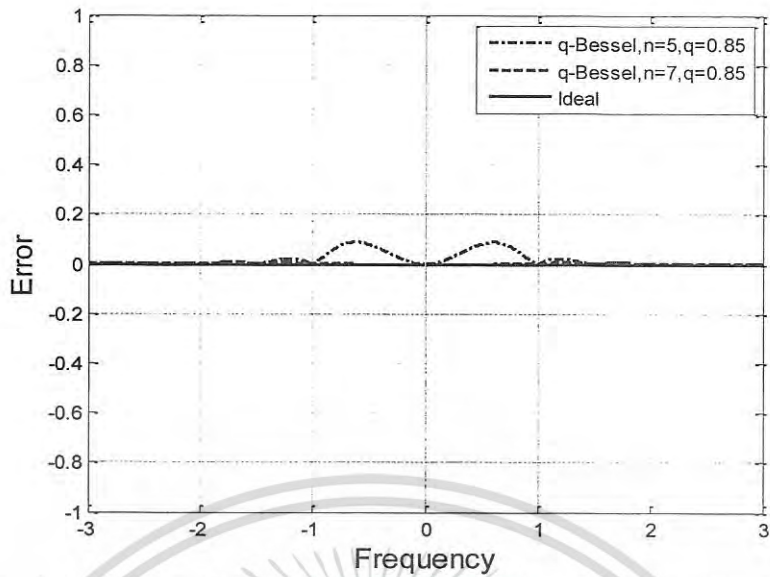


รูปที่ 4.9 ผลตอบสนองเฟสเชิงเส้นของสัญญาณในเชิงเวลา (แสดงตามค่า n)

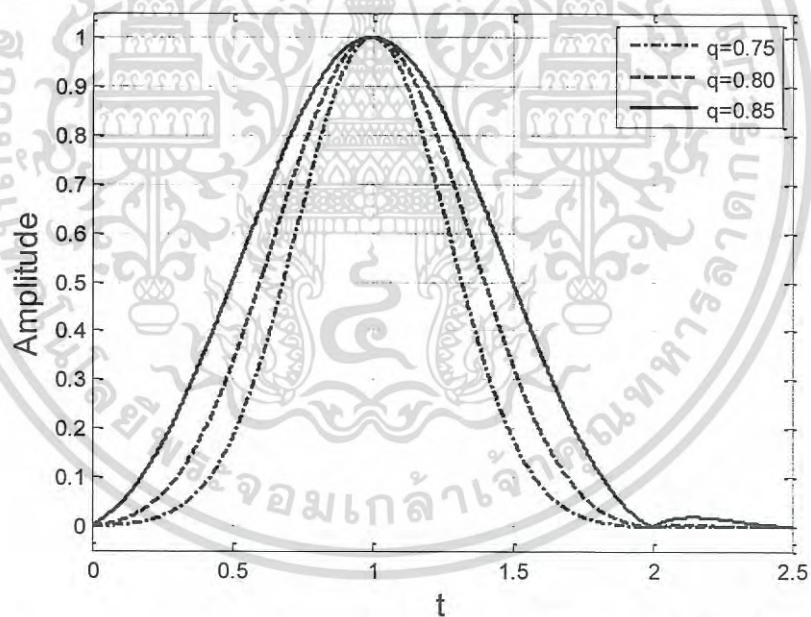


รูปที่ 4.10 ผลตอบสนองทางการลดทอนของการประมาณสัญญาณเรสต์โคไซน์เฟสเชิงเส้น (แสดงตามค่า n)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

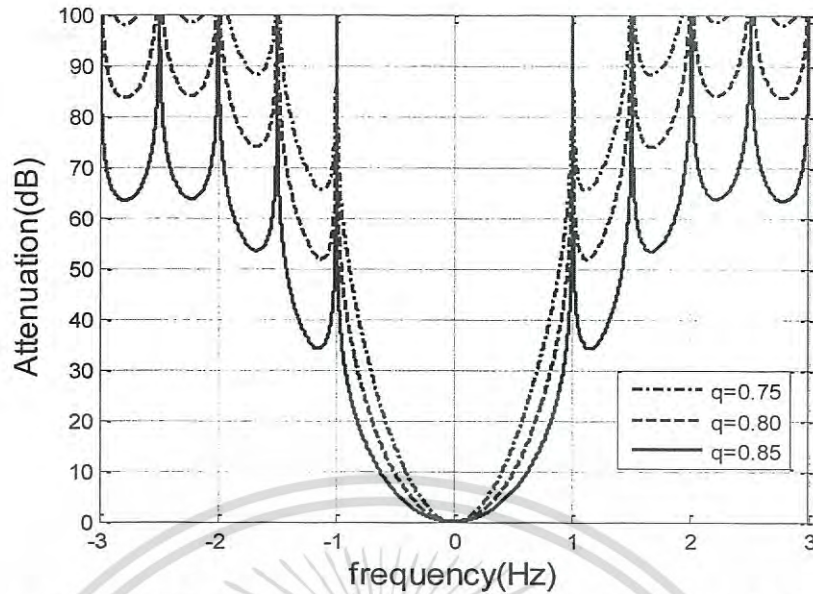


รูปที่ 4.11 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง q-Bessel $n=5, n=7$ กับสัญญาณเรสโคไซน์ในอุดมคติ

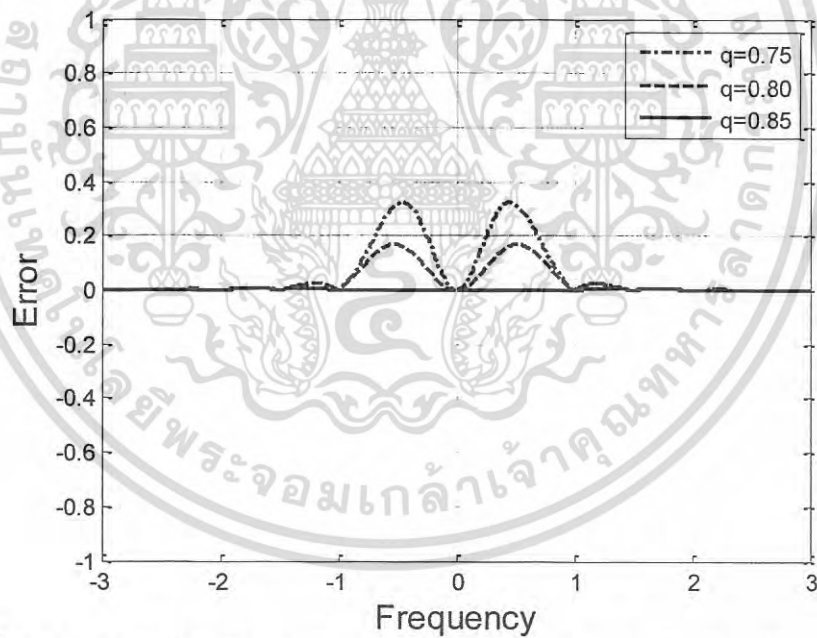


รูปที่ 4.12 ผลตอบสนองเฟสเชิงเส้นของสัญญาณสัญญาณเรสโคไซน์ที่ $n=7$ ในเชิงเวลา (แสดงตามค่า q)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

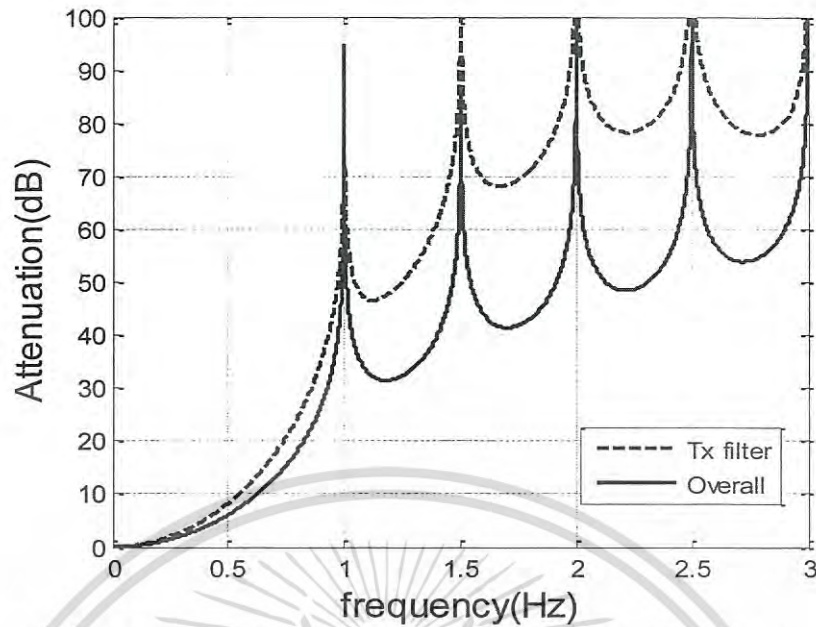


รูปที่ 4.13 ผลตอบสนองทางการลดทอนที่ $n = 7$ ของการประมาณสัญญาณเรสโตโคไซน์เฟสเชิงเส้น (แสดงตามค่า q)



รูปที่ 4.14 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดของ q-Bessel ตามค่า q ต่างๆ ที่ $n = 7$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 ผลตอบสนองทางการลดทอนของการตัวกรองด้านส่งและด้านรับ

4.7 สรุป

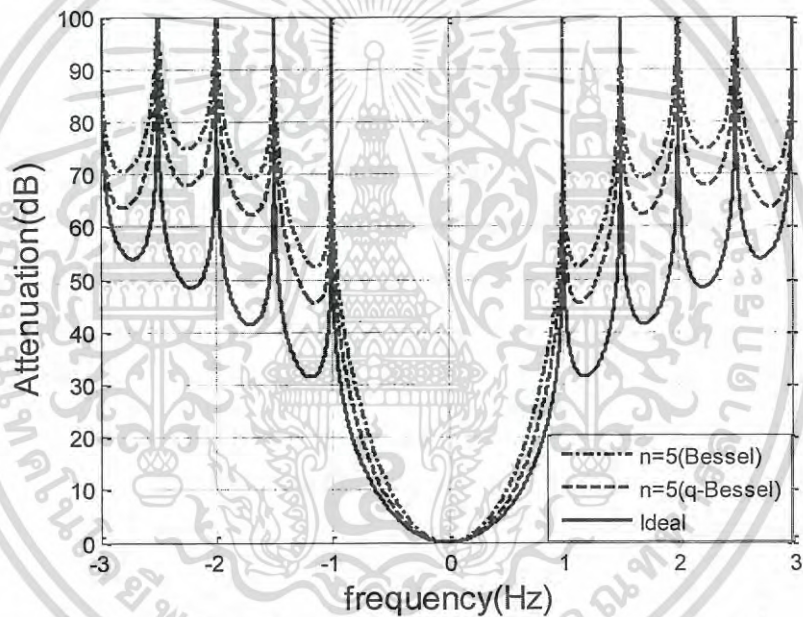
วิทยานิพนธ์นี้ เสนอการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์ บนพื้นฐานของเบสเซลโพลีโนเมียล ผลตอบสนองทางเอตต์พุด แสดงตามรูปที่ 4.9 ที่ $n = 7$ จะเห็นว่าสัญญาณคล้ายกับ สัญญาณอิมพัลส์ที่ได้รับทางด้านรับ ในขณะที่ยังคงรูปร่างสัญญาณเรสโตโคไซน์สมมาตรของผลตอบสนองอิมพัลส์ภายใต้เงื่อนไขของการมีเฟสเชิงเส้น พัลส์เอตต์พุดถูกปรับให้มีขนาดของสัญญาณเป็น 1 และมี ความกว้างของพัลส์ เท่ากับ $2T$ การ เปรียบเทียบระหว่างผลตอบสนองของการลดทอนของตัวกรองในการส่ง และค่าของผลการลดทอนทั้งหมดของระบบ แสดงตามรูปที่ 4.15 สามารถสรุปได้ว่า ประสิทธิภาพการทำงานของฟิลเตอร์ที่นำเสนอมีประสิทธิภาพมากกว่าการใช้เบสเซลโพลีโนเมียลเดิม

บทที่ 5

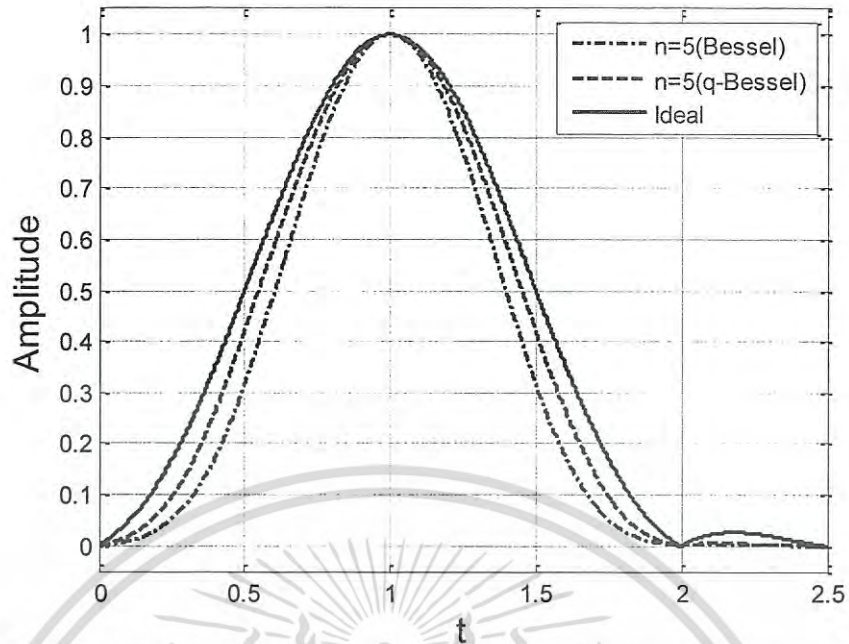
เปรียบเทียบผลการวิจัยและสรุปผลการวิจัย

5.1 เปรียบเทียบผลการวิจัย

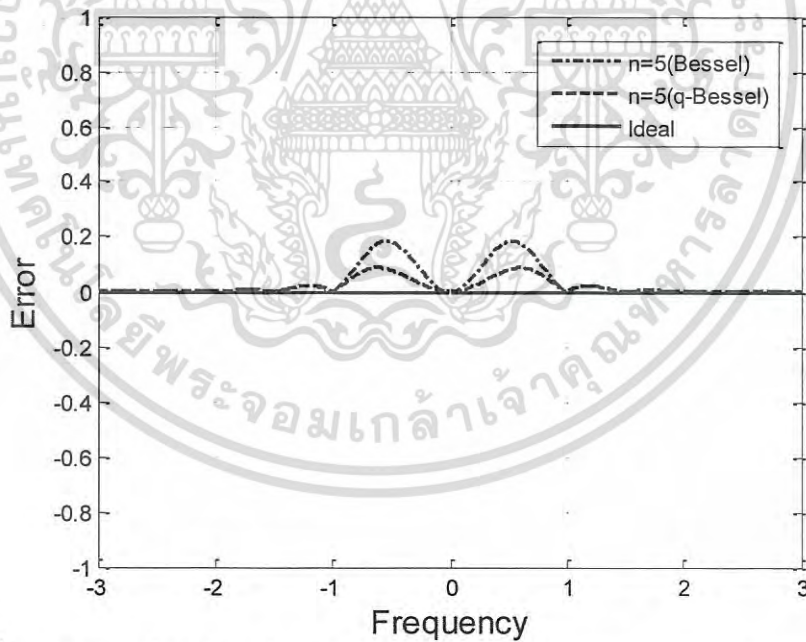
จากการศึกษาเปรียบเทียบผลตอบสนองของแมตซ์ฟิลเตอร์ที่ออกแบบโดยใช้สมการเบสเซลโพลิโนเมียล (Bessel polynomial) และ แมตซ์ฟิลเตอร์ที่ออกแบบนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้โดยใช้ควเบสเซลโพลิโนเมียล (q-Bessel polynomial) ดังแสดงในรูปที่ 5.1 พบว่า ที่สมการลำดับที่ $n = 5$ เท่ากัน ผลตอบสนองทางการลดทอนของสัญญาณเรสโตโคไซน์ของตัวกรองแมตซ์ โดยใช้ควเบสเซลโพลิโนเมียลมีค่าใกล้เคียงกับค่าการลดทอนของสัญญาณเรสโตโคไซน์ในอุดมคติมากกว่าการเบสเซลโพลิโนเมียลอย่างเดียว และในทุกๆลำดับของสมการก็ยังคงมีค่าการลดทอนใกล้เคียงกว่าเช่นเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.1 ผลตอบสนองทางการลดทอนของสัญญาณเรสโตโคไซน์ ที่ $n = 5$

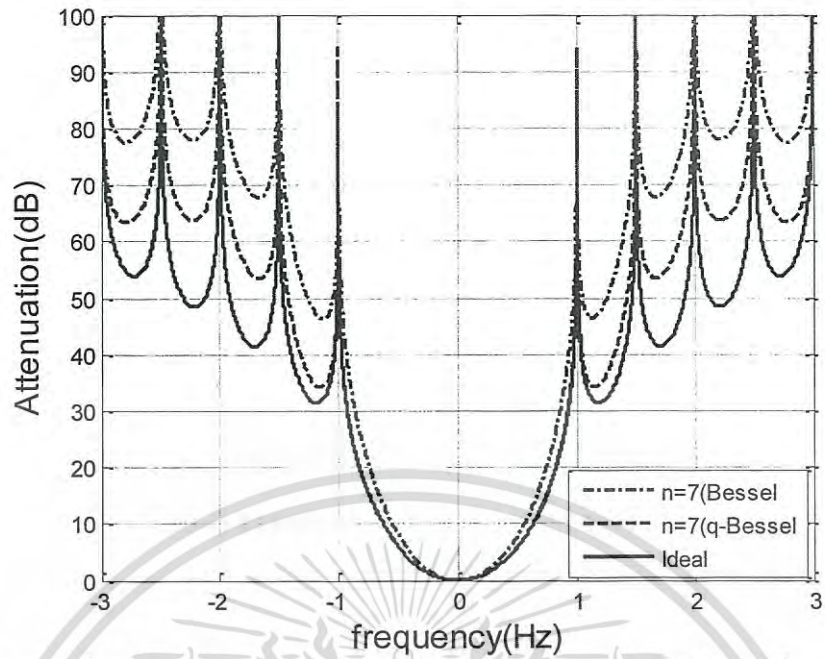


รูปที่ 5.2 ผลตอบสนองของสัญญาณเรสต์โคไซน์ของ Bessel และ q-Bessel ที่ $n = 5$ และสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติในเชิงเวลา

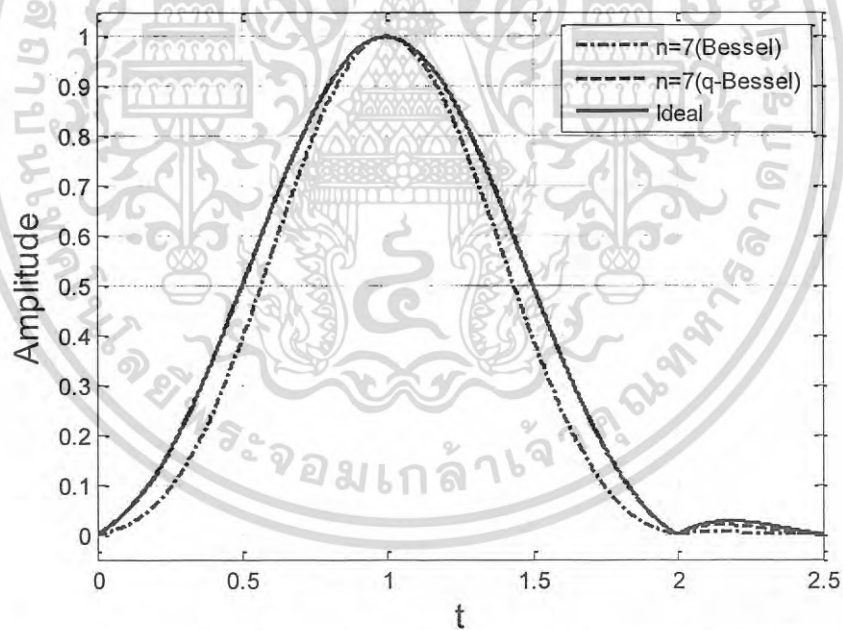


รูปที่ 5.3 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง Bessel และ q-Bessel ที่ $n = 5$ กับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

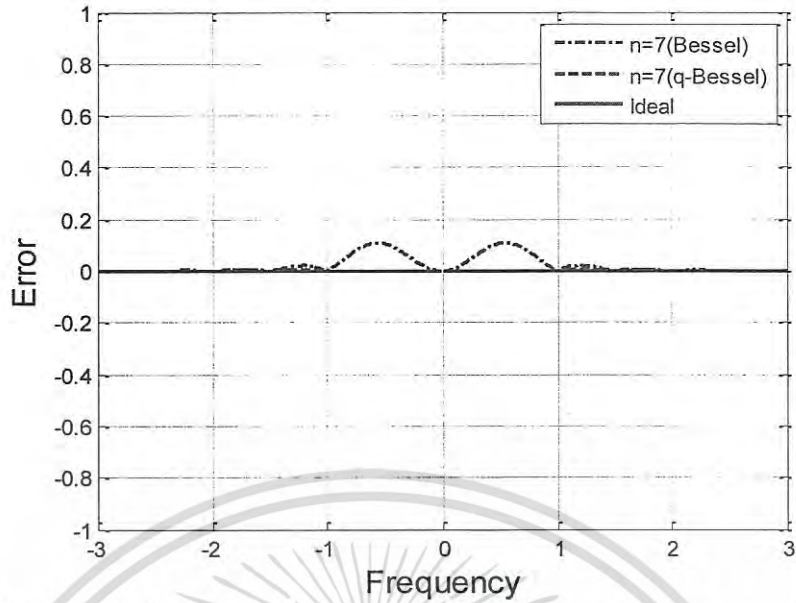


รูปที่ 5.4 ผลตอบสนองทางการลดทอนของสัญญาณเรสต์โคไซน์ ที่ $n = 7$



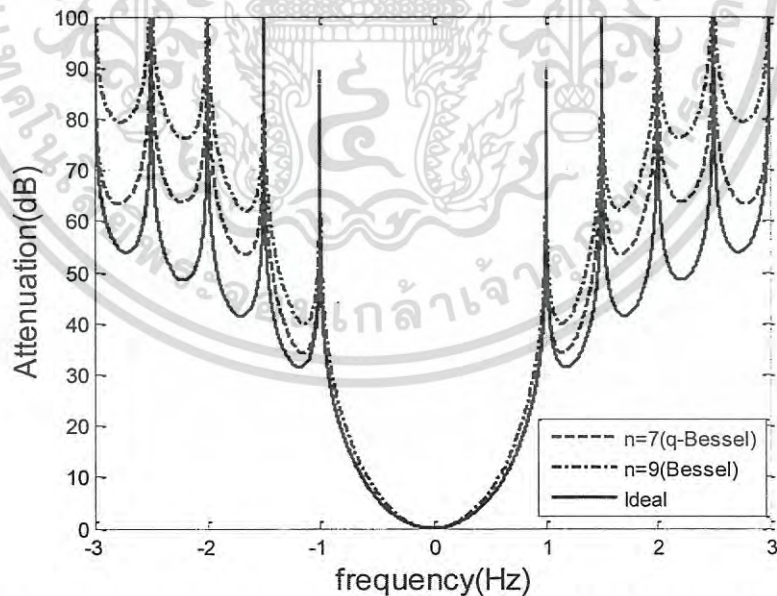
รูปที่ 5.5 ผลตอบสนองของสัญญาณ ที่ $n = 7$ เทียบกับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติในเชิงเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



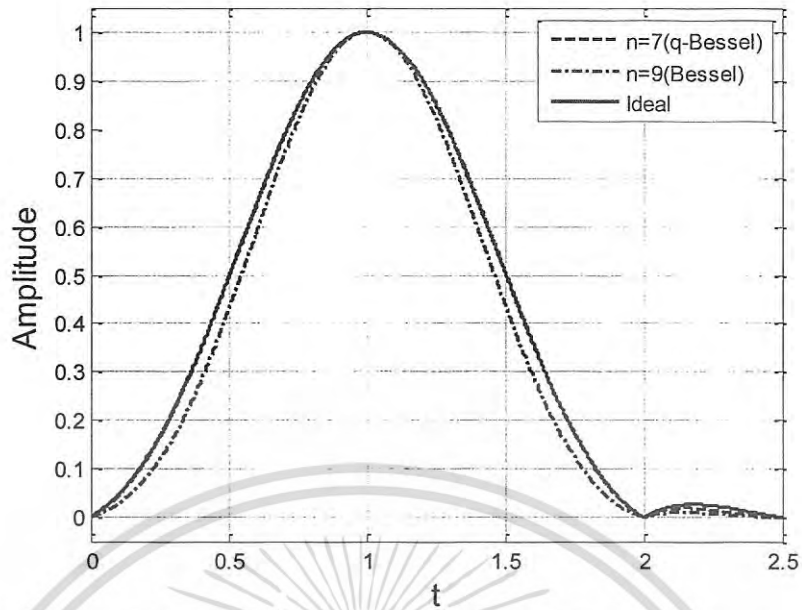
รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง Bessel และ q-Bessel ที่ $n = 7$ กับสัญญาณเรสโคไซน์ในอุดมคติ

รูปที่ 5.2 และ รูปที่ 5.5 เปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเวลา กับผลตอบสนองเชิงเวลาในอุดมคติ ซึ่งจะเห็นว่ายังคงเป็นสัญญาณเชิงสาเหตุสมมาตร ไม่เปลี่ยนแปลง

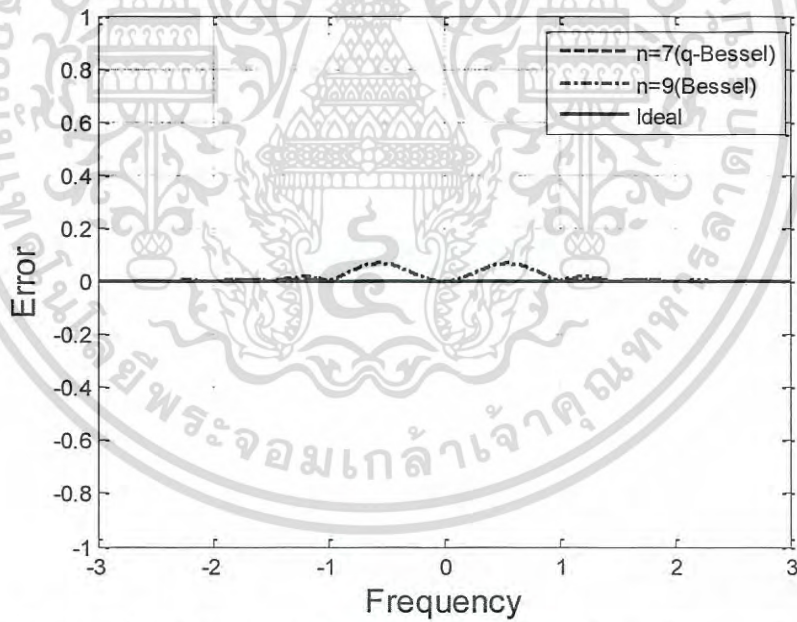


รูปที่ 5.7 ผลตอบสนองทางการลดทอนของสัญญาณเรสโคไซน์ระหว่าง Bessel $n = 9$ และ q-Bessel $n = 7$ เทียบกับสัญญาณเรสโคไซน์ในอุดมคติในเชิงความถี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.8 ผลตอบสนองของสัญญาณเรสต์โคไซน์ระหว่าง Bessel $n=9$ และ q-Bessel $n=7$ เทียบกับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติในเชิงเวลา



รูปที่ 5.9 การเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดระหว่าง Bessel $n=9$ และ q-Bessel $n=7$ กับสัญญาณเรสต์โคไซน์ในอุดมคติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.7 และรูปที่ 5.8 เป็นการเปรียบเทียบระหว่างผลตอบสนองของสัญญาณต่างลำดับกัน ที่เป็นการยืนยันว่า สมการ q -Bessel ให้ผลตอบสนองที่ดีกว่า การใช้ Bessel เดิม

5.2 สรุปผลการวิจัย

- การใช้คิวเบสเซลโพลิโนเมียลในการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นพบว่าผลตอบสนองของสัญญาณด้านรับจะมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นที่ใช้เบสเซลโพลิโนเมียลธรรมดา โดยจะสังเกตเห็นได้ว่าแม้จำนวนอันดับของสมการฟังก์ชันเศษส่วนที่ใช้คิวเบสเซลเป็นตัวส่วนจะมีอันดับที่น้อยกว่า สมการฟังก์ชันเศษส่วนที่ใช้เบสเซลธรรมดาเป็นตัวส่วน เพียงแต่มีการปรับค่า q ที่เหมาะสม ก็จะได้สัญญาณที่ผ่านตัวกรองจากแมตซ์ฟิลเตอร์ที่ออกแบบโดยใช้คิวเบสเซลโพลิโนเมียล ที่มีประสิทธิภาพได้และในทำนองเดียวกันสัญญาณที่ได้ก็จะมีคุณภาพใกล้เคียงกับสัญญาณทางด้านส่งตามไปด้วย

- ในการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นโดยใช้เบสเซลโพลิโนเมียลธรรมดานั้น การที่จะทำให้สัญญาณทางด้านรับมีประสิทธิภาพและให้ได้สัญญาณใกล้เคียงกันกับสัญญาณทางด้านส่ง ทำได้เพียงทางเดียวคือต้องทำการเพิ่มจำนวนอันดับของสมการฟังก์ชันเศษส่วนเท่านั้น แต่ในทางตรงข้ามยิ่งจำนวนอันดับของสมการฟังก์ชันโพลิโนเมียลสูง ยิ่งให้การนำเอาไปใช้งานจริงในการออกแบบวงจรเพื่อใช้งานจริงก็จะมีคามยุ่งยากขึ้นตามไปด้วย

- ในการออกแบบแมตซ์ฟิลเตอร์เฟสเชิงเส้นโดยใช้คิวเบสเซลโพลิโนเมียล สามารถทำให้สัญญาณทางด้านรับมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับสัญญาณทางด้านส่งได้ โดยแม้จะใช้จำนวนอันดับที่น้อย เพราะว่าสมการคิวเบสเซลโพลิโนเมียลที่ใช้จะมีค่าสัมประสิทธิ์ q ที่เอาไว้ให้เราปรับค่าที่เหมาะสมตามจำนวนอันดับของสมการฟังก์ชันเศษส่วนได้ ฉะนั้นหากเรามีการปรับค่า q ที่เหมาะสมตามจำนวนอันดับของสมการฟังก์ชันเศษส่วน ซึ่งจะทำให้เราไม่จำเป็นต้องทำการเพิ่มจำนวนอันดับของสมการฟังก์ชันเศษส่วนก็เป็นได้ นั่นก็หมายความว่าเราจะได้สมการฟังก์ชันเศษส่วนที่จะนำไปสร้างวงจรเพื่อใช้งานจริงที่อันดับไม่จำเป็นต้องสูง ซึ่งจะทำให้เราทำการออกแบบและสร้างวงจรได้ง่ายยิ่งขึ้น

สรุปได้ว่าการใช้สมการคิวเบสเซลโพลิโนเมียลเป็นตัวส่วนของสมการฟังก์ชันเศษส่วนจะให้ผลตอบสนองของสัญญาณด้านรับมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับสัญญาณทางด้านส่งมากกว่าการใช้เบสเซลโพลิโนเมียลธรรมดา ในจำนวนอันดับที่น้อยกว่าของสมการคิวเบสเซลโพลิโนเมียลหากมีการปรับค่า q ที่เหมาะสม

เอกสารอ้างอิง

- [1] Haykin S. **Communications system**. New York : Wiley, Inc. 2001.
- [2] A.K.Kisel. “An extension of pluse shaping filter theory.” **IEEE Transaction on Communication.**, vol. 47,issue 5, 1999. pp. 645–647
- [3] Saleh Sanussi Mneina., Gert O.Martens. “Linear phase matched filter design with causal real symmtric impulse response.” **AEC International Journal of Electronics and Communications**, vol. 63, issue 2, 2009. pp. 83-91
- [4] Virote Pirajnanchai., Vanvisa Chutchavong., Kanok Janchitrapongvej. “Modification of Data transmission Filter with Generalized Bessel Transformation.” **International Conference on Control, Automation and Systems**. Gyeonggi-do, Korea, 2010. pp.2202-2205
- [5] G.Dattoli-A.Torre, **q-Bessel Functions ; the Point of View of the GeneratingFunction Method**, submitted to *Rendiconti di Matematica*.
- [6] Thomas Ernst. **A New Method and Its Application to Generalized q-Bessel Polynomials**,
http://www.researchgate.net/publication/228598268_A_new_method_and_its_Application_to_Generalized_q-Bessel_Polynomials
- [7] R. Singthongchai., V. Chutchavong., O.Sangaroon., K. Janchitrapongvej. “On the Approximation of Sine-Squared Pulse for Audio Test Signal,” **ICEAST Conference**, 2012.
- [8] R. Singthongchai., O.Sangaroon., K. Janchitrapongvej. “q-Bessel Polynomials for Linear Phase Matched Filter”, **IEEE Transaction on Communication**, 2014.
- [9] Saleh Sanussi Mneina., Gert O. Martens. “Linear phase matched filter design with causal real symmetric impulse response”, **International Journal of Electronics and Communications**, 2007.
- [10] K.Janchiraponvej., V.Vivek., K.Tipsukunchai. “On the Approximation of Sine Squared by Using Optimization,” **13th Electrical Engineering Conference**, 1990.
- [11] Thomson W.E.**The Synthesis of Network to have a Sine Squared Impulse Response**, NOV 1592.

เอกสารอ้างอิง(ต่อ)

- [12] Krall.,H.L., Frik, Orrin .A new class of orthogonal Polynomial : the Bessel polynomial,Math .Soc, Inc. 1959.
- [13] L. Krall. Time domain Synthesis of Linear Networks, United States of America , Prentice-Hall, Inc. 1971.
- [14] W.Y.Yang., S.C. Lee. Circuit System s with MATHLAB and PSpice, John Wiley \$Sons (Asia), Sigapore, Inc2007.
- [15] Kendall, L. Time-domain synthesis of linear networks. United States of America :Prentice-Hall, Inc. 1971.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นายฤทธิชัย สิงห์ทองชัย
 วัน เดือน ปีเกิด 3 มีนาคม 2531 ที่หนองคาย
 ที่อยู่ 758/145 หมู่บ้านพฤษภาวิไล 57 ซ.พัฒนาการ 38 ถ.พัฒนาการ
 แขวงสวนหลวง เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250 โทร.083-5468533
 ประวัติการศึกษา 2535 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศ
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
 ประสบการณ์การทำงานและผลงานวิจัย
 ปัจจุบัน พนักงาน บริษัท ทูรู คอร์ปอเรชั่น
 พ.ศ.2558 โฉ่ห้เกียรติคุณ True Star จากผู้บริหาร ทูรู คอร์ปอเรชั่น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้