วิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยสำหรับปัญหาค่าต่ำสุด และการโปรแกรม

DECOMPOSITION PRINCIPLE FOR MINIMIZATION PROBLEM AND PROGRAMMING

นภาพร มณีอินทร์
ปิยะพันธ์ โอจำเนียร
อรนิช ศรีประเสริฐ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

วิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยสำหรับปัญหาค่าต่ำสุด และการโปรแกรม

DECOMPOSITION PRINCIPLE FOR MINIMIZATION PROBLEM AND PROGRAMMING

นภาพร มณีอินทร์

ปิยะพันธ์ โอจำเนียร

อรนิช ศรีประเสริฐ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

DECOMPOSITION PRINCIPLE FOR MINIMIZATION PROBLEM AND PROGRAMMING

NAPAPORN MANEEIN

PIYAPAN OJUMNIAN

ORRANID SRIPRASERT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อโครงงานพิเศษ	วิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยสำหรับปัญหาค่าต่ำสุด และการโปรแกรม Decomposition Principle for Minimization Problem And Programming
ชื่อนักศึกษา	นางสาวนภาพร มณีอินทร์ รหัสนักศึกษา 55050076 นายปิยะพันธ์ โอจำเนียร รหัสนักศึกษา 55050092 นางสาวอรนิช ศรีประเสริฐ รหัสนักศึกษา 55050174
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต(คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฎฐ์ แจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษศึกษานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.กาญจนา คำนึงกิจ ประธานกรรมการ	ก.คณ
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการ	
ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฎฐ์ แจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อโครงงานพิเศษ	วิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยสำหรับปัญหาค่าต่ำสุด และการโปรแกรม Decomposition Principle for Minimization Problem and Programming
ชื่อนักศึกษา	นางสาวนภาพร มณีอินทร์ รหัสนักศึกษา 55050076 นายปิยะพันธ์ โอจำเนียร รหัสนักศึกษา 55050092 นางสาวอรนิช ศรีประเสริฐ รหัสนักศึกษา 55050174
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต(คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฎฐ์ แจ่มศรี

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการหาค่าที่เหมาะสมด้วยวิธีกำหนดการเชิงเส้นสำหรับปัญหาค่าต่ำสุดโดยแยกเป็นปัญหาย่อยที่อยู่บนพื้นฐานของวิธีซิมเพล็กซ์ปรับปรุง เนื่องจากวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยสามารถแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ โดยการแบ่งปัญหาใหญ่ออกเป็นปัญหาย่อยๆ ทำให้เมทริกซ์ที่คำนวณมีขนาดเล็กลงซึ่งทำให้ประหยัดหน่วยความจำในการคำนวณและสะดวกต่อการหาคำตอบ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยไม่เพียงแต่คำนวณค่าที่เหมาะสม แต่ได้ศึกษาทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งถึงที่มาของวิธีการและการกำหนดตัวแปรต่าง ๆ นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ทำการเขียนโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวณและเทียบผลที่ได้กับปัญหาที่สามารถหาคำตอบได้ไม่ยากนัก ซึ่งผลที่ได้ตรงกันเป็นอย่างดี

คำสำคัญ : คำตอบที่เหมาะสม ค่าวัตถุประสงค์ ค่าขอบล่าง โปรแกรมแมทแลบ

Title	Decomposition Principle for Minimization Problem and Programming	
Students	Miss Napaporn Maneein	55050076
	Mr. Piyapan Ojumnian	55050092
	Miss Orranid Sriprasert	55050174
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Advisor	Asst.Prof.Dr. Kannanut Chamsri	

ABSTRACT

The objective of this work is to find an optimal solution of a minimization problem using decomposition principle based on revised simplex method. The decomposition method has been developed to divide a large problem to be smaller ones and solve each one by using an iteration method. The fact is that the decomposition method maintains smaller matrices than the simplex method while calculating the solution. This can save space on your computer. In this work we provide theoretical interpretation to understand the method deeply in detail, not just to calculate the results. Moreover we write a program to determine the optimal solution and compare with an available solution with good agreement

Keyword : optimal solution , objective value , lower bound , matlab programming

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำปัญหาพิเศษเรื่อง การโปรแกรมวิธีการซิมเพล็กซ์โดยใช้แมทแลบ คณะผู้จัดทำต้องขอบพระคุณ ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฏฐ์ แจ่มศรี เนื่องด้วยเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาและรับผิดชอบปัญหาพิเศษของผู้จัดทำด้วยดีมาตลอดและกรุณาให้ความช่วยเหลือในส่วนของคำแนะนำ และการแก้ปัญหาในเรื่องต่างๆ รวมทั้งยังตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้ยังขอขอบคุณเพื่อน รุ่นพี่ หรือบุคคลอื่นๆ ที่อาจจะไม่ได้กล่าวถึง ที่คอยช่วยเหลือในด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น ทุนทรัพย์ กำลังใจ หรือปัจจัยอื่นๆที่เป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

นภาพร มณีอินทร์
ปิยะพันธ์ โอจำเนียร
อรนิช ศรีประเสริฐ

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาของปัญหาพิเศษ

Linear Programming คือ การโปรแกรมเชิงเส้น เป็นเทคนิคที่รู้จักอย่างแพร่หลาย คือการนำเอาข้อจำกัดต่าง ๆ เงื่อนไขต่าง ๆ มาเขียนให้อยู่ในรูปของสมการหรืออสมการ จากนั้นนำตัวแบบที่ได้ไปแก้ปัญหาด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้คำตอบที่สอดคล้องกับเป้าหมายที่ต้องการและเงื่อนไขข้อจำกัดต่าง ๆ ซึ่งการหาผลลัพธ์ที่เป็นที่นิยมใช้กันมี 2 วิธีคือ การใช้กราฟสำหรับปัญหาที่มีตัวแปร2ตัวแปรและวิธีการสร้างตารางสำหรับปัญหาที่มีตัวแปรหลายตัวแปร ซึ่งที่เห็นโดยทั่วไปคือวิธีการซิมเพล็กซ์ (Simplex Method)

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยทั่วไป เป็นปัญหาขนาดใหญ่ ส่วนมากไม่ใช้วิธีการซิมเพล็กซ์โดยตรงแต่จะมีการพัฒนาปรับปรุงให้เหมาะสมต่อการใช้คอมพิวเตอร์ วิธีการที่ใช้กันบ่อยคือ วิธีการซิมเพล็กซ์ปรับปรุง (Revised Simplex Method) แต่ถ้าปัญหาที่เจอมีขนาดใหญ่มากกระบวนการที่เหมาะสมวิธีการหนึ่ง ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ก็คือกระบวนการที่เรียกว่า วิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (Decomposition Method) ซึ่งในงานวิจัยนี้เราได้ศึกษาถึงที่มาของวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย รวมถึงการเขียนโปรแกรมแมทแลบในการหาคำตอบ ในที่นี้เราศึกษาเพียงปัญหาค่าต่ำสุด

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (Decomposition Method) และนำวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยมาใช้ในการแก้ไขปัญหาค่าต่ำสุด
2. เพื่อหาคำตอบที่เหมาะสมโดยวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (Decomposition Method)
3. เพื่อนำความรู้ของวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยไปประยุกต์ใช้กับการเขียนโปรแกรมแมทแลบ
4. เพื่อนำปัญหาที่เราศึกษาไปพัฒนาและต่อยอดในด้านการศึกษาและการทำงาน

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

เราสนใจปัญหาค่าต่ำสุด ที่มีรูปแบบทั่วไปดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && \mathbf{cx} \\ &\textit{Subject to} && \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

และนำมาเขียนโปรแกรมแมทแลบเพื่อช่วยในการคำนวณปัญหาที่เราสนใจ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถนำความรู้พื้นฐานในวิชา Linear Algebra และวิชา Optimization มาใช้ในการศึกษางานวิจัยนี้
2. ได้รับความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิธีซิมเพล็กซ์และวิธีซิมเพล็กซ์ปรับปรุง
3. เข้าใจอย่างลึกซึ้งถึงวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย
4. สามารถหาค่าที่เหมาะสมได้โดยวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย
5. สามารถเขียนโปรแกรมแมทแลบที่เกี่ยวข้องกับปัญหาที่สนใจ

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ
2. ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา
3. ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (Decomposition Method) และการเขียนโปรแกรมแมทแลบ
4. นำความรู้ที่ได้จากการศึกษาและหาผลเฉลย
5. เขียนโปรแกรมแมทแลบที่ใช้ในการคำนวณการหาค่าที่เหมาะสม
6. สรุปผลงานวิจัย

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน											
	ปี 2558							ปี 2559				
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ	↔	↔										
2.ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา			↔	↔	↔							
3.ศึกษาการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการการแยกเป็นปัญหาย่อยบนพื้นฐานของวิธีการซิมเพล็กซ์ปรับปรุง			↔	↔	↔	↔						
4.นำความรู้และวิธีการที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดในคำนวณปัญหาที่มีขนาดใหญ่					↔	↔	↔					
5.ประยุกต์ใช้วิธีการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยวิธีการการแยกเป็นปัญหาย่อยบนพื้นฐานของวิธีการซิมเพล็กซ์ปรับปรุงด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ (MATLAB)							↔	↔	↔	↔		
6.สรุปผลการวิจัย									↔	↔		
7.จัดทำปัญหาพิเศษพร้อมทั้งนำเสนอ									↔	↔	↔	

บทที่2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นหรือกำหนดการเชิงเส้น (linear Programming) สำหรับปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งวิธีซิมเพล็กซ์เป็นวิธีหนึ่งที่ได้ผลดี โดยวิธีซิมพล็กซ์เป็นกระบวนการทางพีชคณิตที่เกิดการทำงานซ้ำๆเพื่อให้ได้คำตอบที่เหมาะสม สำหรับปัญหาที่ใหญ่ขึ้น วิธีการซิมเพล็กซ์ได้มีการปรับปรุงให้เหมาะสมกับปัญหาที่มีตัวแปรมากขึ้น ซึ่งวิธีนี้เรียกว่า วิธีการซิมเพล็กซ์ปรับปรุง (Revised Simplex Method)

เริ่มต้นด้วยการศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับวิธีการซิมเพล็กซ์และซิมเพล็กซ์ปรับปรุง ซึ่งเป็นทฤษฎีที่จะใช้ต่อไปในบทที่3 โดยการเริ่มจากการแนะนำสัญลักษณ์ที่จะใช้ในงานวิจัยนี้

2.1 ความหมายของสัญลักษณ์

2.1.1 ความหมายของสัญลักษณ์ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$

จาก นิยาม ระบบสมการเชิงเส้นในรูปของเมทริกซ์

ถ้าให้ระบบสมการประกอบด้วย m สมการ และ n ตัวแปร จะเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ได้คือ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ นั่นคือ

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ เรียกว่า เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ตัวแปร

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ เรียกว่า เมทริกซ์ตัวแปร

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ เรียกว่า เมทริกซ์ค่าคงตัว

2.1.2 ความหมายของสัญลักษณ์ $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

สัญลักษณ์ $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ เรียกว่า เมทริกซ์แต่งเติม (*Augmented Matrix*) คือ การนำสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรของข้อจำกัด และค่าคงที่ฝั่งขวามาเขียนเรียงต่อกันให้อยู่ในรูปเมทริกซ์

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

เขียนให้อยู่ในรูป $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ จะได้

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1.3 สัญลักษณ์การแบ่งเมทริกซ์และเวกเตอร์

พิจารณาระบบสมการ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ซึ่งนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ ที่มีขนาด m แถว และ $n+1$ หลัก และศึกษานิยามของ *rank* ที่มีความเกี่ยวข้องกับผลเฉลยของระบบสมการ

<u>นิยาม</u> System of Non-Homogeneous Equations

ระบบสมการไม่เอกพันธ์ คือระบบสมการที่เมทริกซ์ค่าคงตัวของสมการบางค่า ไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ โดยจะเป็นระบบสมการสอดคล้องเมื่อ *rank* ของเมทริกซ์สัมประสิทธ์ $\mathbf{A}$ เท่ากับ *rank* ของเมทริกซ์แต่งเติม $(\mathbf{A},\mathbf{b})$ และเท่ากับหรือน้อยกว่าจำนวนตัวแปร ถ้าเท่ากับจะมีคำตอบชุดเดียว และถ้าน้อยกว่าจะมีคำตอบหลายชุดไม่จำกัด แต่ถ้า *rank* ของเมทริกซ์สัมประสิทธ์ $\mathbf{A}$ น้อยกว่า *rank* ของเมทริกซ์แต่งเติม $(\mathbf{A},\mathbf{b})$ แล้วจะเป็นระบบสมการไม่สอดคล้อง

สรุปได้ว่า

1. $rank(\mathbf{A},\mathbf{b})>rank(\mathbf{A})$ จะได้ว่า ระบบสมการ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ไม่มีผลเฉลยเป็นระบบสมการไม่สอดคล้อง
2. $rank(\mathbf{A},\mathbf{b})=rank(\mathbf{A})=k=n$ จะได้ว่า ระบบสมการ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ มีผลเฉลยของคำตอบชุดเดียว
3. $rank(\mathbf{A},\mathbf{b})=rank(\mathbf{A})=k<n$ จะได้ว่า ระบบสมการ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ มีจำนวนผลเฉลยไม่จำกัดจำนวน

ซึ่งในงานวิจัยนี้เราจะศึกษาระบบสมการที่ $rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A},\mathbf{b})=k$ ที่ทำให้ระบบสมการมีผลเฉลยของเซตคำตอบเพียงชุดเดียว

ศึกษาได้จากวิธีการต่อไปนี้

กำหนดให้

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{b}_1\\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{b}_2\end{bmatrix}$$

โดยที่ $\mathbf{A}_1$ ขนาดเมทริกซ์ $k \times n$

$\mathbf{A}_2$ ขนาดเมทริกซ์ $(m-k)\times n$

$\mathbf{b}_1$ คือ เวกเตอร์ $k \times 1$

$\mathbf{b}_2$ คือ เวกเตอร์ $(m-k)\times 1$

ซึ่ง $k = rank(\mathbf{A}_1)$

ดังรูปต่อไปนี้

$$(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_1]_{k\times n} & [\mathbf{b}_1]_{k\times 1} \\ [\mathbf{A}_2]_{(m-k)\times n} & [\mathbf{b}_2]_{(m-k)\times 1} \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

โดยที่ $rank(\mathbf{A}_1) = rank(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) = k$

จากนั้น พิจารณา $\mathbf{A}_1$ โดยกำหนดให้ $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$

ซึ่ง $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular matrix) ที่มีขนาด $k \times k$

และ $\mathbf{N}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $k \times (n-k)$

เมทริกซ์ $\mathbf{B}$ เรียกว่า Basic matrix ซึ่งคอลัมน์ของ $\mathbf{B}$ จะเป็น basis ของ R^k (จากนิยามในหัวข้อ 2.1.3) และ

เมทริกซ์ $\mathbf{N}$ เรียกว่า Nonbasic matrix

ให้ $\mathbf{x}$ แยกออกเป็น $\mathbf{x}_B$ และ $\mathbf{x}_N$ นั่นคือ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$

โดยที่ $\mathbf{x}_B$ ประกอบด้วย $x_1, x_2, \ldots, x_k$

และ $\mathbf{x}_N$ ประกอบด้วย $x_{k+1}, \ldots, x_n$

จาก $\mathbf{A}_1\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $(\mathbf{B},\mathbf{N})\begin{bmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{bmatrix}=\mathbf{b}_1$ นั่นคือ $\mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{N}\mathbf{x}_N=\mathbf{b}_1$

เนื่องจาก $\mathbf{B}$ มีเมทริกซ์ผกผัน เราสามารถที่จะหาเซตคำตอบของ $\mathbf{x}_B$ โดยการคูณ $\mathbf{B}^{-1}$ ในสมการ $\mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{N}\mathbf{x}_N=\mathbf{b}_1$ ทั้งสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N&=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{x}_B+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N&=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{x}_B&=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_1-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการดังกล่าวข้างต้น มีผลเฉลยชุดคำตอบเดียวของระบบสมการ

2.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับวิธีซิมเพล็กซ์

2.2.1 นิยามของ Basic Feasible Solution

พิจารณาระบบสมการ $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ และ $\mathbf{x}\geq 0$ โดยที่

$\mathbf{A}$ คือ เมทริกซ์ขนาด $m\times n$

$\mathbf{b}$ คือ เวกเตอร์ขนาด $m\times 1$

ซึ่ง กำหนดให้ $rank(\mathbf{A},\mathbf{b})=rank(\mathbf{A})=m$

จัดรูปแบบใหม่

ให้ $\mathbf{A}=[\mathbf{B},\mathbf{N}]$ โดยที่ $\mathbf{B}$ คือเมทริกซ์ผกผันขนาด $m\times n$

และ $\mathbf{N}$ คือเมทริกซ์ขนาด $m\times(n-m)$

และ เซตคำตอบคือ $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{bmatrix}$ ของสมการ $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ โดยที่ $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ และ $\mathbf{x}_N=0$

เรียกว่า basic solution ของระบบสมการ

ถ้า $\mathbf{x}_B\geq 0$ แล้ว $\mathbf{x}$ คือ basic feasible solution ของระบบสมการ

ในที่นี้ $\mathbf{B}$ เรียกว่า basic matrix

และ $\mathbf{N}$ เรียกว่า nonbasic matrix

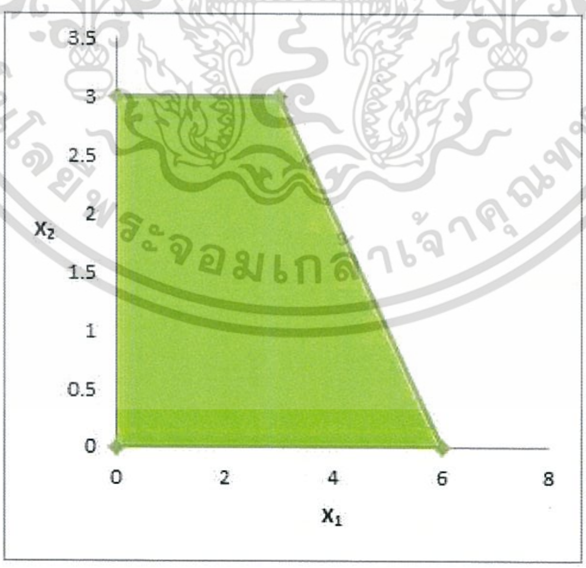
ซึ่งส่วนประกอบของ $\mathbf{x}_B$ ถูกเรียกว่า basic variable หรือ dependent variable และส่วนประกอบของ $\mathbf{x}_N$ เรียกว่า nonbasic variable หรือ independent variable

ถ้า $\mathbf{x}_B > 0$ แล้ว $\mathbf{x}$ จะถูกเรียกว่า nondegenerate basic feasible solution (คือคำตอบที่ได้จากการทำซ้ำที่จำกัด) แต่ถ้าส่วนประกอบของ $\mathbf{x}_B$ อย่างน้อย 1 ตัวเป็น 0 แล้ว $\mathbf{x}$ จะถูกเรียกว่า degenerate basic feasible solution (คือคำตอบที่ได้จากการทำซ้ำที่ไม่จำกัด)

เรามาทำความเข้าใจเกี่ยวกับ basic feasible solution ได้จากตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง1: พิจารณา อสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 , x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



รูปภาพ 2.1 : แสดงค่า Basic Feasible Solutions

โดยเพิ่ม slack variable x_3 และ x_4 ไปในรูปแบบพื้นฐานดังต่อไป

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ x_2 \quad + x_4 &= 3 \\ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

จากข้อจำกัด เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จากนิยามที่กล่าวมาแล้ว $rank(\mathbf{A}) = 2$ ทำให้ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์basis ที่มีขนาด 2×2 โดยที่ $\mathbf{B}$ สามารถเลือกจับแถวกันได้ดังต่อไปนี้

1. $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

สังเกตว่า $\mathbf{a}_1$ กับ $\mathbf{a}_3$ ไม่สามารถเป็นbasisของ R^2 ได้ เนื่องจาก $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ไม่มีคุณสมบัติเป็น basis

2.2.2 การแทนที่เวกเตอร์ใน Basis ด้วยเวกเตอร์อื่น

<u>นิยาม</u> ถ้า $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0$ แล้ว $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ เมื่อ λ_i เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า เซตของเวกเตอร์ $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ เรียกว่า Linearly Independent ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นใน R^n และเรียกเซตของเวกเตอร์ $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ เป็น basis ของ R^n

<u>ตัวอย่าง</u> basis ของ R^3 คือ เซตของเวกเตอร์ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

เกิดคำถามว่า เมื่อให้ $\{a_1, a_2, ..., a_j, ...a_n\}$ เป็น basis ของ R^n โดยเราต้องการที่จะแทนที่ตำแหน่งของเวกเตอร์ a_j ด้วยเวกเตอร์ a ซึ่งเซตใหม่ที่เกิดขึ้นจะยังคงเป็น basis ของ R^n หรือไม่ ?

ดังนั้น a เมื่อเข้าไปแทนที่ต้องทำให้เซตใหม่ที่เกิดขึ้นเป็น Linearly Independent ซึ่งส่งผลให้ยังคงเป็น basis ของ R^n เช่นเดิม

พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

เนื่องจาก a_i เป็น basis ของ R^n สามารถกระจายให้อยู่ในรูป

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_j a_j + \lambda_n a_n$$

นำ a ไปแทนในตำแหน่งที่ a_j

กระจายได้เป็น

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + ...\mu_{j-1} a_{j-1} + \mu(\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n) + \mu_{j+1} a_{j+1} + \mu_n a_n = 0$$

$$(u_1 + \mu\lambda_1) a_1 + (u_2 + \mu\lambda_2) a_2 + ... + (u_{j-1} + \mu\lambda_{j-1}) a_{j-1} + (u_{j+1} + \mu\lambda_{j+1}) a_{j+1} + ... + (u_n + \mu\lambda_n) a_n + \mu\lambda_j a_j = 0$$

ถ้า $a_1, a_2, ..., a_j, ...a_n$ เป็น Linearly Independent ทำให้ $\mu_i + \mu\lambda_i = 0$ และ $\mu\lambda_j = 0$
ถ้า $\lambda_j \neq 0$ แล้ว $\mu = 0$ จะได้ว่า $\mu_i = 0$

ดังนั้น

จะได้เซตของเวกเตอร์ $a_1, a_2, \ldots a_{j-1}, a, a_{j+1} \ldots a_n$ เป็น Linearly Independent จะเป็น basis ของ R^n

แต่ถ้า $\lambda_j = 0$ จะได้เซตของเวกเตอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots a_n$ ไม่เป็น Linearly Independent

2.2.3 Representation Theorem for the General Case

ให้ $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ ไม่ใช่เซตว่าง ดังนั้นเซตของจุดสุดขีดจึงไม่ใช่เซตว่าง และมีจำนวนจุดที่จำกัด คือ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$

ถ้า X มีขอบเขต แล้ว $\mathbf{x} \in X$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{x}$ สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j$$

โดยที่

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad ; j = 1, 2, \ldots, k \ ; 1 \le k \le \infty$$

ต่อไปเราจะเสนอหัวใจสำคัญของวิธีการซิมเพล็กซ์ดังต่อไปนี้

2.3 หัวใจสำคัญของวิธีซิมเพล็กซ์

พิจารณาปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad && \mathbf{cx} && (a)\\ &\textit{Subject to} && \mathbf{Ax}=\mathbf{b} && (b)\\ & && \mathbf{x}\geq \mathbf{0} && \end{aligned}$$

โดยที่ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ ที่มี $rank(A)=m$

$\mathbf{b}$ เป็น เวกเตอร์ขนาด $m\times 1$

$\mathbf{c}$ เป็นเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันเป้าหมาย

และ $\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปร n ตัว

เนื่องจาก $\mathbf{A}=[\mathbf{B},\mathbf{N}]$ และ $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{x_N}\end{bmatrix}$

ให้ $\mathbf{x_B}$ แทนเซตของ basic variable โดยที่ $\mathbf{x_B}\geq 0$

และ $\mathbf{x_N}$ แทนเซตของ nonbasic variable โดยที่ $\mathbf{x_N}\geq 0$

โดยที่ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\mathbf{Ax}=[\mathbf{B},\mathbf{N}]\begin{bmatrix}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{x_N}\end{bmatrix}=\mathbf{Bx_B}+\mathbf{Nx_N}=\mathbf{b}$

เมื่อ $\mathbf{B}=\left[a_1,a_2,\ldots,a_{j-1}\right]$, $\mathbf{N}=\left[a_j,a_{j+1},\ldots,a_n\right]$; $j=rank(\mathbf{A})+1$

จากนั้นคูณด้วย $\mathbf{B}^{-1}$ ทั้งสมการ $\mathbf{Bx_B}+\mathbf{Nx_N}=\mathbf{b}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Bx_B}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{x_B}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{x_B} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{a}_j x_j$ โดยที่ $\mathbf{a}_j$ คือ คอลัมน์ที่ j ของ $\mathbf{A}$

และ x_j คือ ส่วนประกอบที่อยู่ใน $\mathbf{x_N}$

จะได้ว่า

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in J} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j \tag{2.1}$$

ให้ $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{y}_j$ และ $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}$ ทำให้ได้ว่า

$$\mathbf{x_B} = \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in J} \left(\mathbf{y}_j\right) x_j \tag{2.2}$$

และเนื่องจาก ในกรณี basic feasible solution

$\mathbf{x}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix}$

โดยค่า objective value หรือ z_0 ได้มาจาก

$$z_0 = \mathbf{c}\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{c_B}, \mathbf{c_N}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{2.3}$$

สังเกตว่า z_0 คือ ค่าวัตถุประสงค์ เมื่อ $\mathbf{x}$ คือ basic solution

จากนั้น กำหนดให้ z คือ objective function value และ จากสมการ (2.1) และ (2.2)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{c_B}\mathbf{x_B} + \mathbf{c_N}\mathbf{x_N} \\ &= \mathbf{c_B}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in J} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j\right) + \sum_{j \in J} c_j x_j \\ &= \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in J} \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j + \sum_{j \in J} c_j x_j \\ &= z_0 - \sum_{j \in J} (\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j) x_j \\ &= z_0 - \sum_{j \in J} \left(z_j - c_j\right) x_j \end{aligned} \tag{2.4}$$

โดยที่ c_j คือ ส่วนประกอบของ $\mathbf{c}$ และ $z_j = \mathbf{c_B B^{-1} a}_j$ สำหรับแต่ละตัวใน nonbasic variable

จากสมการ (2.2) และ สมการ (2.4) ทำให้สามารถเขียนปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && z = z_0 - \sum_{j\in J}\left(z_j - c_j\right)x_j \\ &\textit{Subject to} && \sum_{j\in J}\left(\mathbf{y}_j\right)x_j + \mathbf{x_B} = \overline{\mathbf{b}} \\ & && x_j \geq 0 \quad , \quad j\in J \quad , \quad \mathbf{x_B} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

สังเกตว่าตัวแปร $\mathbf{x_B}$ ในสมการ (2.5) จะทำหน้าที่เหมือน slack variable และจากสมการ (2.5) เปลี่ยนมาอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && z = z_0 - \sum_{j\in J}\left(z_j - c_j\right)x_j \\ &\textit{Subject to} && \sum_{j\in J}\left(\mathbf{y}_j\right)x_j \leq \overline{\mathbf{b}} \\ & && x_j \geq 0 \quad , \quad j\in J \end{aligned} \tag{2.6}$$

จากสมการ (2.4) สังเกตว่า

ถ้า $\left(z_j - c_j\right) \leq 0$ สำหรับทุก $j \in J$ และ $x_j \geq 0$ จะได้ว่า $z \geq z_0$ ส่งผลให้ current basic feasible solution เป็น optimal solution ทันที (2.7)

2.4 หลักการทำงานของวิธีซิมเพล็กซ์

จาก (2.7) ถ้า $(z_j - c_j) \le 0$ สำหรับทุกๆ $j \in J$ แล้ว $x_j > 0$ สำหรับ $j \in J$ จะได้ว่า $z \ge z_0$ ทำให้ได้ว่า $\mathbf{x_B} = \overline{\mathbf{b}}$ คือ ค่าเหมาะสม (Optimal solution) แต่ถ้าสมมุติว่า $\exists k \in J$ ที่ทำให้ $z_k - c_k > 0$ และ $x_k \ne 0$ และ $x_j = 0$ สำหรับ $j \in J - \{k\}$ ทำให้ได้ว่า

$$z = z_0 - (z_k - c_k) x_k \tag{2.8}$$

และจากสมการ (2.2) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \tag{2.9}$$

จากสมการ (2.9) ถ้า $y_{ik} \le 0$ สำหรับทุก i แล้ว x_{B_i} จะเป็นค่าบวกที่เพิ่มขึ้นแสดงว่า $\mathbf{x_{B_i}}$ ไม่มีขอบเขต เพราะว่า $\bar{b}_i \ge 0$ (เข้ากรณี nondegenerate)

และ เมื่อ $y_{ik} > 0$ แล้ว ทำให้ x_{B_i} ลดลง เนื่องจาก $x_{B_i} = \bar{b}_i - y_{ik} x_k$ สามารถลดลงเป็นศูนย์ได้ เมื่อ x_{B_i} เป็นศูนย์แล้วจะได้ว่า $\bar{b}_i = y_{ik} x_k$ แล้ว $x_k = \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$ ดังนั้นตัวที่ x_{B_r} เป็นศูนย์ครั้งแรกคือ

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \equiv \underset{1 \le i \le m}{Minimum} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \tag{2.10}$$

จากสมการ (2.10) สังเกตว่า x_k มีค่ามากกว่าศูนย์ขึ้นไป ดังนั้น $Minimum\, x_k$ ตัวแรกคือตัวที่ทำให้ $x_{B_r} = 0$

จากสมการที่ (2.10) เราทราบว่า $x_k = \dfrac{\overline{b_r}}{y_{rk}}$ และทำการแทนที่ $x_k = \dfrac{\overline{b_r}}{y_{rk}}$ ลงในสมการ (2.9) จะได้ว่า

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\bar{b}_r \quad , \ i = 1, 2, ..., m \tag{2.11}$$

เมื่อ $x_{B_r} = 0$ ทำให้

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \tag{2.12}$$

โดยที่ $x_j = 0$ ของทุกๆ $j \in J - \{k\}$

เนื่องจาก $y_{rk} \neq 0$ ทำให้ชุดเวกเตอร์ $\mathbf{a}_{B_1}, \mathbf{a}_{B_2}, .., \mathbf{a}_{B_r}, .., \mathbf{a}_{B_m}$ ที่เป็นคอลัมน์ที่อยู่ใน $\mathbf{A}$ เป็น Linearly Independent นั่นคือ เลือก $\mathbf{a}_k$ มาแทนที่ $\mathbf{a}_{B_r}$ แล้วคอลัมน์ใหม่ที่เกิดขึ้น คือ $\mathbf{a}_{B_1}, \mathbf{a}_{B_2}, ..., \mathbf{a}_{B_{r-1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{B_{r+1}}, ..., \mathbf{a}_{B_m}$ จะเป็น Linearly Independent ก็ต่อเมื่อ $y_{rk} \neq 0$ (อ้างอิงจากนิยามในหัวข้อ (2.2.2) การแทนที่เวกเตอร์ใน basis ด้วยเวกเตอร์อื่น) ดังนั้น จุดที่ได้จากสมการ (2.12) เป็น basic feasible solution

2.5 วิธีซิมเพล็กซ์แบบตาราง

ในส่วนนี้เราจะนำเสนอการแก้ปัญหาวิธีการซิมเพล็กซ์แบบตาราง 2 แบบดังนี้

2.5.1 วิธีการซิมเพล็กซ์พื้นฐาน

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad z \\ &\textit{Subject to} \quad z-\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B-\mathbf{c}_N\mathbf{x}_N = 0 \qquad (2.11) \\ &\qquad \mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{N}x_N = \mathbf{b} \qquad (2.12) \\ &\qquad \mathbf{x}_B \ , \ \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

คูณสมการ (2.12) ด้วย $\mathbf{B}^{-1}$ จะได้

$$\mathbf{x}_B+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \qquad (2.13)$$

คูณสมการ (2.13) ด้วย $\mathbf{c}_B$ จะได้

$$\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B+\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_N = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \qquad (2.14)$$

จากนั้นนำสมการ (2.11) บวกกับสมการ (2.14) จะได้

$$z+\mathbf{0}\mathbf{x}_B+\left(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N\right)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \qquad (2.15)$$

กำหนดให้ $\mathbf{x}_N = 0$ จากสมการ (2.13) จะได้ว่า

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

และสมการ (2.14) จะได้ว่า

$$z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

สามารถหาค่า basic feasible solution จากสมการดังต่อไปนี้

ตารางซิมเพล็กซ์พื้นฐาน

	z	$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{x}_B$	RHS	
z	1	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Row 0
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Row ตั้งแต่1 ถึง m

ขั้นตอนเริ่มต้นของการคำนวณวิธีการเพล็กซ์

พิจารณา $z_j - c_j$ ซึ่งเป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N$ สำหรับ $j \in J$

ถ้า $z_j - c_j > 0$ จะหยุดการคำนวณ เพราะเราได้ค่าวัตถุประสงค์ที่ optimal แล้ว

แต่ถ้า $z_j - c_j \le 0$ จะต้องคำนวณหา $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$

ถ้า $\mathbf{y}_{ik} \le 0$ ทุก i จะหยุดการทำงาน และค่าวัตถุประสงค์ที่เหมาะสมจะไม่มีขอบเขต unbounded (จากความรู้หน้า16)

แต่ถ้า $\mathbf{y}_{ik} > 0$ ทุก i แล้ว ตัวแปร x_{B_r} จะออกจาก basis กล่าวคือ ตัว pivot y_{rk} ที่เกิด ณ แถวที่ r โดยแถวที่ r ต้องออกจากแถวนี้ แล้วจึงนำ x_k เข้ามาแทนที่

เราสามารถหา y_{rk} ได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1\le i\le m}{Minimum}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$$

สร้าง $\mathbf{B}$ ใหม่โดยการแทนที่ $\mathbf{a}_{B_r}$ ด้วย $\mathbf{a}_k$ และจะเกิดการทำซ้ำขั้นตอนเดิม

สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างซิมเพล็กซ์

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Minimize} & x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\textit{subject to} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
 & x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{array}
$$

นำเข้าตัวแปร slack x_4, x_5 และ x_6 จะได้ปัญหาดังต่อไปนี้

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Minimize} & x_1 + x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
\textit{subject to} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\
 & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 \geq 0
\end{array}
$$

โดยที่ $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ และ basic เริ่มต้น $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6] = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \overline{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$

นำค่าที่ได้ข้างต้นจากโจทย์และเงื่อนไขมาใส่ลงในตาราง จะได้ตารางเริ่มต้นดังต่อไปนี้

การทำรอบที่ 1

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
แถว 2	x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
แถว 3	x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
แถว 4	x_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

เราต้องทำการหาค่า pivot จากตารางข้างต้น โดยการ

1. พิจารณาค่า $z_j - c_j$ ที่มีค่าน้อยสุด คือ -4 จึงเลือก x_3 เป็นตัวแปรเข้า และจะได้ $k=3$
2. หาตัวแปรออก โดยการพิจารณาหาค่าต่ำสุดของ $\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$ จะได้ $9/2$, $2/(-1)$, $4/1$ แต่เนื่องจาก $y_{ik} > 0$ เราจึงไม่นำ $2/(-1)$ มาคิด เพราะฉะนั้น $4/1$ มีค่าต่ำสุด x_6 จึงเป็นตัวแปรออก และจะได้ $r=3$
3. ดังนั้น ค่า pivot คือ $y_{33}=1$

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
แถว 2	x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
แถว 3	x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
แถว 4	x_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

4. ทำการลดรูปหลักของตัวแปรเข้า นั่นคือ x_3 ทีละแถว ได้ดังนี้

การลดรูปแถว4 โดยทำให้ y_{33} มีค่าเท่ากับ1 แต่เนื่องจาก y_{33} มีค่าเป็น 1 อยู่แล้ว จึงแทนค่าได้ด้วยแถวเดิม

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
แถว 2	x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
แถว 3	x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
แถว 4	x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

การลดรูป y_{23} ให้เป็น 0 โดยนำแถว 3 บวกกับแถว 4 จะได้

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
แถว 2	x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

การลดรูป y_{13} ให้มีค่าเป็น 0 โดยนำแถว 2 มาลบกับ 2 คูณแถว 4 จะได้

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
แถว 2	x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

ทำการลดรูป $z_3 - c_3$ ให้เท่ากับ 0 โดยนำแถว1 มาลบกับ 4 คูณแถว 4 จะได้

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
แถว 2	x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

เมื่อทำการลดรูปครบทุกแถวในหลักของ x_3 แล้ว จะได้ตารางค่าใหม่ข้างต้น สังเกตว่า ค่าของ $z_j - c_j$ ยังไม่เป็นบวกครบทุกตัว ยังมี -3 ที่เป็นค่าติดลบอยู่ จึงเกิดการทำซ้ำรอบ2 ดังต่อไปนี้

การทำรอบ 2

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
แถว 2	x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

เราต้องทำการหาค่า pivot จากตารางข้างต้น โดยการ

1. พิจารณาค่า $z_j - c_j$ ที่มีค่าน้อยสุด คือ -3 จึงเลือก x_1 เป็นตัวแปรเข้า และจะได้ $k=1$

2. หาตัวแปรออก โดยการพิจารณาหาค่าต่ำสุดของ $\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}}$ จะได้ $1/3$, $6/0$, $4/(-1)$ แต่เนื่องจาก $y_{ik} > 0$ เราจึงไม่นำ $6/0$, $4/(-1)$ มาคิด เพราะฉะนั้น $1/3$ มีค่าต่ำสุด x_4 จึงเป็นตัวแปรออก และจะได้ $r=1$

3. ดังนั้น ค่า pivot คือ $y_{11} = 3$

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
แถว 2	x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

4.ทำการลดรูปหลักของตัวแปรเข้า นั่นคือ x_1 ทีละแถว ได้ดังนี้

การลดรูปแถว 2 โดยทำให้ y_{11} มีค่าเท่ากับ 1 โดยการนำแถว 2 หารด้วย 3

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
แถว 2	x_4	0	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

ทำการลดรูปแถว4 โดยจะทำ ด้วยการนำแถว4 บวกกับแถว2 จะได้

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
แถว 2	x_1	0	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3

ทำการลดรูปแถว1 โดยการทำ $z_1 - c_1 = 0$ ด้วยการนำแถว1 ลบกับ 3คูณแถว2

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
แถว 1	z	1	0	-4	0	-1	0	-2	-17
แถว 2	x_1	0	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
แถว 3	x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
แถว 4	x_3	0	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3

เมื่อทำการปรับค่าใหม่ครบทุกแถวในหลักของ x_1 แล้ว จะได้ตารางค่าใหม่ข้างต้น สังเกตว่า ค่า $z_j - c_j$ เป็นบวกครบทุกตัวแล้วจึงหยุดกาคำนวณ

ดังนั้นค่าวัตถุประสงค์ $z = -17$

เมื่อ $x_1 = 1/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 13/3$, $x_4 = 0$,$x_5 = 6$ และ $x_6 = 0$

ต่อไปเราจะทำการศึกษาวิธีซิมเพล็กซ์ปรับปรุง เพราะว่าเราจะนำมาเป็นพื้นฐานในการคำนวณวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย ซึ่งเราจะมาทวนตัวแปรต่างๆที่กล่าวไว้แล้วดังนี้

2.5.2 หลักการวิธีซิมเพล็กซ์ปรับปรุง

1. จาก $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{bmatrix}$ แล้ว ถ้า $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=\overline{\mathbf{b}}$ และ $\mathbf{x}_N=0$ เขียนอยู่ในรูปแบบนี้เรา เรียกว่า $\mathbf{x}$ ว่าเป็น basic feasible solution และค่าobjective $z=\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$
2. เราสามารถคำนวณหาค่า $z_j-c_j=\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j-c_j$ ซึ่งกำหนดให้ $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{w}$ โดยที่ $z_k-c_k=\underset{j\in J}{Maximum}\, z_j-c_j$ ถ้า $z_k-c_k\le 0$ ให้หยุดการทำงาน และคำตอบปัจจุบันจะเป็นค่าที่เหมาะสม (Optimal) แต่ถ้า $z_k-c_k>0$ ให้ทำขั้นตอน2 ต่อไป
3. เนื่องจาก $\mathbf{c_B}$ ชุดเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของ *slack variables* (จากโจทย์)
4. $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_{ij}\right]$ คือ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของข้อจำกัด
5. $\mathbf{c}=\left[c_j\right]$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของปัญหาค่าวัตถุประสงค์

จากการศึกษาตัวแปรก่อนหน้า เมื่อเข้าสู่วิธีการซิมเพล็กซ์ปรับปรุงที่ดำเนินการโดยใช้ตารางเล็ก

เราสามารถสร้างตารางต่อไปนี้โดยที่ $\mathbf{w}=\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ และ $\overline{\mathbf{b}}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Basic Inverse	RHS
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\overline{\mathbf{b}}$

ตารางข้างต้นเราจะเรียกว่า ตารางซิมเพล็กซ์ปรับปรุง โดยส่วนของ $\mathbf{w}$ จะเป็นเวกเตอร์ศูนย์ในแถว Objective และ Identity matrix ในแถว $\mathbf{B}^{-1}$ สังเกตว่าตารางซิมเพล็กซ์ปรับปรุงจะมีขนาดเล็กกว่าตารางของวิธีการซิมเพล็กซ์

1. เราต้องการตรวจสอบค่า z_j-c_j โดยจาก $z_k-c_k=\underset{j\in J}{Maximum}\, z_j-c_j$

ถ้า $z_k-c_k\le 0$ จะหยุดการทำงาน และจะได้ค่า optimal ที่ต้องงการ

ถ้า $z_k-c_k>0$ ต้องทำการเปลี่ยนคอลัมน์ใหม่ของ x_k โดยใช้ $\mathbf{B}^{-1}$ จะต้องคำนวณหา $\mathbf{y}_k=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$

2. ถ้า $\mathbf{y}_k\le 0$ เราจะหยุดการทำงาน เพราะคำตอบที่เหมาะสมจะเป็นคำตอบที่ Unbounded หากไม่เช่นนั้นต้องเปลี่ยนคอลัมน์ใหม่ของ x_k โดยจะต้องนำค่า $\mathbf{y}_k$ และ z_k-c_k มาแทนลงในตารางข้างล่าง

Basic Inverse	RHS		x_k
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$		$z_k - c_k$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\overline{\mathbf{b}}$		$\mathbf{y}_k$

จากนั้นทำการหาค่า pivot ตัวแปร x_{B_r} จะออกจาก basis กล่าวคือ ตัว pivot y_{rk} ที่เกิด ณ แถวที่ r แล้วแถวที่ r ต้องออกจาก basic แล้วนำ x_k เข้ามาแทนที่

เราสามารถหา x_k ได้จากสูตรต่อไปนี้

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1\le i\le m}{Minimum}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\} \qquad (*)$$

Basis Inverse	RHS		x_k
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$		$z_k - c_k$
	$\bar{b}_1$		y_{1k}
	$\bar{b}_2$		y_{2k}
	$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{b}_r$		y_{rk}
	$\vdots$		$\vdots$
	$\bar{b}_m$		y_{mk}

โดยที่ y_{rk} เรียกว่า pivot จะมีผลต่อการคำนวณค่าใหม่ของ $\mathbf{w}, \mathbf{B}^{-1}, \overline{\mathbf{b}}$ และ $\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$

เมื่อได้ค่า pivot แล้ว x_k จะเข้าไปใน basis แทนที่ x_{B_r} จะได้ x_k จากข้อกำหนดต่อไปนี้

1. แทนตำแหน่งที่ y_{rk} ด้วย $\dfrac{1}{y_{rk}}$
2. ที่ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $i \neq r$ แล้วทำการเปลี่ยนทุกตำแหน่งที่ i ให้เป็น $\dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}}$

3. ทำการหาค่า $\mathbf{B}^{-1}$ และ RHS เพื่อนำมาสร้าง $\mathbf{B}$ ตารางใหม่ โดยการแทนที่ $\mathbf{a}_{B_r}$ ด้วย $\mathbf{a}_k$ และกลับไปทำซ้ำขั้นตอนที่ 1

เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้นเราสามารถศึกษาได้จากตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างวิธีซิมเพล็กซ์ปรับปรุง

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimize} & -x_1-2x_2+x_3-x_4-4x_5+2x_6+0x_7+0x_8+0x_9 & \\ \textit{subject to} & x_1+\ x_2+x_3+x_4+\ x_5+\ x_6+0x_7 & \le 6 \\ & 2x_1-x_2-2x_3+x_4 \qquad\qquad +0x_8 & \le 4 \\ & x_3+x_4+2x_5+x_6 \qquad\qquad +0x_9 & \le 4 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5\ ,\ x_6\ \ge 0 & \end{array}$$

เพิ่ม *slack variables* x_7, x_8 และ x_9 เข้าไปในปัญหาหลัก จากนั้นให้ $\mathbf{A}=[\mathbf{N}\ \mathbf{B}]$ จากโจทย์

โดยที่ $\mathbf{B}=\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ และ $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{I}_3$ เช่นกัน

หาค่า $\mathbf{w}=\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$ โดยที่ $\mathbf{c_B}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$

เนื่องจาก $\mathbf{c_B}$ ชุดเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของ *slack variables* (จากโจทย์)

จะได้ว่า $\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

ดังนั้นค่า $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$

และ $\overline{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}$ เนื่องจาก $\overline{\mathbf{b}}$ คือค่าคงที่ฝั่งขวามือของข้อจำกัด โดยที่ $\overline{\mathbf{b}}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ทำให้ได้ว่า $\overline{\mathbf{b}}=\mathbf{b}$

เมื่อ $\mathbf{c}_B=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$ และ $\overline{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}$ จะได้ว่า $\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}=0$ ด้วย

ขั้นตอนเริ่มต้น นำค่าที่ได้คือ $\mathbf{w}, \mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$, $\mathbf{B}^{-1}$ และ $\overline{\mathbf{b}}$ มาใส่ตาราง ในรูปแบบ

BASIS INVERSE	*RHS*
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\overline{\mathbf{b}}$

จะได้เป็นตารางเริ่มต้นดังต่อไปนี้

	BASIS INVERSE			*RHS*
z	0	0	0	0
x_7	1	0	0	6
x_8	0	1	0	4
x_9	0	0	1	4

ในที่นี้ $\mathbf{w}=(0,0,0)$ สังเกตว่า $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$ (จากความรู้พื้นบทที่2)

จากโจทย์ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธ์ของข้อจำกัด

โดยที่แต่ละตัวเรียกว่า $\mathbf{a}_j$

$\mathbf{c} = [-1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad -4 \quad 2]$ คือ ค่าสัมประสิทธ์ของปัญหาค่าวัตถุประสงค์

โดยที่แต่ละตัวเรียกว่า c_j

จาก $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$

จะได้ว่า

$$z_1 - c_1 = 1 \;,\; z_2 - c_2 = 2 \;,\; z_3 - c_3 = -1$$
$$z_4 - c_4 = 1 \;,\; z_5 - c_5 = 4 \;,\; z_6 - c_6 = -2$$

ตัวอย่างเช่น

$$z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$$
$$z_1 - c_1 = [0\ 0\ 0]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - (-1) = 1$$

ดังนั้น $k=5$ และเลือกให้ x_5 เข้าไปในตาราง *BASIS INVERSE* โดย x_5 หาได้จาก

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ใส่ค่า $z_5 - c_5 = 4$ และ $\mathbf{y}_5$ ที่หาได้ลงในเวกเตอร์ ที่ชื่อว่า x_5 จะได้ว่า

$$x_5 = \begin{bmatrix} z_5 - c_5 \\ \mathbf{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จากนั้นหาตำแหน่ง y_{rk} ที่เราจะทำการ *pivot* จาก

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \equiv \underset{1 \le i \le m}{Minimum}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$$

	BASIS INVERSE			RHS	x_5	หาอัตราส่วน
z	0	0	0	0	4	-
x_7	1	0	0	6	1	6/1=6
x_8	0	1	0	4	0	$y_{ik} > 0$
x_9	0	0	1	4	2	4/2=2

ตำแหน่ง y_{rk} คือ $y_{35} = 2$

จะเห็นว่าตำแหน่งของอัตราส่วนที่มีค่าน้อยสุดอยู่ตรงกับแถวของ x_9 จึงนำ x_5 เข้าไปแทนที่ โดยหาค่า x_5 ใหม่จาก $\left(\frac{-y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots, \frac{1}{y_{rk}}, \ldots, \frac{-y_{mk}}{y_{rk}}\right)$ ดังต่อไปนี้

x_5
-4/2=-2
-1/2
0
1/2

ทำการหาค่า $\mathbf{B}^{-1}$ และ RHS เพื่อนำมาสร้างตารางใหม่

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&0\\0&0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&0\\0&0&0&1/2\end{bmatrix}$$

$$RHS=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&0\\0&0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\6\\4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\4\\4\\2\end{bmatrix}$$

จะได้ตารางใหม่ คือ

	BASIS INVERSE			RHS
z	0	0	-2	-8
x_7	1	0	-1/2	4
x_8	0	1	0	4
x_5	0	0	1/2	2

<u>การทำซ้ำรอบ 2</u>

ในที่นี้ $\mathbf{w}=(0,0,-2)$ สังเกตว่า $z_j-c_j=\mathbf{w}\mathbf{a}_j-c_j$ โดยที่ค่า $\mathbf{w}$ เปลี่ยนไปคือ $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0&0&-2\end{pmatrix}$

จะได้ว่า

$$z_1-c_1=1 \quad , \quad z_2-c_2=2 \quad , \quad z_3-c_3=-3$$
$$z_4-c_4=-1 \quad , \quad z_6-c_6=-4 \quad , \quad z_9-c_9=-2$$

ค่า z_j-c_j ที่มีค่าสูงสุด คือ 2 ดังนั้น $k=2$ และเลือกให้ x_2 เข้าไปในตาราง *BASIS INVERSE* โดย $\mathbf{y}_2$ หาได้จาก

$$\mathbf{y}_2=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

ใส่ค่า $z_2 - c_2 = 2$ และ $\mathbf{y}_2$ ที่หาได้ลงในเวกเตอร์ ที่ชื่อว่า x_2 จะได้ว่า

$$x_2 = \left[\frac{z_2 - c_2}{\mathbf{y}_2}\right] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หาตำแหน่ง y_{rk} ที่เราจะทำการ *pivot*

	BASIS INVERSE			RHS	x_2	หาอัตราส่วน
z	0	0	-2	-8	2	-
x_7	1	0	-1/2	4	1	4/1=4
x_8	0	1	0	4	-1	$y_{ik} > 0$
x_5	0	0	1/2	2	0	$y_{ik} > 0$

ตำแหน่ง y_{rk} คือ $y_{12} = 4$

จะเห็นว่าตำแหน่งของอัตราส่วนที่มีค่าน้อยสุดอยู่ตรงกับแถวของ x_7 จึงนำ x_2 เข้าไปแทนที่

โดยหาค่า x_2 ใหม่จาก $\left(\frac{-y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots, \frac{1}{y_{rk}}, \ldots, \frac{-y_{mk}}{y_{rk}}\right)$ ดังต่อไปนี้

x_2
-2/1
1
1
0

ทำการหาค่า $\mathbf{B}^{-1}$ และ RHS เพื่อนำมาสร้างตารางใหม่

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&0\\0&0&0&1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0&-1\\0&1&0&-1/2\\0&1&1&-1/2\\0&0&0&1/2\end{bmatrix}$$

$$RHS=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\4\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16\\4\\8\\2\end{bmatrix}$$

จะได้ตารางใหม่ คือ

	BASIS INVERSE			RHS
z	-2	0	-1	-16
x_2	1	0	-1/2	4
x_8	1	1	-1/2	8
x_5	0	0	1/2	2

<u>การทำซ้ำรอบ 3</u>

ในที่นี้ $\mathbf{w}=(-2,0,-1)$ และ $z_j-c_j=\mathbf{w}\mathbf{a}_j-c_j$

จะได้ว่า

$$z_1-c_1=-1\ ,\ z_3-c_3=-4\ ,\ z_4-c_4=-2\ ,$$
$$z_6-c_6=-5\ ,\ z_9-c_9=-1$$

เนื่องจากค่า $z_j-c_j\le 0$ ทุกตัว เราก็จะหยุดการทำงาน และ basic feasible solution ของตารางก่อนหน้าคือ ค่าวัตถุประสงค์ ที่ optimal แล้ว

ดังนั้น ค่าวัตถุประสงค์ เท่ากับ -16 เมื่อ $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=2$ และ $x_6=0$

ในปัจจุบันเราเจอปัญหาที่มีขนาดค่อนข้างใหญ่มาก ซึ่งเมื่อนำมาใช้กับวิธีการซิมเพล็กซ์ปรับปรุงจะทำให้เกิดเมทริกซ์ขนาดใหญ่ในการคำนวณ เกิดความยุ่งยากในการหาคำตอบ เราจึงนำวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (Decomposition Method) มาศึกษาเพื่อที่จะให้รองรับกับปัญหาที่มีขนาดใหญ่ สามารถศึกษาได้ในบท 3 ต่อไป

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นบางปัญหาเป็นขนาดใหญ่ การแก้ปัญหาจึงจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์เข้ามาช่วย สำหรับบางปัญหาที่มีขนาดใหญ่ วิธีที่เหมาะสมวิธีหนึ่งที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา คือวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (Decomposition Method) ซึ่งจะพบว่ามีปัญหาอยู่ไม่น้อยที่มีขนาดใหญ่และสลับซับซ้อน เราจำเป็นต้องแยกปัญหาเป็นส่วนย่อยๆ เพื่อที่จะนำไปแก้ปัญหาโดยรวมได้

3.1) วิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (The decomposition algorithm)

รูปแบบปัญหาหลักดังต่อไปนี้

$$\textit{Minimize } \mathbf{cx} \tag{3.1}$$

$$\textit{Subject to } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{x} \in X \tag{3.3}$$

ในที่นี้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$

$\mathbf{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $m \times 1$

$\mathbf{c}$ เป็นเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันเป้าหมาย

$\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปร n ตัว

และ $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$

จากทฤษฎี (2.13) เมื่อจุดขีดสุดของ X สามารถเขียนแทนด้วย $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_t$ ทำให้ได้ว่า

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j \mathbf{x}_j \qquad (3.4)$$

โดยที่

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \qquad (3.5)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, t \qquad (3.6)$$

แทนที่ X ในปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่กล่าวมาข้างต้น สามารถแปลงให้อยู่ในรูปที่เรียกว่า *master problem* ดังรูปแบบต่อไปนี้

$$\textit{Minimize} \quad \sum_{j=1}^{t} (\mathbf{c}\mathbf{x}_j)\lambda_j \qquad (3.7)$$

$$\textit{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{t} (A\mathbf{x}_j)\lambda_j = \mathbf{b} \qquad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \qquad (3.9)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t \qquad (3.10)$$

จำนวนจุดสุดขีดของเซต X โดยปกติแล้ว มีขนาดใหญ่ การที่จะพยายามแจกแจงจุดสุดขีดให้มีความชัดเจนนั้นเป็นเรื่องค่อนข้างยาก เราจึงทำการแยกเป็นปัญหาย่อยเพื่อที่ให้จุดสุดขีดมีขอบเขตที่จำกัดและสามารถนำไปวาดกราฟได้

3.1.2 พิจารณาการแก้ปัญหาโดยวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย

เราให้ $(\mathbf{w},\alpha)=\hat{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}$ โดยที่ $\hat{\mathbf{c}}_B$ คือ ค่าของ basic variables เนื่องจากในวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยนั้นตัวที่เราไม่ทราบค่า คือ λ_j และเราจะให้ $\mathbf{cx}_j$ เป็นตัวที่ทราบค่า ดังนั้น

กำหนดให้ $\hat{c}_j=\mathbf{cx}_j, \overline{\mathbf{b}}=\mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\1\end{pmatrix},\ RHS=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{bmatrix}$

และ ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ $\hat{\mathbf{c}}_B\overline{\mathbf{b}}$

รูปแบบตารางของวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย คือ

Basis Inverse	*RHS*
$(\mathbf{w},\alpha)$	$\hat{\mathbf{c}}_B\overline{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\overline{\mathbf{b}}$

เนื่องจาก X เป็นเซตของบริเวณขอบเขตที่เป็นไปได้ของทั้งสองปัญหาย่อย และค่ามากสุดของวัตถุประสงค์เชิงเส้นจะเกิดเป็นคำตอบที่เหมาะสม

โดยรูปแบบของวิธีการแก้ปัญหาย่อยเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned}&\textit{Maximize} && (\mathbf{wA}-\mathbf{c})\mathbf{x}+\alpha\\ &\textit{subject to} && \mathbf{x}\in X\end{aligned}$$

จากวิธีการซิมเพล็กปรับปรุง สรุปแล้วคำตอบปัจจุบัน คือ ค่าที่เหมาะสม หรือ การตัดสินใจที่จะเพิ่ม nonbasic variable ซึ่งสามารถหาค่าวัตถุประสงค์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}z_k-\hat{c}_k &= \underset{1\le j\le t}{\textit{Maximum}}\ \ z_j-\hat{c}_j\\ &= \underset{1\le j\le t}{\textit{Maximum}}\ \ (\mathbf{w},\alpha)\begin{bmatrix}\mathbf{Ax}_j\\1\end{bmatrix}-\mathbf{cx}_j\\ &= \underset{1\le j\le t}{\textit{Maximum}}\ \ \mathbf{wAx}_j+\alpha-\mathbf{cx}_j \qquad (3.11)\end{aligned}$$

โดย

1. ถ้า $z_k - \hat{c}_k \leq 0$ จะหยุดการคำนวณ และค่าวัตถุประสงค์ปัจจุบันจะเป็นคำตอบที่เหมาะสม กล่าวคือ ให้ $\mathbf{x}_k$ คือคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาย่อยก่อนหน้า ที่มีค่าวัตถุประสงค์เท่ากับ $z_k - \hat{c}_k$

ถ้า $z_k - \hat{c}_k > 0$ แล้ว λ_k ที่เป็น nonbasic variable จะสามารถเข้าไปใน basis ของปัญหาหลักได้ ดังนั้นเราจะต้องทำการหาค่า λ_k ที่สอดคล้องกับ $\mathbf{x}_k$ เมื่อ $\mathbf{x}_k$ เป็นค่าที่เหมาะสม

ทำการปรับปรุงคอลัมน์ที่ตรงกับ $\begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_k \\ 1 \end{pmatrix}$ เมื่อ $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix}$ นำค่า $\mathbf{y}_k$ มาแทนลงใน $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}$ จะได้ตารางซิมเพล็กซ์ใหม่ และทำการหาค่าต่ำสุดระหว่างอัตราส่วนของ $\dfrac{RHS}{\lambda_k}$ และเปรียบเทียบหาค่าอัตราส่วนที่น้อยที่สุด เพื่อกำหนดให้เป็นค่า pivot เพื่อหาตำแหน่งของแถวใน Basis Inverse แล้วทำการแทนที่ด้วย λ_j เมื่อได้ค่าต่ำสุดแล้ว เราจะทำการ pivot

2. การหา pivot ทำให้ λ_j จะเข้าไปใน basis แทนที่ในแถวที่มีอัตราส่วนต่ำสุด

จะได้ λ_j ใหม่จากข้อกำหนดต่อไปนี้

1. แทนตำแหน่งที่ y_{rk} ด้วย $\dfrac{1}{y_{rk}}$
2. ทำการเปลี่ยนทุกตำแหน่งที่ i ให้เป็น $\dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}}$ ที่ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $i \neq r$
3. ทำการหาค่า $\mathbf{B}^{-1}$ และ RHS เพื่อนำมาสร้าง $\mathbf{B}$ ตารางใหม่
4. ขณะนี้เราจะมีค่าที่เหมาะสมใหม่เกิดขึ้น จาก $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j \mathbf{x}_j$ นำค่า $\mathbf{x}$ ที่ได้ไปแทนลงในสมการปัญหาหลัก (ที่มีรูปแบบตามสมการ (3.1))

ข้อสังเกตของวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย

1. เป็นการคำนวณ $z_k - c_k$ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาย่อย ซึ่งมีการทำงานที่มีจำนวนจำกัด
2. แต่ละรอบของการทำซ้ำจะให้คำตอบที่ขึ้นกว่าเดิมทุกครั้ง
3. จุดสุดขีดปัจจุบัน จะทำให้เรารู้ว่า $z_k - c_k = (\mathbf{wA} - \mathbf{c})\mathbf{x}_k + \alpha > 0$ แล้ว λ_k สามารถที่จะเข้าไปใน basis ของปัญหาหลักได้อย่างแน่นอน

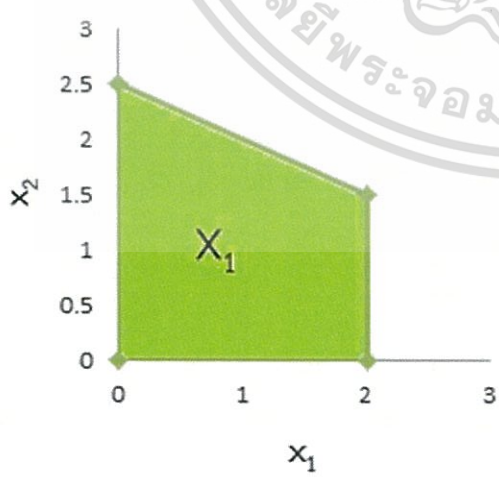
3.2) ตัวอย่างปัญหาเชิงตัวเลข

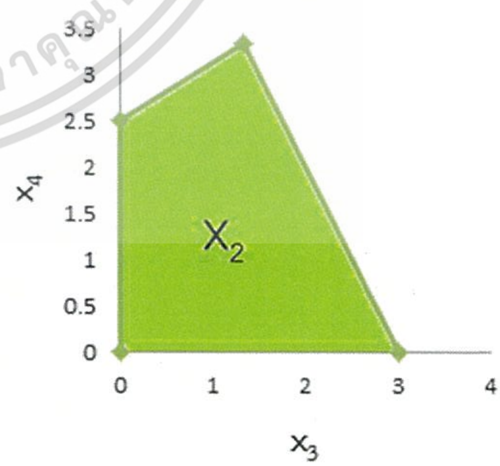
พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

$$
\begin{array}{llr}
\textit{Minimize} & -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & (1)\\
\textit{Subject to} & x_1 \qquad + x_3 \qquad \le 2 & (2)\\
 & x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 \le 3 & (3)\\
 & x_1 \qquad\qquad\qquad \le 2 & (4)\\
 & x_1 + 2x_2 \qquad\qquad \le 5 & (5)\\
 & \qquad -x_3 + x_4 \quad \le 2 & (6)\\
 & \qquad 2x_3 + x_4 \quad \le 6 & (7)\\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \ge 0 & (8)
\end{array}
$$

โดยที่ $\mathbf{x}_j = x_1, x_2, \ldots, x_j$

สังเกตว่า สมการที่ (4),(5) เกี่ยวข้องเพียง x_1, x_2 เท่านั้น และสมการที่ (6),(7) จะเกี่ยวข้องเพียง x_3, x_4 ซึ่งสมการ (4),(5),(6) และ(7) สามารถสร้างกราฟหาคำตอบที่เหมาะสมโดยแยกออกได้เป็น 2 ปัญหาย่อยดังนี้





รูป (3.1) : แสดงปัญหาย่อยของ X_1 จากสมการ $(4),(5)$ รูป (3.2) : แสดงปัญหาย่อยของ X_2 จากสมการ $(6),(7)$

จากสมการ $(4),(5)$ เราจะได้จุดสุดขีดทั้งหมด 4 จุด คือ $(0,0),(2,0),(2,2/3)$ และ $(0,5/2)$

จากสมการ $(6),(7)$ เราจะได้จุดสุดขีดทั้งหมด 4 จุด คือ $(0,0),(3,0),(4/3,10/3)$ และ $(0,2)$

ซึ่งเราจะนำจุดสุดขีดทั้งหมดไปใช้ในขั้นตอนการแก้ปัญหาย่อยต่อไป

ขั้นตอนเริ่มต้น

จากสมการ (1) สามารถเทียบรูปแบบได้กับสมการ (9) และสมการ (2) - (7) สามารถเทียบกับรูปแบบสมการ (10) - (13)

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize} && \sum_{j=1}^{t} \hat{c}_j \lambda_j && && (9)\\
&\textit{subject to} && \sum_{j=1}^{t} \left(\mathbf{A}\mathbf{x}_j\right)\lambda_j + \mathbf{s} = \mathbf{b} && && (10)\\
& && \sum_{j=1}^{t} \lambda_j && = \mathbf{1} && (11)\\
& && \lambda_j && \geq 0 \;;\; j = 1,2,\ldots,t && (12)\\
& && \mathbf{s} && \geq \mathbf{0} && (13)
\end{aligned}$$

โดยที่ $\hat{c}_j = \mathbf{c}\mathbf{x}_j$ คือ สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{x}_j$ ในฟังก์ชันเป้าหมายสมการ (1) จะได้ว่า

$$\hat{\mathbf{c}}_j = \mathbf{c}\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{s}$ คือ ตัวแปรเทียม

ขั้นตอนต่อมา คือนำตัวแปรข้างต้นมาจัดให้อยู่ในรูปแบบตารางดังต่อไปนี้

Basis Inverse	*RHS*
$(\mathbf{w},\alpha)$	$\hat{\mathbf{c}}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

กำหนดให้ $(\mathbf{w},\alpha)=\hat{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}$ แต่เนื่องจาก $\hat{\mathbf{c}}_B=0$

ทำให้ได้ว่า $(\mathbf{w},\alpha)=\hat{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{0}\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{0}$ และ $\overline{\mathbf{b}}=\mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\1\end{bmatrix}$

โดยที่ $\mathbf{B}^{-1}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์

กำหนดให้ $\mathbf{b}$ เท่ากับค่าคงที่ทางขวามือของสมการ $(2),(3)$ จะได้ว่า $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

ให้ตารางเริ่มต้นประกอบด้วย $\mathbf{s}$ และ λ_1 กำหนดให้ $\mathbf{x}_1=(0,0,0,0)$ ดังนั้น $\mathbf{cx}_1=0$ จากข้อมูลของ $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\alpha$ ข้างต้นสามารถนำมาสร้างตารางได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1

	BASIC INVERSE			RHS
	$\mathbf{w}_1$	$\mathbf{w}_2$	α	
z	0	0	0	0
s_1	1	0	0	2
s_2	0	1	0	3
λ_1	0	0	1	1

ซึ่งตัวเลขในช่อง RHS คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}\\\overline{\mathbf{b}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\3\\1\end{bmatrix}$

ขั้นตอนต่อไป เราจำเป็นต้องหาค่าวัตถุประสงค์ $z_j-\hat{c}_j$ ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

<u>การทำรอบที่ 1</u>

รูปแบบปัญหาย่อย

$$Maximize \quad (\mathbf{wA}-\mathbf{c})\mathbf{x}+\alpha \tag{14}$$
$$subject\ to \quad \mathbf{x}\in X \tag{15}$$

จากตารางที่ 1 $(w_1,w_2)=(0,0)$ ทำให้ได้ว่า $\mathbf{wA}=0$ และ $\alpha=0$

ดังนั้น สมการ (14) กลายเป็น $-\mathbf{cx}+\alpha=-\begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+0$

จะได้ปัญหาย่อยต่อไปนี้

$$Maximize \quad 2x_1+x_2+x_3-x_4+0 \tag{16}$$
$$subject\ to \quad \mathbf{x}\in X \tag{17}$$

ปัญหาย่อยนี้สามารถแยกเป็นเวกเตอร์ (x_1,x_2) และ (x_3,x_4) และสามารถหาคำตอบได้โดยพิจารณาจุดสุดขีดจากกราฟรูปที่ 1 และรูปที่ 2

ดังนั้นจากสมการ (16) จะต้องแยกเป็น 2 ส่วนคือ $2x_1+x_2$ และ x_3-x_4 และนำจุดสุดขีดจากกราฟรูปที่ 1 และ กราฟรูปที่ 2 ทั้ง 4 จุดมาแทนในปัญหาย่อย 2 ส่วนดังนี้

จุดสุดขีดของกราฟรูปที่1 คือ $(0,0),(2,0),(2,2/3)$ และ $(0,5/2)$ นำมาแทนใน $2x_1+x_2$ ได้ดังนี้

$$(0,0)\Rightarrow 2(0)+0=0$$
$$(2,0)\Rightarrow 2(2)+0=4$$
$$(2,3/2)\Rightarrow 2(2)+3/2=11/2$$
$$(0,5/2)\Rightarrow 2(0)+5/2=5/2$$

จุดสุดขีดของกราฟรูปที่ 2 คือ $(0,0),(3,0),(4/3,10/3)$ และ $(0,2)$ นำมาแทนใน $x_3 - x_4$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&(0,0) \Rightarrow 0-0=0 \\
&(3,0) \Rightarrow 3-0=3 \\
&(4/3,10/3) \Rightarrow 4/3-10/3=-6/3 \\
&(0,2) \Rightarrow 0-2=-2
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ X_1 คือที่จุด $(x_1,x_2)=(2,3/2)$

และค่าสูงสุดของ X_2 คือที่จุด $(x_3,x_4)=(3,0)$

กำหนดให้ $\mathbf{x}_2$ เป็นคำตอบที่เหมาะสม นั่นคือ $\mathbf{x}_2=(2,3/2,3,0)$

และนำ $\mathbf{x}_2$ ไปแทนในสมการ (16) จะได้

$$\begin{aligned}
z_2-\hat{c}_2 &= 2x_1+x_2+x_3-x_4+0 \\
&= 2(2)+3/2+3-0 \\
&= 17/2
\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าวัตถุประสงค์ คือ $z_2-\hat{c}_2=17/2$

และค่าขอบล่าง คือ $\hat{\mathbf{c}}_B\overline{\mathbf{b}}-(z_2-\hat{c}_2)=0-17/2=-17/2$

เนื่องจากค่าวัตถุประสงค์มากกว่าศูนย์เราจึงดำเนินการทำซ้ำในรอบที่ 2 ต่อไป (ก่อนขึ้นการทำซ้ำรอบที่ 2 เราจะหา λ_2 เพื่อที่จะทำการสร้างตารางใหม่ในรอบที่ 2 ในขั้นตอนหลัก)

<u>ขั้นตอนหลัก</u>

เนื่องจาก $z_2-\hat{c}_2=17/2>0$ ดังนั้น เราจะทำการหา λ_2 ที่สอดคล้องกับ $\mathbf{x}_2$ ต่อไป โดยนำสมการที่ $(2),(3)$ มาเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ กำหนดให้เมทริกซ์ A เท่ากับสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร จะได้ว่า

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{Ax}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}\begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ค่า λ_2 โดยนำ $z_2 - \hat{c}_2$ และ $\mathbf{y}_2$ มาเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} z_2 - \hat{c}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/2 \\ 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

นำค่าที่หาได้ข้างต้นมาสร้างตารางได้ดังนี้

	BASIS INVERSE			RHS	λ_2
z	0	0	0	0	17/2
s_1	1	0	0	2	5
s_2	0	1	0	3	17/2
λ_1	0	0	1	1	1

จากนั้นหาค่าต่ำสุดระหว่างอัตราส่วนของ $\dfrac{RHS}{\lambda_2}$ เพื่อจะหาว่า λ_2 จะเข้าไปแทนที่ตัวแปรเทียมตัวใด

จะได้ค่าต่ำสุด = $(2/5\,,3/(17/2)\,,1/1)$ = 0.4 ดังนั้นเลือกค่า $2/5$

แสดงว่าเอา s_1 ออกจากฐาน และ λ_2 เข้าไปแทนที่ s_1

และทำการหาค่า λ_2 ใหม่ นั่นคือ นำค่าที่เลือก (ที่วงกลม) ไปหารกับทุกตัวคอลัมน์ของ λ_2

โดยมีข้อจำกัดว่าจะต้องนำ -1 คูณกับตัวที่เราเลือกก่อนนำไปหาร ยกเว้น ตัวที่วงกลมจะไม่นำ -1 ไปคูณ จะได้

$$\lambda_2 = (-(17/2)/5\,,1/5\,,-(7/2)/5\,,-1/5)$$

$$= (-17/10\,,1/5\,,-7/10\,,-1/5)$$

นำค่าที่ได้ไปแทนในช่อง w_1 และหาค่าฐานใหม่ จะได้

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17/5 \\ 2/5 \\ 8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

นำค่าที่ได้แทนลงในตารางฐานใหม่ จะได้

	BASIS INVERSE			RHS
z	-17/10	0	0	-17/5
λ_2	1/5	0	0	2/5
s_2	-7/10	1	0	8/5
λ_1	-1/5	0	1	3/5

สังเกตว่าขณะนี้เรามีค่าคำตอบที่เป็นไปได้ที่ดีที่สุดสำหรับตัวแปรต่างๆข้างต้นดังนี้

คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \\ &= (3/5)(0,0,0,0) + (2/5)(0,3/2,3,0) \\ &= (4/5,3/5,6/5,0) \end{aligned}$$

นำค่า $\mathbf{x}$ ที่ได้ข้างต้นไปแทนลงในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -2(4/5) - 3/5 - 6/5 + 0 \\ &= -17/5 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ค่าวัตถุประสงค์ปัจจุบัน คือ -17/5 และ $(w_1, w_2, \alpha) = (-17/10, 0, 0)$

ในทำนองเดียวกันกับรอบที่1

ขั้นตอนต่อไป เราจำเป็นต้องหาค่าวัตถุประสงค์ $z_j - \hat{c}_j$ ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

การทำซ้ำรอบ2

ปัญหาย่อย : จากสมการ (13) และ สมการ (14)

$$\begin{aligned} &\mathit{Maximize} \quad (\mathbf{wA}-\mathbf{c})\mathbf{x}+a \\ &\mathit{subject\ to} \quad \mathbf{x}\in X \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \mathbf{wA}-\mathbf{c} &= (-17/10,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2,-1,-1,1) \\ &= (3/10,1,-7/10,-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น ปัญหาย่อยเป็นดังต่อไปนี้

$$\mathit{Maximize} \quad (3/10)x_1 + x_2 + (-7/10)x_3 - x_4 + 0 \qquad (17)$$

$$\mathit{subject\ to} \quad \mathbf{x}\in X \qquad (18)$$

ปัญหาย่อยนี้สามารถแยกเป็นเวกเตอร์ (x_1,x_2) และ (x_3,x_4) และสามารถหาคำตอบได้โดยพิจารณาจากรูปที่ 1 รูปที่ 2 ตามเดิม

ดังนั้นจากสมการ (19) จะต้องแยกเป็น 2 ส่วน คือ $\mathbf{X}_1 = (3/10)x_1 + x_2$ และ $\mathbf{X}_2 = (-7/10)x_3 - x_4$ และนำจุดสุดขีดทั้ง 4 จุดมาแทนในค่าเวกเตอร์ทั้ง $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ ดังนี้

จุดสุดขีดของกราฟรูปที่ 1 คือ $(0,0),(2,0),(2,2/3)$ และ $(0,5/2)$ นำมาแทนใน $(3/10)x_1 + x_2$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (0,0) &\Rightarrow (3/10)(0)+0=0 \\ (2,0) &\Rightarrow (3/10)(2)+0=6/10 \\ (2,3/2) &\Rightarrow (3/10)(2)+3/2=21/10 \\ (0,5/2) &\Rightarrow (3/10)(0)+5/2=5/2 \end{aligned}$$

จุดสุดขีดของกราฟรูปที่ 2 คือ $(0,0),(3,0),(4/3,10/3)$ และ $(0,2)$ นำมาแทนใน $(-7/10)x_3 - x_4$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
(0,0) &\Rightarrow (-7/10)(0) - 0 = 0 \\
(3,0) &\Rightarrow (-7/10)(3) - 0 = -21/10 \\
(4/3,10/3) &\Rightarrow (-7/10)(4/3) - 10/3 = -128/30 \\
(0,2) &\Rightarrow (-7/10)(0) - 2 = -2
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ $\mathbf{X}_1$ คือ จุดที่ $(x_1, x_2) = (0, 5/2)$

และค่าสูงสุดของ $\mathbf{X}_2$ คือ จุดที่ $(x_3, x_4) = (0,0)$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่เหมาะสม คือ $x_3 = (0, 5/2, 0, 0)$

และนำ $\mathbf{x}_3$ ไปแทนในสมการ (17) จะได้

$$\begin{aligned}
z_3 - \hat{c}_3 &= (3/10)x_1 + x_2 + (-7/10)x_3 - x_4 + 0 \\
&= (3/10)(0) + 5/2 + (-7/10)(0) - 0 \\
&= 5/2
\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าวัตถุประสงค์ คือ $z_3 - \hat{c}_3 = 5/2$

และค่าขอบล่าง คือ $\hat{\mathbf{c}}_B \overline{\mathbf{b}} - (z_3 - \hat{c}_3) = -17/5 - 5/2 = -5.9$

เนื่องจากค่าวัตถุประสงค์มากกว่าศูนย์เราจึงดำเนินการทำซ้ำในรอบที่ 3 ต่อไป (ก่อนขึ้นการทำซ้ำรอบที่ 3 เราจะหา λ_3 เพื่อที่จะทำการสร้างตารางใหม่ในรอบที่ 3 ในขั้นตอนหลัก)

<u>ขั้นตอนหลัก</u>

เนื่องจาก $z_3 - \hat{c}_3 = 5/2 > 0$

$$\mathbf{Ax}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Ax}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -7/10 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ค่า λ_3 โดยนำ $z_3 - \hat{c}_3$ และ $\mathbf{y}_3$ มาเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} z_3 - \hat{c}_3 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

นำค่าที่หาได้ข้างต้นมาสร้างตารางได้ดังนี้

	BASIS INVERSE			RHS	λ_3
z	-17/10	0	0	-17/5	5/2
λ_2	1/5	0	0	2/5	0
s_2	-7/10	1	0	8/5	5/2
λ_1	-1/5	0	1	3/5	1

จากนั้นหาค่าต่ำสุดระหว่างอัตราส่วนของ $\dfrac{RHS}{\lambda_3}$ เพื่อจะหาว่า λ_3 จะเข้าไปแทนที่ตัวแปรเทียมตัวใด

จะได้ค่าต่ำสุด = $((8/5)/(5/2), (3/5)/1) = 0.6$ ดังนั้นเลือก $3/5$

แสดงว่าเอา λ_1 ออกจากตาราง และ λ_3 เข้าไปแทนที่

และทำการหา λ_3 ใหม่ โดยนำค่าที่เลือก (ที่วงกลม) ไปหารกับทุกตัวคอลัมน์ของ λ_3

โดยมีข้อจำกัดว่าจะต้องนำ -1 ไปคูณกับตัวที่เราเลือกก่อนนำไปหาร ยกเว้น ตัวที่วงจะไม่นำ -1 ไปคูณ จะได้

$$\lambda_3 = (-5/2, 0, -5/2, 1)$$

นำค่าที่ได้ไปแทนในช่อง w_3 และหาค่าฐานใหม่จะได้

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6/5 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & -5/2 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17/5 \\ 2/5 \\ 8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49/10 \\ 2/5 \\ 1/10 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

นำค่าที่ได้แทนลงในตารางใหม่จะได้

	BASIS INVERSE			RHS
z	-6/5	0	-5/2	-49/10
λ_2	1/5	0	0	2/5
s_2	-1/5	1	-5/2	1/10
λ_3	-1/5	0	1	3/5

สังเกตว่าขณะนี้เรามีค่าสำหรับตัวแปรต่างๆข้างต้นดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 \\ &= (2/5)(0,(3/2),3,0) + (3/5)\big(0,(5/2),0,0\big) \\ &= \big(4/5, 21/10, 6/5, 0\big) \end{aligned}$$

นำค่า $\mathbf{x}$ ที่ได้ข้างต้นไปแทนลงในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -2\big(4/5\big) - 21/10 - 6/5 + 0 \\ &= -4/9 \end{aligned}$$

ทำให้ค่าวัตถุประสงค์ปัจจุบัน คือ -4/9 และ $(w_1, w_2, \alpha) = (-6/4, 0, -5/2)$

ในทำนองเดียวกันกับรอบที่ 2

ขั้นตอนต่อไป เราจำเป็นต้องหาค่าวัตถุประสงค์ $z_j - \hat{c}_j$ ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

การทำซ้ำรอบ3

ปัญหาย่อย : จากสมการ (13) และ สมการ (14)

$$\begin{aligned} &Maximize \quad (\mathbf{wA}-\mathbf{c})\mathbf{x}+a \\ &subject\ to \quad \mathbf{x}\in X \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \mathbf{wA}-\mathbf{c} &= (-6/5,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - (-2,-1,-1,1) \\ &= (4/5,1,-1/5,-1) \end{aligned}$$

ดังนั้นปัญหาย่อยจะเป็นดังต่อไปนี้

$$Maximize \quad (4/5)x_1 + x_2 + (-1/5)x_3 - x_4 - 5/2 \tag{23}$$

$$subject\ to \quad \mathbf{x}\in X \tag{24}$$

ปัญหาย่อยนี้สามารถแยกเป็นเวกเตอร์ (x_1, x_2) และ (x_3, x_4) และสามารถหาคำตอบได้โดยพิจารณาจากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ตามเดิม

ดังนั้นจากสมการ (23) จะต้องแยกเป็น 2 ส่วน คือ $(4/5)x_1 + x_2$ และ $(-1/5)x_3 - x_4$ และนำจุดสุดขีดทั้ง 4 จุดมาแทนในปัญหาย่อยทั้ง 2 ส่วนดังนี้

จุดสุดขีดของกราฟรูปที่1 คือ $(0,0),(2,0),(2,2/3)$ และ $(0,5/2)$ นำมาแทนใน $(4/5)x_1 + x_2$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (0,0) &\Rightarrow (4/5)(0)+0=0 \\ (2,0) &\Rightarrow (4/5)(2)+0=8/5 \\ (2,3/2) &\Rightarrow (4/5)(2)+3/2=31/10 \\ (0,5/2) &\Rightarrow (4/5)(0)+5/2=5/2 \end{aligned}$$

จุดสุดขีดของกราฟรูปที่ 1 คือ $(0,0),(3,0),(4/3,10/3)$ และ $(0,2)$ นำมาแทนใน $(-1/5)x_3-x_4$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&(0,0)\Rightarrow(-1/5)(0)-0=0\\
&(3,0)\Rightarrow(-1/5)(3)-0=-3/5\\
&(4/3,10/3)\Rightarrow(-1/5)(4/3)-10/3=-54/15\\
&(0,2)\Rightarrow(-1/5)(0)-2=-2
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ $\mathbf{X}_1$ คือ จุดที่ $(x_1,x_2)=(2,3/2)$

และค่าสูงสุดของ $\mathbf{X}_2$ คือ จุดที่ $(x_3,x_4)=(0,0)$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่เหมาะสม คือ $\mathbf{x}_4=(2,3/2,0,0)$

และนำ $\mathbf{x}_4$ ไปแทนในสมการ (23) จะได้

$$\begin{aligned}
z_4-\hat{c}_4&=(4/5)x_1+x_2-(1/5)x_3-x_4-(5/2)\\
&=(4/5)(2)+(3/2)-(1/5)(0)-0-(5/2)\\
&=3/5
\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าวัตถุประสงค์ คือ $z_4-\hat{c}_4=3/5$

และค่าขอบล่าง คือ $\hat{\mathbf{c}}_B\overline{\mathbf{b}}-(z_3-\hat{c}_3)=(-49/10)-(3/5)=-5.5$

เนื่องจากค่าวัตถุประสงค์มากกว่าศูนย์เราจึงดำเนินการทำซ้ำในรอบที่ 4 ต่อไป (ก่อนขึ้นการทำซ้ำรอบที่ 4 เราจะหา λ_4 เพื่อที่จะทำการสร้างตารางใหม่ในรอบที่ 4 ในขั้นตอนหลัก)

<u>**ขั้นตอนหลัก**</u>

เนื่อง $z_4-\hat{c}_4=3/5>0$ ดังนั้น เราจะทำการหา λ_4 ที่สอดคล้องกับ $\mathbf{x}_4$ ต่อไป

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3/2\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7/2\end{bmatrix}$$

และเนื่องจากว่า $\mathbf{y}_4=\mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{x}_4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5&0&0\\-1/5&1&-5/2\\-1/5&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\7/2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5\\3/5\\3/5\end{bmatrix}$

เราจะได้ค่า λ_4 โดยนำ $z_4 - \hat{c}_4$ และ $\mathbf{y}_4$ มาเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} z_4 - \hat{c}_4 \\ \mathbf{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

นำค่าที่หาได้ข้างต้นมาสร้างตารางได้ดังนี้

	BASIS INVERSE			RHS	λ_4
z	-6/5	0	-5/2	-49/10	3/5
λ_2	1/5	0	0	2/5	2/5
s_2	-1/5	1	-5/2	1/10	3/5
λ_3	-1/5	0	1	3/5	3/5

จากนั้นหาค่าต่ำสุดระหว่างอัตราส่วนของ $\dfrac{RHS}{\lambda_4}$ เพื่อจะหาว่า λ_4 จะเข้าไปแทนที่ตัวแปรเทียมตัวใด

จะได้ค่าต่ำสุด = $((2/5)/(2/5), (1/10)/(3/5), (3/5)/(3/5))$ = 0.16

ดังนั้นเลือก $(1/10)/(3/5)$

แสดงว่าเอา s_2 ออกจากฐานและ λ_4 เข้าไปแทนที่

ทำการหา λ_4 ใหม่ โดยใช้วิธีเดียวกับข้างต้นที่ได้ทำมาแล้ว จะได้

$$\lambda_4 = (-(3/5)/(3/5), -(2/5)/(3/5), 1/(3/5), -(3/5)/(3/5))$$
$$= (-1, -2/3, 5/3, -1)$$

นำค่าที่ได้ไปแทนในช่อง w_2 และหาค่าฐานใหม่จะได้

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6/5 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & -5/2 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & -1/3 & 5/3 & -25/6 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -49/10 \\ 2/5 \\ 1/10 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

นำค่าที่ได้แทนลงในตารางใหม่จะได้

	BASIS INVERSE			RHS
z	-1	-1	0	-5
λ_2	1/3	-2/3	5/3	1/3
λ_4	-1/3	5/3	-25/6	1/6
λ_3	0	-1	7/2	1/2

สังเกตว่าขณะนี้เรามีค่าสำหรับตัวแปรต่างๆข้างต้นดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 + \lambda_4\mathbf{x}_4\\ &=(1/3)(2,3/2,3,0)+(1/2)(0,5/2,0,0)+(1/6)(2,3/2,0,0)\\ &=(1,2,1,0)\end{aligned}$$

นำค่า x ที่ได้ข้างต้นไปแทนลงในสมการ(1) จะได้

$$(-2)x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = (-2)(1) - 2 - 1 + 0 = -5$$

ทำให้ค่าวัตถุประสงค์ปัจจุบัน คือ -5 และ $(w_1, w_2, \alpha) = (-1,-1,0)$

ในทำนองเดียวกันกับรอบที่ 3

ขั้นตอนต่อไป เราจำเป็นต้องหาค่าวัตถุประสงค์ $z_j - \hat{c}_j$ ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

<u>**การทำซ้ำรอบ4**</u>

ปัญหาย่อย : จากสมการ (13) และ สมการ (14)

$$\begin{aligned}&\textit{Maximize} \quad (\mathbf{wA}-\mathbf{c})\mathbf{x}+a\\ &\textit{subject to} \quad \mathbf{x}\in X\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\mathbf{wA}-\mathbf{c} &= (-1,-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix} - (-2,-1,-1,1)\\ &= (0,0,0,-3)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นปัญหาย่อยเป็นดังต่อไปนี้

$$Maximize \quad 0x_1+0x_2+0x_3-3x_4+0 \tag{25}$$
$$subject\ to \quad \mathbf{x}\in X \tag{26}$$

ปัญหาย่อยนี้สามารถแยกเป็นเวกเตอร์ (x_1,x_2) และ (x_3,x_4) และสามารถหาคำตอบได้โดยพิจารณาจากรูปที่1 และรูปที่ 2 ตามเดิม

ดังนั้นจากสมการ (25) จะต้องแยกเป็น 2 ส่วนคือ $0x_1+0x_2$ และ $0x_3-3x_4$ และนำจุดสุดขีดทั้ง 4 จุดมาแทนในปัญหาย่อยทั้ง 2 ส่วนดังนี้

จุดสุดขีดของรูปที่1 คือ $(0,0),(2,0),(2,2/3)$ และ $(0,5/2)$ นำมาแทนใน $0x_1+0x_2$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
(0,0)&\Rightarrow 0(0)+0(0)=0\\
(2,0)&\Rightarrow 0(2)+0(0)=0\\
(2,3/2)&\Rightarrow 0(2)+0(3/2)=0\\
(0,5/2)&\Rightarrow 0(0)+0(5/2)=0
\end{aligned}$$

จุดสุดขีดของรูปที่2 คือ $(0,0),(3,0),(4/3,10/3)$ และ $(0,2)$ นำมาแทนใน $0x_3-3x_4$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
(0,0)&\Rightarrow 0(0)-3(0)=0\\
(3,0)&\Rightarrow 0(3)-3(0)=0\\
(4/3,10/3)&\Rightarrow 0(4/3)-3(10/3)=-10\\
(0,2)&\Rightarrow 0(0)-3(2)=-6
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ $\mathbf{X}_1$ คือ จุดที่ $(x_1,x_2)=(0,0)$

และค่าสูงสุดของ $\mathbf{X}_2$ คือ จุดที่ $(x_3,x_4)=(0,0)$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่เหมาะสม คือ $\mathbf{x}_5=(0,0,0,0)$

และนำ $\mathbf{x}_5$ ไปแทนในสมการ (25) จะได้

$$\begin{aligned}
z_5-\hat{c}_5 &= 0x_1+0x_2+0x_3-3x_4+0\\
&=0(0)+0(0)+0(0)-3(0)+0\\
&=0
\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าวัตถุประสงค์ คือ $z_5 - \hat{c}_5 = 0$

และค่าขอบเขตล่าง คือ $\hat{\mathbf{c}}_B\overline{\mathbf{b}} - \left(z_5 - \hat{c}_5\right) = (-5) - 0 = -5$

เนื่องจาก $z_k - \hat{c}_k \le 0$ เราจึงหยุดการทำซ้ำในรอบที่4 (ดังนิยามในบทที่2)

ดังนั้นคำตอบเหมาะสมคือ $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(1, 2, 1, 0\right)$

สรุปคำตอบจะได้ $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(1, 2, 1, 0\right)$ ที่มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เท่ากับ –5 โดยความสัมพันธ์ของค่าวัตถุประสงค์ $\left(z_0\right)$ กับค่าขอบเขตล่าง $\left(z_0 - \left(z_k - \hat{c}_k\right)\right)$ ของแต่ละการทำซ้ำทั้งหมดแสดงดังกราฟต่อไปนี้

รูป (3.3) : กระบวนการของค่าวัตถุประสงค์เดิมและขอบเขตล่าง

จากคำตอบที่เหมาะสม $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(1, 2, 1, 0\right)$ จะแสดงให้เห็นในรูป (3.4) และรูป (3.5) ทั้งสองเซตคำตอบ ($\mathbf{X}_1$ และ $\mathbf{X}_2$)

เนื่องจาก $(1, 2)$ อาจจะไม่ใช่จุดสุดขีดของ $\mathbf{X}_1$

และ $(1, 0)$ อาจจะไม่ใช่จุดสุดขีดของ $\mathbf{X}_2$

เราสามารถตรวจสอบว่าทั้งสองจุดคือจุดสุดขีดที่อยู่บน $\mathbf{X}_1$ และ $\mathbf{X}_2$ หรือไม่ ?

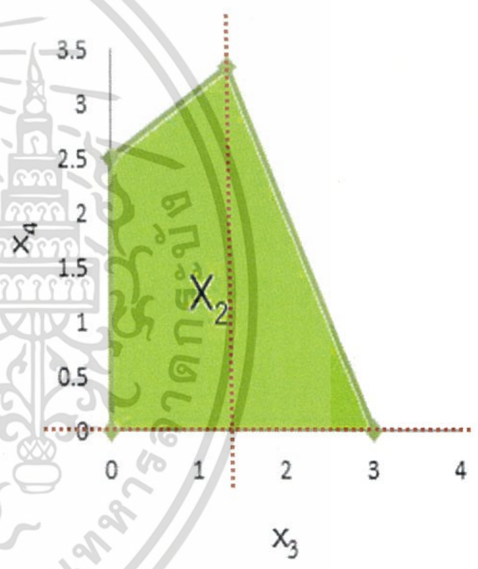
โดยทำการตรวจสอบได้จากการนำข้อจำกัดหลักมาสร้างกราฟบนรูป (3.1) และ รูป (3.2)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 \qquad &\le 2 \\ x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 3 \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า $x_3 = 1$ และ $x_4 = 0$ เข้าไปในพื้นที่ (x_1, x_2) นี้ ทำให้ได้ข้อจำกัดหลักลดลงเหลือเป็น $x_1 \leq 1$ และ $x_1 + x_2 \leq 3$ และนำข้อจำกัดมาสร้างกราฟที่แสดงในรูป (3.4) เราจะเห็นว่า (1,2) เป็นจุดตัดกันของ $\mathbf{X}_1$ กับทั้งสองของข้อจำกัดที่เพิ่มมา แสดงให้เห็นว่า $(1,2)$ คือจุดสุดขีดของ $\mathbf{X}_1$

ในทำนองเดียวกันการแทนค่า $x_1 = 1$ และ $x_2 = 2$ เข้าไปในพื้นที่ (x_3, x_4) ข้อจำกัดหลักลดลงเหลือเป็น $x_3 \leq 1$ และ $2x_4 \leq 0$ และนำข้อจำกัดนี้มาสร้างกราฟที่แสดงในรูป (3.5) เราจะเห็นว่า (1,0) เป็นจุดตัดกันของ $\mathbf{X}_2$ กับทั้งสองของข้อจำกัดที่เพิ่มมา แสดงให้เห็นว่า $(1,0)$ คือจุดสุดขีดของ $\mathbf{X}_2$

รูป (3.4) : กราฟของคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของ
จากสมการ $(4),(5)$



รูป (3.5) : กราฟของคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของ X_2
จากสมการ $(6),(7)$

จากวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยดังกล่าวข้างต้น เราจะนำมาประยุกต์ใช้กับโปรแกรมแมทแลบ เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณมากยิ่งขึ้น โดยรูปแบบโปรแกรมจะศึกษาได้จากบทที่ 4 ต่อไป

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

โปรแกรมการคำนวณวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย โดยใช้MATLAB

ในบทนี้เราจะเสนอโปรแกรมการคำนวณที่มาจากวิธีในบทที่ 3 ทั้งหมดรวมถึงการอธิบายลักษณะการใช้โปรแกรมและการแสดงผลในขั้นตอนต่างๆ

โปรแกรมการคำนวณ

```
clearall
a=input('enter A value  ');
b=input('enter b value  ');
c=input('enter c value  ');
d00=input('enter x1(0,0) value  ');
d10=input('enter x1(1,0) value  ');
d01=input('enter x1(0,1) value  ');
d11=input('enter x1(1,1) value  ');
e00=input('enter x2(0,0) value  ');
e10=input('enter x2(1,0) value  ');
e01=input('enter x2(0,1) value  ');
e11=input('enter x2(1,1) value  ');
f=input('Enter B value  ');
k1=1;
for k1=1:10;
if k1==size(f);
        g=zeros(1,k1);
break
end
end
h=[g;f];
ii=[1];
i=[0;b;ii];
lamda=zeros(size(i,1),1);
xx=zeros(size(i,1),1);
r=zeros(size(i,1),1);
itr =1;
whileitr<= size(i,1)
forzz=1:size(r,1)
   c1=(([h(1,1),h(1,2)]*a)-c);
   j=[c1(1,1),c1(1,2)];
   k=[c1(1,3),c1(1,4)];
   l1=dot(j,d00);
   l2=dot(j,d01);
   l3=dot(j,d10);
   l4=dot(j,d11);
   l5=dot(k,e00);
   l6=dot(k,e01);
   l7=dot(k,e10);
   l8=dot(k,e11);
   m=[l1 l2 l3 l4];
   n=[l5 l6 l7 l8];
```

```
   o=max(m);
if o==l1
      l1=d00;
      o=l1;
elseif o==l2
            l2=d01;
            o=l2;
elseif o==l3
                  l3=d10;
                  o=l3;
else
                   l4=d11;
                   o=l4;
end
end
end
   p=max(n);
if p==l5
      l5=e00;
      p=l5;
elseif p==l6
            l6=e01;
            p=l6;
elseif p==l7
                  l7=e10;
                  p=l7;
else
                  l8=e11;
                  p=l8;
end
end
end
   q=[o p]; %(x)Value
x2=q;
x1=zeros(size(q));
rrr=dot(q,c1);
rr=rrr+h(1,3);%z-c
if (itr==1)
r(1)=-rr;
elseif (itr==2)
r(2)=xx(2)-rr;
elseif (itr==3)
r(3)=xx(3)-rr;
elseif (itr==4)
r(4)=xx(4)-rr;
elseif (itr==5)
r(5)=xx(5)-rr;
elseif (itr==6)
r(6)=xx(6)-rr;
elseif (itr==7)
r(7)=xx(7)-rr;
elseif (itr==8)
r(8)=xx(8)-rr;
elseif (itr==9)
r(9)=xx(9)-rr;
else
aa=size(i,1);
r(aa)=xx(aa)-rr;
```

```
end
end
end
end
end
end
end
end
end
disp('test1');
if rr<=0
      break
else
   s=transpose(q);
   a1=a*s; %Ax2
ifitr==1
   a2=[a1;1];
else
       a22=[a1;1];
       a222=h(b3,:);
       a2=a222*a22;
end
   a3=[rr;a2];%lamda
 a4=size(i);
for n=2:a4 %RHS/lamda
ifi(n,1)>=0 || a3(n,1)~=0;
a5(n)=i(n)/a3(n);
end
end
 a6=2:n;
if a6>=2; %min(a5)
[a7 index]=min(a5(1,a6));
indexlamda2=index+1;
end
kk=size(i);
forjj=2:kk;
if a7==(a5(1,jj))
     a8=a3;
     a9=a3(jj,1);
     a10=1/(a3(jj,1));
     a11=a8/(-1*a9);
a11(jj,1)=a10;
end
if a7==(a5(1,jj))
     b1=eye(4);
b1(:,jj)=a11;
end
end
ifitr==1
b2=b1*eye(4);
else
     b2=b1*b2;
end
b3=size(h);
b3=2:n;
h=b2(:,b3); %Z new
lamda2 = lamda;
b4=b1*i;
lamda=b4(indexlamda2);
lamda2=lamda;
i=b4;%RHS new
```

```
i1=transpose(i);
lamda1=i1(1,size(i,1));
if (itr==1)
xxx=lamda1*x1+lamda2*x2;
xx(2)=dot(xxx,c);
x3new=x2;
indexnew=indexlamda2;
elseif(itr==2)
xxx=lamda2*x2+i(indexnew)*x3new;
xx(3)=dot(xxx,c);
        x2new=x2;
        indexnew1=indexlamda2;
        x4new=x3new;
elseif (itr==3)
xxx=lamda2*x2+x2new*i(indexnew1)+x4new*i(indexnew);
xx(4)=dot(xxx,c);
        x3new1=x2;
        indexnew2=indexlamda2;
        x4new1=x2new;
        x5new=x4new;
elseif (itr==4)
xxx=lamda2*x2+x3new1*i(indexnew2)+x4new1*i(indexnew1)+x5new*i(indexne
w);
xx(5)=dot(xxx,c);
               x3new2=x2;
               indexnew3=indexlamda2;
               x4new2=x3new1;
               x5new1=x4new1;
               x6new=x5new;
elseif (itr==5)
xxx=lamda2*x2+x3new2*i(indexnew3)+x4new2*i(indexnew2)+x5new1*i(indexn
ew1)+x6new*i(indexnew);
xx(6)=dot(xxx,c);
                    x3new3=x2;
                    indexnew4=indexlamda2;
                    x4new3=x3new2;
                    x5new2=x4new2;
                    x6new1=x5new1;
                    x7new=x6new;
elseif (itr==6)

xxx=lamda2*x2+x3new3*i(indexnew4)+x4new3*i(indexnew3)+x5new2*i(indexn
ew2)+x6new1*i(indexnew1)+x7new*i(indexnew);
xx(7)=dot(xxx,c);
                        x3new4=x2;
                        indexnew5=indexlamda2;
                        x4new4=x3new3;
                        x5new3=x4new3;
                        x6new2=x5new2;
                        x7new1=x6new1;
                        x8new=x7new;
```

```
elseif (itr==7)
xxx=lamda2*x2+x3new4*i(indexnew5)+x4new4*i(indexnew4)+x5new3*i(indexn
ew3)+x6new2*i(indexnew2)+x7new1*i(indexnew1)+x8new*i(indexnew);
xx(8)=dot(xxx,c);
                                        x3new5=x2;
                                        indexnew6=indexlamda2;
                                        x4new5=x3new4;
                                        x5new4=x4new4;
                                        x6new3=x5new3;
                                        x7new2=x6new2;
                                        x8new1=x7new1;
                                        x9new=x8new;
elseif (itr==8)

xxx=lamda2*x2+x3new5*i(indexnew6)+x4new5*i(indexnew5)+x5new4*i(indexn
ew4)+x6new3*i(indexnew3)+x7new2*i(indexnew2)+x8new1*i(indexnew1)+x9ne
w*i(indexnew);
xx(9)=dot(xxx,c);
                                            x3new6=x2;
                                            indexnew7=indexlamda2;
                                            x4new6=x3new5;
                                            x5new5=x4new5;
                                            x6new4=x5new4;
                                            x7new3=x6new3;
                                            x8new2=x7new2;
                                            x9new1=x8new1;
                                            x10new=x9new;
elseif (itr==9)

xxx=lamda2*x2+x3new6*i(indexnew7)+x4new6*i(indexnew6)+x5new5*i(indexn
ew5)+x6new4*i(indexnew4)+x7new3*i(indexnew3)+x8new2*i(indexnew2)+x9ne
w1*i(indexnew)+x10new*i(indexnew);
xx(10)=dot(xxx,c);
                                                x3new7=x2;
                                                indexnew8=indexlamda2;
                                                x4new7=x3new6;
                                                x5new6=x4new6;
                                                x6new5=x5new5;
                                                x7new4=x6new4;
                                                x8new3=x7new3;
                                                x9new2=x8new2;
                                                x10new1=x9new1;
                                                x11new=x10new;
else

xxx=lamda2*x2+x3new7*i(indexnew8)+x4new7*i(indexnew7)+x5new6*i(indexn
ew6)+x6new5*i(indexnew5)+x7new4*i(indexnew4)+x8new3*i(indexnew3)+x9ne
w2*i(indexnew2)+x10new1*i(indexnew1)+x11new*i(indexnew);
xx(11)=dot(xxx,c);
end
end
end
end
end
end
end
end
end
```

```
itr=itr+1;
end
end
break
end
disp(xxx);
plot(r,'*--r');
holdon
plot(xx,'H:b');
gridon
title('Progress of the primal objective values(xx)and the lower
bounds(r)');
```

โจทย์ตัวอย่างการคำนวณ

Ex.

$$
\begin{array}{llr}
\textit{Minimize} & -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & \\
\textit{Subject to} & x_1 + x_3 \le 2 & (1) \\
 & x_1 + x_2 + 2x_4 \le 3 & (2) \\
 & x_1 \le 2 & (3) \\
 & x_1 + 2x_2 \le 5 & (4) \\
 & -x_3 + x_4 \le 2 & (5) \\
 & 2x_3 + x_4 \le 6 & (6) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & (7)
\end{array}
$$

4.1อธิบายการ Input รับค่าของโปรแกรมการคำนวณ

```
clear all
a=input('enter A value  ');
b=input('enter b value  ');
c=input('enter c value  ');
d00=input('enter x1(0,0) value  ');
d10=input('enter x1(1,0) value  ');
d01=input('enter x1(0,1) value  ');
d11=input('enter x1(1,1) value  ');
e00=input('enter x2(0,0) value  ');
e10=input('enter x2(1,0) value  ');
e01=input('enter x2(0,1) value  ');
e11=input('enter x2(1,1) value  ');
f=input('Enter B value  ');
```

เป็นการ Input ค่าจากโจทย์ที่กำหนดให้

A value = ค่าสัมประสิทธิ์ ของสมการเงื่อนไขที่ไม่สามารถจับคู่ได้จากโจทย์ตัวอย่างคือค่าสมการที่ (1) และ (2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

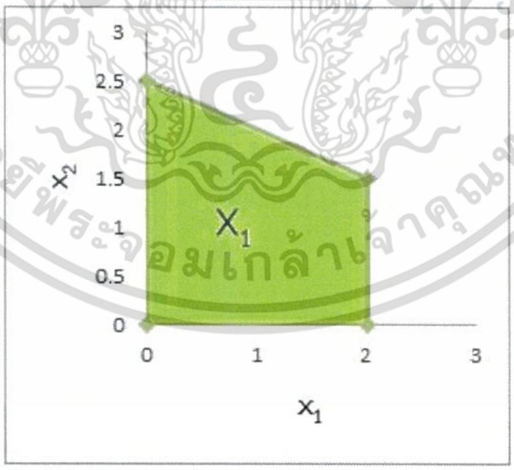
b value = ค่าตัวเลขทางด้านขวาของสมการเงื่อนไขที่นำมาใส่ในค่า A value จากโจทย์ตัวอย่างคือค่า

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c value = ค่าตัวสัมประสิทธิ์ จากโจทย์ของปัญหา

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

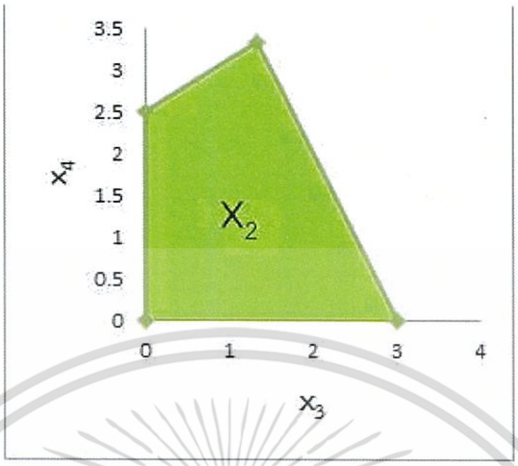
ค่า $\mathbf{x}_1(0,0), \mathbf{x}_1(1,0), \mathbf{x}_1(0,1), \mathbf{x}_1(1,1)$ = ค่าขอบจากรูปกราฟที่ได้จากสมการย่อยที่นำมาแยกหาค่าขอบจากโจทย์ตัวอย่างคือสมการที่ (3) และ (4) ซึ่งได้เป็นรูป



ซึ่ง

$$\mathbf{x}_1(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_1(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_1(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_1(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

ค่า $\mathbf{x}_2(0,0), \mathbf{x}_2(1,0), \mathbf{x}_2(0,1), \mathbf{x}_2(1,1)$ = ค่าขอบจากรูปกราฟที่ได้จากสมการย่อยที่นำมาแยกหาค่าขอบจากโจทย์อย่างคือสมการที่ (5) และ (6) ซึ่งได้เป็นรูป



ซึ่ง

$$\mathbf{x}_2(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_2(1,0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_2(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_2(1,1) = \begin{bmatrix} 4/3 & 10/3 \end{bmatrix}$$

B value = คือค่าจากตาราง Basis เริ่มต้นจากโจทย์ตัวอย่างจะได้

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 อธิบายโปรแกรมการคำนวณเพิ่มเติม

```
k1=1;
for k1=1:10;
    if k1==size(f);
        g=zeros(1,k1);
        break
    end
end
h=[g;f];
ii=[1];
i=[0;b;ii];
lamda=zeros(size(i,1),1);
xx=zeros(size(i,1),1);
r=zeros(size(i,1),1);
```

Loop for ของตาราง Basis Inverse ซึ่งเป็นค่าของ z และค่า z จะขึ้นอยู่กับมิติค่า B value ถ้า มีขนาด 3x3 ค่า z ในตารางก็จะมีเพียงแค่ $(0 \quad 0 \quad 0)$ ในทำนองเดียวกันถ้า B value มีขนาด 4x4 ค่า z ในตารางก็จะเปลี่ยนเป็น $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ และจะมีขนาดได้มากสุดคือ 10x1 ค่า h คือการทำตาราง Basis Inverse จากโจทย์จะได้ ตาราง Basis Inverse คือ

BASIS INVERSE

z	0	0	0
λ_2	1	0	0
s_2	0	1	0
λ_3	0	0	1

i เป็นสร้างตาราง $\bar{\mathbf{b}}$ หรือ RHS และ ii=1 เสมอเพราะเป็นข้อกำหนดการหา $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = \mathbf{1}$ จากทฤษฎีที่ได้กล่าวเอาไว้ซึ่งจากโจทย์ตัวอย่างจะได้ RHS คือ

RHS
0
2
3
1

โปรแกรมการหาค่าสูงสุดในแต่ละกราฟ

```
 itr =1;
  while itr <= size(i,1)
      for zz=1:size(r,1)
c1=(([h(1,1),h(1,2)]*a)-c);
j=[c1(1,1),c1(1,2)];
k=[c1(1,3),c1(1,4)];
l1=dot(j,d00);
l2=dot(j,d01);
l3=dot(j,d10);
l4=dot(j,d11);
l5=dot(k,e00);
l6=dot(k,e01);
l7=dot(k,e10);
l8=dot(k,e11);
m=[l1 l2 l3 l4];
n=[l5 l6 l7 l8];
o=max(m);
if o==l1
    l1=d00;
    o=l1;
else if o==l2
        l2=d01;
        o=l2;
    else if o==l3
            l3=d10;
            o=l3;
        else
             l4=d11;
             o=l4;
        end
    end
end
```

```
p=max(n);
if p==l5
    l5=e00;
    p=l5;
else if p==l6
        l6=e01;
        p=l6;
    else if p==l7
            l7=e10;
            p=l7;
        else
            l8=e11;
            p=l8;
        end
    end
end
q=[o p]; %(x)Value
x2=q;
x1=zeros(size(q));
```

Loop while เป็นการคำนวณการทำซ้ำของปัญหาย่อยที่ต้องการหาคำตอบสุดท้ายของโปรแกรมซึ่งมีกำหนดให้อยู่ในรอบการทำซ้ำคือ ไม่ต่ำกว่าหรือเท่ากับจำนวนขนาดของ ตาราง RHS

Loop for เป็นการคำนวณ ค่าของระยะห่างระหว่างขอบล่างกับค่าวัตถุประสงค์ที่ยอมรับได้และให้โปรแกรมหยุดคำนวณ

c1 = เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบปัญหาย่อยที่เป็นในรูปแบบสูตรการหาค่าวัตถุประสงค์

j = ค่าของ c1 ในหลักที่ 1 และหลักที่ 2

k = ค่าของ c1 ในหลักที่ 3 และหลักที่ 4

l1-l4 = การคำนวณหาค่าของc1 ในหลักที่ 1 และหลักที่ 2 กับค่าขอบทั้ง 4 ค่า ในรูป X_1 โดยการคำนวณคือการคำนวณแบบ dot นั่นคือ นำค่าแต่ละตำแหน่งมาคูณกันแล้วผลที่ได้นำมาบวกกัน

l5-l8 = การคำนวณหาค่าของ c1 ในหลักที่ 3 และหลักที่ 4 กับค่าของทั้ง 4 ค่าในรูป X_2 โดยการคำนวณคือการคำนวณแบบ dot นั่นคือ นำค่าแต่ละตำแหน่งมาคูณกันแล้วผลที่ได้นำมาบวกกัน

m = ค่าสูงสุดของค่า l1 , l2 , l3 , l4

n = ค่าสูงสุดของค่า l5 , l6 , l7 , l8

rrr = ผลการคำนวณตำแหน่งระหว่างค่า q กับค่า **c**1 เพื่อนำค่าที่ได้ไปคำนวณต่อไปในโจทย์ตัวอย่าง ค่า rrr จะได้ 17/2 ซึ่งได้จากการคำนวณ $(2,3/2,3,0)$ และ $(2,1,1,-1)$ แบบ dot จะได้ค่าคือ 17/2

rr = ค่า z-c คือการนำค่า rrr-ด้วย ค่าในตาราง Basis Inverse แถวที่ 1 หลักที่ 3 ในโจทย์ตัวอย่างจะได้ 17/2-0 คือค่า 17/2

loop if เป็นการกำหนดเงื่อนไขในการวนซ้ำของรอบใน loop while ที่ได้อธิบายไปแล้วข้างต้นว่า ในรอบที่ 1 ค่า r = -rr โดยการแทนค่า r ในรอบที่ 1 ลงใน เมทริกซ์ r ที่สร้างไว้ในข้างต้นแล้ว และการคำนวณในรอบที่ 2-10 ค่า r = การนำค่า xx (ในรอบนั้นๆ) – rr และแทนลงใน เมทริกซ์ r ที่สร้างไว้ในข้างต้น เช่นกัน และในการแทนค่า r จะไม่เป็นการเก็บค่าทับกัน จะเป็นการเก็บค่า ลงในตารางเมทริกซ์ที่ได้สร้างขึ้นไว้ขึ้นอยู่กับรอบการคำนวณของ loop while ว่ารอบที่เท่าไหร่ ถ้ารอบแรก ค่า r จะถูกแทนในตำแหน่งที่ (1,1) รอบที่สองค่า r จะถูกแทนค่าในตำแหน่งที่ (2,1) ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะคำนวณครบใน loop while เพื่อนำค่า r ที่ได้ไปเปรียบเทียบต่อไป

โปรแกรมการกำหนดค่า $z_k - \hat{c}_k$ และการหาค่า λ_k , y_{rk}

```
disp('test1');
if rr<=0
   break
         else
   s=transpose(q);
   a1=a*s; %Ax2
   if itr==1
   a2=[a1;1];
   else
       a22=[a1;1];
       a222=h(b3,:);
       a2=a222*a22;
   end
   a3=[rr;a2];%lamda
 a4=size(i);
 for n=2:a4 %RHS/lamda
     if i(n,1)>=0 || a3(n,1)~=0;
         a5(n)=i(n)/a3(n);
      end
 end
 a6=2:n;
 if a6>=2; %min(a5)
[a7 index]=min(a5(1,a6));
indexlamda2=index+1;
 end
```

s = การเปลี่ยนแถวของ **x** ที่ได้ อยู่ในรูปแบบ transpose เพื่อเตรียมให้พร้อมกับการคำนวณในขั้นตอนต่อไป

a1 = การนำ เมทริกซ์ A กับ ค่า x ที่ได้ทำการ transpose ไว้แล้ว โดยจากโจทย์ตัวอย่างค่า Ax ที่ได้ในการทำซ้ำรอบแรกคือ

$$\mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

loop if เป็นการกำหนดเงื่อนไข ว่า ในการทำซ้ำรอบแรก ค่า Ax จะได้จากค่า Ax แล้วในแถวต่อไปของเมทริกซ์เพิ่มค่า 1 แต่ในรอบการทำซ้ำอื่นๆ คือการนำค่า ในตาราง Basis Inverse โดยเริ่มต้นที่แถวที่ 2 จนถึงแถวสุดท้าย มาคูณกับ ค่า Ax ที่เพิ่มค่า 1 ต่อแถวสุดท้าย จากโจทย์ตัวอย่างจะได้การทำซ้ำรอบที่ 1 คือ

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และการทำซ้ำรอบที่ 2 คือ

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -7/10 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งได้จากตาราง Basis Inverse ที่ได้จากการทำซ้ำรอบแรกคือ

BASIS INVERSE

z	-17/10	0	0
λ_2	1/5	0	0
s_2	-7/10	1	0
λ_1	-1/5	0	1

a3 = ค่า λ ที่จะนำไปคำนวณต่อไป ซึ่งได้จากการนำ เมทริกซ์ rr กับ เมทริกซ์ a2 ต่อกัน จากโจทย์ตัวอย่างจะได้

การทำซ้ำรอบที่ 1 คือ

$$\begin{bmatrix} z_2 - \hat{c}_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/2 \\ 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Loop for เป็นการทำซ้ำเพื่อเปรียบเทียบเงื่อนไขใน loop if โดยเริ่มตั้งแต่ ที่ ตำแหน่งที่ 2 จนจบตาม size(i) ที่กำหนดขึ้นตั้งแต่แรก ซึ่งมี size ตรงกับ a3 ที่ได้คำนวณไปดังข้างต้น

Loop if เป็นเงื่อนไขที่ใช้ในการเปรียบเทียบ ค่า RHS กับค่า λ ที่ได้จากการคำนวณไว้แล้ว โดยมีข้อกำหนดว่าตัวเศษคือค่าของเมทริกซ์ i หรือค่า RHS จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 และตัวส่วนคือค่า λ จะต้องไม่เท่ากับ 0 จึงจะทำการคำนวณ และเก็บค่าทุกครั้งที่คำนวณ

Loop if เป็นเงื่อนไขการหาค่าต่ำสุดจากอัตราส่วนของค่า RHS กับค่า λ ที่ได้จากการคำนวณใน loop if ก่อนหน้านี้ โดยมีเงื่อนไข ว่า จะหาค่าตำสุด ในตำแหน่งที่ 2 ไปจนถึงตำแหน่งสุดท้ายของเมทริกซ์และทำการเก็บ index ของตำแหน่งของค่าที่ต่ำที่สุดไว้

Indexlamda2 = เป็นการกำหนดตำแหน่งของค่าต่ำสุดจากตารางหลัก

จากโจทย์ตัวอย่างจะได้ดังต่อไปนี้

RHS	λ_2
0	17/2
2	5
3	17/2
1	1

ค่าต่ำสุด = $(2/5, 3/(7/2), 1/1)$ = 0.4 ดังนั้นเลือกค่า $2/5$

โปรแกรมการหาค่า B^{-1}ใหม่และค่า $\bar{\mathbf{b}}$ ใหม่

```
kk=size(i);
for jj=2:kk;
  if a7==(a5(1,jj))
      a8=a3;
      a9=a3(jj,1);
      a10=1/(a3(jj,1));
      a11=a8/(-1*a9);
      a11(jj,1)=a10;
  end
  if a7==(a5(1,jj))
      b1=eye(4);
      b1(:,jj)=a11;
  end
end
if itr==1
b2=b1*eye(4);
else
    b2=b1*b2;
end
b3=size(h);
b3=2:n;
h=b2(:,b3); %Z new
lamda2 = lamda;
b4=b1*i;
lamda=b4(indexlamda2);
lamda2=lamda;
i=b4;%RHS new
i1=transpose(i);
lamda1=i1(1,size(i,1));
```

Loop for เป็นการทำซ้ำโดยเริ่มตั้งแต่ตำแหน่งที่ 2 จนถึงตำแหน่งสุดท้ายของ เมทริกซ์ i

Loop if เป็นการกำหนดเงื่อนไงจากตำแหน่งที่เราได้จากการหาค่าต่ำสุดในการคำนวณก่อนหน้านี้ โดยมีข้อกำหนดว่า ค่าของเมทริกซ์ λ ตำแหน่งที่ได้ค่าต่ำสุดจะได้ค่าใหม่คือ 1/ค่าเดิม และตำแหน่งอื่นๆจะได้ค่าโดยการนำ -1/ค่าเดิม ในตำแหน่งที่ได้ค่าต่ำสุดxค่าเดิมในเมทริกซ์ λ จากโจทย์ตัวอย่างจะได้

การทำซ้ำรอบแรกคือ

$$\lambda_2 = ((-17/2)/5, 1/5, (-7/2)/5, -1/5) = (-17/10, 1/5, -7/10, -1/5)$$

ซึ่งตาราง λ และตำแหน่งที่ได้ค่าต่ำสุดคือคือ

λ_2
17/2
5
17/2
1

Loop if เป็นการกำหนดเงื่อนไขว่า ค่าที่ได้จากการคำนวณ λ ใหม่ที่ได้นั้นมาใส่ในหลักของเมทริกซ์เอกลักษณ์ ที่สร้างขึ้นซึ่งมีขนาด 4x4 และการแทนค่าในหลักของเมทริกซ์เอกลักษณ์ก็ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของค่าต่ำสุดที่หาได้จากการหาอัตราส่วนข้างต้นด้วย จากโจทย์ตัวอย่างจะได้

การทำซ้ำรอบที่ 1 ได้ค่าต่ำสุดในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ λ จึงนำค่า λ ใหม่ไปแทนค่าในเมทริกซ์เอกลักษณ์ในตำแหน่งที่ 2 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Loop if เป็นการกำหนดเงื่อนไขของการทำซ้ำในรอบต่างๆ คือ ในการทำซ้ำรอบแรก กำหนดให้ตาราง λ ใหม่xเมทริกซ์เอกลักษณ์มีขนาด 4x4 และในการทำซ้ำรอบอื่น ๆ เป็นการนำค่าที่ได้การทำซ้ำรอบแรกมาคำนวณกับตาราง λ ใหม่ จนกว่าจะจบการคำนวณของ loop while ในโจทย์ตัวอย่างจะได้

การทำซ้ำรอบที่ 1 คือ

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การทำซ้ำรอบที่ 2 คือ

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6/5 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & -5/2 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

h = ค่า Basis Inverse ที่ได้จาก loop if ที่คำนวณล่าสุด โดยตัดตำแหน่งแรกทิ้งในทุกๆแถว

b4 = ค่า λ ใหม่xค่าทางด้านขวามือ หรือ RHS ที่กำหนดตั้งแต่ต้นจากโจทย์ตัวอย่างจะได้

การทำซ้ำรอบแรกคือ

$$RHS = \begin{bmatrix} 1 & -17/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -7/10 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17/5 \\ 2/5 \\ 8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

lamda = ค่าตาราง RHS ของตำแหน่งที่ได้เก็บไว้ข้างต้น

lamda2 = ค่าของ lamda

i = ค่า RHS ใหม่ ที่ได้จากการคำนวณล่าสุด

i1 = ค่า transpose ของตาราง RHS ใหม่

lamda1 = ค่า λ_1

ซึ่งได้จากค่าของตาราง RHS ใหมในตำแหน่งสุดท้ายของตารางจากโจทย์ตัวอย่าง ค่า λ_1 ในรอบการทำซ้ำรอบแรก คือ ค่า 3/5

โปรแกรมการหาค่าเหมาะสมที่เป็นไปได้ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ x และค่า z_0 ปัจจุบัน

```
if (itr==1)
xxx=lamda1*x1+lamda2*x2;
xx(2)=dot(xxx,c);
x3new=x2;
indexnew=indexlamda2;
else if(itr==2)
        xxx=lamda2*x2+i(indexnew)*x3new;
        xx(3)=dot(xxx,c);
        x2new=x2;
        indexnew1=indexlamda2;
        x4new=x3new;
    else if (itr==3)
        xxx=lamda2*x2+x2new*i(indexnew1)+x4new*i(indexnew);
        xx(4)=dot(xxx,c);
        x3new1=x2;
        indexnew2=indexlamda2;
        x4new1=x2new;
        x5new=x4new;
```

Loop if เป็นการกำหนดเงื่อนไข หาค่า $\mathbf{x}$ ซึ่งมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

ในการทำซ้ำรอบที่ 1 ค่า xxx ได้จากการคูณกันระหว่าง lamda1 กับ x1 แล้ว lamda2 กับ x2 แล้วนำค่าทีได้มาบวกกัน โดยค่า xx ที่จะใช้ในการเปรียบเทียบในขั้นตอนสุดท้ายคือการหาค่าระหว่าง xxx กับ c (สัมประสิทธิ์จากโจทย์)ในรูปแบบ dot โดยให้ค่าที่ได้จะไปแทนที่ตำแหน่งที่ 2 ของตาราง xx ที่ได้สร้างขึ้นตั้งแต่แรกและกำหนด ค่า x3new = ค่า x2 แล้ว indexnew = ตำแหน่งในการคำนวณค่า λ รอบที่ 1 จากโจทย์ตัวอย่างจะได้ค่าดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 \\ &= 3/5(0,0,0,0) + 2/5(0,3/2,3,0) \\ &= (4/5,3/5,6/5,0)\end{aligned}$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2(4/5) - 3/5 - 6/5 + 0 = -17/5$$

การทำซ้ำรอบที่ 2 ค่า xxx ได้จากการคูณกันระหว่าง lamda2 กับ x2 ในตำแหน่งใหม่ของการคำนวณรอบที่ 2 บวกกับค่า RHS ใหม่ในตำแหน่งการทำซ้ำรอบที่1คูณกับค่า x3new ที่ได้กำหนดไว้แล้วในการทำซ้ำรอบที่ 1 ที่ผ่านมา และค่า xx ที่จะใช้ในการเปรียบเทียบในขั้นตอนสุดท้ายคือการหาค่าระหว่าง xxx กับ c ในรูปแบบ dot โดยค่าที่ได้จะไปแทนที่ในตำแหน่งที่ 3 ของตาราง xx และกำหนดค่า x2new=ค่า x2 แล้ว indexnew1= ตำแหน่งในการคำนวณค่า λ ในรอบที่ 2 และกำหนดค่า x4new = ค่า x3new เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณรอบที่ 3 ต่อไป

จากโจทย์ตัวอย่างจะได้ค่าดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 \\ &= 2/5(0,3/2,3,0) + 3/5(0,5/2,0,0) \\ &= (4/5,21/10,6/5,0)\end{aligned}$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2(4/5) - 21/10 - 6/5 + 0 = -4/9$$

การทำซ้ำรอบที่ 3 ค่า xxx ได้จากการคูณกันระหว่าง lamda2 กับ x2 ในตำแหน่งใหม่ของการคำนวณรอบที่ 3 บวกกับค่า RHS ใหม่ในตำแหน่งการทำซ้ำรอบที่ 2 คูณกับค่า x2new บวกกับค่า RHS ใหม่ในตำแหน่งการทำซ้ำรอบที่ 1 คูณกับค่า x4new และค่า xx ที่จะใช้ในการเปรียบเทียบในขั้นตอนสุดท้ายคือการหาค่าระหว่าง xxx กับ c ในรูปแบบ dot โดยค่าที่ได้จะไปแทนที่ในตำแหน่งที่ 4 ของตาราง xx และกำหนดค่า x3new1 = ค่า x2 แล้ว indexlamda2 = ตำแหน่งในการคำนวณ λ ในรอบที่ 3 และกำหนดค่า x4new1 = ค่า x2new และ ค่า x5new = ค่า x4new

$$\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 + \lambda_4\mathbf{x}_4$$
$$=1/3\left(2,3/2,3,0\right)+1/2\left(0,5/2,0,0\right)+1/6\left(2,3/2,0,0\right)$$
$$=\left(1,2,1,0\right)$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2\left(1\right)-2-1+0=-5$$

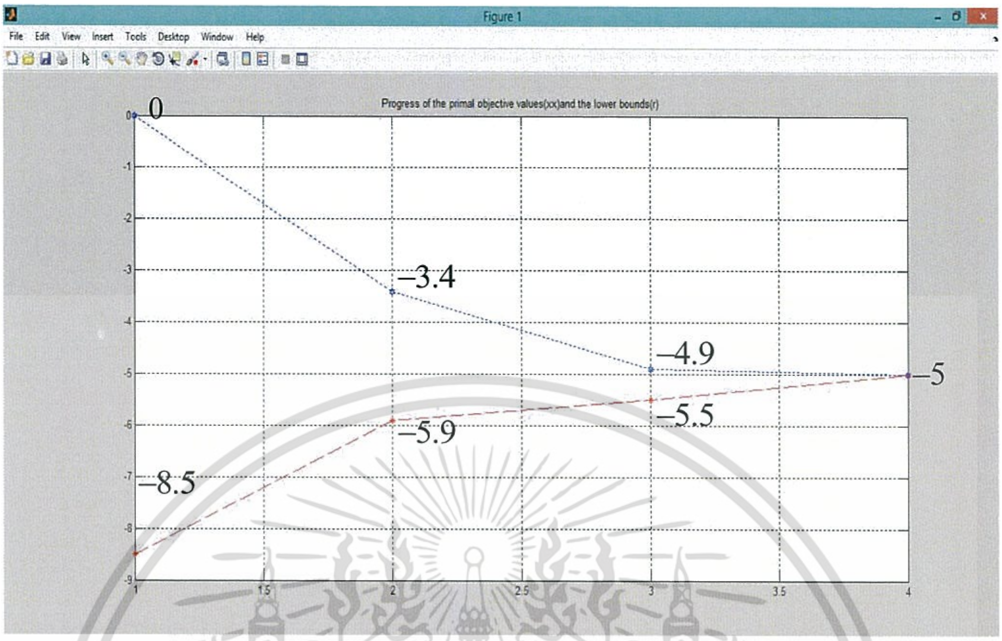
เราจะกำหนดการทำซ้ำในรอบต่อ ๆ ไป จนครบรอบที่ 10 หรือตามขนาดของตาราง RHS ว่ามีขนาดเท่าไหร่ และจะทำซ้ำกี่รอบ โดยการคำนวณจะทำในรูปแบบคล้ายๆ กับ การทำ ในรอบที่ 1 – 3 โดยการคำนวณหาค่า xxx จะเพิ่มขึ้นทุกพจน์มากขึ้นเรื่อยและกำหนดตัวแปรใหม่ขึ้นมาทุกครั้งที่ทำการคำนวณ เพื่อนำไปใช้คำนวณในการทำซ้ำรอบใหม่ต่อไป

โปรแกรมการเปรียบเทียบค่า z_0 กับค่า $z_0 - (z_k - \hat{c}_k)$

```
            itr=itr+1;
end
            end
            break
        end
        disp(xxx);
            plot(r,'*--r');
hold on
plot(xx,'H:b');
grid on
title('Progress of the primal objective values(xx)and the lower bounds(r)');
```

Plot = การวาดกราฟ ค่า r โดยให้เป็น เส้น ---และมีตัวหนังสือสีแดงโดยแต่ละจุดจะให้เป็นดอกจันและการวาดกราฟ ค่า xx โดยให้เป็นเส้นประชิดแบบจุด และมีตัวหนังสือสีน้ำเงินแต่ละจุดให้เป็นรูปดาวหกแฉก และวาดกราฟทั้งสองในรูปเดียวกัน และให้ตั้งชื่อกราฟว่า Progress of the primal objective values (xx) and the lower bounds (r)

โดยรูปที่ได้จากการวาดกราฟคือ



4.3 หน้าจอการคำนวณโปรแกรม (Command Window)

การรับค่า (Input)

```
Command Window
  enter A value  [1 0 1 0;1 1 0 2]
  enter b value  [2;3]
  enter c value  [-2 -1 -1 1]
  enter x1(0,0) value  [0 0]
  enter x1(1,0) value  [2 0]
  enter x1(0,1) value  [0 5/2]
  enter x1(1,1) value  [2 3/2]
  enter x2(0,0) value  [0 0]
  enter x2(1,0) value  [3 0]
  enter x2(0,1) value  [0 2]
  enter x2(1,1) value  [4/3 10/3]
fx Enter B value  eye(3)
```

การแสดงผล (Output)

```
Command Window
enter A value  [1 0 1 0;1 1 0 2]
enter b value  [2;3]
enter c value  [-2 -1 -1 1]
enter x1(0,0) value  [0 0]
enter x1(1,0) value  [2 0]
enter x1(0,1) value  [0 5/2]
enter x1(1,1) value  [2 3/2]
enter x2(0,0) value  [0 0]
enter x2(1,0) value  [3 0]
enter x2(0,1) value  [0 2]
enter x2(1,1) value  [4/3 10/3]
Enter B value  eye(3)
test1
test1
test1
test1
    1.0000    2.0000    1.0000         0

fx >>
```

ซึ่งจากเงื่อนไข If else ที่กำหนด จะทราบว่า เป็นการพิมพ์ test 1 ทั้งหมด 4 ครั้ง จึงทราบว่า เป็นการวนการทำซ้ำทั้งหมด 4 รอบ

```
Command Window

rr =

    8.5000


rr =

    2.5000


rr =

    0.6000


rr =

     0
```

ค่า $z_k - \hat{c}_k$ ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ และจะหยุดเมื่อ มีค่า <=0 จากรูปจึงทำให้การทำงานของโปรแกรมการคำนวณนี้หยุดการทำงานครั้งที่ 4 และค่าสุดท้ายคือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 0)$ จากคำตอบสุดท้าย ที่แสดงในหน้าจอการแสดงผลที่ผ่านมา

บทที่5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1สรุปผล

1. เราได้ศึกษาความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานถึงที่มาของแต่ละขั้นตอนวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย

2. สามารถคำนวณการทำงานของตารางซิมเพล็กซ์ในการแก้ปัญหา Minimize Problem โดยวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อยบนพื้นฐานของวิธีซิมเพล็กซ์ปรับปรุง และให้คำตอบเป็นค่าที่เหมาะสมของปัญหา

3. ได้นำความรู้ที่ได้รับมาเขียนเป็นโปรแกรม และได้รับผลเฉลยที่ถูกต้องและแม่นยำ

4. เมื่อนำโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น มาทดลองใช้พบว่า มีความถูกต้องตามหลักการที่ได้ศึกษา

5.2 ปัญหาและอุปสรรค

1. ใช้เวลานานในการทำความเข้าใจของที่มาในแต่ละขั้นตอนของวิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. ควรพัฒนาโปรแกรมให้สามารถรองรับได้ทุกปัญหา

2. ควรพัฒนาให้สามารถใช้งานบนเว็บไซด์

3. ควรพัฒนาโปรแกรมให้สามารถนำไปใช้ได้บน smartphone

เอกสารอ้างอิง

[1] ชัยพร ตั้งทอง. 2559. Matlab Matrix laboratory.

[Online].Available: http://www.math.science.cmu.ac.th/206254/MATLAB.pdf

[2] ศรี วรกุลสวัสดิ์. 2549. การโปรแกรมเชิงเส้น. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง

[3] สุทธิมา ชำนาญเวช. 2553. การวิจัยดำเนินงาน. พิมพ์ครั้งที่2. กรุงเทพฯ : พิมพ์ดีการพิมพ์.

[4] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sherali, 2005. **Linear Programming and Network Flows**. united states of America