

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคานน้ำหนักตัดแปรเปลี่ยนโดย  
ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

NUMERICAL SOLUTIONS FOR VARIABLE CROSS SECTIONAL BEAM  
EQUATION BY FINITE DIFFERENCE METHOD



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์  
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2559

KMITL-2016-SC-M-001-031

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดย  
ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

NUMERICAL SOLUTIONS FOR VARIABLE CROSS SECTIONAL BEAM  
EQUATION BY FINITE DIFFERENCE METHOD



T143984

กำพลศักดิ์ บุญโกย  
KUMPONSAK BOONGOY

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน 143984  
รับเดือนปี 10 ต.ค. 2559

b.00267|05  
l.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์  
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
พ.ศ. 2559

KMITL-2016-SC-M-001-031

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NUMERICAL SOLUTIONS FOR VARIABLE CROSS SECTIONAL BEAM  
EQUATION BY FINITE DIFFERENCE METHOD



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE  
DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF SCIENCE  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
KMITL-2016-SC-M-001-031  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2016

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้จัดทำนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิทยาศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์

“การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดย  
ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด”

“NUMERICAL SOLUTIONS FOR VARIABLE CROSS SECTIONAL  
BEAM EQUATION BY FINITE DIFFERENCE METHOD”

ชื่อนักศึกษา

นายกำพลศักดิ์ บุญโกย

รหัสประจำตัว

54650706

ปริญญา

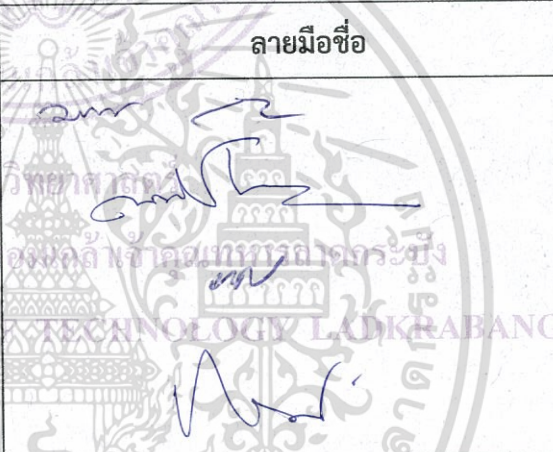
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา

คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

รศ.ดร.ภคคินี ชิตสกุล

| คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์                                                                                                                                                                                                       | ลายมือชื่อ                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ<br>ประธานกรรมการ<br>ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย<br>อาจารย์บัณฑิตประจำ (ในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้อง)<br>ดร.ยศ สมพรเจริญสุข<br>ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอกสถาบันฯ<br>รศ.ดร.ภคคินี ชิตสกุล<br>อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ |  |

วัน/ เดือน/ ปี ที่สอบ 15 กรกฎาคม พ.ศ. 2559 เวลา 09.00 - 12.00 น.

สถานที่สอบ ณ ห้อง 304 อาคารพระจอมเกล้า

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.ดุชนิ ธนะบริพัฒน์)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ 25 เดือน กรกฎาคม พ.ศ. 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่จำกัดใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคานหน้าตัด  
แปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

นักศึกษา

นายกำพลศักดิ์ บุญโกย

รหัสประจำตัว

54650706

ปริญญา

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต

สาขาวิชา

คณิตศาสตร์ประยุกต์

พ.ศ.

2559

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

รศ.ดร.ภักคินี ชิตสกุล

### บทคัดย่อ

ปัญหาส่วนใหญ่ในงานวิจัยต่างๆจะพบในกรณีคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยนโดยจะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาคำนวณหาผลเฉลย ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนเพิ่ม ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยนและสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยน ได้แก่วิธีผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ โดยพบว่าเมื่อนำสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยนมาหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์แล้วนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งมีค่าความผิดพลาดน้อยมาก ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขไปประมาณค่าในกรณีคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนเพื่อให้ได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องต่อไป

คำสำคัญ : ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด สมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยนและสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยน

|                |                                                                                            |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Thesis Title   | Numerical solutions for variable cross sectional beam equation by finite difference method |
| Student        | Mr.Kumponsak Boongoy                                                                       |
| Student ID     | 54650706                                                                                   |
| Degree         | Master of Science                                                                          |
| Program        | Applied Mathematics                                                                        |
| Year           | 2016                                                                                       |
| Thesis Advisor | Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul                                                           |

### ABSTRACT

The studies of beam are mostly considered on the uniform cross sectional by solving numerical analysis. In this work, we used finite difference method with the error  $O(h^4)$  for the deflection of the beam with constant and variable cross sectional for fourth order ordinary difference equation. We found that for constant beam the numerical solution is closely to the exact solution thus we use the developed program for variable cross sectional beam equation.

**Keywords :** central difference method with error  $O(h^4)$ , Finite difference method, uniform cross sectional and variable cross sectional beam equation

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จไม่ได้หากขาดความเมตตาจาก รศ.ดร.ภคินี ชิตสกุล ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ที่ช่วยประสิทธิ์ประสาทความรู้ สั่งสอนให้คำแนะนำ ให้แก่งคิด รวมทั้งความช่วยเหลือด้านต่างๆ และเปิดโอกาสในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาความรู้และนำไปใช้ในวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้าให้เกิดประโยชน์

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ที่คอยสั่งสอนแนะนำในสิ่งที่ถูกต้อง ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ที่คอยช่วยเหลือในด้านต่างๆให้สำเร็จได้ด้วยดี และ ดร.ยศ สมพรเจริญสุข ที่ได้แนะนำความรู้ใหม่ๆเพื่อใช้พัฒนาความวิทยานิพนธ์ ซึ่งคำแนะนำต่างๆมีประโยชน์อย่างยิ่งต่อวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบพระคุณครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่าน ที่อบรมสั่งสอน และให้ความรู้ตลอดมา รวมทั้งบรรดาเพื่อนสนิทมิตรสหาย รุ่นน้อง และรุ่นพี่ ที่คอยให้กำลังใจ และข้อเสนอแนะต่างๆ อันเป็นประโยชน์และทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี สำหรับคุณงามความดีใดๆ อันเกิดจากงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับคุณพ่อไฟโรจน์ บุญโกย และคุณแม่จรัสวรรณ บุญโกย ผู้ที่ให้กำเนิด มีพระคุณ คอยสนับสนุนในทุกๆด้านและกำลังใจกับข้าพเจ้าตลอดมา

คำพลศักดิ์ บุญโกย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

|                                                                          | หน้า |
|--------------------------------------------------------------------------|------|
| บทคัดย่อภาษาไทย.....                                                     | ก    |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....                                                  | ข    |
| กิตติกรรมประกาศ.....                                                     | ค    |
| สารบัญ.....                                                              | ง    |
| สารบัญตาราง.....                                                         | ฉ    |
| สารบัญรูป.....                                                           | ช    |
| บทที่ 1 บทนำ.....                                                        | 1    |
| 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....                                  | 1    |
| 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....                                         | 1    |
| 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....                                               | 2    |
| 1.4 ขั้นตอนของการดำเนินงานวิจัย.....                                     | 2    |
| 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....                                       | 2    |
| บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....                               | 3    |
| 2.1 พื้นฐานความรู้.....                                                  | 3    |
| 2.1.1 พื้นผิวเว้าและพื้นผิวนูน (concave surface and convex surface)..... | 3    |
| 2.1.2 พื้นผิวสะเทิน (neutral surface).....                               | 3    |
| 2.1.3 เส้นโค้งอีลาสติก (elastic curve).....                              | 4    |
| 2.1.4 โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia).....                         | 4    |
| 2.1.5 แรงเฉือน (shear force).....                                        | 5    |
| 2.1.6 โมเมนต์ดัด (bending moment).....                                   | 5    |
| 2.1.7 แรงดัดล้วน (pure bending).....                                     | 6    |
| 2.1.8 แรงเค้น (stress).....                                              | 6    |
| 2.1.9 ความเครียด (strain).....                                           | 6    |
| 2.1.10 กฎของฮุก (Hook's law).....                                        | 6    |
| 2.2 สมการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....                                      | 7    |
| 2.2.1 สมการการดัด (the flexural formula).....                            | 7    |
| 2.2.2 ค่าความโค้ง (curvature).....                                       | 10   |
| 2.2.3 สมการโมเมนต์ดัด.....                                               | 10   |
| 2.2.4 สมการแรงเฉือน.....                                                 | 10   |
| 2.2.5 สมการคานที่ไม่คงรูป (non-uniform beam equation).....               | 11   |
| 2.2.6 สมการออยเลอร์-แบร์นูลลี.....                                       | 11   |
| 2.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (finite difference method).....               | 12   |
| 2.3.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง.....                               | 12   |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ(ต่อ)

หน้า

|                                                                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง .....                                                                                   | 13        |
| 2.4 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series).....                                                                                    | 14        |
| 2.4.1 ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $O(h^4)$ .....                                                                          | 15        |
| 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....                                                                                             | 16        |
| <b>บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย .....</b>                                                                                  | <b>17</b> |
| 3.1 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดสำหรับงานวิจัย .....                                                                              | 17        |
| 3.2.1 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการคานน้ำหนักตัดแปรเปลี่ยนแบบไร้มิติไม่ขึ้นกับ<br>เวลา.....                                | 17        |
| 3.2.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการคานน้ำหนักตัดไม่แปรเปลี่ยนขึ้นกับเวลา.....                                              | 21        |
| 3.3 การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการคานน้ำหนักตัดไม่แปรเปลี่ยน .....                                                        | 27        |
| 3.4 การหาผลเฉลยของสมการคานน้ำหนักตัดไม่แปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด<br>ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ .....           | 30        |
| <b>บทที่ 4 ผลวิจัยและการอภิปรายผล.....</b>                                                                                  | <b>35</b> |
| 4.1 การหาผลเฉลยของสมการคานน้ำหนักตัดแปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของ<br>สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่.....               | 35        |
| 4.2 การหาผลเฉลยของสมการคานน้ำหนักตัดไม่แปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของ<br>สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ขึ้นกับเวลา..... | 41        |
| <b>บทที่ 5 สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ.....</b>                                                                             | <b>48</b> |
| 5.1 สรุปผลการทดลอง.....                                                                                                     | 48        |
| 5.2 ข้อเสนอแนะ.....                                                                                                         | 48        |
| เอกสารอ้างอิง.....                                                                                                          | 49        |
| ภาคผนวก.....                                                                                                                | 50        |
| ประวัติผู้เขียน.....                                                                                                        | 68        |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญตาราง

| ตารางที่                                                                       | หน้า |
|--------------------------------------------------------------------------------|------|
| 3.1 ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ $i=1,2,\dots,9$ .....                               | 29   |
| 3.2 ค่า $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ ที่ $h=0.01$ .....                | 32   |
| 3.3 ค่า $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ ที่ $h=0.01$ .....                | 32   |
| 3.4 แสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h=0.01$ และ $h=0.001$ ..... | 33   |



# สารบัญรูป

| รูปที่                                                                         | หน้า |
|--------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2.1 พื้นผิวเว้า (concave surface) และพื้นผิวนูน (convex surface).....          | 3    |
| 2.2 พื้นผิวสะเทิน (neutral surface).....                                       | 4    |
| 2.3 เส้นโค้งอีลาสติก (elastic curve).....                                      | 4    |
| 2.4 แรงเฉือน (shear force).....                                                | 5    |
| 2.5 โมเมนต์ดัด (bending moment).....                                           | 6    |
| 2.6 ช่วงคาน $AB$ .....                                                         | 7    |
| 2.7 แบ่งช่วงคาน $CD$ ออกเป็นส่วนเล็กๆ.....                                     | 7    |
| 2.8 เส้นโค้งของวงกลมแสดงรัศมีความโค้งของแกนสะเทิน.....                         | 8    |
| 2.9 การกระจายของความเค้น.....                                                  | 9    |
| 2.10 พื้นที่เล็กๆบนหน้าตัดใดๆของคาน.....                                       | 9    |
| 2.11 การประมาณค่าโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.....                              | 12   |
| 3.1 รูปแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์.....                                            | 30   |
| 3.2 กราฟแสดงค่า $f(x_i) = \pi^4 x_i \sin \pi x_i - 4\pi^3 \cos \pi x_i$ .....  | 31   |
| 3.3 ค่า $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ ที่ $h=0.01$ .....                | 32   |
| 3.4 ค่า $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ ที่ $h=0.001$ .....               | 33   |
| 3.5 แสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h=0.01$ และ $h=0.001$ ..... | 34   |
| 4.1 กราฟแสดงค่า $r(x_i)$ .....                                                 | 36   |
| 4.2 กราฟแสดงค่า $f(x_i) = \pi^4 x_i \sin \pi x_i - 4\pi^3 \cos \pi x_i$ .....  | 37   |
| 4.3 ค่า $y(x)$ ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ที่ $h=0.001$ .....           | 37   |
| 4.4 เปรียบเทียบค่า $r(x)$ เมื่อลด $r(x)$ และเพิ่ม $r(x)$ .....                 | 38   |
| 4.5 กราฟแสดงค่า $r(x_i)$ .....                                                 | 39   |
| 4.6 กราฟแสดงค่า $f(x_i) = \sin \pi x_i$ .....                                  | 40   |
| 4.7 ค่า $y(x)$ ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ที่ $h=0.001$ .....           | 40   |
| 4.8 เปรียบเทียบค่า $f(x)$ เมื่อลด $f(x)$ และเพิ่ม $f(x)$ .....                 | 41   |
| 4.9 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน.....      | 42   |
| 4.10 เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบของปัญหาสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน.....  | 43   |
| 4.11 กราฟแสดงค่า กราฟแสดงค่า $g(x_i)$ .....                                    | 43   |
| 4.12 การโก่งของคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน ณ ตำแหน่งใดๆ ในแต่ละช่วงเวลา.....       | 44   |
| 4.13 การโก่งของคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน ณ ตำแหน่งใดๆ ที่เวลาเป็น 1.....         | 44   |
| 4.14 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยน.....        | 45   |
| 4.15 เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบของปัญหาสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยน.....     | 46   |

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.16 กราฟแสดงค่า กราฟแสดงค่า $g(x_i)$ .....                              | 46 |
| 4.17 การโค้งของคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน ณ ตำแหน่งใดๆ ในแต่ละช่วงเวลา..... | 47 |
| 4.18 การโค้งของคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน ณ ตำแหน่งใดๆ ที่เวลาเป็น1.....    | 47 |



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

ในบทนี้ได้กล่าวถึงที่มารวมถึงความสำคัญของงานวิจัย ซึ่งได้ทำการศึกษาพิจารณาการหาค่าการโค้งของคาน ทั้งในคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนและคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน และได้ทำการเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขในการหาค่าที่เหมาะสม รวมทั้งวัตถุประสงค์ของการทำงานวิจัย ข้อจำกัดและขอบเขตของงานวิจัย ขั้นตอนของการดำเนินงานวิจัย รวมถึงประโยชน์ต่อกลุ่มวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ เพื่อใช้เป็นแนวทางในการทำงานวิจัยให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันสิ่งก่อสร้างต่างๆได้เกิดขึ้นมากมาย มีโครงสร้างจำนวนมากที่น่าทึ่งและสมการคานมาประยุกต์ใช้ เพื่อให้เกิดประโยชน์ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขของสมการคานเพื่อหาค่าการโค้งของคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนและคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน รวมทั้งศึกษาการเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในการหาค่าที่เหมาะสม ซึ่งการหาค่าผลเฉลยดังกล่าวได้พัฒนามาจากระเบียบวิธีผลต่างจำกัด ซึ่งผู้วิจัยก่อนหน้านี้ได้คำนวณหาผลเฉลยสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยนโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อคำนวณหาผลเฉลย แต่เนื่องจากการหาผลเฉลยของผู้วิจัยก่อนหน้านี้หาได้เฉพาะในคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน ดังนั้นจึงต้องมีการหาผลเฉลยที่หาได้ทั้งคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนและคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดที่ละเอียดขึ้นและพัฒนาโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยมาช่วยในการคำนวณหาให้สมบูรณ์มากขึ้นเพื่อเป็นการพัฒนาและประโยชน์สำหรับผู้ศึกษาวิจัยในด้านนี้ต่อไป

### 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1) พิจารณาทฤษฎีต่างๆและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนและคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน

1.2.2) ศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีผลต่างจำกัดเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยในการหาค่าการโค้งของคานทั้งในคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนและคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน

1.2.3) สร้างโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าการโค้งของคานทั้งในคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนและคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

1.2.4) เพื่อเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลลัพธ์ที่คำนวณจากโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด แล้วนำมาวิเคราะห์ผลที่ได้ และพัฒนาปรับปรุงขั้นตอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นต่อไป

### 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1.3.1) ศึกษาเฉพาะคานแบบยึดแน่น (Fixed-Ended Beam)
- 1.3.2) ศึกษาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของคานแบบยึดแน่น (Fixed-Ended Beam)
- 1.3.3) ใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขและเขียนโปรแกรมสำหรับคำนวณหาค่าผลเฉลย

### 1.4 ขั้นตอนของการดำเนินงานวิจัย

- 1.4.1) ค้นคว้าและศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับประวัติ ทฤษฎี รูปแบบและสมการคาน
- 1.4.2) ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าการโค้งของคานในรูปแบบต่างๆ
- 1.4.3) ศึกษาระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในรูปแบบต่างๆ
- 1.4.4) ศึกษาการเขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป (MATLAB)
- 1.4.5) พัฒนาระเบียบวิธีผลต่างจำกัดเพื่อใช้แก้ปัญหา
- 1.4.6) นำระเบียบวิธีที่ได้มาสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้คำนวณหาผลเฉลยที่เหมาะสม
- 1.4.7) นำผลเฉลยที่ได้มาเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อนหน้า
- 1.4.8) สรุปและเขียนวิทยานิพนธ์

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดที่เหมาะสมสำหรับใช้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพเพื่อคำนวณหาผลเฉลยที่สามารถหาค่าตอบได้ทั้งในคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนและคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน ซึ่งมีความสะดวกและรวดเร็วสำหรับผู้ที่ต้องการนำไปประยุกต์ใช้งานทางด้านต่างๆ อาทิเช่น งานทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์และสิ่งก่อสร้างต่างๆ และเป็นประโยชน์สำหรับผู้ศึกษาวิจัยในด้านนี้ต่อไป

## บทที่ 2

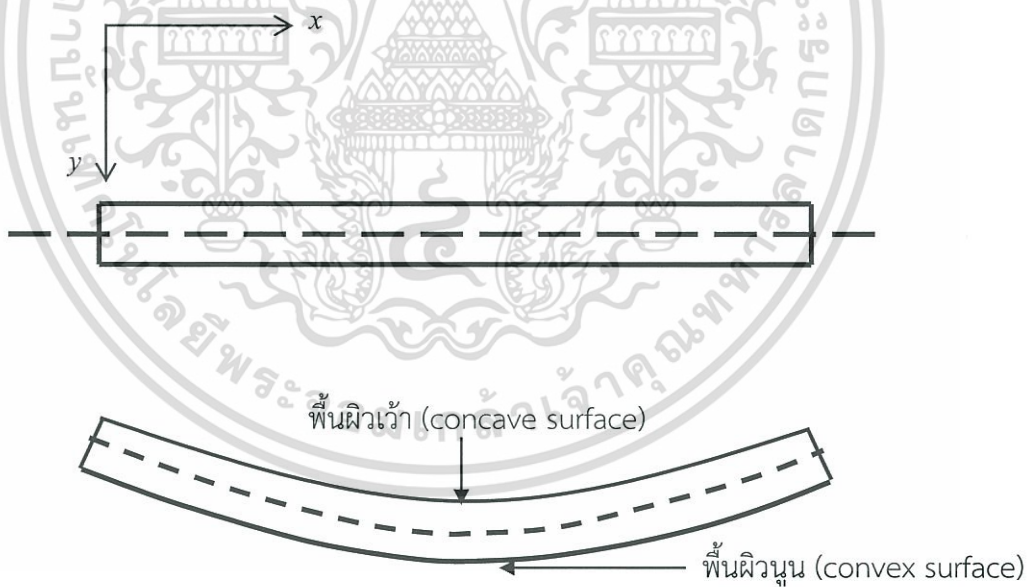
# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะอธิบายถึงพื้นฐานความรู้ต่างๆที่ใช้ในงานวิจัยรวมทั้งกฎและทฤษฎีต่างๆพร้อมทั้งสมการที่เกี่ยวข้องทั้งหมดและระเบียบวิธีที่ใช้ในงานวิจัยเพื่อนำความรู้ต่างๆไปใช้ในงานวิจัยในเล่มนี้ต่อไป

### 2.1 พื้นฐานความรู้

#### 2.1.1 พื้นผิวเว้าและพื้นผิวนูน (concave surface and convex surface)

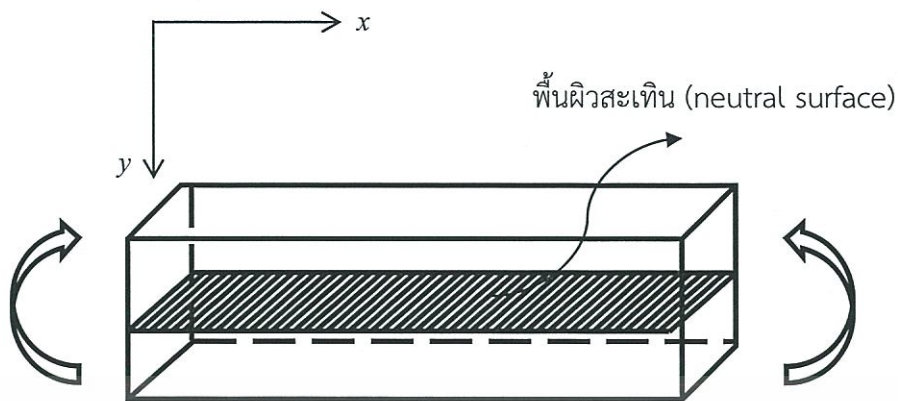
เมื่อมีแรงมากระทำต่อคาน คานจะมีรูปร่างเปลี่ยนแปลงไปโดยจะมีลักษณะเป็นพื้นผิวเว้า (concave surface) และพื้นผิวนูน (convex surface) โดยพื้นผิวเว้า (concave surface) จะเกิดจากแรงกด (compression) และพื้นผิวนูน (convex surface) จะเกิดจากแรงดึง (tension) แรงดึงมากที่สุดจะอยู่ที่พื้นผิวล่าง แรงกดที่มากที่สุดจะอยู่ที่พื้นผิวด้านบน



รูปที่ 2.1 พื้นผิวเว้า (concave surface) และพื้นผิวนูน (convex surface)

#### 2.1.2 พื้นผิวสะเทิน (neutral surface)

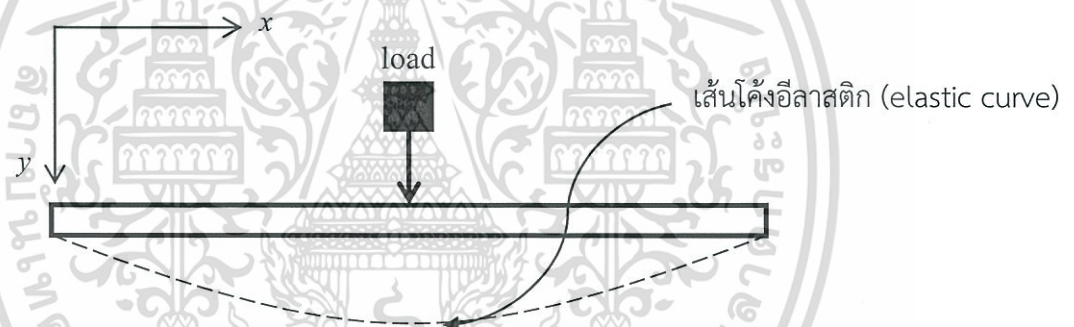
ส่วนของพื้นผิวภายในคานที่อยู่ระหว่างพื้นผิวนูน (convex surface) และพื้นผิวเว้า (concave surface) เรียกว่าพื้นผิวสะเทิน (neutral surface) ในทางทฤษฎีจะไม่มีแรงดึง (tension) หรือแรงกด (compression) ที่พื้นผิวสะเทิน (neutral surface) ไม่ว่ารณใด ๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2 พื้นผิวสะเทิน (neutral surface)

### 2.1.3 เส้นโค้งอีลาสติก (elastic curve)

เป็นเส้นที่แสดงให้เห็นถึงลักษณะการโก่งตัวของคานเมื่อมีแรงหรือน้ำหนักบรรทุกมากระทำบนคาน



รูปที่ 2.3 เส้นโค้งอีลาสติก (elastic curve)

ก่อนที่คานจะเกิดการโก่งตัวจากแรงหรือน้ำหนักบรรทุกภายนอกมากระทำ เส้นโค้งอีลาสติกนี้จะเป็นเส้นตรงและอยู่ในแนวเดียวกับคาน เมื่อคานรับแรงหรือน้ำหนักบรรทุกขึ้น เส้นโค้งอีลาสติกนี้ก็โก่งออกไปจากตำแหน่งเดิมดังรูปที่ 2.3

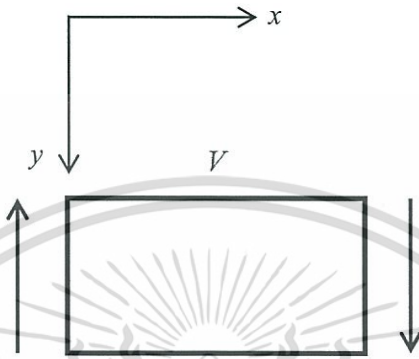
### 2.1.4 โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia)

โมเมนต์ความเฉื่อย เป็นสมบัติอย่างหนึ่งเกิดขึ้นเมื่อวัตถุหมุน เป็นปริมาณที่บอกความเฉื่อยในการหมุนของวัตถุในการที่จะพยายามรักษาสภาพเดิมของการหมุนเอาไว้ ถ้าวัตถุมีโมเมนต์ความเฉื่อยมาก ก็จะทำให้วัตถุนั้นเปลี่ยนสภาพของการหมุนเดิมได้ยาก และถ้าวัตถุนั้นมีโมเมนต์ความเฉื่อยน้อย ก็จะทำให้วัตถุนั้นเปลี่ยนสภาพของการหมุนเดิมได้ง่าย ซึ่งโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุมีค่าขึ้นกับแกนหมุน รูปร่างของวัตถุและลักษณะการเรียงตัวของวัตถุรอบแกนหมุน ในงานวิจัยนี้กำหนดโมเมนต์ความเฉื่อยคือ  $I(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.5 แรงเฉือน (shear force)

เมื่อมีแรงหรือน้ำหนักบรรทุกกระทำต่อคานจะเกิดแรงภายในต้านกับแรงหรือน้ำหนักบรรทุกภายนอกบนระนาบนั้น เรียกแรงภายในที่ต้านแรงหรือน้ำหนักบรรทุกภายนอกนี้ว่าแรงเฉือน (shear force) ในงานวิจัยนี้กำหนดให้  $V(x)$  คือแรงเฉือน (shear force)



รูปที่ 2.4 แรงเฉือน (shear force)

### 2.1.6 โมเมนต์ดัด (bending moment)

เมื่อมีแรงหรือน้ำหนักบรรทุกกระทำต่อคานจะทำให้คานเกิดการโก่ง เมื่อเกิดการโก่งจะเกิดโมเมนต์ต้านการโก่งที่พยายามจะต้านทานการดัดหรือการหมุน เพื่อให้คานรักษาสสมดุลของหน้าตัดและอยู่ในสภาวะสมดุล ซึ่งเรียกโมเมนต์ที่ต้านทานการดัดหรือหมุนนี้ว่าโมเมนต์ดัด ในงานวิจัยนี้กำหนดให้  $M(x)$  คือโมเมนต์ดัด (bending moment) ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 โมเมนต์ดัด (bending moment)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.7 การดัดล้วน (pure bending)

สำหรับคานหรือส่วนของคานที่ถูกกระทำด้วยแรงคู่ควบ หรือโมเมนต์ดัดที่ปลายทั้งสองโดยไม่มีแรงอื่นเลย เราเรียกว่าคานนั้นถูกกระทำด้วยการดัดล้วน ซึ่งจะทำให้เกิดแรงตามแนวแกนที่เรียกว่า การเค้นดัด (bending stress) เพียงอย่างเดียวในคานโดยไม่มีแรงเฉือนเลย

### 2.1.8 ความเค้น (stress)

เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำบนคานจะมีแรงภายในต้าน โดยมีขนาดรวมแล้วเท่ากับแรงภายนอกคานที่ถูกกระทำด้วยแรงในแนวแกน ที่พยายามทำให้เกิดการยืดตัวตามแนวแกนเราเรียกว่า คานนั้นถูกกระทำด้วยแรงดึง (tension) แต่ถ้าแรงภายนอกที่กระทำนั้นพยายามทำให้เกิดการหดตัวตามแนวแกน เราเรียกว่าคานนั้นถูกกระทำด้วยแรงกด (Compression) เราเรียกแรงภายนอกนั้นว่า แรงเค้น  $\sigma$

### 2.1.9 ความเครียด (strain)

ผลของการกระทำของแรงภายนอกต่อคาน ไม่เพียงแต่ทำให้เกิดการต้านทานของแรงภายในคานเท่านั้นแต่ยังมีผลทำให้คานนั้นเปลี่ยนรูปไปด้วย นั่นคือคานจะยืดตัวเมื่อรับแรงดึง และหดตัวเมื่อรับแรงกด ส่วนที่เปลี่ยนรูปไปนี้ ไม่ว่าจะเป็นการยืดตัวหรือหดตัวเราเรียกว่า ส่วนยืดหด ในการวัดหรือเปรียบเทียบการเปลี่ยนรูปคานเรามักจะใช้อัตราส่วนของการยืดหดต่อหนึ่งหน่วยความยาวเดิมซึ่งเรียกว่า ความเครียด  $\epsilon$  มีสูตรดังนี้

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{l}$$

โดยที่  $l$  คือความยาวเดิม และ  $\delta$  คือความยาวที่ยืดเพิ่มขึ้นตามแนวแกน  $x$

### 2.1.10 กฎของฮุก (Hook's Law)

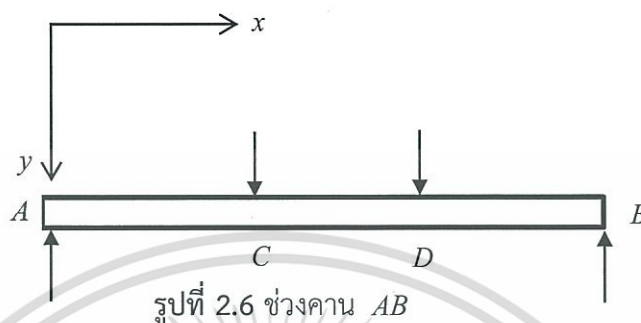
กฎของฮุก เป็นการหาค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) ซึ่งค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นนี้ หาค่าจากสัดส่วนระหว่างค่าแรงเค้น  $\sigma$  ต่อความเครียด  $\epsilon$  ของวัสดุนั้น ๆ เมื่อมีแรงมากระทำ ดังสมการ

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x}$$

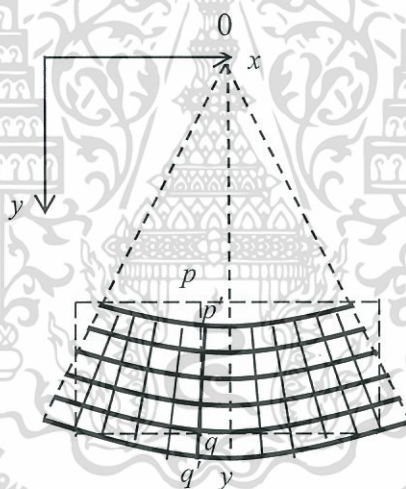
โดยกำหนด  $E$  หมายถึง โมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity หรือ Young's Modulus)

## 2.2 สมการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

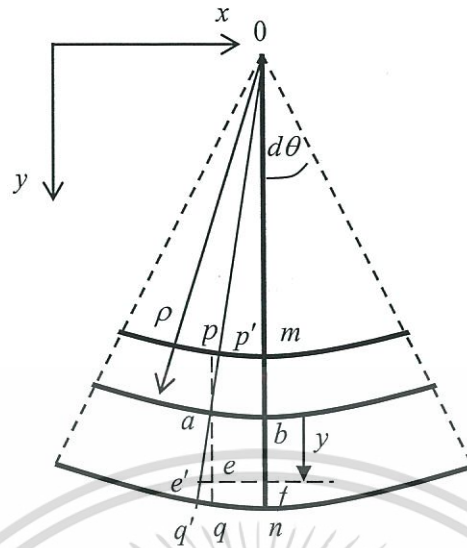
### 2.2.1 สมการการดัด (The flexural formula) (สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ:2549)



พิจารณาช่วง  $CD$  ของคานในรูปที่ 2.6 ซึ่งถูกกระทำด้วยการดัดล้วน สมมติให้คานประกอบขึ้นด้วยส่วนเล็กๆจำนวนมากดังรูปที่ 2.7  $CD$  จะเปลี่ยนรูปอย่างสม่ำเสมอเป็นเส้นโค้งของวงกลม



เมื่อคานเปลี่ยนรูปเป็นเส้นโค้งของวงกลม สมมติให้รัศมีความโค้งของแกนสะเทินเป็น  $\rho$  โดยมีจุดศูนย์กลางของวงกลมที่  $O$  ดังรูปที่ 2.8 พิจารณาหน้าตัด  $pq$  และ  $mn$  ซึ่งเดิมอยู่ห่างกันเป็นระยะ  $dx$  เมื่อเปลี่ยนรูปแล้ว  $pq$  จะเปลี่ยนเป็น  $p'q'$  ส่วน  $mn$  ซึ่งเป็นหน้าตัดกึ่งกลางระหว่าง  $cd$  ของคานจะคงเดิม ระยะ  $ab$  บนแกนสะเทินจะเท่ากับ  $dx$  เหมือนเดิม



รูปที่ 2.8 เส้นโค้งของวงกลมแสดงรัศมีความโค้งของแกนสะเทิน

มุมที่จุดศูนย์กลาง 0 รองรับโดย  $ab$  คือ  $d\theta = \frac{dx}{\rho}$

เส้นใย  $ef$  ใดที่อยู่ใกล้แกนสะเทินเป็นระยะทาง  $y$  จะยืดเป็นความยาวใหม่  $e'f'$

นั่นคือส่วนยืดของ  $ef = ee' = yd\theta = \frac{ydx}{\rho}$

ดังนั้นความเครียดใน  $ef$  คือ  $\epsilon_x = \frac{ee'}{ef} = \frac{ydx}{\rho dx} = \frac{y}{\rho}$

จะเห็นว่าความเครียดตามแนวแกนแปรตามระยะ  $y$  เส้นใยใดๆที่อยู่ใต้แกนสะเทินจะยืดตัว ( $y$  เป็น +) เส้นใยใดๆที่อยู่เหนือแกนสะเทิน ( $y$  เป็น -) จะหดตัว การยืดหดจะมากที่สุดที่เส้นใยนอกสุด

จากกฎของฮุก

$$\sigma_x = E\epsilon_x$$

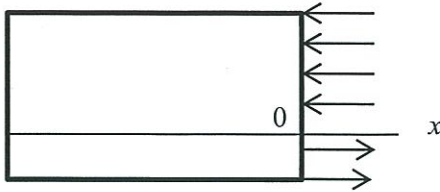
ดังนั้น

$$\sigma_x = \frac{Ey}{\rho}$$

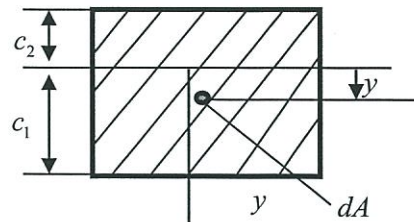
จะได้

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x}{yE}$$

แสดงว่าการกระจายของความเค้นตามแนวแกนของคานภายใต้การดัดล้วนจะเป็นเส้นตรงดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 การกระจายของความเค้น



รูปที่ 2.10 พื้นที่เล็กๆบนหน้าตัดใดๆของคาน

พิจารณาพื้นที่  $dA$  เล็กๆบนหน้าตัดใดๆของคาน ซึ่งอยู่ห่างจากแกนสะเทินของหน้าตัดเท่ากับ  $y$  ดังรูปที่ 2.10

$$\text{แรงในแนวแกนบน } dA \text{ คือ } dF = \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} y dA$$

เนื่องจากคานรับการดัดล้วน ไม่มีแรงภายนอกกระทำตามแนวแกน ดังนั้นผลบวกของแรงภายในตามแนวแกนบนหน้าตัดใดๆเท่ากับ 0

$$\text{จะได้ } F = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

เพราะว่า  $\frac{E}{\rho}$  เป็นค่าคงที่ไม่เท่ากับ 0

$$\text{จะได้ } \int_A y dA = 0$$

แรง  $dF$  บนพื้นที่  $dA$  ก่อให้เกิดโมเมนต์ของแรงรอบแกนสะเทิน

$$\text{จะได้ } dM = y dF = y \sigma_x dA$$

ผลบวกของโมเมนต์เหล่านี้ทั้งหมดบนหน้าตัดต้องเท่ากับค่าโมเมนต์ดัด  $M$  บนหน้าตัดนั้น

$$\text{เพราะฉะนั้น } M = \int_A y \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

$$\text{แทนค่า } I = \int_A y^2 dA$$

โดยที่  $I$  เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของหน้าตัด จะได้  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

หรือ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.1)$$

### 2.2.2 ค่าความโค้ง (Curvature)

ให้เส้นกราฟแทนด้วย  $y = f(x)$  แล้วค่าความโค้ง (Curvature)  $\frac{1}{\rho}$  ของเส้นกราฟหาได้โดย (Gere: 1991)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

แต่เนื่องจาก  $\frac{dy}{dx}$  มีค่าน้อยมากเพราะปกติคานมีการโค้งน้อยกว่า 1 มาก จึงได้ค่า  $\frac{1}{\rho}$  ดังนี้

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

(2.2)

### 2.2.3 สมการโมเมนต์ตัด

จากสมการการตัด (2.1) และค่าความโค้ง (2.2) ทำให้ได้สมการโมเมนต์ตัดดังนี้

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad \text{หรือ} \quad EI(x)y''(x) = M(x)$$

### 2.2.4 สมการแรงเฉือน

เมื่อคานรับน้ำหนักบรรทุกทุกในแนวขวางจะได้สมการของแรงเฉือนดังนี้

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(EI(x)y''(x)) = V(x)$$

และ

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2(EI(x)y''(x))}{dx^2} = -w(x) \quad (2.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.3) จะได้

$$w(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \quad (2.4)$$

ในขณะที่คานาสั่นอิสระแบบไร้อากาศ น้ำหนักต่อหน่วยความยาวบนคานประกอบด้วยแรงเนื่องจากน้ำหนักภายนอกและแรงเนื่องจากน้ำหนักภายใน เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งอย่างต่อเนื่องของคานนั่นเอง สมมติการโก่งของคานขึ้นอยู่กับเวลา  $t$  เช่นเดียวกับตำแหน่ง  $x$  มวลของส่วนน้อยๆ  $\Delta m$  ของความยาวของคาน  $\Delta x$  เท่ากับ  $\kappa A(x)\Delta x$  และความเร่งคือ  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

กำหนด  $\kappa$  คือ ความหนาแน่นของมวล

ดังนั้น แรงเนื่องจากน้ำหนักภายในต่อหน่วยความยาวคือ

$$\frac{\kappa A(x)\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\Delta x} = \kappa A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

แรงภายนอกคือ  $f(x)$

เพราะฉะนั้น แรงเนื่องจากน้ำหนักรวมต่อหน่วยความยาวคือ

$$w(x) = \kappa A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x) \quad (2.5)$$

### 2.2.5 สมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยน

จากสมการ (2.4) และ (2.5) ทำให้ได้สมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนดังนี้

$$\kappa A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x) \quad (2.6)$$

เมื่อ  $E$  คือโมดูลัสความยืดหยุ่น ( $N/m^2$ )

$\kappa$  คือความหนาแน่นของมวล ( $kg/m^3$ )

$I(x)$  คือโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน  $x$  ( $kg/m^2$ )

$A(x)$  คือพื้นที่หน้าตัดของคาน ( $m^2$ )

### 2.2.6 สมการออยเลอร์-แบร์นูลลี

ในกรณีมีแรงกระทำจากภายนอกและไม่ขึ้นกับเวลาจะได้สมการออยเลอร์-แบร์นูลลีดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x)$$

ความยาวของคานเป็น  $L$  วางคานไว้บนแกน  $x$  ที่  $x=0$  และ  $x=L$  กับความชันของปลายทั้งคู่เป็นศูนย์ จะได้เงื่อนไขตามเงื่อนไขขอบเขตของคานแบบยึดแน่น (C.Y.Wang:2014) ดังนี้

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & \frac{\partial y(0)}{\partial x} &= 0 \\ y(L) &= 0, & \frac{\partial y(L)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

และจะได้ปัญหาค่าขอบดังนี้

$$\kappa A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x) \quad \text{โดยที่ } 0 \leq x \leq L$$

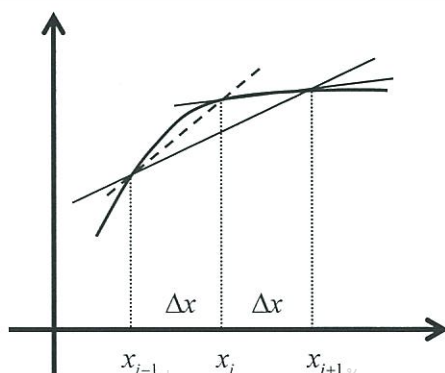
และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของคานแบบยึดแน่นดังนี้

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0, & \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} &= 0, \\ y(L,t) &= 0, & \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

## 2.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (finite difference method)

### 2.3.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

พิจารณา อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันของตัวแปรตาม  $u$  เทียบกับตัวแปรอิสระ  $x$  ซึ่งเขียนแทนด้วย  $\frac{du}{dx}$  เราสามารถประมาณค่าโดยตรงของ  $\frac{du}{dx}$  ได้ 3 วิธี โดยพิจารณาจากรูปที่ 2.11 ต่อไปนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### รูปที่ 2.11 การประมาณค่าโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

กำหนดสัญลักษณ์  $u(x_i)$  แทนด้วย  $u_i$  และ  $\frac{d}{dx}u(x_i)$  แทนด้วย  $\left(\frac{du}{dx}\right)_i$  ในทางเรขาคณิตเรา

ทราบว่า  $\left(\frac{du}{dx}\right)_i$  หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $u(x)$  ที่จุด  $x_i$  ดังนั้นเราสามารถ

ประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสดังกล่าวได้ 3 วิธีโดยตรงดังนี้

1. ผลต่างข้างหน้า (Forward difference) เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $x_i$  และ  $x_{i+1}$  นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{เมื่อ } h = \Delta x$$

2. ผลต่างข้างหลัง (Backward difference) เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $x_i$  และ  $x_{i-1}$  นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad \text{เมื่อ } h = \Delta x$$

3. ผลต่างกลาง (Central difference) เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $x_{i-1}$  และ  $x_{i+1}$  นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad \text{เมื่อ } h = \Delta x \quad (2.7)$$

#### 2.3.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง

สำหรับการประมาณค่าของ  $\frac{d^2u}{dx^2}$  เราสามารถประมาณค่าได้โดยการประยุกต์ในแต่ละวิธีดังนี้

1. ผลต่างข้างหน้า สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+1} - \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i \right] \\ &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right] \\ &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{u_{i+2} - u_{i+1} - u_{i+1} + u_i}{h} \right] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\approx \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2}$$

2. ผลต่างข้างหลัง สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i - \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-1} \right] \\ &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{h} \right] \\ &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{u_i - u_{i-1} - u_{i-1} + u_{i-2}}{h} \right] \\ &\approx \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} \end{aligned}$$

3. ผลต่างกลาง สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) \approx \frac{1}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+1} - \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-1} \right] \\ &\approx \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+1} + \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i \right] - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i + \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-1} \right] \right\} \\ &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \\ &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i - u_i + u_{i-1}}{h} \right] \\ &\approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

## 2.4 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)

**ทฤษฎีบท** ถ้า  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีอนุกรมกำลังรอบจุด  $a$  กล่าวคือ มีจำนวนจริงบวก  $R$  ที่ทำให้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

สำหรับทุกๆ  $x$  ที่  $|x-a| < R$  แล้ว จะได้ว่า  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  เมื่อ  $f^{(n)}(a)$  คืออนุพันธ์อันดับที่  $n$  ที่

$a$  เรียก  $f(x)$  ว่า อนุกรมเทย์เลอร์ ที่จุด  $a$

### 2.4.1 ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $O(h^4)$

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2}$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์จะได้

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(x)h^5}{5!} + O(h^6) \quad (2.9)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} - \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} - \frac{f^{(5)}(x)h^5}{5!} + O(h^6) \quad (2.10)$$

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)2h + \frac{f''(x)4h^2}{2!} + \frac{f'''(x)8h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)16h^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(x)32h^5}{5!} + O(h^6) \quad (2.11)$$

$$f(x-2h) = f(x) - f'(x)2h + \frac{f''(x)4h^2}{2!} - \frac{f'''(x)8h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)16h^4}{4!} - \frac{f^{(5)}(x)32h^5}{5!} + O(h^6) \quad (2.12)$$

นำสมการ (2.8)+(2.9) และ (2.10)+(2.11) จะได้

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{12} + O(h^6) \quad (2.13)$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4f''(x)h^2 + \frac{16f^{(4)}(x)h^4}{12} + O(h^6) \quad (2.14)$$

นำ  $16 \times (2.12) - (2.13)$  จะได้

$$-f(x-2h) + 16f(x+h) + 16f(x-h) - f(x-2h) = 30f(x) + 12f''(x)h^2 + O(h^6)$$

เพราะฉะนั้น

$$12f''(x)h^2 = -f(x-2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h) + O(h^6)$$

ดังนั้น

$$f''(x) = \frac{-f(x-2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h) + O(h^6)}{12h^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12h^2} + O(h^4) \quad (2.15)$$

และ

$$f^{(4)}(x) = \frac{-f(x+3h) + 12f(x+2h) - 39f(x+h) + 56f(x) - 39f(x-h) + 12f(x-2h) - f(x-3h)}{6h^4}$$

กระจายอนุกรมเทย์เลอร์ดังแสดงก่อนหน้าี้จะได้ระเบียบวิธีสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ดังนี้

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{-u_{i+3} + 12u_{i+2} - 39u_{i+1} + 56u_i - 39u_{i-1} + 12u_{i-2} - u_{i-3}}{6h^4} + O(h^4) \quad (2.16)$$

## 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาพบว่าได้มีผู้วิจัยศึกษาเกี่ยวกับคานหน้าตัดไม้แปรรูปเปลี่ยนโดย (K.S. Thankane:2009) ใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดโดยใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  เพื่อหาผลเฉลยของสมการคานแบบหน้าตัดไม้แปรรูปเปลี่ยนโดยนำค่าจริงไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้จากโปรแกรม Mathematica

(S Rao, Gunnakala:2012) ได้อ้างอิงตัวอย่างจาก (K.S.Thankane:2009) และใช้ Galerkin Finite Element Method ในการหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดไม้แปรรูปเปลี่ยนโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ในการคำนวณ

ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้สนใจศึกษาสมการคานหน้าตัดแปรรูปเปลี่ยน จึงได้ศึกษาสมการคานหน้าตัดไม้แปรรูปเปลี่ยนและนำระเบียบวิธีผลต่างจำกัดโดยใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  เพื่อหาผลเฉลยและนำผลเฉลยที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เพื่อยืนยันความถูกต้องและนำระเบียบวิธีดังกล่าวไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดแปรรูปเปลี่ยน ต่อไป ในบทความต่อไปจะนำความรู้ ทฤษฎี และสมการที่ได้จากบทนี้ไปใช้ในส่วนของงานวิจัยเพื่อให้ได้งานวิจัยที่มีประสิทธิภาพต่อไป

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงสมการที่ใช้ในงานวิจัยและระเบียบวิธีต่างๆที่นำมาใช้ในการหาค่าสมการ คานหน้าตัดไม้แปรรูปและสมการคานหน้าตัดแปรรูป และจะแสดงวิธีหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ และผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคานหน้าตัดไม้แปรรูปเพื่อนำไปประยุกต์ใช้กับสมการคานหน้า ตัดแปรรูปและสมการคานหน้าตัดไม้แปรรูปขึ้นกับเวลาในบทต่อไป

3.1 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดสำหรับงานวิจัย

3.1.1 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการคานหน้าตัดแปรรูปแบบไร้มิติไม่ขึ้นกับเวลา

พิจารณาสมการคาน (K.S.Thankane:2009)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] = f(x) \tag{3.1}$$

และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของคานแบบยึดแน่นดังนี้

$$\begin{aligned} y(0) = 0 & \quad y'(0) = 0 \\ \text{และ} & \\ y(1) = 0 & \quad y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  จากสมการ (2.15) สำหรับสมการ  $\frac{d^4 y}{dx^4}$

โดยให้

$$x_i = i \times h, \quad h = \frac{L}{n+1}$$

และให้

$$\frac{d^4 y}{dx^4} \approx \Delta y_i + O(h^4)$$

พิจารณา  $\Delta y_i$  ที่  $i=1,2,\dots,N$  เราจะได้สมการผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  จาก (2.16)

$$\Delta y_i \approx \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} \quad (3.3)$$

เมื่อ  $y_i = y(i\Delta x)$

นำสมการ (3.3) แทนใน (3.1) จะได้

$$r(x_i) \left[ \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} \right] = f(x_i)$$

เมื่อ  $r(x_i) = r(i\Delta x)$  และ  $f(x_i) = f(i\Delta x)$

เมื่อ  $i=1$  จะได้

$$r(x_1) \left[ \frac{-y_4 + 12y_3 - 39y_2 + 56y_1 - 39y_0 + 12y_{-1} - y_{-2}}{6h^4} \right] = f(x_1) \quad (3.4)$$

จาก (3.2) จะพิจารณาหา Fictitious point ที่  $y_{-1}, y_{-2}$  จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จาก (2.7)

$$\frac{dy_i}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

จาก (3.2)  $y_0 = 0$  ดังนั้นที่  $y_0 = 0 \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$

จะได้  $y_{-1} = y_1$

และที่  $y_{-1} = y_1 \approx \frac{y_0 - y_{-2}}{2h}$

ดังนั้น  $y_{-2} = -2hy_1$

นำ  $y_{-1}, y_{-2}$  ไปแทนในสมการ (3.4) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$r(x_1) \left[ \frac{-y_4 + 12y_3 - 39y_2 + (68 + 2h)y_1}{6h^4} \right] = f(x_1)$$

เมื่อ  $i=2$  จะได้

$$r(x_2) \left[ \frac{-y_5 + y_4 - 39y_3 + 56y_2 - 39y_1 + 12y_0 - y_{-1}}{6h^4} \right] = f(x_2) \quad (3.5)$$

จาก  $y_{-1} = y_1$  นำไปแทนในสมการ (3.5) จะได้

$$r(x_2) \left[ \frac{-y_5 + 12y_4 - 39y_3 + 56y_2 - 40y_1}{6h^4} \right] = f(x_2)$$

เมื่อ  $i=N-1$  จะได้

$$r(x_{N-1}) \left[ \frac{-y_{N+2} + 12y_{N+1} - 39y_N + 56y_{N-1} - 39y_{N-2} + 12y_{N-3} - y_{N-4}}{6h^4} \right] = f(x_{N-1}) \quad (3.6)$$

จาก (3.2) จะพิจารณาหา Fictitious point ที่  $y_{N+2}$  จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$

จาก (2.7)

$$\frac{dy_i}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

และจาก (3.2)  $y_{N+1} = 0$  ดังนั้นที่  $y_{N+1} = 0 \approx \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}$

จะได้  $y_{N+2} = y_N$  นำไปแทนในสมการ (3.6) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$r(x_{N-1}) \left[ \frac{-40y_N + 56y_{N-1} - 39y_{N-2} + 12y_{N-3} - y_{N-4}}{6h^4} \right] = f(x_{N-1})$$

เมื่อ  $i=N$  จะได้

$$r(x_N) \left[ \frac{-y_{N+3} + 12y_{N+2} - 39y_{N+1} + 56y_N - 39y_{N-1} + 12y_{N-2} - y_{N-3}}{6h^4} \right] = f(x_N) \quad (3.7)$$

เนื่องจาก  $y_{N+2} = y_N$

และที่  $y_{N+2} = y_N \approx \frac{y_{N+3} - y_{N+1}}{2h}$

ดังนั้น  $y_{N+3} = 2hy_N$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ  $y_{N+2}, y_{N+3}$  ไปแทนในสมการ (3.7) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$r(x_N) \left[ \frac{(68+2h)y_N - 39y_{N-1} + 12y_{N-2} - y_{N-3}}{6h^4} \right] = f(x_N)$$

ดังนั้นจะได้รูปแบบของสมการดังนี้

$$\begin{aligned} r(x_1) \left[ \frac{-y_4 + 12y_3 - 39y_2 + (68+2h)y_1}{6h^4} \right] &= f(x_1) & i=1 \\ r(x_2) \left[ \frac{-y_5 + 12y_4 - 39y_3 + 56y_2 - 40y_1}{6h^4} \right] &= f(x_2) & i=2 \\ r(x_3) \left[ \frac{-y_6 + 12y_5 - 39y_4 + 56y_3 - 39y_2 + 12y_1}{6h^4} \right] &= f(x_3) & i=3 \\ r(x_i) \left[ \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} \right] &= f(x_i) & i=4, \dots, N-3 \\ r(x_{N-2}) \left[ \frac{12y_N - 39y_{N-1} + 56y_{N-2} - 39y_{N-3} + 12y_{N-4} - y_{N-5}}{6h^4} \right] &= f(x_{N-2}) & i=N-2 \\ r(x_{N-1}) \left[ \frac{-40y_N + 56y_{N-1} - 39y_{N-2} + 12y_{N-3} - y_{N-4}}{6h^4} \right] &= f(x_{N-1}) & i=N-1 \\ r(x_N) \left[ \frac{(68+2h)y_N - 39y_{N-1} + 12y_{N-2} - y_{N-3}}{6h^4} \right] &= f(x_N) & i=N \end{aligned} \quad (3.8)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณเราสามารถจัดรูปสมการ  $y$  ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$M(Y) = F(Y)$$

$$M = \frac{1}{6h^4} \begin{bmatrix} (68+2h) & -39 & 12 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -40 & 56 & -39 & 12 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & -39 & 56 & -39 & 12 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 12 & -39 & 56 & -40 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 12 & -39 & (68+2h) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และได้เมทริกซ์  $F(Y)$  โดย  $Y = y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$

$$F(Y) = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{Bmatrix}$$

### 3.1.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการคานหนาตัดไม้แปรเปลี่ยนขึ้นกับเวลา

กำหนดให้ความหนาแน่นของมวลของคาน  $\kappa$  มีค่าคงตัวและพื้นที่หน้าตัดของคาน  $A(x)$  สม่ำเสมอ โดยที่โมดูลัสความยืดหยุ่น  $E$  และโมเมนต์ความเฉื่อย  $I(x)$  มีค่าคงตัว

จากสมการ (2.6) จะได้ 
$$\kappa A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x) \quad (3.9)$$

$y(x, t)$  คือระยะการกระจัดของคานขึ้นกับเวลา

$\kappa A(x)$  ทหารตลอด 
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\kappa A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = g(x) \quad (3.10)$$

เมื่อ

$$g(x) = \frac{f(x)}{\kappa A}$$

โดยที่ปลายคานทั้งสองด้านเป็นแบบยึดแน่นและอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะการกระจัดของคานมีปลายทั้งสองเป็นศูนย์ ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตกำหนดโดย

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0 \quad y'(0, t) = 0 \\ \text{และ} \\ y(1, t) = 0 \quad y'(1, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  จากสมการ (2.16) สำหรับสมการ  $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$  และผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จากสมการ (2.8) สำหรับสมการ  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

โดยให้

$$x_i = i \times h, \quad h = \frac{L}{n+1} \quad \text{และ} \quad k = \frac{L}{m+1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และให้

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \approx \Delta y_i + O(h^4) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \Delta y_i + O(h^2)$$

พิจารณา  $\Delta y_i$  ที่  $i=1,2,\dots,N$  เราจะได้สมการผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  และ  $O(h^2)$  จาก (2.16) และ (2.8)

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \approx \frac{-y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}''}{6h^4} \quad (3.12)$$

และ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{k^2} \quad (3.13)$$

เมื่อ  $y_i^n = y(i\Delta x, n\Delta t)$

นำ (3.12) และ (3.13) แทนในสมการ (3.10) จะได้

$$\frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{k^2} + \frac{EI}{\kappa A} \left[ \frac{-y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}''}{6h^4} \right] = g(x_i) \quad (3.14)$$

เมื่อ  $g(x_i) = g(i\Delta x)$

จัดรูปสมการใหม่

$$y_i^{n+1} = k^2 g(x_i) - \frac{EI}{\kappa A} \frac{k^2}{6h^4} \left( -y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}'' \right) + 2y_i^n - y_i^{n-1} \quad (3.15)$$

ให้  $\lambda = \frac{EI}{\kappa A} \frac{k^2}{6h^4}$  ดังนั้น

$$y_i^{n+1} = k^2 g(x_i) - \lambda \left( -y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}'' \right) + 2y_i^n - y_i^{n-1} \quad (3.16)$$

เมื่อ  $n=0$  และ  $i=1$

$$y_1^1 = k^2 g(x_1) - \lambda \left( -y_4^0 + 12y_3^0 - 39y_2^0 + 56y_1^0 - 39y_0^0 + 12y_{-1}^0 - y_{-2}^0 \right) + 2y_1^0 - y_1^{-1} \quad (3.17)$$

จาก (3.11) พิจารณาหา Fictitious point ที่  $y_{-1}, y_{-2}$  จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จาก (2.7)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

จาก (3.11)  $y_0 = 0$  ดังนั้นที่  $y_0 = 0 \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$

จะได้  $y_{-1} = y_1$

และที่  $y_{-1} = y_1 \approx \frac{y_0 - y_{-2}}{2h}$

ดังนั้น  $y_{-2} = -2hy_1$

และ  $\frac{\partial y}{\partial t} \approx \frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2k}$

จาก (3.11)  $y_0 = 0$  ดังนั้นที่  $y_0 = 0 \approx \frac{y^1 - y^{-1}}{2k}$

จะได้  $y^{-1} = y^1$

นำ  $y_{-1}, y_{-2}$  และ  $y^{-1}$  ไปแทนในสมการ (3.17) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$y_1^1 = \frac{1}{2} [k^2 g(x_1) + \lambda y_4^0 - 12\lambda y_3^0 + 39\lambda y_2^0 - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_1^0]$$

เมื่อ  $n=0$  และ  $i=2$

$$y_2^1 = k^2 g(x_2) - \lambda (-y_5^0 + 12y_4^0 - 39y_3^0 + 56y_2^0 - 39y_1^0 + 12y_0^0 - y_{-1}^0) + 2y_2^0 - y_2^{-1} \quad (3.18)$$

จาก  $y_{-1} = y_1$  นำไปแทนในสมการ (3.18) จะได้

$$y_2^1 = \frac{1}{2} [k^2 g(x_2) + \lambda y_5^0 - 12\lambda y_4^0 + 39\lambda y_3^0 - (56\lambda - 2)y_2^0 + 40\lambda y_1^0]$$

เมื่อ  $n=0$  และ  $i=N-1$

$$y_{N-1}^1 = k^2 g(x_{N-1}) - \lambda (-y_{N-4}^0 + 12y_{N-3}^0 - 39y_{N-2}^0 + 56y_{N-1}^0 - 39y_N^0 + 12y_{N+1}^0 - y_{N+2}^0) + 2y_{N-1}^0 - y_{N-1}^{-1} \quad (3.19)$$

จาก (3.11) จะพิจารณาหา Fictitious point ที่  $y_{N+2}$  จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จาก (2.7)

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

และจาก (3.11)  $y_{N+1} = 0$  ดังนั้นที่  $y_{N+1} = 0 \approx \frac{y_{N+2} - y_N}{2h}$

เอกสารนี้จะถูกสงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ 
$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx \frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2k}$$

จาก (3.11)  $y_0 = 0$  ดังนั้นที่  $y_0 = 0 \approx \frac{y^1 - y^{-1}}{2k}$

จะได้  $y^{-1} = y^1$

นำไปแทนในสมการ (3.19) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$y_{N-1}^1 = \frac{1}{2} [k^2 g(x_{N-1}) + \lambda y_{N-4}^0 - 12\lambda y_{N-3}^0 + 39\lambda y_{N-2}^0 - (56\lambda - 2)y_{N-1}^0 + 40\lambda y_N^0]$$

เมื่อ  $n=0$  และ  $i=N$

$$y_N^1 = k^2 g(x_N) - \lambda (-y_{N-3}^0 + 12y_{N-2}^0 - 39y_{N-1}^0 + 56y_N^0 - 39y_{N+1}^0 + 12y_{N+2}^0 - y_{N+3}^0) + 2y_N^0 - y_N^{-1} \quad (3.20)$$

เนื่องจาก  $y_{N+2} = y_N$

และที่  $y_{N+2} = y_N \approx \frac{y_{N+3} - y_{N+1}}{2h}$

ดังนั้น  $y_{N+3} = 2hy_N$

และ 
$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx \frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2k}$$

จาก (3.10)  $y_0 = 0$  ดังนั้นที่  $y_0 = 0 \approx \frac{y^1 - y^{-1}}{2k}$

จะได้  $y^{-1} = y^1$  นำ  $y_{N+2}, y_{N+3}$  และ  $y^{-1}$  ไปแทนในสมการ (3.20) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$y_N^1 = \frac{1}{2} [k^2 g(x_N) + \lambda y_{N-3}^0 - 12\lambda y_{N-2}^0 + 39\lambda y_{N-1}^0 - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_N^0]$$

ดังนั้นจะได้รูปแบบของสมการที่  $n=0$  และ  $i=1, 2, \dots, N$  ดังนี้

$$y_1^1 = \frac{1}{2} [k^2 g(x_1) + \lambda y_4^0 - 12\lambda y_3^0 + 39\lambda y_2^0 - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_1^0]$$

$$y_2^1 = \frac{1}{2} [k^2 g(x_2) + \lambda y_5^0 - 12\lambda y_4^0 + 39\lambda y_3^0 - (56\lambda - 2)y_2^0 + 40\lambda y_1^0]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
y_3^1 &= \frac{1}{2} [k^2 g(x_3) + \lambda y_6^0 - 12\lambda y_5^0 + 39\lambda y_4^0 - (56\lambda - 2)y_3^0 + 39\lambda y_2^0 - 12\lambda y_1^0] \\
y_i^1 &= \frac{1}{2} [k^2 g(x_i) + \lambda y_{i+3}^0 - 12\lambda y_{i+2}^0 + 39\lambda y_{i+1}^0 - (56\lambda - 2)y_i^0 + 39\lambda y_{i-1}^0 - 12\lambda y_{i-2}^0 + \lambda y_{i-3}^0] \\
y_{N-2}^1 &= \frac{1}{2} [k^2 g(x_{N-2}) + \lambda y_{N-5}^0 - 12\lambda y_{N-4}^0 + 39\lambda y_{N-3}^0 - (56\lambda - 2)y_{N-2}^0 + 39\lambda y_{N-1}^0 - 12\lambda y_N^0] \\
y_{N-1}^1 &= \frac{1}{2} [k^2 g(x_{N-1}) + \lambda y_{N-4}^0 - 12\lambda y_{N-3}^0 + 39\lambda y_{N-2}^0 - (56\lambda - 2)y_{N-1}^0 + 40\lambda y_N^0] \\
y_N^1 &= \frac{1}{2} [k^2 g(x_N) + \lambda y_{N-3}^0 - 12\lambda y_{N-2}^0 + 39\lambda y_{N-1}^0 - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_N^0]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

เมื่อ  $n=1,2,3,\dots,M$  และ  $i=1$

จากสมการ (3.16)

$$y_1^{n+1} = k^2 g(x_1) - \lambda (-y_4^n + 12y_3^n - 39y_2^n + 56y_1^n - 39y_0^n + 12y_{-1}^n - y_{-2}^n) + 2y_1^n - y_1^{n-1} \tag{3.22}$$

จาก (3.11) จะพิจารณาหา Fictitious point ที่  $y_{-1}, y_{-2}$  จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จาก (2.7)

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

จาก (3.11)  $y_0 = 0$  ดังนั้นที่  $y_0 = 0 \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$

จะได้  $y_{-1} = y_1$

และที่  $y_{-1} = y_1 \approx \frac{y_0 - y_{-2}}{2h}$

ดังนั้น  $y_{-2} = -2hy_1$

นำ  $y_{-1}, y_{-2}$  ไปแทนในสมการ (3.22) จะได้สมการใหม่ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_1^{n+1} = k^2 g(x_1) + \lambda y_4^n - 12\lambda y_3^n + 39\lambda y_2^n - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_1^n - y_1^{n-1}$$

เมื่อ  $i=2$

$$y_2^{n+1} = k^2 g(x_2) - \lambda(-y_5^n + 12y_4^n - 39y_3^n + 56y_2^n - 39y_1^n + 12y_0^n - y_1^n) + 2y_2^n - y_2^{n-1} \quad (3.23)$$

จาก  $y_{-1} = y_1$  นำไปแทนในสมการ (3.23) จะได้

$$y_2^{n+1} = k^2 g(x_2) + \lambda y_5^n - 12\lambda y_4^n + 39\lambda y_3^n - (56\lambda - 2)y_2^n + 40\lambda y_1^n - y_2^{n-1}$$

เมื่อ  $i = N-1$

$$y_{N-1}^{n+1} = k^2 g(x_{N-1}) - \lambda(-y_{N-4}^n + 12y_{N-3}^n - 39y_{N-2}^n + 56y_{N-1}^n - 39y_N^n + 12y_{N+1}^n - y_{N+2}^n) + 2y_{N-1}^n - y_{N-1}^{n-1} \quad (3.24)$$

จาก (3.11) จะพิจารณาหา Fictitious point ที่  $y_{N+2}$  จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จาก (2.7)

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

และจาก (3.11)  $y_{N+1} = 0$  ดังนั้นที่  $y_{N+1} = 0 \approx \frac{y_{N+2} - y_N}{2h}$

จะได้  $y_{N+2} = y_N$  นำไปแทนในสมการ (3.24) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$y_{N-1}^{n+1} = k^2 g(x_{N-1}) + \lambda y_{N-4}^n - 12\lambda y_{N-3}^n + 39\lambda y_{N-2}^n - (56\lambda - 2)y_{N-1}^n + 40\lambda y_N^n - y_{N-1}^{n-1}$$

เมื่อ  $i = N$

$$y_N^{n+1} = k^2 g(x_N) - \lambda(-y_{N-3}^n + 12y_{N-2}^n - 39y_{N-1}^n + 56y_N^n - 39y_{N+1}^n + 12y_{N+2}^n - y_{N+3}^n) + 2y_N^n - y_N^{n-1} \quad (3.25)$$

เนื่องจาก  $y_{N+2} = y_N$

$$\text{และที่ } y_{N+2} = y_N = \frac{y_{N+3} - y_{N+1}}{2h}$$

$$\text{ดังนั้น } y_{N+3} = 2hy_N$$

นำ  $y_{N+2}, y_{N+3}$  ไปแทนในสมการ (3.25) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$y_N^{n+1} = k^2 g(x_N) + \lambda y_{N-3}^n - 12\lambda y_{N-2}^n + 39\lambda y_{N-1}^n - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_N^n - y_N^{n-1}$$

ดังนั้นจะได้รูปแบบของสมการที่ เมื่อ  $t=1,2,3,\dots,M$  และ  $i=1,2,\dots,N$  ดังนี้

$$y_1^{n+1} = k^2 g(x_1) + \lambda y_4^n - 12\lambda y_3^n + 39\lambda y_2^n - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_1^n - y_1^{n-1}$$

$$y_2^{n+1} = k^2 g(x_2) + \lambda y_5^n - 12\lambda y_4^n + 39\lambda y_3^n - (56\lambda - 2)y_2^n + 40\lambda y_1^n - y_2^{n-1}$$

$$y_3^{n+1} = k^2 g(x_3) + \lambda y_6^n - 12\lambda y_5^n + 39\lambda y_4^n - (56\lambda - 2)y_3^n + 39\lambda y_2^n - 12\lambda y_1^n - y_3^{n-1}$$

$$y_i^{n+1} = k^2 g(x_i) + \lambda y_{i+3}^n - 12\lambda y_{i+2}^n + 39\lambda y_{i+1}^n - (56\lambda - 2)y_i^n + 39\lambda y_{i-1}^n - 12\lambda y_{i-2}^n + \lambda y_{i-3}^n - y_i^{n-1}$$

$$y_{N-2}^{n+1} = k^2 g(x_{N-2}) + \lambda y_{N-5}^n - 12\lambda y_{N-4}^n + 39\lambda y_{N-3}^n - (56\lambda - 2)y_{N-2}^n + 39\lambda y_{N-1}^n - 12\lambda y_N^n - y_{N-2}^{n-1}$$

$$y_{N-1}^{n+1} = k^2 g(x_{N-1}) + \lambda y_{N-4}^n - 12\lambda y_{N-3}^n + 39\lambda y_{N-2}^n - (56\lambda - 2)y_{N-1}^n + 40\lambda y_N^n - y_{N-1}^{n-1}$$

$$y_N^{n+1} = k^2 g(x_N) + \lambda y_{N-3}^n - 12\lambda y_{N-2}^n + 39\lambda y_{N-1}^n - (68\lambda + 2\lambda h - 2)y_N^n - y_N^{n-1}$$

(3.26)

### 3.3 การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการคานหน้าตัดไม้แปรเปลี่ยน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าจริงและแสดงวิธีทำเพื่อง่ายต่อการเข้าใจและนำผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขในระเบียบวิธีที่ได้พัฒนาขึ้นมาใหม่

จากสมการ (K.S.Thankane:2009)

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.27)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, & u'(0) &= 0 \\ u(1) &= 0, & u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

จากสมการ (3.18)

เนื่องจากฟังก์ชันพหุนามอันดับสามหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับสี่ จะได้  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น เมื่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_c = a_1 e^{0x} + a_2 x e^{0x} + a_3 x^2 e^{0x} + a_4 x^3 e^{0x}$$

$$u_c = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

และจาก  $\frac{d^4 u}{dx^4} = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x$

$$u_p = (Ax + B) \sin \pi x + (Cx + D) \cos \pi x$$

หาอนุพันธ์อันดับสี่ ของ  $u_p$  จะได้

$$u_p^{(4)} = A\pi^4 x \sin \pi x + C\pi^4 x \cos \pi x + (B\pi^4 + 2C\pi^3) \sin \pi x + (-4A\pi^3 + D\pi^4) \cos \pi x$$

จาก  $\frac{d^4 u}{dx^4} = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x$  เทียบสัมประสิทธิ์หาค่า  $A, B, C, D$  จะได้

$$A=1, B=0, C=0, D=0$$

นำ  $A, B, C, D$  ไปแทนใน  $u_p = (Ax + B) \sin \pi x + (Cx + D) \cos \pi x$

ดังนั้น

$$u_p = x \sin \pi x$$

จะได้

$$u = x \sin \pi x + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

จากเงื่อนไข  $u(0) = 0$  ดังนั้น  $a_1 = 0$

และจากเงื่อนไข  $u(1) = 0$  ดังนั้น

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0 \tag{3.28}$$

จาก  $u = x \sin \pi x + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$

ดังนั้น  $u' = \pi x \cos \pi x + \sin \pi x + a_2 + 2a_3 x + 6a_4 x^2$

จากเงื่อนไข  $u'(0) = 0$  จะได้  $a_2 = 0$

และจากเงื่อนไข  $u'(1) = 0$  จะได้  $a_3 = 0$  และ  $a_4 = 0$  ดังนั้น  $u = x \sin \pi x$  เท่านั้น  
 เอกสารฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} & -\pi + a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \\ \text{จาก } a_2 = 0 \text{ จะได้} & \quad 2a_3 + 3a_4 = \pi \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\text{และจาก (3.28)} \quad a_3 + a_4 = 0 \quad (3.30)$$

นำ (3.29)  $-(2 \times (3.30))$

$$\text{จะได้} \quad a_4 = \pi$$

นำ  $a_4$  ไปแทนสมการ (3.21)

เพราะฉะนั้นจะได้

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\pi$$

$$a_4 = \pi$$

ดังนั้นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์คือ

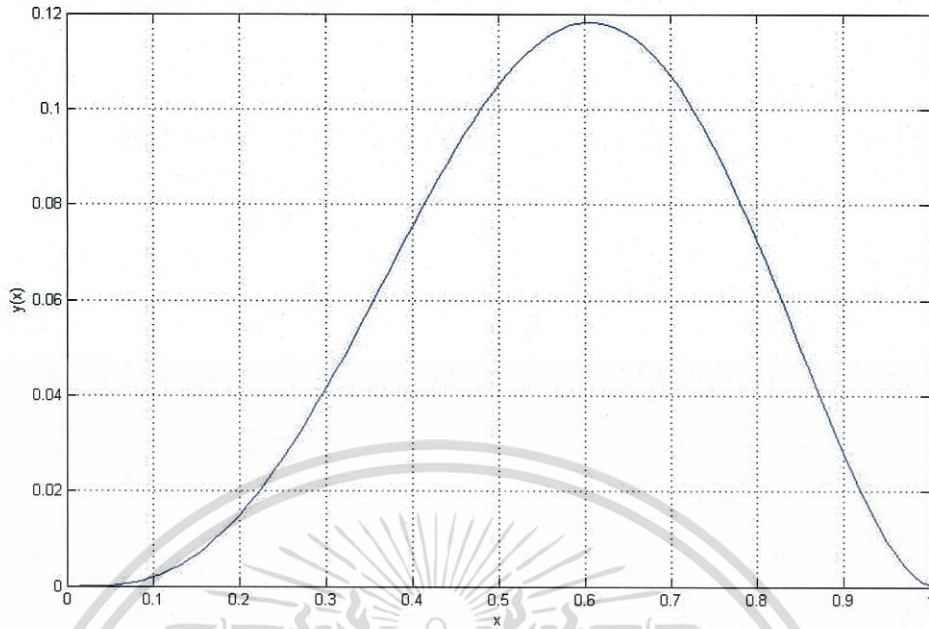
$$u = x \sin \pi x + \frac{\pi}{3} x - \pi x^2 + \pi x^3$$

ให้  $n=9, L=1$  และจาก  $x_i = i \times h, h = \frac{L}{n+1}$  ดังนั้นจะได้ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่  $i=1,2,\dots,9$  ดังตารางที่ 3.1 และรูปที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่  $i=1,2,\dots,9$

| $i$         | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $u_{exact}$ | 0.0026 | 0.0170 | 0.0448 | 0.0788 | 0.1073 | 0.1182 | 0.1045 | 0.0681 | 0.0236 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.1 รูปแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

### 3.4 การหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดไม้แปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

พิจารณาสมการคานดังต่อไปนี้ (K.S.Thankane:2009)

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$y(L) = 0, \quad y'(L) = 0,$$

ใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$

$$\Delta y_i = \frac{-y_{i+3} + y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4}$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.8) ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{-y_4 + 12y_3 - 39y_2 + (68 + 2h)y_1}{6h^4} = f(x_1) \quad i=1$$

$$\frac{-y_5 + 12y_4 - 39y_3 + 56y_2 - 40y_1}{6h^4} = f(x_2) \quad i=2$$

$$\frac{-y_6 + 12y_5 - 39y_4 + 56y_3 - 39y_2 + 12y_1}{6h^4} = f(x_3) \quad i=3$$

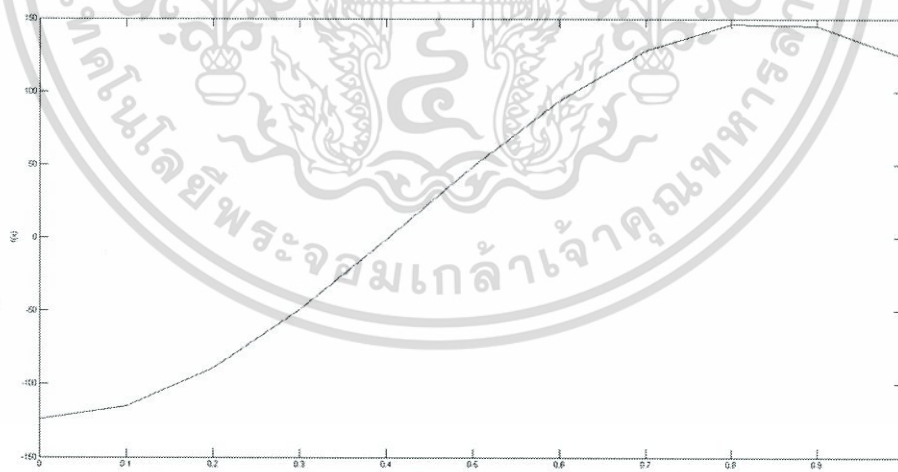
$$\frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} = f(x_i) \quad i=4, \dots, n-3$$

$$\frac{12y_n - 39y_{n-1} + 56y_{n-2} - 39y_{n-3} + 12y_{n-4} - y_{n-5}}{6h^4} = f(x_{n-2}) \quad i=n-2$$

$$\frac{-40y_n + 56y_{n-1} - 39y_{n-2} + 12y_{n-3} - y_{n-4}}{6h^4} = f(x_{n-1}) \quad i=n-1$$

$$\frac{(68 + 2h)y_n - 39y_{n-1} + 12y_{n-2} - y_{n-3}}{6h^4} = f(x_n) \quad i=n$$

โดยที่  $f(x_i) = \pi^4 x_i \sin \pi x_i - 4\pi^3 \cos \pi x_i$  และ  $x_i = i \times h$



รูปที่ 3.2 กราฟแสดงค่า  $f(x_i) = \pi^4 x_i \sin \pi x_i - 4\pi^3 \cos \pi x_i$

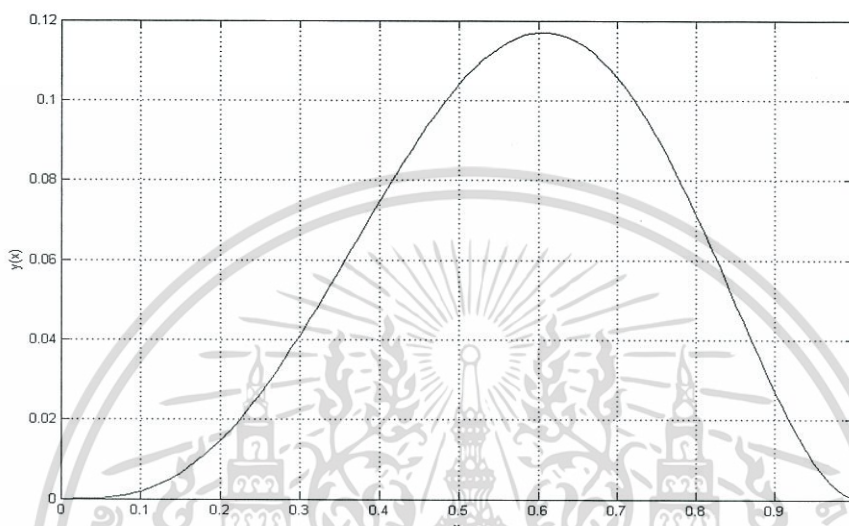
ให้  $n=99$  และ  $L=1$  ดังนั้น จะได้  $h = \frac{1}{100} = 0.01$  และได้ผลเฉลย ณ ตำแหน่งต่างๆ ดังตารางที่

เอกสาร 3.2 และรูปที่ 3.3 จึงนำไปสำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 ค่า  $y(x)$  ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ที่  $h=0.01$

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x_i$  | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 0.9    |
| $y(x)$ | 0.0019 | 0.0147 | 0.0410 | 0.0746 | 0.1040 | 0.1170 | 0.1057 | 0.0713 | 0.0270 |



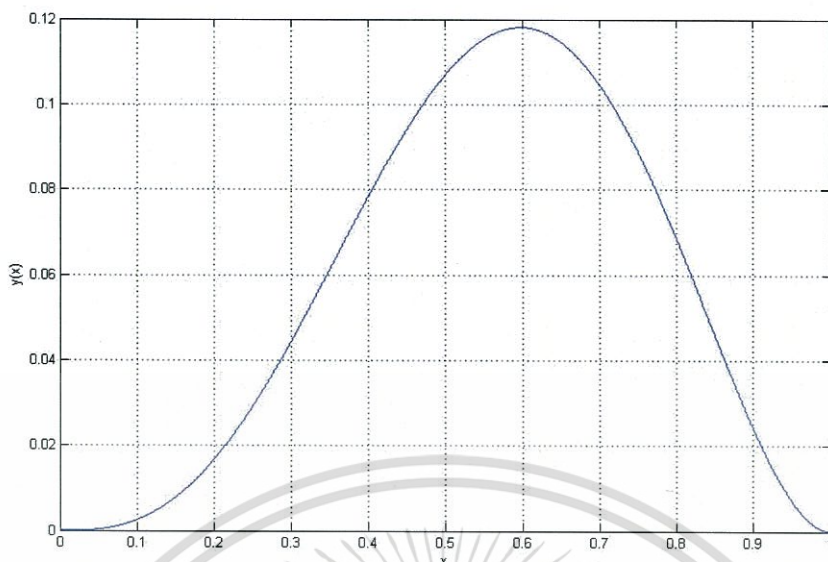
รูปที่ 3.3 ค่า  $y(x)$  ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ ที่  $h=0.01$

ให้  $n=999$  และ  $L=1$  ดังนั้น จะได้  $h=\frac{1}{1000}=0.001$  และได้ผลเฉลย ณ ตำแหน่งต่างๆ ดังตารางที่ 3.3 และรูปที่ 3.4

ตารางที่ 3.3 ค่า  $y(x)$  ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ ที่  $h=0.001$

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x_i$  | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 0.9    |
| $y(x)$ | 0.0025 | 0.0168 | 0.0444 | 0.0784 | 0.1070 | 0.1181 | 0.1046 | 0.0684 | 0.0240 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



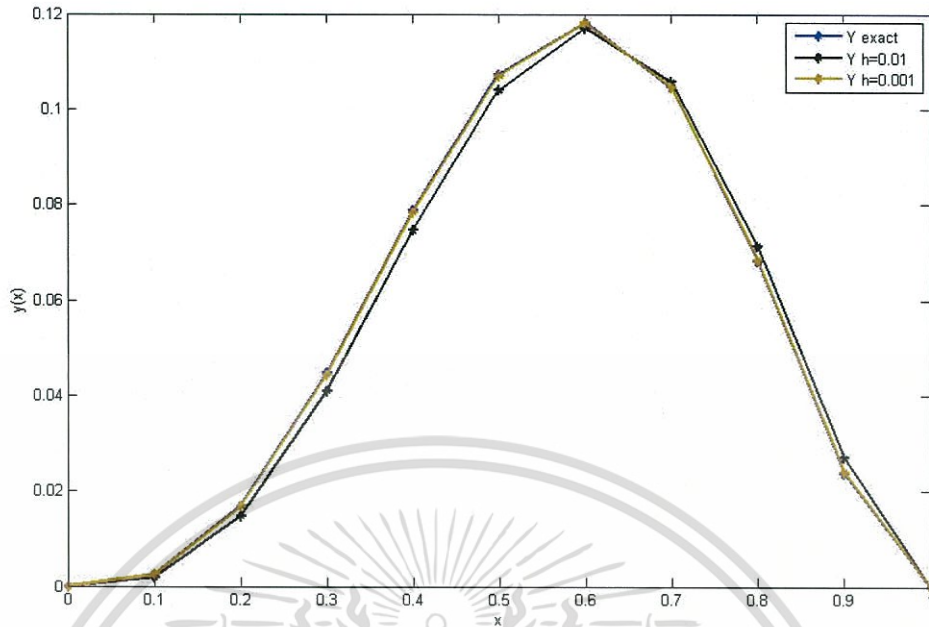
รูปที่ 3.4 ค่า  $y(x)$  ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ที่  $h=0.001$

เพื่อแสดงความถูกต้องของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ ผู้วิจัยจึงนำผลเฉลยเชิงตัวเลขมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ดังแสดงในตารางที่ 3.4 และรูปที่ 3.5

ตารางที่ 3.4 แสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่  $h=0.01$  และ  $h=0.001$

| $x_i$           | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 0.9    |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $u_{exact}$     | 0.0026 | 0.0170 | 0.0448 | 0.0788 | 0.1073 | 0.1182 | 0.1045 | 0.0681 | 0.0236 |
| $y(x), h=0.01$  | 0.0019 | 0.0147 | 0.0410 | 0.0746 | 0.1040 | 0.1170 | 0.1057 | 0.0713 | 0.0270 |
| $y(x), h=0.001$ | 0.0025 | 0.0168 | 0.0444 | 0.0784 | 0.1070 | 0.1181 | 0.1046 | 0.0684 | 0.0240 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.5 แสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่  $h=0.01$  และ  $h=0.001$

จากรูปที่ 3.5 จะเห็นว่าเมื่อเลือก  $h=0.001$  จะได้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ซึ่งมีค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมพันธ์ดังนี้

$$relativeError = \max_{1 \leq i \leq 9} \frac{|y_{exact}(x_i) - y_{h=0.001}(x_i)|}{y_{exact}(x_i)} \times 100 = 3.8\%$$

ซึ่งมีความผิดพลาดที่สามารถยอมรับได้ ดังนั้นตัวอย่างในหัวข้อต่อไปที่ยากต่อการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์หรือไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ จะใช้ระเบียบวิธีดังที่ได้กล่าวไว้มาใช้เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีประสิทธิภาพต่อไป

## บทที่ 4

### ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในบทนี้จะนำระเบียบวิธีผลต่างจำกัดที่ใช้ในหัวข้อก่อนหน้า ซึ่งมีความถูกต้องและให้ค่าความผิดพลาดน้อยเมื่อเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ โดยนำมาใช้กับกรณีที่หาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ยากหรือไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ และยกตัวอย่างพร้อมทั้งเขียนโปรแกรมเพื่อสะดวกและง่ายในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขต่อไป

#### 4.1 การหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาสมการคานดังต่อไปนี้ (K.S.Thankane:2009)

$$r(x)\frac{d^4y}{dx^4} = f(x)$$

ให้  $r(x) = x$  และ  $f(x) = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x$  ซึ่งจะได้สมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนดังนี้

$$x\frac{d^4y}{dx^4} = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

ใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$

$$\Delta y_i = r(x_i) \left[ \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} \right]$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.8) ดังนี้

$$r(x_i) \left[ \frac{-y_4 + 12y_3 - 39y_2 + (68 + 2h)y_1}{6h^4} \right] = f(x_i) \quad i=1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$r(x_2) \left[ \frac{-y_5 + 12y_4 - 39y_3 + 56y_2 - 40y_1}{6h^4} \right] = f(x_2) \quad i=2$$

$$r(x_3) \left[ \frac{-y_6 + 12y_5 - 39y_4 + 56y_3 - 39y_2 + 12y_1}{6h^4} \right] = f(x_3) \quad i=3$$

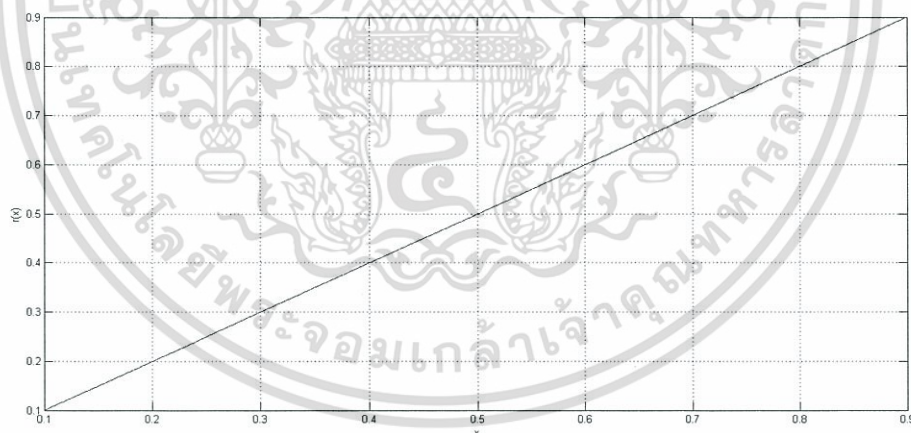
$$r(x_i) \left[ \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} \right] = f(x_i) \quad i=4, \dots, n-3$$

$$r(x_{n-2}) \left[ \frac{12y_n - 39y_{n-1} + 56y_{n-2} - 39y_{n-3} + 12y_{n-4} - y_{n-5}}{6h^4} \right] = f(x_{n-2}) \quad i=n-2$$

$$r(x_{n-1}) \left[ \frac{-40y_n + 56y_{n-1} - 39y_{n-2} + 12y_{n-3} - y_{n-4}}{6h^4} \right] = f(x_{n-1}) \quad i=n-1$$

$$r(x_n) \left[ \frac{(68+2h)y_n - 39y_{n-1} + 12y_{n-2} - y_{n-3}}{6h^4} \right] = f(x_n) \quad i=n$$

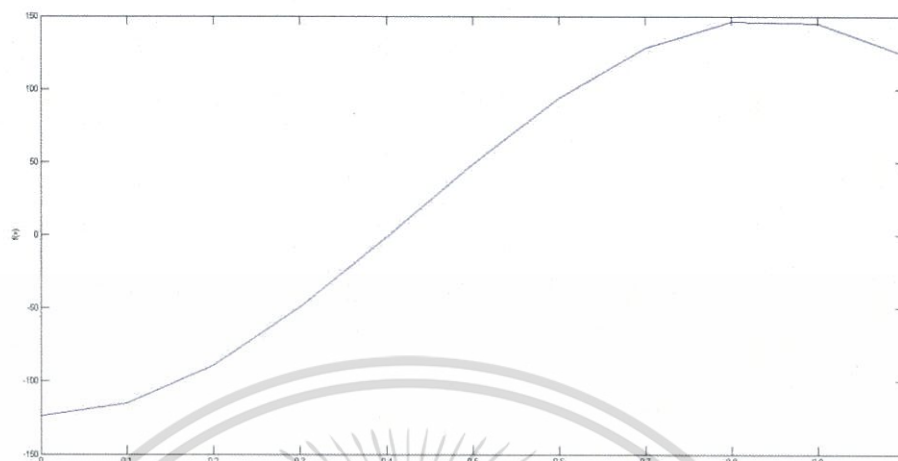
และค่า  $r(x) \equiv x$  แสดงดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 กราฟแสดงค่า  $r(x_i)$

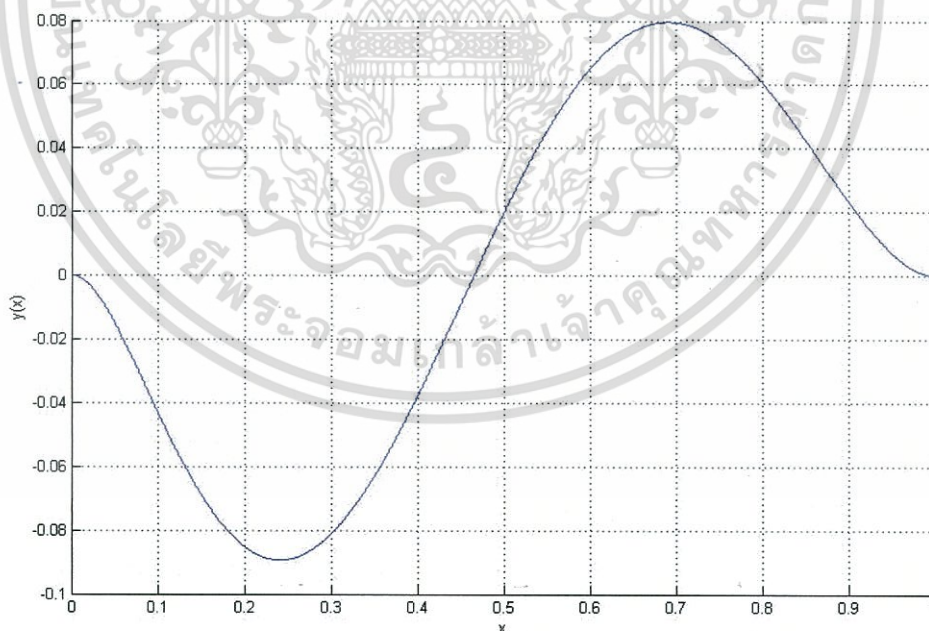
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $f(x) = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x$



รูปที่ 4.2 กราฟแสดงค่า  $f(x_i) = \pi^4 x_i \sin \pi x_i - 4\pi^3 \cos \pi x_i$

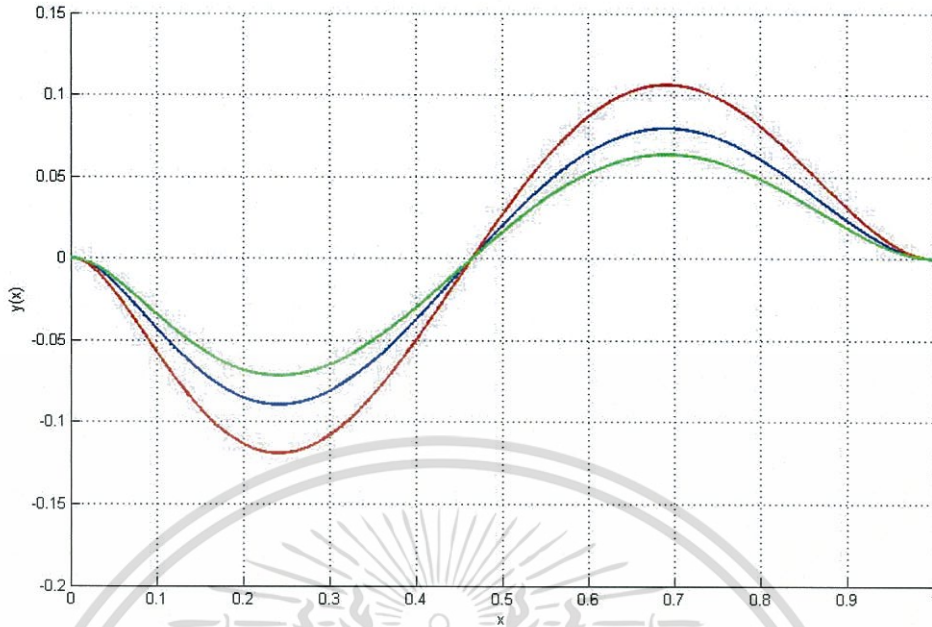
ให้  $n=999$  และ  $L=1$  ดังนั้น จะได้  $h = \frac{1}{1000} = 0.001$  และได้ผลเฉลย ณ ตำแหน่งต่างๆ ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 ค่า  $y(x)$  ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ที่  $h=0.001$

เมื่อลดค่า  $r(x) = 0.7x$  และเพิ่ม  $r(x) = 1.25x$  ผลเฉลย ณ ตำแหน่งต่างๆ ดังรูปที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 เปรียบเทียบค่า  $r(x)$  เมื่อลด  $r(x)$  และเพิ่ม  $r(x)$

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาสมการคานดังต่อไปนี้

$$r(x) \frac{d^4 y}{dx^4} = f(x)$$

ให้  $r(x) = x$  และ  $f(x) = \sin \pi x$  ซึ่งจะได้สมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนดังนี้

$$x \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sin \pi x$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

ใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$

$$\Delta y_i = r(x_i) \left[ \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} \right]$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.8) ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$r(x_1) \left[ \frac{-y_4 + 12y_3 - 39y_2 + (68 + 2h)y_1}{6h^4} \right] = f(x_1) \quad i=1$$

$$r(x_2) \left[ \frac{-y_5 + 12y_4 - 39y_3 + 56y_2 - 40y_1}{6h^4} \right] = f(x_2) \quad i=2$$

$$r(x_3) \left[ \frac{-y_6 + 12y_5 - 39y_4 + 56y_3 - 39y_2 + 12y_1}{6h^4} \right] = f(x_3) \quad i=3$$

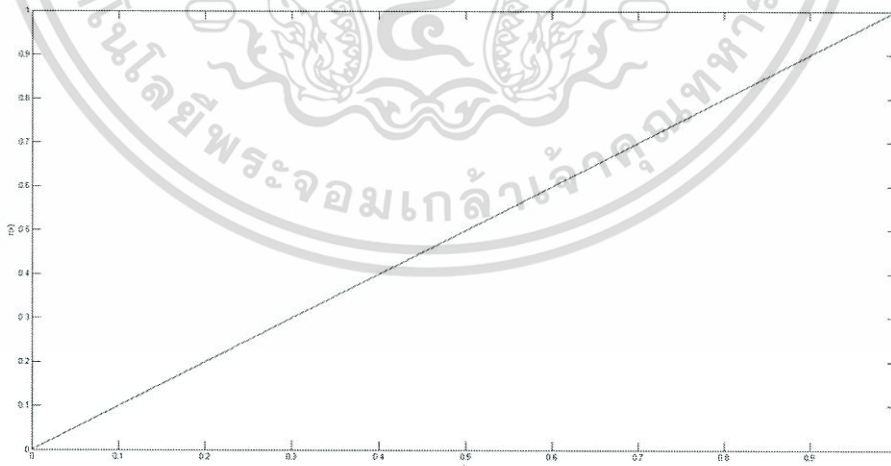
$$r(x_i) \left[ \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6h^4} \right] = f(x_i) \quad i=4, \dots, n-3$$

$$r(x_{n-2}) \left[ \frac{12y_n - 39y_{n-1} + 56y_{n-2} - 39y_{n-3} + 12y_{n-4} - y_{n-5}}{6h^4} \right] = f(x_{n-2}) \quad i=n-2$$

$$r(x_{n-1}) \left[ \frac{-40y_n + 56y_{n-1} - 39y_{n-2} + 12y_{n-3} - y_{n-4}}{6h^4} \right] = f(x_{n-1}) \quad i=n-1$$

$$r(x_n) \left[ \frac{(68 + 2h)y_n - 39y_{n-1} + 12y_{n-2} - y_{n-3}}{6h^4} \right] = f(x_n) \quad i=n$$

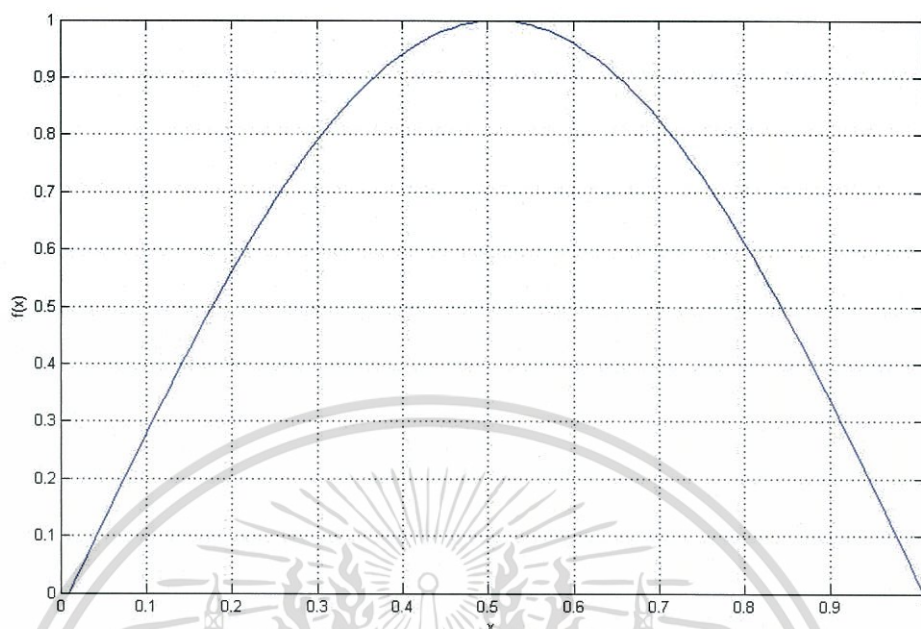
และค่า  $r(x) = x$  แสดงดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 กราฟแสดงค่า  $r(x_i)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

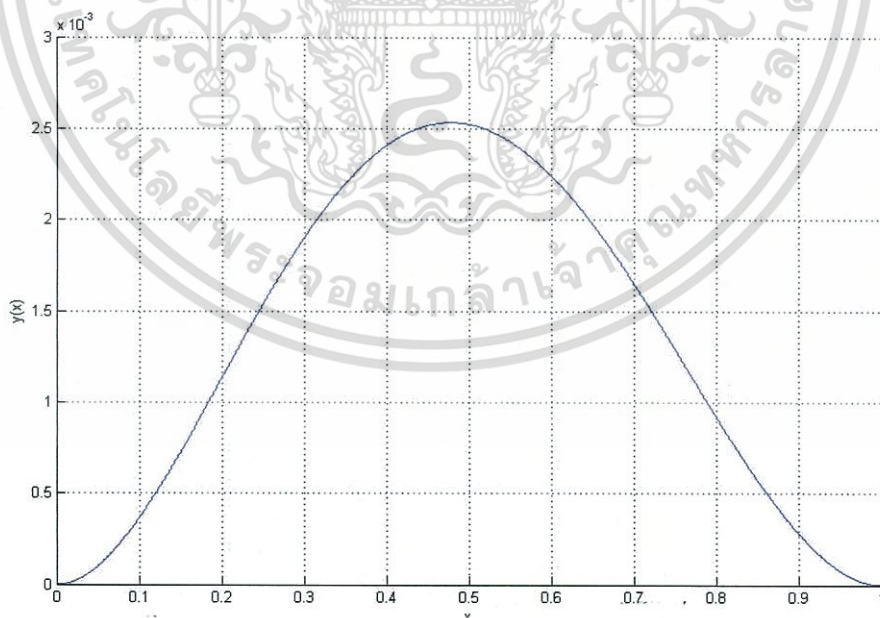
เมื่อ  $f(x_i) = \sin \pi x_i$



รูปที่ 4.6 กราฟแสดงค่า  $f(x_i) = \sin \pi x_i$

ให้  $n=999$  และ  $L=1$  ดังนั้น จะได้  $h = \frac{1}{1000} = 0.001$  และได้ผลเฉลย ณ ตำแหน่งต่างๆ

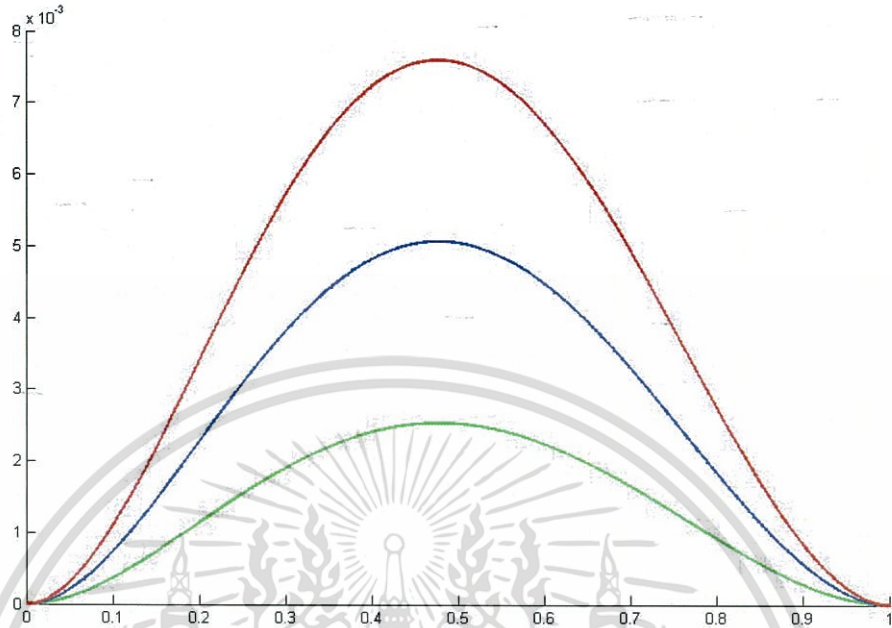
ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 ค่า  $y(x)$  ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ที่  $h=0.001$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อลดค่า  $f(x) = 0.5 \sin \pi x$  และเพิ่ม  $f(x) = 1.5 \sin \pi x$  ผลเฉลย ณ ตำแหน่งต่างๆ ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 เปรียบเทียบค่า  $f(x)$  เมื่อลด  $f(x)$  และเพิ่ม  $f(x)$

#### 4.2 การหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดไม้แปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ขึ้นกับเวลา

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาสมการคานดังต่อไปนี้

$$\text{จากสมการในงานวิจัย} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\kappa A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = g(x) \quad (4.1)$$

$$\text{เมื่อ} \quad g(x) = \frac{f(x)}{\kappa A}$$

ให้  $\frac{EI}{\kappa A} = \frac{1}{10} = 0.1$  และ  $f(x) = \pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x$  ซึ่งจะได้สมการคานดังนี้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 0.1 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x}{10} \quad (4.2)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y(0,t) = 0, \quad y'(0,t) = 0$$

$$y(1,t) = 0, \quad y'(1,t) = 0$$

ใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  จากสมการ (2.16) สำหรับสมการ  $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$  และผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จากสมการ (2.8) สำหรับสมการ  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

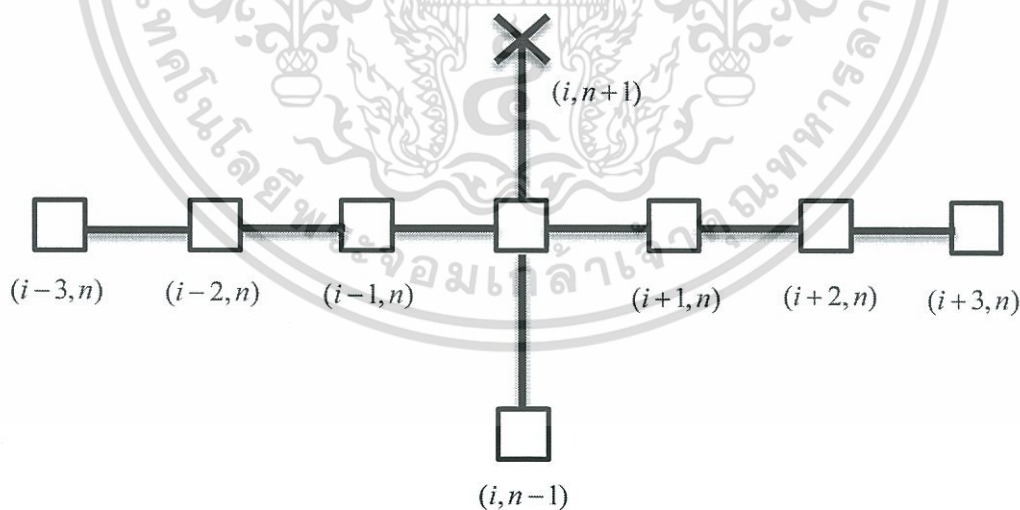
$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \approx \frac{-y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}''}{6h^4} \quad (4.3)$$

และ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{k^2} \quad (4.4)$$

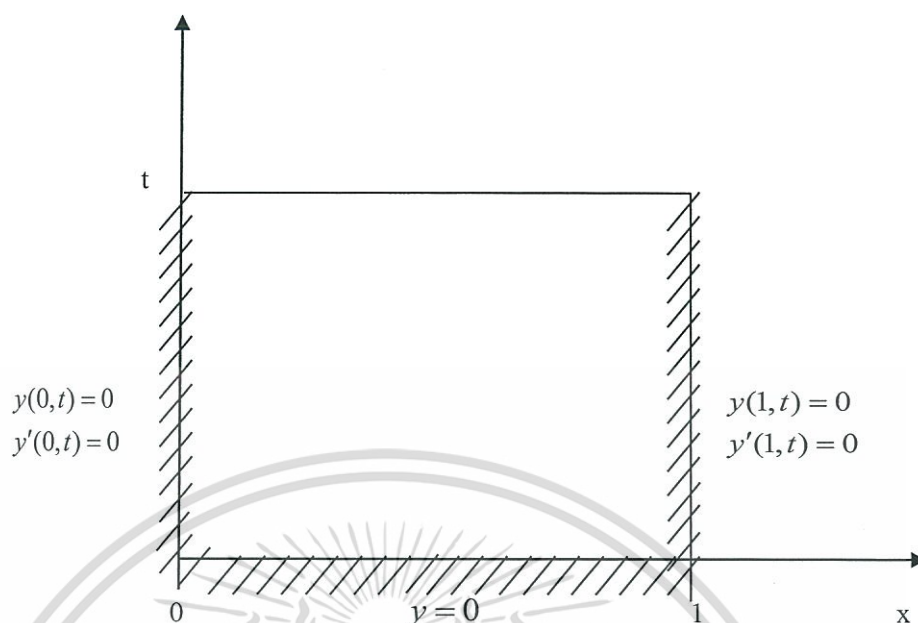
นำ (4.3) และ (4.4) แทนในสมการ (4.2) จะได้

$$\frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{k^2} + 0.1 \left[ \frac{-y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}''}{6h^4} \right] = \frac{\pi^4 x \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x}{10}$$



รูปที่ 4.9 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยนขึ้นกับเวลา

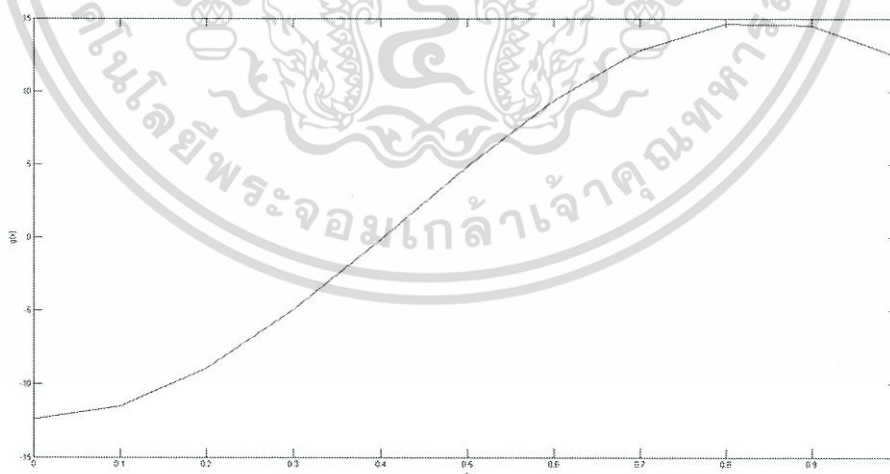
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.10 เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบของปัญหาสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.21) และ (3.26)

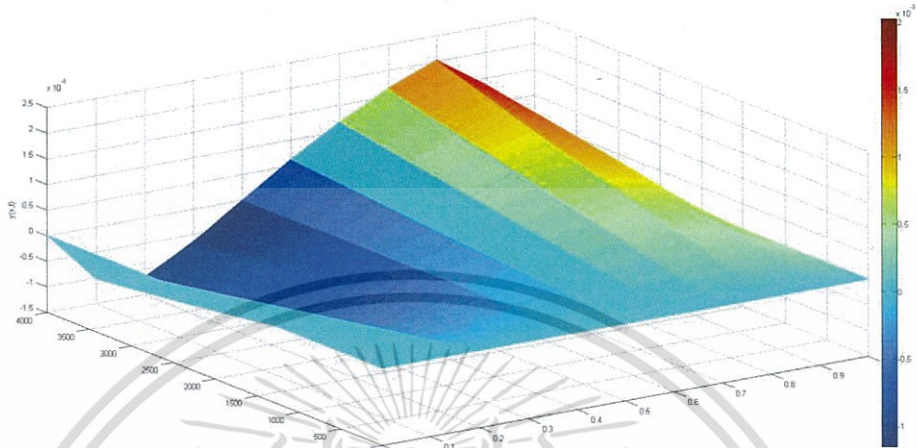
เนื่องจากที่  $g(x_i) = \frac{\pi^4 x_i \sin \pi x_i - 4\pi^3 \cos \pi x_i}{10}$  แสดงกราฟ  $g(x_i)$  ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 กราฟแสดงค่า  $g(x_i)$

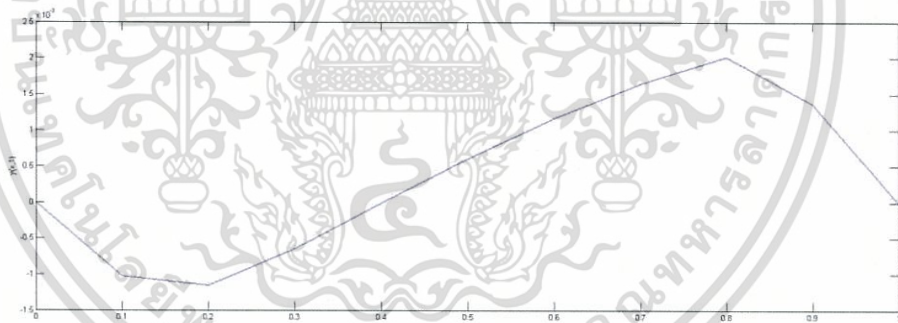
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือก  $h=0.01$  และ  $k=0.00025$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของการโค้งของคาน ณ ตำแหน่งใด ๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 การโค้งของคานหน้าตัดไม้แปรรูป ณ ตำแหน่งใดๆ ในแต่ละช่วงเวลา

เมื่อเวลา  $t=1$  จะได้กราฟดังรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 การโค้งของคานหน้าตัดไม้แปรรูป ณ ตำแหน่งใดๆ ที่เวลาเป็น 1

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาสมการคานดังต่อไปนี้

$$\text{จากสมการในงานวิจัย} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\kappa A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = g(x) \quad (4.5)$$

$$\text{เมื่อ} \quad g(x) = \frac{f(x)}{\kappa A}$$

$$\text{ให้} \quad \frac{EI}{\kappa A} = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \text{และ} \quad f(x) = \sin \pi x \quad \text{ซึ่งจะได้สมการคานดังนี้}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 0.1 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\sin \pi x}{10} \quad (4.6)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$y(0,t) = 0, \quad y'(0,t) = 0$$

$$y(1,t) = 0, \quad y'(1,t) = 0$$

ใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^4)$  จากสมการ (2.16) สำหรับสมการ  $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$  และผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน  $O(h^2)$  จากสมการ (2.8) สำหรับสมการ  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

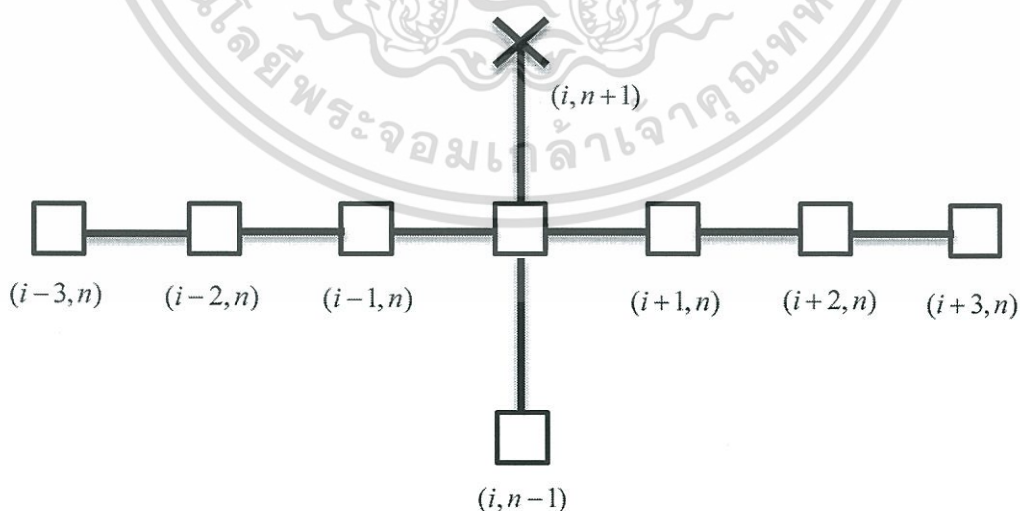
$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \approx \frac{-y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}''}{6h^4} \quad (4.7)$$

และ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{k^2} \quad (4.8)$$

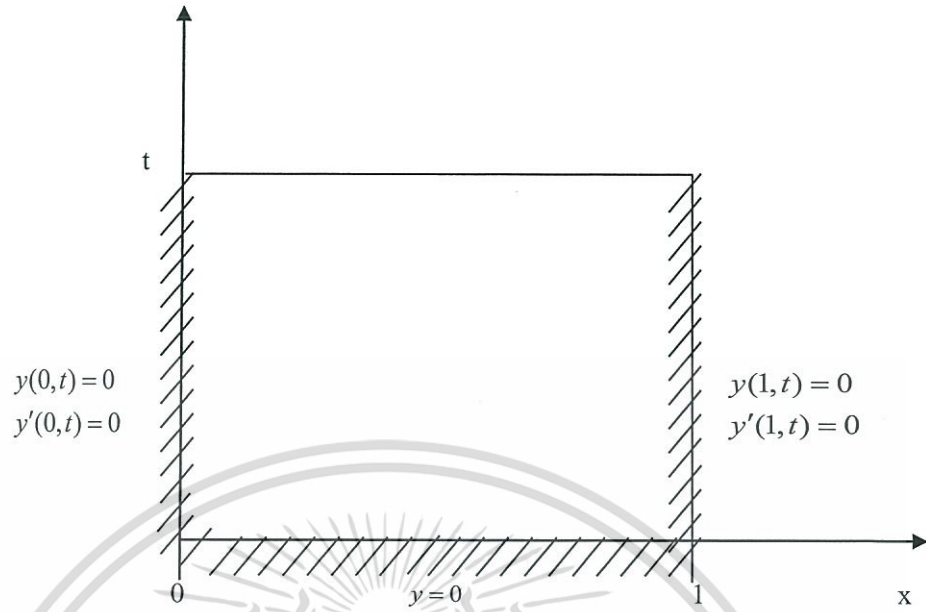
นำ (4.7) และ (4.8) แทนในสมการ (4.6) จะได้

$$\frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{k^2} + 0.1 \left[ \frac{-y_{i+3}'' + 12y_{i+2}'' - 39y_{i+1}'' + 56y_i'' - 39y_{i-1}'' + 12y_{i-2}'' - y_{i-3}''}{6h^4} \right] = \frac{\sin \pi x}{10}$$



รูปที่ 4.14 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการคานหนาตัดไม่แปรเปลี่ยนขึ้นกับเวลา

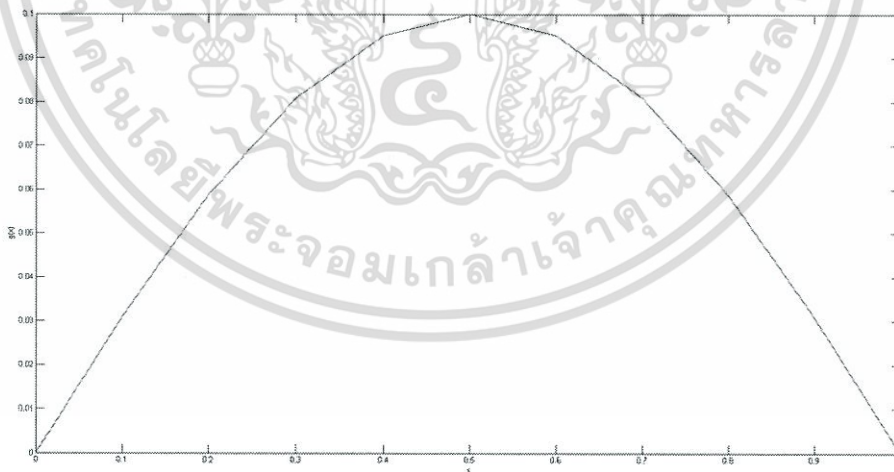
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบของปัญหาสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.21) และ (3.26)

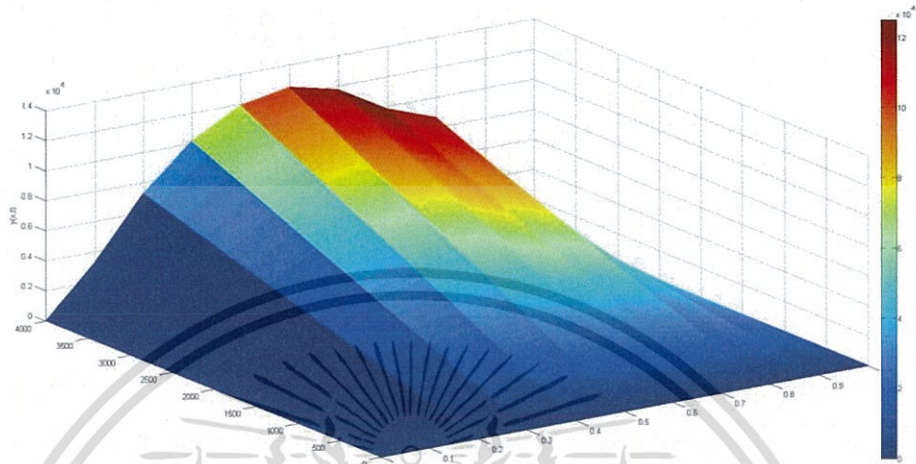
เนื่องจากที่  $g(x_i) = \sin \pi x_i$  แสดงกราฟ  $g(x_i)$  ดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 กราฟแสดงค่า  $g(x_i)$

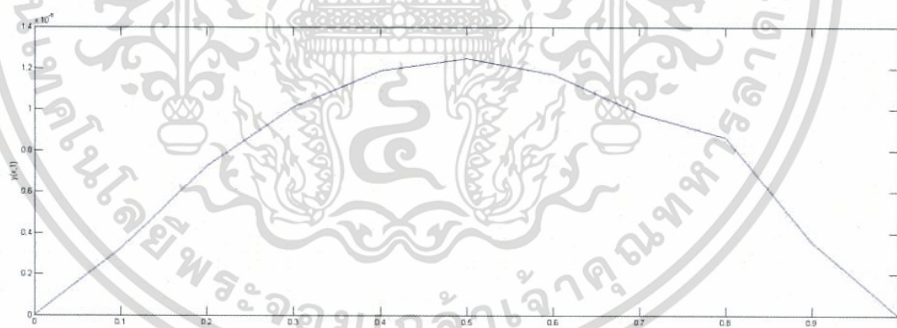
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือก  $h=0.1$  และ  $k=0.00025$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของการโค้งของคาน ณ ตำแหน่งใด ๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 การโค้งของคานหน้าตัดไม้แปรเปลี่ยน ณ ตำแหน่งใดๆ ในแต่ละช่วงเวลา

เมื่อเวลา  $t=1$  จะได้กราฟดังรูปที่ 4.18



รูปที่ 4.18 การโค้งของคานหน้าตัดไม้แปรเปลี่ยน ณ ตำแหน่งใดๆ ที่เวลาเป็น 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

## 5.1 สรุปผลการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยสมการคานหน้าตัดไม้แปรรูปและสมการคานหน้าตัดแปรรูป โดยได้ใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่และนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาคำนวณโดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งค่าที่ออกมาใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ โดยเมื่อพิจารณา ณ ตำแหน่งที่เป็นเงื่อนไขขอบ พบว่าความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ แต่ยังคงมีค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย ณ ตำแหน่งใดๆ อย่างไรก็ตามตามผลเฉลยโดยประมาณที่ได้มีค่าความคลาดเคลื่อน 3.8% ซึ่งอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้ ผู้วิจัยจึงนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้มาคำนวณในสมการที่หาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ยากหรือไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้

การรับค่า  $n$  และ  $t$  สำหรับการหาผลเฉลยเชิงเฉลยสมการคานหน้าตัดไม้แปรรูปและสมการคานหน้าตัดแปรรูป นั้นมีผลต่อการคำนวณในการประมาณค่า  $y(x,t)$  กล่าวคือ ถ้ารับค่า  $n$  และ  $t$  มากไปจะทำให้  $\Delta x$  มีความละเอียดมากทำให้ใช้เวลาในการคำนวณของโปรแกรมช้าและผลเฉลยที่นำมาเขียนกราฟละเอียดจนรูปไม่ชัดเจน แต่ถ้ารับค่า  $n$  และ  $t$  น้อยไป จะทำให้ผลเฉลยมีค่าความคลาดเคลื่อนมาก

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

จากวิทยานิพนธ์นี้ ได้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยสมการคานหน้าตัดไม้แปรรูปและสมการคานหน้าตัดแปรรูป ซึ่งสามารถทำได้เฉพาะในคานแบบยึดแน่น ซึ่งสำหรับผู้ที่ศึกษาในด้านนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับคานแบบอื่นๆได้ในอนาคตและนำไปพัฒนาระเบียบวิธีให้มีประสิทธิภาพต่อไป

## เอกสารอ้างอิง

- [1] A.S. Ackleh , H.T.Banks, G.A. Pinter. A Nonlinear Beam Equation. *Applied Mathematics Letters* 15 (2002);381-387.
- [2] Chung-Yau Lam. *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Singapore: Prentice Hall; 1994.
- [3] C.Y.Wang and C.M.Wang. *Structural Vibration*. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group; 2014.
- [4] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. *Advanced Engineering Mathematics*. 2<sup>nd</sup> ed. Sudbury: Jones and Bartlett Publishers; 2000.
- [5] Gere, James M. *Mechanics of materials*. London : Chapman & Hall; 1991.
- [6] K. S. Thankane, T. Stys. Finite Difference Method for Beam Equation with Free Ends Using Mathematica. *Southern Africa Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 4*;61-78(2009).
- [7] S Rao Gunakala, D.M.G.Comissiong, K.Jordan, Alana Sankar. A Finite Element Solution of the Beam Equation via MATLAB. *International Journal of Applied Science and Teachnology Vol 2.No.8*;2012.
- [8] สิริศักดิ์ ปิโยธรสิริ. กลศาสตร์วัสดุ. พิมพ์ครั้งที่2. กรุงเทพฯ: ว.พีเชอร์สกล, 2549



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก

ISSN 1686-0209

# THAI JOURNAL OF MATHEMATICS

Special Issue  
The 11th IMT-GT International Conference on Mathematics,  
Statistics and Its Applications 2015 (ICMSA 2015)



The Center for Promotion of Mathematical Research of Thailand



Sponsored by  
The Mathematical Association of Thailand  
Under the Patronage of His Majesty the King

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THAI JOURNAL OF MATHEMATICS  
 Special Issue on ICMSA2015 (2016) : 69-78  
<http://thaijmath.in.cmu.ac.th>  
 ISSN 1686-0209



## A Numerical Solution for Non-Uniform Beam Equation by Finite Difference Method

Kumponsak Boongoy<sup>1\*</sup> and Pakkinee Chitsakul<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science  
 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,  
 Bangkok 10520, Thailand  
 e-mail : aeriex27@gmail.com

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science  
 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,  
 Bangkok 10520, Thailand  
 e-mail : kopakkin@kmitl.ac.th

**Abstract :** In this work, we used finite difference method with the error  $O(h^4)$  for the deflection of the beam  $y(x,t)$  at any point  $x$  and any time  $t$  of the non-uniform beam equation with the Robbins condition. Some numerical results are compared to the exact solution.

**Keywords :** non-uniform beam equation, Robbins condition, finite difference method.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 65L12.

### 1 Introduction

One important application of linear differential equation is the study of the bending of beams. When a beam is bent, the fibers near the concave surface of the beam are compressed whereas the fibers near the convex surface are stretched. From the continuity of the beam, somewhere between the compression and tension regions, there exist surfaces of fibers which are neither compressed nor stretched. This is called the neutral surface of the beam, and the curve of any particular fiber in this surface is known as the elastic curve or deflection curve of the beam. The

<sup>\*</sup>Corresponding author.

Copyright © 2016 by the Mathematical Association of Thailand.  
 All rights reserved.

70

neutral axis is the line in which the neutral surface is cut by any plane cross section  $A(x)$  of the beam. The load per unit length  $\omega(x)$  at a general cross section makes a beam to bend. Let  $x$  denotes the distance of the section from the left end of the beam. The algebraic sum of all the transverse forces which act on the beam is the shear  $V(x)$  at any point along the beam. The bending moment  $M(x)$  of the beam is defined as the total moment produced at a general point along the beam by all forces.

It is know from the study of strength of materials that the curvature  $\kappa$  of the neutral surface of the beam can be express as:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{M(x)}{EI(x)},$$

where  $E$  is the young's modulus of elasticity of the material of the beam and  $I$  is the moment of inertia of the cross section area of the beam about the neutral axis which may be a function of  $x$ .

From elementary calculus the curvature of a plane curve at a point  $(x, y)$ , where  $y(x)$  is the deflection of the beam can be express as

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

In case of the elastic curve of a beam, the slope  $\frac{dy}{dx}$  is very small, therefore

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Here we get the second-order-differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \text{ or } EI(x)y''(x) = M(x).$$

If the beam bears only transverse loads, we get

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(EI(x)y''(x)) = V(x),$$

and

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2(EI(x)y''(x))}{dx^2} = -\omega(x).$$

By combining the relations above, we have

71

$$\omega(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right].$$

While the beam is vibrated the load per unit length on the beam consists of the external load  $f(x)$  and the inertia load due to the motion of the beam itself. Suppose that the deflection of the beam depends upon time  $t$  as well as upon position  $x$ . The mass of an infinitesimal segment of the beam of length  $\Delta x$  is approximately  $\rho A(x) \Delta x$ , and the transverse acceleration of such a mass element is  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .

Thus, the inertia load per unit length is

$$\frac{\rho A(x) \Delta x}{\Delta x} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Therefore, the total load per unit length is

$$\omega(x) = \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x).$$

Finally, we have the non-uniform beam equation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + f(x)$$

or 
$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x).$$

If the beam has constant cross section and there is no external load, that is  $A$  and  $I$  are constants and  $f(x) = 0$ , we get the simpler form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad a^2 = \frac{EI}{\rho A}.$$

In this case, there is no transverse acceleration therefore we get the Euler-Bernoulli equation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x).$$

The beam of length  $L$  is secured to the  $x$  axis at  $x=0$  and  $x=L$  for all time with the slope at these two ends is zero and the moment  $EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  at the free end is zero, we interpret these by the condition

72

$$\begin{aligned} y(0,t) = 0, & \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ y(L,t) = 0, & \quad \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Here we get the boundary value problem:

$$\text{Solve } \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, t > 0.$$

Subject to

$$\begin{aligned} y(0,t) = 0, & \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ y(L,t) = 0, & \quad \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad t > 0.$$

Studies of beam equations have a long history from the 14<sup>th</sup> Century by Leonardo Da Vinci and developed by Leonard Euler and Daniel Bernoulli in the 18<sup>th</sup> century. The beam equations are the important basis for engineering such as civil engineering in the construction of high-rise building, bridges across the rivers, mechanical engineering in the design of any vehicles. [1], [4]

In this work, we develop finite difference method for the deflection of the beam at any point of the non-uniform beam equation. Some numerical results are compared to the exact solution.

## 2 The Governing Equation

We consider the non-uniform beam equation with the length 1 by suppose  $\rho A(x) = 1$  and  $EI(x) = r(x)$ .

Thus, the beam equation in this work is governed by the fourth order partial differential equation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ r(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = f(x). \quad (2.1)$$

Subject to the free end condition

$$\begin{aligned} y(0,t) = 0, & \quad y''(0,t) = a, \\ y(1,t) = 0, & \quad y''(1,t) = b. \end{aligned} \quad (2.2)$$

The external load is considered only as the function of  $x$ .

We rewrite (2.1) into the system of equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= f(x), \\ r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= v, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + u(x) &= 0,\end{aligned}\quad (2.3)$$

### 3 Finite difference method

Using central difference with error  $O(h^4)$  for  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  and using central difference with error  $O(h^2)$  for  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  in (2.3), [2], [3]

We have

$$x_i = i \times h, \quad h = \frac{L}{n+1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Delta u_i + O(h^4), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \Delta v_i + O(h^4), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Delta y_i + O(h^2)$$

for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Here, we get the finite difference scheme

$$\Delta u_i = \frac{-u_{i+2} - u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12h^2}$$

$$\Delta v_i = \frac{-v_{i+2} - v_{i+1} - 30v_i + 16v_{i-1} - v_{i-2}}{12h^2}$$

$$y_i^1 = \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0), \text{ when } n > 0,$$

$$y_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n,$$

Thus

$$v_{-1} = 0, v_0 = a$$

$$\frac{-v_{i+2}^0 + 16v_{i+1}^0 - 30v_i^0 + 16v_{i-1}^0 - v_{i-2}^0}{12h^2} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$v_{n+1} = b, v_{n+2} = 0$$

74

and

$$u_{-1} = 0, u_0 = 0$$

$$\frac{-u_{i+2}^0 + 16u_{i+1}^0 - 30u_i^0 + 16u_{i-1}^0 - u_{i-2}^0}{12h^2} = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_{n+1} = 0, u_{n+2} = 0$$

substitute  $v_{-1}, v_0, v_{n+1}, v_{n+2}$  and  $u_{-1}, u_0, u_{n+1}, u_{n+2}$ , we get at  $n = 0$

$$\frac{-v_3^0 + 16v_2^0 - 30v_1^0}{12h^2} = -16a + f(x_1)$$

$$\frac{-v_4^0 + 16v_3^0 - 30v_2^0 + 16v_1^0}{12h^2} = a + f(x_2)$$

$$\frac{-v_{i+2}^0 + 16v_{i+1}^0 - 30v_i^0 + 16v_{i-1}^0 - v_{i-2}^0}{12h^2} = f(x_i), \quad i = 3, 4, \dots, n-2,$$

$$\frac{16v_n^0 - 30v_{n-1}^0 + 16v_{n-2}^0 - v_{n-3}^0}{12h^2} = b + f(x_{n-1})$$

$$\frac{-30v_n^0 + 16v_{n-1}^0 - v_{n-2}^0}{12h^2} = -16b + f(x_n)$$

and

$$\frac{-u_3^0 + 16u_2^0 - 30u_1^0}{12h^2} = v_1$$

$$\frac{-u_4^0 + 16u_3^0 - 30u_2^0 + 16u_1^0}{12h^2} = v_2$$

$$\frac{-u_{i+2}^0 + 16u_{i+1}^0 - 30u_i^0 + 16u_{i-1}^0 - u_{i-2}^0}{12h^2} = v_i, \quad i = 3, 4, \dots, n-2,$$

$$\frac{16u_n^0 - 30u_{n-1}^0 + 16u_{n-2}^0 - u_{n-3}^0}{12h^2} = v_{n-1}$$

$$\frac{-30u_n^0 + 16u_{n-1}^0 - u_{n-2}^0}{12h^2} = v_n$$

From  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , we have  $\frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{\Delta t^2} = k^2 \left[ \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right]$

or

$$y_i^{n+1} = -y_i^{n-1} + R^2(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + 2(1 - R^2)u_i^n,$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

when

$$R = k \frac{\Delta t}{\Delta x}; k > 0$$

at  $n = 0$ , we have  $y_i^1 = -y_i^{-1} + R^2(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + 2(1 - R^2)u_i^0$

from the central difference we get

$$\frac{y_i^1 - y_i^{-1}}{2\Delta t} = g(x_i),$$

$$y_i^{-1} = y_i^1 - 2\Delta t g(x_i)$$

thus

$$y_i^1 = \frac{R^2}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + (1 - R^2)u_i^0 + \Delta t g(x_i)$$

if  $R = \frac{1}{2}$ ,  $y_i^1 = \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + \Delta t g(x_i)$  and

$$y_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n; n > 0.$$

Rewrite  $u$  and  $v$  in the matrix form

$$M(V) = F(U)$$

$$M(U) = G(V)$$

where

$$M = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} -30 & 16 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -30 & 16 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 16 & -30 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 16 & -30 \end{bmatrix}$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} -16a + f(x_1) \\ a + f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ b + f(x_{n-1}) \\ -16b + f(x_n) \end{bmatrix}, \quad G(V) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

76

The following examples illustrate the finite difference method as we have been shown.

**Example 1.** Consider the uniform beam equation [5], [6]

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \pi^4 \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

With the boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 2\pi,$$

$$u(1) = 0, \quad u''(1) = 2\pi.$$

The exact solution of this problem is  $y(x) = x \sin \pi x - \pi x^2 + 4\pi x^3 - 5\pi x^4 + 2\pi x^5$ .

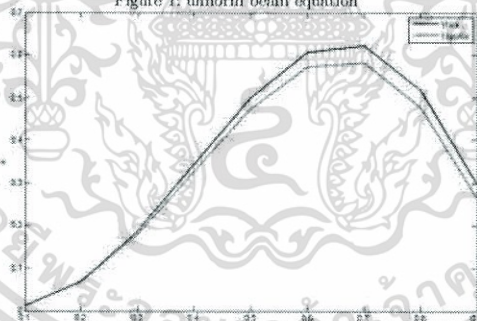
By using finite difference method with MATLAB for solving the beam equation with the number of interior mesh point  $n = 9$ . We get the results and compare to the exact solution as shown in Table 1 and Figure 1 with the global error

$$\text{globalError} = \max_{1 \leq i \leq 9} |y_{\text{approx}}(x_i) - y_{\text{true}}(x_i)| = 0.0405$$

Table 1

| $x_i$                    | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 0.9    |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $y_{\text{true}}$        | 0.0105 | 0.0693 | 0.1873 | 0.3442 | 0.5    | 0.6068 | 0.6217 | 0.5185 | 0.2985 |
| $y_{\text{approx}}$      | 0.0121 | 0.0684 | 0.1799 | 0.3279 | 0.4740 | 0.5724 | 0.5818 | 0.4780 | 0.2653 |
| $\text{error}(\epsilon)$ | 0.0016 | 0.0009 | 0.0074 | 0.0163 | 0.0260 | 0.0344 | 0.0399 | 0.0405 | 0.0332 |

Figure 1: uniform beam equation



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In case of the non-uniform it is difficult to find the relevant solution thus we use the finite difference method as in the Example 2

**Example 2.** Find the solution of the beam equation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \pi^4 \sin \pi x - 4\pi^3 \cos \pi x,$$

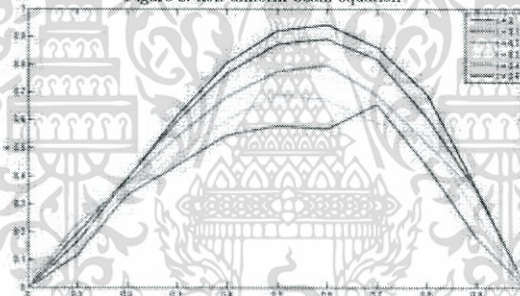
we define  $r(x) = x$ .

Subject to the condition

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0, & \quad y''(0, t) = 0, & \quad y_t(0, 0) = 0, \\ y(1, t) = 0, & \quad y''(1, t) = 0, \end{aligned}$$

by using MATLAB for solving the beam equation with the number of interior mesh point  $n = 9$ . We get the results as shown in Figure 2.

Figure 2: non-uniform beam equation



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4 Conclusion

We have proposed the finite difference method implemented by MATLAB to the non-uniform beam equation with the transverse acceleration. The function of transverse displacement  $y(x,t)$  is governed by the variation of the elastic modulus and the moment of inertia as a function of  $x$  and the applied load is defined by  $f(x)$ . Using the method in this paper we would like to consider the non-uniform beam equation with the applied load is defined by  $f(x,y)$ . This is the further step of our research.

#### References

- [1] A.S. Ackleh , H.T.Banks, G.A. Pinter. A Nonlinear Beam Equation. Applied Mathematics Letters 15 (2002);331-337.
- [2] Chung-Yau Lam. Applied Numerical Methods for Partial Differential Equations. Singapore: Prentice Hall; 1994.
- [3] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. Advanced Engineering Mathematics. 2- ed. Sudbury: Jones and Bartlett Publishers; 2000.
- [4] Gere, James M. Mechanics of materials. London : Chapman & Hall; 1991.
- [5] K. S. Thankane, T. Stys. Finite Difference Method for Beam Equation with Free Ends Using Mathematica. Southern Africa Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 4;61-78(2009).
- [6] S Rao Gunakala, D.M.G.Comissiong, K.Jordan, Alana Sankar. A Finite Element Solution of the Beam Equation via MATLAB. International Journal of Applied Science and Technology Vol 2.No.8;2012.

(Received 11 October 2015)

(Accepted 31 January 2016)

## ภาคผนวก ข

การหาผลเฉลยของสมการคานน้ำหนักไม่แปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

```

n = input('round of calculation : ');//รับจำนวนรอบ
    fprintf('*****\n\n');
L = input('ระยะ : ');//ระยะของคาน รับเป็น 1หน่วยเสมอ
    fprintf('*****\n\n');
    h=L/(n+1); //step size
d=6*(h^4);
GG = zeros(n,n);

h1 =68+2*h;

A1 = [h1, -39,12,-1,0,0;
      -40, 56, -39, 12,-1,0;
      12, -39, 56, -39, 12, -1];

An = [-1, 12, -39, 56, -39, 12;
      0 ,-1, 12, -39, 56, -40;
      0, 0, -1, 12, -39, h1];

for i=1:3
    for j =1:6
        GG(i,j) = A1(i,j);
    end
end

//จัดให้อยู่ในรูปสมการที่ (3.8)

i1=1;
j1=1;
for i=n-2:n
    for j =n-5:n
        if (i1<=3) && (j1<=6)
            GG(i,j) = An(i1,j1);
        end
    end
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

        j1= j1+1;
    end
    i1 = i1+1;
    j1 = 1;
end

GG(4,1) = -1;
GG(4,2) =12;
GG(4,3) = -39;
GG(4,4) = 56;
GG(4,5) = -39;
GG(4,6) = 12;
GG(4,7) = -1;

for i = 5:n-3
    for j = 2: n
        GG(i,j) = GG(i-1,j-1);
    end
end
G1 = GG/d;
for i=1:n
    x1(i)=i*h;
    f1(i,1) = ((pi^4)*x(i)*sin(pi*x(i))-4*(pi^3)*cos(pi*(x(i)))) ///แรงจากภายนอก
end
v = G1\f1;/// คำสั่งหาผลเฉลย
TT = zeros(n+2,1);
for i=1:n
    TT(i+1)=v(i);
end
disp(TT);
hold on;
plot(TT);/// plot graph

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่

```
n = input('round of calculation : ');//รับจำนวนรอบ
    fprintf('*****\n\n');
L = input('ระยะ : ');// ระยะของคานรับเป็น1หน่วย
    fprintf('*****\n\n');
    h=L/(n+1); //step size
d=6*(h^4);
GG = zeros(n,n);
h1 = 68+2*h;
A1 = [h1, -39,12,-1,0,0;
      -40, 56, -39, 12,-1,0;
      12, -39, 56, -39, 12, -1];

An = [-1, 12, -39, 56, -39, 12;
      0 ,-1, 12, -39, 56, -40;
      0, 0, -1, 12, -39, h1];
for i=1:3
    for j=1:6
        GG(i,j) = A1(i,j);
    end
end
i1=1;
j1=1;
for i=n-2:n
    for j =n-5:n
        if (i1<=3) && (j1<=6)
            GG(i,j) = An(i1,j1);
        end
        j1= j1+1;
    end
    i1 = i1+1;
    j1 = 1;
end
```

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.8)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

GG(4,1) = -1;
GG(4,2) = 12;
GG(4,3) = -39;
GG(4,4) = 56;
GG(4,5) = -39;
GG(4,6) = 12;
GG(4,7) = -1;
for i = 5:n-3
    for j = 2: n
        GG(i,j) = GG(i-1,j-1);
    end
end
G1 = GG/d;
for i=1:n
    for j=1: n
        G2(i,j)= (i*h)*G1(i,j);    ///r(x)=x สมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยน
    end
end
for i=1:n
    x1(i)=i*h;
    f1(i,1) = ((pi^4)*x(i)*sin(pi*x(i))-4*(pi^3)*cos(pi*(x(i)))) ///แรงจากภายนอกตัวอย่างที่1
    f2(i,1) = sin(pi*x1(i));///แรงจากภายนอกตัวอย่างที่2
end

v = G2\f1;
v2=G2\f2;    }   หาผลเฉลย

TT = zeros(n+2,1);
for i=1:n
    TT(i+1)=v(i);
end
disp(TT);

TT2 = zeros(n+2,1);

for i=1:n
    TT2(i+1)=v2(i);
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

disp(TT2);
hold on;
plot(TT);
hold on;
plot(TT2);

```

} plot graph

การหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดไม้แปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการเชิงอนุพันธ์  
อันดับสี่ขึ้นกับเวลา

```

n = input('round of calculation : ');//รับจำนวนรอบ
    fprintf('*****\n\n');
L = input('ระยะ : ');//ระยะรับเป็น1หน่วย
    fprintf('*****\n\n');
h=L/(n+1); //step size ระยะ
m = input('m : ');//จำนวนรอบเวลา
    fprintf('*****\n\n');
k = L/(m+1);//step size เวลา

deltaT = k^2;
deltaX=6*(h^4);
lamda = 0.1*(deltaT/deltaX);//ค่า λ
GG = zeros(m,n);
for i = 1: n
    x1(i)=i*h;
    f(1,i) =(sin(pi*x1(i)))/10;
    f(1,i) =%((pi^4)*x1(i)*sin(pi*x1(i))-4*(pi^3)*cos(pi*(x1(i))))/10; } แรจจากภายนอกตัวอย่างที่1และ2
end
disp(f)
for i=1:n
    x1(i)=i*h;
    GG(1,i) =0;//เงื่อนไขเริ่มต้น
end
for j=2:m+1
    for i=1:n
        if(i==1)
            GG(j,1) = 0.5*(deltaT*f(1,i)-((68*lamda)+(2*lamda*h)-2)*GG(j-1,i))+((39*lamda)*GG(j-
1,2))-((12*lamda)*GG(j-1,3))+lamda*GG(j-1,4));

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

if(i==2)
    GG(j,2) = 0.5*(deltaT*f(1,i)+((40*lamda)*GG(j-1,i-1))-(((56*lamda)-2)*GG(j-
1,2))+((39*lamda)*GG(j-1,3))-(12*lamda)*GG(j-1,4)+(lamda*GG(j-1,5)));
end
if(i==3)
    GG(j,3) = 0.5*(deltaT*f(1,i)-((12*lamda)*GG(j-1,i-2))+((39*lamda)*GG(j-1,2))-((56*lamda)-
2)*GG(j-1,3))+((39*lamda)*GG(j-1,4))-(12*lamda)*GG(j-1,5)+(lamda*GG(j-1,6)));
end
if(i>=4&&i<=(n-3))
    GG(j,i) = 0.5*(deltaT*f(1,i)+(lamda*GG(j-1,i-3))-((12*lamda)*GG(j-1,i-2))+((39*lamda)*GG(j-
1,i-1))-((56*lamda)-2)*GG(j-1,i))+((39*lamda)*GG(j-1,i+1))-((12*lamda)*GG(j-1,i+2)+(lamda*GG(j-
1,i+3)));
end
if(i==n-2)
    GG(j,n-2) = 0.5*(deltaT*f(1,i)-((12*lamda)*GG(j-1,i))+((39*lamda)*GG(j-1,n-1))-((56*lamda)-
2)*GG(j-1,n-2))+((39*lamda)*GG(j-1,n-3))-((12*lamda)*GG(j-1,n-4)+(lamda*GG(j-1,n-5)));
end
if(i==n-1)
    GG(j,n-1) = 0.5*(deltaT*f(1,i)+((40*lamda)*GG(j-1,i))-(((56*lamda)-2)*GG(j-1,n-
1))+((39*lamda)*GG(j-1,n-2))-((12*lamda)*GG(j-1,n-3)+(lamda*GG(j-1,n-4)));
end
if(i==n)
    GG(j,n) = 0.5*(deltaT*f(1,i)-(((68*lamda)+(2*lamda*h)-2)*GG(j-1,n))+((39*lamda)*GG(j-
1,n-1))-((12*lamda)*GG(j-1,n-2)+(lamda*GG(j-1,n-3)));
End//////////วิธีคำนวณตามสมการที่ใช้
end
end
disp(GG);///แสดงผลเฉลย

```

```

hold on;
plot(GG);
mesh(GG)
} plot graph

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัติผู้เขียน

|                  |                                                                                            |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| ชื่อ             | นายกำพลศักดิ์ บุญโกย                                                                       |
| วัน เดือน ปีเกิด | 27 เมษายน 2532                                                                             |
| ที่อยู่ปัจจุบัน  | กรุงเทพมหานคร                                                                              |
| ประวัติการศึกษา  | วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์<br>สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |
| ผลงานทางวิชาการ  | 1. A Numerical Solution for Non-Uniform Beam Equation by Finite Difference Method          |



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้