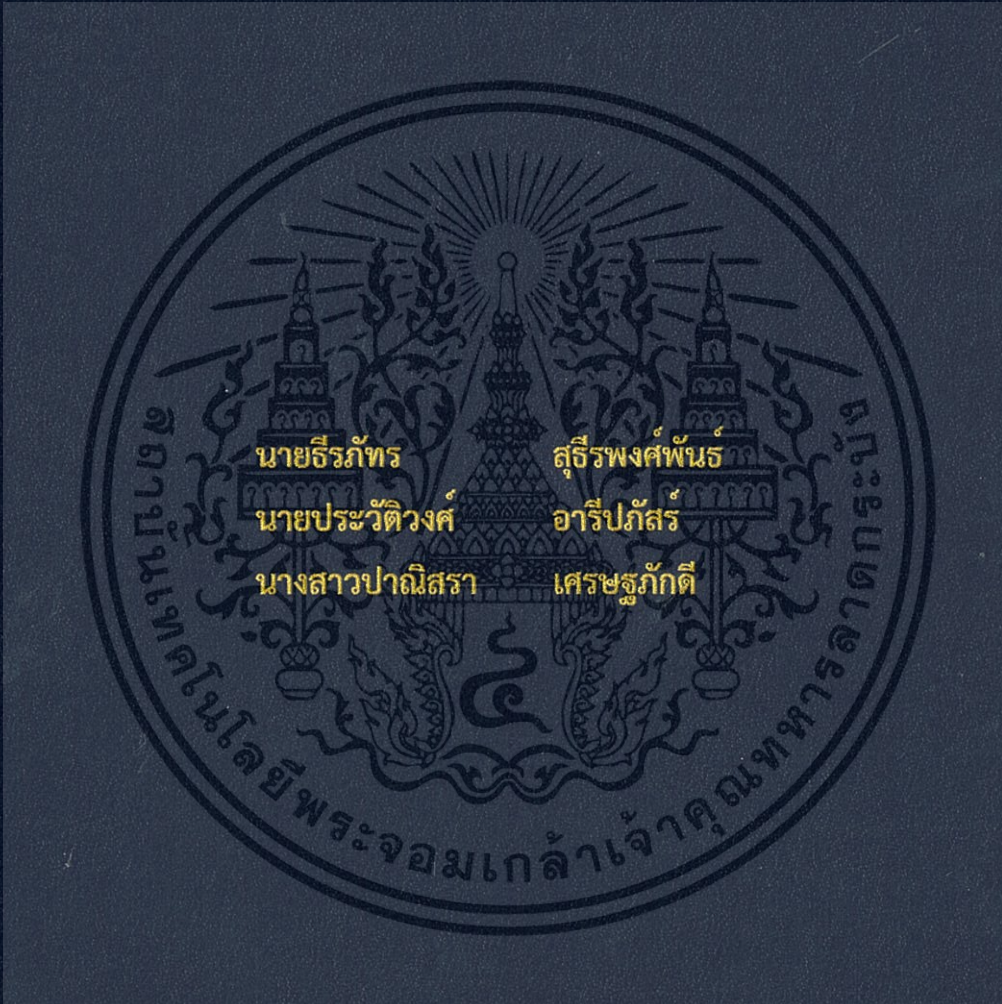


การวิเคราะห์ความเค้นที่แตะสัมผัสระหว่างล้อและรางภายใต้สภาวะปกติ

ANALYSIS OF CONTACT PRESSURE IN RAIL-WHEEL INTERFACE UNDER  
NORMAL CONDITIONS



นายธีรภัทร สุธีรพงศ์พันธ์  
นายประวิตวงศ์ อารีปภัสร  
นางสาวปาณิสรา เศรษฐภักดี

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

# สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การวิเคราะห์ความดันที่แตะสัมผัสระหว่างล้อและรางภายใต้สภาวะปกติ

ANALYSIS OF CONTACT PRESSURE IN RAIL-WHEEL INTERFACE UNDER  
NORMAL CONDITIONS



T143867

นายธีรภัทร

สุธีรพงศ์พันธ์

นายประวิตวงศ์

อารีปภัทร์

นางสาวปานิสร่า

เศรษฐภักดิ์

✓พ  
ค 636 ก

เลขหมู่... 2558  
เลขทะเบียน... 143867  
วัน,เดือน,ปี 10 4 ๒๕๕9

b. ๑๐๐๕๕๕  
i. ....

ปริญญาานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การวิเคราะห์ความดันที่สัมผัสระหว่างล้อและรางภายใต้สภาวะปกติ

ANALYSIS OF CONTACT PRESSURE IN RAIL-WHEEL INTERFACE UNDER  
NORMAL CONDITIONS



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ANALYSIS OF CONTACT PRESSURE IN RAIL-WHEEL INTERFACE UNDER  
NORMAL CONDITIONS



TEERAPAT	SUTEERAPONGPUN	55010584
PRAWATWONG	AREEPAPHAT	55010714
PANISARA	SRETHAPAKDI	55010758

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
BACHELOR OF ENGINEERING IN MECHANICAL ENGINEERING  
FACULTY OF ENGINEERING  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญาานิพนธ์ปีการศึกษา 2558

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง การวิเคราะห์ความดันที่แตะสัมผัสระหว่างล้อและรางภายใต้สภาวะปกติ

ANALYSIS OF CONTACT PRESSURE IN RAIL-WHEEL INTERFACE UNDER NORMAL  
CONDITIONS

ผู้จัดทำ

- |                   |                |                       |
|-------------------|----------------|-----------------------|
| 1. นาย ธีรภัทร    | สุธีรพงศ์พันธ์ | รหัสประจำตัว 55010584 |
| 2. นาย ประวิตวงศ์ | อารีปภัทร์     | รหัสประจำตัว 55010714 |
| 3. นางสาว ปาณิสรา | เศรษฐภักดิ์    | รหัสประจำตัว 55010758 |

อาจารย์ที่ปรึกษา

( รศ.ดร.มงคล มงคลวงศ์โรจน์ )

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## การวิเคราะห์ความดันที่สัมผัสระหว่างล้อและรางภายใต้สภาวะปกติ

นาย ธีรภัทร	สุธีรพงศ์พันธ์	55010584
นาย ประวิตวงศ์	อารีภักดิ์	55010714
นางสาว ปาณิสรา	เศรษฐภักดิ์	55010758
รศ.ดร. มงคล	มงคลวงศ์โรจน์	อาจารย์ที่ปรึกษา ปีการศึกษา 2558

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองพฤติกรรมการกดอัดของจุดสัมผัสระหว่างล้อและรางภายใต้สภาวะปกติเพื่อใช้ในการหาการกระจายความดันที่ผิวสัมผัสที่ต้องการศึกษาเริ่มจากการสร้างแบบจำลองของล้อและรางรถไฟ (Wheel-Rail Profile) และจำลองพฤติกรรมของล้อและรางเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ โดยพิจารณาให้เป็นการยุบตัวแบบอีลาสติก (Elastic Deformation) และมีคุณสมบัติของวัสดุเป็นแบบไอเซนโทรปิก (Isotropic) การคำนวณการกระจายความดันที่ผิวสัมผัสในกรณีทั่วไปมีความซับซ้อนและไม่มีวิธีวิเคราะห์แบบสำเร็จ (analytical solutions) จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) ในการหาการกระจายแรงดันที่แท้จริง

ในบทความนี้ได้ยกตัวอย่างผลการคำนวณจากโปรแกรมด้วยวิธีเชิงตัวเลข และนำผลที่ได้จากโปรแกรมมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้ตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz Theory) พบว่าการคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลขจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมามีความแม่นยำสูงกว่าตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ โดยพิจารณาจากเงื่อนไขของรูปทรงหลังจากมีแรงมากระทำ (Error of Geometry) และสมดุลแรง (Load Balance)

การศึกษาเกี่ยวกับความดันบริเวณพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบและพัฒนารูปทรงของรางเพื่อให้สามารถยืดอายุการใช้งานได้ยาวนานขึ้น และยังสามารถลดงบประมาณด้านการบำรุงรักษาล้อและรางอีกด้วย

ปีที่จบ ๓๐๖๒๕๖

## ANALYSIS OF CONTACT PRESSURE IN RAIL-WHEEL INTERFACE UNDER NORMAL CONDITIONS

Teerapat	Suteerapongpun	55010584
Prawatwong	Areepaphat	55010714
Panisara	Srethapakdi	55010758
Assoc.Prof.Dr.Mongkol	Mongkolwongroj	Advisor
Year 2558		

### ABSTRACT

The aim of this research is to develop a computer program to simulate the behavior of the real contact between wheel and rail under normal conditions in order to find the real contact pressure distribution properly. The study begins with the development of wheel and rail model and then simulate the contact behavior of wheel and rail in the contact region under external loads. In this study, isotropic and elastic of material were simplified in the calculation of real pressure distribution in the contact region. Since no analytical solution has been available. Therefore, it is necessary to solve numerically in order to find real contact pressure.

This research has given example cases of the calculation results from the numerical method program. The results of the program were compared with results from theoretical (Hertz's Theory) and the results showed that numerical method program give a higher accuracy than that the Hertz's theory; considering conditions of geometry under elastic deformation and load balance.

The study of pressure distribution between wheel and rail interface is needed to improve the rail shape in order not only to extend its lifetime but also to reduce maintenance cost.

## กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี ก็เพราะด้วยความเอาใจใส่ แนะนำ และช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ เสมอมาจาก รศ.ดร.มงคล มงคลวงศ์โรจน์ อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.มนศักดิ์ พิมสาร และ นายสิริพงษ์ ดาวเจริญพร ที่ปรึกษาร่วม ต้องขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

และต้องขอขอบพระคุณบุคคลสำคัญที่สุดที่ทำให้ข้าพเจ้ามีวันนี้ ก็คือ บิดา มารดา อันเป็นที่เคารพรักยิ่ง ซึ่งได้เลี้ยงดูผู้เขียนมาเป็นอย่างดี พร้อมทั้งให้โอกาสในการศึกษาอย่างเต็มที่ และยังให้กำลังใจ เอาใจใส่เสมอมา ในทุก ๆ ด้านอันหาที่เปรียบมิได้ ข้าพเจ้าขอระลึกในพระคุณอันสุดประมาณ และขอกราบขอบพระคุณมา ณ ที่นี้



# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย .....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 สมมุติฐานการศึกษา.....	2
1.4 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในงานวิจัย.....	2
1.4.1 ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์.....	2
1.4.2 การหาการกระจายความเค้นที่ผิวสัมผัสระหว่างล้อกับรางโดยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method).....	5
1.4.3 การแปลงสมการเป็น Numerical Method.....	5
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	7
1.6 ขั้นตอนของการศึกษา.....	7
บทที่ 2 วิธีดำเนินการวิจัย.....	8
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
2.2 วิธีดำเนินการวิจัย.....	9
2.2.1 การดำเนินการวิจัยโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz theory).....	9
2.2.2 การดำเนินการวิจัยโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method).....	12
2.3 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	16
2.3.1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory).....	16
2.3.1.1 แบบจำลองรูปร่างระยะของล้อและรางก่อนมีแรงกระทำ(Rigid Separation).....	16

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.3.1.2 แบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution).....	17
2.3.1.3 แบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation).....	18
2.3.1.4 รูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry).....	19
2.3.2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method).....	20
2.3.2.1 แบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution).....	20
2.3.2.2 แบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation).....	21
2.3.2.3 รูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry).....	21
2.4 วิจารณ์ และอภิปรายผล.....	23
2.4.1 เปรียบเทียบผลการทดลองโดยใช้ทฤษฎีเฮิร์ตซ์ (Hertz Theory) และผลการทดลองโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) ด้วยโปรแกรม MatLAB.....	23
บทที่ 3 สรุปผลการวิจัย.....	26
3.1 สรุปผลการวิจัยดำเนินงาน.....	26
3.1.1 ผลต่างของการกระจายความดันและการยุบตัวของพื้นที่ผิวสัมผัสระหว่าง ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์และวิธีการเชิงตัวเลข.....	26
3.1.2 วิเคราะห์ข้อดีของการใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) ในการคำนวณ.....	26
3.2 ประโยชน์ของโปรแกรมในการนำไปใช้คำนวณค่าความดันสูงสุดเมื่อเปลี่ยนค่ารัศมีความโค้ง ของรางรถไฟ.....	27
3.3 ข้อเสนอแนะ.....	28
ภาคผนวก.....	29
เอกสารอ้างอิง.....	35

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
ตารางที่ 1. Hertz Coefficients.....	8
ตารางที่ 2. เปรียบเทียบการกระจายความดันและการยุบตัวของพื้นที่ผิวสัมผัสระหว่างทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ และวิธีการเชิงตัวเลข.....	26



## สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
รูปที่ 1 .แสดงพื้นที่ผิวสัมผัสระหว่างล้อและราง.....	3
รูปที่ 2 .แสดงการยุบตัวตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz theory).....	3
รูปที่ 3 โปรแกรมแมทแลป (MatLAB).....	12
รูปที่ 4 ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรมแมทแลป (MatLAB).....	12
รูปที่ 5a แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะของล้อและรางโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์.....	16
รูปที่ 5b แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะของล้อและรางโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ในระนาบ X-Y.....	16
รูปที่ 6 แสดงแบบจำลองการกระจายความดันโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์.....	17
รูปที่ 7 แสดงแบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์.....	18
รูปที่ 8a แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์.....	19
รูปที่ 8b แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางในระนาบ X-Y โดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์.....	19
รูปที่ 9 แสดงแบบจำลองการกระจายความดันโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข.....	20
รูปที่ 10. แสดงแบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข.....	21
รูปที่ 11a. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข.....	21
รูปที่ 11b. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางในระนาบ X-Y โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข.....	22
รูปที่ 12. แสดงแบบจำลองเปรียบเทียบการกระจายความดันระหว่างทฤษฎีของเฮิร์ตซ์กับวิธีการเชิงตัวเลข.....	23
รูปที่ 13 แสดงแบบจำลองเปรียบเทียบการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์และวิธีการเชิงตัวเลข.....	24
รูปที่ 14. แสดงแบบจำลองการเปรียบเทียบรูปร่างระยะห่างของล้อและรางในระนาบ X-Y โดยใช้ทฤษฎีเฮิร์ตซ์และวิธีการเชิงตัวเลข.....	25
รูปที่ 15. แสดงการเปลี่ยนแปลงของความดันสูงสุดเมื่อรัศมีของรางมีการเปลี่ยนแปลง.....	27

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันระบบการขนส่งทางรางเป็นระบบการขนส่งทางหนึ่งที่มีความสำคัญและได้รับความนิยมเป็นอย่างมากเนื่องจากความรวดเร็ว, มีค่าใช้จ่ายไม่สูงมากนักและสามารถเคลื่อนย้ายคนและสิ่งของได้ปริมาณมากในแต่ละครั้ง จากการศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับระบบการขนส่งทางรางในประเทศไทยจะพบว่าปัญหาหลักปัญหาหนึ่งที่พบมากคือปัญหาการสึกหรอที่เกิดขึ้นเนื่องจากสัมผัสกันของล้อและราง ส่งผลให้เกิดค่าใช้จ่ายในการบำรุงรักษา

เราสามารถอธิบายพฤติกรรมการสัมผัสกันระหว่างล้อและรางรวมทั้งแรงที่เกิดขึ้นขณะหยุดนิ่งได้ โดยเมื่อวัตถุสัมผัสกันจะเกิดแรงกระทำต่อกันซึ่งแรงที่เกิดขึ้นนั้นจะทำให้วัตถุทั้งสองชิ้นเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างบริเวณพื้นผิวสัมผัส และเกิดความดันระหว่างพื้นผิวสัมผัส การศึกษาความดันและลักษณะการกระจายความดันระหว่างผิวสัมผัสทำให้เราเข้าใจลักษณะทางธรรมชาติของล้อและรางมากยิ่งขึ้น

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาความดันสัมผัสที่เกิดขึ้น ณ จุดสัมผัสระหว่างล้อและรางโดยใช้วิธีเชิงตัวเลข(Numerical Method) โดยเริ่มศึกษาจากรูปร่าง (Profile) ของล้อและรางภายใต้เงื่อนไขปกติไม่มีความเร็วและไม่มีความกระทำ จากนั้นพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของรูปร่างหรือการยุบตัว (Deformation) และรูปร่างของล้อและรางหลังจากที่มีแรงมากระทำ (Geometry) เพื่อใช้หาการกระจายความดันที่ผิวสัมผัสรวมถึงการทดลองปรับรูปร่าง (Profile) ของรางรถไฟ เพื่อหาผลของความดันสัมผัสสูงสุดที่เปลี่ยนแปลงไป โดยมีจุดประสงค์เพื่อการยืดอายุการใช้งานของล้อและรางให้ยาวนานขึ้น

## 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

การทำงานวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อต้องการสร้างโปรแกรมที่สามารถคำนวณหาการกระจายความดันที่ผิวสัมผัสระหว่างล้อรถไฟกับรางรถไฟ เพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาอิทธิพลอื่นที่มีผลต่ออายุการใช้งานล้อและรางของรถไฟ สามารถสรุปได้ดังนี้

1. เพื่อศึกษาลักษณะรูปร่างบริเวณพื้นผิวสัมผัสระหว่างล้อและรางหลังจากมีแรงมากระทำ
2. เพื่อคำนวณหาแบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution) ตามหลักทฤษฎี
3. เพื่อพัฒนาโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณหาแบบจำลองการกระจายความดันแท้จริง (Real Pressure Distribution) ด้วยวิธีการเชิงตัวเลข โดยใช้โปรแกรมแมทแลป (MatLAB) ในการคำนวณ
4. เพื่อปรับปรุงรูปร่างของรางให้เหมาะสมและสามารถยืดอายุการใช้งานของล้อและรางได้

## 1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

สามารถเขียนโปรแกรมคำนวณหาความเค้นบริเวณผิวสัมผัสระหว่างล้อและรางของรถไฟได้อย่างแม่นยำโดยพิจารณาว่า

1. ล้อและรางมีการยุบตัวแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Deformation is totally Elastic)
2. พิจารณาที่ Steady State และรถไฟหยุดนิ่ง
3. รูปร่างที่จุดสัมผัสมีความต่อเนื่อง
4. ล้อและรางมีลักษณะแบบ Isotropic Property

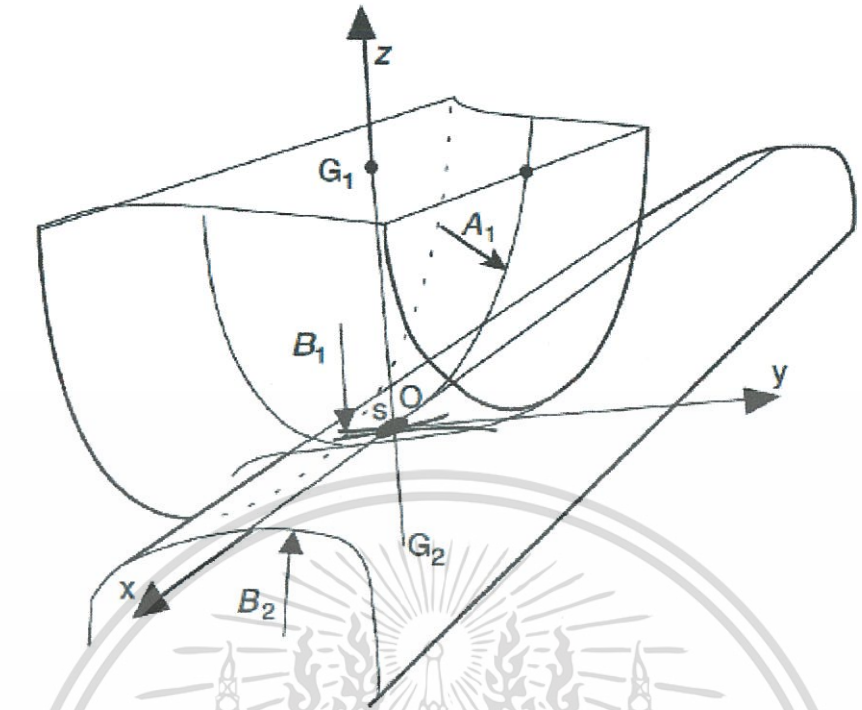
## 1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

### 1.4.1. ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory)

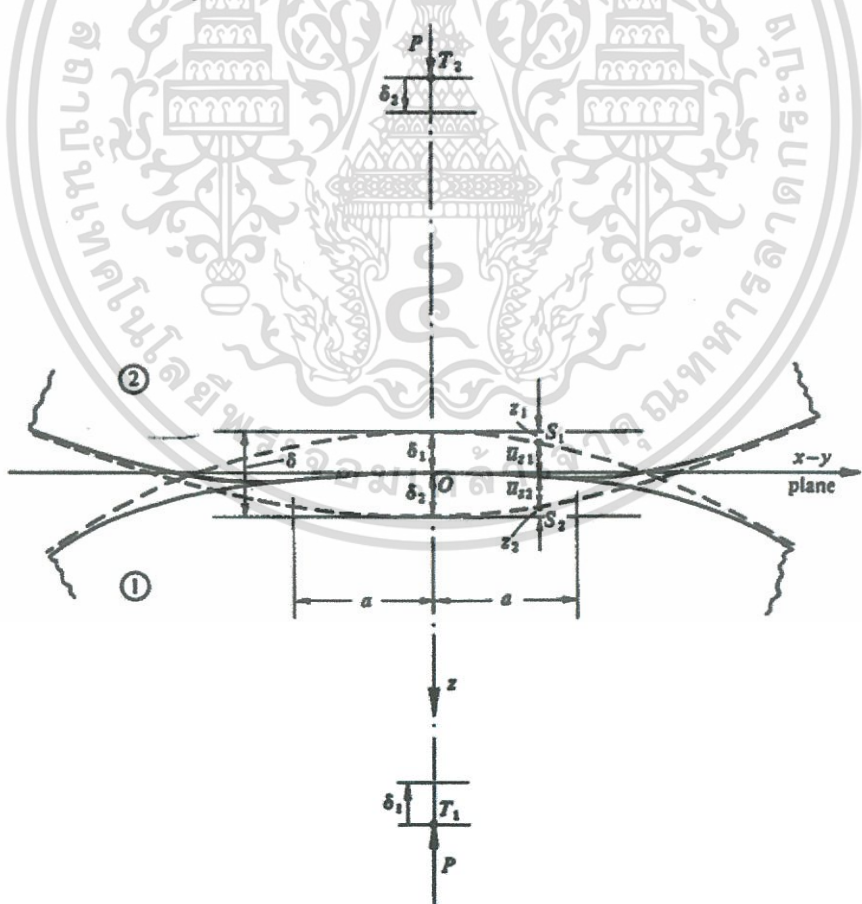
ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ศึกษาเกี่ยวกับการสัมผัสกันของวัตถุที่โดยมีเงื่อนไขคือ

1. พฤติกรรมแบบยืดหยุ่น (Elastic Behavior)
2. มีรัศมีความโค้งมากเมื่อเทียบกับพื้นผิวสัมผัส
3. พื้นที่สัมผัสมีความโค้งคงที่
4. มีขอบเขตแบบกึ่งไม่มีที่สิ้นสุด (Semi-Infinite spaces) ซึ่งเมื่อเกิดการกดเข้าหากันของวัสดุสองชิ้นจะทำให้เกิดพื้นที่สัมผัสเป็นรูปวงรีดังรูปที่ 1.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 1. แสดงพื้นที่ผิวสัมผัสระหว่างล้อและราง



รูปที่ 2. แสดงการยุบตัวตามทฤษฎีของ Hertz

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่ใช้ในการคำนวณตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์แสดงดังต่อไปนี้

- a.) คำนวณหาค่าแกนเอกของวงรี (a) และแกนโทของวงรี(b) จากสมการเฮิร์ตซ์ (Hertz's Equation) ดังสมการที่ (1.1) และ (1.2) ตามลำดับ

$$a = m \left( \frac{3}{2} N \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{1/3} \quad (1.1)$$

$$b = n \left( \frac{3}{2} N \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{1/3} \quad (1.2)$$

เมื่อ;  $E$  คือ ค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus)  
 $\nu$  คือ อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) ของล้อยและราง  
 $m$  และ  $n$  หาได้จากตารางที่ 2

โดยที่;  $A = \frac{1}{2r_n}, B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{wx}} + \frac{1}{R_{rx}} \right)$  (1.3)

เมื่อ;  $R_{wx}$  คือ รัศมีของล้อยในระนาบ x-z  
 $R_{wy}$  คือ รัศมีของล้อยในระนาบ y-z  
 $R_{rx}$  คือ รัศมีของล้อยรางในระนาบ x-z

- b.) คำนวณการกระจายแรงดันที่จุดสัมผัส

$$p = p_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{b} \right)^2} \quad (1.4)$$

เมื่อ;  $p_0 = \frac{1.5N}{\pi ab}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4.2. การหาการกระจายความเค้นที่ผิวสัมผัสระหว่างล้อกับรางโดยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) สามารถอธิบายได้ดังนี้

a) สมการทางเรขาคณิตของพื้นผิวแบบยืดหยุ่น :

$$g(x, y) = h(x, y) + w(x, y) - \delta_0 \quad (1.5)$$

เมื่อ;  $\delta_0 = w(0,0)$

b) สมการแสดงการเปลี่ยนรูปของวัสดุภายใต้แรงดัน :

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1-\nu_I}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}}{E_{II}} \right) \iint_{A_r} \frac{p(\zeta_{Xii}, Y_{jj})}{\sqrt{(x - X_{ii})^2 + (y - Y_{jj})^2}} dX_{ii} dY_{jj} \quad (1.6)$$

เมื่อ  $E_I, E_{II}, \nu_I, \nu_{II}$  เป็นค่า Young's modulus และ Poisson's ratio สำหรับวัสดุยืดหยุ่น และ  $P(x,y)$  เป็นค่า interfacial contact pressure

c) สมการสมดุลแรง :

$$\int_{A_r} p(x, y) dx dy = N \quad (1.7)$$

1.4.3. เมื่อนำวิธีการข้างต้นมาใช้คำนวณแบบ Numerical Method จะแปลงสมการที่ (1)-(3) ได้ใหม่ดังนี้

a) สมการทางเรขาคณิตของพื้นผิวแบบยืดหยุ่น :

$$g_{ij} = h_{ij} + w_{ij} - \delta_0 \quad (1.8)$$

b) สมการแสดงการเปลี่ยนรูปของวัสดุภายใต้แรงดัน :

$$w_{ij} = \sum_{ii=0}^{Nx-1} \sum_{jj=0}^{My-1} K_{i,j} p_{ii,jj} \quad (1.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{เมื่อ; } K_{ij} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{ii})^2 + (y_j - y_{jj})^2}} \Delta x_{ii} \Delta y_{jj}$$

โดยพิจารณาเงื่อนไขการสัมผัสกันของวัสดุจะเป็นไปตามสมการดังนี้

$$\text{if } p(x, y) > 0; g(x, y) = 0$$

$$\text{else } p(x, y) = 0; g(x, y) \neq 0$$

c) สมการสมดุลแรง :

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=0}^{Nx-1} \sum_{j=0}^{Ny-1} p_{ij} = F \quad (1.10)$$

d) เงื่อนไขของการปรับปรุงค่าตามวิธีการเชิงตัวเลข:

1. หาเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน (Percentage error) ของรูปร่างหลังการยุบตัว (Geometry) จากสมการดังต่อไปนี้

$$\text{error}_0(i, j) = \frac{w_{real}(i, j) - w(i, j)}{|w_{real}(i, j)|} \times 100\% \quad (1.11)$$

$$\text{เมื่อ; } w_{real} = w(0, 0) - h(i, j)$$

2. ปรับค่าความดันใหม่ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$P(i, j) = P(i, j)_{old} + (err(i, j)) * c \quad (1.12)$$

เมื่อ; c คือ Under relaxation factor.

3. หาค่าความคลาดเคลื่อนของแรง (Load Different)

$$\text{Load Diff} = \frac{\text{Load} - N}{N} \times 100\% \quad (1.13)$$

เมื่อ; N คือแรงเริ่มต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4. ปรับรูปร่างของผิวสัมผัสได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$a_{new} = a_{old} - \frac{Load\ Diff \times a_{old}}{c} \quad (1.14a)$$

$$b_{new} = b_{old} - \frac{Load\ Diff \times b_{old}}{c} \quad (1.14b)$$

เมื่อ; a และ b คือแกนเอกและแกนโทของพื้นที่วงรีตามลำดับ

### 1.5 ขอบเขตการวิจัย

1. เขียนสมการที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของล้อและรางโดยพิจารณาว่าอยู่ในสภาพยืดหยุ่นรูป (Elastic Behavior) และหารูปร่างของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Geometry)
2. คำนวณการกระจายความเค้นของล้อและราง (Pressure Distribution) ตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory)
3. พัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้หาการกระจายความดันจริงที่ผิวสัมผัส (The real Pressure Distribution)
4. ปรับรูปร่างของรางรถไฟเพื่อลดการสึกหรอ

### 1.6 ขั้นตอนของการศึกษา

1. ศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาวิธีการใช้โปรแกรมแมทแล็บ (MatLAB)
3. สร้างแบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution), แบบจำลองรูปร่างระยะของล้อและรางก่อนมีแรงมากระทำ (Rigid Separation), แบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation) และแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry) โดยใช้สมการตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory)
4. เขียนสมการเชิงตัวเลข (Numerical Equation) เพื่อใช้สร้างแบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution), แบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation) และแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry)
5. เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณสมการเชิงตัวเลข
6. เปรียบเทียบข้อมูลระหว่างผลลัพธ์จากทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory) และผลลัพธ์จากการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Method)
7. สรุปผลงานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

### วิธีดำเนินการวิจัย

#### 2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. Constantin I.Barbinta, Sulleyman Yaldiz, Alina Dragomir, Spiridon S.Cretu ทำการค้นคว้าเรื่อง An Elastic-Plastic Solver of The Wheel-Rail Contact ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับรูปร่างของพื้นผิวสัมผัสระหว่างล้อและราง และจำลองการกระจายความเค้นที่ผิวสัมผัสของล้อและรางในกรณีที่มีผิวสัมผัสอยู่ในรูปทั่วไป (Hertzian contact) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ

2. Eric Fleming ทำการค้นคว้าเรื่อง Hertzian Line Contact Analysis with Matlab ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับการตรวจสอบและพัฒนาโปรแกรม Matlab ที่ใช้คำนวณและสร้างแบบจำลองความเค้นของ Hertzian Contact ทรงกระบอก

3. Wickramasinghe, Isuru Udara, Hargreaves, Douglas, & De Pellegrin, Dennis ทำการค้นคว้าเรื่อง The suitability of using accumulated elastic stress to assess the damage at the rail-wheel interfaces. โดยเป็นการศึกษาพฤติกรรมแบบ elastic stress ที่เกิดขึ้นระหว่างล้อรถไฟกับรางบริเวณที่เกิดการสัมผัส เพื่อตรวจสอบถึงความแม่นยำในการใช้วิธีดังกล่าวในการประมาณค่า

ตารางที่ 2 แสดงค่า Hertz Coefficients  $m$  และ  $n$

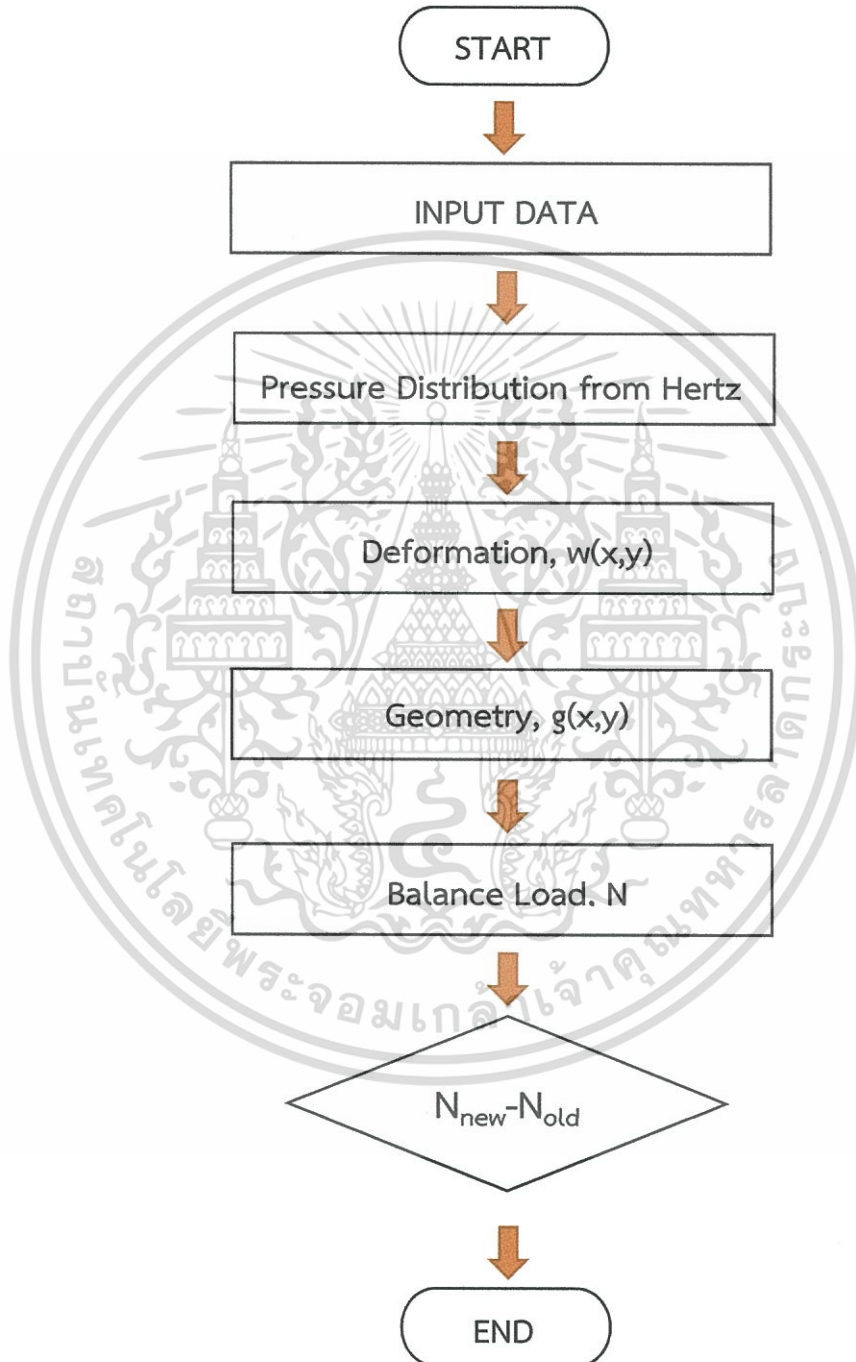
$\theta$	$m$	$n$	$\theta$	$m$	$n$	$\theta$	$m$	$n$
0.5	61.4	0.1018	10	6.604	0.3112	60	1.486	0.717
1	36.89	0.1314	20	3.813	0.4125	65	1.378	0.759
1.5	27.48	0.1522	30	2.731	0.493	70	1.284	0.802
2	22.26	0.1691	35	2.397	0.53	75	1.202	0.846
3	16.5	0.1964	40	2.136	0.567	80	1.128	0.893
4	13.31	0.2188	45	1.926	0.604	85	1.061	0.944
6	9.79	0.2552	50	1.754	0.641	90	1	1
8	7.86	0.285	55	1.611	0.678			

ตารางที่ 1. Hertz Coefficients

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.2 วิธีการดำเนินการวิจัย

### 2.2.1 การดำเนินการวิจัยโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz Theory)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาแบบจำลองการกระจายความเค้นกรณีพื้นผิวสัมผัสรูปวงรีโดยใช้สมการตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory)

1. กำหนดค่าคุณสมบัติต่างๆ ดังต่อไปนี้

$$\nu_1 = 0.27$$

$\nu_1$  คือ อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) ของล้อ

$$\nu_2 = 0.30$$

$\nu_2$  คือ อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) ของราง

$$E_1 = 206 \times 10^9$$

$E_1$  คือ ค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus) ของล้อ

$$E_2 = 210 \times 10^9$$

$E_2$  คือ ค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus) ของราง

$$N = 500000/8 \text{ N}$$

$N$  คือ แรงเริ่มต้น

$$R_{wx} = 0.583 \text{ m}$$

$R_{wx}$  คือ รัศมีของล้อในระนาบ x-z

$$R_{wy} = 0.460 \text{ m}$$

$R_{wy}$  คือ รัศมีของล้อในระนาบ y-z

$$R_{rx} = 0.300 \text{ m}$$

$R_{rx}$  คือ รัศมีของล้อรางในระนาบ x-z

2. ใช้สมการของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory) สมการที่ (1.3) คำนวณหาค่าความโค้งของล้อและราง (A และ B)

$$A = \frac{1}{2r_n}, \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{wx}} + \frac{1}{R_{rx}} \right) \quad (1.3)$$

3. คำนวณหาค่า Hertz Coefficients  $m$  และ  $n$  จากตารางที่ (2) โดยวิธีประมาณค่าในช่วง (Interpolation) เพื่อให้ได้ค่าที่แม่นยำมากขึ้น

4. คำนวณหาค่าแกนเอกของวงรีและแกนโทของวงรี ( $a$  และ  $b$ ) จากสมการเฮิร์ตซ์ (Hertz's Equation) สมการที่ (1.1) และ (1.2) ตามลำดับ

$$a = m \left( \frac{3}{2} N \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{1/3} \quad (1.1)$$

$$b = n \left( \frac{3}{2} N \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{1/3} \quad (1.2)$$

5. คำนวณหาค่า  $ab$  จากสมการพื้นที่ทรงกลม เพื่อนำไปหาพื้นผิวสัมผัสรูปวงรี ( $\pi ab$ )

$$ab = mn \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{1}{A+B} \right)^{2/3} N^{2/3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. ใช้สมการเฮิร์ตซ์ (Hertz's Equation) สมการที่ (1.4) ในการหาค่าความดัน ณ จุดใดๆ บนพื้นผิวสัมผัสโดยใช้โปรแกรม Matlab เพื่อสร้างแบบจำลองการกระจายความดัน

$$p = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (1.4)$$

เมื่อ 
$$p_0 = \frac{1.5N}{\pi ab}$$

7. คำนวณหาการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation) จากสมการที่ (1.6)

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \iint_{A_r} \frac{p(\zeta_{Xii}, Y_{jj})}{\sqrt{(x - X_{ii})^2 + (y - Y_{jj})^2}} dX_{ii} dY_{jj} \quad (1.6)$$

8. คำนวณหารูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry) จากสมการที่ (1.5)

$$g(x, y) = h(x, y) + w(x, y) - \delta_0 \quad (1.5)$$

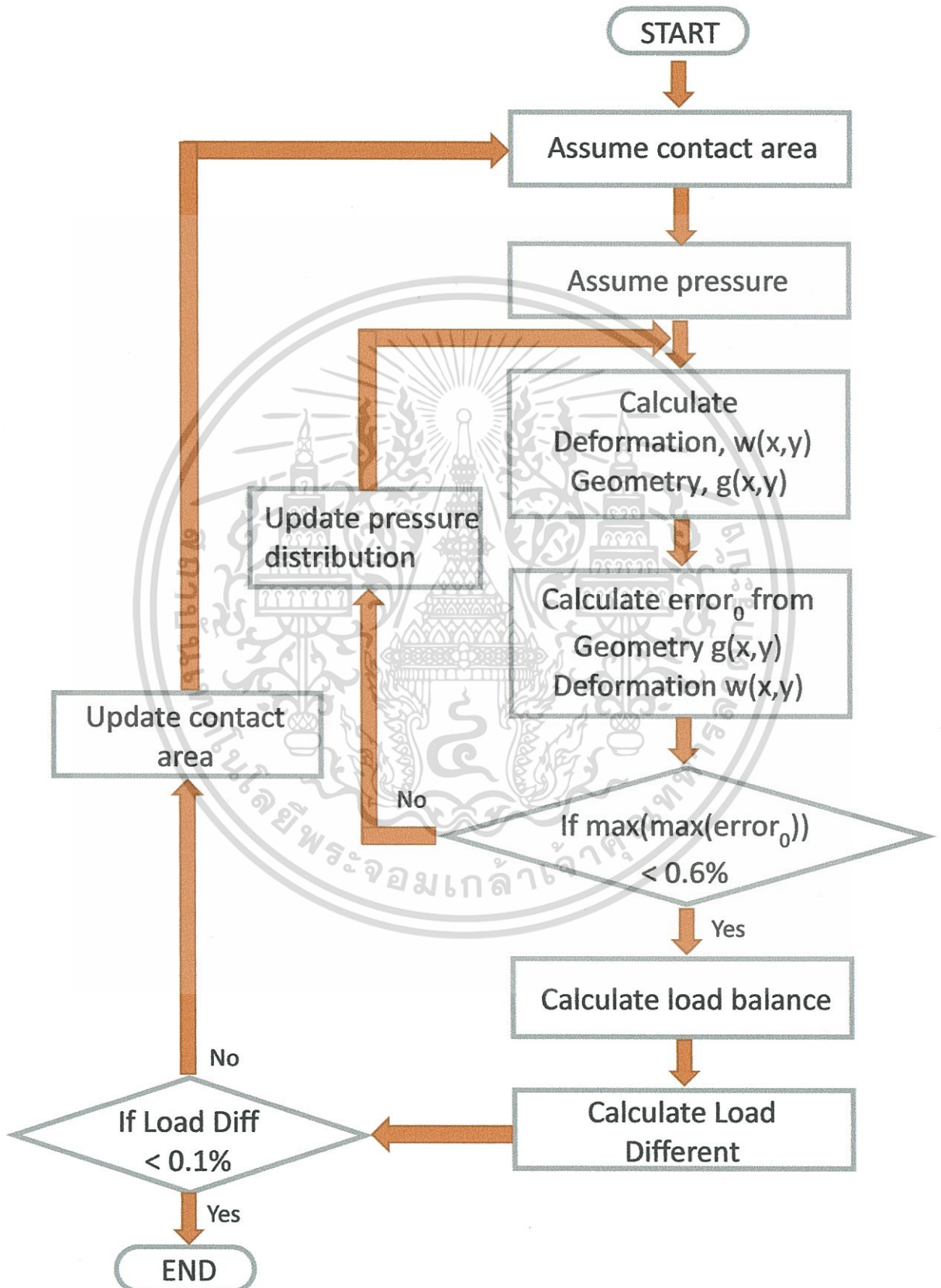
9. คำนวณในสมการ ที่ (1.7) เพื่อหาผลรวมของแรง (Load balance)

$$\int_{A_r} p(x, y) dx dy = N \quad (1.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



โดยมีขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรมแมทแลป (MatLAB) ดังนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนแรกของการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขคือการแบ่งโนด (Node) ในโปรแกรมเพื่อใช้คำนวณช่วงที่วัตถุสัมผัสกันได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม ความเหมาะสมในการแบ่งโนดขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของล้อและรางที่กำหนดข้างต้นรวมถึงแรงที่กำหนด ข้อกำหนดที่สำคัญของการแบ่งโนดนอกจากจะต้องครอบคลุมทั้งช่วงพื้นที่สัมผัสแล้ว ยังจำเป็นต้องเผื่อพื้นที่ส่วนหนึ่งเพื่อสังเกตการยุบตัวโดยรวมอีกด้วย ในบทความนี้ได้แบ่งโนดเป็น  $101 \times 101$  ช่อง แต่ละโนดมีความกว้าง 0.0002 เมตรดังรูปที่ 5

### ขั้นตอนการดำเนินงาน

#### 1. กำหนดคุณสมบัติต่างๆดังนี้

$$\nu_1 = 0.27$$

$\nu_1$  คือ อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) ของล้อ

$$\nu_2 = 0.30$$

$\nu_2$  คือ อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) ของราง

$$E_1 = 206 \times 10^9$$

$E_1$  คือ ค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus) ของล้อ

$$E_2 = 210 \times 10^9$$

$E_2$  คือ ค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus) ของราง

$$N = 500000/8 \text{ N}$$

$N$  คือ แรงเริ่มต้น

$$R_{wx} = 0.583 \text{ m}$$

$R_{wx}$  คือ รัศมีของล้อในระนาบ x-z

$$R_{wy} = 0.460 \text{ m}$$

$R_{wy}$  คือ รัศมีของล้อในระนาบ y-z

$$R_{rx} = 0.300 \text{ m}$$

$R_{rx}$  คือ รัศมีของล้อรางในระนาบ x-z

- กำหนดพื้นที่ผิวสัมผัสเพื่อเป็นค่าเริ่มต้นตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory) และพื้นที่สัมผัสดังกล่าวจะถูกใช้เป็นเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยพิจารณาว่าพื้นที่นอกช่วงสัมผัสทั้งหมดจะมีแรงดันเท่ากับศูนย์
- กำหนดค่าความดันโดยพิจารณาจากพื้นที่ผิวสัมผัส ที่กำหนดขึ้นมาเมื่อเริ่มต้นตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์
- คำนวณหาการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation) จากสมการที่ (1.6)
- คำนวณหารูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry) จากสมการที่ (1.5)
- จากเงื่อนไขที่ว่าในกรณีที่เกิดความดันในบริเวณผิวสัมผัสหนึ่งๆ ค่าระยะห่างของล้อและราง (Geometry) ณ จุดที่มีความดันนั้นจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ (มีการสัมผัสกันระหว่างล้อและราง) ตามเงื่อนไขดังนี้

$$\begin{aligned} \text{if } p(x, y) > 0; & \quad g(x, y) = 0 \\ \text{else } p(x, y) = 0; & \quad g(x, y) \neq 0 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าผลของการคำนวณโดยบริเวณจุดที่เกิดความดันมีรูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry) ไม่เท่ากับศูนย์ หมายความว่าเกิดความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณรอบนั้น จึงมีการนิยาม  $error_0$  ขึ้นมาจากความคลาดเคลื่อนของระยะห่างของล้อและราง (Geometry) ข้างต้นแล้วใช้  $error_0$  ไปปรับแก้ค่าความดันในรอบใหม่ให้ถูกต้อง แล้วนำมาคำนวณหา ระยะห่างของล้อและราง (Geometry) อีกครั้ง โดย  $error_0$  นิยามดังนี้

$$error_0(i, j) = \frac{w_{real}(i, j) - w(i, j)}{|w_{real}(i, j)|} \times 100 \quad (1.11)$$

เมื่อ

$$w_{real} = w(0,0) - h(i, j)$$

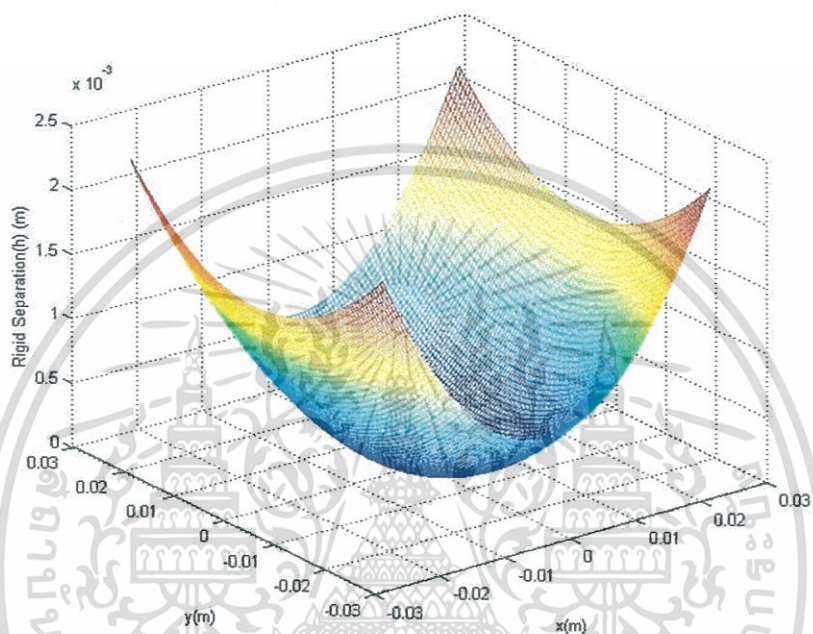
7. จากข้อ 6. ถ้า  $error_0$  เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดคือ น้อยกว่า 0.6% หมายความว่าแบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution) ถูกต้องตามพื้นผิวสัมผัสที่กำหนดไว้
8. นำค่าของความดันที่ได้จากข้อ 7. มาคำนวณในสมการ ที่ (1.7) เพื่อหาผลรวมของแรง (Load balance)
9. นำผลรวมของแรง (Load balance) ที่ได้ มาเปรียบเทียบกับแรงเริ่มต้นที่ใส่เข้าไป (N) ตามสมการที่ (1.13) เพื่อหาความคลาดเคลื่อน ซึ่งถ้าพื้นผิวสัมผัสที่กำหนดขึ้นในข้อ 2. ถูกต้องจริง จะส่งผลให้ผลรวมของแรง (Load balance) ที่ได้จากการคำนวณ ต้องเท่ากับแรงเริ่มต้นที่ใส่เข้าไป (N) แต่ถ้าไม่เท่ากัน แสดงว่าพื้นผิวสัมผัสนั้นยังไม่ถูกต้อง จึงต้องปรับขนาดของพื้นผิวสัมผัสใหม่ แล้วทำซ้ำข้อ 2. อีกครั้งจนกว่าทั้งเงื่อนไขของผลรวมของแรง (Load balance) และระยะห่างของล้อและราง (Geometry) ถูกต้องทั้งสองเงื่อนไขจึงได้ผลลัพธ์สุดท้ายที่ต้องการ

## 2.3 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

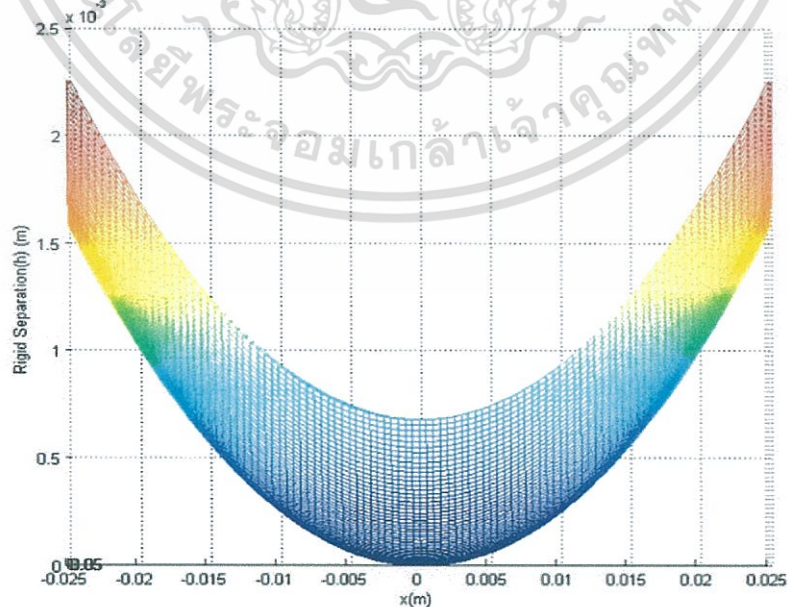
### 2.3.1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz's Theory)

จากการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ ( Hertz's Theory ) ได้ผลการคำนวณดังนี้

#### 2.3.1.1 แบบจำลองรูปร่างระยะของล้อและรางก่อนมีแรงกระทำ (Rigid Separation)



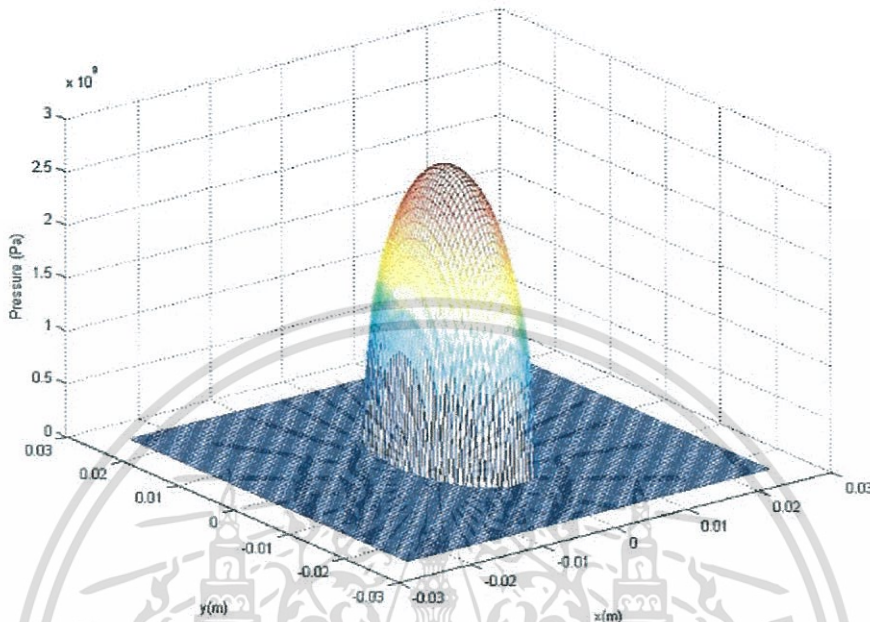
รูปที่ 5a. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะของล้อและรางโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์



รูปที่ 5b. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะของล้อและรางโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ในระนาบ X-Y

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

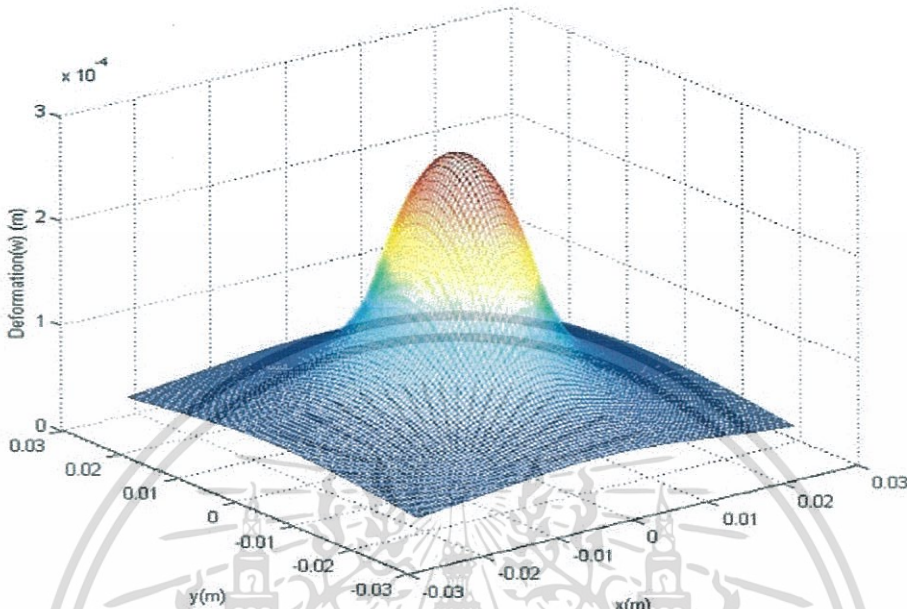
2.3.1.2 แบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution)



รูปที่ 6. แสดงแบบจำลองการกระจายความดันโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์

จากรูปที่ 6. แสดงให้เห็นถึงการกระจายความดันซึ่งได้จากการใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz Theory) ในการคำนวณ ซึ่งการคำนวณการกระจายความดันตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์มีข้อจำกัดคือ รูปร่างการกระจายความดันไม่เป็นอิสระในการคำนวณ เพราะรูปร่างการกระจายความดันจะเป็นไปตามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Functions) ตามสมการที่ (1.4) เท่านั้น ส่งผลให้ไม่สามารถใช้คำนวณในกรณีที่รูปทรงมีความสลับซับซ้อน

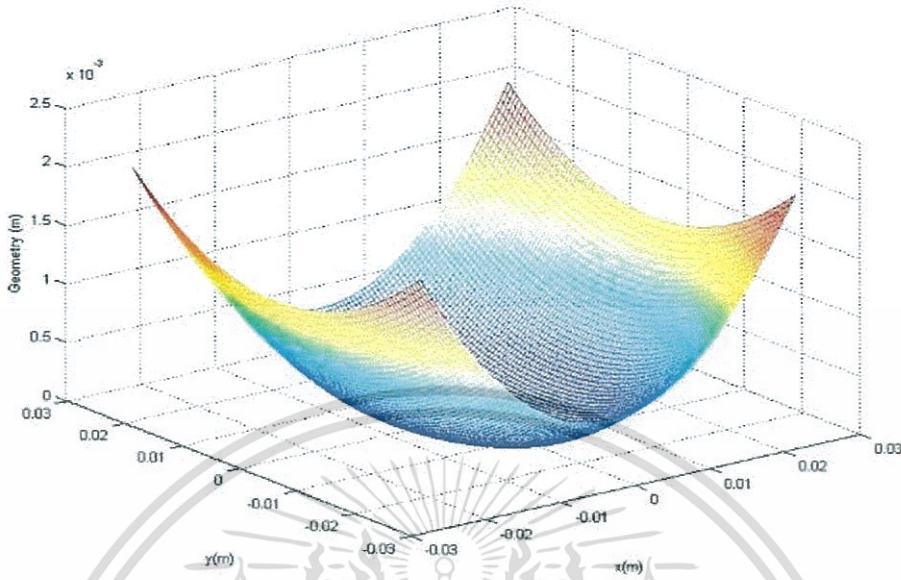
### 2.3.1.3 แบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation)



รูปที่ 7. แสดงแบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์

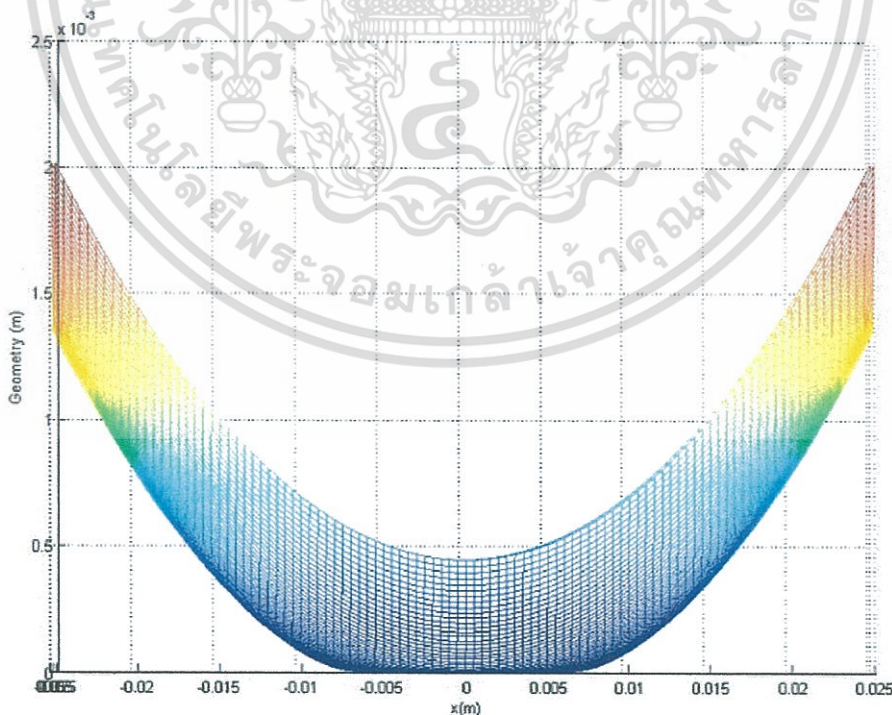
จากรูปที่ 7 การยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเนื่องจากมีแรงมากระทำ เมื่อแรงกระทำก่อให้เกิดการกระจายความดันบริเวณผิวสัมผัส จึงทำให้พื้นที่ผิวสัมผัสเกิดการยุบตัวตามสมการที่ (1.6)

### 2.3.1.4 รูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry)



รูปที่ 8a. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์

รูปร่างระยะห่างของล้อและรางหลังมีแรงมากกระทำดังรูปที่ 8b จะเห็นว่ามี ความแตกต่างกับรูปที่ 5b ซึ่งเป็นระยะห่างของล้อและรางก่อนมีแรงมากกระทำ และบริเวณที่เกิด แรงดันค่า Geometry จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ แต่เมื่อขยายรูปจะพบว่าเกิดช่องว่างของ Geometry จึงมีความจำเป็นต้องใช้วิธีการเชิงตัวเลขในการหาการกระจายความดันที่ถูกต้อง



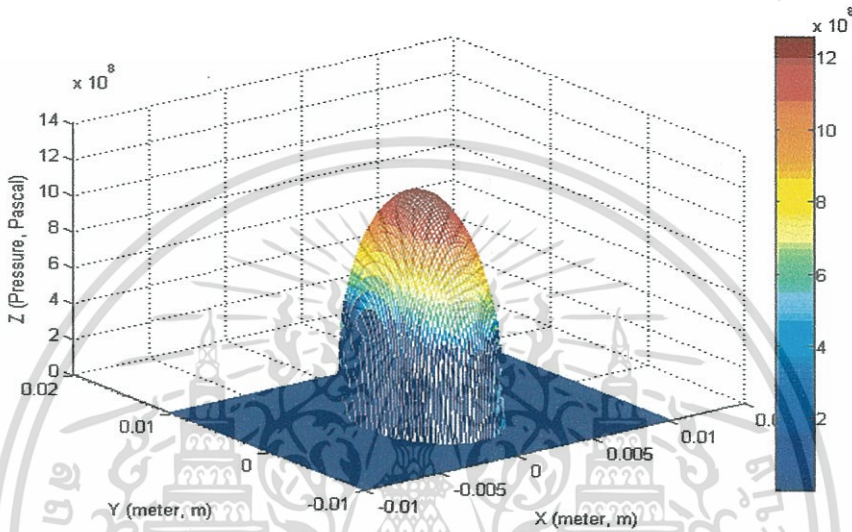
รูปที่ 8b. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางในระนาบ X-Y โดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.3.2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method)

จากการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข ( Numerical Method ) ได้ผลการคำนวณดังนี้

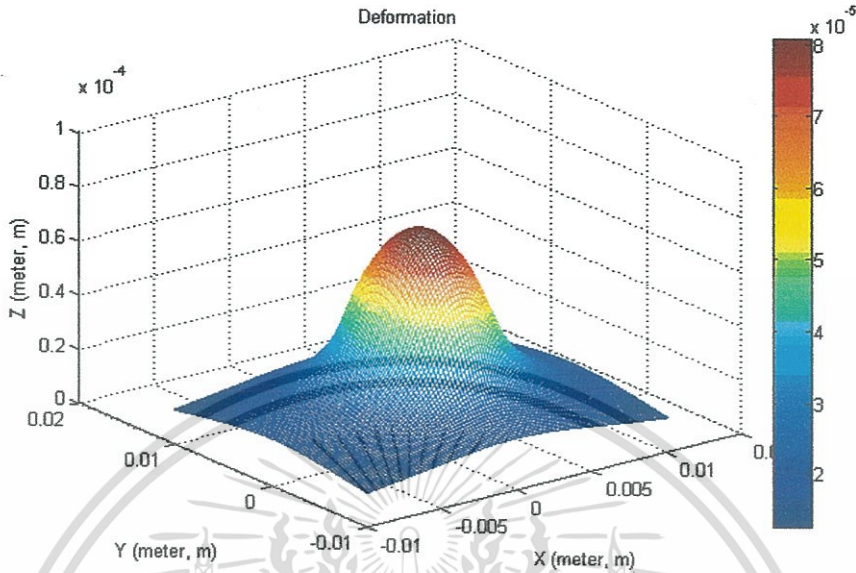
#### 2.3.2.1 แบบจำลองการกระจายความดัน (Pressure Distribution)



รูปที่ 9. แสดงแบบจำลองการกระจายความดันโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข

จากรูปที่ 9 การกระจายความดันที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะไม่ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Functions) แต่จะปรับค่าตามความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการคำนวณลูปก่อนหน้า และคำนวณหาการกระจายความดันใหม่ด้วยวิธีการเชิงตัวเลข จนกระทั่งความผิดพลาดอยู่ในเกณฑ์ที่กำหนดทำให้ได้การกระจายความดันที่เกิดขึ้นจริงและมีความแม่นยำสูงกว่าตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์

### 2.3.2.2 แบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำ (Deformation)

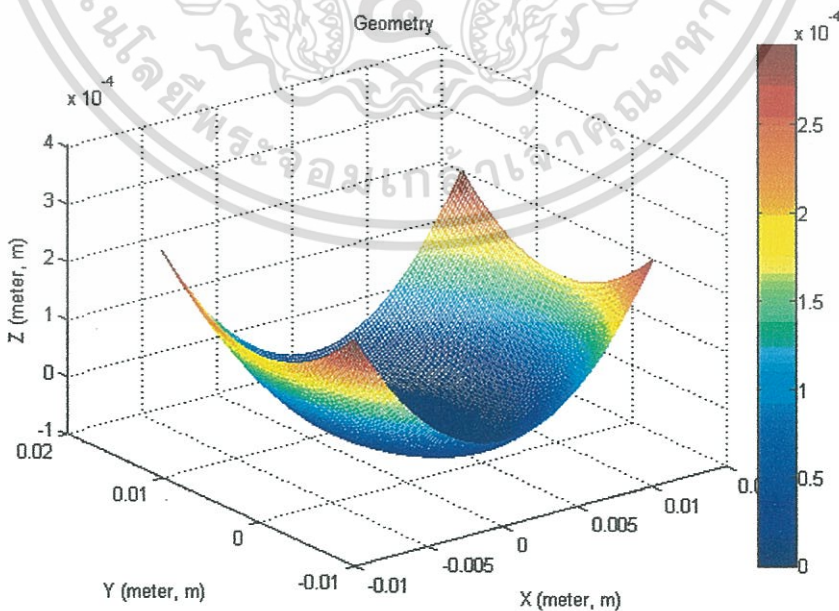


รูปที่ 10. แสดงแบบจำลองการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเมื่อมีแรงมากระทำโดยใช้วิธีการ

เชิงตัวเลข

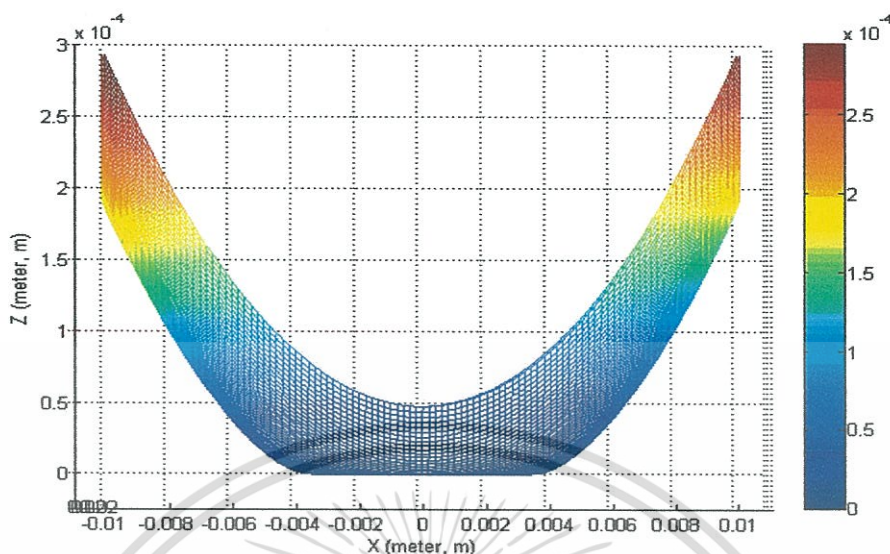
จากรูปที่ 10 แสดงการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและรางเนื่องจากมีแรงมากระทำ โดยคำนวณจากความดันที่เกิดขึ้นตามรูปที่ 9

### 2.3.2.3 รูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry)



รูปที่ 11a. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

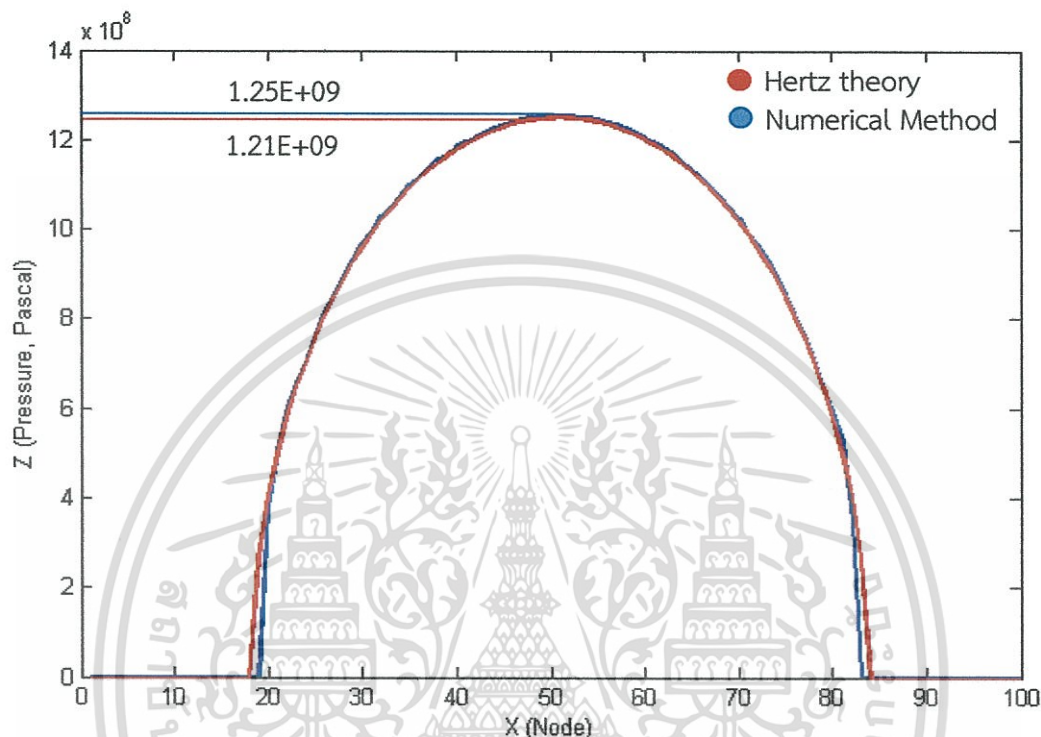


รูปที่ 11b. แสดงแบบจำลองรูปร่างระยะห่างของล้อและรางในระนาบ X-Y โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข

จากรูปที่ 11a. และ 11b. พบว่ารูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry) โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ในบริเวณที่เกิดความดันขึ้นมากกว่า ผลที่ได้ตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ สืบเกิดได้จากค่าความคลาดเคลื่อนของรูปร่างระยะห่างของล้อและราง (Geometry error) ที่ลดลง ดังแสดงในรูปที่ 14.

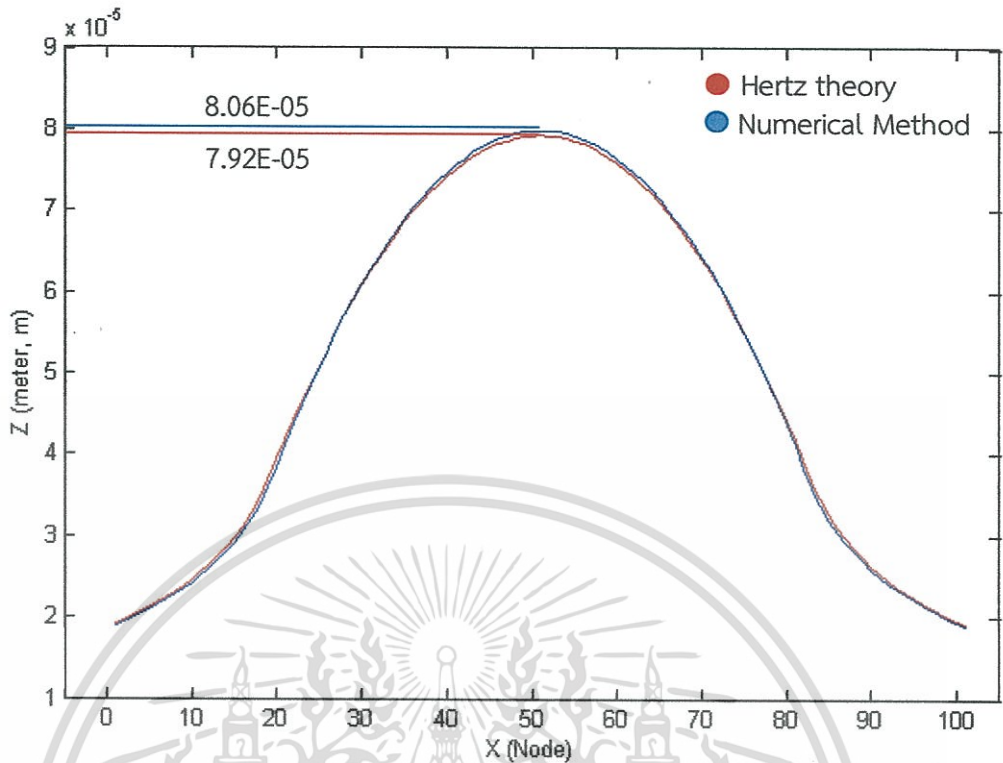
## 2.4 วิจัยรณ และอภิปรายผล

2.4.1 เปรียบเทียบผลการทดลองโดยใช้ทฤษฎีเฮิร์ตซ์ (Hertz Theory) และผลการทดลองโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) ด้วยโปรแกรม MatLAB



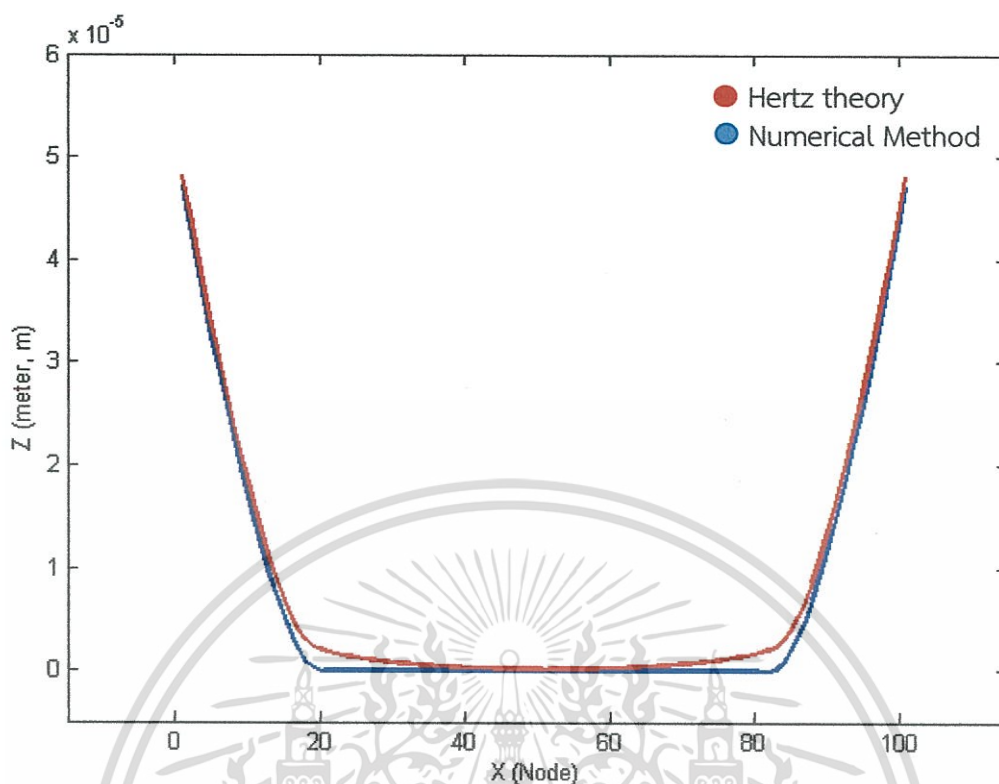
รูปที่ 12. แสดงแบบจำลองเปรียบเทียบการกระจายความดันระหว่างทฤษฎีของเฮิร์ตซ์กับวิธีการเชิงตัวเลข

จากรูปที่ 12. พบว่า ค่าความดันสูงสุดที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลขมีค่าประมาณ 1.25 GPa ซึ่งมีค่ามากกว่าการคำนวณจากทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ที่มีค่าประมาณ 1.21 GPa อยู่ประมาณ 3.25% เพราะฉะนั้นพื้นที่ผิวสัมผัสแบบวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) จะมีค่าน้อยกว่าพื้นที่ผิวสัมผัสตามแบบทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz Theory) แต่ความดันรวมของทั้ง 2 รูปแบบการคำนวณจะต้องให้ค่าการกระจายความเค้นที่เท่ากัน นั่นคือ ทั้ง 2 รูปกราฟ จะมีพื้นที่ใต้กราฟที่เท่ากัน



รูปที่ 13. แสดงแบบจำลองเปรียบเทียบการยุบตัวของพื้นผิวสัมผัสของล้อและราง  
เมื่อมีแรงกระทำโดยใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์และวิธีการเชิงตัวเลข

จากรูปที่ 13. กราฟสีน้ำเงินคือกราฟที่ได้จากการคำนวณลักษณะการยุบตัวด้วยวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) ซึ่งมีค่าการยุบตัวสูงสุดมากกว่าค่าที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ (Hertz theory) เนื่องจากความดันสูงสุดที่คำนวณได้จากวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method) มีค่ามากกว่าการคำนวณตามแบบของทฤษฎีเฮิร์ตซ์ (Hertz theory)



รูปที่ 14. แสดงแบบจำลองการเปรียบเทียบรูปร่างระยะห่างของล้อและราง  
ในระนาบ X-Y โดยใช้ทฤษฎีเฮิร์ตซ์และวิธีการเชิงตัวเลข

จากรูปที่ 14. พบว่า กราฟที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์มีความคลาดเคลื่อนอยู่บางส่วน ซึ่งรูปที่ถูกต้องจะต้องมีลักษณะใกล้เคียงกับกราฟรูปสีน้ำเงิน ซึ่งได้จากการคำนวณตามวิธีการเชิงตัวเลข แสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่าผลการคำนวณตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ โดยถ้าเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อน (error) ของรูปร่างระยะห่าง (Geometry) จากทฤษฎีของเฮิร์ตซ์จะมีค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 9% แต่จากโปรแกรมมีความคลาดเคลื่อน (error) ของรูปร่างระยะห่าง (Geometry) ลดลงเหลือเพียง 0.4%

## บทที่ 3

### สรุปผลการวิจัย

#### 3.1 สรุปผลการวิจัยดำเนินงาน

##### 3.1.1. ผลต่างของการกระจายความดันและการยุบตัวของพื้นที่ผิวสัมผัสระหว่างทฤษฎีของเฮิร์ตซ์และวิธีการเชิงตัวเลข

	Numerical Method	Hertz Theory
Maximum Pressure (Pa)	$1.25 \times 10^9$	$1.21 \times 10^9$
Maximum Deformation (meter, m)	$8.06 \times 10^{-5}$	$7.92 \times 10^{-5}$
Geometry error	9%	0.4%

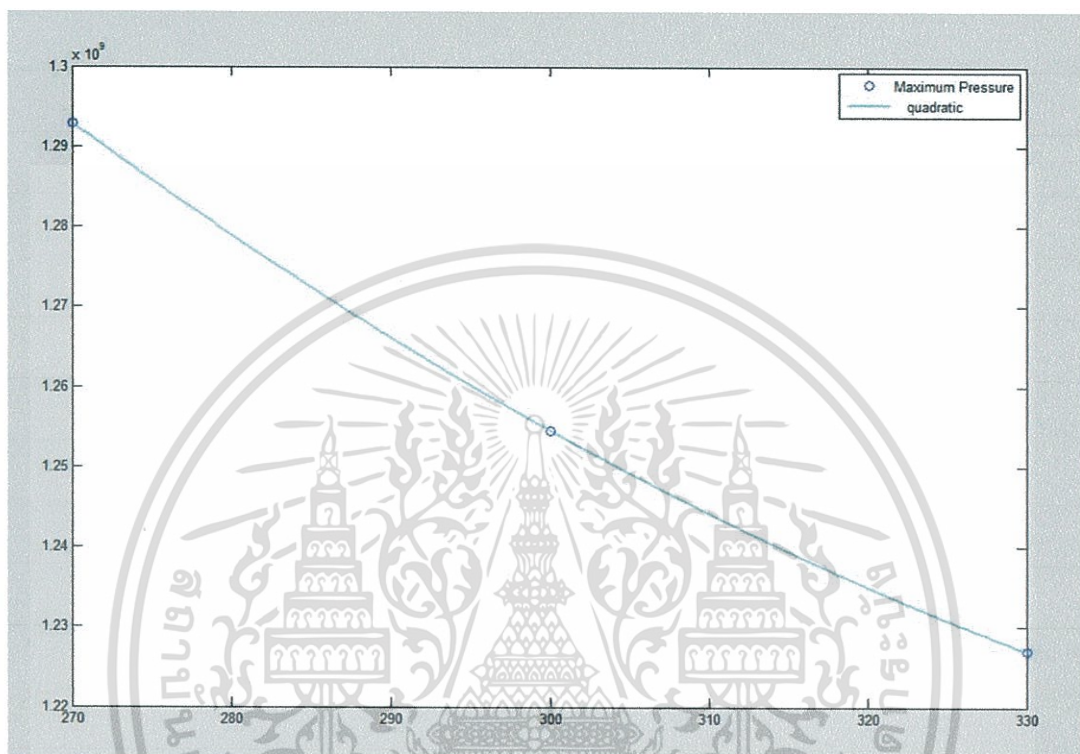
ตารางที่ 2. เปรียบเทียบการกระจายความดันและการยุบตัวของพื้นที่ผิวสัมผัสระหว่างทฤษฎีของเฮิร์ตซ์และวิธีการเชิงตัวเลข

จากตารางที่ 3. จะพบว่าความดันสูงสุดที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมจะสูงกว่าที่ได้จากทฤษฎีของเฮิร์ตซ์อยู่ประมาณ 3% และเมื่อพิจารณาความคลาดเคลื่อนของรูปร่าง (Geometry error) พบว่าผลการคำนวณจากโปรแกรมจะแม่นยำกว่าผลที่ได้จากทฤษฎีของเฮิร์ตซ์อยู่ 8.6%

##### 3.1.2. วิเคราะห์ข้อดีของการใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) ในการคำนวณ

1. วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method) สามารถคำนวณในเงื่อนไขที่ซับซ้อนได้มากกว่าทฤษฎีของเฮิร์ตซ์เนื่องจากทฤษฎีของเฮิร์ตซ์มีข้อจำกัดมากมาย เช่น เมื่อรูปทรงมีรัศมีที่จุดสัมผัสไม่คงที่
2. มีความแม่นยำในการคำนวณมากกว่าการคำนวณตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์พิจารณาได้จากค่าความคลาดเคลื่อนที่ลดลง

### 3.2 ประโยชน์ของโปรแกรมในการนำไปใช้คำนวณค่าความดันสูงสุดเมื่อเปลี่ยนค่ารัศมี ความโค้งของรางรถไฟ



รูปที่ 15 แสดงการเปลี่ยนแปลงของความดันสูงสุดเมื่อรัศมีของรางมีการเปลี่ยนแปลง

จากรูปที่ 15. จะเห็นได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการหาค่าความดันสูงสุดที่เกิดขึ้นเมื่อเปลี่ยนค่ารัศมีความโค้งของราง ซึ่งเป็นประโยชน์ในการออกแบบรูปร่างของรางที่เหมาะสมเพื่อลดการสึกหรอของทั้งล้อและรางได้ โดยพิจารณาว่าถ้าความดันสูงสุดมีค่าสูงจะส่งผลให้เกิดการสึกหรอมาก จากรูปค่ารัศมีรางปกติมีค่าเท่ากับ 300mm เมื่อปรับค่ารัศมีเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ค่าความดันสูงสุดมีค่าต่ำลง จึงคาดว่า การสึกหรอมีแนวโน้มลดลง

### 3.3 ข้อเสนอแนะ

จากการทำการวิจัยในครั้งนี้ ทางผู้จัดทำมีข้อเสนอแนะดังนี้

1. ตัวโปรแกรมยังสามารถนำไปปรับปรุงในส่วนของสมมติฐานของรูปร่างพื้นที่ผิวสัมผัสของล้อยและราง โดยกำหนดสมมติฐานให้พื้นที่ผิวสัมผัสมีลักษณะตามสมการ Geometry (ไม่ต้องสมมติให้มีลักษณะตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์) ซึ่งส่งผลให้การคำนวณมีความอิสระมากขึ้นและสามารถนำไปใช้กับรูปทรงที่มีความสลับซับซ้อนได้มากขึ้นด้วย
2. โดยปกติถ้ากำหนดโปรแกรมให้คำนวณที่ค่าความผิดพลาด (Error) ต่ำๆ จะส่งผลให้โปรแกรมใช้เวลาในการคำนวณสูง ซึ่งถ้าไม่ต้องการความละเอียดมากนัก อาจลดเวลาในการคำนวณลงได้โดยวิธีลดค่า Error ให้ต่ำลง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ภาคผนวก (Appendix)

### ตัวอย่างการเขียนโปรแกรม Numerical Method

```

clc
%%Define Property.
v1 = 0.27;
v2 = 0.30;
E1 = 206*10.^9;
E2 = 210*10.^9;
Eeq = ((1-v1.^2)/E1+(1-v2.^2)/E2);
N = 500000/8;

rwx = .583;
rwy = .460;
rrx = .270;

%%
%Rigid Separation hxy(i,j)
for i=1:101
    for j = 1:101
        X(i) = 0.0002*i-.0102;
        Y(j) = 0.0002*j-.0102;
        zwy(i,j) = (rwx) - sqrt((rwx).^2 - Y(j)^2);
        zwx(i,j) = rwy - sqrt(rwy.^2 - X(i)^2);
        zry(i,j) = -rrx + sqrt(rrx.^2 - Y(j)^2);
        h(i,j) = zwy(i,j) + zwx(i,j)-zry(i,j);
    end
end

%%
A = .5*(1/rwx+1/rrx);
B = .5*(1/rwy);
fi = acos(abs((B-A)/(B+A)));
fil = fi*180/3.142;
Load=N;
%ni=[0 0.311 0.4122 0.4931 0.5673 0.6407 0.7171 0.8 0.8927 1];

    fil = fil-0.1*[(Load-N)/N]*fil
f=[0.5 1 1.5 2 3 4 6 8 10 20 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
mi=[61.4 36.89 27.84 22.26 16.5 13.31 9.79 7.86 6.604 3.813 2.731
2.397 2.136 1.926 1.754 1.611 1.486 1.378 1.284 1.202 1.128 1.061 1];
ni=[0.1018 0.1314 0.1522 0.1691 0.1964 0.2188 0.2552 0.285 0.3112
0.4125 0.493 0.530 0.567 0.604 0.641 0.678 0.717 0.759 0.802 0.846
0.893 0.944 1];
fprintf('fil =%.2fdegree\n',fil);

%%Define m&n from Hertz Coefficients.
m=interp1(f,mi,fil);
n=interp1(f,ni,fil);

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

%n=m/(A/B).^(2/3)
fprintf('m =%.3f\n',m);
fprintf('n =%.3f\n',n);

%%%Find Major&Minor axes od eiliptic contact.
a = m*(3/2*N*Eq/2/(A+B))^(1/3);
b = n*(3/2*N*Eq/2/(A+B))^(1/3);
fprintf('Major axe of eiliptic a =%.6f m\n',a);
fprintf('Minor axe of eiliptic b =%.6f m\n',b);

%%%Check that a/b=(A/B).^(2/3) .; A>B
fprintf('\nCheck that a/b=(A/B).^(2/3)\n');
ab=a/b;
AB=(A/B).^(2/3);

fprintf('          %.3f=%.3f\n\n',ab,AB);

%%
%%Pressure Distribuite form Hertz

p0 = 1.5*N/3.142/a/b;
fprintf('p0 = %.0f Pa\n',p0);

for i=1:101
    for j = 1:101
        X(i) = 0.0002*i-.0102;
        Y(j) = 0.0002*j-.0102;
        P(i,j) = p0 *(sqrt(1-((X(i)/a).^2)-((Y(j)/b).^2)));
        if P(i,j)>0
            P(i,j)= P(i,j);
        else
            P(i,j)=0;
        end
    end
end
end

error = 10;

%% LOOP 1
for III = 1:100
Load
    %% loop 1
for iii = 1:3000;
III
iii

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

%Deformation w(i,j)
for ii=1:101

    for jj = 1:101
        X(i) = 0.0002*i-.0102;
        Y(j) = 0.0002*j-.0102;
        w(ii,jj)=0;
        for i=1:101
            for j = 1 : 101
                X(i) = 0.0002*i-.0102;
                Y(j) = 0.0002*j-.0102;
                if i == ii && j == jj ;
                    w1 = 0;

                else
                    w1 = (1/3.142)* Eeq *
P(i,j)*.0002*.0002/sqrt((X(ii)-X(i))^2+(Y(jj)-Y(j)).^2);
                end
                w(ii,jj) = w(ii,jj) + w1 ;
            end
        end
    end
end

end

%%
%Geometric Equation g(x,y)
for i=1:101
    for j = 1:101
        X(i) = 0.0002*i-.0102;
        Y(j) = 0.0002*j-.0102;
        g(i,j) = h(i,j) + w(i,j) - w(51,51);
    end
end

%% err
for i=1:101
    for j = 1:101

        wreal(i,j) = w(51,51)-h(i,j);
        if abs(P(i,j))>0
            err(i,j) = (-w(i,j)+wreal(i,j))/abs(wreal(i,j))*100;
        else
            err(i,j) = 0;
        end

    end

end

if max(max(abs(err)))<= .6
break
end
%%

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

for i=1:101
    for j = 1:101

        if abs(P(i,j))> 0

            P(i,j) = P(i,j)+err(i,j)*2000000;

        else
            P(i,j)=0 ;
        end

    end
end
for i=1:101
    for j = 1:101

        if abs(P(i,j))> 0

            P(i,j) = P(i,j)-min(min(P));

        else
            P(i,j)=0 ;
        end

    end
end

%% check contact area
if error < 2
for i=1:101
    for j = 1:101
        X(i) = 0.0005*i-.0255;
        Y(j) = 0.0005*j-.0255;
        if abs(P(i,j))> 0

            PC(i,j) = 1;

        else
            PC(i,j)=0;
        end

    end
end

for j = 1:101
    if PC(51,j) == 1
        nj = j;
        njj = nj+1;
        break
    end
end

for i = 1:101
    if PC(i,51) == 1
        ni = i;
        nii = ni+1;
        break
    end
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

end
end

if P(51,nj)>P(51,njj)
for i=1:101
    for j = 1:101
        Y(j) = 0.0005*j-0.0255;
        X(i) = 0.0005*i-0.0255;
        P(i,j) = p0 *(sqrt(1-((X(i)/a).^2)-((Y(j)/b).^2)));
        if P(i,j)>0

                P(i,j)= P(i,j);

        else
            P(i,j)=0;
        end
    end
end
end

if P(ni,51)>P(nii,51)
for i=1:101
    for j = 1:101
        Y(j) = 0.0005*j-0.0255;
        X(i) = 0.0005*i-0.0255;
        P(i,j) = p0* 1.1 *(sqrt(1-((X(i)/a).^2)-((Y(j)/b).^2)));
        if P(i,j)>0

                P(i,j)= P(i,j);

        else
            P(i,j)=0;
        end
    end
end
end
end
end
%%
Error=0;
for i=1:101
    for j = 1:101
        Error=Error+err(i,j)^2;
    end
end
Error=(Error/(101*101))^0.5;
Error

error = max(max(abs(err)));
error
end

Load = 0 ;
for i = 1:101
    for j = 1:101

        Load = Load + (P(i,j)*.0002*.0002);
    end
end
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

    Loaddiff = (Load-N)/N*100;
    if abs(Loaddiff) <= .1
        break
    end

    a = a - Loaddiff*a/100/17;
    b = b - Loaddiff*b/100/17;

    %Pressure
    p0 = 1.5*N/1.2/3.142/a/b;
    fprintf('p0 = %.0f Pa\n',p0);

    for i=1:101
        for j = 1:101
            X(i) = 0.0002*i-.0102;
            Y(j) = 0.0002*j-.0102;
            P(i,j) = p0 *(sqrt(1-((X(i)/a).^2)-((Y(j)/b).^2)));
            if P(i,j)>0

                P(i,j)= P(i,j);

            else
                P(i,j)=0;
            end
        end
    end
end
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

### หนังสือ

- [1] Johnson, K.L. (1985). *Contact Mechanics*, 9<sup>th</sup> edition, ISBN: 0-521-34796-3, Cambridge University Press.
- [2] Nuksit Noomwongs. Railway Rolling Stock, กรุงเทพฯ: โครงการพัฒนาหลักสูตรและนําร่องการสร้ํากําลังคนระดับวิศวกรด้านระบบขนส่งทางรางเข้าสู่ตลาดแรงงาน, สวทท. หน้า 104 – 116.

### บทความจากวารสาร (Journal)

- [1] Constantin I.Barbinta, Sulleyman Yaldiz, Alina Dragomir, Spiridon S.Cretu. “*An Elastic-Plastic Solver of the Wheel-Rail Contact*”, Proceedings of the ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Istanbul, Turkey, 2010.
- [2] Eric Fleming. “*Hertzian Line Contact Analysis with Matlab*”. Loyola Marymount University Department of Mechanical Engineering, 2011.
- [3] Wickramasinghe, Isuru Udara, Hargreaves, Douglas, & De Pellegrin, Dennis. “The suitability of using accumulated plastic strain to assess the damage at the rail-wheel interfaces.” Queensland University of Technology, Physics and Mechanical Engineering Faculty of Science and Technology, 2012.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้