โปรแกรมสำหรับการหารากจำนวนเชิงซ้อน
PROGRAM FOR FINDING COMPLEX ROOTS OF POLYNOMIAL

กิตติพร ถิระโคตร
ฤทธิชัย เจษฎาเจิม
อินทุอร ใช้บางยาง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

โปรแกรมสำหรับการหารากจำนวนเชิงซ้อน

PROGRAM FOR FINDING COMPLEX ROOTS OF POLYNOMIAL

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

กิตติพร ถิระโคตร

ฤทธิชัย เจษฎาเจิม

อินทุอร ใช้บางยาง

ท. 00265751

ว.

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

PROGRAM FOR FINDING COMPLEX ROOTS OF POLYNOMIAL

KITTIPORN THIRAKOTRA

RITTHICHAI JASSADAJREM

INTHUON CHAIBANGYANG

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIRMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ	โปรแกรมสำหรับการหารากจำนวนเชิงซ้อน		
	Program for finding complex roots of polynomial		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกิตติพร	ถิระโคตร	56050008
	นายฤทธิชัย	เจษฎาเจิม	56050114
	นางสาวอินทุอร	ใช้บางยาง	56050182
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต		
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ		
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล		

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้โครงงานพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ โปรแกรมสำหรับการหารากจำนวนเชิงซ้อน

Program for finding complex roots of polynomial

ชื่อนักศึกษา นางสาวกิตติพร ถิระโคตร 56050008

นายฤทธิชัย เจษฎาเจิม 56050114

นางสาวอินทุอร ใช้บางยาง 56050182

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2559

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

ปัญหาการหารากของสมการพหุนาม $p_n(a) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ เมื่อสัมประสิทธิ์ a_i เป็นจำนวนจริง เป็นปัญหาหนึ่งที่มีความสำคัญทั้งทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ รากของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงอาจเป็นรากจริงทุกค่าหรือมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นคู่สังยุคซึ่งกันและกัน ในงานวิจัยนี้จะนำเสนอการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการประมาณค่ารากทุกค่าของสมการพหุนามโดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์และระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันภายใต้ *Editplus*® และ *Java*® พร้อมนำเสนอผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลข

คำสำคัญ :ระเบียบวิธีเซแคนต์,ระเบียบวิธีการนิวตัน-ราฟสันสำหรับสมการพหุนาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Program for finding complex roots of polynomial		
Students	Kittiporn	Thirakotra	56050008
	Rittichai	Jassadajrem	56050114
	Inthuon	Chaibangyang	56050182
Degree	Bachelor of Science		
Major Program	Applied Mathematics		
Academic Year	2016		
Advisor	Dr.Wannaporn	Sanprasert	
Co-Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee	Chitsakul	

ABSTRACT

The problem of finding all the roots of a polynomial $p_n(a) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ where the coefficients a_i are real, is one of the Important problem for science and engineering. If the polynomial has real coefficients, then either all roots are real or there are even number of complex roots, in conjugate pairs. In this work we developed a computer program for approximating all roots of a polynomial by using secant method and Newton-Raphson method on the *Editplus*® and *Java*® the analytical and numerical result are also presented.

Keyword : Secant method , Newton-Rapson method

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง **“โปรแกรมสำหรับการหารากจำนวนเชิงซ้อน”** คณะผู้วิจัยต้องขอขอบพระคุณ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ และ รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล ผู้ให้ความอนุเคราะห์เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาทางด้านความรู้และปัญหาต่างๆ ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพื่อให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้เป็นไปในทิศทางที่ถูกต้องและสมบูรณ์ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง คณะผู้วิจัยตระหนักถึง ความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

นอกจากนี้คณะผู้วิจัยใคร่ขอขอบพระคุณ อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการสอบ และ ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายนี้คณะผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การอุปการะอบรมเลี้ยงดู ตลอดจนส่งเสริมการศึกษา และให้กำลังใจเป็นอย่างดี อีกทั้งขอขอบคุณเพื่อนๆในสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่ให้การสนับสนุนและช่วยเหลือด้วยดีเสมอมา ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่บริหารทั่วไปและเจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ที่อำนวยความสะดวกในการทำงานต่างๆ และขอขอบพระคุณเจ้าของเอกสารและงานวิจัยทุกท่านที่คณะผู้วิจัยศึกษาค้นคว้าได้นำมาอ้างอิงในการทำวิจัย จนกระทั่งงานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

กิตติพร ถิระโคตร

ฤทธิชัย เจษฎาเจิม

อินทุอร ใช้บางยาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
2.1	แสดงค่า x , $f(x)$ ของตัวอย่าง 2.2	8
2.2	แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีบูแดงของตัวอย่าง 2.7	30
2.3	แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีบูแดงของตัวอย่าง 2.8	31
2.4	แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีของสเติร์มของตัวอย่าง 2.9	34
2.5	แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีของสเติร์มของตัวอย่าง 2.10	37
2.6(1)	แสดงการหาค่า a_k, b_k, c_k ของตัวอย่าง 2.12	42
2.6(2)	แสดงการหาค่า a_k, b_k, c_k ของตัวอย่าง 2.12	43
2.6(3)	แสดงการหาค่า a_k, b_k, c_k ของตัวอย่าง 2.12	43
2.6(4)	แสดงการหาค่า a_k, b_k, c_k ของตัวอย่าง 2.12	44
2.6(5)	แสดงการหาค่า a_k, b_k, c_k ของตัวอย่าง 2.12	44

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

การหารากของสมการพหุนามเป็นเรื่องที่มีความสำคัญในการประยุกต์กับปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ยิ่งถ้าสมการพหุนามมีดีกรีมากเท่าใด การหารากของสมการยิ่งใช้เวลานานมากขึ้นเท่านั้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงต้องการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถหารากของสมการพหุนามได้อย่างรวดเร็ว เนื่องจากสมการพหุนามอาจมีรากเป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงพัฒนาโปรแกรมให้สามารถดำเนินการได้ด้วยการหารากจำนวนเชิงซ้อนได้ด้วยระเบียบวิธีเซแคนท์ และระเบียบวิธีการนิวตัน-ราฟสัน

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาการหารากของสมการพหุนามของฟังก์ชันที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

1.2.2 เพื่อเขียนโปรแกรมทางคณิตศาสตร์เพื่อคำนวณหารากของสมการพหุนามภายใต้ *Editplus*® และ *Java*®

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1.3.1 การหารากของสมการพหุนามด้วยระเบียบวิธีเซแคนท์

1.3.2 การหารากของสมการพหุนามด้วยระเบียบวิธีการนิวตัน-ราฟสัน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ความรู้เกี่ยวกับการหารากของสมการพหุนามและหารากของสมการพหุนามได้เร็วขึ้น

1.4.2 โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เพื่อคำนวณหารากของสมการพหุนาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาการหารากของสมการพุหนามด้วยวิธีต่างๆ

1.5.2 ออกแบบขั้นตอนวิธี(Algorithm)ของระเบียบวิธีต่างๆ

1.5.3 สร้างโปรแกรมในการคำนวณหารากของสมการพหุนาม

1.5.4 นำเสนอ

1.5.5 ปรับปรุงแก้ไขผลการสรุปและรูปเล่ม

1.5.6 ส่งรูปเล่ม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2559					ปี 2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.รวบรวมเอกสารอ้างอิงที่จำเป็นและเกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆทั้งในและต่างประเทศ										
2.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิธีการต่างๆในการหารากของสมการพหุนาม										
3.เขียนอัลกอริทึมและสร้างโปรแกรมการหารากจำนวนเชิงซ้อน										
4.ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาทั้งหมด										
5.จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งจัดทำแบบการนำเสนอ										
6.ซ้อมนำเสนอปัญหาพิเศษ										
7.นำเสนอปัญหาพิเศษ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการหารากสมการพหุนาม

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและวิธีการที่เกี่ยวข้องกับการหารากของสมการพหุนาม โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนท์ และระเบียบวิธีการนิวตัน-ราฟสัน เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาและทำโปรแกรมการหารากจำนวนเชิงซ้อน

2.1 การหารากของสมการ

นิยาม 2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า x_0 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $f(x_0) = 0$ เรียก x_0 ว่า**ค่าศูนย์**ของ f (Zero of f) หรือรากของสมการ (root of equation) $f(x_0) = 0$

ทฤษฎี 2.1 ให้ f ต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้ามแล้วจะมีจำนวน c ซึ่ง $a<c<b$ แล้ว $f(c)=0$

พิสูจน์ $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

จะสมมติ $f(a)<0<f(b)$

การพิสูจน์กรณี $f(b)<0<f(a)$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ให้ S เป็นเซตของจำนวน x ซึ่ง $x \in [a,b]$ และ $f(x)<0$

$S \neq \varnothing$ เนื่องจาก $a \in S$ ขอบเขตบนของ S คือ b

ให้ c เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ S

สำหรับจำนวน c ใดๆ จะมีค่าได้หนึ่งในสามแบบคือ 1) $f(c)>0$, 2) $f(c)<0$ หรือ 3) $f(c)=0$

1) $f(c)>0$ แล้ว $c \notin S$ เกิดข้อขัดแย้งเพราะ c เป็นขอบเขตน้อยที่สุดของ S ดังนั้น $f(c) \not> 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) $f(c)<0$ แล้ว $c\notin S$ ให้ $(c-\delta,c+\delta)$ เป็นช่วงซึ่ง $f(c)<0$ แล้ว $c-\delta$ เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ S เกิดข้อขัดแย้งเพราะ c เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ S ดังนั้น $f(c) \nless 0$

3) ดังนั้น $f(c)=0$

ทฤษฎี 2.2 ถ้า f มีความต่อเนื่องใน $[a,b]$ และ f หาอนุพันธ์ได้ใน (a,b) แล้ว

1. ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

และ 2. ถ้า $f'(x)$ มีเครื่องหมายเดียวกันตลอดช่วง (a,b)

จะได้ว่ารากสมการ $f(x)=0$ ในช่วง (a,b) มีหนึ่งคำตอบและค่าคำตอบเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.1 จงหารากของสมการ $x^3-9x^2+24x-7=0$

วิธีทำ เนื่องจาก $f'(x) = 3x^2 - 18x+24=0 = 3(x^2-6x+8)$

$= 3(x-2)(x-4)$

ดังนั้นมีช่วงที่จะต้องพิจารณา 3 ช่วงคือ $(-\infty,2),(2,4)$ และ $(4,\infty)$

ช่วงแรก $(-\infty,2)$; $f(2)=13$ และจะหาจำนวน a ซึ่ง $a\in(-\infty,2)$

ในกรณีนี้เลือก $a=0$ แล้ว $f(0)=-7$

เนื่องจาก $f(0)$ และ $f(2)$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกันเป็นไปตามทฤษฎี 2.2 ข้อ 1

ต่อไปจะมาพิจารณาตามทฤษฎี 2.2 ข้อ 2

$f'(0)=24,\ f'(1)=9$

$f'(-10)=234$ และ $f'(-100)=28224$

ดังนั้น $f'(x)$ มีเครื่องหมายเดียวกันตลอดในช่วง $(-\infty,2)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้น $f(x)$ มีรากในช่วง $(0,2)$

ช่วงที่สอง $(2,4)$; $f(2)=13$ และ $f(4)=9$

เนื่องจาก $f(2)$ และ $f(4)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น $f(x)$ ไม่มีรากในช่วง $(0,2)$

ช่วงที่สาม $(4,\infty)$; $f(4)=9$ และ $f(x)>9$ สำหรับทุกค่าของ x ซึ่ง $x\in(4,\infty)$

หรือกล่าวว่า f มีเครื่องหมายเดียวกัน

ดังนั้น $f(x)$ ไม่มีรากในช่วง $(4,\infty)$

นั่นคือสมการ $x^3-4x^2+21x-7=0$ มีรากเดียวในช่วง $(0,2)$ #

นอกจากวิธีการในการหาช่วงที่จะมีรากของสมการโดยทฤษฎี 2.2 แล้วยังมีวิธีการเขียนกราฟ หรือการหาค่าจากตารางของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ในการเขียนโปรแกรมเพื่อให้คอมพิวเตอร์หาช่วงที่จะมีรากนั้น จะต้องเริ่มด้วยการสร้างตาราง x ที่ $f(x)$ แล้ว พิจารณาช่วงของ x ที่ $f(x)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้ามดังตัวอย่างต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2 จงหารากของสมการ $x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 120x - 130 = 0$ ในช่วง $[-10,10]$

วิธีทำ เขียนโปรแกรมสร้างตาราง ดังนี้

```
      X  =  -10.0
200   Y = X*4-9.0*X*3-2.0*X*X+120.0*X-130.0
      WRITE (6,700) X,Y
700   FORMAT(1P2E15.5)
      IF(X.GE.10.0)STOP
      X = X+1.0
      GO TO 200
      END
```

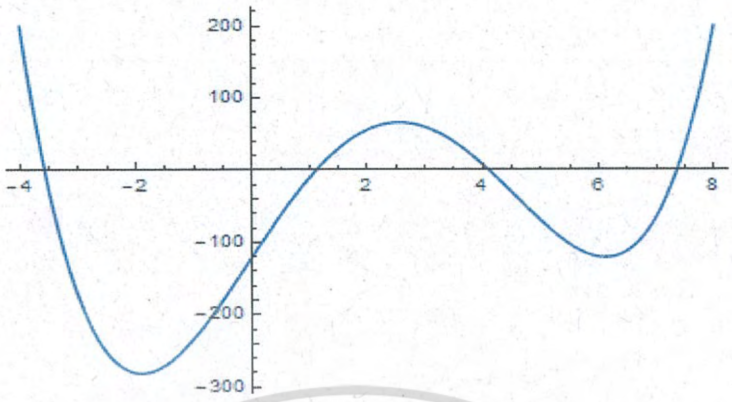
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า x , $f(x)$ ของตัวอย่าง 2.2

x	$f(x)$
−10.0000	17870.0000
−9.0000	12704.0000
−8.0000	7742.0000
−7.0000	4616.0000
−6.0000	2462.0000
−5.0000	1070.0000
−4.0000	254.0000
−3.0000	−148.0000
−2.0000	−274.0000
−1.0000	−238.0000
0.0000	−130.0000
1.0000	−16.0000
2.0000	62.0000
3.0000	86.0000
4.0000	62.0000
5.0000	20.0000
6.0000	14.0000
7.0000	122.0000
8.0000	446.0000
9.0000	1112.0000
10.0000	2270.0000

จะพบรากของสมการในช่วง $(-4,-3),(1,2)$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.1 กราฟแสดง $x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 120x - 130 = 0$ **มีช่วง** $(-10,10)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.1 สมการกำลังสอง

สมการกำลังสองอยู่ในรูป $ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq 0$ (1)

พิสูจน์ เพราะว่า $$ax^2+bx+c=0, a\neq 0$$

นำ a หารตลอดทั้งสมการ ; $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

นำ $\frac{c}{a}$ ลบทั้งสองข้างของสมการ ; $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

นำ $\frac{b^2}{4a}$ บวกทั้งสองข้างของสมการ ; $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

จะได้ว่า $$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ดังนั้น $$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

เพราะฉะนั้น $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า a,b,c เป็นจำนวนจริงแล้ว

$b^2-4ac>0$ รากเป็นจำนวนจริง 2 จำนวนที่ต่างกันคือ

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$b^2-4ac=0$ รากเป็นจำนวนจริง 2 จำนวนที่ซ้ำกันคือ

$$x=-\frac{b}{2a},-\frac{b}{2a}$$

$b^2-4ac<0$ รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนที่ต่างกันคือ

$$x=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}i}{2a},\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}i}{2a}$$

2.1.2 สมการกำลังสาม

สมการกำลังสามอยู่ในรูป $x^3+px^2+qx+r=0$ (2)

สามารถลดรูปโดยการแทน $x=y-\frac{p}{3}$ ในสมการที่ (2)

จะได้ว่า $(y-\frac{p}{3})^3+p(y-\frac{p}{3})^2+q(y-\frac{p}{3})+r=0$

$$y^3-3\frac{p}{3}y^2+3\frac{p^2}{3^2}y-\frac{p^3}{3^3}+p(y^2-2\frac{p}{3}y+\frac{p^2}{3^2})+qy-\frac{qp}{3}+r=0$$

$$y^3-py^2+\frac{p^2y}{3}-\frac{p^3}{3^3}+py^2-\frac{2p^2y}{3}+\frac{p^3}{3^2}+qy-\frac{qp}{3}+r=0$$

$$y^3+(\frac{p^2y}{3}-\frac{2p^2y}{3}+qy)+(-\frac{p^3}{3^3}+\frac{p^3}{3^2}-\frac{qp}{3}+r)=0$$

$$y^3+\frac{1}{3}(3q-p^2)y+\frac{1}{27}(2p^3+9pq+27r)=0 \quad (3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็นสมการกำลังสามที่อยู่ในรูป $$y^3 + ay + b = 0 \tag{4}$$

ซึ่ง $$a = \frac{1}{3}(3q - p^2)$$

และ $$b = \frac{1}{27}(2p^3 + 9pq + 27r)$$

จากสมการที่ (4) ให้ $y = u + v \neq 0$ เมื่อ u, v เป็นตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า

แทนค่า $y = u + v \neq 0$ ในสมการที่ (4) จะได้

$$(u+v)^3 + a(u+v) + b = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a(u+v) + b = 0$$

$$u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + a(u+v) + b = 0$$

$$u^3 + (u+v)(3uv + a) + v^3 + b = 0 \tag{5}$$

จากสมการที่ (5) ยังไม่สามารถสรุปอะไรได้จนกว่าเราจะกำหนดความสัมพันธ์ระหว่าง u, v ขึ้นมาก่อน

ต้องการลดรูปสมการที่ (5) ให้เหลือเป็น $u^3 + v^3 + b = 0$

เพราะฉะนั้นพิจารณา $u + v = 0$ หรือ $3uv + a = 0$

แต่ $u + v \neq 0$

ดังนั้น $3uv + a = 0$ หรือ $$uv = -\frac{a}{3} \tag{6}$$

จาก $u^3 + v^3 + b = 0$

จะได้ว่า $$u^3 + v^3 = -b \tag{7}$$

จากสมการที่ (6) ; $$u^3v^3 = -\frac{a^3}{27} \tag{8}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ย้อนกลับมาพิจารณากรณีผลบวกและผลคูณของสมการพหุนามกำลังสอง

จากสมการ $t^2+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}=0$ (9)

สมมติให้ t_1, t_2 เป็นรากของสมการ

จะได้ว่า $(t-t_1)(t-t_2)=0$

$t^2-(t_1+t_2)t+(t_1t_2)=0$ (10)

เทียบสัมประสิทธิ์ระหว่างสมการที่ (9) กับ (10)

$t_1+t_2=-\frac{b}{a}$ และ $t_1t_2=\frac{c}{a}$

จากสมการที่ (7), (8) เราสามารถหาผลบวกและผลคูณของ u^3, v^3 และแทนในสมการที่ (10)

จะได้ว่า $t^2+bt-\frac{a^3}{27}=0$ (11)

จากสมการที่ (11) เราสามารถหารากได้จาก $t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ กำหนดเป็น A และ B

โดยที่ $A=u^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$ และ $B=v^3=-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$

สมมติให้รากที่สามค่าหนึ่งของ A เขียนแทนด้วย $\sqrt[3]{A}$

ดังนั้นค่า u ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $u=\sqrt[3]{A}, u=\omega\sqrt[3]{A}, u=\omega^2\sqrt[3]{A}$

เมื่อ $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากที่สามของ 1

$$\frac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{2^3}=\frac{(-1)^3+3(-1)^2(\sqrt{3}i)+3(-1)(\sqrt{3}i)^2+(\sqrt{3}i)^3}{8}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\frac{-1+3\sqrt{3}i+9-3\sqrt{3}i}{8}=\frac{8}{8}=1$$

ในทำนองเดียวกัน สมมติให้รากที่สามค่าหนึ่งของ B เขียนแทนด้วย $\sqrt[3]{B}$

ดังนั้นค่า v ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $v=\sqrt[3]{B}, v=\omega\sqrt[3]{B}, v=\omega^2\sqrt[3]{B}$

เพราะฉะนั้นรากของสมการ $y^3+ay+b=0$ คือ

$$y_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$$
$$y_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$$
$$y_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$$

เมื่อ

$$A=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$$
$$B=-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$$

สมมติ p,q,r เป็นจำนวนจริง(แล้วดังนั้น a,b คือจำนวนจริง) มี 3 กรณีที่เป็นจริง

กรณีที่ 1 $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}>0$ มี 1 รากเป็นจำนวนจริง และ 2 รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนและเป็นคู่สังยุค

$$y_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$$
$$y_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}=(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{A}+(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{B}=-\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2}$$
$$y_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}=(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{A}+(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{B}=-\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2}$$

ซึ่ง $\sqrt[3]{A}\neq\sqrt[3]{B}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ 2 $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=0$ มี 2 รากเป็นจำนวนจริงซึ่งมีอย่างน้อย 2 รากจะมีค่าเท่ากัน

$$\text{เมื่อ } \sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}=-\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

$$\text{และ } \sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}=-\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

จะได้ว่า

$$y_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=-\sqrt[3]{\frac{b}{2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{2}}=-2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

$$y_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}=(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(-\sqrt[3]{\frac{b}{2}})+(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(-\sqrt[3]{\frac{b}{2}})=\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

$$y_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}=(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(-\sqrt[3]{\frac{b}{2}})+(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(-\sqrt[3]{\frac{b}{2}})=\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

กรณีที่ 3 $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}<0$ มี 3 รากเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน

$$y_k=2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos(\frac{\phi}{3}+\frac{2k\pi}{3}), k=0,1,2$$

ซึ่ง

$$\cos\phi=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{b^2/4}{-a^3/27}}, b>0\\ \sqrt{\dfrac{b^2/4}{-a^3/27}}, b\le 0\end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นรากคือ

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$y_2 = \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} = -2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3})$$

$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B} = -2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3})$$

จาก $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{27b^2 + 4a^3}{108}$

กำหนดให้ $27b^2 + 4a^3 = \Delta$

เนื่องจากกรณีนี้ให้ $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0$ ดังนั้นจะได้ว่า $\sqrt{\frac{27b^2 + 4a^3}{108}} = \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$

$$= i\sqrt{\frac{\Delta}{108}}$$

จะได้ว่า $A = -\frac{b}{2} + i\sqrt{\frac{\Delta}{108}}$ และ $B = -\frac{b}{2} - i\sqrt{\frac{\Delta}{108}}$ จะเห็นว่า A และ B เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นคู่สังยุคกัน

ดังนั้น รากทั้งสามของสมการ $y^3 + ay + b = 0$ คือ y_1, y_2 และ y_3 จะอยู่ในรูปรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนของ A และ B และค่า y_1, y_2 และ y_3 จะเป็นจำนวนจริงด้วยเหตุผลนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติให้ $\sqrt[3]{A} = a + bi$ ซึ่งเป็นรากที่สามค่าหนึ่งของ A จะได้ว่ารากที่สามค่าหนึ่งของ B จะเป็น $\sqrt[3]{B} = a - bi$ ทั้งนี้เพราะว่า B เป็นคู่สังยุคของ A และทั้งค่า $\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -\frac{a}{3}$ โดยจะได้ว่า

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$$

$$y_2 = \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} = (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(a+bi) + (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(a-bi)$$

$$y_2 = -\frac{a}{2} - \frac{bi}{2} + \frac{\sqrt{3}ai}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{a}{2} + \frac{bi}{2} - \frac{\sqrt{3}ai}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2} = -a - \sqrt{3}b$$

$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B} = (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(a+bi) + (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(a-bi)$$

$$y_3 = -\frac{a}{2} - \frac{bi}{2} - \frac{\sqrt{3}ai}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{a}{2} + \frac{bi}{2} + \frac{\sqrt{3}ai}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} = -a + \sqrt{3}b$$

ดังนั้นค่า y_1, y_2 และ y_3 จะเป็นจำนวนจริงที่มีค่าต่างกัน เพราะ $y_2 \neq y_3$ และถ้า $y_1 = y_2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ 2a &= -a - b\sqrt{3} \\ 3a &= -b\sqrt{3} \\ b &= -\sqrt{3}a \end{aligned}$$

จาก $\sqrt[3]{A} = a + bi = a + (-\sqrt{3}a)i = a(1-\sqrt{3}i)$

$$A = a^3(1-\sqrt{3}i)^3 = -8a^3$$

ซึ่งจะได้ว่า A เป็นจำนวนจริงเกิดข้อขัดแย้งในลักษณะที่เป็นไปไม่ได้ เพราะ A เป็นจำนวนเชิงซ้อน ในทำนองเดียวกัน ถ้า $y_1 = y_3$ จะเกิดข้อขัดแย้งที่เป็นไปไม่ได้

นั่นคือ y_1, y_2 และ y_3 เป็นจำนวนจริงที่มีค่าต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.3 จงแก้สมการ $x^3-6x+2=0$

วิธีทำ สมการ $x^3-6x+2=0$ เป็นการที่อยู่ในรูป $y^3+ay+b=0$

เนื่องจาก $a=-6, b=2>0$

จะได้ว่า $\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{2^2/4}{-(-6)^3/27}}=-0.3536$

$$\theta=69.2923, \frac{\theta}{3}=23.0974$$

แทนลงใน $y_k=-2\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\cos(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}), k=0,1,2$

$$y_1=-2\sqrt{2}\cos(23.0974)=-2.6017$$

$$y_2=-2\sqrt{2}\cos(143.0974)=2.2618$$

$$y_3=-2\sqrt{2}\cos(263.0974)=0.3399$$ #

จาก $a=-6, b=2$ และ $\Delta=-4a^3-27b^2=-4(-6)^3-27(2)^2$

จะได้ว่า $\sqrt{\dfrac{\Delta}{108}}=\sqrt{\dfrac{756}{108}}=\sqrt{7}$

ดังนั้น $A=-\dfrac{b}{2}+i\sqrt{\dfrac{\Delta}{108}}=-1+i\sqrt{7}, B=-\dfrac{b}{2}-i\sqrt{\dfrac{\Delta}{108}}=-1-i\sqrt{7}$

ดังนั้นรากของสมการ $x^3-6x+2=0$ จะเป็น

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$$
$$x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$$
$$x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาราก x_1, x_2 และ x_3 ไม่สามารถหาโดยวิธีการคำนวณทางพีชคณิตได้ เพราะเราจะต้องหารากที่สามของจำนวนเชิงซ้อน A และ B การหาค่ารากที่สามของ A และ B ไม่สามารถดำเนินทางพีชคณิตได้ กรณีดังกล่าวเรียกว่า กรณีลดทอนไม่ได้ของสมการกำลังสาม

ในกรณีที่ลดทอนไม่ได้ของสมการกำลังสาม การหาค่ารากที่สามของ

$A=-\frac{b}{2}+i\sqrt{\frac{\Delta}{108}}$ *เมื่อ* $-27b^2-4a^3=\Delta$ กระทำโดยใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติดังนี้

พิจารณา $A=-\frac{b}{2}+i\sqrt{\frac{\Delta}{108}}=-\frac{b}{2}+i\sqrt{-\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}}$

จากนิยาม กำหนดให้ $x=x_1+x_2i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆค่าสัมบูรณ์ของหรือโมดูลัส*(modulus)*ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ และ $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

ให้ $r=|A|$;(Modulus of A)

จะได้ว่า

$$r=\sqrt{(-\frac{b}{2})^2+(-\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27})}$$

$$r^2=(-\frac{b}{2})^2+(-\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27})$$

$$r^2=(-\frac{b}{2})^2-(\frac{b^2}{4})-(\frac{a}{3})^3$$

$$r^2=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}-(\frac{a}{3})^3$$

$$r=(-\frac{a}{3})^{\frac{3}{2}}=\frac{-a\sqrt{-a}}{\sqrt{27}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์(Argument) ของ A เมื่อ $-\pi < \theta \leq \pi$ จะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{-\frac{b}{2}}{r} = \frac{-\frac{b}{2}}{-\frac{a\sqrt{-a}}{\sqrt{27}}} = \frac{\sqrt{27}b}{2a\sqrt{-a}}$$ และ

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\frac{\Delta}{108}}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{\Delta}{108}}}{-\frac{a\sqrt{-a}}{\sqrt{27}}} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{-a}}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\tan\theta = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{27}b}$ เนื่องจากมุม θ จะต้องเลือกมุมที่แขนของมุมตกอยู่ในจตุรภาคที่1 หรือจตุรภาคที่2 ให้สอดคล้องกับค่าของ q ว่ามีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบ เมื่อหาค่า θ, r ได้แล้วจะได้ว่า

จาก $z = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$

ต้องการหารากที่สามของ A จะได้ว่า

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{r}(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}) = \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3})$$

เนื่องจาก B เป็นคู่สังยุคของ A จะได้ว่า $\sqrt[3]{B} = \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3})$

เพราะว่า $\omega = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}) + \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3})$$

$$y_1 = \sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{-\frac{a}{3}}i\sin\frac{\theta}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\frac{\theta}{3} - \sqrt{-\frac{a}{3}}i\sin\frac{\theta}{3} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$y_2 = \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B}$$

$$y_2 = \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}) + \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3})$$

$$y_2 = \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}i\sin\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\theta}{3} +$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}i\sin\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\theta}{3})$$

$$y_2 = \sqrt{-\frac{a}{3}}(2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\theta}{3}) = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\theta}{3})$$

จาก $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3})$$

$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})$$

$$y_3 = \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}) + \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3})$$

$$y_3 = \sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}i\sin\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} + \sin 120^\circ\sin\frac{\theta}{3} +$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}i\sin\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\theta}{3})$$

$$y_3 = \sqrt{-\frac{a}{3}}(2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\theta}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\theta}{3})$$

จาก $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$$y_3 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่ $y_2 \neq y_3$

ดังนั้น $y_3 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})$

ดังนั้นรากของสมการ $y^3 + ay + b = 0$ คือ

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$y_2 = \omega^3\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})$$

$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega^3\sqrt[3]{B} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})$$

เนื่องจาก $\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3})$ และ

$$\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3})$$

ดังนั้นเพื่อสะดวกในการปฏิบัติ เขียนในรูปอย่างง่ายได้เป็น

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$y_2 = \omega^3\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} = -2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3})$$

$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega^3\sqrt[3]{B} = -2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3})$$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.3 สมการกำลังสี่

สมการกำลังสี่อยู่ในรูป $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$

ลดรูปโดยการแทน $x = y - \frac{p}{4}$

จะได้ว่า

$$(y-\frac{p}{4})^4 + p(y-\frac{p}{4})^3 + q(y-\frac{p}{4})^2 + r(y-\frac{p}{4}) + s = 0$$
$$y^4 - py^3 + \frac{3}{8}p^2y^2 - \frac{1}{16}p^3y + \frac{p^4}{4^4} + py^3 - \frac{3}{4}p^2y^2 + \frac{3}{16}p^3y$$
$$-\frac{p^4}{4^4} + qy^2 - \frac{1}{2}pqy + \frac{1}{4^2}p^2q + ry - \frac{1}{4}pr + s = 0$$
$$y^4 - \frac{3}{8}p^2y^2 + \frac{1}{8}p^3y - \frac{3}{4^4}p^4 + qy^2 - \frac{1}{2}pqy + \frac{1}{4^2}p^2q + ry - \frac{1}{4}pr + s = 0$$
$$y^4 + (q - \frac{3}{8}p^2)y^2 + (\frac{1}{8}p^3 + r - \frac{1}{2}pq)y + (s - \frac{3}{256}p^4 + \frac{1}{16}p^2q - \frac{1}{4}pr) = 0$$

จะได้ว่า $y^4 + ay^2 + by + c = 0$ (1)

เมื่อ $a = q - \frac{3}{8}p^2, b = \frac{1}{8}p^3 + r - \frac{1}{2}pq, c = s - \frac{3}{256}p^4 + \frac{1}{16}p^2q - \frac{1}{4}pr$

โดยกระบวนวิธีของเฟอร์รารีจะกระทำดังนี้

จาก $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$

แปลงให้อยู่ในรูป $x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$ (2)

แล้วบวก $\frac{p^2}{4}x^2$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$(x^2 + \frac{p^2}{4}x)^2 = (\frac{p^2}{4} - q)x^2 - rx - s \quad (3)$$

สมการที่ (1), (3) เป็นสมการที่สมมูลกัน พิจารณาสมการที่ (3) ในกรณีต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่1 ถ้า $(\frac{p^2}{4}-q)x^2-rx-s$ สามารถเขียนอยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ การหารากของสมการที่ (3) ทำได้โดยใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$(x^2+\frac{p^2}{4}x)^2=\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)x^2-rx-s}$$

กรณีที่2 ถ้า $(\frac{p^2}{4}-q)x^2-rx-s$ ไม่สามารถเขียนเป็นกำลังสองสมบูรณ์

กระบวนการของเฟอร์รารี จะทำการบวก $y(x^2+\frac{p}{2}x)+\frac{y^2}{4}$ ทั้งสองด้านของสมการที่ (3)

จะได้ว่า $x^4+px^3+\frac{p^2}{4}x^2+y(x^2+\frac{p}{2}x)+\frac{y^2}{4}=\frac{p^2}{4}x^2-qx^2-rx-s+y(x^2+\frac{p}{2}x)+\frac{y^2}{4}$

$$(x^2+\frac{p^2}{4}x+\frac{y}{2})^2=(\frac{p^2}{4}-q+y)x^2+(\frac{1}{2}py-r)x+(\frac{y^2}{4}-s) \quad (4)$$

จากสมการที่ (4) จะเห็นว่า $(x^2+\frac{p^2}{4}x+\frac{y}{2})^2=(\frac{p^2}{4}-q+y)x^2+(\frac{1}{2}py-r)x+(\frac{y^2}{4}-s)$ สามารถเขียนอยู่ในรูป $(ex+f)^2$ ได้เมื่อ e,f เป็นค่าคงที่ หรือ ถ้า

กำหนดให้ $A=\frac{p^2}{4}-q+y, B=\frac{py}{2}-r, C=\frac{y^2}{4}-s$

จะได้ว่า $$Ax^2+Bx+C=(ex+f)^2 \quad (5)$$

ก็ต่อเมื่อ $$B^2-4AC=0 \quad (6)$$

จาก (9) โดยการเทียบสัมประสิทธ์จะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$A=e^2, B=2ef, C=f^2 \quad (7)$$

พิจารณาสมการ (7)

1. ถ้า $A=C=0$ แล้ว $B=0$ ซึ่งจะได้ว่า $e=f=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ถ้า $A \neq 0$ หรือ $B \neq 0$ หาค่า e และ f ได้ดังนี้

ก) ถ้า $A \neq 0$ จะได้ว่า $e = \sqrt{A}$ และ $f = \dfrac{B}{2e}$

ข) ถ้า $C \neq 0$ จะได้ว่า $f^2 = C \neq 0$ ดังนั้นขวามือของ (7) เป็นกำสองของเชิงเส้น $ex + f$ ถ้า y สอดคล้องกับสมการ

ดังนั้นค่า y ที่จะนำไปใช้ในการแก้สมการพหุนามกำลังสี่ $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ ตามกระบวนการวิธีของเฟอร์รารี จะต้องสอดคล้องกับสมการ

จาก (7) จะได้ว่า $B^2 = 4AC$

แทน $A = \dfrac{p^2}{4} - q + y, B = \dfrac{1}{2}ay - r, C = \dfrac{1}{4}y^2 - s$ ลงใน $B^2 = 4AC$

จะได้ว่า $(\dfrac{1}{2}ay - r)^2 = 4(\dfrac{p^2}{4} - q + y)(\dfrac{1}{4}y^2 - s)$

$$\frac{1}{4}p^2y^2 - pry + r^2 = 4(\frac{1}{4}y^3 - sy + \frac{1}{4^2}p^2y^2 - \frac{1}{4}p^2s - \frac{1}{4}qy^2 + qs)$$

$$\frac{1}{4}p^2y^2 - pry + r^2 = y^3 - 4sy + \frac{1}{4}p^2y^2 - p^2s - qy^2 + 4qs$$

$$0 = y^3 - qy^2 + (pr - 4s)y - p^2s + 4qs - r^2 \qquad (8)$$

หา y ที่เป็นรากของสมการ (8) ซึ่งจะได้ว่า

$$(\frac{p^2}{4} - q + y)x^2 + (\frac{1}{2}ay - r)x + (\frac{1}{4}y^2 - s) = (ex + f)^2$$

$$(x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{y}{2})^2 = (ex + f)^2$$

ซึ่งแยกเป็นสมการกำลังสองได้สองสมการดังนี้ $x^2 + \dfrac{p}{2}x + \dfrac{y}{2} = ex + f$, $x^2 + \dfrac{p}{2}x + \dfrac{y}{2} = -ex - f$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.4 จงแก้สมการ $x^4+4x-1=0$

วิธีทำ สมการ $x^4+4x-1=0$ เมื่อเทียบกับรูปสมการทั่วไป

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

จะได้ว่า $p=0, q=0, r=4, s=-1$

ดังนั้นสมการช่วยแก้สมการกำลังสี่คือ $y^3-qy^2+(pr-4s)y+(4qs-r^2-p^2s)=0$

จะสมมูลกับสมการ $y^3+4y-16=0$ ซึ่งมี $y=2$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $y^3+4y-16=0$

เลือก $y=2$ จะได้ว่า สมการ $(x^2+\frac{p}{2}x+\frac{y}{2})^2=(ex+f)^2$ สมมูลกับสมการ $(x^2+1)^2=(ex+f)^2$

เพราะว่า $f^2=\frac{y^2}{4}-s=\frac{4}{4}+1=2 \rightarrow f=\sqrt{2}$

และจาก $f=\frac{B}{2e} \rightarrow 2e=\frac{B}{f}$

$$2e=\frac{\frac{p}{2}2-r}{f}=\frac{0-4}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

จาก (1) เมื่อ $e=-\sqrt{2}$ และ $f=\sqrt{2}$ จะได้ว่า

$$(x^2+1)^2=(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2$$

ซึ่งจะได้ว่า $x^2+1=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ หรือ $x^2+1=-\sqrt{2}x+2$

จาก $x^2+1=\sqrt{2}x-\sqrt{2} \rightarrow x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1=0$

$$\rightarrow x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4(\sqrt{2}+1)}}{2}$$

$$\rightarrow x=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{\sqrt{8}+1}}{\sqrt{2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $x^2+1=-\sqrt{2}x+\sqrt{2} \to x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1=0$

$$\to x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4(\sqrt{2}-1)}}{2}$$

$$\to x=\frac{-1\pm\sqrt{\sqrt{8}-1}}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้นรากของสมการ $x^4+4x-1=0$

คือ $\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{\sqrt{8}+1}}{\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{\sqrt{8}+1}}{\sqrt{2}},\frac{-1+\sqrt{\sqrt{8}-1}}{\sqrt{2}},\frac{-1-\sqrt{\sqrt{8}-1}}{\sqrt{2}}$ #

2.1.4 จำนวนรากของสมการพหุนาม

พิจารณาสมการพหุนามดีกรี n

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$$

ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิตกล่าวว่า ถ้า $p(x)$ มีดีกรี n เป็นจำนวนคี่แล้วจะมีรากที่เป็นจำนวนจริง อย่างน้อย 1 ราก หรือรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อย 1 คู่ ที่เป็นคู่สังยุคกัน และถ้า $p(x)$ มีดีกรี n เป็นจำนวนคู่แล้วจะมีรากที่เป็นจริง n รากหรือรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน $\frac{n}{2}$ คู่ ที่เป็นคู่สังยุคกัน ถ้าสัมประสิทธิ์ $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ ของ $p(x)$ เป็นจำนวนจริง แล้วรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะมีคู่สังยุคอยู่ในรูป $c\pm di$ (c,d เป็นจำนวนจริง) และ $i^2=-1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กฎแห่งเครื่องหมายของเดการ์ต(Descartes' rules of sign)

กำหนดให้ $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ เป็นสมการพหุนามในดีกรี n และ $a_0,a_1,...,a_n$ เป็นสัมประสิทธิ์ของ $p(x)$ ให้ v เป็นจำนวนครั้งของการเปลี่ยนเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ที่เรียงตามลำดับ $a_0,a_1,...,a_n$ (ยกเว้นสัมประสิทธิ์ที่เป็น 0)

ถ้า n_p เป็นจำนวนของรากที่เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว

$i.\ n_p \le v,$

$ii.\ v-n_p$ เป็นจำนวนคู่

รากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $p(x)$ ถ้ามีอยู่คือรากที่เป็นรากจำนวนจริงบวกของ $p(-x)$ จำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $p(x)$ จะเท่ากับจำนวนครั้งของการเปลี่ยนเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ที่เรียงตามลำดับ $a_0,a_1,...,a_n$ ของ $p(-x)$

กฎ Descartes' rules of signจะบอกจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงบวกได้แน่นอนในกรณีที่ $v=0, v=1$ เท่านั้น ส่วนกรณีที่ $v>1$ จะบอกได้เพียงขีดจำกัดสูงสุดของจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงบวกหรือลบเท่านั้น และจากเหตุผลดังกล่าวนี้ สามารถบอกจำนวนรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ด้วย

ตัวอย่าง 2.5 พิจารณาสมการ $p(x)=x^4+2x^2-x-1$

จะได้ว่า $v=1$ โดยตามกฎ Descartes' rules of signข้อ $i.\ n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 1$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ 0 หรือ 1

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.\ v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=1$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $p(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $p(x)$

จะได้ว่า $p(-x)=x^4+2x^2+x-1$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง แล้ว $p(-x)$ มี 1 ราก ที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $p(x)$ มี 1 ราก ที่เป็นจำนวนจริงลบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปได้ว่า รากของ $p(x)$ คือ 1 ราก ที่เป็นจำนวนจริงบวก, 1 ราก ที่เป็นจำนวนจริงลบ และมี 2 ราก ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนและเป็นคู่สังยุค #

ตัวอย่าง 2.6 พิจารณาสมการ $p(x)=x^3-3x^2+1$

จะได้ว่า $v=2$ โดยตามกฎ Descartes' rules of sign ข้อ $i.$ $n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 2$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ $0,1,2$

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.$ $v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=0,2$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $p(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $p(x)$

จะได้ว่า $p(-x)=-x^3-3x^2+1$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง จะได้ว่า $p(-x)$ มี 1 ราก ที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $p(x)$ มี 1 ราก ที่เป็นจำนวนจริงลบ

สรุปได้ว่า รากของ $p(x)$ คือ

1) รากที่เป็นจำนวนจริงลบ 1 ราก และรากที่เป็นจำนวนบวก 2 ราก หรือ

2) รากที่เป็นจำนวนจริงลบ 1 ราก และรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ราก #

ทฤษฎีของบูแดง(Budan's *theorem*)

ให้ $p^{(k)}(c)$ เป็นค่าอนุพันธ์อันดับ k ของ $p(x)$ ซึ่งเป็นสมการพหุนามดีกรี n ที่จุด $x=c, k=1,2,\ldots,n$ และให้ $N(c)$ เป็นจำนวนครั้งของการเปลี่ยนเครื่องหมาย
ของ $p(c), p'(c), p''(c), \ldots, p^{(n)}(c)$ จำนวนรากของสมการ $p(x)=0$ ในช่วง (a,b)
จะเท่ากับ $N(a)-N(b)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.7 พิจารณาสมการ $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

$p'(x) = 3x^2 - 6x$ ถ้า $3x(x-2) = 0$ แล้ว $x = 0, 2$

$p''(x) = 6x - 6$ ถ้า $6(x-1) = 0$ แล้ว $x = 1$

$p'''(x) = 6$

เลือก $x = c = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

ตารางที่ 2.2 **แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีบูแดงของตัวอย่าง** 2.7

c	$p(c)$	$p'(c)$	$p''(c)$	$p'''(c)$	$N(c)$
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$+$	0	$-$	$+$	2
1	$-$	$-$	0	$+$	1
2	$-$	0	$+$	$+$	1
3	$+$	$+$	$+$	$+$	0

$N(-1) - N(0) = 3 - 2 = 1$
$N(0) - N(1) = 2 - 1 = 1$
$N(2) - N(3) = 1 - 0 = 1$

ดังนั้นจากทฤษฎีบูแดง สมการ $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ มีราก 1 ราก ในแต่ละช่วงต่อไปนี้

$(-1, 0), (0, 1), (2, 3)$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.8 พิจารณาสมการ $p(x)=x^3+x^2+1=0$

$p'(x)=3x^2+1$ ถ้า $3x^2+1=0$ แล้ว $x^2=-\frac{1}{3}$

$p''(x)=6x$

$p'''(x)=6$

เลือก $x=c=-1,-0.5,0,1$

ตารางที่ 2.3 **แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีบูแดงของตัวอย่าง** 2.8

c	$p(c)$	$p'(c)$	$p''(c)$	$p'''(c)$	$N(c)$
-1	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-0.5	$+$	$+$	$-$	$+$	2
0	$+$	$+$	0	$+$	0
1	$+$	$+$	$+$	$+$	0

$N(-1)-N(-0.5)=3-2=1$

$N(-1)-N(-0.5)=2-0=2$

ดังนั้นจากทฤษฎีบูแดง สมการ $x^3+x^2+1=0$ อาจจะ

1) มีรากที่เป็นจำนวนจริง 1 ราก ในช่วง $(-1,-0.5)$ และมีรากที่เป็นจำนวนจริง 2 ราก ในช่วง $(-0.5,0)$ หรือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) มีรากที่เป็นจำนวนจริง 1 ราก ในช่วง $(-1,-0.5)$ และมีรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ราก ในช่วง $(-0.5,0)$

จากกฎของเดการ์ต : $p(x)=x^3+x+1=0$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย แสดงว่า $p(x)$ ไม่มีรากที่เป็นจำนวนจริงบวกและ $p(-x)=-x^3-x+1=0$ สัมประสิทธิ์มีการเปลี่ยนเครื่องหมายครั้งเดียว แสดงว่า $p(x)$ มีรากที่เป็นจำนวนจริงลบ 1 ราก

สรุปได้ว่า รากของ $p(x)$ คือ รากที่เป็นจำนวนจริงลบ 1 รากและรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ราก #

ลำดับฟังก์ชันของสเติร์ม*(Sturm's Sequence of function)* คือลำดับฟังก์ชัน $f_0(x), f_1(x),\ldots$ ที่ได้มาจากการกำหนด

$$f_0(x)=p(x)$$
$$f_1(x)=p'(x)$$
$$f_0(x)=q_1(x)\cdot f_1(x)-f_2(x)$$
$$f_1(x)=q_2(x)\cdot f_2(x)-f_3(x)$$

ในรูปทั่วไป $f_{k-2}(x)=q_{k-1}(x)f_{k-1}(x)-f_k(x); k=2,3,\ldots$

ทฤษฎีของสเติร์ม

1. ถ้าสมการ $p(x)=0$ ไม่มีรากค่าซ้ำ การทำลำดับฟังก์ชันจะสิ้นสุดเมื่อได้ $f_k(x)$ เป็นค่าคงที่ไม่ใช่ศูนย์ โดยมี $k=n$ และกำหนดให้ $g_r(x)=f_r(x); r=0,1,2,\ldots,n$ เพื่อการตรวจสอบต่อไป

2. ถ้าสมการ $p(x)=0$ มีรากค่าซ้ำ การทำลำดับฟังก์ชันจะสิ้นสุดลงเมื่อ $f_k(x)$ เป็นศูนย์ โดยมี $k\le n$ รากค่าซ้ำคือ จุดที่ทำให้ $f_{k-1}(x)=0$ และจำนวนครั้งที่เป็นรากค่าซ้ำคือ $n-k+2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณี กำหนดให้ $g_r(x) = \dfrac{f_r(x)}{f_{k-1}(x)}; N = 0,1,\ldots,k-1$ ในการหารากจริงที่มีค่าต่างกัน ถ้าให้ $N(c)$ แทนจำนวนครั้งในการเปลี่ยนเครื่องหมายของลำดับจำนวน $g_0(c), g_1(c),\ldots$ ที่ได้จากการแทนค่าหาฟังก์ชัน $g_r(x)$ ต่างๆ ที่จุด $x = c$ จะได้ว่าทั้งสองกรณี จำนวนรากจริงที่มีค่าต่างกันในช่วง $[a,b]$ กับ $N(a)-N(b)$

$$f_0(x) = g_1(x)\cdot f_1(x) - f_2(x)$$
$$\frac{f_0(x)}{f_1(x)} = g_1(x) - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.9 พิจารณา $p(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$

$$f_0(x) = p(x) = x^3 - 3x - 5$$
$$f_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 3$$
$$\frac{x^3 - 3x - 5}{3x^2 - 3} = \frac{1}{3}x - \frac{2x+5}{3x^2 - 3}$$
$$f_2(x) = 2x + 5$$
$$\frac{3x^2 - 3}{2x+5} = \frac{3}{2}x - \frac{15}{4} + \frac{63/4}{2x+5}$$
$$f_3(x) = -\frac{63}{4} \neq 0$$

นั้นคือสมการ $x^3 - 3x - 5 = 0$ ไม่มีค่ารากซ้ำ

ตรวจสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายของลำดับฟังก์ชัน เมื่อคิดค่าที่จุดต่างๆ

ตารางที่ 2.4 แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีของสเติร์มของตัวอย่าง 2.9

c	$g_0(c)$	$g_1(c)$	$g_2(c)$	$g_3(c)$	$N(c)$
$-\infty$	−	+	−	−	2
0	−	−	+	−	2
1	−	0	+	−	2
2	−	+	+	−	2
3	+	+	+	−	1
∞	+	+	+	−	1

สมการ $x^3 - 3x - 5 = 0$ มีรากที่เป็นจำนวนจริงอยู่ในช่วง $(2,3)$ 1 ราก ดังนั้นรากที่เหลืออีกสองตัวต้องเป็นรากเชิงซ้อน #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.10 พิจารณา $p(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0$

$$f_0(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x-4$$

$$f_1(x)=4x^3-6x^2-6x+8$$

$$\frac{f_0(x)}{f_1(x)}=\frac{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}{4x^3-6x^2-6x+8}$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}+\frac{(-9/4)x^2+(21/4)x-3}{4x^3-6x^2-6x+8}$$

$$f_2(x)=\frac{9}{4}x^2-\frac{21}{4}x+3$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{4x^3-6x^2-6x+8}{(9/4)x^2-(21/4)x+3}$$

$$=\frac{16}{9}x+\frac{40}{27}-\frac{(32/9)x-(32/9)}{(9/4)x^2-(21/4)+3}$$

$$f_3(x)=\frac{32}{9}x-\frac{32}{9}$$

$$\frac{f_2(x)}{f_3(x)}=\frac{(9/4)x^2-(21/4)x+3}{(32/9)x-(32/9)}$$

$$=\frac{81}{128}x-\frac{108}{128}$$

$$f_4(x)=0$$

แสดงว่ารากมีค่าซ้ำ ที่ทำให้ $f_3(x)=0$

$\frac{32}{9}(x-1)=0$ แล้ว $x=1$

$n=4, k=4$ แล้ว $n-k+2=4-4+2=2$

ดังนั้น $x=1$ เป็นจุดที่ทำให้รากที่มีค่าซ้ำ 2 ราก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อไปตรวจสอบจำนวนรากจริงในช่วงต่างๆ เนื่องจากเป็นกรณีที่มีรากซ้ำดังนั้น

$$g_r(x) = \frac{f_r(x)}{f_{k-1}(x)}; r = 0,1,2,3$$

$$f_{4-1}(x) = f_3(x) = \frac{32}{9}x - \frac{32}{9} = \frac{32}{9}(x-1) \text{ แล้ว } x = 1$$

การคูณฟังก์ชันของสเติร์มด้วยจำนวนบวกใดๆ ไม่เปลี่ยนแปลงลักษณะของราก คือ

$$g_0(x) = \frac{f_0(x)}{x-1} = \frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}{x-1} = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$g_1(x) = \frac{f_1(x)}{x-1} = \frac{4x^3 - 6x^2 - 6x + 8}{x-1} = 4x^2 - 2x - 8$$

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)}{x-1} = \frac{(9/4)x^2 - (21/4)x + 3}{x-1} = \frac{9}{4}x - 3$$

$$g_3(x) = \frac{f_3(x)}{x-1} = \frac{(32/9) - (32/9)}{x-1} = \frac{32}{9}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.5 แสดงการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยทฤษฎีของสเติร์มของตัวอย่าง 2.10

c	$g_0(c)$	$g_1(c)$	$g_2(c)$	$g_3(c)$	$N(c)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-2	0	$+$	$-$	$+$	2
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
1	0	$-$	$-$	$+$	1
1.5	$-$	$-$	$+$	$+$	1
2	0	$+$	$+$	$+$	0

สมการ $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$ มีรากที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันในแต่ละช่วงคือ $(-3,-2), (0,1)$ และ $(1,2)$

ในช่วง $(-3,-2); (-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 8(-2) - 4 = 0$ ดังนั้น $x = -2$ คือราก

ในช่วง $(0,1); (1) = 1^4 - 2.1^4 - 3.1^4 = 1 - 2 - 3 + 8 - 4 = 0$ ดังนั้น $x = 1$ คือรากและเป็นรากค่าซ้ำ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

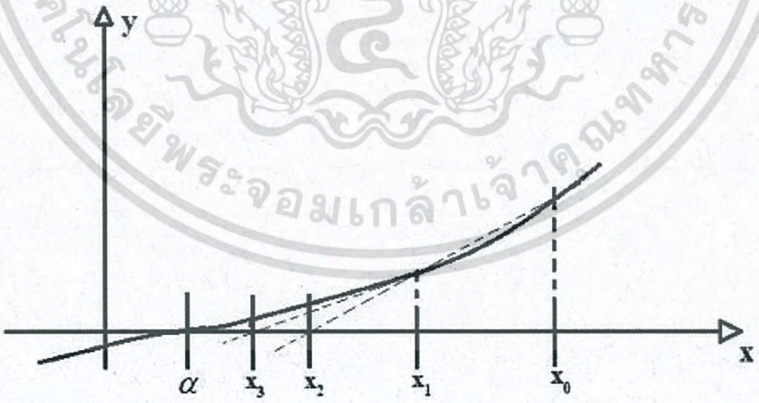
2.1.5 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

ระเบียบวิธีการหารากของสมการ $f(x)=0$ นั้นมีหลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) , ระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ (False Position method) , ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Rapson method) , ระเบียบวิธีทำซ้ำ (Fixed Point method) เป็นต้น

ในงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยเลือกใช้ระบบวิธีเซแคนท์และระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน เนื่องจากทั้งสองวิธีนี้เป็นระเบียบวิฑีที่ลู่เข้าเร็วกว่าระเบียบวิธีอื่นๆ โดยระเบียบวิธีเซแคนท์มีอัตราการลู่เข้าอันดับ 1.62 ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน มีอัตราลู่เข้าอันดับ 2 ส่วนวิธีอื่นๆมีอัตราลู่เข้า 1 [4]

ระเบียบวิธีเซแคนท์

โดยทั่วไปการหารากเราจะกำหนดช่วง (a,b) ที่มีเครื่องมีเครื่องหมายตรงกันข้าม แต่ในกรณีนี้เราจะไม่กำหนดช่วง (a,b) มีเครื่องหมายตรงกันข้าม แต่เราจะบอกว่ามีจุด 2 จุด คือจุด x_0 และ จุด x_1 เราจะหา f ที่ x_0 และหา f ที่ x_1 จะลากเส้นตรงเชื่อมระหว่าง $(x_0, f(x_0))$ กับ $(x_1, f(x_1))$ จากนั้นเราจะต่อเส้นตรงให้ตัดกับแกน x จุดตัดนั้นจะเรียกว่า x_2 ทำซ้ำไปเรื่อยๆจนได้ค่าราก



รูปที่ 2.2 แสดงกราฟลักษณะการหารากของระเบียบวิธีเซแคนท์

ดังนั้น
$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประมาณค่า x_3 จาก x_2 และ x_1 โดย

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

ในรูปทั่วไป $x_{k+1} = \dfrac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}; k = 1, 2, \ldots$

หรือ $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k); k = 1, 2, \ldots$, ค่าคลาดเคลื่อน

$|\varepsilon_k| = |x_{k+1} - x_k|$

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหารากของสมการ $x^6 - x - 1 = 0$ โดยระเบียบวิธีเซแคนต์

ในช่วง $[1,2]$ ต้องการความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.2 กระทำซ้ำเป็น 3

วิธีทำ $x_0 = 2$ และ $x_1 = 1$ โดย $f(x_0) = 61$ และ $f(x_1) = -1$

$$x_2 = \frac{2(-1) - 1(61)}{-1 - 61} = 1.016$$

$$f(x_2) = f(1.016) = -0.916$$

$$x_3 = \frac{1(-0.916) - 1.016(-1)}{-0.916 - (-1)} = 1.19$$

$$f(x_3) = 0.65$$

เนื่องจาก $|x_3 - x_2| > 0.0001$ ทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวข้างต้นจนกว่าจะได้ $|x_3 - x_2| < 0.0001$ แล้ว x_3 คือรากของสมการ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

การหารากสมการ $f(x)=0$ ซึ่งเป็นพหุนามดีกรี n

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0;n\ge 1 \tag{1}$$

ซึ่งมี $(x-z)$ เป็นตัวประกอบ

ให้ $f(x)=(x-z)q(x)+b_0$ (2)

$q(x)$ มาจากการหาร $f(x)$ ด้วย $(x-z)$ และ b_0 เป็นเศษ

$$q(x)=b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_2x+b_1 \tag{3}$$

แทนสมการที่ (3) ในสมการที่ (2)

$$f(x)=(x-z)b_nx^{n-1}+(x-z)b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+(x-z)b_2x+(x-z)b_1+b_0$$

$$=b_nx^n-zb_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-1}-zb_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_2x^2-zb_2x+b_1x-zb_1+b_0$$

$$=b_nx^n+(b_{n-1}-zb_n)x^{n-1}+\ldots.+(b_1-zb_2)x+(b_0-zb_1) \tag{4}$$

เปรียบเทียบสมการที่ (1) และสมการที่ (4)

$a_n=b_n$ หรือ $b_n=a_n$

$a_{n-1}=b_{n-1}-zb_n$ หรือ $b_{n-1}=a_{n-1}+zb_n$

$$b_k=a_k+zb_{k+1};k=n-1,n-2,\ldots,1,0 \tag{5}$$

ถ้าแทน $x=z$ ในสมการที่ (2) แล้ว $f(z)=b_0$ (5)'

ต่อไปให้ $q(x)=(x-z)r(x)+c_1$ (6)

$r(x)$ ได้มาจากการหาร $q(x)$ ด้วย $(x-z), c_1$ เป็นเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$r(x)=c_nx^{n-2}+c_{n-1}x^{n-3}+...+c_3x+c_2 \tag{7}$$

แทนสมการที่ (7) ในสมการที่ (6)

$$q(x)=(x-z)c_nx^{n-2}+(x-z)c_{n-1}x^{n-3}+...+(x-z)c_3x+(x-z)c_2+c_1$$

$$=c_nx^{n-1}-zc_nx^{n-2}+xc_{n-1}x^{n-3}-zc_{n-1}x^{n-3}+...+c_3x^2-zc_3x+c_2x-zc_2+c_1$$

$$=c_nx^{n-1}+(c_{n-1}-zc_n)x^{n-2}+...+(c_2-zc_3)x-(c_1-zc_2) \tag{8}$$

เปรียบเทียบสมการที่ (3) และสมการที่ (8)

$b_n=c_n$ หรือ $c_n=b_n$

$b_{n-1}=c_{n-1}-zc_n$ หรือ $c_{n-1}=b_{n-1}+zc_n$

$$c_k=b_k+zc_{k+1};k=n-1,n-2,...,1,0 \tag{9}$$

ถ้าแทน $x=z$ ในสมการที่ (6) แล้ว $q(z)=c_1$

จากสมการที่ (2) $f'(x)=(x-z)q'(x)+q(x)$ (10)

แทน $x=z$ ในสมการที่ (10) แล้ว $f'(z)=q(z)=c_1$ (10)'

จากระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน; $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)};k=0,1,2,...$

จากสมการที่ (5)' และจากสมการที่ (10)'

แล้ว $f(x_0)=b_0$ และ $f'(x_0)=c_1$

ดังนั้น $x_1=x_0-\dfrac{b_0}{c_1}$, $x_2=x_1-\dfrac{b_0}{c_1}$ และต่อๆไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.12 จงหารากทุกตัวของสมการ $x^3-3x-5=0$ กระทำซ้ำ 4 ครั้ง

วิธีทำ จากการทดสอบโดยใช้ทฤษฎีสเติร์ม พบว่าสมการที่กำหนดมีรากจริงหนึ่งตัวในช่วง $(2,3)$

$p(x)=x^3-3x-5$ เลือก $x_0=2$

$z=x_0=2$

$q(x)=\dfrac{p(x)}{x-2}=x^2+2x+1+\dfrac{(-3)}{x-2}$ แล้ว $b_0=-3$

$r(x)=\dfrac{q(x)}{x-2}=x+4+\dfrac{9}{x-2}$ แล้ว $c_1=9$

$x_1=2-\dfrac{(-3)}{9}=2.3333$

$z=x_0=2$

ตารางที่ 2.6(1) **แสดงการหาค่า** a_k,b_k,c_k **ของตัวอย่าง** 2.12

k	a_k	b_k	c_k
3	1	1	1
2	0		
1	-3		
0	-5		

$b_n=c_n$ หรือ $b_3=a_3=1$, $c_n=a_n$ แล้ว $c_3=a_3=1$

$b_k=a_k+zb_{k+1}$ แล้ว $b_2=a_2+zb_3=0+(2\cdot 1)=2$

$c_k=b_k+zc_{k+1}$ แล้ว $c_2=b_2+zc_3=2+(2\cdot 1)=4$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$b_1 = a_1 + zb_2 = -3 + (2 \cdot 2) = 1$

$c_1 = b_1 + zc_2 = 1 + (2 \cdot 4) = 9$

$b_0 = a_0 + zb_1 = -5 + (2 \cdot 1) = -3$

ตารางที่ 2.6(2) **แสดงการหาค่า** a_k, b_k, c_k **ของตัวอย่าง** 2.12

k	a_k	b_k	c_k
3	1	1	1
2	0	2	4
1	-3	1	9
0	-5	-3	

$b_0 = -3, c_1 = 9$

$x_1 = 2 - \frac{(-3)}{9} = 2.3333$

$z = x_1 = 2.3333$

ตารางที่ 2.6(3) **แสดงการหาค่า** a_k, b_k, c_k **ของตัวอย่าง** 2.12

k	a_k	b_k	c_k
3	1	1	1
2	0	$0 + (2.3333 \cdot 1) = 2.3333$	$2.3333 + (2.3333 \cdot 1) = 4.6666$
1	-3	$-3 + (2.3333 \cdot 2.3333) = 2.44443$	$2.44443 + (2.3333 \cdot 4.6666) = 13.33329$
0	-5	$-5 + (2.3333 \cdot 2.44443) = 0.70360$	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_2 = 2.3333 - \frac{0.70366}{13.33329} = 2.28056$$

$$z = x_2 = 2.28056$$

ตารางที่ 2.6(4) แสดงการหาค่า a_k, b_k, c_k ของตัวอย่าง 2.12

k	a_k	b_k	c_k
3	1	1	1
2	0	$0+(2.28056\cdot 1)=2.28056$	$2.280556+(2.28056\cdot 1)=4.56112$
1	-3	$-3+(2.28056\cdot 2)=2.20095$	$2.20095+(2.28056\cdot 4.56112)=12.60286$
0	-5	$-5+(2.28056\cdot 2)=0.01940$	

$$x_3 = 2.28056 - \frac{0.01940}{12.60286} = 2.27902$$

$$z = x_3 = 2.27902$$

ตารางที่ 2.6(5) แสดงการหาค่า a_k, b_k, c_k ของตัวอย่าง 2.12

k	a_k	b_k	c_k
3	1	1	1
2	0	$0+(2.7902\cdot 1)=2.27902$	$2.27902+(2.27903\cdot 1)=4.55804$
1	-3	$-3+(2.27902\cdot 2)=2.19393$	$2.19393+(2.27902\cdot 4.55804)=12.58179$
0	-5	$-5+(2.27902\cdot 2)=0.0000103$	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_4 = 2.27902 - \frac{0.00001}{12.58179} = 2.27902$$

รากจริงคือ 2.27902

รากที่เหลือหาได้จากการแยก $x - 2.27902$ ออกจาก $p(x) = x^3 - 3x - 5$

$$p(x) = (x - 2.27902)q(x)$$

$$q(x) = x^2 + 2.27902x + 2.19393 = 0$$

$$x = \frac{-2.27902 \pm \sqrt{(2.27902)^2 - 4(2.19393)}}{2}$$

$$x = -1.13951 \pm 0.94626i$$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สูตรที่ใช้ในการหาค่าเริ่มต้น

นอกจากจะใช้กฎของ Descartes' rules of sign ในการพิจารณาค่าเริ่มต้น แล้วการเลือกค่าเริ่มต้นระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหารากของ $f(x)=0$ สามารถดำเนินการได้ดังนี้ ให้ α เป็นรากของสมการ $f(x)=0$ สามารถดำเนินการจากระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

ให้ $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ แล้ว $x_k = \phi(x_{k-1})$ และ $x_{k+1} = \phi(x_k)$

เมื่อดำเนินการซ้ำไปเรื่อยๆจะได้ $\alpha = \phi(\alpha)$

ค่าความคลาดเคลื่อนคือ $x_k - \alpha = \phi(x_{k-1}) - \phi(\alpha)$

ค่าความคลาดเคลื่อนตัวใหม่คือ $x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha)$

หารตลอดด้วย $x_k - \alpha$ จะได้ $\dfrac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \dfrac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}$

จากทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย $\phi'(\xi) = \dfrac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}$ ดังนั้น $x_{k+1} - \alpha = \phi'(\xi)(x_k - \alpha)$ เมื่อ $\xi \in (x_k, \alpha)$

ถ้า $|\phi'(\xi)| < 1$ แล้ว $x_{k+1} - \alpha < x_k - \alpha$

เช่น $|\phi'(\xi)| = \dfrac{1}{2}$ แล้วค่าคลาดเคลื่อนตัวใหม่จะน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนตัวก่อนหน้านี้

ดังนั้นเงื่อนไขการลู่เข้าคือ $\left|\dfrac{d\phi}{dx}\right| < 1$

จาก $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ แล้ว $\dfrac{d\phi(x)}{dx} = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ นั่นคือเลือก x_0 ให้เป็นไปตามเงื่อนไข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\left|\dfrac{f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}\right| < 1$ หรือ $|f(x_0)f''(x_0)| < |f'(x_0)|^2$ แล้วจะได้คำตอบโดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

อัตราการลู่เข้า

นิยาม อันดับของการลู่เข้า (*order of convergence*)

ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของค่าประมาณของรากของสมการ $f(x)=0$ ที่ลู่เข้าสู่ α เมื่อ $f(x)=0$ และให้ $e_n = x_n - \alpha$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$ ถ้ามีจำนวน $k \geq 1$ และค่าคงที่ $c \neq 0$ ที่ทำให้ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^k} = c$ แล้วเรียก k ว่าอันดับของการลู่เข้า

ให้ α เป็นรากของสมการ $f(x)=0$ โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ให้ $e_n = x_n - \alpha$ จะได้ $x_n = \alpha + e_n$ และ $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$

$$\alpha + e_{n+1} = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + e_n - \frac{f(\alpha+e_n)}{f'(\alpha+e_n)}$$

หรือ $e_{n+1} = e_n - \dfrac{f(\alpha+e_n)}{f'(\alpha+e_n)}$

โดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(\alpha+e_n)$ และ $f'(\alpha+e_n)$

จะได้

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(f(\alpha) + e_n f'(\alpha) + \frac{e_n^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{e_n^3}{3!}f'''(\alpha) + \ldots)}{(f'(\alpha) + e_n f''(\alpha) + \frac{e_n^2}{2!}f'''(\alpha) + \frac{e_n^3}{3!}f^{(4)}(\alpha) + \ldots)}$$

เนื่องจาก $f(\alpha)=0$ และ $f'(\alpha) \neq 0$ แล้วหารทั้งเศษและส่วนด้วย $f'(\alpha)$ ในพจน์ที่เป็นเศษส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n(1+\frac{e_n}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+\frac{e_n^2}{6}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+...)}{(1+e_n\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+\frac{e_n^2}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+...)}$$

ถ้า $\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ หาค่าได้จำกัดและ e_n มีค่าน้อยๆแล้ว $e_n^2, e_n^3, ...$ จะมีค่าน้อยๆจนสามารถตัดทิ้งได้

ดังนั้น $$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n(1+\frac{e_n}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)})}{(1+e_n\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)})}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$

จะได้ $$e_{n+1} = e_n - e_n(1+\frac{e_n}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)})(1-e_n\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)})$$

หรือ $$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

จะได้ $$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \to \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

แล้วอัตราลู่เข้าของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน คือ 2

ในทำนองเดียวกัน ให้ α เป็นรากของสมการ $f(x)=0$ โดยระเบียบวิธีเซแคนท์

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

จะได้ $$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^{1.62}} \to (\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)})^{0.62}$$

แล้วอัตราการลู่เข้าของระเบียบวิธีเซแคนท์คือ 1.62

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

อัลกอริทึมของระเบียบวิธีเซแคนต์และระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ขั้นตอนระเบียบวิธีเซแคนท์

ข้อมูลเข้า ดีกรีสูงสุดของพหุนาม n

ค่าเริ่มต้น x_0, x_1

สัมประสิทธ์ $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$

จำนวนครั้งสูงสุดของการทำซ้ำ N

ข้อมูลออก รากของสมการ $f(x)=0$

มีขั้นตอนดังนี้

1. ให้ $k=0$ เมื่อ k เป็นตัวแสดงการทำวนซ้ำ

2. ถ้า $k>0$ ไป 4.

3. ถ้า $k<0$ ไป 8.

4. คำนวณโดย $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$

5. $k=k+1$

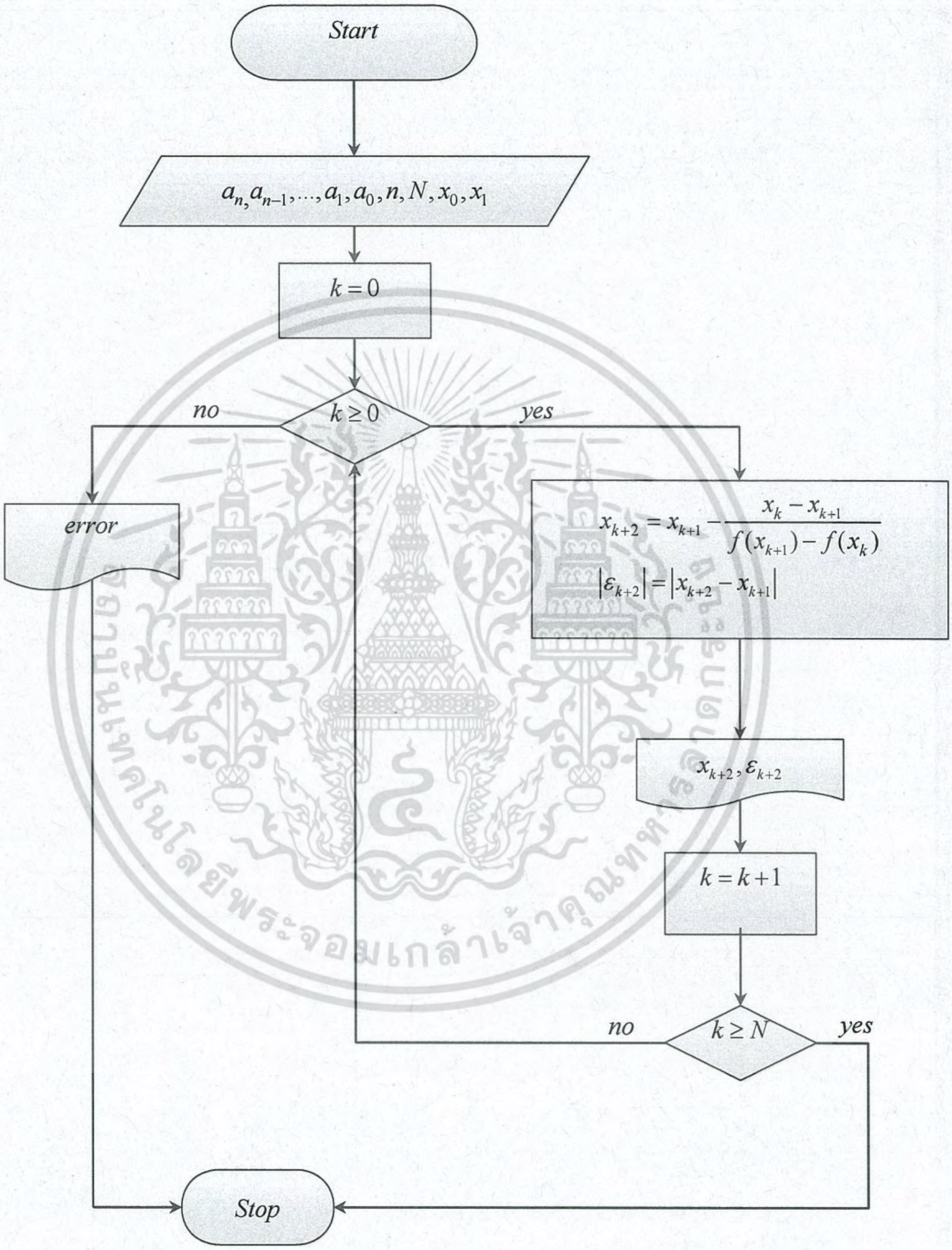
6. ถ้า $k<N$ ไป 3.

7. แสดงผล "รากของสมการ $f(x)=0$ "และหยุด

8. แสดงผล "error"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แผนผังระเบียบวิธีเซแคนท์



รูปที่ 3.1 กระบวนการระเบียบวิธีเซแคนท์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ข้อมูลเข้า ดีกรีสูงสุดของพหุนาม n

สัมประสิทธิ์ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$

ค่าเริ่มต้น x_0

จำนวนครั้งสูงสุดของการทำซ้ำ N

ข้อมูลออก รากของสมการ $f(x)=0$

มีขั้นตอนดังนี้

1. $r=0$

2. ทำซ้ำ 3.

3. ถ้า $r<N$ แล้ว

3.1 ให้ $z=x_r$

$b_n = a_n$

$c_n = b_n$

3.2 สำหรับ $k=n-1$ ถึง 1 ทีละ -1 ทำ 3.2.1 ถึง 3.2.2

3.2.1 เริ่ม $b_k = a_k + z * b_{k+1}$

3.2.2 จบ $c_k \quad b_k + z * c_{k+1}$

3.3 ให้ $b_0 = a_0 + z * b_1$

$$x_{r+1} = \frac{z - b_0}{c_1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

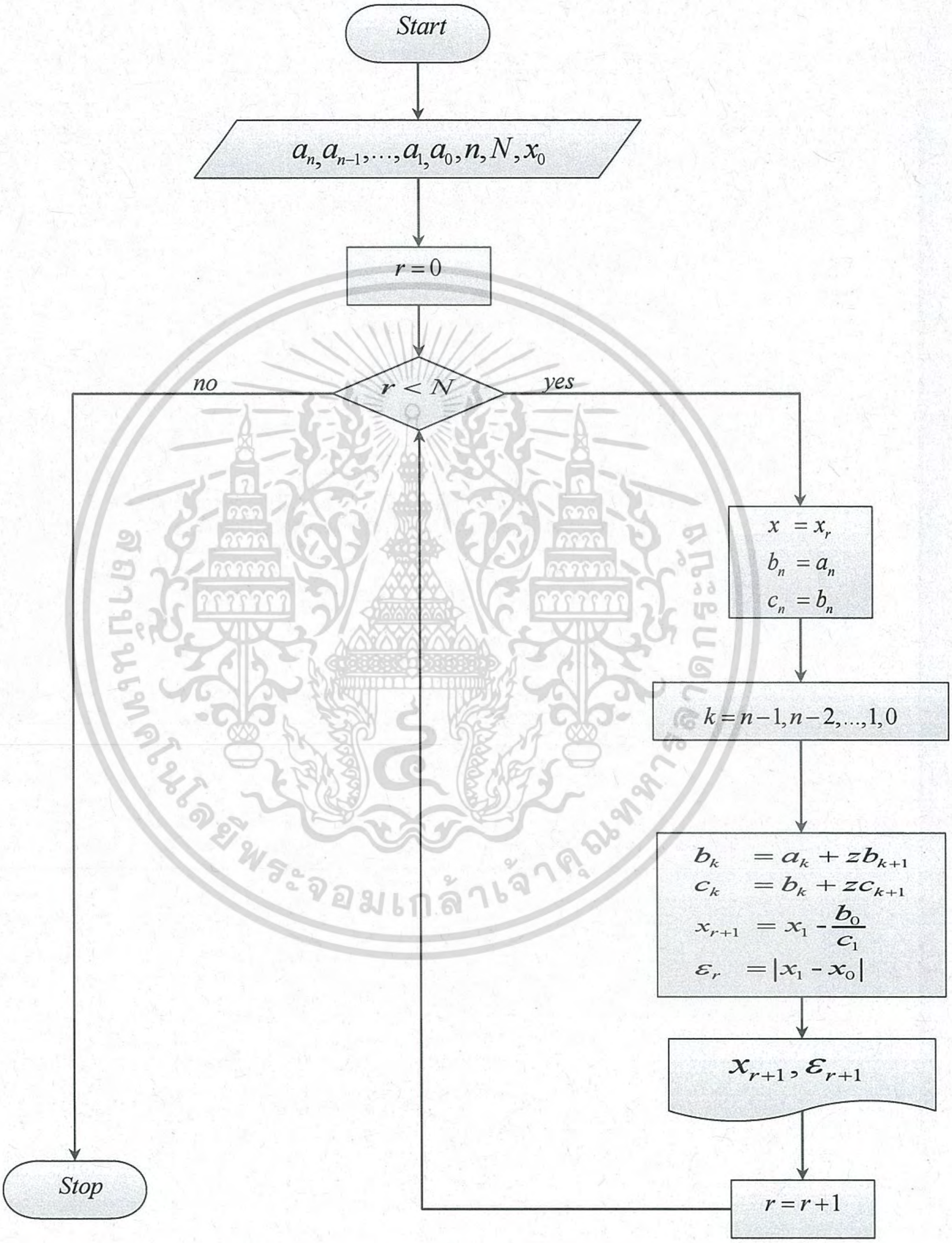
$$r = r + 1$$

มิฉะนั้น 3.4 แสดงผล “ไม่ได้ผลหลังการทำซ้ำ” และหยุดจนกระทั่ง $|x_r - x_{r-1}| < \varepsilon$ หรือ $f(x_r) < \delta$

4.แสดงผล x_r “รากโดยประมาณ”และหยุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แผนผังระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน



รูปที่ 3.2 กระบวนการระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหารากของสมการ $f(x)=5x+3$ โดยระเบียบวิธีเซแคนท์

วิธีทำ จะได้ว่า $v=0$ โดยตามกฎ Descartes' rules of signข้อ $i.$ $n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 0$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ 0

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.$ $v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=0$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $f(x)$

จะได้ว่า $f(-x)=-5x+3$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง จะได้ว่า $f(-x)$ มี 1ราก ที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

สรุปได้ว่า รากของ $f(x)$ คือ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

เนื่องจากรากของ $f(x)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นจึงกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นจำนวนจริง

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=1, x_1=2$ กระทำซ้ำ 2 ครั้ง

$$|\varepsilon_1|=|x_1-x_0|=|2-1|=1$$

$$f(x_0)=5(1)+3=8, f(x_1)=5(2)+3=13$$

$$x_2=2-\left[(13)\left(\frac{2-1}{13-8}\right)\right]=-0.6$$

$$|\varepsilon_2|=|x_2-x_1|=|-0.6-2|=2.6$$

$$f(x_2)=5(-0.6)+3=0$$

$$x_3=-0.6-\left[(0)\left(\frac{-0.6-2}{0-13}\right)\right]=-0.6 \quad ,|\varepsilon_3|=|x_3-x_2|=|(-0.6)-(-0.6)|=0$$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x)=5x+3$ คือ -0.6 #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหารากของสมการ $f(x)=x^2-1$ โดยระเบียบวิธีเซแคนท์

วิธีทำ จะได้ว่า $v=1$ โดยตามกฎ Descartes' rules of signข้อ $i.$ $n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 1$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ 0 หรือ 1

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.$ $v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=1$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $f(x)$

จะได้ว่า $f(-x)=x^2-1$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง จะได้ว่า $f(-x)$ มี 1รากที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

สรุปได้ว่า รากของ $f(x)$ คือ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงบวก และ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

เนื่องจากรากของ $f(x)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นจึงกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นจำนวนจริง

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=1, x_1=2$ กระทำซ้ำ 2 ครั้ง

$|\varepsilon_1|=|x_1-x_0|=|2-1|=1$

$f(x_0)=1^2-1=0, f(x_1)=2^2-1=3$

$x_2=2-\left[(3)\left(\frac{2-1}{3-0}\right)\right]=1$

$|\varepsilon_2|=|x_2-x_1|=|1-2|=1$

$f(x_2)=1^2-1=0$

$x_3=1-\left[(0)\left(\frac{2-1}{3-0}\right)\right]=1$

$|\varepsilon_3|=|x_3-x_2|=|1-1|=0$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x)=x^2-1$ ที่เป็นจำนวนจริงบวก คือ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อมาหารากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)=x^2-1$

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=-3, x_1=-2$ กระทำซ้ำ 6 ครั้ง

$$|\varepsilon_1|=|x_1-x_0|=|-3-(-2)|=1$$

$$f(x_0)=(-3)^2-1=8, f(x_1)=(-2)^2-1=3$$

$$x_2=-2-\left[(3)\left(\frac{(-3)-(-2)}{3-8}\right)\right]=-1.4$$

$$|\varepsilon_2|=|x_2-x_1|=|-1.4-(-2)|=0.6$$

$$f(x_2)=(-1.4)^2-1=0.96$$

$$x_3=-1.4-\left[(0.96)\left(\frac{-1.4-(-2)}{0.96-3}\right)\right]=-1.1176$$

$$|\varepsilon_3|=|x_3-x_2|=|(-1.1176)-(-1.4)|=0.2824$$

$$f(x_2)=(-1.4)^2-1=0.96$$

$$x_3=-1.4-\left[(0.96)\left(\frac{-1.4-(-2)}{0.96-3}\right)\right]=-1.1176$$

$$|\varepsilon_3|=|x_3-x_2|=|(-1.1176)-(-1.4)|=0.2824$$

$$f(x_3)=(-1.1176)^2-1=0.2490$$

$$x_4=-1.1176-\left[(0.2490)\left(\frac{-1.1176-(-1.4)}{0.2490-0.96}\right)\right]=-1.0187$$

$$|\varepsilon_4|=|x_4-x_3|=|(-1.0187)-(-1.1176)|=0.0990$$

$$f(x_4)=(-1.0187)^2-1=0.0377$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_5 = -1.0187 - \left[(0.0377)\left(\frac{-1.0187-(-1.1176)}{0.0377-0.2490} \right) \right] = -1.0010$$

$$|\varepsilon_5| = |x_5 - x_4| = |(-1.0010)-(-1.0187)| = 0.0177$$

$$f(x_5) = (-1.0010)^2 - 1 = 0.0020$$

$$x_6 = -1.0010 - \left[(0.0020)\left(\frac{-1.0010-(-1.0187)}{0.0020-0.0377} \right) \right] = -1$$

$$|\varepsilon_6| = |x_6 - x_5| = |(-1)-(-1.0010)| = 0.0010$$

$$f(x_7) = (-1)^2 - 1 = 0$$

$$x_7 = -1 - \left[(0)\left(\frac{-1-(-1.0010)}{0-0.0020} \right) \right] = -1$$

$$|\varepsilon_7| = |x_7 - x_6| = |(-1)-(-1)| = 0$$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x) = x^2 - 1$ ที่เป็นจำนวนจริงบวก คือ -1

จะได้ว่า รากทั้งหมดของ $f(x) = x^2 - 1$ คือ 1 และ -1 #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหารากของสมการ $f(x)=x^3+1$ โดยระเบียบวิธีเซแคนท์

วิธีทำ จะได้ว่า $v=0$ โดยตามกฎ Descartes' rules of signข้อ $i.$ $n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 0$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ 0

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.$ $v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=0$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $f(x)$

จะได้ว่า $f(-x)=-x^3+1$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง จะได้ว่า $f(-x)$ มี 1รากที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

สรุปได้ว่า รากของ $f(x)$ คือ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ และ 2 รากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

เนื่องจากรากของ $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นเป็นจำนวนจริง ดังนั้นจึงกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นจำนวนจริง

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=-3, x_1=-2$ กระทำซ้ำ 8 ครั้ง

$|\varepsilon_1|=|x_1-x_0|=|-3-(-2)|=1$

$f(x_0)=(-3)^3+1=-26, f(x_1)=(-2)^3+1=-7$

$$x_2=-2-\left[(-7)\left(\frac{-2-(-3)}{-7-(-26)}\right)\right]=-1.6316$$

$|\varepsilon_2|=|x_2-x_1|=|-1.6316-(-2)|=0.3684$

$f(x_2)=(-1.6316)^3+1=-3.3435$

$$x_3=-1.6316-\left[(-3.3435)\left(\frac{-1.6316-(-2)}{-3.3435-(-7)}\right)\right]=-1.2947$$

$|\varepsilon_3|=|x_3-x_2|=|(-1.2947)-(-1.6316)|=0.3369$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f(x_3) = (-1.2947)^3 + 1 = -1.1702$$

$$x_4 = -1.2947 - \left[(-1.1702)\left(\frac{-1.2947 - (-1.6316)}{-1.1702 - (-3.3435)} \right) \right] = -1.1133$$

$$|\varepsilon_4| = |x_4 - x_3| = |-1.1133 - (-1.2947)| = 0.1814$$

$$f(x_4) = (-1.1133)^3 + 1 = -0.3799$$

$$x_5 = -1.1133 - \left[(-0.3799)\left(\frac{-1.1133 - (-1.2947)}{-0.3799 - (-1.1702)} \right) \right] = -1.0261$$

$$|\varepsilon_5| = |x_5 - x_4| = |-1.0261 - (-1.1133)| = 0.0872$$

$$f(x_5) = (-1.0261)^3 + 1 = -0.0804$$

$$x_6 = -1.0261 - \left[(-0.0804)\left(\frac{-1.0261 - (-1.1133)}{-0.0804 - (-0.3799)} \right) \right] = -1.0027$$

$$|\varepsilon_6| = |x_6 - x_5| = |-1.0027 - (-1.0261)| = 0.0234$$

$$f(x_6) = (-1.0027)^3 + 1 = -0.0081$$

$$x_7 = -1.0027 - \left[(-0.0081)\left(\frac{-1.0027 - (-1.0261)}{-0.0081 - (-0.0804)} \right) \right] = -1.0001$$

$$|\varepsilon_7| = |x_7 - x_6| = |-1.0001 - (-1.0027)| = 0.0026$$

$$f(x_7) = (-1.0001)^3 + 1 = -0.0003$$

$$x_8 = -1.0001 - \left[(-0.0003)\left(\frac{-1.0001 - (-1.0027)}{-0.0003 - (-0.0081)} \right) \right] = -1$$

$$|\varepsilon_8| = |x_8 - x_7| = |-1 - (-1.0001)| = 0.0001$$

$$f(x_8) = (-1)^3 + 1 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_9 = -1 - \left[(0) \left(\frac{-1-(-1.0001)}{0-(-0.0003)} \right) \right] = -1$$

$$|\varepsilon_9| = |x_9 - x_8| = |-1-(-1)| = 0$$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x) = x^3 + 1$ ที่เป็นจำนวนจริงลบคือ -1

ต่อมาหารากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของ $f(x) = x^3 + 1$ ดังนั้นกำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0 = 0.5 + i, x_1 = 0.6 + i$ กระทำซ้ำ 5 ครั้ง

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - x_0| = |0.5 + i - (0.6 + i)| = -0.1$$

$$f(x_0) = (0.5+i)^3 + 1 = -0.3750 - 0.2500i, f(x_1) = (0.6+i)^3 + 1 = -0.5840 + 0.0800i$$

$$x_2 = 0.6 + i - \left[(-0.5840 + 0.0800i) \left(\frac{0.6+i-(0.5+i)}{-0.5840+0.0800i-(-0.3750-0.2500i)} \right) \right] = 0.5027 + 0.8847i$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - x_1| = |0.5027 + 0.8847i - (0.6+i)| = |-0.0973 - 0.1153i|$$

$$|\varepsilon_2| = \sqrt{(-0.0973)^2 + (-0.1153)^2} = 0.1509$$

$$f(x_2) = (0.5027 + 0.8847i)^3 + 1 = -0.0533 - 0.0217i$$

$$x_3 = 0.5027 + 0.8847i - \left[(-0.0533 - 0.0217i) \left(\frac{0.5027 + 0.8847i - (0.6+i)}{-0.0533 - 0.0217i - (-0.5840 + 0.0800i)} \right) \right]$$

$$x_3 = 0.5007 + 0.8687i$$

$$|\varepsilon_3| = |x_3 - x_2| = |0.5007 + 0.8687i - (0.5027 + 0.8847i)| = |-0.0020 - 0.0160i|$$

$$|\varepsilon_3| = \sqrt{(-0.0020)^2 + (-0.0160)^2} = 0.0161$$

$$f(x_3) = (0.5007 + 0.8687i)^3 + 1 = -0.0080 - 0.0022i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_4 = 0.5007 + 0.8687i - \left[(-0.0080 - 0.0022i) \left(\frac{0.5007 + 0.8687i - (0.5027 + 0.8847i)}{-0.0080 - 0.0022i - (-0.0533 - 0.0217i)} \right) \right]$$

$$x_4 = 0.5000 + 0.8661i$$

$$|\varepsilon_4| = |x_4 - x_3| = |0.5000 + 0.8661i - (0.5007 + 0.8687i)| = |-0.0007 - 0.0026i|$$

$$|\varepsilon_4| = \sqrt{(-0.0007)^2 + (-0.0026)^2} = 0.0027$$

$$f(x_4) = (0.5000 + 0.8661i)^3 + 1 = -0.0002 - 0.0001i$$

$$x_5 = 0.5000 + 0.8661i - \left[(-0.0002 - 0.0001i) \left(\frac{0.5000 + 0.8661i - (0.5007 + 0.8687i)}{-0.0002 - 0.0001i - (-0.0080 - 0.0020i)} \right) \right]$$

$$x_5 = 0.5000 + 0.8660i$$

$$|\varepsilon_5| = |x_5 - x_4| = |0.5000 + 0.8660i - (0.5000 + 0.8661i)| = |-0.0001i|$$

$$|\varepsilon_5| = \sqrt{(0)^2 + (-0.0001)^2} = 0.0001$$

$$f(x_5) = (0.5000 + 0.8660i)^3 + 1 = 0$$

$$x_6 = 0.5000 + 0.8660i - \left[(0) \left(\frac{0.5000 + 0.8661i - (0.5000 + 0.8661i)}{0 - (-0.0002 - 0.0001i)} \right) \right]$$

$$x_5 = 0.5000 + 0.8660i$$

$$|\varepsilon_5| = |x_5 - x_4| = |0.5000 + 0.8660i - (0.5000 + 0.866i)| = 0$$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x) = x^3 + 1$ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $0.5000 + 0.8660i$

เนื่องจากรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะมีคู่สังยุคกัน ดังนั้น รากของ $f(x) = x^3 + 1$ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอีกรากหนึ่ง คือ $0.5000 - 0.8660i$

จะได้ว่า รากทั้งหมดของ $f(x) = x^3 + 1$ คือ $-1, 0.5000 + 0.8660i$ และ $0.5000 - 0.8660i$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหารากของสมการ $f(x)=5x+3$ โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

วิธีทำ จะได้ว่า $v=0$ โดยตามกฎ Descartes' rules of signข้อ $i.$ $n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 0$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ 0

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.$ $v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=0$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $f(x)$

จะได้ว่า $f(-x)=-5x+3$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง จะได้ว่า $f(-x)$ มี 1ราก ที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

สรุปได้ว่า รากของ $f(x)$ คือ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

เนื่องจากรากของ $f(x)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นจึงกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นจำนวนจริง

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=1$ กระทำซ้ำ 2 ครั้ง

$f(x)=5x+3, f'(x)=5$

$f(x_0)=5(1)+3=8, f'(x_0)=5$

$x_1=1-\frac{8}{5}=-0.6$

$|\varepsilon_1|=|x_1-x_0|=|(-0.6)-1|=|-1.6|=1.6$

$f(x_1)=5(-0.6)+3=0, f'(x_1)=5$

$x_2=-0.6-\frac{0}{5}=-0.6$

$|\varepsilon_2|=|x_2-x_1|=|(-0.6)-(-0.6)|=0$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x)=5x+3$ คือ -0.6 #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหารากของสมการ $f(x)=x^2-1$ โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

วิธีทำ จะได้ว่า $v=1$ โดยตามกฎ Descartes' rules of signข้อ $i.$ $n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 1$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ 0 หรือ 1

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.$ $v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=1$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $f(x)$

จะได้ว่า $f(-x)=x^2-1$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง จะได้ว่า $f(-x)$ มี 1รากที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

สรุปได้ว่า รากของ $f(x)$ คือ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงบวก และ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

เนื่องจากรากของ $f(x)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นจึงกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นจำนวนจริง

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=1$ กระทำซ้ำ 1 ครั้ง

$f(x)=x^2-1, f'(x)=2x$

$f(x_0)=1^2-1=0, f'(x_0)=2$

$x_1=1-\dfrac{0}{2}=1$

$|\varepsilon_1|=|x_1-x_0|=|1-1|=0$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x)=x^2-1$ ที่เป็นจำนวนจริงบวก คือ 1

ต่อมาหารากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)=x^2-1$

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=-3$ กระทำซ้ำ 5 ครั้ง

$f(x)=x^2-1, f'(x)=2x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$f(x_0) = (-3)^2 - 1 = 8, f'(x_0) = 2(-3) = -6$

$x_1 = -3 - \frac{8}{-6} = -1.6667$

$|\varepsilon_1| = |x_1 - x_0| = |-1.6667 - (-3)| = 1.3333$

$f(x_1) = (-1.6667)^2 - 1 = 1.7779, f'(x_1) = 2(-1.6667) = -3.3334$

$x_2 = -1.6667 - \frac{1.7779}{-3.3334} = -1.1333$

$|\varepsilon_2| = |x_2 - x_1| = |(-1.1333) - (-1.6667)| = 0.5333$

$f(x_2) = (-1.1333)^2 - 1 = 0.2844, f'(x_2) = 2(-1.1337) = -2.2674$

$x_3 = -1.1333 - \frac{0.2844}{-2.2674} = -1.0078$

$|\varepsilon_3| = |x_3 - x_2| = |-1.0078 - (-1.1333)| = 0.1255$

$f(x_3) = (-1.0078)^2 - 1 = 0.0157, f'(x_3) = 2(-1.0078) = -2.0156$

$x_4 = -1.0078 - \frac{0.0157}{-2.0156} = -1$

$|\varepsilon_4| = |x_4 - x_3| = |-1 - (-1.0078)| = 0.0078$

$f(x_4) = (-1)^2 - 1 = 0, f'(x_4) = 2(-1) = -2$

$x_5 = -1 - \frac{0}{-2} = -1$

$|\varepsilon_5| = |x_5 - x_4| = |-1 - (-1)| = 0$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x) = x^2 - 1$ ที่เป็นจำนวนจริงบวก คือ -1

จะได้ว่า รากทั้งหมดของ $f(x) = x^2 - 1$ คือ 1 และ -1 #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหารากของสมการ $f(x)=x^3+1$ โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

วิธีทำ จะได้ว่า $v=0$ โดยตามกฎ Descartes' rules of signข้อ $i.$ $n_p \le v$

ดังนั้น $n_p \le 0$ เพราะฉะนั้น n_p ที่เป็นไปได้คือ 0

แต่กฎ Descartes' rules of sign ข้อ $ii.$ $v-n_p$ เป็นจำนวนคู่ แล้วดังนั้น $n_p=0$

หาจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของ $f(x)$ โดยแทน $-x$ ลง $f(x)$

จะได้ว่า $f(-x)=-x^3+1$ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง จะได้ว่า $f(-x)$ มี 1รากที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ

สรุปได้ว่า รากของ $f(x)$ คือ 1 รากที่เป็นจำนวนจริงลบ และ 2 รากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

เนื่องจากรากของ $f(x)$ มี 1 รากที่เป็นเป็นจำนวนจริง ดังนั้นจึงกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นจำนวนจริง

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0=-3$ กระทำซ้ำ 7 ครั้ง

$f(x)=x^3+1, f'(x)=3x^2$

$f(x_0)=(-3)^3+1=-26, f'(x_0)=3(-3)^2=27$

$x_1=-3-\dfrac{-26}{27}=-2.0370$

$|\varepsilon_1|=|x_1-x_0|=|-2.0370-(-3)|=0.9630$

$f(x_1)=(-2.0370)^3+1=-7.4523, f'(x_1)=3(-2.0370)^2=12.4481$

$x_2=-2.0370-\dfrac{-7.4523}{12.4481}=-1.4384$

$|\varepsilon_2|=|x_2-x_1|=|-1.4384-(-2.0370)|=0.5987$

$f(x_2)=(-1.4384)^3+1=-1.9760, f'(x_2)=3(-1.4384)^2=6.2070$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$x_3 = -1.4384 - \frac{-1.9760}{6.2070} = -1.1200$

$|\varepsilon_3| = |x_3 - x_2| = |-1.1200 - (-1.4384)| = 0.3183$

$f(x_3) = (-1.1200)^3 + 1 = -0.4049, f'(x_3) = 3(-1.1200)^2 = 3.7632$

$x_4 = -1.1200 - \frac{-0.4049}{3.7632} = -1.0124$

$|\varepsilon_4| = |x_4 - x_3| = |-1.0124 - (-1.1200)| = 0.1076$

$f(x_4) = (-1.0124)^3 + 1 = -0.0377, f'(x_4) = 3(-1.0124)^2 = 3.0749$

$x_5 = -1.0124 - \frac{-0.0377}{3.0749} = -1.0001$

$|\varepsilon_5| = |x_5 - x_4| = |-1.0001 - (-1.0124)| = 0.0123$

$f(x_5) = (-1.0001)^3 + 1 = -0.0003, f'(x_5) = 3(-1.0001)^2 = 3.0006$

$x_6 = -1.0001 - \frac{-0.0003}{3.0006} = -1$

$|\varepsilon_6| = |x_6 - x_5| = |(-1) - (-1.0001)| = 0.0001$

$f(x_6) = (-1)^3 + 1 = 0, f'(x_5) = 3(-1)^2 = 3$

$x_7 = -1.0001 - \frac{0}{3} = -1$

$|\varepsilon_7| = |x_7 - x_6| = |(-1) - (-1)| = 0$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x) = x^3 + 1$ ที่เป็นจำนวนจริงลบคือ -1

ต่อมาหารากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของ $f(x) = x^3 + 1$ ดังนั้นกำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เป็น $x_0 = 0.5 + i$ กระทำซ้ำ 4 ครั้ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f(x) = x^3 + 1, f'(x) = 3x^2$$

$$f(x_0) = (0.5+i)^3 + 1 = -0.3750 - 0.2500i, f'(x_0) = 3(0.5+i)^2 = -2.2500 + 3i$$

$$x_1 = 0.5 + i - \frac{-0.3750 - 0.2500i}{-2.2500 + 3i} = 0.4933 + 0.8800i$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - x_0| = |0.4933 + 0.8800i - (0.5+i)| = |-0.0067 - 0.1200i|$$

$$|\varepsilon_1| = \sqrt{(-0.0067)^2 + (-0.1200)^2} = 0.1202$$

$$f(x_1) = (0.4933 + 0.8800i)^3 + 1 = -0.0260 - 0.0390i$$

$$f'(x_1) = 3(0.4933 + 0.8800i)^2 = -1.5932 + 2.6046i$$

$$x_2 = 0.4933 + 0.8800i - \frac{-0.0260 - 0.0390i}{-1.5932 + 2.6046i} = 0.4998 + 0.8661i$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - x_1| = |0.4998 + 0.8661i - (0.4933 + 0.8800i)| = |0.0065 - 0.0139i|$$

$$|\varepsilon_2| = \sqrt{(0.0065)^2 + (-0.0139)^2} = 0.0153$$

$$f(x_2) = (0.4998 + 0.8661i)^3 + 1 = 0.0001 - 0.0006i$$

$$f'(x_2) = 3(0.4998 + 0.8661i)^2 = -1.5010 + 2.5973i$$

$$x_3 = 0.4998 + 0.8661i - \frac{0.0001 - 0.0006i}{-1.5010 + 2.5973i} = 0.5 + 0.8660i$$

$$|\varepsilon_3| = |x_3 - x_2| = |0.5 + 0.8660i - (0.4998 + 0.8661i)| = |0.0002 - 0.0001i|$$

$$|\varepsilon_3| = \sqrt{(0.0002)^2 + (-0.0001)^2} = 0.0002$$

$$f(x_3) = (0.5 + 0.8660i)^3 + 1 = 0.0001$$

$$f'(x_3) = 3(0.5 + 0.8660i)^2 = -1.5000 + 2.5980i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_4 = 0.5 + 0.8660i - \frac{0.0001}{-1.5000 + 2.5980i} = 0.5 + 0.8660i$$

$$|\varepsilon_4| = |x_4 - x_3| = |0.5 + 0.8660i - (0.5 + 0.8660i)| = 0$$

เพราะฉะนั้นรากของ $f(x) = x^3 + 1$ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $0.5000 + 0.8660i$

เนื่องจากรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะมีคู่สังยุคกัน ดังนั้น รากของ $f(x) = x^3 + 1$ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอีกรากหนึ่ง คือ $0.5000 - 0.8660i$

จะได้ว่า รากทั้งหมดของ $f(x) = x^3 + 1$ คือ $-1, 0.5000 + 0.8660i$ และ $0.5000 - 0.8660i$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในบทนี้จะอธิบายเกี่ยวกับคู่มีการใช้โปรแกรมและการทดสอบการใช้โปรแกรม โดยมีรายละเอียดดังนี้

4.1เครื่องมือการใช้ในการสร้างโปรแกรม

การพัฒนาโปรแกรมสำหรับการหารากสมการของพหุนามในปัญหาพิเศษนี้ได้ใช้มีข้อกำหนดดังนี้

สมบัติของคอมพิวเตอร์เบื้องต้นสำหรับผู้สร้างและผู้ใช้โปรแกรม

- Input : เมาส์และคีย์บอร์ด
- Output : หน้าจอแสดงผล
- โปรแกรมที่ใช้พัฒนาเพื่อการคำนวณหารากคือ: Editplus

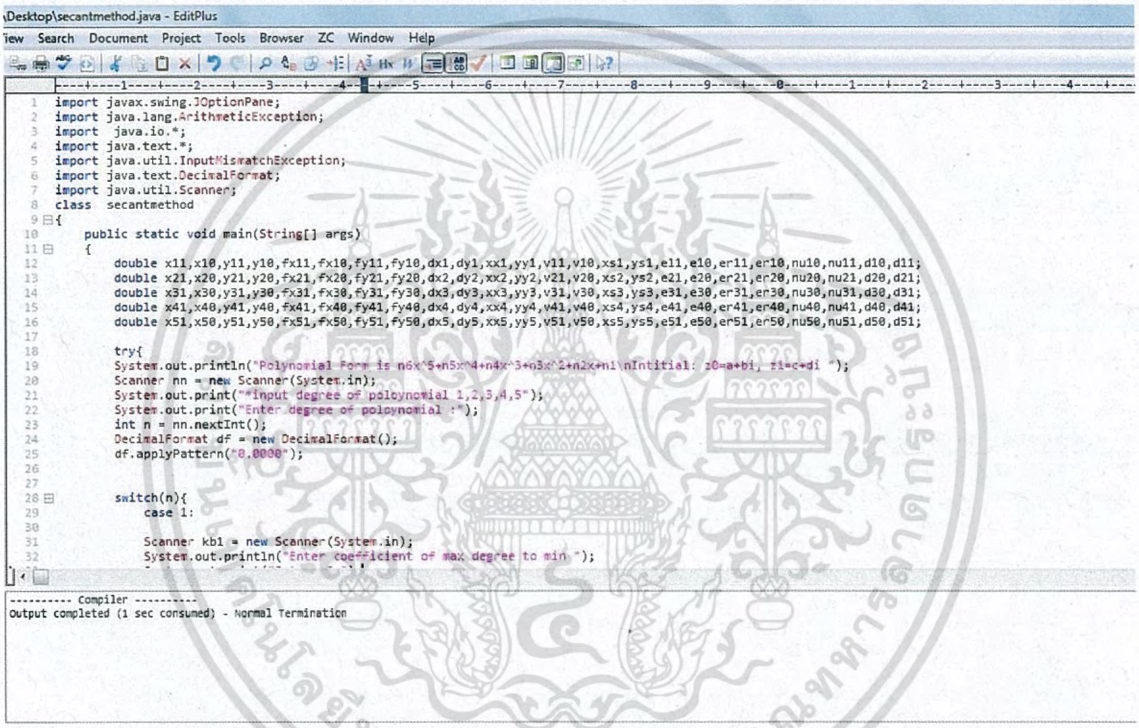
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 วิธีการใช้งานโปรแกรม

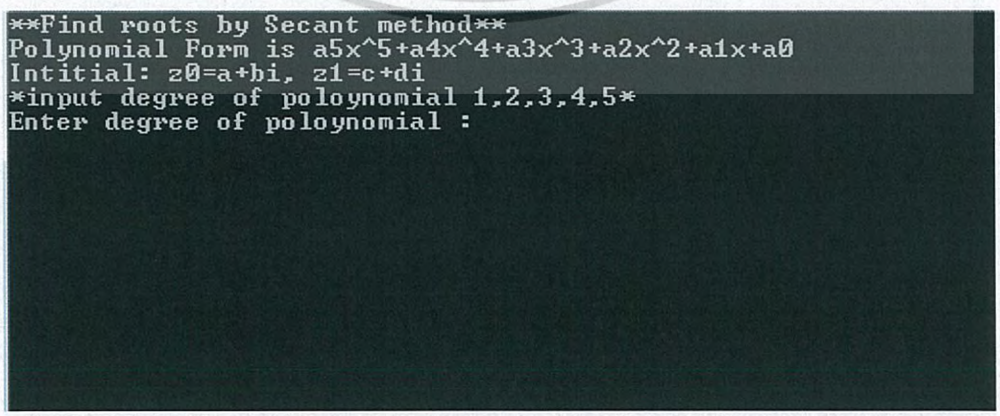
4.2.1 วิธีการใช้งานโปรแกรม Secant method

1.นำแผ่น disk ที่มีโปรแกรมใส่ในเครื่องคอมพิวเตอร์ แล้วกดเปิดโปรแกรม

2.เปิดโปรแกรมแล้วกด Ctrl+1 เพื่อให้โปรแกรม Complier



3. กด Ctrl+2 เพื่อให้โปรแกรมทำงาน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.ใส่ดีกรีสูงสุดของสมการที่ต้องการหา สามารถใส่เลข 1,2,3,4,5 ในตัวอย่างใส่ดีกรี 3

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
```

5.ใส่สัมประสิทธิ์ของสมการพหุนามที่ต้องการหา ในที่นี้ต้องการหา $f(x) = x^3 + 1$

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. ใส่ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5 + i, x_1 = 0.6 + i$ และใส่การกระทำซ้ำเป็นจำนวนเต็ม ในที่นี่ใส่ค่าการกระทำซ้ำเท่ากับ 5 และแสดงผลการหารากของสมการและค่าผิดพลาดในแต่ละครั้ง

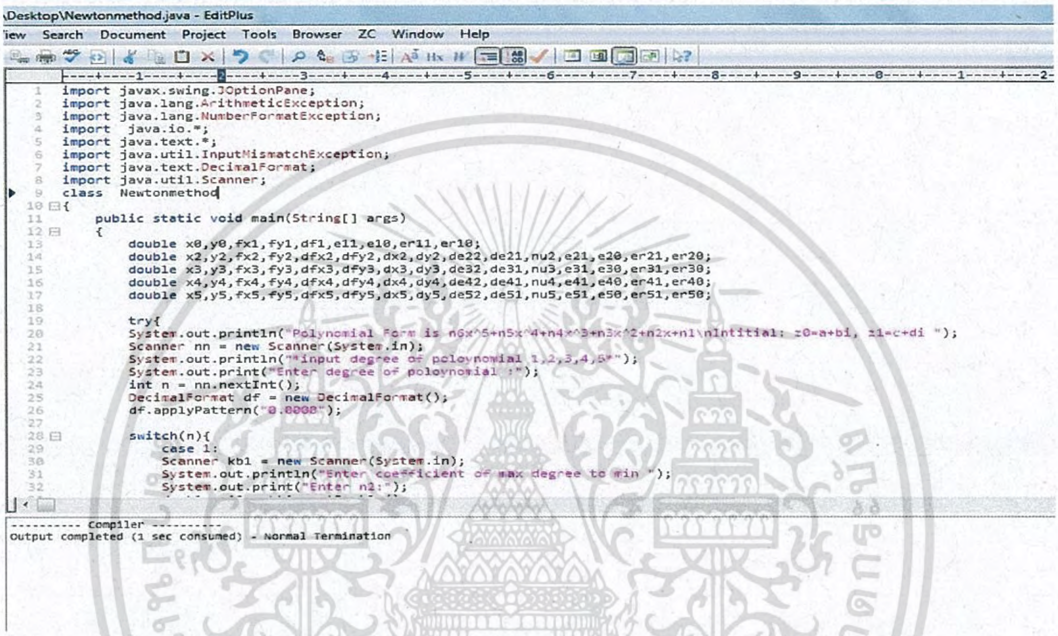
```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):0.5
Enter initial imag (b) :1
Enter inititial real (c):0.6
Enter initial imag (d) :1
Enter the iteration :5
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(0.5000)+(1.0000)i, z1=(0.6000)+(1.0000)i
Root2 is 0.5027+(0.8847)i
Error2is 0.1509
Root3 is 0.5007+(0.8687)i
Error3is 0.0160
Root4 is 0.5000+(0.8661)i
Error4is 0.0027
Root5 is 0.5000+(0.8660)i
Error5is 0.0001
Root6 is 0.5000+(0.8660)i
Error6is 0.0000
Running time is 8seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

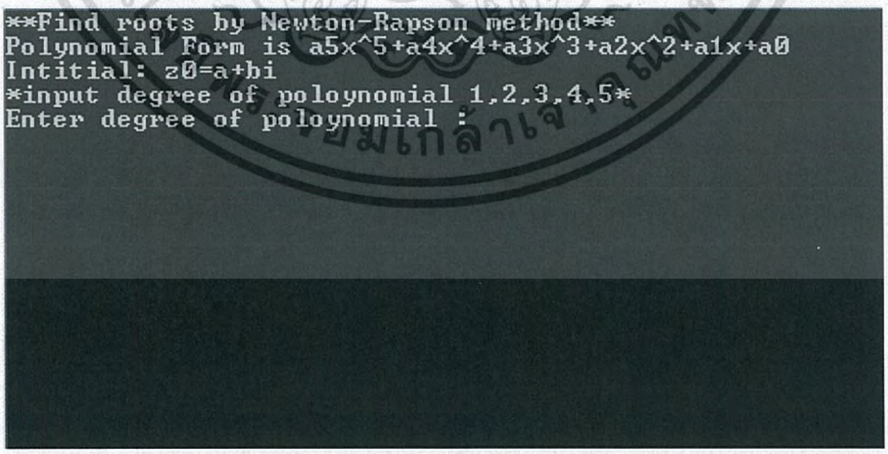
4.2.2 วิธีการใช้งานโปรแกรม Newton-Rapson method

1.นำแผ่น disk ที่มีโปรแกรมใส่ในเครื่องคอมพิวเตอร์ แล้วกดเปิดโปรแกรม

2.เปิดโปรแกรมแล้วกด Ctrl+1 เพื่อให้โปรแกรม Complier



3. กด Ctrl+2 เพื่อให้โปรแกรมทำงาน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.ใส่ดีกรีสูงสุดของสมการที่ต้องการหา สามารถใส่เลข $1,2,3,4,5$ ในตัวอย่างใส่ดีกรี 3

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
```

5.ใส่สัมประสิทธิ์ของสมการพหุนามที่ต้องการหา ในที่นี้ต้องการหา $f(x)=x^3+1$

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
```

6.ใส่ค่าเริ่มต้น $x_0=0.5+i, x_1=0.6+i$ และใส่การกระทำซ้ำเป็นจำนวนเต็ม ในที่นี่ใส่ค่าการกระทำซ้ำเท่ากับ 4 และแสดงผลการหารากของสมการและค่าผิดพลาดในแต่ละครั้ง

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):0.5
Enter initial imag (b) :1
Enter the iteration :4
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(0.5000)+(1.0000)i
Root1 is 0.4933+(0.8800)i
Error1is 0.1202
Root2 is 0.4998+(0.8661)i
Error2is 0.0153
Root3 is 0.5000+(0.8660)i
Error3is 0.0002
Root4 is 0.5000+(0.8660)i
Error4is 0.0000
Running time is 5 seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 3.1 จงแก้สมการ $f(x) = 5x + 3$ โดยโปรแกรมระเบียบวิธีเซแคนท์

มีรากดังต่อไปนี้ $x_1 = -0.6$

หารากที่1 ค่าเริ่มต้น $x_0 = 1, x_1 = 2$ กระทำซ้ำ 2 ครั้ง

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :1
Enter coefficient of max degree to min
Enter a1:5
Enter a:3
Enter inititial real (a):1
Enter initial imag (b) :0
Enter inititial real (c):2
Enter initial imag (d) :0
Enter the iteration :2
Polynomial is (5.0000)x+(3.0000)
z0=(1.0000)+(0.0000)i, z1=(2.0000)+(0.0000)i
Root2 is -0.6000+(0.0000)i
Error2is 2.6000
Root3 is -0.6000+(0.0000)i
Error3is 0.0000
Running time is 6seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 3.2 จงแก้สมการ $f(x) = x^2 - 1$ โดยโปรแกรมระเบียบวิธีเซแคนท์

มีรากดังต่อไปนี้ $x_1 = 1, x_2 = -1$

หารากที่1 ค่าเริ่มต้น $x_0 = 1, x_1 = 2$ กระทำซ้ำ 2 ครั้ง

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :2
Enter coefficient of max degree to min
Enter a2:1
Enter a1:0
Enter a0:-1
Enter inititial real (a):1
Enter initial imag (b) :0
Enter inititial real (c):2
Enter initial imag (d) :0
Enter the iteration :2
Polynomial is (1.0000)x^2+(0.0000)x+(-1.0000)
Intitial: z0=(1.0000)+(0.0000)i, z1=(2.0000)+(0.0000)i
Root2 is 1.0000+(0.0000)i
Error2is 1.0000
Root3 is 1.0000+(0.0000)i
Error3is 0.0000
Running time is 7seconds
```

หารากที่2 ค่าเริ่มต้น $x_0 = -3, x_1 = -2$ กระทำซ้ำ 6 ครั้ง

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :2
Enter coefficient of max degree to min
Enter a2:1
Enter a1:0
Enter a0:-1
Enter inititial real (a):-3
Enter initial imag (b) :0
Enter inititial real (c):-2
Enter initial imag (d) :0
Enter the iteration :6
Polynomial is (1.0000)x^2+(0.0000)x+(-1.0000)
Intitial: z0=(-3.0000)+(0.0000)i, z1=(-2.0000)+(0.0000)i
Root2 is -1.4000+(0.0000)i
Error2is 0.6000
Root3 is -1.1176+(0.0000)i
Error3is 0.2824
Root4 is -1.0187+(0.0000)i
Error4is 0.0990
Root5 is -1.0010+(0.0000)i
Error5is 0.0177
Root6 is -1.0000+(0.0000)i
Error6is 0.0010
Root7 is -1.0000+(0.0000)i
Error7is 0.0000
Running time is 7seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 3.3 จงหารากของสมการ $f(x) = x^3 + 1$ โดยโปรแกรมระเบียบวิธีเซแคนท์

มีรากดังต่อไปนี้ $x_0 = -1, x_1 = 0.5000 + 0.8660i, x_2 = 0.5000 - 0.8660i$

หารากที่1 ค่าเริ่มต้น $x_0 = -3, x_1 = -2$ กระทำซ้ำ 8 ครั้ง

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):-3
Enter initial imag (b) :0
Enter inititial real (c):-2
Enter initial imag (d) :0
Enter the iteration :8
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(-3.0000)+(0.0000)i, z1=(-2.0000)+(0.0000)i
Root2 is -1.6316+(0.0000)i
Error2is 0.3684
Root3 is -1.2947+(0.0000)i
Error3is 0.3369
Root4 is -1.1133+(0.0000)i
Error4is 0.1814
Root5 is -1.0261+(0.0000)i
Error5is 0.0872
Root6 is -1.0027+(0.0000)i
Error6is 0.0234
Root7 is -1.0001+(0.0000)i
Error7is 0.0026
Root8 is -1.0000+(0.0000)i
Error8is 0.0001
Root9 is -1.0000+(0.0000)i
Error9is 0.0000
Running time is 7seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หารากที่ 2 ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5 + i, x_1 = 0.6 + i$ กระทำซ้ำ 5 ครั้ง

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):0.5
Enter initial imag (b) :1
Enter inititial real (c):0.6
Enter initial imag (d) :1
Enter the iteration :5
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(0.5000)+(1.0000)i, z1=(0.6000)+(1.0000)i
Root2 is 0.5027+(0.8847)i
Error2is 0.1509
Root3 is 0.5007+(0.8687)i
Error3is 0.0160
Root4 is 0.5000+(0.8661)i
Error4is 0.0027
Root5 is 0.5000+(0.8660)i
Error5is 0.0001
Root6 is 0.5000+(0.8660)i
Error6is 0.0000
Running time is 8seconds
```

หารากที่ 3 ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5 - i, x_1 = 0.6 - i$ กระทำซ้ำ 5 ครั้ง

```
**Find roots by Secant method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi, z1=c+di
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):0.5
Enter initial imag (b) :-1
Enter inititial real (c):0.6
Enter initial imag (d) :-1
Enter the iteration :5
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(0.5000)+(-1.0000)i, z1=(0.6000)+(-1.0000)i
Root2 is 0.5027+(-0.8847)i
Error2is 0.1509
Root3 is 0.5007+(-0.8687)i
Error3is 0.0160
Root4 is 0.5000+(-0.8661)i
Error4is 0.0027
Root5 is 0.5000+(-0.8660)i
Error5is 0.0001
Root6 is 0.5000+(-0.8660)i
Error6is 0.0000
Running time is 9seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 3.4 จงแก้สมการ $f(x) = 5x + 3$ โดยโปรแกรมระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

มีรากดังต่อไปนี้ $x_1 = -0.6$

หารากที่1 ค่าเริ่มต้น $x_0 = 1$ กระทำซ้ำ 2 ครั้ง

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :1
Enter coefficient of max degree to min
Enter a1:5
Enter a0:3
Enter inititial real (a):-1
Enter initial imag (b) :0
Enter the iteration :2
Polynomial is (5.0000)x+(3.0000)
Intitial: z0=(-1.0000)+(0.0000)i
Root1 is -0.6000+(0.0000)i
Error1is 0.4000
Root2 is -0.6000+(0.0000)i
Error2is 0.0000
Running time is 4 seconds.
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 3.5 จงแก้สมการ $f(x) = x^2 - 1$ โดยโปรแกรมระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

มีรากดังต่อไปนี้ $x_1 = 1, x_2 = -1$

หารากที่1 ค่าเริ่มต้น $x_0 = 1$ กระทำซ้ำ 2 ครั้ง

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :2
Enter coefficient of max degree to min
Enter a2:1
Enter a1:0
Enter a0:-1
Enter inititial real (a):1
Enter initial imag (b) :0
Enter the iteration :1
Polynomial is (1.0000)x^2+(0.0000)x+(-1.0000)
Intitial: z0=(1.0000)+(0.0000)i
Root1 is 1.0000+(0.0000)i
Error1is 0.0000
Running time is 4 seconds
```

หารากที่2 ค่าเริ่มต้น $x_0 = -3$ กระทำซ้ำ 6 ครั้ง

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :2
Enter coefficient of max degree to min
Enter a2:1
Enter a1:0
Enter a0:-1
Enter inititial real (a):-3
Enter initial imag (b) :0
Enter the iteration :5
Polynomial is (1.0000)x^2+(0.0000)x+(-1.0000)
Intitial: z0=(-3.0000)+(0.0000)i
Root1 is -1.6667+(0.0000)i
Error1is 1.3333
Root2 is -1.1333+(0.0000)i
Error2is 0.5333
Root3 is -1.0078+(0.0000)i
Error3is 0.1255
Root4 is -1.0000+(0.0000)i
Error4is 0.0078
Root5 is -1.0000+(0.0000)i
Error5is 0.0000
Running time is 6 seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 3.6 จงหารากของสมการ $f(x)=x^3+1$ โดยโปรแกรมระเบียบวิธีเซแคนท์

มีรากดังต่อไปนี้ $x_0=-1, x_1=0.5000+0.8660i, x_2=0.5000-0.8660i$

หารากที่1 ค่าเริ่มต้น $x_0=-3$ กระทำซ้ำ 7 ครั้ง

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):-3
Enter initial imag (b) :0
Enter the iteration :7
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(-3.0000)+(0.0000)i
Root1 is -2.0370+(0.0000)i
Error1is 0.9630
Root2 is -1.4384+(0.0000)i
Error2is 0.5987
Root3 is -1.1200+(0.0000)i
Error3is 0.3183
Root4 is -1.0124+(0.0000)i
Error4is 0.1076
Root5 is -1.0002+(0.0000)i
Error5is 0.0123
Root6 is -1.0000+(0.0000)i
Error6is 0.0002
Root7 is -1.0000+(0.0000)i
Error7is 0.0000
Running time is 5 seconds
```

หารากที่2 ค่าเริ่มต้น $x_0=0.5+i$ กระทำซ้ำ 4 ครั้ง

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):0.5
Enter initial imag (b) :1
Enter the iteration :4
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(0.5000)+(1.0000)i
Root1 is 0.4933+(0.8800)i
Error1is 0.1202
Root2 is 0.4998+(0.8661)i
Error2is 0.0153
Root3 is 0.5000+(0.8660)i
Error3is 0.0002
Root4 is 0.5000+(0.8660)i
Error4is 0.0000
Running time is 5 seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หารากที่3 ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5 - i$ กระทำซ้ำ 4 ครั้ง

```
**Find roots by Newton-Rapson method**
Polynomial Form is a5x^5+a4x^4+a3x^3+a2x^2+a1x+a0
Intitial: z0=a+bi
*input degree of poloynomial 1,2,3,4,5*
Enter degree of poloynomial :3
Enter coefficient of max degree to min
Enter a3:1
Enter a2:0
Enter a1:0
Enter a0:1
Enter inititial real (a):0.5
Enter initial imag (b) :-1
Enter the iteration :4
Polynomial is (1.0000)x^3+(0.0000)x^2+(0.0000)x+(1.0000)
Intitial: z0=(0.5000)+(-1.0000)i
Root1 is 0.4933+(-0.8800)i
Error1is 0.1202
Root2 is 0.4998+(-0.8661)i
Error2is 0.0153
Root3 is 0.5000+(-0.8660)i
Error3is 0.0002
Root4 is 0.5000+(-0.8660)i
Error4is 0.0000
Running time is 6 seconds
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในการทำปัญหาพิเศษนี้ได้มีการวางแผนขั้นตอนการปฏิบัติงาน แต่ยังพบปัญหาสำหรับบางขั้นตอน โดยสามารถสรุปได้ดังนี้

5.1.1 การคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน หาผลเฉลยได้เร็วกว่าระเบียบวิธีเซแคนท์

5.1.2 ในขั้นตอนการใส่ข้อมูลลงในโปรแกรม เมื่อใส่ค่าเริ่มต้น ค่าสัมประสิทธิ์ ค่ากระทำซ้ำถ้ากด Enter ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ถ้าใส่ค่าผิดต้องทำการเริ่มโปรแกรมใหม่เสมอ

5.1.3 ในการหารากจะได้รากทีละ 1 ค่า ในกรณีที่พหุนามมีดีกรีสูงซึ่งมีหลายค่า ต้องมีการดำเนินซ้ำโดยเปลี่ยนค่าเริ่มต้นโดยผู้ใช้โปรแกรม

5.1.4 ผู้ใช้โปรแกรมต้องกำหนดค่าเริ่มต้นด้วยตนเอง

5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางในการพัฒนาโปรแกรม

ขั้นตอนการสร้างโปรแกรมในปัญหาพิเศษนี้ สามารถนำไปพัฒนาปรับปรุงให้ดีขึ้นได้ โดยมีข้อเสนอแนะในการพัฒนาโปรแกรมดังต่อไปนี้

5.2.1 เนื่องจากโปรแกรมที่สร้างขึ้น ทำได้เพียงระเบียบวิธีเซแคนต์และระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน ผู้พัฒนาสามารถนำระเบียบวิธีอื่นๆมาเขียนโปรแกรมในการหารากสมการพหุนามได้อีก

5.2.2 ผู้พัฒนาสามารถออกแบบพัฒนาโปรแกรมให้สามารถใช้งานได้ง่ายยิ่งขึ้น

5.2.3 พัฒนาโปรแกรมให้ให้หารากของสมการพหุนามได้ทุกราก

5.3 ข้อจำกัดการในการใช้โปรแกรม

ข้อจำกัดของโปรแกรม คือ เป็นโปรแกรมที่สามารถหารากของสมการพหุนามได้เพียงครั้งละ 1 จำนวนเท่านั้น และสามารถหาสมการพหุนามได้เพียงดีกรี 1 – 5 เท่านั้น ไม่มีการบันทึกผลที่ได้ในระบบฐานข้อมูล เนื่องจากโปรแกรมไม่มีระบบฐานข้อมูลในการบันทึก ดังนั้นเมื่อจำใช้โปรแกรมในครั้งต่อไปต้องใส่ตัวเลขใหม่เสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ภัคคินี ยิมเรวัต, การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2535.

[2] J.V. Uspensky, Theory of Equations, McGraw-Hill, New York, 1948.

[3] สุพรรณ เพ็งชัย, ทฤษฎีสมการเบื้องต้น พิมพลักษณ์, ชมรมเด็ก, กรุงเทพฯ, 2544

[4] ภัคคินี ชิตสกุล เอกสารประกอบการสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลข คณะวิทยาศาสตร์, 2559.

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้