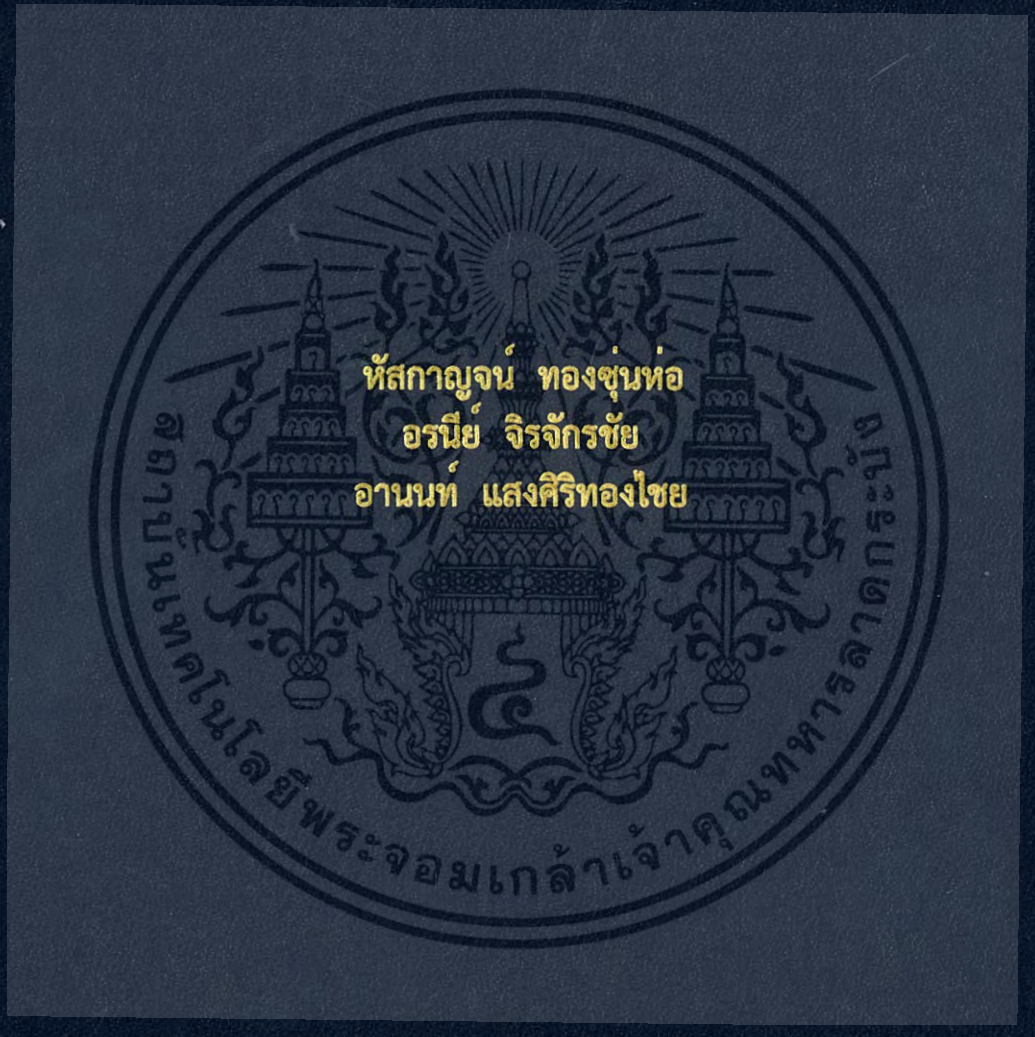
ปริพันธ์เชิงวงรี

ELLIPTIC INTEGRALS



หัสกาญจน์ ทองซุ่นห่อ
อรนีย์ จิรจักรชัย
อานนท์ แสงศิริทองไชย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

ปริพันธ์เชิงวงรี

ELLIPTIC INTEGRALS

หัสกาญจน์ ทองซุ่นห่อ

อรนีย์ จิรจักรชัย

อานนท์ แสงศิริทองไชย

b.00246068

TB00257

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

SPECIAL PROBLEM

ELLIPTIC INTEGRALS

HASAKARN THONGZUNHOR

ORANEE JIRAJAKCHAI

ARNONT SAENGSIRITONGCHAI

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENTS FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2015

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ปริพันธ์เชิงวงรี
	Elliptic Integrals
ชื่อนักศึกษา	นางสาวหัสกาญจน์ ทองซุ่นห่อ 55050166
	นางสาวอรนีย์ จิรจักรชัย 55050175
	นายอานนท์ แสงศิริทองไชย 55050191
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการ	
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ปริพันธ์เชิงวงรี
	Elliptic Integrals
ชื่อนักศึกษา	นางสาวหัสกาญจน์ ทองซุ่นห่อ 55050166
	นางสาวอรนีย์ จิรจักรชัย 55050175
	นายอานนท์ แสงศิริทองไชย 55050191
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในบางครั้งไม่สามารถหาค่าปริพันธ์ได้ ตัวอย่างหนึ่งของปัญหาเรียกว่าปริพันธ์เชิงวงรี โดยรูปแบบพื้นฐานของปริพันธ์เชิงวงรีมี 3 รูปแบบที่มีการประยุกต์ชัดเจนกับปัญหาทางกายภาพ คือ ปัญหารูปแบบที่ 1 และ 2 เช่น ปัญหาการแกว่งลูกตุ้มนาฬิกา ซึ่งอยู่ในรูปแบบปริพันธ์เชิงวงรีแบบที่ 1 และปัญหาความยาวเส้นรอบวงของวงรี ซึ่งอยู่ในรูปแบบปริพันธ์เชิงวงรีแบบที่ 2 คณะผู้วิจัยจึงสนใจในการศึกษาปริพันธ์เชิงวงรีทั้ง 3 รูปแบบ จากการศึกษาพบว่าการหาค่าของปริพันธ์เชิงวงรีจะอยู่ในรูปแบบของอนุกรมอนันต์ ซึ่งมีวิธีการที่ค่อนข้างซับซ้อน คณะผู้วิจัยจึงศึกษาการใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าปริพนธ์เชิงวงรี และพัฒนาโปรแกรมเพื่อประมาณค่าโดยใช้ Visual Basic Version 2010 โดยมีร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ของทศนิยมตำแหน่งที่ 8

คำสำคัญ : ปริพันธ์เชิงวงรี และฟังก์ชันพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Elliptic Integrals
Students	MissHasakarn Thongzunhor 55050166
	MissOranee Jirajakchai 55050175
	Mr.Arnont Saengsiritongchai 55050191
Degree	Bachelor of Science Applied Mathematics
Department	Mathematics
Academic Year	2015
Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul

Abstract

In Mathematics problems sometimes can not find the integration for one problem call elliptic integrals which fundamental 3 kind of elliptic integrals that applied with physical problems are elliptic integral of first kind and second kind such as circumference of elliptic which is elliptic integral of second kind and the pendulum swing which is elliptic integral of first kind etc. the researches took interest with three kind of elliptic integral to study we found that elliptic integral are in infinite series that complicated to approximate so we are develop programming for help in finding the estimated value of elliptic integrals by decimal 8 digits

Keywords: Elliptic integrals, Special functions

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่ได้ให้คำปรึกษา ความรู้ กำลังใจ และคำแนะนำต่าง ๆ รวมทั้งช่วยตรวจแก้ไขข้อผิดพลาดในการดำเนินการทำปัญหาพิเศษ คณะผู้วิจัยขอขอบพระคุณไว้เป็นอย่างสูง และจะนำความรู้ที่ได้มาใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด

ขอขอบพระคุณคณะกรรมการสอบปัญหาพิเศษ อ.พรชัย ชัยสนิท และผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ที่ช่วยให้คำแนะนำ เพื่อให้ปัญหาพิเศษเรื่องนี้มีความถูกต้องแม่นยำยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณพ่อแม่ ครอบครัว และญาติพี่น้องที่คอยผลักดันให้ความช่วยเหลือ และเป็นกำลังที่สำคัญในทุกด้าน อีกทั้งยังคอยสนับสนุนทางด้านศึกษา

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ที่ร่วมทุกข์ร่วมสุขและให้ความช่วยเหลือเกื้อกูลกันด้วยดีตลอดมา

หัสกาญจน์ ทองซุ่นห่อ
อรนีย์ จิรจักรชัย
อานนท์ แสงศิริทองไชย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข

กิตติกรรมประกาศ ..... ค

สารบัญ ..... ง

สารบัญตาราง ..... ฉ

สารบัญรูป ..... ช

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย 6

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย 7

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 7

1.5 แผนการดำเนินงาน 8

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 9

2.1 ภาคตัดกรวย 9

2.2 อนุกรมกำลัง 12

2.3 ฟังก์ชันแฟคทอเรียล 14

2.3.1 ดับเบิลแฟคทอเรียล 14

2.4 ฟังก์ชันแกมมา 15

2.5 ปริพันธ์ของวอลลิส 18

2.6 ค่าคลาดเคลื่อนและค่าประมาณ 23

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

2.7 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข 25

2.8 โปรแกรม MATLAB 39

2.8.1 M-File 40

2.9 โปรแกรม Visual Basic 42

บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย 45

3.1 Elliptic Integral of First kind 45

3.2 Elliptic Integral of Second kind 53

3.3 Elliptic Integral of Third kind 61

บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล 66

4.1 คำนวณโดยวิธีรอมเบิร์ก 66

4.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน 72

4.3 หน้าต่างโปรแกรม Visual Basic ที่ใช้แสดงผลลัพธ์ 84

4.4 ตัวอย่างที่คำนวณโดย Visual Basic 88

บทที่ 5 สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ 93

5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย 93

5.2 ข้อเสนอแนะ 93

เอกสารอ้างอิง 94

ภาคผนวก 96

ภาคผนวก ก การสร้างตาราง 97

ภาคผนวก ข ตาราง 103

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

1 แสดงการหาค่าปริพันธ์ของวอลลิสในรูปของ sin(x) 20

2 แสดงการหาค่าปริพันธ์ของวอลลิสในรูปของ cos(x) 22

3 แสดงการหาค่าประมาณของ $e^{0.05}$ 25

4 แสดงการหาค่าประมาณโดยวิธีรอมเบิร์ก 37

5 แสดงค่าคลาดเคลื่อนค่าประมาณโดยวิธีรอมเบิร์ก 39

6 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.1 66

7 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.1 66

8 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.2 67

9 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.2 67

10 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.3 68

11 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.3 68

12 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.4 69

13 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.4 69

14 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.5 70

15 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.5 70

16 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.6 71

17 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.6 71

18.1 สรุปค่าประมาณที่ได้จากโปรแกรม Visual Basic 91

18.2 สรุปค่าประมาณที่ได้จากโปรแกรม Visual Basic 92

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 วงรี	1
1.2 ลูกตุ้มผูกติดกับท่อนพลาสติก	2
1.3 ลูกตุ้มถูกดึงออกทำมุมกับแนวดิ่ง	3
1.4 ทิศของลูกตุ้มที่ถูกแรงกระทำ	3
2.1 (ก) วงรีแบบแบนขั้ว	10
2.1 (ข) วงรีแบบแบนข้าง	10
2.2 คุณสมบัติของจุดโฟกัส	10
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างจุดโฟกัสกับแกนเอก	11
2.4 การหาพื้นที่ใต้กราฟ	26
2.5 หน้าต่างโปรแกรม MATLAB	39
2.6 หน้าต่างโปรแกรม Visual Basic 2010	44
4.1 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of first kind incomplete form and elliptic integral of second kind incomplete form	72
4.2 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of first kind complete form and elliptic integral of second kind complete form	73
4.3 Flow-chart Simpson's elliptic integral of first kind incomplete form and elliptic integral of second kind incomplete form	74
4.4 Flow-chart Simpson's elliptic integral of first kind complete form and elliptic integral of second kind complete form	75

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ หน้า

4.5 Flow-chart Romberg elliptic integral of first kind incomplete form and elliptic integral of second kind incomplete form 76

4.6 Flow-chart Romberg elliptic integral of first kind complete form and elliptic integral of second kind complete form 77

4.7 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of third kind incomplete form 78

4.8 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of third kind complete form 79

4.9 Flow-chart Simpson's elliptic integral of third kind incomplete form 80

4.10 Flow-chart Simpson's elliptic integral of third kind complete form 81

4.11 Flow-chart Romberg elliptic integral of third kind incomplete form..... 82

4.12 Flow-chart Romberg elliptic integral of third kind complete form..... 83

4.13 แสดงหน้าต่างหลักของโปรแกรม 84

4.14 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of First kind Incomplete Form..... 85

4.15 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of First kind Complete Form 85

4.16 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Second kind Incomplete Form ... 86

4.17 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Second kind Complete Form..... 86

4.18 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Third kind Incomplete Form..... 87

4.19 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Third kind Complete Form..... 87

4.20 แสดงในกรณีที่ไม่เข้าเงื่อนไข..... 88

4.21 แสดงการคำนวณโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.1..... 88

4.22 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.2..... 89

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.23 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.3	89
4.24 แสดงการคำนวณโดยโปแกรมจากตัวอย่าง 4.4	90
4.25 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.5	90
4.26 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.6	91
ก คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of First kind Incomplete Form	98
ข ค่าประมาณของ Elliptic Integral of First kind Incomplete Form	98
ค คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of First kind Complete Form	99
ง ค่าประมาณของ Elliptic Integral of First kind Complete Form	99
จ คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of Second kind Incomplete Form	100
ฉ ค่าประมาณของ Elliptic Integral of Second kind Incomplete Form	100
ช คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of Second kind Complete Form	101
ซ ค่าประมาณของ Elliptic Integral of Second kind Complete Form	101
ฌ คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of Third kind	102
ญ ค่าประมาณของ Elliptic Integral of Third kind	102

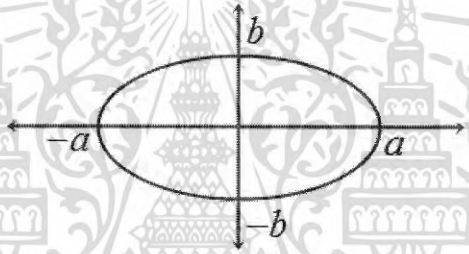
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วงรี คือ เซต หรือทางเดินของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่ (Fixed point) 2 จุดเป็นค่าคงตัว จุด 2 จุดนี้เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus) ซึ่งความยาวแกนหลัก คือ $2a$ และความยาวแกนรอง คือ $2b$ ดังรูปที่ 1.1 มีสมการ ดังนี้

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.1}$$



รูปที่ 1.1 วงรี

ความเยื้องศูนย์กลาง (e) ของวงรีหาได้จากสมการ $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$

จาก (1.1) ซึ่งเป็นสมการแบบปริยายสามารถจัดเป็นสมการแบบชัดแจ้งได้ ดังนี้

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{1.2}$$

โดยการหาอนุพันธ์ (1.2) จะได้

$$y'(x)=-\frac{xb}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

เนื่องจากวงรีสมมาตรรอบแกน x และแกน y ดังนั้น เมื่อคิดเฉพาะในจตุภาคที่หนึ่งความยาวของเส้นรอบวงของวงรีจะเป็น 4 เท่าของความยาวของส่วนของวงรีจาก a ไป b นั่นคือ

$$L=4\int_0^a\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\frac{1-e^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx$$

โดยการแทน $z=\frac{x}{a}$ จะได้

$$L = 4a\int_0^a \sqrt{\frac{1-e^2z^2}{1-z^2}}dz$$

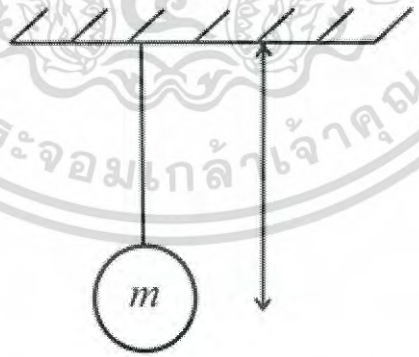
ถ้าให้ $z=\sin\varphi$ แล้ว

$$L = 4a\int_0^{\sin^{-1}a} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \qquad (1.3)$$

ปริพันธ์ตาม (1.3) คือ รูปแบบหนึ่งของปริพันธ์เชิงวงรี

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาจะได้ปริพันธ์เชิงวงรีเช่นกัน [7] ดังนี้

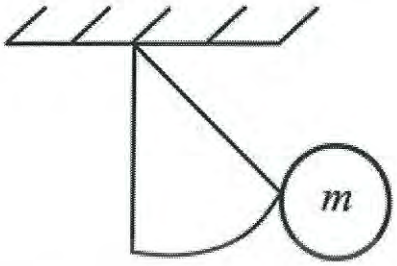
พิจารณาลูกตุ้มมวล m ผูกติดกับท่อนพลาสติกกลมยาว l ปลายอีกข้างยึดติดกับเพดาน



รูปที่ 1.2 ลูกตุ้มผูกติดกับท่อนพลาสติก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลูกตุ้มถูกดึงออกทำมุม θ กับแนวดิ่ง



รูปที่ 1.3 ลูกตุ้มถูกดึงออกทำมุมกับแนวดิ่ง

ระยะทางที่ลูกตุ้มเคลื่อนที่ คือ $l\theta$

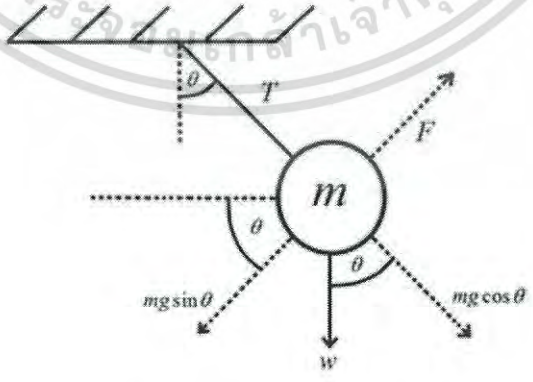
หาได้โดย

มุมเท่ากับ 2π แล้ว $s = 2\pi l$

มุมเท่ากับ θ แล้ว $s = 2\pi l \dfrac{\theta}{2\pi} = l\theta$

ความเร็ว $\dfrac{ds}{dt} = l\dfrac{d\theta}{dt}$; ความเร่ง $\dfrac{d^2s}{dt^2} = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

แรงที่กระทำกับมวล m คือ w เป็นแรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก T เป็นแรงตึงในเส้นเชือก และ F เป็นแรงที่ทำให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่มีทิศดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 ทิศของลูกตุ้มที่ถูกแรงกระทำ

ให้ $w = mg$ เป็นแรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $F = ma$ เป็นแรงที่ทำให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน

$$F = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.4}$$

$mg\sin\theta$ เป็นแรงย่อยในแนวสัมผัสที่เป็นแรงสะสม ที่ทำให้วัตถุกลับสู่สมดุลย์

$$F = -mg\sin\theta \tag{1.5}$$

จาก (1.4) และ (1.5) $ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega\sin\theta \quad ; \omega = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega\sin\theta = 0 \tag{1.6}$$

ให้ $p = \frac{d\theta}{dt}$ ดังนั้น $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

และจะได้ $$p\frac{dp}{d\theta} + \omega\sin\theta = 0$$

$$pdp = -\omega\sin\theta d\theta \tag{1.7}$$

โดยการหาปริพันธ์ (1.7) จะได้

$$\frac{p^2}{2} = \omega\cos\theta + C$$

$$\frac{p^2}{2} - \omega\cos\theta = C \tag{1.8}$$

เมื่อเริ่มต้นลูกตุ้มยังไม่มีการแกว่ง นั่นคือ $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ที่ $\theta = \theta_0$ จะได้ $C = -\omega\cos\theta_0$

จาก (1.8) จะได้ $$\frac{p^2}{2} - \omega\cos\theta = -\omega\cos\theta_0 \tag{1.9}$$

จัดสมการ (1.9) ใหม่

$$\frac{p^2}{2} = \omega\cos\theta - \omega\cos\theta_0$$

$$p^2 = 2\omega\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

$$p = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{2\omega\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

ในการพิจารณาคิดที่เวลา $t \geq 0$ ดังนั้น

พิจารณา p ที่เป็นบวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{2\omega\left(\cos\theta-\cos\theta_0\right)}$$

$$dt=\frac{d\theta}{\sqrt{2\omega\left(\cos\theta-\cos\theta_0\right)}}$$

ถ้าพิจารณาการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาครบรอบจะมีลักษณะเป็นวงกลม ดังนั้น เวลาของการแกว่งของลูกตุ้มจาก $\theta=0$ ไปยัง $\theta=\theta_0$ เป็น $\frac{T}{4}$ โดยที่ T เป็นคาบของการแกว่งไปมา

จะได้ว่า

$$\frac{T}{4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\right)\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

ให้ $k=\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณ

$$\cos\theta=1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),\ \cos\theta_0=1-2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

จะได้

$$T=\frac{4}{\sqrt{2\omega}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\left(1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)-\left(1-2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{\omega}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{2\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{\omega}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\omega}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \qquad (1.10)$$

ให้ $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=k\sin\phi$ (1.11)

โดยการหาอนุพันธ์ (1.11) จะได้

$$\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=k\cos\phi d\phi \quad \text{หรือ} \quad d\theta=\frac{2k\cos\phi d\phi}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณ

เอกสารนี้สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$$

และ $$k\cos\phi=k\sqrt{1-\sin^2\phi}=k\sqrt{1-\left(\frac{1}{k^2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{k^2-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

และ $$d\theta=\frac{2\sqrt{k^2-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \qquad (1.12)$$

แทนค่า (1.12) ใน (1.10) โดยที่ช่วง θ จาก 0 ถึง θ_0 และ ϕ จาก 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $$T=\frac{2}{\sqrt{\omega}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{k^2-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\frac{}{\sqrt{k^2-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}d\phi$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\omega}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \qquad (1.13)$$

ปริพันธ์ (1.3) , (1.13) ไม่สามารถหาค่าได้ โดยการจัดเป็นรูปแบบอดิศัยพื้นฐาน (elementary transcendental) เรียกปริพันธ์ตาม (1.3) , (1.13) นี้ว่า ปริพันธ์เชิงวงรี (Elliptic integral)

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษารูปแบบต่าง ๆ ของปริพันธ์เชิงวงรี และศึกษาการประมาณค่าของปริพันธ์วงรี

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. ศึกษารูปแบบต่าง ๆ ของปริพันธ์เชิงวงรี
2. ศึกษาการประมาณค่าปริพันธ์เชิงวงรี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1.3.1 ศึกษารูปแบบปริพันธ์เชิงวงรีสามรูปแบบ ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

1. $\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad ; 0 \le k^2 \le 1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

2. $\int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta \quad ; 0 \le k^2 \le 1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

3. $\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\left(1-n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad ; 0 \le k^2 \le 1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

1.3.2 หาค่าประมาณของปริพันธ์เชิงวงรีในข้อ 1.3.1

1.3.3 เขียนโปรแกรมเพื่อประมาณค่า

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้โปรแกรมช่วยประมาณค่า
2. หาค่าของปริพันธ์เชิงวงรีได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 แผนการดำเนินงาน

	เดือน											
	ส.ค. 58	ก.ย. 58	ต.ค. 58	พ.ย. 58	ธ.ค. 58	ม.ค. 59	ก.พ. 59	มี.ค. 59	เม.ย. 59	พ.ค. 59	มิ.ย. 59	ก.ค. 59
หาอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ปรึกษาเรื่องที่สนใจ												
ค้นคว้าและศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจ												
วางแผนการวิจัย												
บทที่ 1 บทนำ												
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง												
บทที่ 3 การหาผลเฉลยของปริพันธ์เชิงวงรี												
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล												
บทที่ 5 สรุปผงานวิจัยและข้อเสนอแนะ												
จัดทำรูปเล่ม												
ตรวจสอบและนำเสนอ												

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ภาคตัดกรวย

ภาคตัดกรวย (conic section หรือ conic) ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เส้นโค้งที่ได้จากการตัดพื้นผิวกรวยกลมด้วยระนาบแบน ภาคตัดกรวยนี้ได้มีการศึกษาตั้งแต่ 200 ปีก่อนคริสต์ศักราช โดย อพอลโลเนียส แห่งเพอร์กา ได้ศึกษาภาคตัดกรวยและค้นพบสมบัติหลายประการของภาคตัดกรวย ต่อมาได้มีการนำภาคตัดกรวยมาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาต่าง ๆ ตัวอย่างเช่น ในปี พ.ศ. 2133 (ค.ศ. 1590) กาลิเลโอ กาลิเลอี พบว่าขีปนาวุธที่ยิงขึ้นไปในมุมที่กำหนดกับแนวราบมีวิถีการเคลื่อนที่โค้งแบบพาราโบลา ในพ.ศ. 2152 (ค.ศ. 1609) โยฮันส์ เคปเลอร์ พบว่าวงโคจรของดาวเคราะห์บางวงโคจรเป็นรูปวงรี เป็นต้น

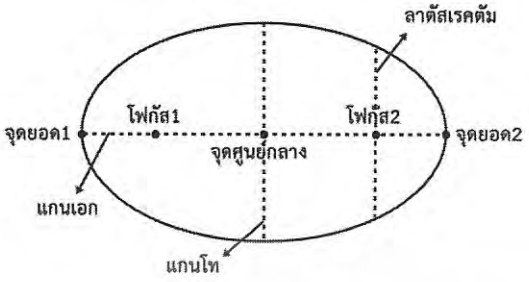
วงรี คือ เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยด้วยระนาบที่เอียงทำมุมกับแกนโดยระนาบไม่ผ่านปากกรวย ถ้ามุมนั้นเป็นมุมฉากแล้วเส้งโค้งที่ได้ เรียกว่า วงกลม ถ้าระนาบขนานกับแกนของกรวยแล้วเส้นที่เกิดขึ้น เรียกว่า เส้นกำเนิดกรวย ถ้าระนาบเอียงทำมุมกับแกนของกรวยผ่านปากกรวยและตัดกรวยข้างเดียว เรียกว่า พาราโบลา ถ้าระนาบขนานกับแกนของกรวยผ่านปากกรวยและตัดกรวยทั้งครึ่งบนและล่าง เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา และถ้าระนาบผ่านจุดยอดของกรวยพอดี เรียกว่า จุด

วงกลมและวงรีเป็นเส้นโค้งปิด เส้นตรงและพาราโบลาเป็นเส้งโค้งเปิดชิ้นเดียว ไฮเพอร์โบลาเป็นเส้นโค้งปิดสองชิ้น

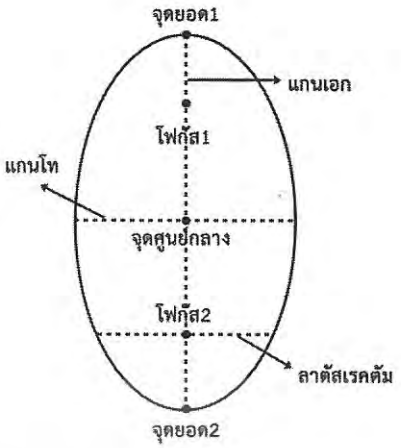
นิยาม 2.1

วงรี (Ellipse) คือ เซต หรือทางเดินของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่ (Fixed point) 2 จุด เป็นค่าคงตัว จุด 2 จุดนี้ เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus)
ซึ่งกราฟวงรีจะมี 2 แบบ คือ แบบแบนขั้ว รูป 2.1 (ก) และแบบแบนข้าง รูป 2.1 (ข) โดยคำศัพท์สำหรับส่วนต่าง ๆ ของวงรี จะมีดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

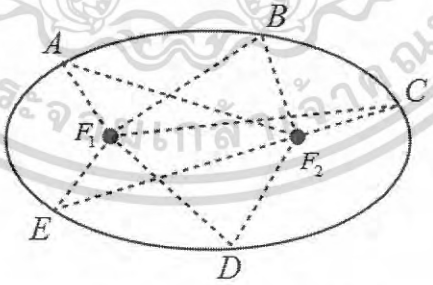


รูปที่ 2.1 (ก) วงรีแบบแบนขั้ว



รูปที่ 2.1 (ข) วงรีแบบแบนข้าง

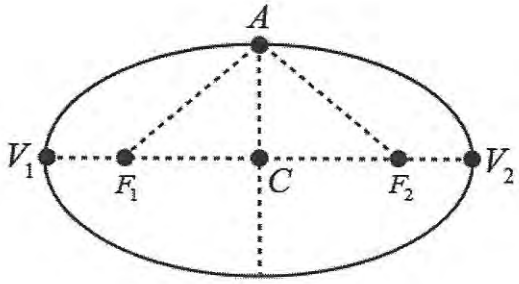
- จุดศูนย์กลาง คือ จุดที่อยู่ตรงกลางของวงรี
- แกนเอก คือ แกนที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางตามแนวยาวของวงรี
- แกนโท คือ แกนที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางในแนวตั้งฉากกับแกนเอก
- จุดยอด คือ จุดปลายแกนเอกทั้งสองจุด นิยามแทนด้วยสัญลักษณ์ V_1 และ V_2
- จุดโฟกัส คือ จุด 2 จุดบนแกนเอกที่มีคุณสมบัติ คือ ระยะจากโฟกัส$_1$ ไปจุดใด ๆ บนวงรีกลับมาที่จุดโฟกัส$_2$ จะมีความยาวเท่ากับแกนเอกเสมอ โดยเรานิยามแทนจุดโฟกัสด้วยสัญลักษณ์ F_1 และ F_2 เช่น



รูปที่ 2.2 คุณสมบัติของจุดโฟกัส

จากรูปที่ 2.2 จะได้ $F_1AF_2 = F_1BF_2 = F_1CF_2 = F_1DF_2 = F_1EF_2 =$ ความยาวแกนเอก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างจุดโฟกัสกับแกนเอก

ในกรณีที่จุดบนวงรี คือ จุดปลายแกนโท จะได้ $F_1A = V_1C$

ลาตัสเรคตัม คือ คอร์ดที่ลากผ่านจุดโฟกัสในแนวตั้งฉากกับแกนเอก

สมการกราฟของวงรีจะอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (2.1)

ถ้า $a>b$ จะเป็นวงรีแบบแบนข้าง และถ้า $a<b$ จะเป็นวงรีแบบแบนขั้ว

เช่น $\dfrac{(x-1)^2}{3^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=1 \rightarrow$ แบบแบนข้าง รูป 2.1 (ก)

$\dfrac{(x+1)^2}{1^2}+\dfrac{(y-2)^2}{\sqrt{2}^2}=1 \rightarrow$ แบบแบนขั้ว รูป 2.1 (ข)

ปกติเราจะใช้ “a แทนตัวมาก” และ “b แทนตัวน้อย” ดังนั้น

ค่าความเยื้องหรือค่าความเบี่ยงเบนจากศูนย์กลาง (eccentricity) ของภาคตัดกรวย เป็นค่าบ่งชี้ถึงความเบี้ยวหรือเบี่ยงเบนไปจากความกลม โดยเมื่อความเยื้องมีค่าลดลงรูปร่างของภาคตัดกรวยที่ได้จะมีรูปร่างเข้าใกล้ทรงกลมมากขึ้น

ถ้าเส้นตรง L คือ ไดเรกทริกซ์ และ F คือ จุดโฟกัส ค่าความเยื้อง e หาได้จาก

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)}=e$$

โดยที่

- $d(P,F)$ คือ ระยะทางจากจุด P ใด ๆ บนภาคตัดกรวยไปยังจุดโฟกัส F
- $d(P,L)$ คือ ระยะทางจากจุด P ใด ๆ บนภาคตัดกรวยไปตั้งฉากกับไดเรกทริกซ์ L

รูปร่างของภาคตัดกรวยที่ได้ขึ้นกับค่า e โดย $0<e<1$ เป็นรูปวงรี

<u>หมายเหตุ</u> : ค่าความเยื้องศูนย์กลางจะมีค่าในช่วง $(0,1)$ เป็นค่าที่บอก“ระดับความรี”

เอกสารนี้สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $\frac{c}{a}$ มีค่าใกล้ ๆ 1 วงรีจะรีมาก

ถ้า $\frac{c}{a}$ มีค่าใกล้ ๆ 0 วงรีจะรีน้อย

2.2 อนุกรมกำลัง (Power Series)

อนุกรมกำลัง (Power Series) [5] เป็นอนุกรมที่อยู่ในรูปของผลบวกของตัวแปรยกกำลังจำนวนเต็มบวก

นิยาม 2.2

ถ้า x เป็นตัวแปร และ a_n เป็นค่าคงตัวสำหรับทุก ๆ n โดยเรียก a_n ว่าสัมประสิทธิ์ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ เรียกว่า อนุกรมกำลัง ถ้าอนุกรมกำลังอยู่ในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ สำหรับทุกค่าจริง x เรียกค่าคงตัว a ว่าจุดศูนย์กลางการกระจาย เราจะเรียกอนุกรมกำลังในรูปแบบนี้ว่า อนุกรมกำลังรอบจุด a

นั่นคือ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots + a_n (x-a)^n + \ldots$

สำหรับเงื่อนไขการลู่เข้า $|x-a| < r$ และ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ของทุกอันดับ

นั่นคือ $f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots + a_n (x-a)^n + \ldots$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x-a) + \ldots + na_n (x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 (x-a) + \ldots + n(n-1) a_n (x-a)^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4 (x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n (x-a)^{n-3} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) a_k + n(n-1)\ldots(n-k) a_{n+1} (x-a)^{n-k} + \ldots$$

เมื่อแทน $x = a$ จะได้ $f(a) = a_0$

$$f'(a) = a_1$$

$$f''(a) = 2! a_2$$

$$f'''(a) = 3! a_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n! a_n$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

เราจะเรียกอนุกรมกำลังที่อยู่ในรูป

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(n)(x-a)^n}{\mathrm{n!}}+\ldots$$

ว่าอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) หรือเขียนอยู่ในรูป $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

ถ้า $a=0$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า อนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin Series) นั่นคือ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ e^x

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x)=e^x \quad , \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=e^x \quad , \quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=e^x \quad , \quad f''(0)=1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x \quad , \quad f^{(n)}(0)=1$$

ดังนั้น $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

<u>ตัวอย่าง 2.2</u> จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ $(1+x)^{\alpha}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x)=(1+x)^{\alpha} \qquad f(0)=1$$
$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0)=\alpha$$
$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0)=\alpha(\alpha-1)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

ดังนั้น $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \;;\; |x|<1$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

เราเรียกอนุกรมนี้ว่า อนุกรมทวินาม (Binomial Series)

โดย $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha!}{(\alpha-k)!k!}$ เป็นสัมประสิทธิ์ทวินาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 ฟังก์ชันแฟคทอเรียล (Factorial function)

สำหรับ n ที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ

นิยาม 2.3

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \text{ หรือ } n! = n(n-1)!; n > 0$$

ตัวอย่างเช่น $7! = 7(7-1)! = 7(6)(6-1)! = \ldots = 7(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5,040$

หมายเหตุ : กรณี $n = 1$ จะได้ว่า $1! = 1 \cdot (1-1)! = 0!$

$$1! = 0!$$

จะได้ $$0! = 1$$

2.3.1 ดับเบิลแฟคทอเรียล

ดับเบิลแฟคทอเรียลหรือเซมิ-แฟคทอเรียลของ n

นิยาม 2.4

$$n!! = \begin{cases} 1 & ; n = 0, \text{n} = 1 \\ n(n-2)!! & ; \text{n} \geq 2 \end{cases}$$

สำหรับ n เป็นจำนวนคู่

$$n!! = \prod_{k=1}^{n/2} (2k) = n(n-2)\ldots 2$$

สำหรับ n เป็นจำนวนคี่

$$n!! = \prod_{k=1}^{n+1/2} (2k-1) = n(n-2)\ldots 1$$

ความสัมพันธ์ของแฟคทอเรียล

สำหรับจำนวนเต็มคู่บวก $n = 2k \quad ; k \geq 0$

$$n!! = 2^k k!$$

สำหรับจำนวนเต็มคี่บวก $n = 2k-1 \quad ; k \geq 1$

$$n!! = \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{n!}{(n-1)!!}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function)

เป็นฟังก์ชันที่เป็นส่วนขยายของฟังก์ชันแฟคทอเรียลในกรณีที่ n ไม่เป็นศูนย์และไม่เป็นจำนวนเต็ม

นิยาม 2.5

สำหรับจำนวนจริง $x>0$

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \tag{2.2}$$

โดยจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันแกมมา

บางสมบัติของฟังก์ชันแกมมา

บทตั้ง 2.6 ให้ $x>0$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

พิสูจน์ $\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{(x+1)-1}dt$

$$=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}dt$$

พิจารณา $\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}dx$

$u=t^x \qquad dv=e^{-t}dt$

$du=xt^{x-1}dt \qquad v=-e^{-t}$

$$\int e^{-t}t^{x}dt=-e^{-t}t^{x}+\int e^{-t}xt^{x-1}dt$$

$$=-e^{-t}t^{x}+x\int e^{-t}t^{x-1}dt$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}dt=-e^{-t}t^{x}\Big|_{t=0}^{t=\infty}+x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$=\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{x}+0+x\Gamma(x)=0+x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

จาก (2.2) $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

$u=t^{x-1} \qquad dv=e^{-t}dt$

$du=(x-1)t^{x-2}dt \qquad v=-e^{-t}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = -e^{-t}t^{x-1}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty e^{-t}\left(x-1\right)t^{x-2}dt$$

$$= \left(x-1\right)\int_0^\infty e^{-t}t^{x-2}dt$$

$$= \left(x-1\right)\int_0^\infty e^{-t}t^{(x-1)-1}dt$$

$$= \left(x-1\right)\Gamma\left(x-1\right)$$

$$\Gamma\left(x\right) = \left(x-1\right)\Gamma\left(x-1\right) \tag{2.3}$$

จาก (2.2) ถ้า $x=1$; $\Gamma\left(1\right) = \int_0^\infty e^{-t}dt$

$$= -e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= 1$$

นั่นคือ $\Gamma\left(1\right) = 1$ (2.4)

จาก (2.3) $\Gamma\left(2\right) = \Gamma\left(1\right) = 1$

$\Gamma\left(3\right) = 2\Gamma\left(2\right) = 2\cdot 1$

$\Gamma\left(4\right) = 3\Gamma\left(3\right) = 3\cdot 2\cdot 1$

จะได้ $\Gamma\left(n+1\right) = n!$ เมื่อ n ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ

<u>ทฤษฎีบท 2.7</u> $\Gamma\left(1-x\right) = -x\Gamma\left(-x\right)$

$$\Gamma\left(1-x\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{(1-x)-1}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}t^{-x}dt$$

$u = t^{-x}$ $\qquad dv = e^{-t}dt$

$du = -xt^{x-1}dt$ $\qquad v = -e^{-t}$

$$= -e^{t}t^{-x}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - x\int_0^\infty e^{-t}t^{-x-1}dt$$

$$\Gamma\left(1-x\right) = -x\Gamma\left(-x\right) \tag{2.5}$$

<u>ทฤษฎีบท 2.8</u> $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

<u>พิสูจน์</u> $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $u = t^{\frac{1}{2}}$

$$du = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \quad \Rightarrow \quad t^{-\frac{1}{2}}dt = 2du$$

ดังนั้น $\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$

ให้ $$I = \int_0^\infty e^{-u^2}du$$

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$$

แปลงเป็นพิกัดเชิงขั้ว $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta$$

ให้ $v = -r^2$

$$dv = -2rdr$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{-e^v}{2}dvd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-e^{-r}}{2}d\theta \Big|_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}e^{-\infty} + \frac{1}{2}e^0 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

จะได้ $$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

จึงได้ว่า $$2I = \sqrt{\pi}$$

ดังนั้น $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (2.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.9 ให้ $x<0$ โดย $x\notin\{0,-1,-2,...\}$

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+l+1)}{x(x-1)...(x-l)}$$

โดยที่ $l\geq 0$ เป็นจำนวนเต็มที่ $x+l+1>0$

ตัวอย่าง 2.3 $\left(-\frac{3}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ จากนิยาม 2.8 ให้ $l=0$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1+0\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-2\sqrt{\pi}$$

2.5 ปริพันธ์ของวอลลิส (Wallis' integrals)

นิยาม 2.10 ปริพันธ์ของวอลลิส คือ ปริพันธ์ที่เป็นพจน์ของลำดับ $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ที่นิยามโดย

$$W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx \tag{2.7}$$

กรณี $n=0$; $W_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$

กรณี $n=1$; $W_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$$=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0-(-1)$$

$$=1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี $n=2$; $W_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

กรณี $n=3$; $W_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx$

ให้ $u=\cos x \quad du=-\sin x\,dx$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-u^2\right)du=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0-\left(-1+\frac{1}{3}\right)$$

$$=1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}$$

กรณี $n=4$; $W_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-2\cos 2x+\cos^2 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \sin\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\sin 2\pi}{8}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 0\right]$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$

แสดงในรูปของตารางได้ ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงการหาค่าปริพันธ์ของวอลลิสในรูปของ sin(x)

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	...
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5\pi}{32}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{35\pi}{256}$	...

ถ้า $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx$

กรณี $n = 0$; $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$

กรณี $n = 1$; $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

กรณี $n = 2$; $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

กรณี $n = 3$; $W_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx$

ให้ $u = \sin x \quad du = \cos x \, dx$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - u^2\right) du = -\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{3}\right) - 0$$

$$= -1 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

กรณี $n = 4$; $W_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \sin \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\sin 2\pi}{8} \right) - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 0 \right] = \frac{3\pi}{16}$$

แสดงในรูปของตารางได้ ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2 แสดงการหาค่าปริพันธ์ของวอลลิสในรูปของ cos(x)

W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	...
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5\pi}{32}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{35\pi}{256}$	...

ปริพันธ์ของวอลลิส

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$$

ให้ $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

จะได้ว่า $W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$$

ดังนั้น $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$ สมมูลกับ $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx$

สำหรับ $n \geq 2$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\left[1 - \cos^2(x)\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx$$

พิจารณา $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx$

โดยการหาปริพันธ์แยกส่วน

$$u(x) = \cos(x) \qquad dv(x) = \cos(x)\sin^{n-2}(x)$$

$$du(x) = -\sin(x)\,dx \qquad v(x) = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx = \left[\frac{\sin^{n-1}(x)}{n-1}\cos(x)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\sin(x)\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{n-1}W_n$$

จะได้ว่า

$$W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1}W_n$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)W_n = W_{n-2}$$

$nW_n = (n-1)W_{n-2}$; $n \geq 2$ คือ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของ (W_n)

ลำดับ (W_n) ขึ้นอยู่กับ n

กรณี n เป็นจำนวนคู่ ให้ $n = 2p$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็ม

$$n = 2p\,; W_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{1}{2}W_0$$

$$= \frac{2p}{2p}\times\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-2}{2p-2}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}W_0$$

$$= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

กรณี n เป็นจำนวนคี่ ให้ $n = 2p+1$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็ม

$$n = 2p+1\,; W_{2p+1} = \frac{2p}{2p-1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\frac{2}{3}W_1$$

$$= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

2.6. ค่าคลาดเคลื่อนและค่าประมาณ (Error and Approximation)

ค่าคลาดเคลื่อน (Errors) [1]

การใช้ค่าประมาณ (Approximation) แทนค่าจริงจะเกิดค่าคลาดเคลื่อน โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Errors) เกี่ยวข้องกับการตัดค่าในพจน์ท้าย ๆ ทิ้ง เพราะถือว่ามีค่าน้อยมาก ซึ่งนิยมใช้มากในเรื่องค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ (Round off Errors) เกี่ยวข้องกับการเก็บค่าตัวเลขในคอมพิวเตอร์ ซึ่งค่าผลลัพธ์ที่ได้มีทศนิยมมากเกินกว่าที่จะเก็บบันทึกไว้ได้ เช่น ค่า π เป็นค่าตัวเลขที่เก็บ ไม่สามารถแทนค่าด้วยจำนวนที่แท้จริงได้ จึงมีค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดขึ้น ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน ค่าจริง และค่าประมาณ คือ

ค่าจริง = ค่าประมาณ + ค่าคลาดเคลื่อน

ถ้าให้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ E_t แทนค่าคลาดเคลื่อน จะได้

E_t = ค่าจริง - ค่าประมาณ

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ $\dfrac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}}$

การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของข้อมูลแต่ละชุดนั้น ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบทางตรงได้ทันที ดังนั้น ถ้าต้องการเปรียบเทียบค่าจะต้องคิดเป็นร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

$$\varepsilon_t = \left| \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}} \right| \times 100\%$$

โดยทั่วไปการวิเคราะห์เชิงตัวเลขไม่จำเป็นเสมอไปที่จะต้องทราบค่าจริง แต่จะสามารถนำค่าประมาณมาใช้แทนค่าจริงได้ และวิธีที่จะทราบได้ว่าจะนำค่าประมาณครั้งใดมาใช้จะต้องพิจารณาจากค่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ (ε_a)

$$\varepsilon_a = \frac{\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนหน้า}}{\text{ค่าประมาณสุดท้าย}} \times 100\%$$

<u>ตัวอย่าง 2.4</u>

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและความสัมพันธ์ของอนุกรมแมคคลอรีน

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

จงหาค่าประมาณของ $e^{0.5}$ โดยกำหนดให้ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ $\varepsilon_s = 0.05\%$ และค่าจริง $e^{0.5} = 1.64872$

<u>วิธีทำ</u>

การประมาณหนึ่งพจน์ $e^x \approx 1$

$$e^{0.05} \approx 1$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{1.64872 - 1}{1.64872} \right| \times 100 = 39.35\%$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การประมาณสองพจน์ $e^x \approx 1+x$

$$e^{0.5} \approx 1+0.5 = 1.5$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.64872-1.5}{1.64872} \times 100\% = 9.02\%$$

$$\varepsilon_a = \frac{1.5-1}{1.5} \times 100\% = 33.3\%$$

การประมาณสามพจน์ $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}$

$$e^{0.5} \approx 1+0.5+\frac{(0.5)^2}{2!} = 1.625$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.64872-1.625}{1.64872} \times 100\% = 1.44\%$$

$$\varepsilon_a = \frac{1.625-1.5}{1.625} \times 100\% = 7.69\%$$

จะเห็นว่าทั้ง $|\varepsilon_t| > 0.05$ และ $|\varepsilon_a| > 0.05$ ดังนั้น จะต้องทำจนกระทั่ง $|\varepsilon_t| < 0.05$ และ $|\varepsilon_a| < 0.05$ ซึ่งจะได้ค่าคลาดเคลื่อนแสดงดังในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 แสดงการหาค่าประมาณของ $e^{0.05}$ จนกระทั่ง $|\varepsilon_t| < 0.05$ และ $|\varepsilon_a| < 0.05$

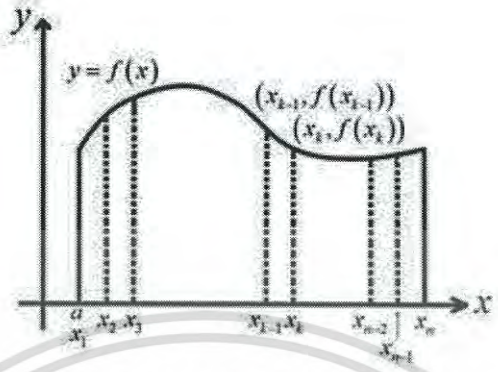
จำนวนพจน์	ผลลัพธ์ $\left(e^{0.5}\right)$	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$	$\lvert\varepsilon_a\rvert\%$
1	1	39.35	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.64583	0.1757	1.27
5	1.64843	0.00172	0.158
6	1.64869	0.00142	0.0158

2.7 การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

จากพื้นฐานการหาค่าปริพันธ์ในวิชาแคลคูลัส มีทั้งการหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต ในกรณีการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตพบว่าในบางครั้งไม่สามารถหาค่าปริพันธ์ออกมาได้ง่าย เช่น $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\sin^2\theta}}$ จึงต้องใช้วิธีการประมาณค่า สำหรับในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตด้วยวิธีเชิงตัวเลข [6]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)



รูปที่ 2.4 การหาพื้นที่ใต้กราฟ

$\int_a^b f(x)dx$ เป็นพื้นที่ของบริเวณใต้กราฟ $y=f(x)$ เหนือแกน x บนช่วง $a \le x \le b$

แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน ความยาวของแต่ละช่วง คือ $h=\frac{b-a}{n}$

จุดปลายช่วงใด ๆ $[x_{k-1},x_k]$ คือ $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ และ $(x_k,f(x_k))$ โดยการลากเส้นตรงเชื่อมจุดปลายทั้งสองได้สี่เหลี่ยมคางหมู

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู คือ $\frac{1}{2}h\left[f(x_k)+f(x_{k-1})\right]=\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(f_{k-1}+f_k)$

$$I_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx=\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(f_{k-1}+f_k)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\ldots+\int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(f_0+f_1)+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(f_1+f_2)+\ldots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(f_{n-2}+f_{n-1})+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(f_{n-1}+f_n)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}$$
$$\left[(f_0+f_1)+(f_1+f_2)+\ldots+(f_{n-2}+f_{n-1})+(f_{n-1}+f_n)\right]$$

$$=\frac{1}{2}h\left[f_0+2f_1+2f_2+\ldots+2f_{n-2}+2f_{n-1}+f_n\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-2} + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right]$$

$$= h\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-2} + 2f_{n-1} + f_n\right] \quad (2.8)$$

ค่าคลาดเคลื่อนในสูตรสี่เหลี่ยมคางหมู

พื้นที่ภายใต้เส้น $y = f(x)$ เหนือแกน x บนช่วง $[x_{k-1}, x_k]$

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

จากกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

$$T_k = \frac{h}{2}\left[f(x_{k-1}) + f(x_k)\right] = \frac{h}{2}(f_{k-1} + f_k)$$

$$I_k = T_k + E_k$$

$$E_k = I_k - T_k$$

I_k คือ ค่าจริง

E_k คือ ค่าคลาดเคลื่อน

T_k คือ ค่าประมาณวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย $f(x_{k-1})$ รอบ $x = x_k$

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k-1} - x_k) + f''(x_k)\frac{(x_{k-1} - x_k)^2}{2!} + f'''(x_k)\frac{(x_{k-1} - x_k)^3}{3!} + \ldots$$

$h = x_k - x_{k-1}$ หรือ $-h = x_{k-1} - x_k$

$$\Rightarrow f(x_{k-1}) = f(x_k) - hf'(x_k) + \frac{h^2}{2!}f''(x_k) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_k) + \ldots$$

$$T_k = \frac{h}{2}\left[2f(x_k) - hf'(x_k) + \frac{h^2}{2!}f''(x_k) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_k) + \ldots\right]$$

$$= hf(x_k) - \frac{h^2}{2}f'(x_k) + \frac{h^3}{2\times 2!}f''(x_k) - \frac{h^4}{2\times 3!}f'''(x_k) + \ldots$$

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย $F(x_{k-1})$ รอบ $x = x_k$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(x_{k-1}) = F(x_k) + F'(x_k)(x_{k-1} - x_k) + F''(x_k)\frac{(x_{k-1} - x_k)^2}{2!}$$

$$+ F'''(x_k)\frac{(x_{k-1} - x_k)^3}{3!} + \dots$$

$h = x_k - x_{k-1}$ หรือ $-h = x_{k-1} - x_k$

$$\Rightarrow F(x_{k-1}) = F(x_k) - hF'(x_k) + \frac{h^2}{2!}F''(x_k) - \frac{h^3}{3!}F'''(x_k) + \dots$$

$$I_k = hF'(x_k) - \frac{h^2}{2!}F''(x_k) + \frac{h^3}{3!}F'''(x_k) - \dots$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

$$f(x) = F'(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x_k) = f(x_k)$$

$$f'(x) = F''(x) \quad \Rightarrow \quad F''(x) = f'(x_k)$$

$$f''(x) = F'''(x) \quad \Rightarrow \quad F'''(x) = f''(x_k)$$

$$I_k = hf(x_k) - \frac{h^2}{2!}f'(x_k) + \frac{h^3}{3!}f''(x_k) - \dots$$

จาก $E_k = I_k - T_k$

$$= \left[hf(x_k) - \frac{h^2}{2!}f'(x_k) + \frac{h^3}{3!}f''(x_k) - \dots \right]$$

$$- \left[hf(x_k) - \frac{h^2}{2!}f'(x_k) + \frac{h^3}{2\cdot 3!}f''(x_k) - \frac{h^4}{2\cdot 4!}f'''(x_k) + \dots \right]$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)h^3 f''(x_k) + \text{พจน์ } h \text{ ยกกำลังสูงกว่า } 3$$

$$\approx -\frac{1}{12}h^3 f''(x_k) = -\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 f''(x_k) \qquad (2.9)$$

h มีค่าน้อย h^4 ก็ยิ่งมีค่าน้อย สามารถตัดทิ้งได้

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู

$$-\frac{1}{12}h^3 f''(\xi),\ x_0 \le \xi_1 \le x_1 \qquad (2.10)$$

ซึ่งเรียก (2.9) ว่า ความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ (Local error of trapezoidal rule)

$$-\frac{1}{12}h^3\left[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)\right] \approx -\frac{1}{12}h^3 n f''(\xi)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi) \qquad (2.11)$$

โดยที่ $f''(\xi) = \int_{x_0}^{x_1} f''(x)dx$

และเรียก (2.10) ว่า ความคลาดเคลื่อนในวงกว้าง (Global error)

ตัวอย่าง 2.5

จงใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

โดยแบ่งเป็น 2 ส่วน ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $n = 2$ และ $h = \frac{0.8-0}{2} = 0.4$

$$f(0) = 0.2 + 25(0) - 200(0)^2 + 675(0)^3 - 900(0)^4 + 400(0)^5$$
$$= 0.2$$
$$f(0.4) = 0.2 + 25(0.4) - 200(0.4)^2 + 675(0.4)^3 - 900(0.4)^4 + 400(0.4)^5$$
$$= 2.456$$
$$f(0.8) = 0.2 + 25(0.8) - 200(0.8)^2 + 675(0.8)^3 - 900(0.8)^4 + 400(0.8)^5$$
$$= 0.232$$
$$T \approx (0.8-0)\frac{f(0) + 2f(0.4) + f(0.8)}{4}$$
$$\approx 0.8\frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4}$$
$$= 1.0688$$
$$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$$
$$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$$

ค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์อันดับสองสามารถคำนวณได้ ดังนี้

$$f'' = \int_0^{0.8} \left(-400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3\right)dx$$
$$= -400x + \frac{4050}{2}x^2 - \frac{10800}{3}x^3 + \frac{8000}{4}x^4 \Big|_0^{0.8}$$
$$= -60$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_k = -\frac{(0.8-0)^3}{12(2)^3}(-60)(2) = 0.64$$

2.7.2 กฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)

ในการหาค่า $\int_a^b f(x)dx$ ถ้าแบ่งครึ่งช่วง $[a,b]$ ที่จุด c แล้ว $c=\frac{a+b}{2}$ จะมี 3 จุด คือ $(a,f(a)),(c,f(c)),(b,f(b))$ ต้องการหาพหุนามดีกรีสองประมาณค่า $\int_a^b f(x)dx$ สามารถดำเนินการได้ ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)\right]dx$$

เมื่อ $h=\frac{b-a}{2}$ และ $u=x-a$

จะได้ค่าของพจน์แรก คือ $\int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}dx = \frac{1}{2h^2}\int_a^{a+2h}(x-c)(x-b)dx$

$$= \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h}(u-h)(u-2h)du$$

$$= \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h} u^2-3hu+2h^2\,du$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2h}{2}+2h^2u\right]\Bigg|_0^{2h}$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{8h^3}{3}-\frac{12h^3}{2}+4h^3\right]$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{2h^3}{3}\right] = \frac{h}{3}$$

ค่าของพจน์กลาง คือ $\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}dx = \frac{1}{-h^2}\int_a^{a+2h}(x-a)(x-b)dx$

$$= -\frac{1}{h^2}\int_0^{2h}(u)(u-2h)du$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -\frac{1}{h^2}\int_0^{2h} u^2 - 2uh\,du$$

$$= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{u^3}{3} - u^2h\right]\Bigg|_0^{2h}$$

$$= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{8h^3}{3} - 4h^3\right]$$

$$= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{-4h^3}{3}\right] = \frac{4h}{3}$$

และค่าของพจน์สุดท้าย คือ $\int_a^b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}\,dx = \frac{1}{2h^2}\int_a^{a+2h} (x-a)(x-c)\,dx$

$$= \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h} (u)(u-h)\,du$$

$$= \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h} u^2 - uh\,du$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2h}{2}\right]\Bigg|_0^{2h}$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{8h^3}{3} - \frac{4h^3}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{2h^3}{3}\right] = \frac{h}{3}$$

ดังนั้น $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$ (2.12)

ถ้า $[a,b] = [x_0, x_n]$ เมื่อ n เป็นจำนวนช่วงย่อย ที่เป็นจำนวนคู่

และ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}$

จะได้ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทำนองเดียวกับกรณีข้างต้น จะได้

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_2)(x-x_1)}{(x_0-x_2)(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)\,dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

พิจารณา

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \int_{x_2}^{x_4} \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)} f(x_2) + \frac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_2)(x_3-x_4)} f(x_3) + \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_2)(x_4-x_3)} f(x_4)\,dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$

และ $$\int_{x_{n-2}}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_{n-2}}^{x_n} \frac{(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_n)} f(x_{n-2}) + \frac{(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)} f(x_{n-1}) + \frac{(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} f(x_n)\,dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

ดังนั้น $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right] + \ldots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right] \qquad (2.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ความคลาดเคลื่อนในสูตรซิมป์สัน</u>

จากอนุกรมเทเลอร์

$$f(x_1+t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\dots$$

$$f(x_0)=f(x_1-h)=a_0-a_1h+a_2h^2-a_3h^3+\dots$$

$$f(x_1)=a_0$$

$$f(x_2)=f(x_1+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+a_3h^3+\dots$$

$$f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)=6a_0h+2a_2h^2+2a_4h^4+\dots$$

$$\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]=2a_0h+\frac{2}{3}a_2h^3+\frac{2}{3}a_4h^5+\dots \qquad (2.14)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\int_{-h}^{h} f(x_1+t)\,dt$$

$$=\int_{-h}^{h}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5+\dots\right)dt$$

$$=\int_{-h}^{h}a_0\,dt+\int_{-h}^{h}a_1t\,dt+\int_{-h}^{h}a_2t^2\,dt+\int_{-h}^{h}a_3t^3\,dt+\int_{-h}^{h}a_4t^4\,dt+\int_{-h}^{h}a_5t^5\,dt+\dots$$

$$=a_0t\Big|_{-h}^{h}+\frac{a_1t^2}{2}\Big|_{-h}^{h}+\frac{a_2t^3}{3}\Big|_{-h}^{h}+\frac{a_3t^4}{4}\Big|_{-h}^{h}+\frac{a_4t^5}{5}\Big|_{-h}^{h}+\dots$$

$$=a_0\left[h-(-h)\right]+\frac{a_1}{2}\left[h^2-\left(-h^2\right)\right]+\frac{a_2}{3}\left[h^3-\left(-h^3\right)\right]+\frac{a_3}{4}\left[h^4-\left(-h^4\right)\right]$$

$$+\frac{a_4}{5}\left[h^5-\left(-h^5\right)\right]+\dots$$

$$=2a_0h+\frac{2}{3}a_2h^3+\frac{2}{5}a_4h^5+\dots$$

จากกฎของซิมป์สัน

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$=2a_0h+\frac{2}{3}a_2h^3+\frac{2}{3}a_4h^5+\dots$$

ค่าคลาดเคลื่อน $=\left[2a_0h+\frac{2}{3}a_2h^3+\frac{2}{3}a_4h^5+\dots\right]-\left[2a_0h+\frac{2}{3}a_2h^3+\frac{2}{5}a_4h^5+\dots\right]$

$$=\frac{2}{3}a_4h^5-\frac{2}{5}a_4h^5$$

$$=\frac{4}{15}a_4h^5$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad ; a_4 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \quad ; x_0 \le \xi \le x_2 \tag{2.15}$$

เรียกค่าคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ (Local Errer of Simpson's Rule) ดังนั้น ค่าคลาดเคลื่อนในวงกว้าง (Global Errer)

$$\frac{1}{90} h^5 \left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + \ldots + f^{(4)}(\xi_n) \right] \approx \frac{1}{90} h^5 n f^{(4)}(\xi)$$

$$= \frac{1}{90} (b-a) h^4 f^{(4)}(\xi) \tag{2.16}$$

ตัวอย่าง 2.6

จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมป์สันของฟังก์ชัน

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ โดยแบ่งเป็น 4 ช่วง

$a = 0$ ถึง $b = 0.8$

วิธีทำ $\int_0^{0.8} f(x)\,dx \approx \frac{(0.8-0)}{3(4)} \left[f(0) + 4\left(f(0.2) + f(0.6) \right) + 2 f(0.4) + f(0.8) \right]$

$f(0) = 0.2$

$f(0.2) = 1.288$

$f(0.4) = 2.456$

$f(0.6) = 3.464$

$f(0.8) = 0.232$

$$\int_0^{0.8} f(x)\,dx \approx \frac{(0.8)}{12} \left[0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232 \right]$$

$$\approx 1.6234667$$

$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$

$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$

$f'''(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2$

$f^{(4)}(x) = -21600 + 48000x$

ค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์อันดับที่ 4 สามารถคำนวณได้ ดังนี้

$$f^{(4)}(\xi) = \int_0^{0.8} (-21600 + 48000x)\,dx$$

$$= -21600x + 48000x^2 \Big|_0^{0.8}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -1920$$

$$= \frac{1}{90}(0.8)\left(\frac{0.8}{4}\right)^4(-1920)$$

$$= -0.03413$$

2.7.3 วิธีรอมเบิร์ก

จาก (2.9) ความคลาดเคลื่อนของ Trapezoidal rule

$$\frac{-f''(Z_n)(b-a)^3}{12n^2} = \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) \tag{2.17}$$

$$\frac{-f''(Z_m)(b-a)^3}{12m^2} = \int_a^b f(x)\,dx - T_m(f) \tag{2.18}$$

จาก (2.17) จะได้

$$\frac{-f''(Z_n)(b-a)^3}{12} = n^2\int_a^b f(x)\,dx - n^2T_n(f) \tag{2.19}$$

จาก (2.18) จะได้

$$\frac{-f''(Z_m)(b-a)^2}{12} = m^2\int_a^b f(x)\,dx - m^2T_m(f) \tag{2.20}$$

นำ (2.19) – (2.20) จะได้

$$\left(m^2-n^2\right)\int_a^b f(x)\,dx - \left[m^2T_m(f) - n^2T_n(f)\right] = \frac{\left[f''(Z_n) - f''(Z_m)\right](b-a)^3}{12} \tag{2.21}$$

$f''(Z_n)$ มีค่าเกือบเท่ากับ $f''(Z_m)$

ดังนั้น $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{m^2T_m(f) - n^2T_n(f)}{m^2-n^2} \tag{2.22}$$

เลือก $m = 2n$

$$\frac{4n^2T_{2n}(f) - n^2T_n(f)}{3n^2} = \frac{1}{3}\left[4T_{2n}(f) - T_n(f)\right]$$

นั่นคือ $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f) \tag{2.23}$$

จากค่าคลาดเคลื่อนของ Simpson's rule

$$\int_a^b f(x)\,dx - s_n(f) = \frac{f^{(4)}(Z_n)(b-a)^5}{90n^4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_a^b f(x)\,dx - s_m(f) = \frac{f^{(4)}(Z_m)(b-a)^5}{90m^4}$$

$$n^4\int_a^b f(x)\,dx - n^4 s_n(f) = \frac{f^{(4)}(Z_n)(b-a)^5}{90}$$

$$m^4\int_a^b f(x)\,dx - m^4 s_m(f) = \frac{f^{(4)}(Z_m)(b-a)^5}{90}$$

$$\left(m^4-n^4\right)\int_a^b f(x)\,dx - \left[m^4 s_m(f) - n^4 s_n(f)\right] = \frac{\left[f^{(4)}(Z_m) - f^{(4)}(Z_n)\right](b-a)^5}{90}$$

เนื่องจาก $f^{(4)}(Z_m)$ มีค่าเกือบเท่ากับ $f^{(4)}(Z_n)$

ดังนั้น $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{m^4 s_m(f) - n^4 s_n(f)}{\left(m^4-n^4\right)} \qquad (2.24)$$

เลือก $m = 2n$

$$\frac{16n^4 s_{2n}(f) - n^4 s_n(f)}{15n^4} = \frac{1}{15}\left[16 s_{2n}(f) - s_n(f)\right]$$

นั่นคือ $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{15}\left[16 s_{2n}(f) - s_n(f)\right] \approx \frac{1}{4^2-1}\left[4^2 s_{2n}(f) - s_n(f)\right] \qquad (2.25)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.7

กำหนดค่าจริงของ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{1+x}\,dx = 0.4669$ จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีรอมเบิร์ก

วิธีทำ

ตารางที่ 4 แสดงการหาค่าประมาณโดยวิธีรอมเบิร์ก

j	ส่วนย่อย (Segment)	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	0.2215 →	0.4707 →	0.47 →	0.4699
2	2	0.4048 →	0.47 →	0.4699	
3	4	0.4546 →	0.4699		
4	8	0.4661			

$\frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$ $\frac{16}{15}T_{2n} - \frac{1}{15}T_n$ $\frac{64}{63}T_{2n} - \frac{1}{63}T_n$

ระดับ 1

$$n=1;\quad T_1 = \left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right) = 0.2215$$

$$n=2;\quad T_2 = \left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{f(0)+2f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2(2)}\right)$$

$$= 0.4048$$

$$n=4;\quad T_4 = \left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{f(0)+2f\left(\frac{\pi}{12}\right)+2f\left(\frac{\pi}{6}\right)+2f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2(4)}\right)$$

$$= 0.4546$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$n=8;\quad T_8=\frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)}{2(8)}\left(\begin{array}{l} f(0)+2f\left(\frac{\pi}{24}\right)+2f\left(\frac{\pi}{12}\right)+2f\left(\frac{\pi}{8}\right)+2f\left(\frac{\pi}{6}\right)+2f\left(\frac{5\pi}{24}\right) \\ +2f\left(\frac{\pi}{4}\right)+2f\left(\frac{7\pi}{24}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right)$$
$$=0.4661$$

ระดับ 2

$$\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

$$n=1;\quad \frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=\frac{4}{3}(0.4048)-\frac{1}{3}(0.2215)$$
$$=0.4707$$

$$n=2;\quad \frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=\frac{4}{3}(0.4546)-\frac{1}{3}(0.4048)$$
$$=0.47$$

$$n=4;\quad \frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=\frac{4}{3}(0.4661)-\frac{1}{3}(0.4546)$$
$$=0.4699$$

ระดับ 3

$$\frac{16}{15}T_{2n}-\frac{1}{15}T_n$$

$$n=1;\quad \frac{16}{15}T_{2n}-\frac{1}{15}T_n=\frac{16}{15}(0.47)-\frac{1}{3}(0.4707)$$
$$=0.47$$

$$n=2;\quad \frac{16}{15}T_{2n}-\frac{1}{15}T_n=\frac{16}{15}(0.4699)-\frac{1}{3}(0.47)$$
$$=0.4699$$

ระดับ 4

$$\frac{64}{63}T_{2n}-\frac{1}{63}T_n$$

$$n=1;\quad \frac{64}{63}T_{2n}-\frac{1}{63}T_n=\frac{64}{63}(0.4699)\frac{1}{63}(0.47)$$
$$=0.4699$$

จะเห็นว่าความสัมพันธ์ $T_{2n}^{k}=\dfrac{4^{k-1}T_{2n}^{k-1}-T_n^{k-1}}{4^{k-1}-1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

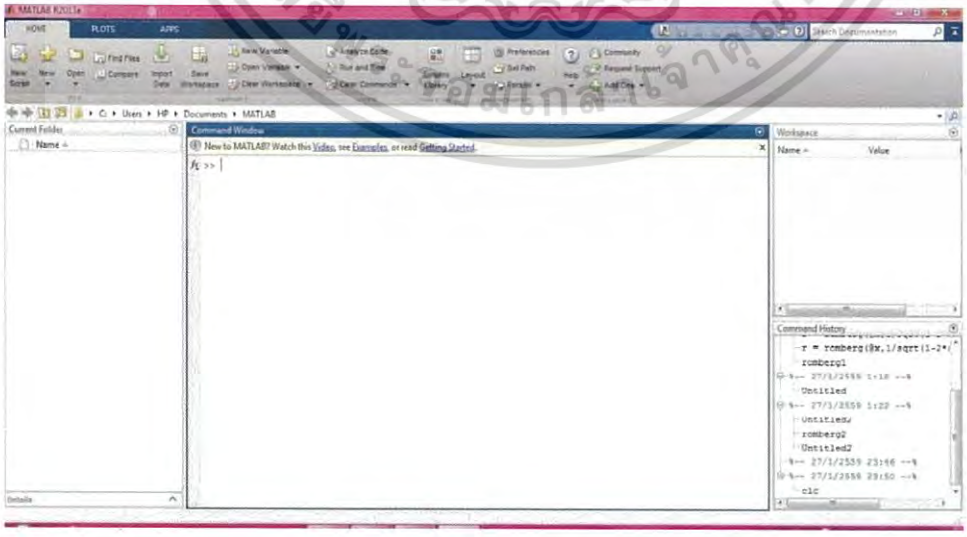
ตารางที่ 5 แสดงค่าคลาดเคลื่อนค่าประมาณโดยวิธีรอมเบิร์ก

ε_t / j	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	52.8623	0.1703	0.02128	0
2	13.0876	0.0213	0	
3	3.2601	0		
4	0.8087			

2.8 โปรแกรม MATLAB

MATLAB เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์สมรรถนะสูงเพื่อใช้ในการคำนวณทางเทคนิค [4] MATLAB ได้รวมการคำนวณการเขียนโปรแกรมและการแสดงผลรวมกันอยู่ในตัวโปรแกรมเดียวได้อย่างมีประสิทธิภาพ และอยู่ในลักษณะที่ง่ายต่อการใช้งาน นอกจากนี้ลักษณะของการเขียนสมการในโปรแกรมก็จะเหมือนการเขียนสมการคณิตศาสตร์ที่เราคุ้นเคยดีอยู่แล้ว งานทั่วไปที่ใช้ MATLAB ก็เช่นการคำนวณทั่วไป การสร้างแบบจำลองและการทดสอบแบบจำลอง การวิเคราะห์ข้อมูล การแสดงผลในรูปกราฟทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม สามารถสร้างโปรแกรมในลักษณะที่ติดต่อกับผู้ใช้ทางกราฟฟิกส์

โดย MATLAB desktop จะมีลักษณะดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2.5 หน้าต่างโปรแกรม MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.1 M-File

โปรแกรมที่เขียนโดย MATLAB จะ Save โดยใช้ extension เป็น " m " ซึ่งเรานิยมเรียกโปรแกรมที่เขียนโดยใช้ MATLAB ว่า M-file โดย M-file นี้จะแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ เขียนในลักษณะของการบอกขั้นตอน หรือบอกบทการทำงานหรือที่นิยมเรียกว่า script file และอีกประเภทหนึ่งจะเขียนขึ้นในลักษณะของ function ซึ่งผู้ใช้สามารถรวบรวมเอา function ต่าง ๆ ของ MATLAB มารวมเข้าด้วยกันแล้วเขียนขึ้นเป็น function ใหม่ M-file ในลักษณะนี้เรียก function file

M-file ใน MATLAB จะเขียนเป็น plain text format ธรรมดา ดังนั้น เราอาจใช้ program เล็ก ๆ เขียน เช่น Notepad เขียนก็ได้ และการ save file จะ save เป็นชื่อ file ที่ต้องการโดยมี extension เป็น m สำหรับ MATLAB 5.x แล้ว จะมี MATLAB Editor/Debugger เพื่อใช้ในการเขียนโปรแกรมและแก้ไขโปรแกรม ส่วนการเรียกใช้ M-file นั้น ก็เพียงพิมพ์ชื่อ file ที่ต้องการ โดยไม่ต้องมี extension เช่น ถ้าเราเขียน M-file ชื่อ myfile.m เวลาเรียกใช้ที่ command window ของ MATLAB ก็จะใช้คำสั่ง

```
» myfile
```

<u>การเรียกใช้ M-file</u>

การที่ MATLAB จะค้นหา M-file ที่สร้างขึ้นได้นั้น เราจะต้องกำหนดว่า directory ใดหรือ path ใดบ้าง ที่จะให้ MATLAB ค้นหาเพราะ MATLAB จะไม่ค้นหาทุก directory หรือ sub-directory ของทุก drive ที่มีในเครื่องขณะนั้น แต่ MATLAB จะค้นหาเฉพาะใน search path ที่กำหนดเท่านั้น ดังนั้นการเขียน M-file ขึ้นเองจะต้องเก็บ file นี้ให้อยู่ใน path ที่ MATLAB จะค้นหา สำหรับการปฏิบัติที่เหมาะสม เราควรจะเก็บ M-file ที่เราสร้างขึ้นไว้ใน directory ของเราต่างหาก เพื่อไม่ให้ปะปนกับ M-file ของ MATLAB จากนั้นจึงเพิ่ม MATLAB search path ให้รวม directory ที่เราสร้างขึ้นใหม่เพื่อให้ MATLAB ทราบว่าต้องค้นหา program ที่เราเขียนขึ้นในที่ใด ขั้นตอนการเพิ่ม search path ทำได้หลายวิธี ดังนี้

- การเพิ่ม search path ชั่วคราวสำหรับการทำงานแต่ละครั้งที่เรียกใช้ MATLAB ให้ใช้คำสั่ง addpath แล้วตามด้วยชื่อ directory ที่จะเพิ่มใน search path โดยการกำหนด directory ให้ใช้รูปแบบของ DOS

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- การกำหนด search path อย่างถาวรใน MATLAB 5.X สามารถกระทำได้โดยง่าย โดยการ click ที่ File เลือก Set path... จากนั้นเพิ่ม path ที่ท่านต้องการ

Script Files & Function Files

ในการเขียน MATLAB เพื่อการคำนวณค่าต่าง ๆ นั้น เราสามารถป้อนค่าตัวแปร และคำสั่ง ซึ่งเป็น function ต่าง ๆ ที่สร้างขึ้นมาใน MATLAB เพื่อให้คำนวณและแสดงผลที่เราต้องการได้ โดยการป้อนคำสั่งนั้นอาจกระทำทีละบรรทัดตามที่ตัวอย่างได้กล่าวมาแล้ว หรือเราอาจจะเขียนเป็นชุดคำสั่งเหมือนกับการเขียน program computer ทั่ว ๆ ไป หรือที่เรียกกันว่าเขียน script files เพื่อสะดวกในการแก้ไขและมีขั้นตอนการคำนวณ และแสดงผลเป็นไปตามที่เราต้องการ

นอกจาก MATLAB จะเขียนเป็นบท (script) แล้วยังสามารถจะสร้าง function file ที่ท่านต้องการเองได้อีกด้วย ข้อแตกต่างของ script file กับ function file คือ

- ใน Function file จะต้องมีการกำหนด input ที่จะเข้าสู่ file ที่แน่นอน และต้องมีการกำหนด output ที่ต้องการที่แน่นอน ส่วนใน script file ไม่จำเป็นต้องมี นั่นคือการเขียน function file จะต้องมี parameter
- ใน script file ค่าตัวแปรที่มีอยู่ในหน่วยความจำทุกค่าจะถูกส่งเข้าสู่ M-file และ MATLAB จะเก็บค่าทุกค่าที่เกิดขึ้นในระหว่างการคำนวณไว้ในหน่วยความจำ แต่ function file จะใช้เฉพาะค่าที่กำหนดเข้าไปเท่านั้น และจะแสดงค่าเฉพาะค่าที่เราต้องการเป็น output ส่วนค่าอื่นที่เกิดขึ้นในระหว่างการหาค่า function นั้น MATLAB จะไม่เก็บไว้ในหน่วยความจำ กล่าวสั้น ๆ ก็คือตัวแปรของ script file จะเป็น global variable ส่วนของ function file จะเป็น local variable

ซึ่งจะเห็นว่าการใช้ function file อาจจะดูยุ่งยากกว่า แต่มีข้อได้เปรียบหลายประการ คือ

- ประหยัดหน่วยความจำกว่า script file
- การตั้งชื่อ variable ใน M-file ไม่ต้องเกรงว่าจะเกิดการซ้ำซ้อนกับค่าที่ผู้ใช้กำลังใช้อยู่ เพราะ MATLAB จะเก็บในหน่วยความจำเฉพาะค่า input และ output
- ในหลายกรณีการใช้งาน function file จะสะดวกกว่า script file เพราะมีรูปแบบการกำหนดค่า parameter ต่าง ๆ ทั้งที่จะต้องให้เข้าไป และค่าที่ได้ออกมาเป็นรูปแบบที่แน่นอน

การเขียน script file จะขึ้นต้นด้วยอะไรก็ได้ แต่สำหรับ function file จะต้องขึ้นต้นบรรทัดแรกด้วยรูปแบบนี้เสมอ

function mypro(c)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยคำสั่ง function จะบอก MATLAB ว่า file นี้เป็น function file

c เป็น input หรือ parameter

mypro เป็นชื่อ function ของเรา “และ file นี้จะต้อง save ในชื่อ mypro. m” เท่านั้น

function a = myfunc(c,d)

โดยคำสั่ง function จะบอก MATLAB ว่า file นี้เป็น function file

a คือ ค่า output ที่ต้องการ อาจจะเป็น scalar หรือ matrix ก็ได้

c, d เป็น input หรือ parameter

myfunc เป็นชื่อ function ของเรา “และ file นี้จะต้อง save ในชื่อ myfunc. m” เท่านั้น

function [a, b, c] = tiger (d, e, f, g)

จะเป็นการสร้าง function file ชื่อ tiger (Save ในชื่อ tiger.m) โดยมี input เป็น d, e, f และ g โดยมีค่าตัวแปร a, b และ c เป็น output

2.9 โปรแกรม Visual Basic

ภาษาโปรแกรมที่ใช้แพร่หลายในโลกปัจจุบันประกอบด้วยภาษาและ Programming Environment ซึ่งก็คือเครื่องมือที่ช่วยให้ทำโปรแกรมได้สะดวกขึ้น ภาษาต่าง ๆ ที่ใช้แพร่หลายในปัจจุบัน ได้แก่

Visual C++ (อิงภาษา C)

Visual Basic (อิงภาษา Basic)

Java (อิงภาษา C)

Delphi (อิงภาษา Pascall)

Power Builder (อิงภาษา C)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาษา Visual Basic [8] ประดิษฐ์โดยศาสตราจารย์ John Kemeny และ Thomas Kurt แห่งมหาวิทยาลัย Dartmount เพื่อใช้สอนวิชาโปรแกรมมิ่ง ในยุคทศวรรษ 1960 คำว่า “BASIC” มาจาก Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code ปัจจุบันภาษา Visual Basic เป็นภาษาระดับ Industrial Strength คือ สามารถพัฒนาซอฟต์แวร์ที่ใช้ได้จริงในธุรกิจต่าง ๆ และเป็นภาษาที่แพร่หลายที่สุดในโลก

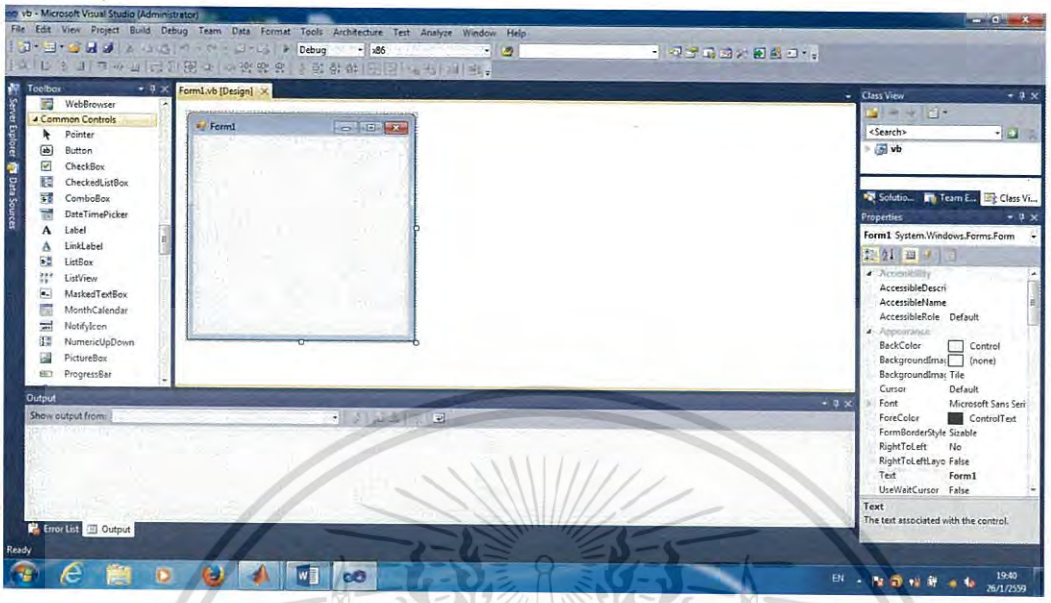
สาเหตุที่ใช้ Visual Basic

สามารถใช้ Visual Basic สร้างโปรแกรมบน Windows โดยอาศัยการออกแบบโปรแกรมในลักษณะ Visualize ซึ่งใช้การกำหนดตำแหน่งของ Object ลงบนจอภาพเพื่อติดต่อกับผู้ใช้โดยตรง Object เหล่านี้จะเปลี่ยนไปตามเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น เช่น การเคลื่อนเม้าส์ หรือการรับข้อมูลจากคีย์บอร์ด ในการกำหนดขั้นตอนการทำงานให้กับ Object ภายใต้ Event ใด ๆ จะใช้ภาษา BASIC เข้ามาช่วยในการเขียนโปรแกรม ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่าการพัฒนาโปรแกรมบน Windows โดยใช้ Visual Basic มีความง่ายและสะดวกในการใช้งาน รวมทั้งมีขั้นตอนน้อยเพียงแต่เลือก Form และ Control ที่เหมาะสม แล้ววาดลงบนจอภาพเพื่อใช้ติดต่อกับผู้ใช้ จากนั้นจึงทำการเขียนภาษา BASIC เพื่อสร้างโปรแกรมด้วยตัวเองด้วยวิธีที่ง่ายและเร็วกว่าที่คิด จึงทำให้ผู้ใช้เรียนรู้ได้ภายในเวลา 2-3 ชั่วโมง สามารถสร้างโปรแกรม Windows เป็นโปรแกรมแรกได้

นอกจากนี้ Visual Basic ยังใช้ได้ตั้งแต่ User ระดับต้น เพื่อใช้สร้างโปรแกรมง่าย ๆ บน Windows หรือโปรแกรมเมอร์ระดับกลางที่เรียกใช้ฟังก์ชันการทำงานต่าง ๆ ของ Visual Basic ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เริ่มต้นกับ Visual Basic 2010



รูปที่ 2.6 หน้าต่างโปรแกรม Visual Basic 2010

การศึกษาเรื่องการหาปริพันธ์เชิงวงรีนี้ รศ.ดร.ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง [3] ได้ทำวิจัยเรื่องจำนวนเอลลิปติคและฟังก์ชันในการประมาณค่า โดยงานวิจัยดังกล่าวได้ศึกษาเกี่ยวกับการหาความยาวของเส้นรอบรูปของวงรี ซึ่งในการหาความยาวเส้นรอบรูปของวงรีจะอยู่ในรูปปริพันธ์เชิงวงรีรูปแบบที่ 2

Claoudio G. Carualhaes [10] ได้ศึกษาปัญหาการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา ซึ่งปัญหาดังกล่าวอยู่ในรูปปริพันธ์เชิงวงรีรูปแบบที่ 1 ซึ่งได้ศึกษาค่าประมาณโดยวิธี The Arithmetic-Geometric mean เพื่อประมาณคาบการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา คณะผู้วิจัยจึงสนใจการประมาณค่าปริพันธ์เชิงวงรีในขั้นตอนวิธีที่ไม่ซับซ้อนและง่ายต่อการคำนวณเพื่อพัฒนาโปรแกรมประมาณค่า

ในงานวิจัยนี้คณะผู้วิจัยสนใจศึกษาการหาปริพันธ์เชิงวงรีในรูปแบบพื้นฐานทั้ง 3 รูปแบบดังกล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1.3.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

โดยทั่วไปปริพันธ์เชิงวงรีมีรูปแบบพื้นฐาน 3 รูปแบบ

1. $\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad ; 0 \le k^2 \le 1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

2. $\int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta \quad ; 0 \le k^2 \le 1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

3. $\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\left(1-n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad ; 0 \le k^2 \le 1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

นิยาม 3.1 modular angles α

ให้ $k = \sin\alpha$ แล้ว $\alpha = \sin^{-1} k$ และให้ $k' = \cos\alpha$

เรียก k ว่า modulus k เมื่อ $0 \le k \le 1$

เรียก k' ว่า Complementary modular k

$$\sin^2(90^\circ - \alpha) = \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$k^2 + k'^2 = 1$$

3.1 Elliptic Integral of First kind

รูปแบบ Incomplete Form

$$F(\phi,k) = \int_0^{\sin\phi} \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}, 0 \le k^2 \le 1, 0 \le \sin\phi \le 1 \tag{3.1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $t=\sin\theta$ จะได้ $F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)(1-k^2\sin^2\theta)}}$

$$=\int_0^{\phi}\frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (3.2)$$

ปริพันธ์ตาม (3.1) , (3.2) เรียกว่า Elliptic Integral of First kind incomplete form

ถ้า $\phi=\frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $F\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ (3.3)

หรือ $F\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ (3.4)

ปริพันธ์ตาม (3.3) , (3.4) เรียกว่า Elliptic Integral of First kind complete form

โดยกำหนดให้ $K=K(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right)$

<u>ทฤษฎีบท 3.1</u>

ถ้า $F(\phi,k)$ เป็น Elliptic Integral of first kind แล้ว

$$F(\phi,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}k^{2n}I_n$$

โดยที่ $I_n=\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta\,d\theta$

<u>พิสูจน์</u> จาก $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$

โดย Binomial series

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{a=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{a}\left(-k^2\sin^2\theta\right)^a \quad ; \quad \left|-(k\sin\theta)^2\right|<1$$

$$=1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(-(k\sin\theta)^2\right)^1+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(-(k\sin\theta)^2\right)^2+\ldots$$

$$=1-\binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(k^2\sin^2\theta\right)+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(k^4\sin^4\theta\right)-\binom{-\frac{1}{2}}{3}\left(k^6\sin^6\theta\right)+\ldots$$

พิจารณา $\binom{-\frac{1}{2}}{1}$; $\binom{-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)!\cdot 1!}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{3}{2}\right)!}$

เนื่องจาก $\left(-\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

จากทฤษฎีบท 2.7 จะได้ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

เนื่องจาก $\left(-\frac{3}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

จากนิยาม 2.8 ให้ $l=0$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1+0\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-2\sqrt{\pi}$$

จะได้ว่า $\binom{-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{3}{2}\right)!}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{-2\sqrt{\pi}}=-\dfrac{1}{2}$

พิจารณา $\binom{-\frac{1}{2}}{2}$; $\binom{-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{1}{2}-2\right)!\cdot 2!}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{5}{2}\right)!\cdot 2!}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $\left(-\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

จากทฤษฎีบท 2.7 จะได้ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

เนื่องจาก $\left(-\frac{5}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)=\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$

จากนิยาม 2.8 ให้ $l=1$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1+1\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+1\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

จะได้ว่า $\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{5}{2}\right)!\cdot 2!}=\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{4\sqrt{\pi}}{3}(2)}=\frac{3}{8}$

ดังนั้น $\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(k^2\sin^2\theta\right)+\frac{3}{8}\left(k^2\sin^2\theta\right)^2+\frac{15}{24}\left(k^2\sin^2\theta\right)^3+\ldots$

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}k^4\sin^4\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}k^6\sin^6\theta+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}k^{2n}\sin^{2n}\theta$$

$$F\left(\phi,k\right)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\phi}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}k^{2n}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}k^{2n}\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta\,d\theta \quad ; \quad |k|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}k^{2n}I_n \quad ; \quad I_n=\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>บทแทรก 3.2</u>

ถ้า $I_n = \int_0^{\phi} \sin^{2n}\theta\, d\theta$ แล้ว $I_n = \begin{cases} \phi & ; n = 0 \\ \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} - \frac{\sin^{2n-1}\phi\cos\phi}{2n} & ; n \geq 1 \end{cases}$

<u>พิสูจน์</u> กรณี $n = 0 ; I_0 = \int_0^{\phi} 1\, d\theta = \phi$

กรณี $n \geq 1 ; \int_0^{\phi} \sin^{2n}\theta\, d\theta$

พิจารณา $\int \sin^{2n}\theta\, d\theta = \int \sin^{2n-1}\theta \sin\theta\, d\theta$

ให้ $u = \sin^{2n-1}\theta \qquad dv = \sin\theta\, d\theta$

$du = (2n-1)\cos\theta\sin^{2n-2}\theta\, d\theta \qquad v = -\cos\theta$

$$\int \sin^{2n}\theta\, d\theta = -\sin^{2n-1}\theta\cos\theta + \int \cos\theta(2n-1)\sin^{2n-2}\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\sin^{2n-1}\theta\cos\theta + (2n-1)\int \cos^2\theta\sin^{2n-2}\theta\, d\theta$$

$$= -\sin^{2n-1}\theta\cos\theta + (2n-1)\int (1-\sin^2\theta)\sin^{2n-2}\theta\, d\theta$$

$$= -\sin^{2n-1}\theta\cos\theta + (2n-1)\int \sin^{2n-2}\theta\, d\theta - (2n-1)\int \sin^{2n}\theta\, d\theta$$

$$\int \sin^{2n}\theta\, d\theta + (2n-1)\int \sin^{2n}\theta\, d\theta = -\sin^{2n-1}\theta\cos\theta + (2n-1)\int \sin^{2n-2}\theta\, d\theta$$

$$2n\int \sin^{2n}\theta\, d\theta = -\sin^{2n-1}\theta\cos\theta + (2n-1)\int \sin^{2(n-1)}\theta\, d\theta$$

$$\int \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2(n-1)}\theta\, d\theta - \frac{\sin^{2n-1}\theta\cos\theta}{2n}$$

ดังนั้น $\int_0^{\phi} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\phi} \sin^{2(n-1)}\theta\, d\theta - \left.\frac{\sin^{2n-1}\theta\cos\theta}{2n}\right|_0^{\phi}$

$$= \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\phi} \sin^{2(n-1)}\theta\, d\theta - \frac{\sin^{2n-1}\phi\cos\phi}{2n}$$

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} - \frac{\sin^{2n-1}\phi\cos\phi}{2n}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.1 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}$

วิธีทำ ให้ $\sqrt{2}\sin\theta = \sin\phi$

$$\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta = \cos\phi\, d\phi \quad , \quad d\theta = \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}\cos\theta}d\phi$$

เนื่องจาก $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}$

ดังนั้น $d\theta = \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}\right)}d\phi$

จะได้ว่า $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}\sqrt{1-\sin^2\phi}}d\phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}}d\phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0.82601788)$$

$$= 0.58408284$$

ทฤษฎีบท 3.3

ถ้า $K(k)$ เป็น Elliptic Integral of first kind complete form แล้ว

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n}$$

หรือ $K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n} + \ldots\right]$; $|k|<1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$

ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.1

$$\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\left(k^2\sin^2\theta\right)+\frac{3}{8}\left(k^2\sin^2\theta\right)^2+\frac{15}{24}\left(k^2\sin^2\theta\right)^3+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}k^4\sin^4\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}k^6\sin^6\theta+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}k^{2n}\sin^{2n}\theta$$

โดย Wallis' integral

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$n=2p$; $\quad w_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2}\dfrac{\pi}{2}$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}k^{2n}\sin^{2n}\theta d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}\right]^2 k^{2n}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2k^4+\ldots+\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2k^{2n}+\ldots\right]$$

ดังนั้น $K(k) = \dfrac{\pi}{2}\left[1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\right)^2k^4+\ldots+\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2k^{2n}+\ldots\right]; |k|<1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราเขียนรูปแบบของ complementary $F(\phi,k')$ หรือรูปแบบ complete form $K(k')$ โดย $K(k')=K'(k)$

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\sin^2\theta}}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\sin\theta=\cos\phi$

$$\cos\theta\, d\theta=-\sin\phi\, d\phi \Rightarrow d\theta=\frac{-\sin\phi}{\cos\theta}d\phi$$

เนื่องจาก $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\cos^2\phi}=\sin\phi$

ดังนั้น $d\theta=\frac{-\sin\phi}{\sin\phi}d\phi=-d\phi$

พิจารณา $\sqrt{1+4\sin^2\theta}=\sqrt{1+4\cos^2\phi}$

$$=\sqrt{1+4\left(1-\sin^2\phi\right)}$$

$$=\sqrt{5-4\sin^2\phi}$$

$$=\sqrt{5}\sqrt{1-\frac{4}{5}\sin^2\phi}$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\sin^2\theta}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{5}\sin^2\phi}}d\phi$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{5}\sin^2\phi}}d\phi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}F\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}K\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(2.25720533)$$

$$=1.00945291$$

Special value

1. $F(0,k)=0$

2. $F(\phi,1)=\ln(\tan\phi+\sec\phi)$

3. $F(\phi,0)=\phi$

4. $K(1)=\infty$

5. $K(0)=K'(1)=\frac{\pi}{2}$

3.2 Elliptic Integral of Second kind

รูปแบบ Incomplete Form

$$E(\phi,k)=\int_0^{\sin\phi}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt,\quad 0\le k^2\le 1,\quad 0\le\sin\phi\le 1 \tag{3.5}$$

ให้ $t=\sin\theta$ จะได้

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\phi}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{\cos\theta}\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta \tag{3.6}$$

ปริพันธ์ตาม (3.5) , (3.6) เรียกว่า Elliptic Integral of Second kind incomplete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $\phi=\frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $$E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,;0\le k^2\le 1 \tag{3.7}$$

$$E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \tag{3.8}$$

ปริพันธ์ตาม (3.7) , (3.8) เรียกว่า Elliptic Integral of Second kind complete form

โดยกำหนด $E=E(k)=E\left(\frac{\pi}{2},k\right)$

<u>ทฤษฎีบท 3.4</u>

ถ้า $E(\phi,k)$ เป็น Elliptic Integral of second kind แล้ว

$$E(\phi,k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{k^{2n}}{1-2n}I_n \text{ โดยที่ } I_n=\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

<u>พิสูจน์</u>

จาก $\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$

โดย Binomial series

$$\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{a=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{a}x^a\;;x=-(k\sin\theta)^2\;;\left|-(k\sin\theta)^2\right|<1$$

$$=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\left(-(k\sin\theta)^2\right)^1+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(-(k\sin\theta)^2\right)^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}\left(-(k\sin\theta)^2\right)^3+\dots$$

$$=1-\binom{\frac{1}{2}}{1}\left(k^2\sin^2\theta\right)+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(k^4\sin^4\theta\right)-\binom{\frac{1}{2}}{3}\left(k^6\sin^6\theta\right)+\dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา $\binom{\frac{1}{2}}{1}$; $\binom{\frac{1}{2}}{1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}-1\right)!\cdot 1!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}$

เนื่องจาก $\left(\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

จากบทตั้ง 2.5 จะได้ $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

เนื่องจาก $\left(-\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

จากทฤษฎีบท 2.7 จะได้ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

จะได้ว่า $\binom{\frac{1}{2}}{1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2}$

พิจารณา $\binom{\frac{1}{2}}{2}$; $\binom{\frac{1}{2}}{2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}-2\right)!\cdot 2!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{3}{2}\right)!\cdot 2!}$

เนื่องจาก $\left(\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

จากบทตั้ง 2.5 จะได้ $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

เนื่องจาก $\left(-\frac{3}{2}\right)!=\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

จากนิยาม 2.8 ให้ $l=0$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1+0\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-2\sqrt{\pi}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า $\binom{\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{3}{2}\right)!\cdot 2!}=\dfrac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{-2\sqrt{\pi}\cdot 2}=-\dfrac{1}{8}$

ดังนั้น $\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}\left(k^2\sin^2\theta\right)-\dfrac{1}{8}\left(k^2\sin^2\theta\right)^2-\dfrac{3}{48}\left(k^2\sin^2\theta\right)^3-\ldots$

$$=1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{k^4\sin^4\theta}{3}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{k^6\sin^6\theta}{5}+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}\frac{k^{2n}}{1-2n}\sin^{2n}\theta$$

$$E\left(\phi,k\right)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\phi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}\cdot\frac{k^{2n}}{1-2n}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}\cdot\frac{k^{2n}}{1-2n}\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}\cdot\frac{k^{2n}}{1-2n}I_n\quad;I_n=\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

<u>ตัวอย่าง 3.3</u> $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{2-x^2}{1-4x^2}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=2x$, $x=\dfrac{u}{2}$

$$du=2\,dx\,,\ \frac{1}{2}du=dx$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\frac{2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}{1-4\left(\frac{u}{2}\right)^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\frac{2-\frac{u^2}{4}}{1-u^2}}\,du$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{1-\frac{u^2}{8}}{1-u^2}}\,du \;;\; k = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{2-x^2}{1-4x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1.02770228)$$

$$= 0.72669525$$

<u>ทฤษฎีบท 3.5</u>

ถ้า $E(k)$ เป็น Elliptic Integral of second kind complete form แล้ว

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \frac{k^{2n}}{1-2n}$$

หรือ $$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\cdots-\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}-\cdots\right] \quad ; \quad |k|<1$$

<u>พิสูจน์</u> จาก $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} = (1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$

ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.4

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}(k^2\sin^2\theta)-\frac{1}{8}(k^2\sin^2\theta)^2-\frac{3}{48}(k^2\sin^2\theta)^3-\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{k^4\sin^4\theta}{3}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{k^6\sin^6\theta}{5}+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{k^{2n}}{1-2n}\sin^{2n}\theta$$

โดย Wallis' integral

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$n=2p;\quad w_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{k^{2n}}{1-2n}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{k^{2n}}{1-2n}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\cdots-\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}-\cdots\right]$$

ดังนั้น $E(k)=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\cdots-\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}-\cdots\right]\quad;|k|<1$

เราเขียนรูปแบบ Complementary $E(\phi,k')$ หรือรูปแบบ complete form $E(k')$โดยที่

$E(k')=E'(k)$

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+9\sin^2\theta}\,d\theta$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\sin\theta=\cos\phi$

$$\cos\theta\,d\theta=-\sin\phi\,d\phi$$

$$d\theta=\frac{-\sin\phi}{\cos\theta}d\phi$$

เนื่องจาก $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\cos^2\phi}=\sin\phi$

ดังนั้น $d\theta=\frac{-\sin\phi}{\sin\phi}d\phi=-d\phi$

พิจารณา $\sqrt{1+9\sin^2\theta}=\sqrt{1+9\cos^2\phi}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \sqrt{1+9\left(1-\sin^2\phi\right)}$$

$$= \sqrt{10-9\sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{10}\sqrt{1-\frac{9}{10}\sin^2\phi}$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+9\sin^2\theta}\,d\theta = -\sqrt{10}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\frac{9}{10}\sin^2\phi}\,d\phi$

$$= \sqrt{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{9}{10}\sin^2\phi}\,d\phi$$

$$= \sqrt{10}E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \sqrt{10}E\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \sqrt{10}(1.10477473)$$

$$= 3.49360445$$

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> จงหาความยาวของ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $x = \cos\theta \quad y = 2\sin\theta$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$dx = -\sin\theta d\theta \qquad dy = 2\cos\theta d\theta$$

$$(ds)^2 = (-\sin\theta d\theta)^2 + (2\cos\theta d\theta)^2$$

$$(ds)^2 = \sin^2\theta d\theta + 4\cos^2\theta d\theta$$

$$(ds)^2 = \left(\sin^2\theta + 4\left(1-\sin^2\theta\right)\right)d\theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$ds = \sqrt{4-3\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$ds = 2\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$s = 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\, d\theta\right)$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$s = 8E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 8(1.21105603)$$

$$= 9.68844824$$

Special value

1. $E(0,k) = 0$
2. $E(\phi,1) = \sin\phi$
3. $E(\phi,0) = \phi$
4. $E(1) = 1$
5. $E(0) = E'(1) = \frac{\pi}{2}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 Elliptic Integral of Third kind

รูปแบบ Incomplete Form

$$\Pi(\phi,n,k)=\int_0^{\sin\phi}\frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},0\le k^2\le 1,0\le\sin\phi\le 1 \tag{3.9}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $(-\infty,\infty)$

ให้ $t=\sin\theta$

$$\Pi(\phi,n,k)=\int_0^{\phi}\frac{\cos\theta d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{(1-\sin^2\theta)(1-k^2\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_0^{\phi}\frac{\cos\theta d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\cos\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3.10}$$

ปริพันธ์ตาม (3.9) , (3.10) เรียกว่า Elliptic Integral of Third kind incomplete form

ถ้า $\phi=\frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\int_0^{1}\frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}} \tag{3.11}$$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3.12}$$

ปริพันธ์ตาม (3.11) , (3.12) เรียกว่า Elliptic Integral of Third kind complete form

โดยกำหนดให้ $\Pi(n,k)=\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)$

<u>ทฤษฎีบท 3.6</u>

ถ้า $\Pi(\phi,n,k)$ เป็น Elliptic Integral of Third kind แล้ว

$$\Pi(\phi,n,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r)!\mathrm{k}^{2r}n^s}{2^{2r}(r!)^2}I_{s+r}\quad ;|n|<1,|k|<1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $I_{s+r}=\int_0^{\phi}\sin^{2(s+r)}\theta\,d\theta$

<u>พิสูจน์</u> จาก $\dfrac{1}{\left(1-n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\left(1-n\sin^2\theta\right)^{-1}\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$

พิจารณา $\left(1-n\sin^2\theta\right)^{-1}$

$$\left(1-n\sin^2\theta\right)^{-1}=\sum_{s=o}^{\infty}\left(n\sin^2\theta\right)^s$$

$$=1+n\sin^2\theta+n^2\sin^4\theta+n^3\sin^6\theta+\cdots\quad;\left|n\sin^2\theta\right|<1$$

พิจารณา $\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$

ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.1

$$\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}k^4\sin^4\theta+\frac{15}{48}k^6\sin^6\theta+\ldots\quad;|k|<1$$

จะได้ว่า

$$\left(1+n\sin^2\theta+n^2\sin^4\theta+n^3\sin^6\theta+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}k^4\sin^4\theta+\frac{15}{48}k^6\sin^6\theta+\ldots\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}k^4\sin^4\theta+\frac{15}{48}k^6\sin^6\theta+\cdots$$
$$+n\sin^2\theta+\frac{1}{2}nk^2\sin^4\theta+\frac{3}{8}nk^4\sin^6\theta+\cdots$$
$$+n^2\sin^4\theta+\frac{1}{2}n^2k^2\sin^6\theta+\cdots$$
$$+n^3\sin^6\theta+\cdots$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{(2r)!\,k^{2r}n^0\sin^{2(0+r)}\theta}{2^{2r}\left(r!\right)^2}+\frac{(2r)!\,k^{2r}n^1\sin^{2(1+r)}\theta}{2^{2r}\left(r!\right)^2}+\frac{(2r)!\,k^{2r}n^2\sin^{2(2+r)}\theta}{2^{2r}\left(r!\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(2r)!\,k^{2r}n^3\sin^{2(3+r)}\theta}{2^{2r}\left(r!\right)^2}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r)!k^{2r}n^s\sin^{2(s+r)}\theta}{2^{2r}\left(r!\right)^2}\quad;|n|<1,\quad|k|<1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\left(1-n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2r)!k^{2r}n^s}{2^{2r}\left(r!\right)^2} \int_0^{\phi} \sin^{2(s+r)}\theta\, d\theta \quad ;|n|<1, \quad |k|<1$$

<u>ทฤษฎีบท 3.7</u>

ถ้า $\Pi(n,k)$ เป็น Elliptic Integral of Third kind complete form แล้ว

$$\Pi(n,k) = \frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2r)!\left(2(r+s)\right)!\ \mathrm{k}^{2r}\, n^s}{2^{4r}\, 2^{2s}\left(r!\right)^2\left(r+s\right)!^2} \quad ;|n|<1, |k|<1$$

<u>พิสูจน์</u>

จาก $$\frac{1}{\left(1-n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \left(1-n\sin^2\theta\right)^{-1}\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

พิจารณา $\left(1-n\sin^2\theta\right)^{-1}$

$$\left(1-n\sin^2\theta\right)^{-1} = \sum_{s=o}^{\infty}\left(n\sin^2\theta\right)^s$$

$$= 1+n\sin^2\theta+n^2\sin^4\theta+n^3\sin^6\theta+\cdots \quad ;\left|n\sin^2\theta\right|<1$$

พิจารณา $\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$

ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.1

$$\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}k^4\sin^4\theta+\frac{15}{48}k^6\sin^6\theta+\ldots \quad ;|k|<1$$

จะได้ว่า

$$\left(1+n\sin^2\theta+n^2\sin^4\theta+n^3\sin^6\theta+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}k^4\sin^4\theta+\frac{15}{48}k^6\sin^6\theta+\ldots\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}k^4\sin^4\theta+\frac{15}{48}k^6\sin^6\theta+\cdots$$
$$+n\sin^2\theta+\frac{1}{2}nk^2\sin^4\theta+\frac{3}{8}nk^4\sin^6\theta+\cdots$$
$$+n^2\sin^4\theta+\frac{1}{2}n^2k^2\sin^6\theta+\cdots$$
$$+n^3\sin^6\theta+\cdots$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{(2r)!\,k^{2r}n^0\sin^{2(0+r)}\theta}{2^{2r}(r!)^2}+\frac{(2r)!\,k^{2r}n^1\sin^{2(1+r)}\theta}{2^{2r}(r!)^2}+\frac{(2r)!\,k^{2r}n^2\sin^{2(2+r)}\theta}{2^{2r}(r!)^2}+\frac{(2r)!\,k^{2r}n^3\sin^{2(3+r)}\theta}{2^{2r}(r!)^2}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r)!\mathrm{k}^{2r}n^s\sin^{2(s+r)}\theta}{2^{2r}(r!)^2}\quad;|n|<1,\quad|k|<1$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r)!\mathrm{k}^{2r}n^s}{2^{2r}(r!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(s+r)}\theta\,d\theta$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r)!\mathrm{k}^{2r}n^s}{2^{2r}(r!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\left[\frac{(2(r+s))!}{2^{2(r+s)}(r+s)!^2}\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r)!(2(r+s))!\,\mathrm{k}^{2r}n^s}{2^{4r}2^{2s}(r!)^2(r+s)!^2}$$
$$;|n|<1,\quad|k|<1$$

ในงานวิจัยนี้คณะผู้วิจัยได้พิจารณา n ที่ลู่เข้า นั่นคือ $|n|<1$

<u>ตัวอย่าง 3.6</u> $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{16}\sin^2\theta\right)\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)}}d\theta$

<u>วิธีทำ</u> $\phi=45^\circ$, $n=\frac{1}{16}$, $k=\frac{1}{2}$

$$\Pi\left(45^\circ,\frac{1}{16},\frac{1}{2}\right)=0.81384543$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(1-\frac{5}{8}\sin^2\theta\right)\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)}}\,d\theta$

วิธีทำ $\phi = 90^\circ$, $n = \frac{5}{8}$, $k = \frac{1}{2}$

$$\Pi\left(\frac{5}{8},\frac{1}{2}\right) = 2.80098924$$

Special value

1. $\Pi(\phi,0,k) = F(\phi,k)$
2. $\Pi(0,n,k) = 0$
3. $\Pi(n,1) = \infty$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้คณะผู้วิจัยได้ศึกษาขั้นตอนวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยใช้วิธีการของรอมเบิร์กช่วยในการประมาณค่า เนื่องจากเป็นขั้นตอนวิธีที่มีการคำนวณที่น้อยและได้คำตอบที่รวดเร็ว

4.1 คำนวณโดยวิธีรอมเบิร์ก

4.1.1 คำนวณถึงระดับ 4

ตัวอย่าง 4.1 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}}$

ค่าที่ได้จากตัวอย่าง 3.1 0.58408284

ค่าที่ได้จากวิธีรอมเบิร์ก

ตารางที่ 6 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.1

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	0.59831764	0.58402752	0.58408140	0.58408284
2	2	0.58760005	0.58407803	0.58408282	
3	4	0.58495854	0.58408252		
4	8	0.58430152			

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ตารางที่ 7 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.1

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	2.43712005	0.00947126	0.00024654	0
2	2	0.60217656	0.00082351	0.00000342	
3	4	0.14992736	0.00005479		
4	8	0.03743989			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 4.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{5}\sin^2\varphi}} d\varphi$

ค่าที่ได้จากตัวอย่าง 3.2 1.00945291

ค่าที่ได้จากวิธีรอมเบิร์ก

ตารางที่ 8 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.2

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	1.13663890	0.98347942	1.00707004	1.00968482
2	2	1.02176929	1.00559562	1.00964397	
3	4	1.00963904	1.00939095		
4	8	1.00945297			

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ตารางที่ 9 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.2

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	12.59949709	2.57302641	0.23605559	0.02297383
2	2	1.22010446	0.38211688	0.01892708	
3	4	0.01843870	0.00613798		
4	8	0.00000594			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 4.3 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{2-x^2}{1-4x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{1-\frac{u^2}{8}}{1-u^2}}\,du$

ค่าที่ได้จากตัวอย่าง 3.3 0.72669525

ค่าที่ได้จากวิธีรอมเบิร์ก

ตารางที่ 10 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.3

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	0.88914741	0.74395427	0.72890123	0.72688557
2	2	0.78025255	0.72984204	0.72691706	
3	4	0.74244467	0.72709987		
4	8	0.73093607			

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ตารางที่ 11 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.3

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	22.35492251	2.37500108	0.30356329	0.02618980
2	2	7.36998075	0.43302746	0.03052311	
3	4	2.16726613	0.05567946		
4	8	0.58357613			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 4.4</u> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+9\sin^2\theta}\, d\theta = \sqrt{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{9}{10}\sin^2\phi}\, d\phi$

ค่าที่ได้จากตัวอย่าง 3.4 3.49360445

ค่าที่ได้จากวิธีรอมเบิร์ก

ตารางที่ 12 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.4

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	3.26904523	3.54557769	3.49567143	3.49336400
2	2	3.47644458	3.49879057	3.49340005	
3	4	3.49320407	3.49373696		
4	8	3.49360374			

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ตารางที่ 13 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.4

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	6.42772309	1.48766813	0.05916468	0.00688258
2	2	0.49117953	0.14844611	0.00585069	
3	4	0.01146037	0.00379293		
4	8	0.00002032			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 4.5 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\left(1-\frac{1}{16}\sin^2\theta\right)\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)}}$

ค่าที่ได้จากตัวอย่าง 3.6 0.81384543

ค่าที่ได้จากวิธีรอมเบิร์ก

ตารางที่ 14 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.5

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	0.82605441	0.81373441	0.81384533	0.81384543
2	2	0.81681441	0.81383840	0.81384543	
3	4	0.81458240	0.81384499		
4	8	0.81402934			

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ตารางที่ 15 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.5

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	1.50015956	0.01364141	0.00001229	0
2	2	0.36480883	0.00086380	0	
3	4	0.09055405	0.00005406		
4	8	0.02259766			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 4.6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\left(1-\frac{5}{8}\sin^2\theta\right)\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)}}$

ค่าที่ได้จากตัวอย่าง 3.7 2.80098924

ค่าที่ได้จากวิธีรอมเบิร์ก

ตารางที่ 16 แสดงค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.6

J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	3.20379731	2.69629792	2.80018628	2.80146941
2	2	2.82317277	2.79369326	2.80144936	
3	4	2.80106314	2.80096460		
4	8	2.80098924			

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ตารางที่ 17 แสดงร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของตัวอย่างที่ 4.6

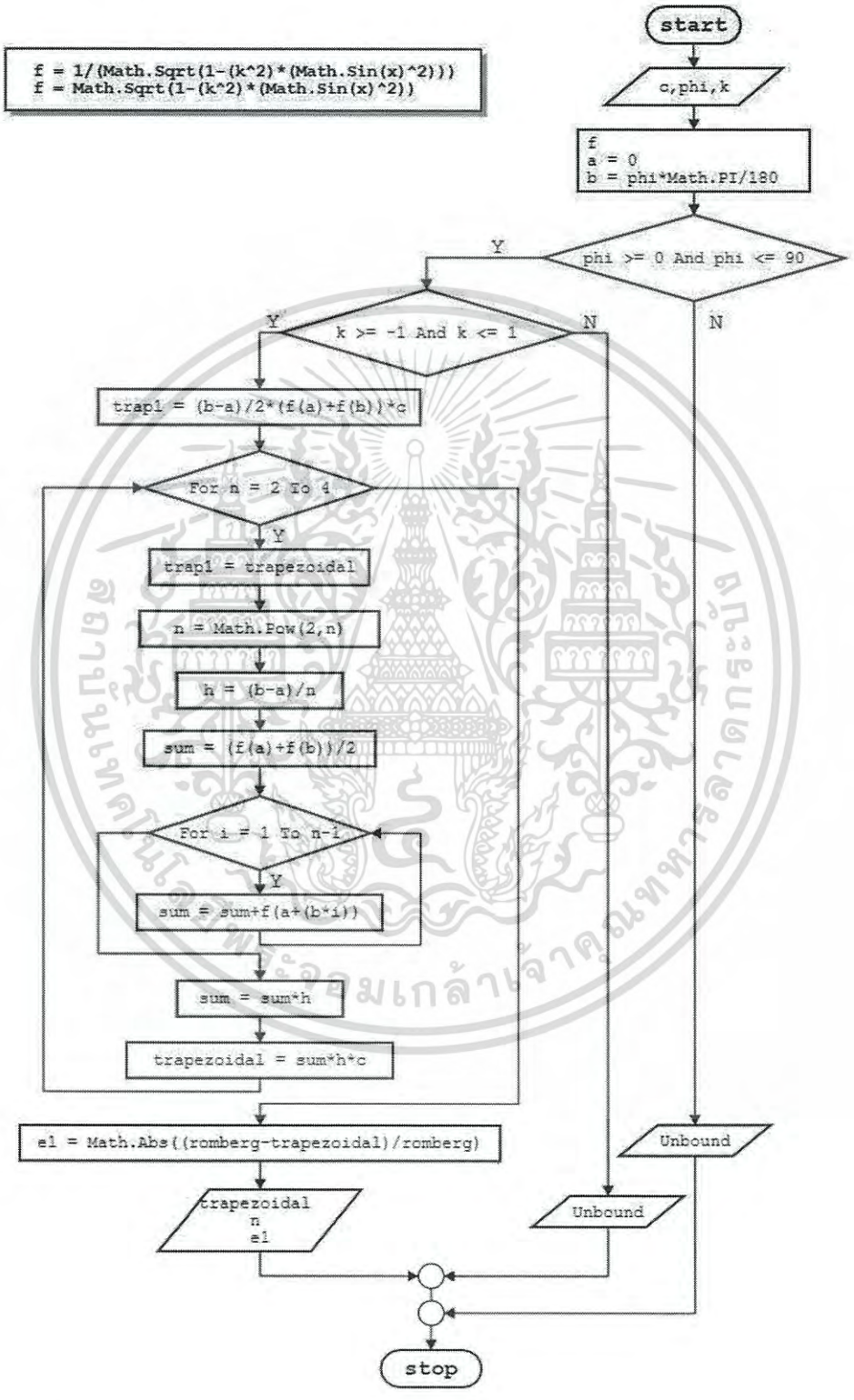
J	ส่วนย่อย	ระดับ 1	ระดับ 2	ระดับ 3	ระดับ 4
1	1	14.38092172	3.73765520	0.02866701	0.01714287
2	2	0.79198912	0.26047869	0.01642705	
3	4	0.00263835	0.00087969		
4	8	0			

จากตัวอย่างข้างต้น ในการคำนวณโดยวิธีรอมเบิร์กจนถึงระดับ 4 พบว่าบางตัวอย่างร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนยังมีค่ามากกว่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ของทศนิยม 8 ตำแหน่ง ดังนั้น คณะผู้วิจัยจึงพัฒนาโปรแกรม Visual Basic Version 2010 สำหรับการคำนวณในระดับที่มากขึ้น เพื่อให้ได้ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ของทศนิยม 8 ตำแหน่ง โดยจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

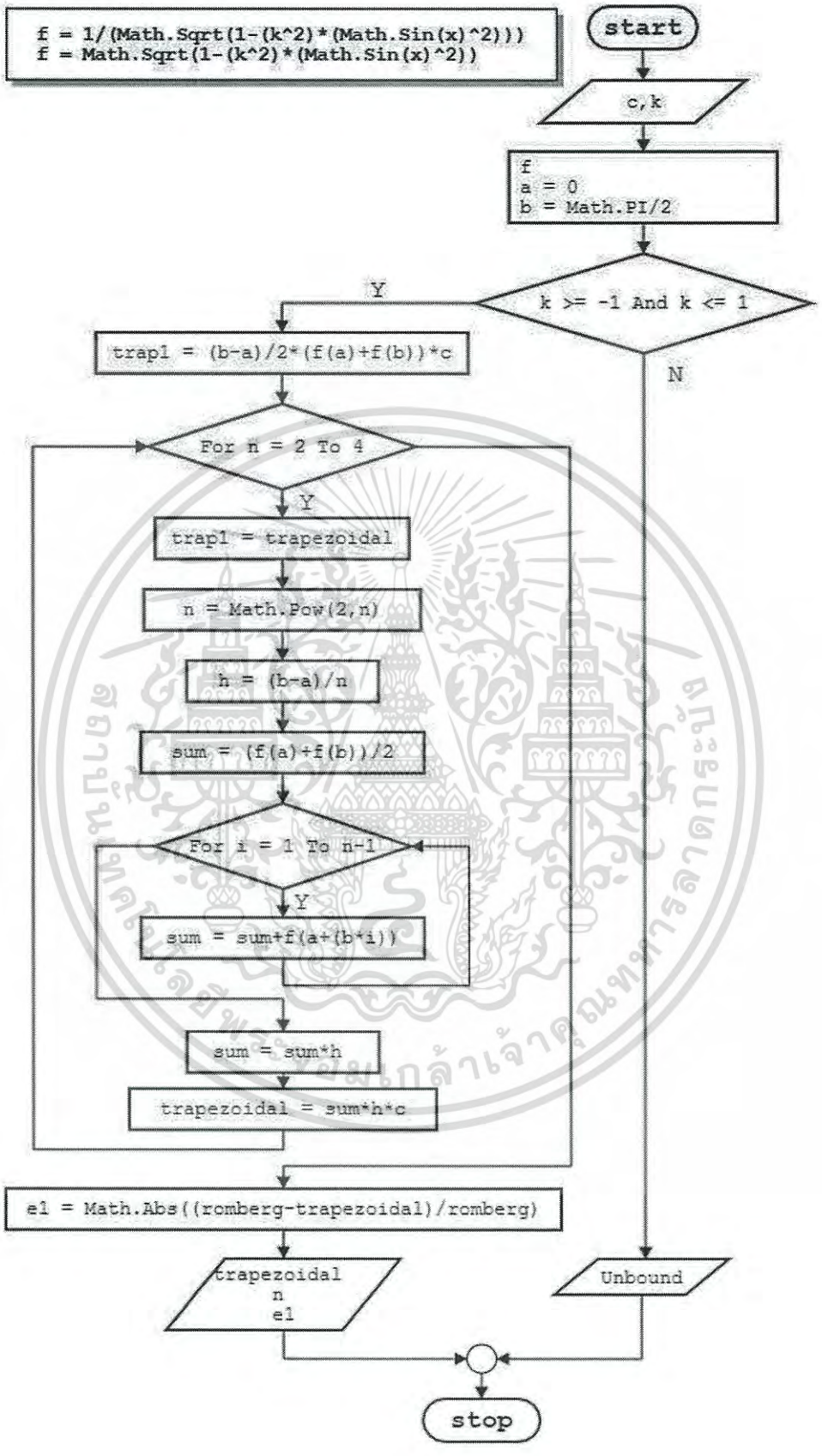
4.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน

Flow-chart



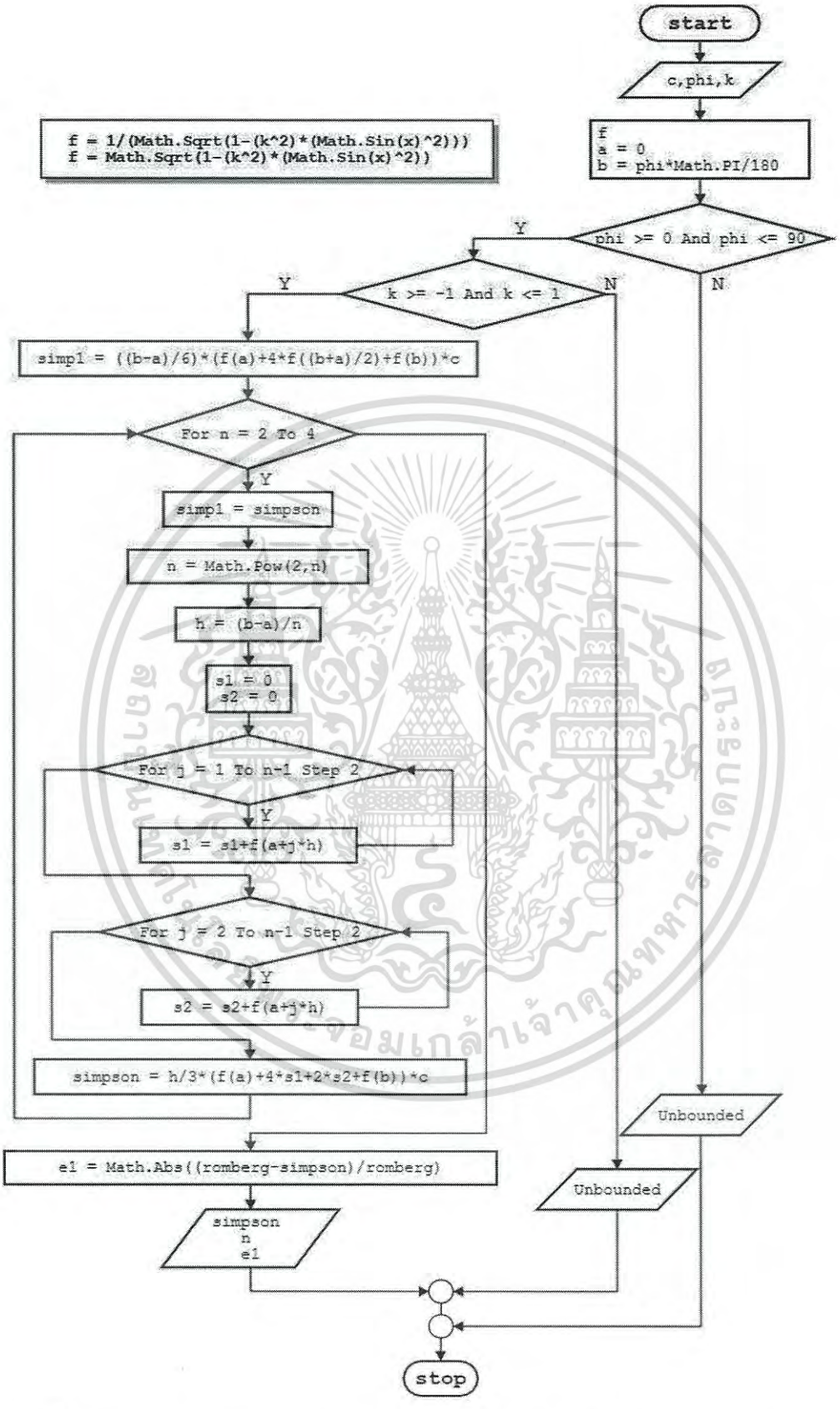
รูปที่ 4.1 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of first kind incomplete form and elliptic integral of second kind incomplete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



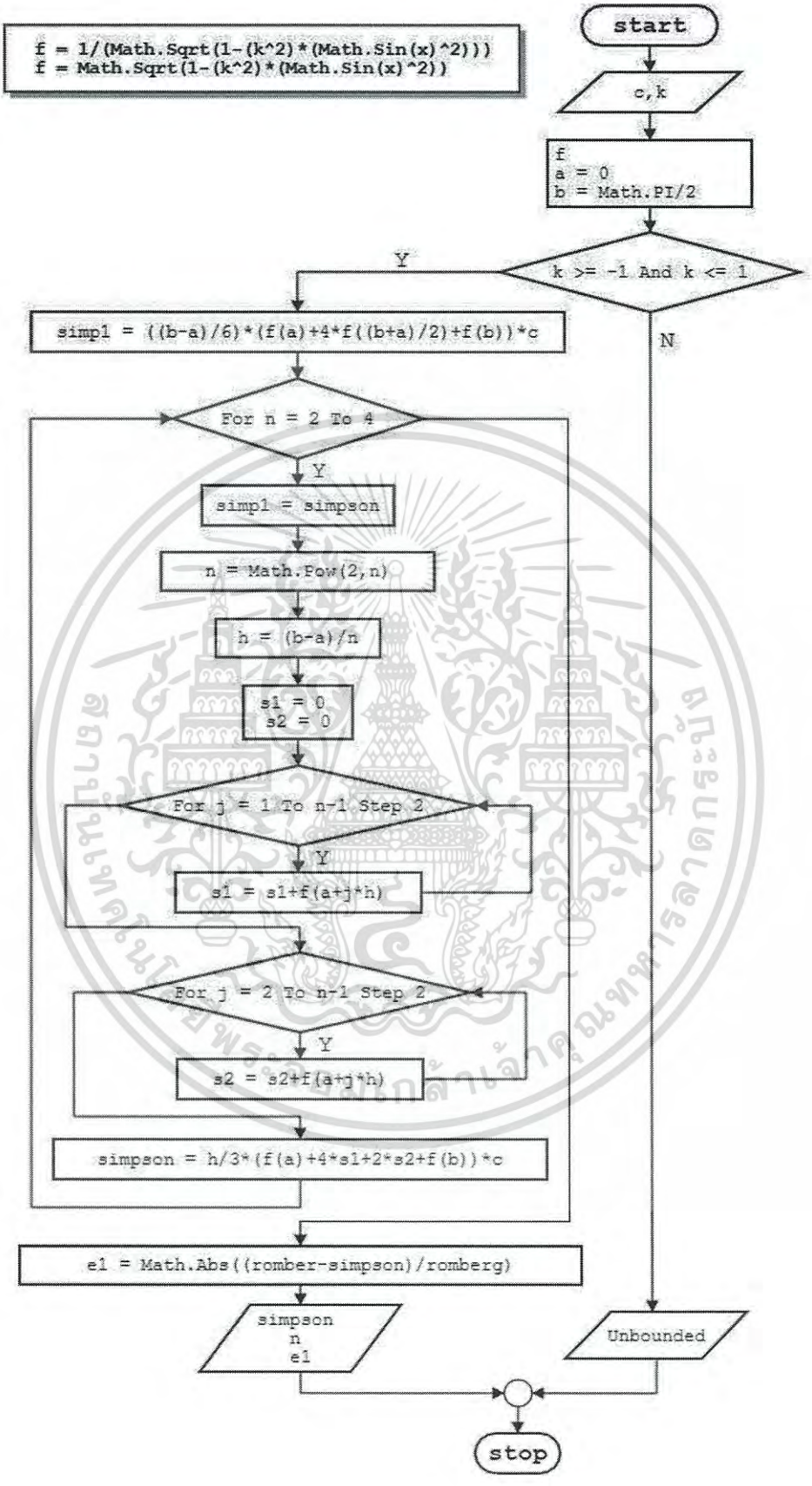
รูปที่ 4.2 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of first kind complete form and elliptic integral of second kind complete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



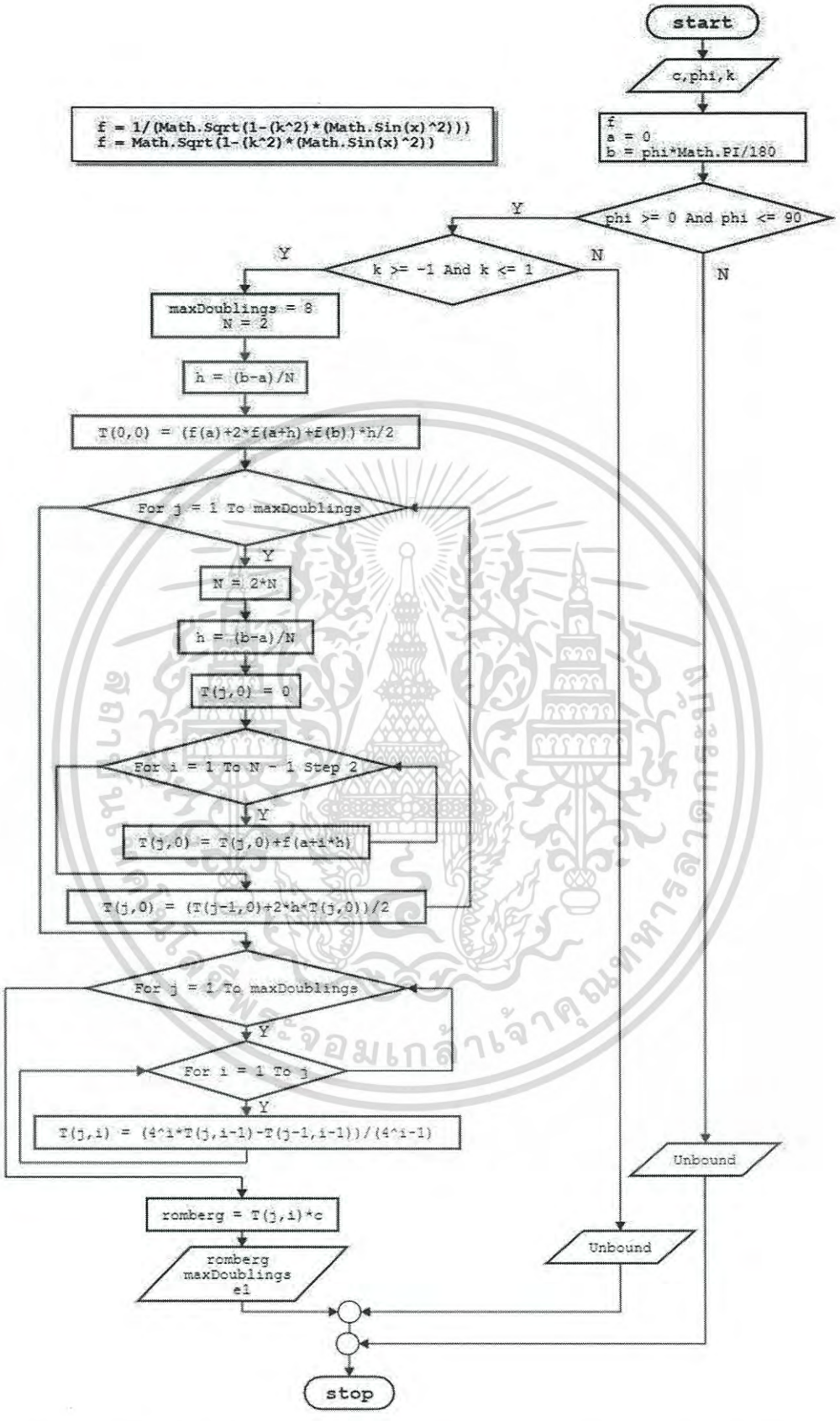
รูปที่ 4.3 Flow-chart Simpson's elliptic integral of first kind incomplete form and elliptic integral of second kind incomplete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



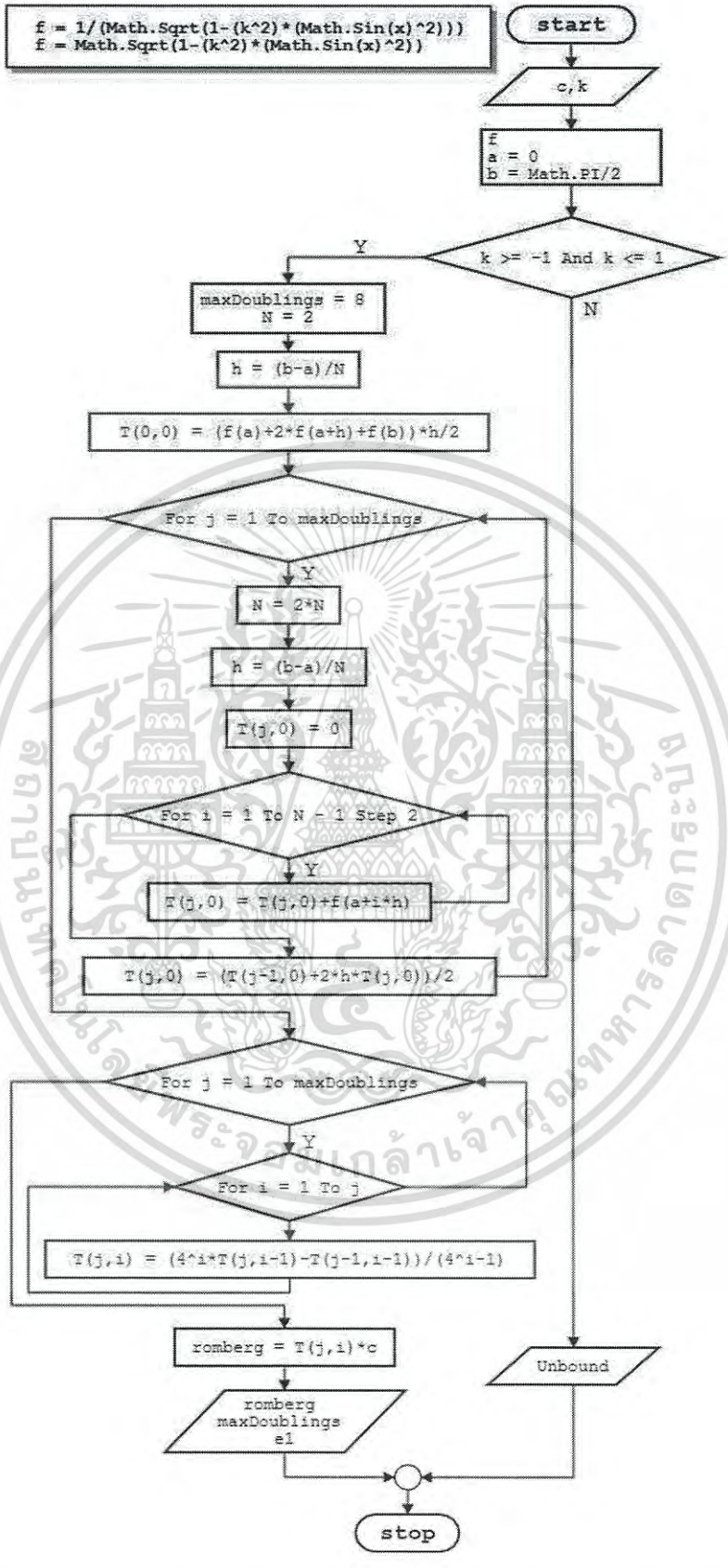
รูปที่ 4.4 Flow-chart Simpson's elliptic integral of first kind complete form and elliptic integral of second kind complete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



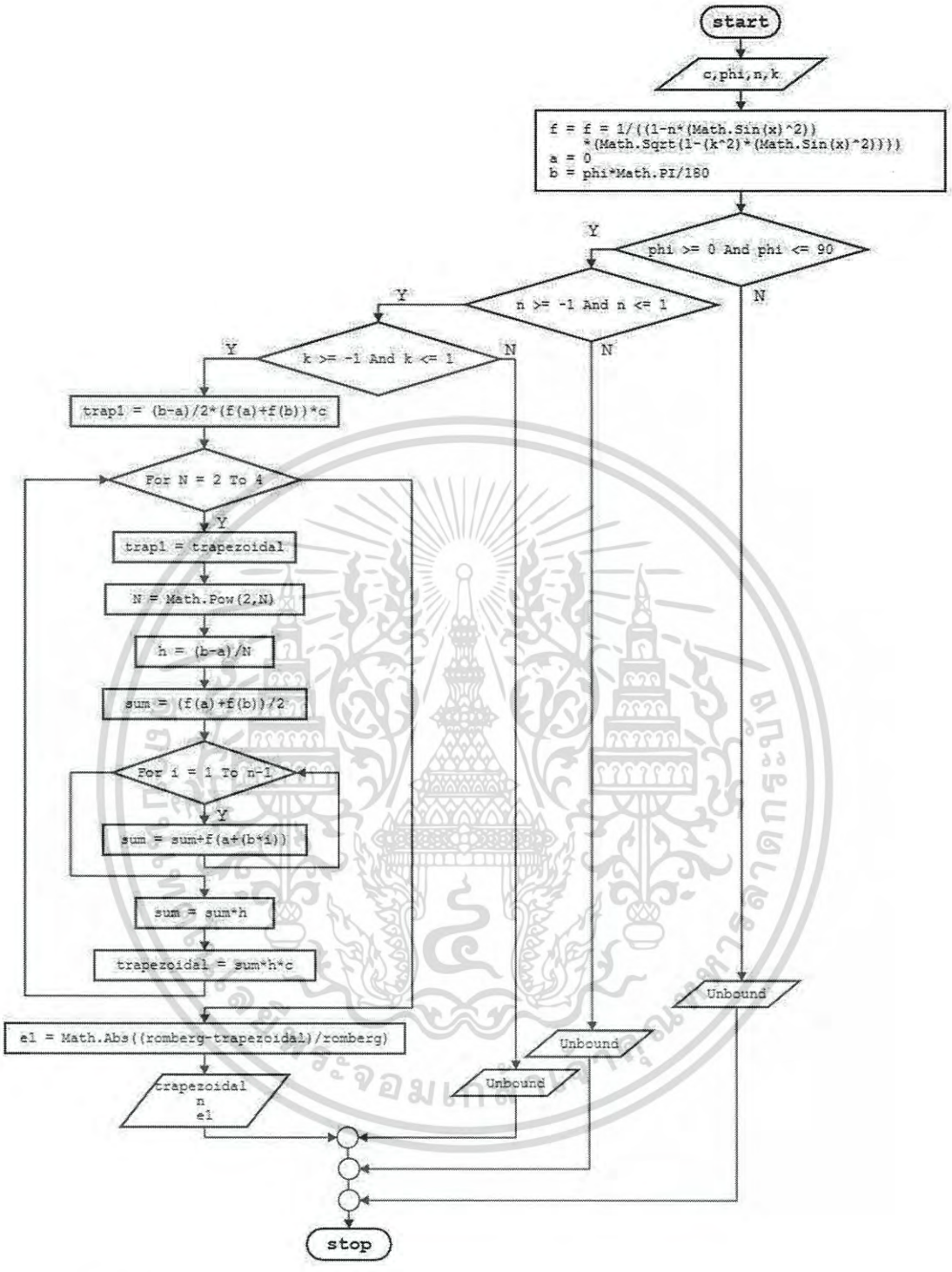
รูปที่ 4.5 Flow-chart Romberg elliptic integral of first kind incomplete form and elliptic integral of second kind incomplete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



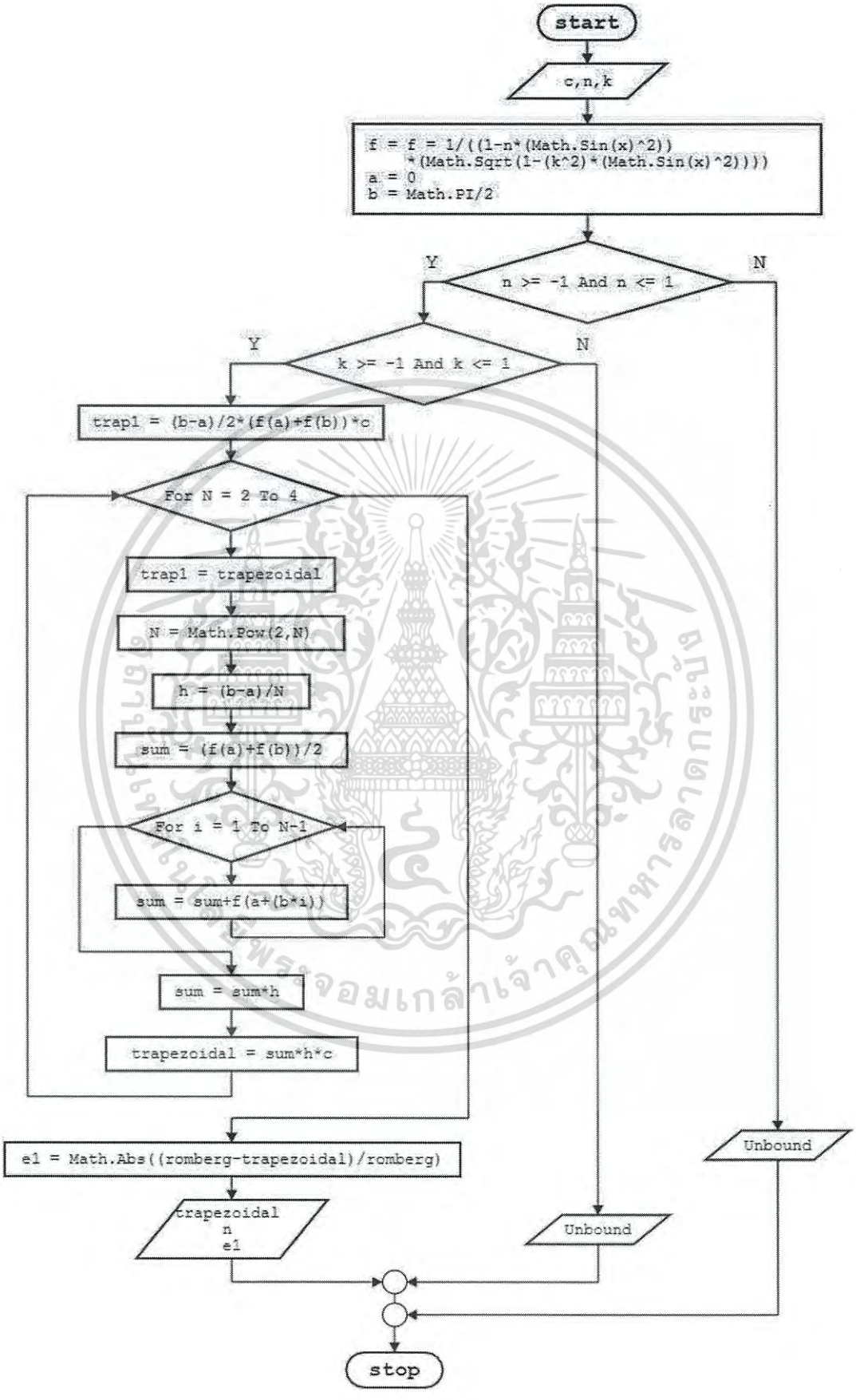
รูปที่ 4.6 Flow-chart Romberg elliptic integral of first kind complete form and elliptic integral of second kind complete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



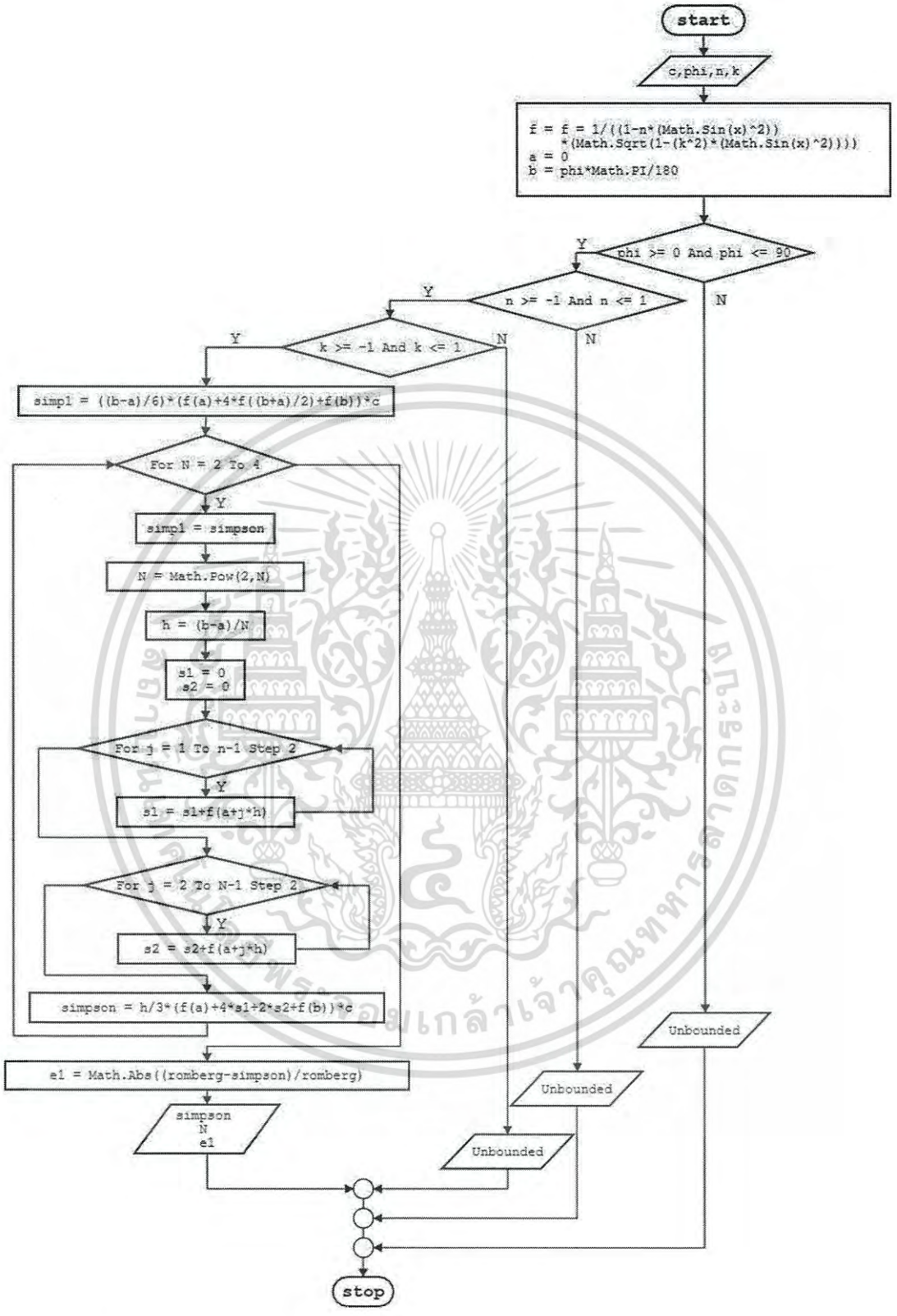
รูปที่ 4.7 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of third kind incomplete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



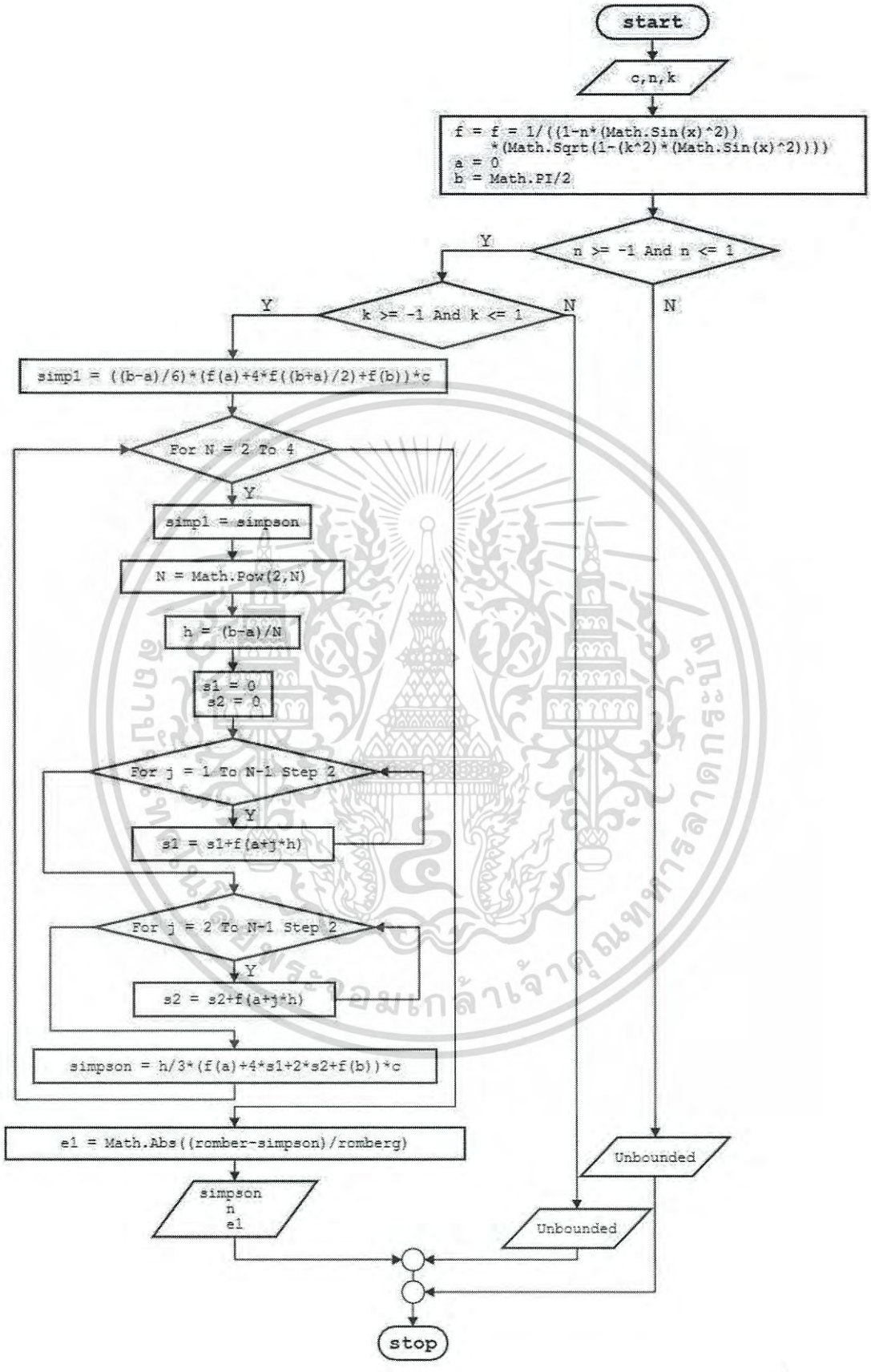
รูปที่ 4.8 Flow-chart Trapezoidal elliptic integral of third kind complete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



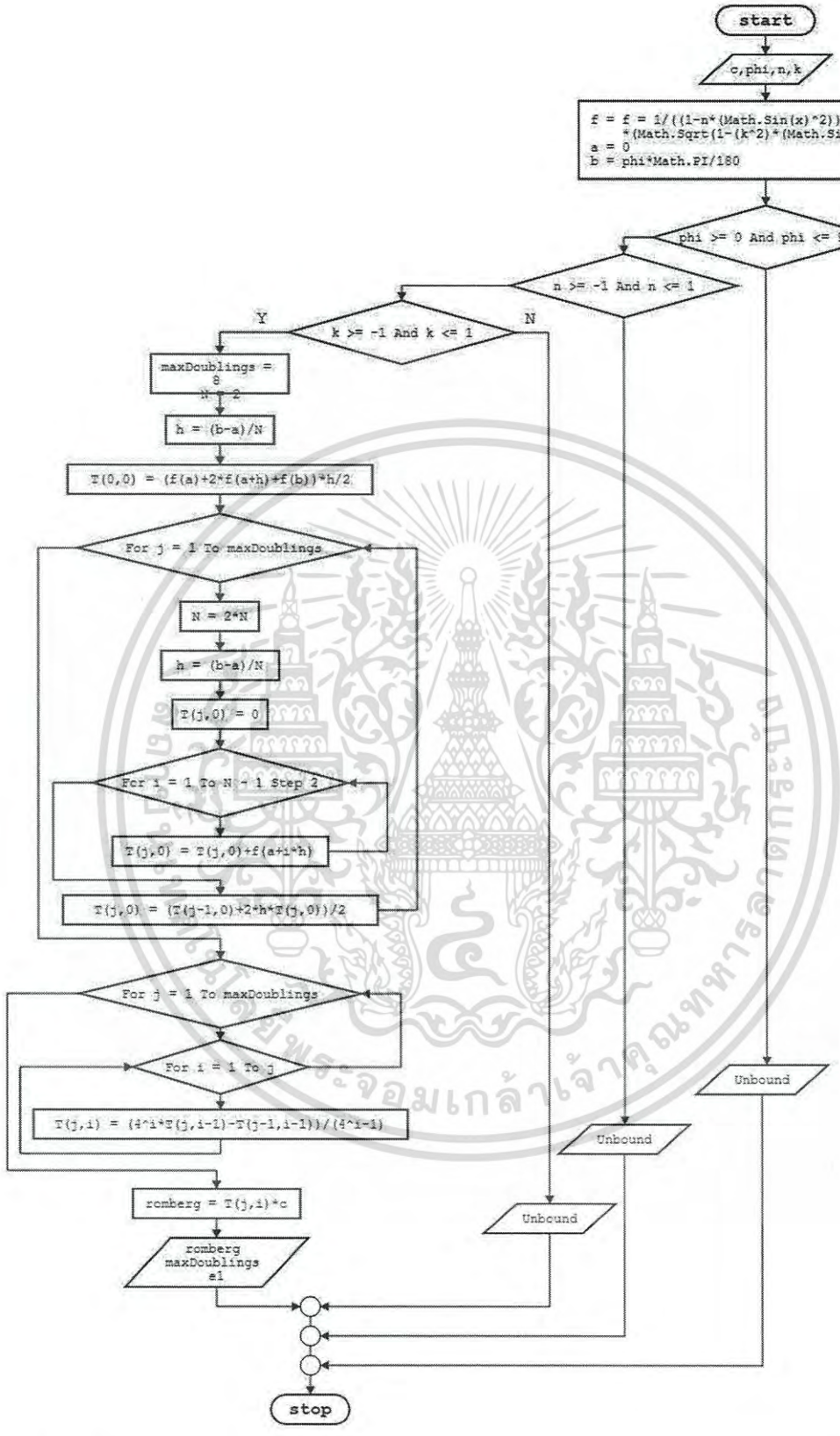
รูปที่ 4.9 Flow-chart Simpson's elliptic integral of third kind incomplete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



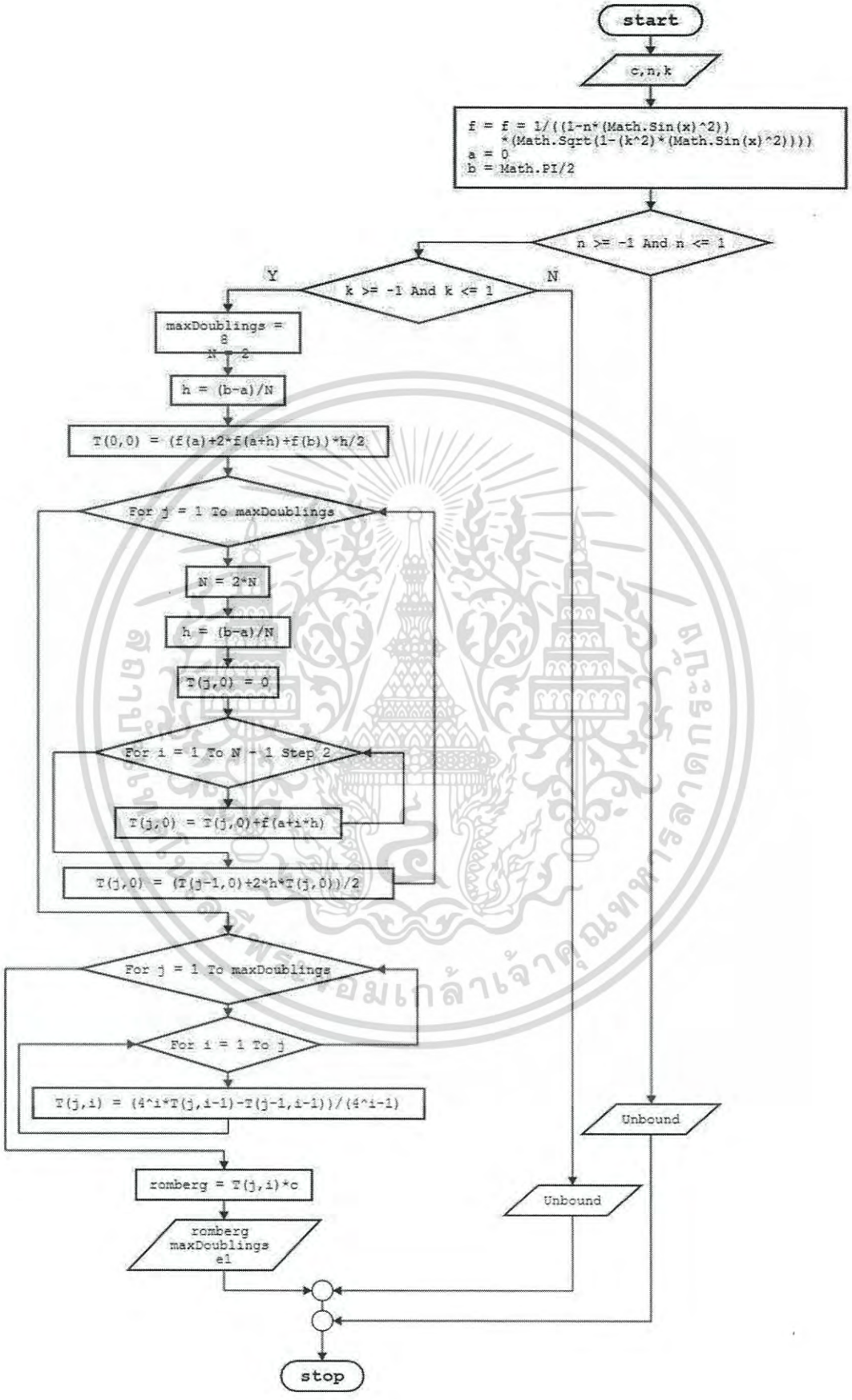
รูปที่ 4.10 Flow-chart Simpson's elliptic integral of third kind complete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.11 Flow-chart Romberg elliptic integral of third kind incomplete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

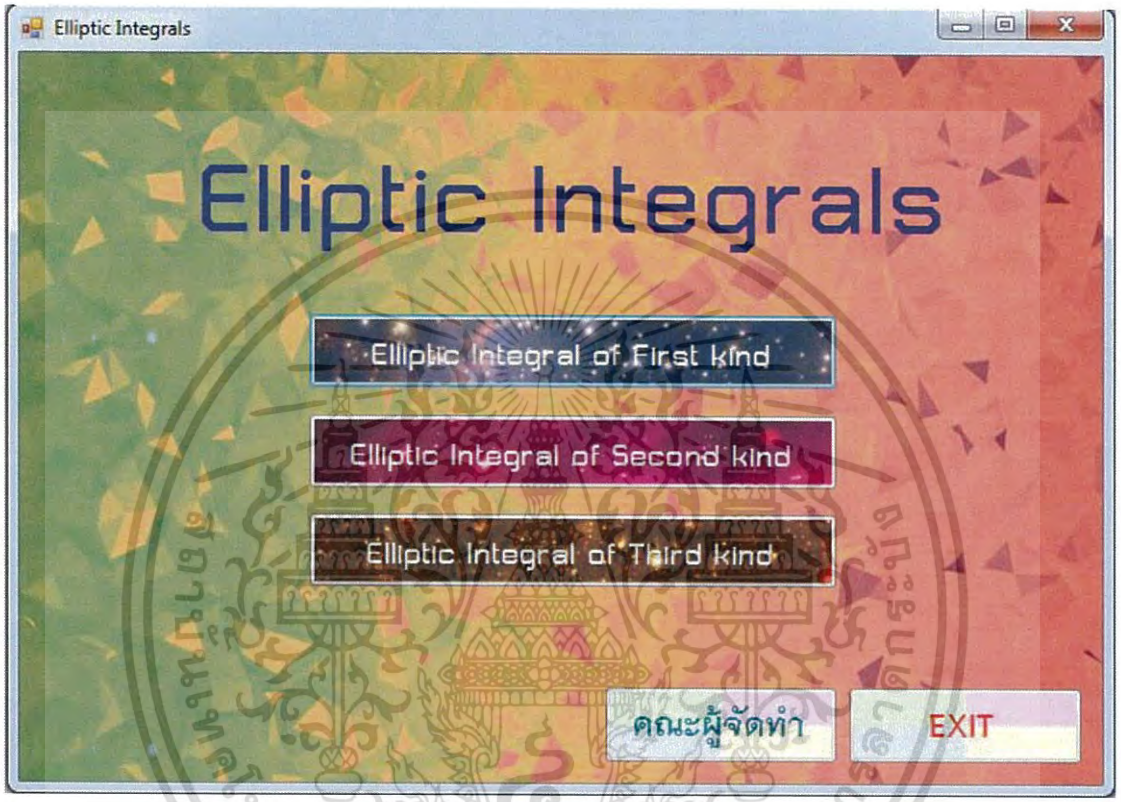


รูปที่ 4.12 Flow-chart Romberg elliptic integral of third kind complete form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 หน้าต่างโปรแกรม Visual Basic ที่ใช้แสดงผลลัพธ์

หน้าต่างโปรแกรม Visual Basic ที่ออกแบบเพื่อใช้ในการแสดงผลลัพธ์นั้น เริ่มต้นด้วยการเลือกใช้ Elliptic Integrals รูปแบบใด

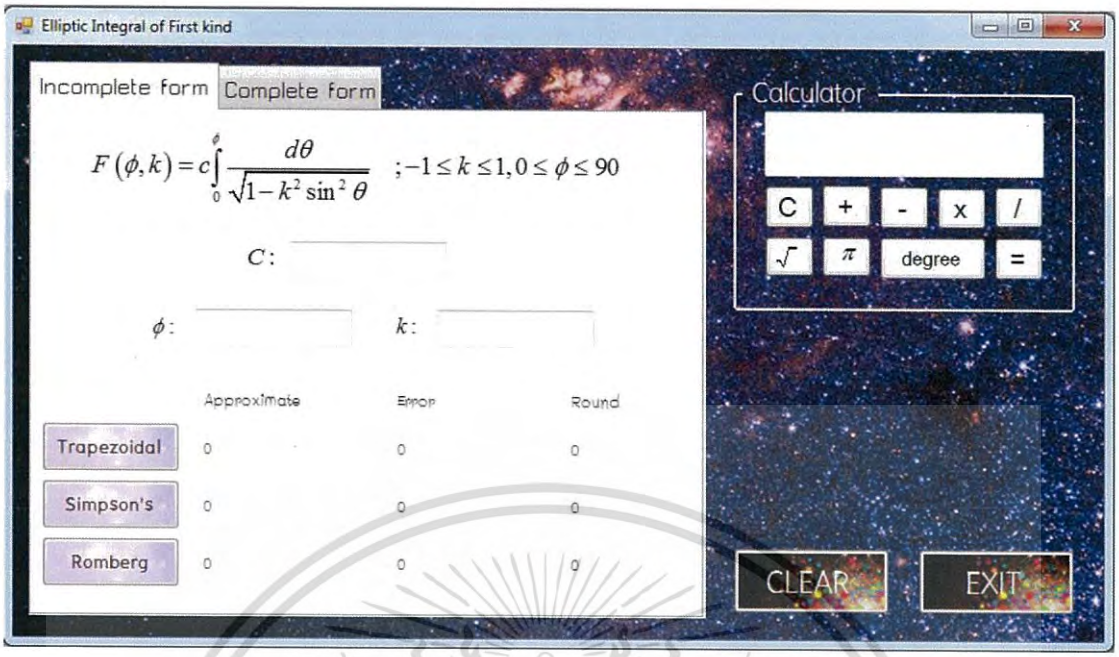


รูปที่ 4.13 แสดงหน้าต่างหลักของโปรแกรม

หน้าต่างโปรแกรมคำนวณ สำหรับ Elliptic Integral of First kind และ Elliptic Integral of Second kind โดยใส่ค่า k และขอบเขตบนของช่วงอินทิเกรต ϕ ซึ่งสามารถคำนวณได้ 3 วิธี คือ Trapezoidal Simpson's และ Romberg โดย k มีเงื่อนไข $-1 \le k \le 1$ และ ϕ มีเงื่อนไข $0 \le \phi \le 90^{\circ}$ ซึ่งในบางตัวอย่างไม่สามารถหาค่า ϕ ในหน่วยของดีกรี ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก calculator ด้านข้าง และสำหรับ Elliptic Integral of Third kind มีเงื่อนไข $-1 \le n \le 1$

โดย Trapezoidal และ Simpson's มีค่าคลาดเคลื่อนยอมรับได้ที่ทศนิยม 3 ตำแหน่ง ส่วน Romberg มีค่าคลาดเคลื่อนยอมรับได้ที่ทศนิยม 8 ตำแหน่ง

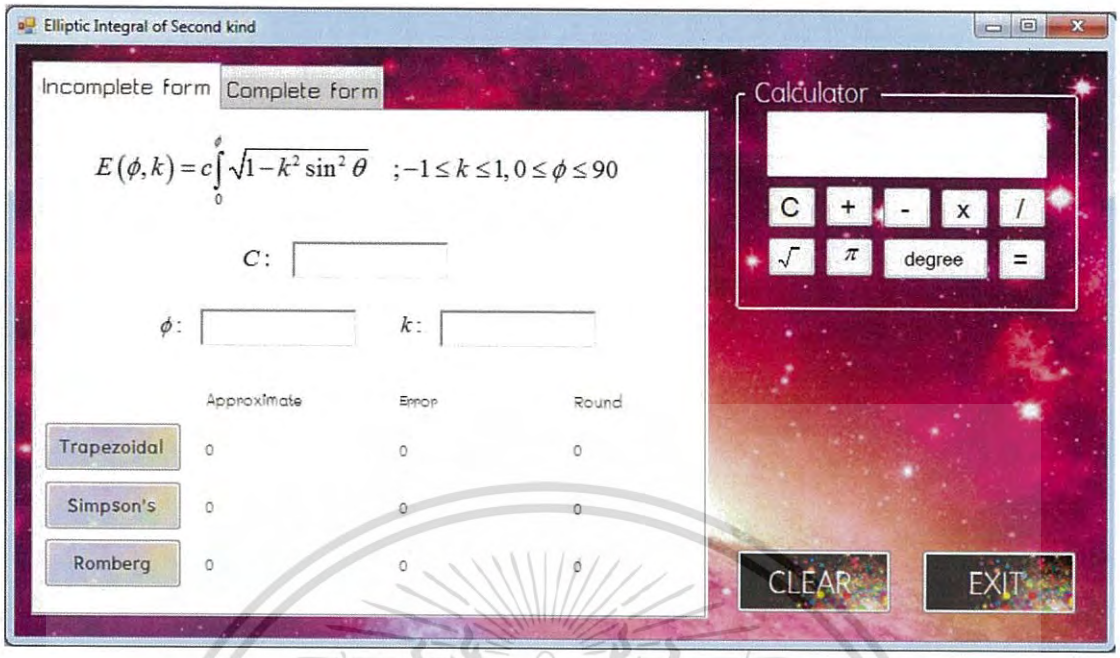
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



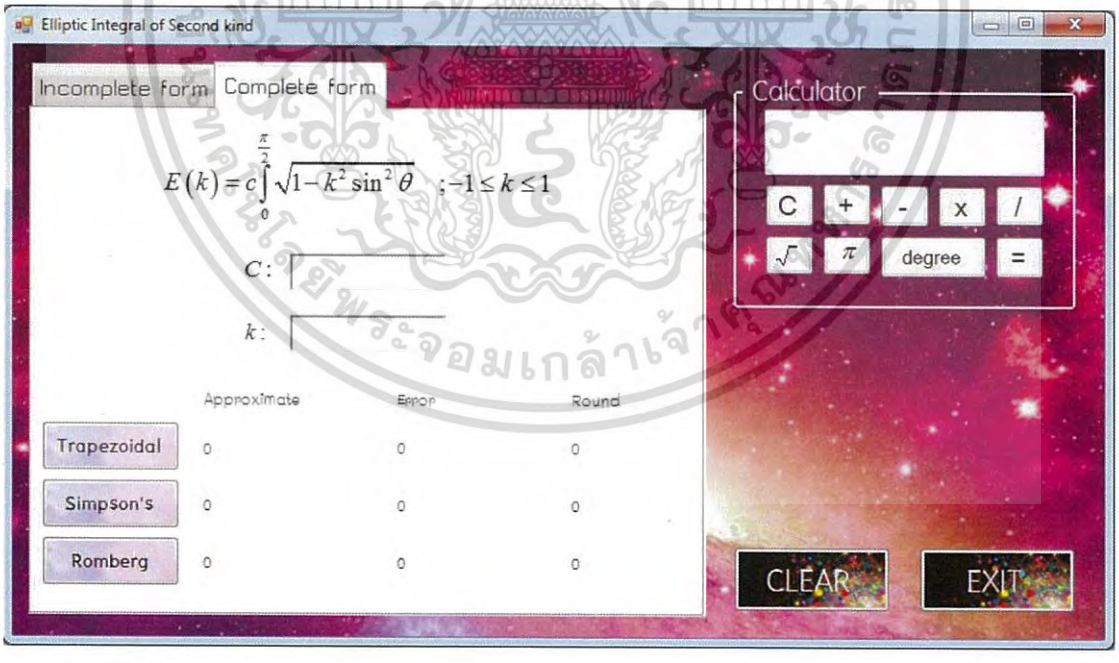
รูปที่ 4.14 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of First kind Incomplete Form

รูปที่ 4.15 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of First kind Complete Form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

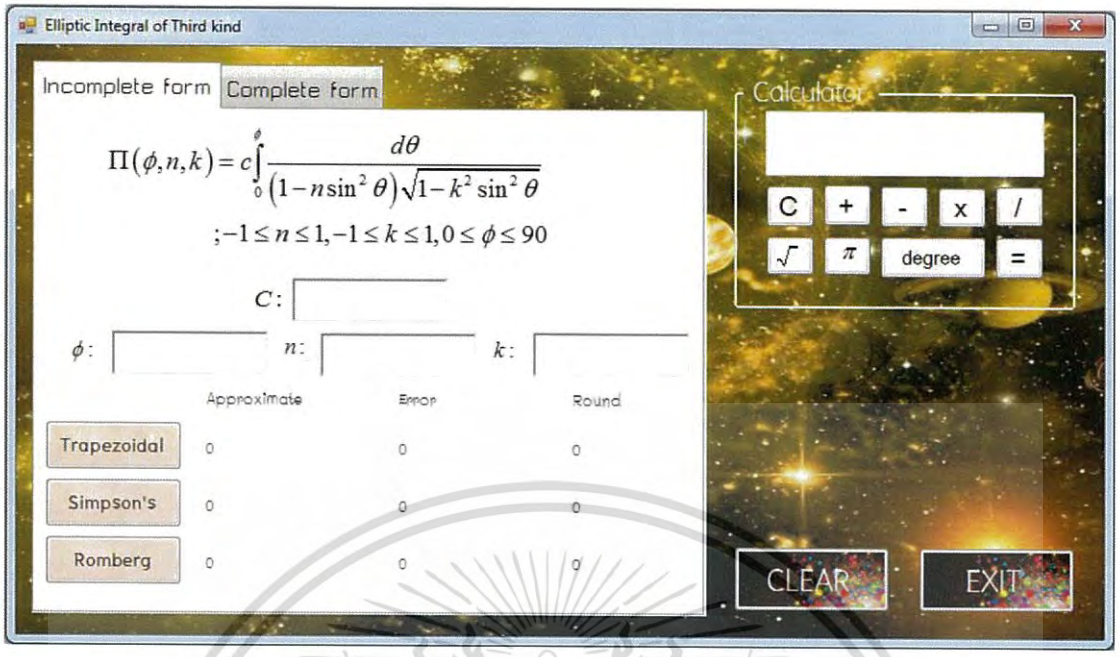


รูปที่ 4.16 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Second kind Incomplete Form

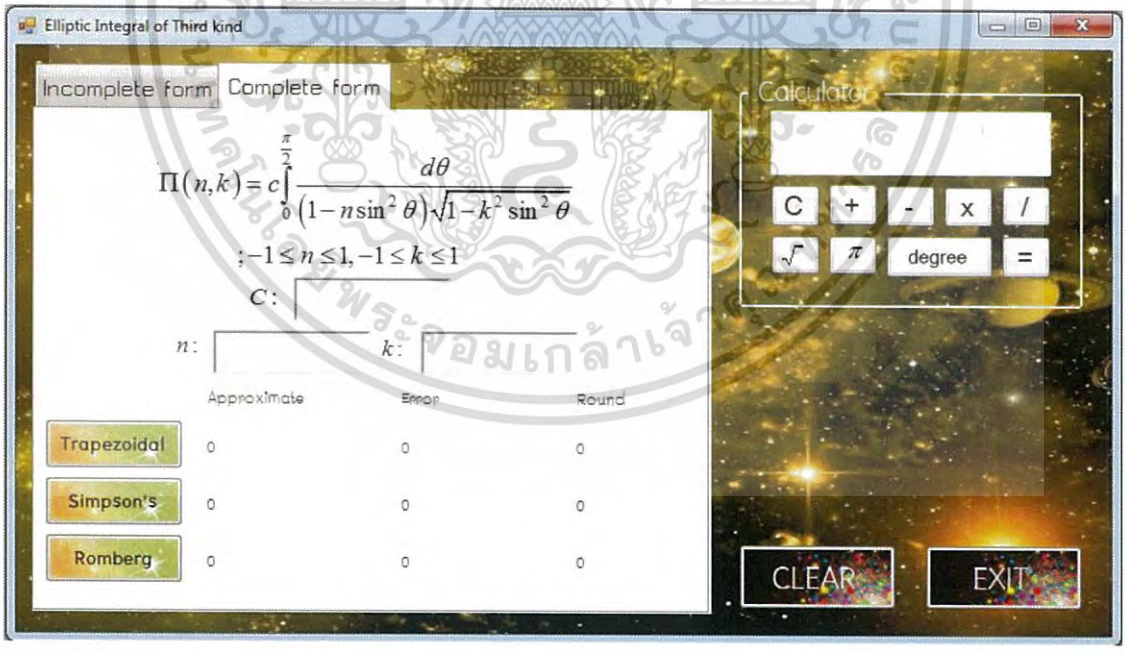


รูปที่ 4.17 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Second kind Complete Form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

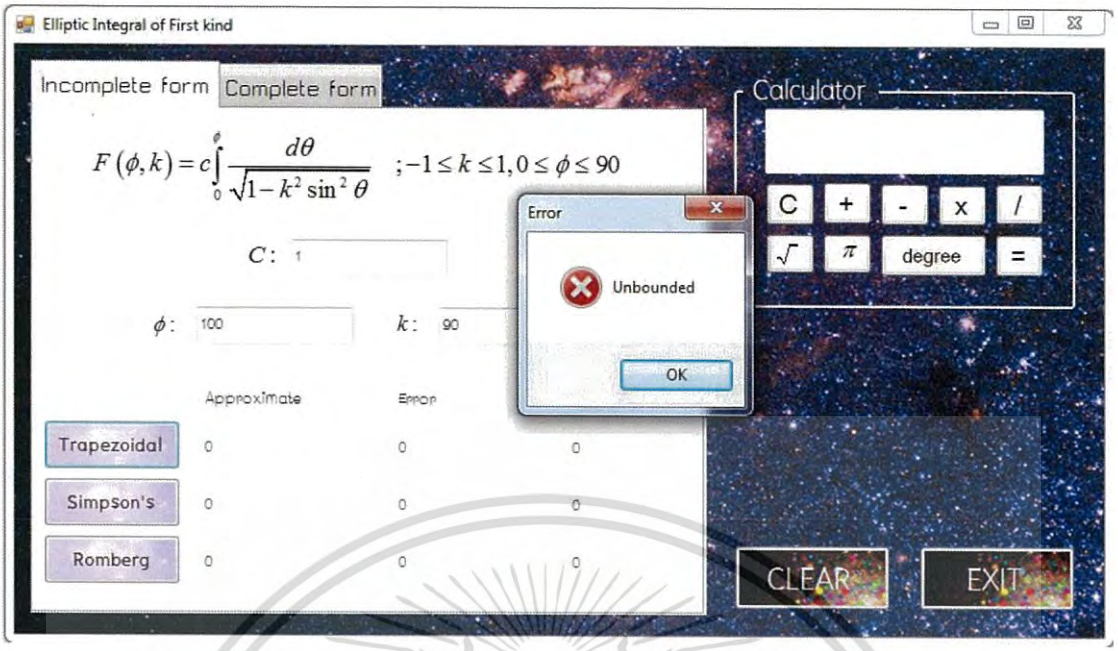


รูปที่ 4.18 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Third kind Incomplete Form



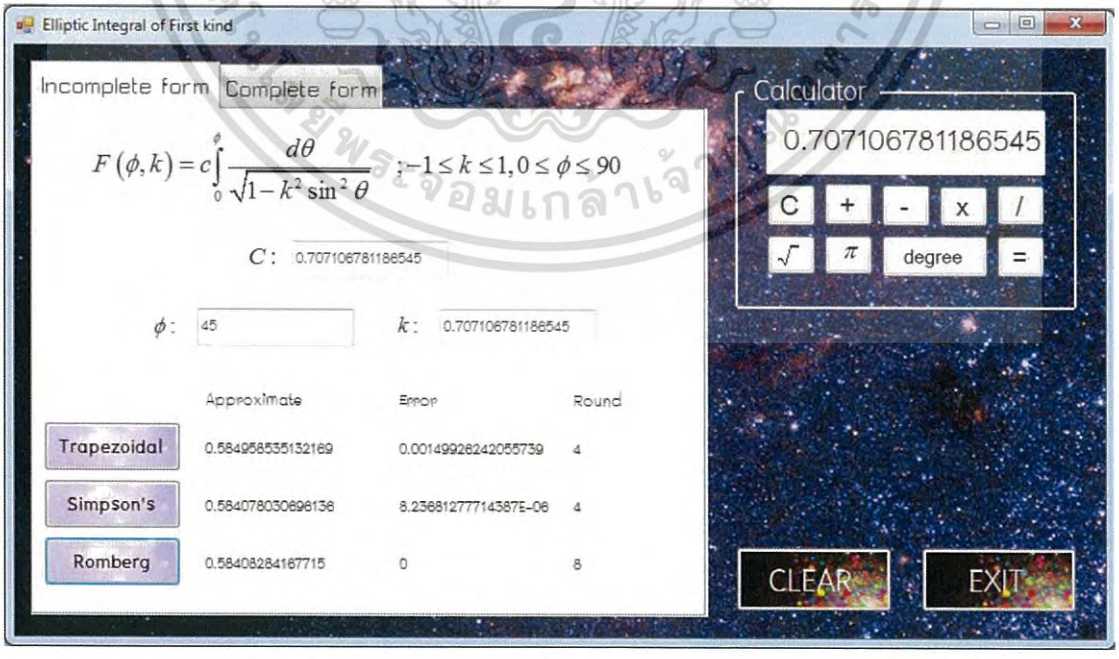
รูปที่ 4.19 แสดงหน้าต่างในการคำนวณ Elliptic Integral of Third kind Complete Form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



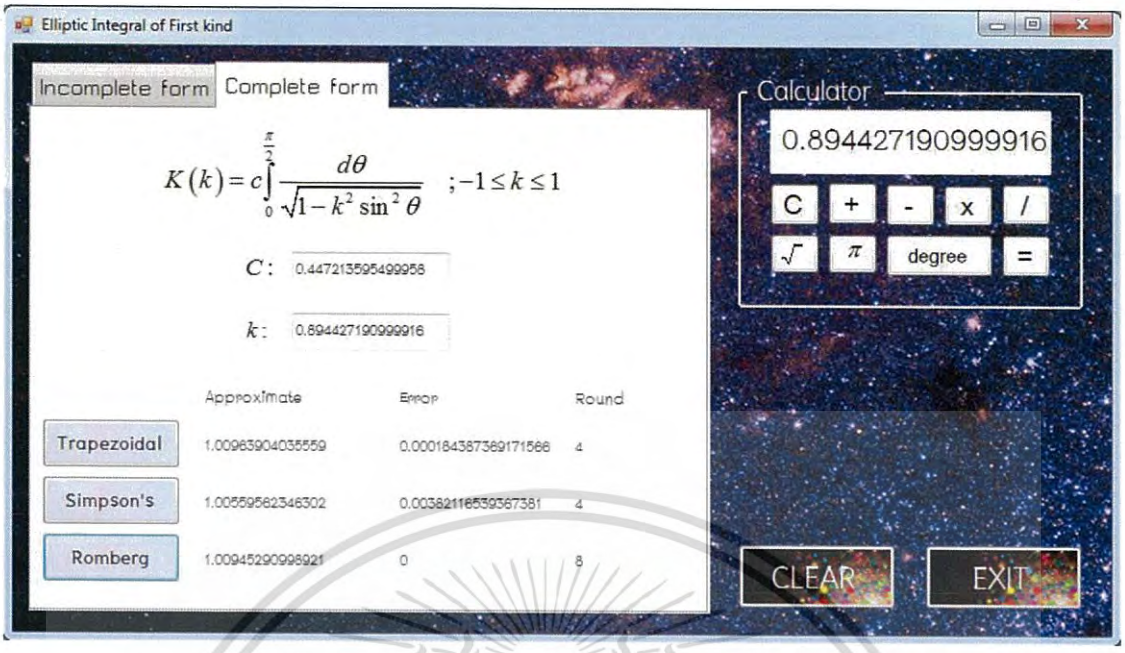
รูปที่ 4.20 แสดงในกรณีที่ไม่เข้าเงื่อนไข

4.4 ตัวอย่างที่คำนวณโดย Visual Basic

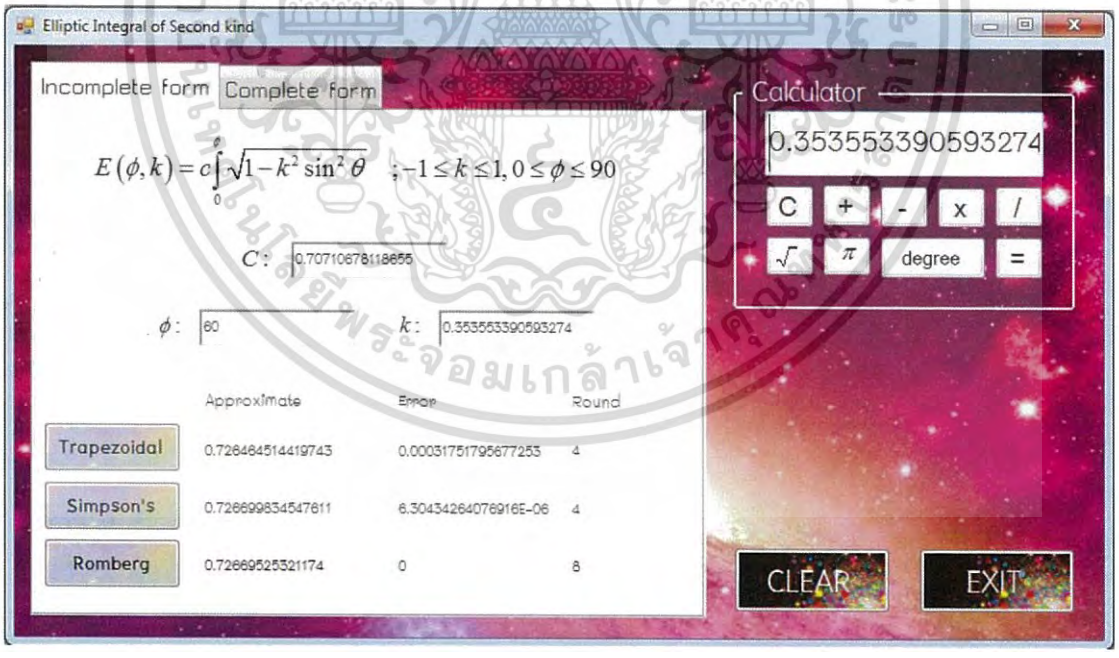


รูปที่ 4.21 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

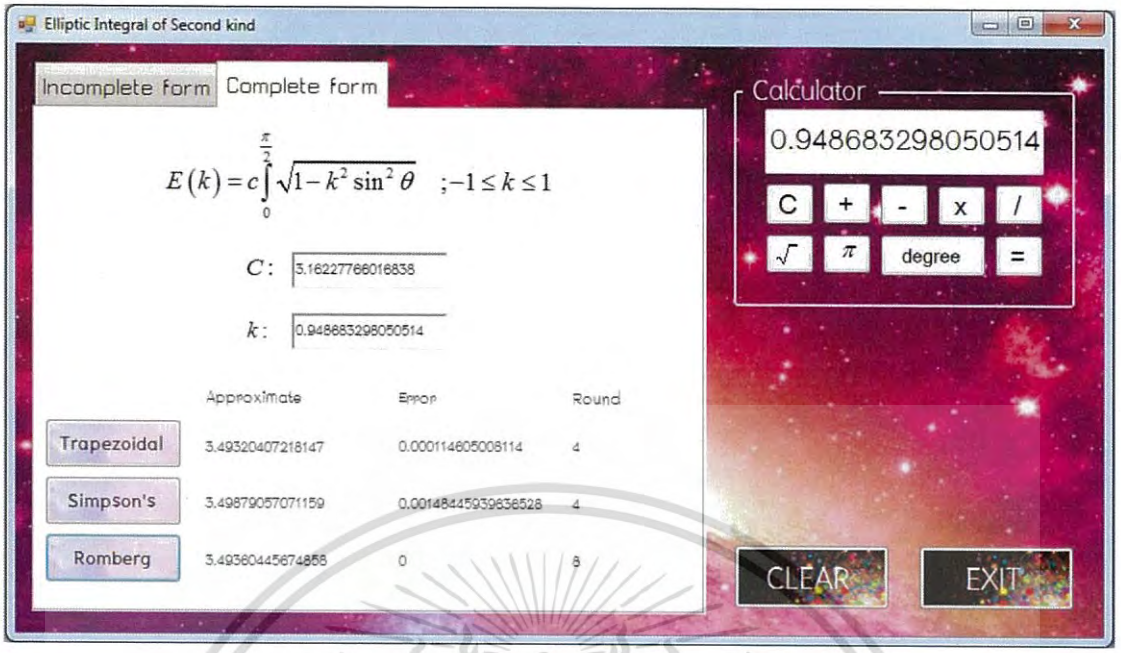


รูปที่ 4.22 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.2

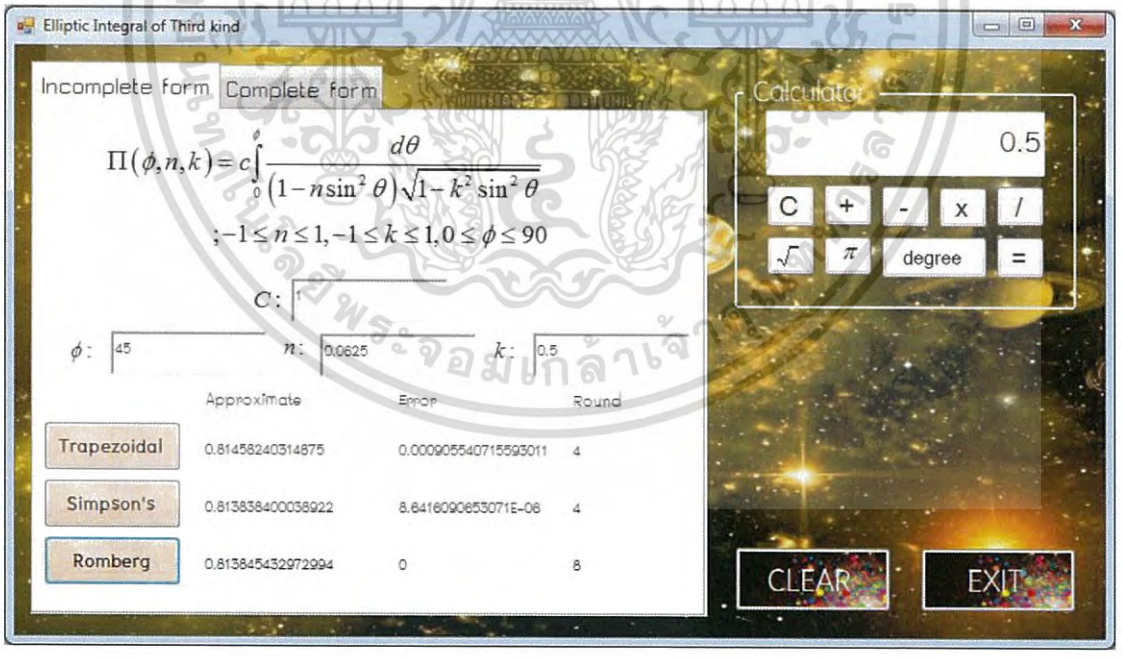


รูปที่ 4.23 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

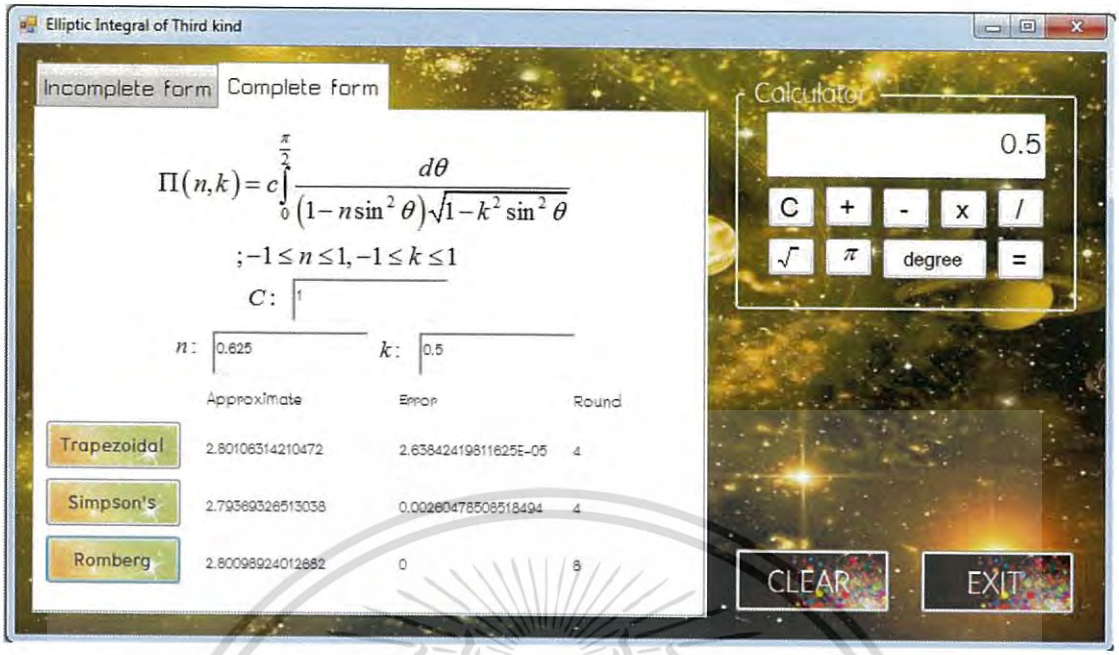


รูปที่ 4.24 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.4



รูปที่ 4.25 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.26 แสดงการคำนวณโดยโปรแกรมจากตัวอย่าง 4.6

ตารางที่ 18.1 สรุปค่าประมาณที่ได้จากโปรแกรม Visual Basic

โจทย์	$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1+4\sin^2\theta}}$	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{2-x^2}{1-4x^2}}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+9\sin^2\theta}\,d\theta$
ค่าที่ได้จากตาราง	0.58408284	1.00945291	0.72669525	3.49360445
Trapezoidal	0.58495854	1.00963904	0.72646452	3.49320407
Round	4	4	4	4
Error	0.00149926	0.00018438	0.00031751	0.00011461
Simpson's	0.58407803	1.00559562	0.72669983	3.49879057
Round	4	4	4	4
Error	0.00000823	0.00382116	0.00000630	0.00148446
Romberg	0.58408284	1.00968482	0.72688557	3.49336400
Round	4	4	4	4
Error	0	0.02297383	0.02618980	0.00688258
Romberg	0.58408284	1.00945291	0.72669525	3.49360445
Round	8	8	8	8
Error	0	0	0	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 18.2 สรุปค่าประมาณที่ได้จากโปรแกรม Visual Basic

โจทย์	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\left(1-\frac{1}{16}\sin^2\theta\right)\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\left(1-\frac{5}{8}\sin^2\theta\right)\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)}}$
ค่าที่ได้จากตาราง	0.81384543	2.80098924
Trapezoidal	0.81458240	2.80106314
Round	4	4
Error	0.00090554	0.00002638
Simpson's	0.81383840	2.79369327
Round	4	4
Error	0.00000864	0.00260478
Romberg	0.81384543	2.80146941
Round	4	4
Error	0	0.01714287
Romberg	0.81384543	2.80098924
Round	8	8
Error	0.00000002	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษารูปแบบต่าง ๆ ของปริพันธ์เชิงวงรี พบว่าปริพันธ์เชิงวงรีมีรูปแบบพื้นฐาน 3 รูปแบบ โดยผลเฉลยของปริพันธ์เชิงวงรีจะอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ ซึ่งในการหาผลเฉลยมีวิธีการที่ค่อนข้างซับซ้อน เริ่มด้วยการจัดสมการให้อยู่ในรูปที่มีโมดูลัส $0 \le k^2 \le 1$ จึงจะสามารถหาผลเฉลยในรูปแบบของอนุกรมอนันต์ได้ โดยการจัดสมการให้เป็นไปตามเงื่อนไขนั้น อาศัยหลักการเปลี่ยนตัวแปร ซึ่งในบางครั้งในการหาขอบเขตอาจหาค่าได้ยาก คณะผู้วิจัยจึงได้ศึกษาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้น โดยคณะผู้วิจัยได้ใช้วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู กฎของซิมป์สัน และวิธีของรอมเบิร์กในการคำนวณการประมาณค่า ซึ่งวิธีของรอมเบิร์กใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า และโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นเพื่อใช้ในการประมาณค่า ใช้งานภายใต้โปรแกรม Visual Basic Version 2010 ซึ่งเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับการคำนวณของวิธีรอมเบิร์กแล้วนั้น ได้ค่าประมาณใกล้เคียงกับค่าในตารางจากกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู กฎของซิมป์สัน มีค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ของทศนิยม 3 ตำแหน่ง และวิธีของรอมเบิร์กมีค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ของทศนิยม 8 ตำแหน่ง ผลจากการสร้างโปรแกรมทำให้เกิดความสะดวก แม่นยำ และรวดเร็ว ต่อการหาค่าประมาณ

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้ที่สนใจศึกษาปริพันธ์เชิงวงรี สามารถหาค่าประมาณได้หลายรูปแบบ และสามารถนำไปศึกษาต่อได้ เช่น ในกรณีที่เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ หรือไม่ใช่ขอบเขต $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ และสำหรับ Elliptic Integral of Third kind ในกรณีที่ $n > 1$ และ $n < -1$ เป็นต้น อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับ Elliptic Functions

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] กาญจนา คำนึงกิจ. 2554. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข.** กรุงเทพฯ : มีนเซอร์วิส ซัพพลาย

[2] กิตติ ภักดีวัฒนะกุล และจำลอง ครูอุตสาหะ. 2541. **Visual Basic 5 ฉบับ โปรแกรมเมอร์.** กรุงเทพฯ : ไทยเจริญการพิมพ์

[3] ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. **เส้นรอบวงของวงรี และ Elliptic Integral.** วารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย 2526 ; 27(302-303)

[4] ปราโมทย์ เดชะอำไพ นิพนธ์ วรรณโสภาคย์. 2557. **พื้นฐานแมทแลบ.** กรุงเทพฯ : วี.พริ้นท์

[5] พัชรินทร์ เหมโชติ. 2555. **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** กรุงเทพฯ : มีนเซอร์วิส ซัพพลาย

[6] ภัคคินี ชิตสกุล. 2535. **เอกสารประกอบการสอนวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข.** กรุงเทพฯ : หจก.ประสิทธิภัณฑ์แอนด์พริ้นติ้ง

[7] _____. 2535. **เอกสารประกอบการสอนวิชาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์** กรุงเทพฯ : หจก.ประสิทธิภัณฑ์แอนด์พริ้นติ้ง

[8] สุชาย ธนวเสถียร. ม.ป.ป. **Fundamental of Visual Basic 6.0 Structured Programming.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ดี แอล เอส

[9] **เอกสารประกอบการสอนวิชาการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.** คณะวิทยาศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์. ม.ม.ป.

[10] Claoudio G. Carualhaes. 2008. **Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean.** Stanford University,Stanford California : n.p.

[11] Leon M. Hall. n.d. **Special Functions.** Missouri : n.p.

[12] Mark Reeder. 2012. **From the Wallis formula to the Gaussian distribution.** Department of Mathematics, Boston College Chestnut Hill.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[13] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. 1964. **Handbook of Mathematical Functions With Formular, Graphs and Mathematical Table**. U.S.A : n.p.

[14] Paul F. Byrd and Morris D. Friedman. 1971. **Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists.** New York : n.p.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก

การสร้างตาราง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสร้างตาราง

Elliptic Integral of First kind รูปแบบ Incomplete Form

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},0\le k^2\le 1,0\le\phi\le 1$$

ซึ่ง $$F(\phi,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}k^{2n}I_n$$ โดยที่ $I_n=\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta\,d\theta$

```
firstFi.m
1 -    clc
2 -    clear all
3
4 -    format long
5 -    syms n k x;
6
7 -    phi = input(' phi = ');
8 -    for k=0:0.01:0.1
9
10 -       p = phi/pi*180;
11 -       s= symsum(((factorial(2*n))/((2^(2*n))*(factorial(n)^2)))*(k^(2*n))*(int(sin(x)^(2*n),0,phi))),n,0,Inf);
12 -       an = double(s);
13 -       fprintf(' k:%5.2f  degree:%5.0f  F:%5.8f \n ',k,p,an)
14
15 -   end
```

รูป ก คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of First kind Incomplete Form

```
Command Window
  phi = pi/3
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.00  degree:   60  F:1.04719755
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.01  degree:   60  F:1.04721291
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.02  degree:   60  F:1.04725898
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.03  degree:   60  F:1.04733579
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.04  degree:   60  F:1.04744337
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.05  degree:   60  F:1.04758177
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.06  degree:   60  F:1.04775104
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.07  degree:   60  F:1.04795127
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.08  degree:   60  F:1.04818254
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.09  degree:   60  F:1.04844496
Warning: Explicit integral could not be found.
 k: 0.10  degree:   60  F:1.04873863
 >>
```

รูป ข ค่าประมาณของ Elliptic Integral of First kind Incomplete Form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Elliptic Integral of First kind รูปแบบ Complete Form

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},0\le k^2\le 1$$

ซึ่ง $$K(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n}$$

firstFi.m | firstKc.m

```
clc
clear all

format long
syms n k;

for k=0:0.01:0.1

    s = symsum((((factorial(2*n))/((2^(2*n))*(factorial(n)^2)))^2)*(k^n)),n,0,Inf)*pi/2;
    a = double(s);
    fprintf('k:%5.2f  K:%5.8f \n ',k,a)

end
```

รูป ค คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of First kind Complete Form

Command Window

```
k: 0.00  K:1.57079633
k: 0.01  K:1.57474556
k: 0.02  K:1.57873991
k: 0.03  K:1.58278034
k: 0.04  K:1.58686785
k: 0.05  K:1.59100345
k: 0.06  K:1.59518822
k: 0.07  K:1.59942324
k: 0.08  K:1.60370965
k: 0.09  K:1.60804862
k: 0.10  K:1.61244135
```

รูป ง ค่าประมาณของ Elliptic Integral of First kind Complete Form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Elliptic Integral of Second kind รูปแบบ Incomplete Form

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta, 0\le k^2\le 1, 0\le\phi\le 1$$

ซึ่ง $$E(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{k^{2n}}{1-2n}I_n$$ โดยที่ $I_n=\int_0^{\phi}\sin^{2n}\theta d\theta$

firstFi.m | secondEi.m

```
clc
clear all

format long
syms n k x;

phi = input(' phi = ');
for k=0:0.01:0.1

    p = phi/pi*180;
    s= symsum((((factorial(2*n))/((2^(2*n))*(factorial(n)^2)))*((k^(2*n))/(1-(2*n)))*(int(sin(x)^(2*n),0,phi))),n,0,Inf);
    an = double(s);
    fprintf('k:%5.2f  degree:%5.0f  E:%5.8f \n ',k,p,an)

end
```

รูป จ คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of Second kind Incomplete Form

Command Window

```
 phi = pi/3
Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.00  degree:   60  E:1.04719755
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.01  degree:   60  E:1.04718220
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.02  degree:   60  E:1.04713613
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.03  degree:   60  E:1.04705934
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.04  degree:   60  E:1.04695183
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.05  degree:   60  E:1.04681357
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.06  degree:   60  E:1.04664454
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.07  degree:   60  E:1.04644473
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.08  degree:   60  E:1.04621409
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.09  degree:   60  E:1.04595260
 Warning: Explicit integral could not be found.
k: 0.10  degree:   60  E:1.04566022
 >>
```

รูป ฉ ค่าประมาณของ Elliptic Integral of Second kind Incomplete Form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Elliptic Integral of Second kind รูปแบบ Complete Form

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta, 0\le k^2\le 1$$

ซึ่ง $$E(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{k^{2n}}{1-2n}$$

```
secondEi.m | secondEc.m
1 -  clc
2 -  clear all
3
4 -  format long
5 -  syms n k x;
6
7 -  phi = input(' phi = ');
8 -  for k=0:0.01:0.1
9
10 -     p = phi/pi*180;
11 -     s= symsum((((factorial(2*n))/((2^(2*n))*(factorial(n)^2)))*((k^(2*n))/(1-(2*n)))*(int(sin(x)^(2*n),0,phi))),n,0,Inf);
12 -     an = double(s);
13 -     fprintf('k:%5.2f  radian:%5.0f  E:%5.8f \n ',k,p,an)
14
15 -  end
```

รูป ช คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of Second kind Complete Form

```
Command Window
  k: 0.00  E:1.57079633
  k: 0.01  E:1.56686194
  k: 0.02  E:1.56291264
  k: 0.03  E:1.55894824
  k: 0.04  E:1.55496855
  k: 0.05  E:1.55097335
  k: 0.06  E:1.54696246
  k: 0.07  E:1.54293565
  k: 0.08  E:1.53889273
  k: 0.09  E:1.53483346
  k: 0.10  E:1.53075764
```

รูป ช ค่าประมาณของ Elliptic Integral of Second kind Complete Form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Elliptic Integral of Third kind รูปแบบ Incomplete Form และรูปแบบ Complete Form

$$\Pi(\phi,n,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},0\le k^2\le 1,0\le\phi\le 1;\ |n|<1$$

```
third.m
 1 -    clc
 2 -    clear all
 3
 4 -    phi = input('phi : ');
 5 -    n = input('n : ');
 6 -    for k=0:0.01:0.1
 7
 8 -        p = phi*180/pi;
 9 -        Pi = ellipticPi(n,phi,k);
10 -    fprintf('degree:%5.0f  n:%5.2f  PI:%5.8f  \n',p,n,Pi)
11
12 -    end
13
```

รูป ฌ คำสั่งโปรแกรม Elliptic Integral of Third kind

```
Command Window
  phi : pi/3
  n : 0.2
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.11534290
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.11705287
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.11877563
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.12051138
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.12226028
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.12402255
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.12579837
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.12758795
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.12939149
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.13120921
  degree:   60  n: 0.20  PI:1.13304131
  >>
```

รูป ญ ค่าประมาณของ Elliptic Integral of Third kind

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข

ตาราง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Complete Elliptic Integrals

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\quad K'=K(k'),\quad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta,\quad E'=E(k')$$

k^2	K	K'	E	E'	k'^2
0.00	1.57079633	∞	1.57079633	1.00000000	1.00
0.01	1.57474556	3.69563736	1.56686194	1.01599355	0.99
0.02	1.57873991	3.35414145	1.56291264	1.02859451	0.98
0.03	1.58278034	3.15587495	1.55894824	1.03994686	0.97
0.04	1.58686785	3.01611249	1.55496855	1.05050223	0.96
0.05	1.59100345	2.90833725	1.55097335	1.06047373	0.95
0.06	1.59518822	2.82075250	1.54696246	1.06998613	0.94
0.07	1.59942324	2.74707300	1.54293565	1.07912141	0.93
0.08	1.60370965	2.68355141	1.53889273	1.08793750	0.92
0.09	1.60804862	2.62777333	1.53483346	1.09647752	0.91
0.10	1.61244135	2.57809211	1.53075764	1.10477473	0.90
0.11	1.61688909	2.53333455	1.52666502	1.11285561	0.89
0.12	1.62139314	2.49263532	1.52255537	1.12074166	0.88
0.13	1.62595483	2.45533803	1.51842845	1.12845074	0.87
0.14	1.63057555	2.42093296	1.51428403	1.13599784	0.86
0.15	1.63525673	2.38901649	1.51012183	1.14339579	0.85
0.16	1.63999987	2.35926355	1.50594161	1.15065563	0.84
0.17	1.64480649	2.33140857	1.50174310	1.15778698	0.83
0.18	1.64967821	2.30523174	1.49752603	1.16479829	0.82
0.19	1.65461667	2.28054914	1.49329011	1.17169705	0.81
0.20	1.65962360	2.25720533	1.48903506	1.17848992	0.80
0.21	1.66470079	2.23506776	1.48476058	1.18518288	0.79
0.22	1.66985009	2.21402250	1.48046637	1.19178131	0.78
0.23	1.67507343	2.19397093	1.47615213	1.19829009	0.77
0.24	1.68037282	2.17482709	1.47181751	1.20471364	0.76
0.25	1.68575035	2.15651565	1.46746221	1.21105603	0.75
k^2	K	K'	E	E'	k'^2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\quad K'=K(k'),\quad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta,\quad E'=E(k')$$

k^2	K	K'	E	E'	k'^2
0.26	1.69120820	2.13897018	1.46308587	1.21732096	0.74
0.27	1.69674862	2.12213186	1.45868816	1.22351184	0.73
0.28	1.70237398	2.10594832	1.45426870	1.22963183	0.72
0.29	1.70808673	2.09037275	1.44982713	1.23568384	0.71
0.30	1.71388945	2.07536314	1.44536306	1.24167057	0.70
0.31	1.71978481	2.06088165	1.44087611	1.24759454	0.69
0.32	1.72577561	2.04689408	1.43636587	1.25345809	0.68
0.33	1.73186478	2.03336941	1.43183192	1.25926342	0.67
0.34	1.73805537	2.02027943	1.42727382	1.26501258	0.66
0.35	1.74435060	2.00759840	1.42269113	1.27070748	0.65
0.36	1.75075380	1.99530278	1.41808339	1.27634994	0.64
0.37	1.75726850	1.98337098	1.41345013	1.28194167	0.63
0.38	1.76389839	1.97178316	1.40879084	1.28748426	0.62
0.39	1.77064732	1.96052104	1.40410502	1.29297924	0.61
0.40	1.77751937	1.94956775	1.39939214	1.29842804	0.60
0.41	1.78451880	1.93890767	1.39465165	1.30383201	0.59
0.42	1.79165012	1.92852632	1.38988299	1.30919245	0.58
0.43	1.79891804	1.91841027	1.38508557	1.31451058	0.57
0.44	1.80632756	1.90854702	1.38025877	1.31978756	0.56
0.45	1.81388394	1.89892491	1.37540197	1.32502450	0.55
0.46	1.82159273	1.88953308	1.37051451	1.33022245	0.54
0.47	1.82945980	1.88036136	1.36559569	1.33538243	0.53
0.48	1.83749136	1.87140024	1.36064481	1.34050539	0.52
0.49	1.84569400	1.86264080	1.35566114	1.34559225	0.51
0.50	1.85407468	1.85407468	1.35064388	1.35064388	0.50
k^2	K	K'	E	E'	k'^2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Incomplete Elliptic Integral of the First Kind

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.00	0.00000000	0.52359878	0.78539816	1.04719755	1.57079633
0.01	0.00000000	0.52360104	0.78540530	1.04721291	1.57083560
0.02	0.00000000	0.52360783	0.78542671	1.04725898	1.57095344
0.03	0.00000000	0.52361916	0.78546239	1.04733579	1.57114994
0.04	0.00000000	0.52363502	0.78551237	1.04744337	1.57142521
0.05	0.00000000	0.52365541	0.78557664	1.04758177	1.57177946
0.06	0.00000000	0.52368034	0.78565524	1.04775104	1.57221291
0.07	0.00000000	0.52370981	0.78574818	1.04795127	1.57272587
0.08	0.00000000	0.52374382	0.78585549	1.04818254	1.57331869
0.09	0.00000000	0.52378238	0.78597719	1.04844496	1.57399176
0.10	0.00000000	0.52382550	0.78611333	1.04873863	1.57474556
0.11	0.00000000	0.52387318	0.78626395	1.04906369	1.57558060
0.12	0.00000000	0.52392542	0.78642907	1.04942029	1.57649746
0.13	0.00000000	0.52398224	0.78660876	1.04980858	1.57749678
0.14	0.00000000	0.52404365	0.78680307	1.05022874	1.57857926
0.15	0.00000000	0.52410964	0.78701204	1.05068095	1.57974566
0.16	0.00000000	0.52418023	0.78723574	1.05116543	1.58099681
0.17	0.00000000	0.52425543	0.78747423	1.05168239	1.58233361
0.18	0.00000000	0.52433525	0.78772759	1.05223206	1.58375701
0.19	0.00000000	0.52441971	0.78799588	1.05281470	1.58526806
0.20	0.00000000	0.52450881	0.78827919	1.05343059	1.58686785
0.21	0.00000000	0.52460256	0.78857759	1.05408000	1.58855757
0.22	0.00000000	0.52470098	0.78889118	1.05476323	1.59033848
0.23	0.00000000	0.52480408	0.78922004	1.05548063	1.59221193
0.24	0.00000000	0.52491188	0.78956428	1.05623251	1.59417934
0.25	0.00000000	0.52502440	0.78992400	1.05701924	1.59624222

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.26	0.00000000	0.52514164	0.79029930	1.05784121	1.59840220
0.27	0.00000000	0.52526362	0.79069030	1.05869881	1.60066096
0.28	0.00000000	0.52539037	0.79109711	1.05959246	1.60302033
0.29	0.00000000	0.52552190	0.79151987	1.06052260	1.60548221
0.30	0.00000000	0.52565823	0.79195869	1.06148971	1.60804862
0.31	0.00000000	0.52579938	0.79241372	1.06249426	1.61072171
0.32	0.00000000	0.52594536	0.79288509	1.06353677	1.61350374
0.33	0.00000000	0.52609621	0.79337296	1.06461778	1.61639711
0.34	0.00000000	0.52625194	0.79387748	1.06573785	1.61940434
0.35	0.00000000	0.52641257	0.79439880	1.06689757	1.62252810
0.36	0.00000000	0.52657813	0.79493709	1.06809756	1.62577124
0.37	0.00000000	0.52674865	0.79549253	1.06933847	1.62913673
0.38	0.00000000	0.52692414	0.79606530	1.07062097	1.63262773
0.39	0.00000000	0.52710463	0.79665558	1.07194577	1.63624760
0.40	0.00000000	0.52729016	0.79726357	1.07331363	1.63999987
0.41	0.00000000	0.52748074	0.79788948	1.07472531	1.64388827
0.42	0.00000000	0.52767641	0.79853350	1.07618164	1.64791679
0.43	0.00000000	0.52787720	0.79919586	1.07768346	1.65208961
0.44	0.00000000	0.52808313	0.79987679	1.07923167	1.65641118
0.45	0.00000000	0.52829425	0.80057653	1.08082720	1.66088624
0.46	0.00000000	0.52851057	0.80129531	1.08247103	1.66551978
0.47	0.00000000	0.52873213	0.80203338	1.08416420	1.67031713
0.48	0.00000000	0.52895897	0.80279103	1.08590776	1.67528393
0.49	0.00000000	0.52919113	0.80356850	1.08770286	1.68042621
0.50	0.00000000	0.52942863	0.80436610	1.08955067	1.68575035
0.51	0.00000000	0.52967151	0.80518411	1.09145243	1.69126319
0.52	0.00000000	0.52991983	0.80602284	1.09340943	1.69697199

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.53	0.00000000	0.53017360	0.80688261	1.09542305	1.70288451
0.54	0.00000000	0.53043288	0.80776374	1.09749471	1.70900905
0.55	0.00000000	0.53069770	0.80866657	1.09962591	1.71535450
0.56	0.00000000	0.53096811	0.80959147	1.10181824	1.72193035
0.57	0.00000000	0.53124415	0.81053879	1.10407335	1.72874682
0.58	0.00000000	0.53152587	0.81150892	1.10639299	1.73581488
0.59	0.00000000	0.53181331	0.81250226	1.10877900	1.74314630
0.60	0.00000000	0.53210653	0.81351921	1.11123332	1.75075380
0.61	0.00000000	0.53240556	0.81456021	1.11375799	1.75865110
0.62	0.00000000	0.53271046	0.81562569	1.11635516	1.76685302
0.63	0.00000000	0.53302128	0.81671613	1.11902711	1.77537562
0.64	0.00000000	0.53333807	0.81783199	1.12177623	1.78423633
0.65	0.00000000	0.53366089	0.81897379	1.12460506	1.79345410
0.66	0.00000000	0.53398979	0.82014203	1.12751629	1.80304960
0.67	0.00000000	0.53432484	0.82133726	1.13051277	1.81304538
0.68	0.00000000	0.53466608	0.82256005	1.13359750	1.82346616
0.69	0.00000000	0.53501358	0.82381096	1.13677370	1.83433908
0.70	0.00000000	0.53536740	0.82509063	1.14004475	1.84569400
0.71	0.00000000	0.53572761	0.82639967	1.14341428	1.85756392
0.72	0.00000000	0.53609426	0.82773875	1.14688613	1.86998540
0.73	0.00000000	0.53646743	0.82910857	1.15046442	1.88299907
0.74	0.00000000	0.53684719	0.83050983	1.15415351	1.89665026
0.75	0.00000000	0.53723359	0.83194330	1.15795809	1.91098978
0.76	0.00000000	0.53762673	0.83340975	1.16188319	1.92607476
0.77	0.00000000	0.53802666	0.83491000	1.16593416	1.94196977
0.78	0.00000000	0.53843348	0.83644492	1.17011678	1.95874818
0.79	0.00000000	0.53884724	0.83801539	1.17443727	1.97649377
0.80	0.00000000	0.53926804	0.83962235	1.17890230	1.99530278

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.81	0.00000000	0.53969596	0.84126678	1.18351910	2.01528653
0.82	0.00000000	0.54013108	0.84294971	1.18829548	2.03657467
0.83	0.00000000	0.54057349	0.84467221	1.19323992	2.05931942
0.84	0.00000000	0.54102328	0.84643542	1.19836159	2.08370112
0.85	0.00000000	0.54148053	0.84824052	1.20367053	2.10993547
0.86	0.00000000	0.54194535	0.85008875	1.20917768	2.13828344
0.87	0.00000000	0.54241782	0.85198142	1.21489500	2.16906478
0.88	0.00000000	0.54289806	0.85391990	1.22083564	2.20267697
0.89	0.00000000	0.54338615	0.85590565	1.22701408	2.23962247
0.90	0.00000000	0.54388221	0.85794020	1.23344633	2.28054914
0.91	0.00000000	0.54438635	0.86002514	1.24015011	2.32631189
0.92	0.00000000	0.54489866	0.86216219	1.24714518	2.37807118
0.93	0.00000000	0.54541928	0.86435313	1.25445362	2.43745756
0.94	0.00000000	0.54594831	0.86659987	1.26210023	2.50686451
0.95	0.00000000	0.54648587	0.86890441	1.27011297	2.59001123
0.96	0.00000000	0.54703209	0.87126889	1.27852361	2.69314296
0.97	0.00000000	0.54758709	0.87369557	1.28736838	2.82799535
0.98	0.00000000	0.54815101	0.87618684	1.29668890	3.02098045
0.99	0.00000000	0.54872398	0.87874528	1.30653334	3.35660052
1.00	0.00000000	0.54930614	0.88137359	1.31695790	∞

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Incomplete Elliptic Integral of the Second Kind

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.00	0.00000000	0.52359878	0.78539816	1.04719755	1.57079633
0.01	0.00000000	0.52359651	0.78539103	1.04718220	1.57075706
0.02	0.00000000	0.52358972	0.78536962	1.04713613	1.57063924
0.03	0.00000000	0.52357839	0.78533394	1.04705934	1.57044284
0.04	0.00000000	0.52356254	0.78528399	1.04695183	1.57016782
0.05	0.00000000	0.52354215	0.78521975	1.04681357	1.56981412
0.06	0.00000000	0.52351724	0.78514123	1.04664454	1.56938165
0.07	0.00000000	0.52348779	0.78504842	1.04644473	1.56887033
0.08	0.00000000	0.52345380	0.78494130	1.04621409	.1.56828003
0.09	0.00000000	0.52341528	0.78481987	1.04595260	1.56761062
0.10	0.00000000	0.52337222	0.78468411	1.04566022	1.56686194
0.11	0.00000000	0.52332463	0.78453402	1.04533690	1.56603383
0.12	0.00000000	0.52327249	0.78436957	1.04498260	1.56512610
0.13	0.00000000	0.52321580	0.78419076	1.04459727	1.56413853
0.14	0.00000000	0.52315457	0.78399757	1.04418084	1.56307091
0.15	0.00000000	0.52308879	0.78378997	1.04373326	1.56192297
0.16	0.00000000	0.52301846	0.78356795	1.04325446	1.56069445
0.17	0.00000000	0.52294357	0.78333149	1.04274437	1.55938507
0.18	0.00000000	0.52286412	0.78308056	1.04220291	1.55799452
0.19	0.00000000	0.52278011	0.78281514	1.04162999	1.55652246
0.20	0.00000000	0.52269153	0.78253521	1.04102554	1.55496855
0.21	0.00000000	0.52259838	0.78224074	1.04038945	1.55333240
0.22	0.00000000	0.52250065	0.78193169	1.03972164	1.55161363
0.23	0.00000000	0.52239835	0.78160805	1.03902200	1.54981182
0.24	0.00000000	0.52229146	0.78126977	1.03829042	1.54792651
0.25	0.00000000	0.52217998	0.78091682	1.03752679	1.54595726

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.26	0.00000000	0.52206390	0.78054918	1.03673098	1.54390355
0.27	0.00000000	0.52194323	0.78016680	1.03590288	1.54176488
0.28	0.00000000	0.52181794	0.77976965	1.03504235	1.53954069
0.29	0.00000000	0.52168805	0.77935769	1.03414926	1.53723042
0.30	0.00000000	0.52155354	0.77893087	1.03322345	1.53483346
0.31	0.00000000	0.52141440	0.77848915	1.03226479	1.53234919
0.32	0.00000000	0.52127064	0.77803249	1.03127311	1.52977695
0.33	0.00000000	0.52112223	0.77756085	1.03024825	1.52711603
0.34	0.00000000	0.52096918	0.77707416	1.02919005	1.52436573
0.35	0.00000000	0.52081148	0.77657240	1.02809832	1.52152527
0.36	0.00000000	0.52064911	0.77605550	1.02697289	1.51859387
0.37	0.00000000	0.52048208	0.77552340	1.02581355	1.51557069
0.38	0.00000000	0.52031038	0.77497606	1.02462012	1.51245486
0.39	0.00000000	0.52013399	0.77441342	1.02339239	1.50924549
0.40	0.00000000	0.51995291	0.77383542	1.02213013	1.50594161
0.41	0.00000000	0.51976712	0.77324200	1.02083314	1.50254224
0.42	0.00000000	0.51957663	0.77263308	1.01950117	1.49904633
0.43	0.00000000	0.51938142	0.77200862	1.01813399	1.49545280
0.44	0.00000000	0.51918147	0.77136854	1.01673134	1.49176051
0.45	0.00000000	0.51897679	0.77071277	1.01529297	1.48796827
0.46	0.00000000	0.51876736	0.77004124	1.01381862	1.48407484
0.47	0.00000000	0.51855317	0.76935387	1.01230799	1.48007892
0.48	0.00000000	0.51833421	0.76865059	1.01076081	1.47597913
0.49	0.00000000	0.51811047	0.76793132	1.00917677	1.47177406
0.50	0.00000000	0.51788193	0.76719599	1.00755556	1.46746221
0.51	0.00000000	0.51764860	0.76644449	1.00589685	1.46304200
0.52	0.00000000	0.51741044	0.76567676	1.00420032	1.45851180
0.53	0.00000000	0.51716746	0.76489269	1.00246561	1.45386987

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.54	0.00000000	0.51691964	0.76409220	1.00069237	1.44911440
0.55	0.00000000	0.51666697	0.76327519	0.99888021	1.44424349
0.56	0.00000000	0.51640943	0.76244157	0.99702876	1.43925513
0.57	0.00000000	0.51614701	0.76159123	0.99513760	1.43414722
0.58	0.00000000	0.51587970	0.76072408	0.99320631	1.42891755
0.59	0.00000000	0.51560748	0.75984000	0.99123446	1.42356376
0.60	0.00000000	0.51533035	0.75893888	0.98922159	1.41808339
0.61	0.00000000	0.51504827	0.75802061	0.98716724	1.41247385
0.62	0.00000000	0.51476125	0.75708508	0.98507091	1.40673238
0.63	0.00000000	0.51446926	0.75613217	0.98293209	1.40085606
0.64	0.00000000	0.51417229	0.75516174	0.98075025	1.39484181
0.65	0.00000000	0.51387032	0.75417368	0.97852484	1.38868636
0.66	0.00000000	0.51356334	0.75316785	0.97625528	1.38238622
0.67	0.00000000	0.51325134	0.75214411	0.97394097	1.37593771
0.68	0.00000000	0.51293428	0.75110233	0.97158128	1.36933688
0.69	0.00000000	0.51261216	0.75004236	0.96917556	1.36257952
0.70	0.00000000	0.51228496	0.74896406	0.96672313	1.35566114
0.71	0.00000000	0.51195265	0.74786727	0.96422328	1.34857692
0.72	0.00000000	0.51161523	0.74675183	0.96167524	1.34132169
0.73	0.00000000	0.51127268	0.74561758	0.95907826	1.33388989
0.74	0.00000000	0.51092496	0.74446435	0.95643151	1.32627552
0.75	0.00000000	0.51057207	0.74329196	0.95373413	1.31847211
0.76	0.00000000	0.51021398	0.74210025	0.95098523	1.31047261
0.77	0.00000000	0.50985067	0.74088902	0.94818386	1.30226939
0.78	0.00000000	0.50948213	0.73965808	0.94532904	1.29385411
0.79	0.00000000	0.50910832	0.73840724	0.94241972	1.28521764
0.80	0.00000000	0.50872924	0.73713629	0.93945480	1.27634994
0.81	0.00000000	0.50834485	0.73584502	0.93643314	1.26723994

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

k	ϕ				
	0°	30°	45°	60°	90°
0.82	0.00000000	0.50795513	0.73453321	0.93335350	1.25787534
0.83	0.00000000	0.50756006	0.73320063	0.93021460	1.24824245
0.84	0.00000000	0.50715961	0.73184707	0.92701507	1.23832589
0.85	0.00000000	0.50675377	0.73047226	0.92375347	1.22810831
0.86	0.00000000	0.50634251	0.72907596	0.92042826	1.21756999
0.87	0.00000000	0.50592579	0.72765792	0.91703780	1.20668828
0.88	0.00000000	0.50550360	0.72621786	0.91358037	1.19543698
0.89	0.00000000	0.50507591	0.72475551	0.91005409	1.18378537
0.90	0.00000000	0.50464269	0.72327057	0.90645699	1.17169705
0.91	0.00000000	0.50420391	0.72176275	0.90278693	1.15912812
0.92	0.00000000	0.50375955	0.72023173	0.89904162	1.14602471
0.93	0.00000000	0.50330957	0.71867719	0.89521860	1.13231915
0.94	0.00000000	0.50285395	0.71709880	0.89131521	1.11792393
0.95	0.00000000	0.50239266	0.71549620	0.88732856	1.10272165
0.96	0.00000000	0.50192566	0.71386903	0.88325550	1.08654646
0.97	0.00000000	0.50145293	0.71221690	0.87909261	1.06914647
0.98	0.00000000	0.50097443	0.71053943	0.87483613	1.05009226
0.99	0.00000000	0.50049013	0.70883620	0.87048192	1.02847581
1.00	0.00000000	0.50000000	0.70710678	0.86602540	1.00000000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Incomplete Elliptic Integral of the Third Kind

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.00	0.52359878	0.52819841	0.53294401	0.53784398
0.01	0.52382550	0.52842866	0.53317791	0.53808168
0.02	0.52405275	0.52865944	0.53341235	0.53831992
0.03	0.52428051	0.52889074	0.53364733	0.53855872
0.04	0.52450881	0.52912259	0.53388286	0.53879807
0.05	0.52473763	0.52935497	0.53411893	0.53903798
0.06	0.52496698	0.52958789	0.53435555	0.53927845
0.07	0.52519686	0.52982135	0.53459273	0.53951949
0.08	0.52542727	0.53005536	0.53483046	0.53976109
0.09	0.52565823	0.53028991	0.53506875	0.54000325
0.10	0.52588972	0.53052501	0.53530760	0.54024599
0.11	0.52612176	0.53076067	0.53554701	0.54048930
0.12	0.52635434	0.53099688	0.53578699	0.54073319
0.13	0.52658747	0.53123364	0.53602753	0.54097766
0.14	0.52682114	0.53147097	0.53626864	0.54122271
0.15	0.52705537	0.53170886	0.53651033	0.54146834
0.16	0.52729016	0.53194732	0.53675260	0.54171456
0.17	0.52752550	0.53218634	0.53699544	0.54196137
0.18	0.52776140	0.53242593	0.53723886	0.54220877
0.19	0.52799787	0.53266610	0.53748287	0.54245677
0.20	0.52823490	0.53290684	0.53772746	0.54270536
0.21	0.52847250	0.53314816	0.53797265	0.54295456
0.22	0.52871067	0.53339006	0.53821842	0.54320436
0.23	0.52894941	0.53363255	0.53846479	0.54345476
0.24	0.52918873	0.53387562	0.53871176	0.54370578
0.25	0.52942863	0.53411929	0.53895933	0.54395741
0.26	0.52966911	0.53436354	0.53920751	0.54420965

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ในเชิงพาณิชย์ หรือในการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.27	0.52991017	0.53460839	0.53945629	0.54446251
0.28	0.53015182	0.53485384	0.53970568	0.54471600
0.29	0.53039406	0.53509989	0.53995568	0.54497011
0.30	0.53063690	0.53534655	0.54020630	0.54522484
0.31	0.53088033	0.53559381	0.54045754	0.54548021
0.32	0.53112436	0.53584168	0.54070939	0.54573621
0.33	0.53136899	0.53609016	0.54096188	0.54599285
0.34	0.53161423	0.53633926	0.54121499	0.54625012
0.35	0.53186007	0.53658898	0.54146873	0.54650805
0.36	0.53210653	0.53683932	0.54172311	0.54676661
0.37	0.53235359	0.53709029	0.54197812	0.54702583
0.38	0.53260128	0.53734189	0.54223377	0.54728570
0.39	0.53284958	0.53759411	0.54249007	0.54754622
0.40	0.53309851	0.53784697	0.54274701	0.54780740
0.41	0.53334806	0.53810047	0.54300460	0.54806925
0.42	0.53359825	0.53835461	0.54326285	0.54833176
0.43	0.53384906	0.53860939	0.54352175	0.54859494
0.44	0.53410051	0.53886482	0.54378131	0.54885880
0.45	0.53435260	0.53912090	0.54404154	0.54912333
0.46	0.53460533	0.53937764	0.54430243	0.54938854
0.47	0.53485870	0.53963503	0.54456399	0.54965443
0.48	0.53511273	0.53989308	0.54482622	0.54992101
0.49	0.53536740	0.54015180	0.54508913	0.55018827
0.50	0.53562273	0.54041118	0.54535272	0.55045623
0.51	0.53587872	0.54067123	0.54561699	0.55072489
0.52	0.53613537	0.54093196	0.54588195	0.55099425
0.53	0.53639269	0.54119337	0.54614761	0.55126431
0.54	0.53665067	0.54145545	0.54641395	0.55153508

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.55	0.53690932	0.54171822	0.54668099	0.55180657
0.56	0.53716866	0.54198168	0.54694874	0.55207876
0.57	0.53742867	0.54224583	0.54721719	0.55235168
0.58	0.53768936	0.54251068	0.54748635	0.55262532
0.59	0.53795074	0.54277622	0.54775622	0.55289968
0.60	0.53821280	0.54304247	0.54802680	0.55317478
0.61	0.53847556	0.54330942	0.54829811	0.55345061
0.62	0.53873902	0.54357709	0.54857014	0.55372717
0.63	0.53900318	0.54384546	0.54884290	0.55400448
0.64	0.53926804	0.54411456	0.54911639	0.55428254
0.65	0.53953361	0.54438438	0.54939061	0.55456134
0.66	0.53979990	0.54465492	0.54966557	0.55484090
0.67	0.54006690	0.54492619	0.54994128	0.55512122
0.68	0.54033461	0.54519819	0.55021773	0.55540229
0.69	0.54060305	0.54547093	0.55049494	0.55568414
0.70	0.54087222	0.54574442	0.55077290	0.55596675
0.71	0.54114212	0.54601864	0.55105162	0.55625014
0.72	0.54141276	0.54629362	0.55133110	0.55653431
0.73	0.54168413	0.54656935	0.55161135	0.55681926
0.74	0.54195625	0.54684583	0.55189238	0.55710500
0.75	0.54222911	0.54712308	0.55217418	0.55739153
0.76	0.54250272	0.54740109	0.55245676	0.55767885
0.77	0.54277710	0.54767988	0.55274012	0.55796698
0.78	0.54305222	0.54795943	0.55302427	0.55825591
0.79	0.54332812	0.54823977	0.55330922	0.55854565
0.80	0.54360478	0.54852088	0.55359496	0.55883620
0.81	0.54388221	0.54880279	0.55388151	0.55912757
0.82	0.54416042	0.54908548	0.55416886	0.55941977

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.83	0.54443942	0.54936898	0.55445703	0.55971279
0.84	0.54471919	0.54965327	0.55474601	0.56000664
0.85	0.54499976	0.54993836	0.55503581	0.56030133
0.86	0.54528112	0.55022427	0.55532643	0.56059686
0.87	0.54556328	0.55051099	0.55561789	0.56089324
0.88	0.54584624	0.55079853	0.55591018	0.56119047
0.89	0.54613001	0.55108689	0.55620331	0.56148855
0.90	0.54641459	0.55137608	0.55649728	0.56178750
0.91	0.54669999	0.55166610	0.55679210	0.56208731
0.92	0.54698621	0.55195696	0.55708778	0.56238799
0.93	0.54727326	0.55224866	0.55738431	0.56268955
0.94	0.54756114	0.55254121	0.55768171	0.56299199
0.95	0.54784986	0.55283461	0.55797998	0.56329532
0.96	0.54813941	0.55312887	0.55827912	0.56359953
0.97	0.54842981	0.55342399	0.55857914	0.56390465
0.98	0.54872107	0.55371998	0.55888004	0.56421066
0.99	0.54901318	0.55401683	0.55918184	0.56451758
1.00	0.54930614	0.55431457	0.55948452	0.56482542

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.00	0.54290749	0.54814449	0.55356584	0.55918341
0.01	0.54314913	0.54839023	0.55381586	0.55943789
0.02	0.54339133	0.54863655	0.55406646	0.55969296
0.03	0.54363409	0.54888344	0.55431765	0.55994863
0.04	0.54387742	0.54913091	0.55456942	0.56020490
0.05	0.54412132	0.54937895	0.55482179	0.56046177
0.06	0.54436579	0.54962758	0.55507476	0.56071926
0.07	0.54461084	0.54987680	0.55532832	0.56097735
0.08	0.54485646	0.55012660	0.55558248	0.56123606
0.09	0.54510266	0.55037700	0.55583725	0.56149538
0.10	0.54534944	0.55062799	0.55609262	0.56175532
0.11	0.54559680	0.55087958	0.55634860	0.56201589
0.12	0.54584476	0.55113176	0.55660519	0.56227708
0.13	0.54609330	0.55138455	0.55686240	0.56253889
0.14	0.54634244	0.55163794	0.55712023	0.56280134
0.15	0.54659217	0.55189194	0.55737867	0.56306442
0.16	0.54684250	0.55214655	0.55763774	0.56332814
0.17	0.54709344	0.55240178	0.55789743	0.56359249
0.18	0.54734497	0.55265762	0.55815776	0.56385749
0.19	0.54759712	0.55291408	0.55841872	0.56412314
0.20	0.54784987	0.55317116	0.55868031	0.56438943
0.21	0.54810324	0.55342887	0.55894254	0.56465638
0.22	0.54835722	0.55368721	0.55920541	0.56492398
0.23	0.54861182	0.55394617	0.55946893	0.56519224
0.24	0.54886705	0.55420578	0.55973309	0.56546116
0.25	0.54912290	0.55446601	0.55999790	0.56573075
0.26	0.54937937	0.55472690	0.56026337	0.56600100

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.27	0.54963648	0.55498842	0.56052950	0.56627192
0.28	0.54989422	0.55525059	0.56079628	0.56654352
0.29	0.55015260	0.55551341	0.56106373	0.56681580
0.30	0.55041162	0.55577688	0.56133185	0.56708876
0.31	0.55067128	0.55604101	0.56160063	0.56736240
0.32	0.55093158	0.55630580	0.56187009	0.56763673
0.33	0.55119254	0.55657125	0.56214023	0.56791175
0.34	0.55145415	0.55683737	0.56241104	0.56818746
0.35	0.55171641	0.55710416	0.56268254	0.56846388
0.36	0.55197934	0.55737162	0.56295473	0.56874099
0.37	0.55224292	0.55763975	0.56322760	0.56901881
0.38	0.55250718	0.55790857	0.56350117	0.56929734
0.39	0.55277210	0.55817807	0.56377544	0.56957658
0.40	0.55303769	0.55844825	0.56405040	0.56985653
0.41	0.55330396	0.55871912	0.56432607	0.57013720
0.42	0.55357091	0.55899069	0.56460245	0.57041860
0.43	0.55383854	0.55926295	0.56487954	0.57070073
0.44	0.55410686	0.55953592	0.56515734	0.57098358
0.45	0.55437586	0.55980958	0.56543587	0.57126717
0.46	0.55464556	0.56008396	0.56571511	0.57155149
0.47	0.55491596	0.56035904	0.56599508	0.57183656
0.48	0.55518705	0.56063484	0.56627578	0.57212237
0.49	0.55545885	0.56091136	0.56655721	0.57240893
0.50	0.55573136	0.56118859	0.56683938	0.57269624
0.51	0.55600458	0.56146656	0.56712229	0.57298431
0.52	0.55627851	0.56174525	0.56740595	0.57327314
0.53	0.55655316	0.56202468	0.56769035	0.57356274
0.54	0.55682853	0.56230484	0.56797551	0.57385310

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.55	0.55710463	0.56258575	0.56826142	0.57414424
0.56	0.55738146	0.56286739	0.56854809	0.57443615
0.57	0.55765902	0.56314979	0.56883553	0.57472885
0.58	0.55793732	0.56343294	0.56912373	0.57502233
0.59	0.55821636	0.56371685	0.56941271	0.57531660
0.60	0.55849614	0.56400151	0.56970246	0.57561166
0.61	0.55877668	0.56428694	0.56999300	0.57590752
0.62	0.55905796	0.56457314	0.57028432	0.57620418
0.63	0.55934001	0.56486011	0.57057643	0.57650165
0.64	0.55962281	0.56514786	0.57086933	0.57679992
0.65	0.55990638	0.56543639	0.57116302	0.57709901
0.66	0.56019072	0.56572570	0.57145752	0.57739893
0.67	0.56047583	0.56601581	0.57175283	0.57769966
0.68	0.56076171	0.56630670	0.57204895	0.57800122
0.69	0.56104838	0.56659840	0.57234588	0.57830362
0.70	0.56133584	0.56689089	0.57264363	0.57860685
0.71	0.56162409	0.56718420	0.57294220	0.57891092
0.72	0.56191313	0.56747831	0.57324160	0.57921584
0.73	0.56220297	0.56777324	0.57354184	0.57952161
0.74	0.56249361	0.56806899	0.57384291	0.57982824
0.75	0.56278506	0.56836556	0.57414482	0.58013573
0.76	0.56307732	0.56866296	0.57444758	0.58044408
0.77	0.56337040	0.56896120	0.57475119	0.58075330
0.78	0.56366430	0.56926027	0.57505566	0.58106339
0.79	0.56395902	0.56956019	0.57536099	0.58137437
0.80	0.56425458	0.56986095	0.57566718	0.58168623
0.81	0.56455097	0.57016257	0.57597425	0.58199898
0.82	0.56484820	0.57046504	0.57628219	0.58231262

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.83	0.56514627	0.57076838	0.57659101	0.58262717
0.84	0.56544519	0.57107258	0.57690071	0.58294261
0.85	0.56574497	0.57137765	0.57721131	0.58325897
0.86	0.56604560	0.57168360	0.57752280	0.58357625
0.87	0.56634710	0.57199043	0.57783519	0.58389444
0.88	0.56664947	0.57229815	0.57814849	0.58421356
0.89	0.56695271	0.57260676	0.57846269	0.58453361
0.90	0.56725683	0.57291627	0.57877782	0.58485459
0.91	0.56756183	0.57322668	0.57909386	0.58517652
0.92	0.56786772	0.57353800	0.57941083	0.58549940
0.93	0.56817451	0.57385022	0.57972874	0.58582323
0.94	0.56848219	0.57416337	0.58004758	0.58614801
0.95	0.56879078	0.57447744	0.58036737	0.58647376
0.96	0.56910028	0.57479244	0.58068810	0.58680048
0.97	0.56941069	0.57510837	0.58100979	0.58712818
0.98	0.56972203	0.57542525	0.58133244	0.58745685
0.99	0.57003429	0.57574306	0.58165605	0.58778651
1.00	0.57034748	0.57606183	0.58198063	0.58811717

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.00	0.56501023	0.57106059	0.57735027
0.01	0.56526935	0.57132458	0.57761934
0.02	0.56552909	0.57158919	0.57788906
0.03	0.56578943	0.57185442	0.57815941
0.04	0.56605040	0.57212029	0.57843041
0.05	0.56631198	0.57238678	0.57870205
0.06	0.56657418	0.57265392	0.57897434
0.07	0.56683700	0.57292168	0.57924728
0.08	0.56710045	0.57319009	0.57952088
0.09	0.56736453	0.57345915	0.57979514
0.10	0.56762925	0.57372885	0.58007006
0.11	0.56789460	0.57399920	0.58034564
0.12	0.56816058	0.57427020	0.58062189
0.13	0.56842721	0.57454186	0.58089881
0.14	0.56869448	0.57481417	0.58117641
0.15	0.56896240	0.57508715	0.58145468
0.16	0.56923097	0.57536079	0.58173363
0.17	0.56950020	0.57563511	0.58201327
0.18	0.56977008	0.57591009	0.58229359
0.19	0.57004062	0.57618575	0.58257461
0.20	0.57031182	0.57646208	0.58285631
0.21	0.57058369	0.57673910	0.58313872
0.22	0.57085623	0.57701680	0.58342182
0.23	0.57112944	0.57729519	0.58370563
0.24	0.57140333	0.57757427	0.58399015
0.25	0.57167790	0.57785405	0.58427537
0.26	0.57195315	0.57813452	0.58456131

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.27	0.57222908	0.57841569	0.58484797
0.28	0.57250571	0.57869757	0.58513535
0.29	0.57278303	0.57898016	0.58542345
0.30	0.57306104	0.57926346	0.58571228
0.31	0.57333975	0.57954747	0.58600184
0.32	0.57361917	0.57983220	0.58629214
0.33	0.57389929	0.58011765	0.58658318
0.34	0.57418012	0.58040383	0.58687496
0.35	0.57446166	0.58069074	0.58716748
0.36	0.57474392	0.58097839	0.58746076
0.37	0.57502690	0.58126676	0.58775479
0.38	0.57531061	0.58155588	0.58804958
0.39	0.57559504	0.58184575	0.58834512
0.40	0.57588021	0.58213636	0.58864144
0.41	0.57616611	0.58242772	0.58893852
0.42	0.57645275	0.58271984	0.58923638
0.43	0.57674013	0.58301272	0.58953501
0.44	0.57702825	0.58330636	0.58983443
0.45	0.57731713	0.58360077	0.59013462
0.46	0.57760676	0.58389595	0.59043561
0.47	0.57789715	0.58419190	0.59073739
0.48	0.57818830	0.58448864	0.59103997
0.49	0.57848022	0.58478615	0.59134335
0.50	0.57877290	0.58508446	0.59164754
0.51	0.57906636	0.58538355	0.59195253
0.52	0.57936060	0.58568344	0.59225834
0.53	0.57965562	0.58598413	0.59256497
0.54	0.57995142	0.58628562	0.59287242

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.55	0.58024802	0.58658792	0.59318069
0.56	0.58054540	0.58689104	0.59348980
0.57	0.58084359	0.58719496	0.59379974
0.58	0.58114258	0.58749971	0.59411053
0.59	0.58144237	0.58780529	0.59442215
0.60	0.58174298	0.58811169	0.59473463
0.61	0.58204440	0.58841893	0.59504796
0.62	0.58234664	0.58872701	0.59536215
0.63	0.58264971	0.58903593	0.59567720
0.64	0.58295360	0.58934569	0.59599312
0.65	0.58325833	0.58965631	0.59630990
0.66	0.58356389	0.58996779	0.59662757
0.67	0.58387029	0.59028012	0.59694612
0.68	0.58417755	0.59059333	0.59726555
0.69	0.58448565	0.59090740	0.59758588
0.70	0.58479461	0.59122235	0.59790710
0.71	0.58510443	0.59153818	0.59822922
0.72	0.58541511	0.59185489	0.59855225
0.73	0.58572666	0.59217249	0.59887619
0.74	0.58603909	0.59249099	0.59920104
0.75	0.58635240	0.59281039	0.59952682
0.76	0.58666659	0.59313069	0.59985352
0.77	0.58698168	0.59345190	0.60018116
0.78	0.58729765	0.59377403	0.60050973
0.79	0.58761453	0.59409708	0.60083924
0.80	0.58793231	0.59442105	0.60116970
0.81	0.58825100	0.59474595	0.60150111
0.82	0.58857060	0.59507179	0.60183348

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{6},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.83	0.58889113	0.59539857	0.60216681
0.84	0.58921257	0.59572630	0.60250111
0.85	0.58953495	0.59605498	0.60283639
0.86	0.58985827	0.59638461	0.60317265
0.87	0.59018252	0.59671521	0.60350989
0.88	0.59050773	0.59704678	0.60384812
0.89	0.59083388	0.59737932	0.60418736
0.90	0.59116099	0.59771284	0.60452759
0.91	0.59148907	0.59804735	0.60486883
0.92	0.59181811	0.59838284	0.60521109
0.93	0.59214813	0.59871934	0.60555437
0.94	0.59247913	0.59905683	0.60589867
0.95	0.59281111	0.59939534	0.60624401
0.96	0.59314408	0.59973486	0.60659039
0.97	0.59347806	0.60007540	0.60693781
0.98	0.59381303	0.60041696	0.60728628
0.99	0.59414902	0.60075956	0.60763581
1.00	0.59448602	0.60110320	0.60798641

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.00	0.78539816	0.80013026	0.81586032	0.83271381
0.01	0.78611333	0.80086860	0.81662368	0.83350429
0.02	0.78683187	0.80161044	0.81739068	0.83429856
0.03	0.78755382	0.80235581	0.81816135	0.83509665
0.04	0.78827919	0.80310475	0.81893573	0.83589860
0.05	0.78900803	0.80385728	0.81971385	0.83670446
0.06	0.78974037	0.80461345	0.82049574	0.83751424
0.07	0.79047623	0.80537327	0.82128145	0.83832800
0.08	0.79121566	0.80613680	0.82207100	0.83914576
0.09	0.79195869	0.80690407	0.82286444	0.83996758
0.10	0.79270535	0.80767510	0.82366180	0.84079348
0.11	0.79345568	0.80844995	0.82446312	0.84162351
0.12	0.79420971	0.80922863	0.82526844	0.84245771
0.13	0.79496747	0.81001120	0.82607780	0.84329611
0.14	0.79572902	0.81079769	0.82689124	0.84413877
0.15	0.79649437	0.81158814	0.82770879	0.84498571
0.16	0.79726357	0.81238259	0.82853050	0.84583699
0.17	0.79803666	0.81318107	0.82935641	0.84669265
0.18	0.79881368	0.81398363	0.83018657	0.84755273
0.19	0.79959466	0.81479030	0.83102101	0.84841728
0.20	0.80037965	0.81560114	0.83185977	0.84928633
0.21	0.80116868	0.81641618	0.83270291	0.85015995
0.22	0.80196180	0.81723547	0.83355046	0.85103817
0.23	0.80275905	0.81805904	0.83440248	0.85192104
0.24	0.80356047	0.81888694	0.83525901	0.85280861
0.25	0.80436610	0.81971923	0.83612009	0.85370093
0.26	0.80517599	0.82055593	0.83698577	0.85459805

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.27	0.80599018	0.82139711	0.83785610	0.85550002
0.28	0.80680872	0.82224280	0.83873114	0.85640689
0.29	0.80763166	0.82309305	0.83961092	0.85731871
0.30	0.80845903	0.82394792	0.84049550	0.85823554
0.31	0.80929089	0.82480745	0.84138494	0.85915742
0.32	0.81012729	0.82567169	0.84227928	0.86008443
0.33	0.81096826	0.82654070	0.84317858	0.86101660
0.34	0.81181388	0.82741452	0.84408289	0.86195400
0.35	0.81266418	0.82829320	0.84499227	0.86289668
0.36	0.81351921	0.82917681	0.84590677	0.86384471
0.37	0.81437903	0.83006540	0.84682645	0.86479814
0.38	0.81524369	0.83095901	0.84775136	0.86575703
0.39	0.81611325	0.83185771	0.84868158	0.86672145
0.40	0.81698776	0.83276156	0.84961715	0.86769145
0.41	0.81786727	0.83367061	0.85055813	0.86866711
0.42	0.81875185	0.83458492	0.85150460	0.86964848
0.43	0.81964154	0.83550455	0.85245660	0.87063563
0.44	0.82053642	0.83642957	0.85341422	0.87162863
0.45	0.82143654	0.83736003	0.85437750	0.87262755
0.46	0.82234195	0.83829601	0.85534652	0.87363246
0.47	0.82325273	0.83923755	0.85632135	0.87464342
0.48	0.82416893	0.84018474	0.85730204	0.87566051
0.49	0.82509063	0.84113763	0.85828869	0.87668380
0.50	0.82601788	0.84209630	0.85928135	0.87771337
0.51	0.82695075	0.84306082	0.86028009	0.87874930
0.52	0.82788931	0.84403125	0.86128500	0.87979165
0.53	0.82883363	0.84500767	0.86229614	0.88084051
0.54	0.82978378	0.84599015	0.86331360	0.88189597

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.55	0.83073982	0.84697876	0.86433745	0.88295809
0.56	0.83170185	0.84797359	0.86536777	0.88402697
0.57	0.83266992	0.84897470	0.86640465	0.88510269
0.58	0.83364412	0.84998219	0.86744816	0.88618534
0.59	0.83462452	0.85099613	0.86849838	0.88727500
0.60	0.83561119	0.85201659	0.86955542	0.88837176
0.61	0.83660423	0.85304368	0.87061934	0.88947573
0.62	0.83760372	0.85407746	0.87169025	0.89058698
0.63	0.83860973	0.85511803	0.87276824	0.89170562
0.64	0.83962235	0.85616548	0.87385339	0.89283174
0.65	0.84064167	0.85721990	0.87494580	0.89396544
0.66	0.84166777	0.85828138	0.87604557	0.89510683
0.67	0.84270076	0.85935001	0.87715280	0.89625601
0.68	0.84374071	0.86042590	0.87826758	0.89741308
0.69	0.84478774	0.86150913	0.87939002	0.89857814
0.70	0.84584192	0.86259982	0.88052024	0.89975132
0.71	0.84690336	0.86369805	0.88165832	0.90093273
0.72	0.84797216	0.86480395	0.88280438	0.90212247
0.73	0.84904842	0.86591761	0.88395854	0.90332066
0.74	0.85013225	0.86703914	0.88512091	0.90452743
0.75	0.85122375	0.86816866	0.88629160	0.90574290
0.76	0.85232303	0.86930628	0.88747074	0.90696719
0.77	0.85343021	0.87045211	0.88865844	0.90820043
0.78	0.85454540	0.87160628	0.88985484	0.90944275
0.79	0.85566872	0.87276891	0.89106005	0.91069428
0.80	0.85680027	0.87394011	0.89227421	0.91195516
0.81	0.85794020	0.87512003	0.89349745	0.91322554
0.82	0.85908861	0.87630878	0.89472991	0.91450554

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.83	0.86024565	0.87750651	0.89597173	0.91579533
0.84	0.86141143	0.87871334	0.89722304	0.91709504
0.85	0.86258610	0.87992942	0.89848400	0.91840483
0.86	0.86376979	0.88115490	0.89975476	0.91972486
0.87	0.86496264	0.88238990	0.90103546	0.92105530
0.88	0.86616479	0.88363460	0.90232627	0.92239629
0.89	0.86737639	0.88488914	0.90362735	0.92374801
0.90	0.86859759	0.88615367	0.90493885	0.92511064
0.91	0.86982855	0.88742836	0.90626095	0.92648435
0.92	0.87106942	0.88871338	0.90759383	0.92786932
0.93	0.87232037	0.89000888	0.90893765	0.92926574
0.94	0.87358155	0.89131506	0.91029260	0.93067380
0.95	0.87485315	0.89263207	0.91165886	0.93209368
0.96	0.87613533	0.89396012	0.91303664	0.93352560
0.97	0.87742828	0.89529937	0.91442611	0.93496976
0.98	0.87873218	0.89665003	0.91582749	0.93642637
0.99	0.88004722	0.89801230	0.91724098	0.93789565
1.00	0.88137359	0.89938636	0.91866678	0.93937781

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.00	0.85084027	0.87041975	0.89167161	0.91486649
0.01	0.85166026	0.87127202	0.89255938	0.91579353
0.02	0.85248421	0.87212844	0.89345149	0.91672515
0.03	0.85331215	0.87298903	0.89434799	0.91766138
0.04	0.85414412	0.87385384	0.89524891	0.91860226
0.05	0.85498017	0.87472291	0.89615431	0.91954785
0.06	0.85582032	0.87559628	0.89706421	0.92049819
0.07	0.85666461	0.87647399	0.89797867	0.92145331
0.08	0.85751310	0.87735608	0.89889772	0.92241328
0.09	0.85836581	0.87824259	0.89982142	0.92337814
0.10	0.85922279	0.87913357	0.90074981	0.92434793
0.11	0.86008408	0.88002907	0.90168293	0.92532270
0.12	0.86094972	0.88092912	0.90262083	0.92630251
0.13	0.86181976	0.88183377	0.90356357	0.92728740
0.14	0.86269423	0.88274306	0.90451117	0.92827742
0.15	0.86357319	0.88365705	0.90546371	0.92927263
0.16	0.86445668	0.88457578	0.90642122	0.93027307
0.17	0.86534473	0.88549929	0.90738375	0.93127881
0.18	0.86623741	0.88642764	0.90835136	0.93228990
0.19	0.86713475	0.88736088	0.90932410	0.93330638
0.20	0.86803680	0.88829905	0.91030202	0.93432832
0.21	0.86894361	0.88924221	0.91128518	0.93535577
0.22	0.86985524	0.89019040	0.91227362	0.93638879
0.23	0.87077172	0.89114368	0.91326741	0.93742744
0.24	0.87169312	0.89210211	0.91426659	0.93847178
0.25	0.87261948	0.89306573	0.91527124	0.93952186
0.26	0.87355085	0.89403460	0.91628140	0.94057775

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.27	0.87448728	0.89500878	0.91729713	0.94163952
0.28	0.87542884	0.89598833	0.91831849	0.94270721
0.29	0.87637558	0.89697329	0.91934555	0.94378091
0.30	0.87732754	0.89796374	0.92037837	0.94486067
0.31	0.87828480	0.89895972	0.92141700	0.94594656
0.32	0.87924740	0.89996131	0.92246152	0.94703865
0.33	0.88021540	0.90096855	0.92351198	0.94813700
0.34	0.88118887	0.90198152	0.92456846	0.94924169
0.35	0.88216786	0.90300028	0.92563101	0.95035279
0.36	0.88315243	0.90402489	0.92669971	0.95147036
0.37	0.88414265	0.90505541	0.92777463	0.95259449
0.38	0.88513858	0.90609192	0.92885584	0.95372524
0.39	0.88614029	0.90713448	0.92994341	0.95486270
0.40	0.88714784	0.90818316	0.93103740	0.95600694
0.41	0.88816130	0.90923804	0.93213791	0.95715803
0.42	0.88918073	0.91029917	0.93324500	0.95831606
0.43	0.89020620	0.91136665	0.93435874	0.95948111
0.44	0.89123780	0.91244053	0.93547922	0.96065327
0.45	0.89227558	0.91352089	0.93660652	0.96183261
0.46	0.89331962	0.91460782	0.93774071	0.96301922
0.47	0.89436999	0.91570139	0.93888189	0.96421319
0.48	0.89542677	0.91680168	0.94003013	0.96541461
0.49	0.89649004	0.91790877	0.94118551	0.96662357
0.50	0.89755987	0.91902274	0.94234814	0.96784016
0.51	0.89863635	0.92014368	0.94351808	0.96906447
0.52	0.89971956	0.92127167	0.94469544	0.97029660
0.53	0.90080957	0.92240680	0.94588031	0.97153665
0.54	0.90190648	0.92354915	0.94707278	0.97278472

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.55	0.90301036	0.92469883	0.94827295	0.97404091
0.56	0.90412132	0.92585592	0.94948091	0.97530532
0.57	0.90523943	0.92702051	0.95069676	0.97657805
0.58	0.90636478	0.92819270	0.95192060	0.97785922
0.59	0.90749747	0.92937259	0.95315254	0.97914894
0.60	0.90863760	0.93056028	0.95439269	0.98044730
0.61	0.90978526	0.93175587	0.95564114	0.98175444
0.62	0.91094055	0.93295946	0.95689801	0.98307045
0.63	0.91210356	0.93417115	0.95816341	0.98439547
0.64	0.91327441	0.93539107	0.95943745	0.98572961
0.65	0.91445319	0.93661931	0.96072026	0.98707300
0.66	0.91564002	0.93785598	0.96201194	0.98842576
0.67	0.91683499	0.93910121	0.96331262	0.98978802
0.68	0.91803823	0.94035511	0.96462242	0.99115991
0.69	0.91924984	0.94161780	0.96594147	0.99254156
0.70	0.92046994	0.94288939	0.96726990	0.99393311
0.71	0.92169865	0.94417003	0.96860784	0.99533470
0.72	0.92293609	0.94545982	0.96995542	0.99674647
0.73	0.92418238	0.94675890	0.97131278	0.99816857
0.74	0.92543765	0.94806741	0.97268005	0.99960115
0.75	0.92670203	0.94938547	0.97405740	1.00104435
0.76	0.92797564	0.95071324	0.97544495	1.00249834
0.77	0.92925862	0.95205084	0.97684285	1.00396326
0.78	0.93055112	0.95339842	0.97825127	1.00543929
0.79	0.93185326	0.95475614	0.97967036	1.00692659
0.80	0.93316519	0.95612414	0.98110028	1.00842533
0.81	0.93448707	0.95750257	0.98254118	1.00993567
0.82	0.93581903	0.95889160	0.98399325	1.01145781

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.83	0.93716124	0.96029139	0.98545664	1.01299192
0.84	0.93851385	0.96170210	0.98693154	1.01453819
0.85	0.93987702	0.96312391	0.98841812	1.01609680
0.86	0.94125091	0.96455698	0.98991657	1.01766796
0.87	0.94263570	0.96600149	0.99142708	1.01925186
0.88	0.94403156	0.96745763	0.99294983	1.02084871
0.89	0.94543866	0.96892558	0.99448503	1.02245871
0.90	0.94685719	0.97040554	0.99603288	1.02408208
0.91	0.94828732	0.97189769	0.99759358	1.02571904
0.92	0.94972927	0.97340225	0.99916736	1.02736982
0.93	0.95118320	0.97491941	1.00075441	1.02903465
0.94	0.95264934	0.97644939	1.00235498	1.03071377
0.95	0.95412788	0.97799240	1.00396928	1.03240741
0.96	0.95561903	0.97954867	1.00559756	1.03411583
0.97	0.95712301	0.98111843	1.00724005	1.03583928
0.98	0.95864004	0.98270190	1.00889701	1.03757804
0.99	0.96017035	0.98429934	1.01056868	1.03933236
1.00	0.96171418	0.98591097	1.01225533	1.04110252

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.00	0.94034336	0.96853408	1.00000000
0.01	0.94131417	0.96955404	1.00107571
0.02	0.94228980	0.97057912	1.00215687
0.03	0.94327030	0.97160936	1.00324353
0.04	0.94425571	0.97264481	1.00433573
0.05	0.94524610	0.97368553	1.00543354
0.06	0.94624149	0.97473155	1.00653701
0.07	0.94724195	0.97578295	1.00764620
0.08	0.94824752	0.97683976	1.00876115
0.09	0.94925825	0.97790205	1.00988193
0.10	0.95027419	0.97896986	1.01100860
0.11	0.95129540	0.98004325	1.01214121
0.12	0.95232192	0.98112228	1.01327983
0.13	0.95335381	0.98220700	1.01442451
0.14	0.95439112	0.98329747	1.01557532
0.15	0.95543391	0.98439376	1.01673232
0.16	0.95648224	0.98549591	1.01789558
0.17	0.95753615	0.98660399	1.01906515
0.18	0.95859572	0.98771806	1.02024110
0.19	0.95966099	0.98883819	1.02142351
0.20	0.96073202	0.98996443	1.02261243
0.21	0.96180888	0.99109685	1.02380794
0.22	0.96289162	0.99223551	1.02501011
0.23	0.96398031	0.99338049	1.02621900
0.24	0.96507501	0.99453184	1.02743469
0.25	0.96617579	0.99568964	1.02865725
0.26	0.96728271	0.99685395	1.02988676

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.27	0.96839583	0.99802485	1.03112329
0.28	0.96951523	0.99920241	1.03236692
0.29	0.97064096	1.00038670	1.03361772
0.30	0.97177311	1.00157779	1.03487578
0.31	0.97291174	1.00277576	1.03614118
0.32	0.97405692	1.00398069	1.03741400
0.33	0.97520873	1.00519265	1.03869432
0.34	0.97636723	1.00641172	1.03998222
0.35	0.97753251	1.00763799	1.04127780
0.36	0.97870464	1.00887153	1.04258114
0.37	0.97988370	1.01011243	1.04389233
0.38	0.98106977	1.01136077	1.04521146
0.39	0.98226293	1.01261664	1.04653862
0.40	0.98346326	1.01388012	1.04787391
0.41	0.98467084	1.01515131	1.04921742
0.42	0.98588577	1.01643030	1.05056925
0.43	0.98710812	1.01771717	1.05192950
0.44	0.98833798	1.01901203	1.05329827
0.45	0.98957545	1.02031496	1.05467566
0.46	0.99082061	1.02162607	1.05606178
0.47	0.99207356	1.02294545	1.05745673
0.48	0.99333439	1.02427321	1.05886062
0.49	0.99460320	1.02560944	1.06027357
0.50	0.99588008	1.02695426	1.06169568
0.51	0.99716514	1.02830777	1.06312706
0.52	0.99845848	1.02967007	1.06456785
0.53	0.99976020	1.03104129	1.06601815
0.54	1.00107040	1.03242152	1.06747808

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.55	1.00238920	1.03381089	1.06894777
0.56	1.00371671	1.03520951	1.07042735
0.57	1.00505303	1.03661751	1.07191694
0.58	1.00639828	1.03803500	1.07341668
0.59	1.00775258	1.03946211	1.07492669
0.60	1.00911604	1.04089897	1.07644712
0.61	1.01048879	1.04234570	1.07797810
0.62	1.01187094	1.04380243	1.07951977
0.63	1.01326263	1.04526931	1.08107229
0.64	1.01466399	1.04674647	1.08263579
0.65	1.01607513	1.04823404	1.08421042
0.66	1.01749621	1.04973218	1.08579635
0.67	1.01892735	1.05124102	1.08739372
0.68	1.02036869	1.05276072	1.08900271
0.69	1.02182037	1.05429143	1.09062346
0.70	1.02328255	1.05583330	1.09225615
0.71	1.02475537	1.05738649	1.09390095
0.72	1.02623898	1.05895117	1.09555804
0.73	1.02773353	1.06052749	1.09722758
0.74	1.02923918	1.06211564	1.09890977
0.75	1.03075610	1.06371578	1.10060479
0.76	1.03228445	1.06532808	1.10231282
0.77	1.03382440	1.06695274	1.10403408
0.78	1.03537613	1.06858993	1.10576874
0.79	1.03693980	1.07023984	1.10751702
0.80	1.03851560	1.07190267	1.10927913
0.81	1.04010371	1.07357861	1.11105527
0.82	1.04170433	1.07526788	1.11284567

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.83	1.04331764	1.07697066	1.11465054
0.84	1.04494385	1.07868718	1.11647013
0.85	1.04658315	1.08041766	1.11830465
0.86	1.04823577	1.08216231	1.12015436
0.87	1.04990190	1.08392137	1.12201949
0.88	1.05158176	1.08569506	1.12390030
0.89	1.05327559	1.08748363	1.12579705
0.90	1.05498360	1.08928733	1.12770999
0.91	1.05670604	1.09110639	1.12963941
0.92	1.05844314	1.09294109	1.13158557
0.93	1.06019515	1.09479168	1.13354876
0.94	1.06196233	1.09665844	1.13552928
0.95	1.06374492	1.09854164	1.13752742
0.96	1.06554321	1.10044158	1.13954350
0.97	1.06735746	1.10235853	1.14157782
0.98	1.06918795	1.10429281	1.14363072
0.99	1.07103498	1.10624473	1.14570252
1.00	1.07289883	1.10821459	1.14779357

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.00	1.04719755	1.07948714	1.11534290	1.15550989
0.01	1.04873863	1.08110758	1.11705287	1.15732187
0.02	1.05029106	1.08274003	1.11877563	1.15914754
0.03	1.05185499	1.08438468	1.12051138	1.16098708
0.04	1.05343059	1.08604170	1.12226028	1.16284070
0.05	1.05501803	1.08771127	1.12402255	1.16470862
0.06	1.05661748	1.08939358	1.12579837	1.16659103
0.07	1.05822913	1.09108880	1.12758795	1.16848816
0.08	1.05985314	1.09279715	1.12939149	1.17040023
0.09	1.06148971	1.09451880	1.13120921	1.17232746
0.10	1.06313902	1.09625396	1.13304131	1.17427009
0.11	1.06480127	1.09800284	1.13488801	1.17622835
0.12	1.06647665	1.09976565	1.13674956	1.17820248
0.13	1.06816537	1.10154260	1.13862616	1.18019273
0.14	1.06986763	1.10333392	1.14051806	1.18219936
0.15	1.07158364	1.10513982	1.14242550	1.18422262
0.16	1.07331363	1.10696055	1.14434873	1.18626279
0.17	1.07505781	1.10879633	1.14628799	1.18832012
0.18	1.07681641	1.11064741	1.14824356	1.19039491
0.19	1.07858966	1.11251403	1.15021569	1.19248743
0.20	1.08037781	1.11439645	1.15220465	1.19459799
0.21	1.08218109	1.11629494	1.15421073	1.19672687
0.22	1.08399975	1.11820975	1.15623421	1.19887439
0.23	1.08583406	1.12014116	1.15827538	1.20104086
0.24	1.08768428	1.12208945	1.16033455	1.20322660
0.25	1.08955067	1.12405492	1.16241202	1.20543196
0.26	1.09143352	1.12603784	1.16450810	1.20765726

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.27	1.09333310	1.12803854	1.16662313	1.20990286
0.28	1.09524971	1.13005731	1.16875744	1.21216911
0.29	1.09718365	1.13209448	1.17091136	1.21445639
0.30	1.09913522	1.13415037	1.17308524	1.21676507
0.31	1.10110475	1.13622533	1.17527946	1.21909555
0.32	1.10309255	1.13831969	1.17749438	1.22144821
0.33	1.10509896	1.14043381	1.17973037	1.22382347
0.34	1.10712433	1.14256807	1.18198784	1.22622175
0.35	1.10916899	1.14472282	1.18426718	1.22864349
0.36	1.11123332	1.14689847	1.18656881	1.23108913
0.37	1.11331769	1.14909540	1.18889315	1.23355913
0.38	1.11542248	1.15131403	1.19124064	1.23605396
0.39	1.11754809	1.15355478	1.19361174	1.23857411
0.40	1.11969492	1.15581807	1.19600690	1.24112008
0.41	1.12186339	1.15810436	1.19842661	1.24369239
0.42	1.12405393	1.16041411	1.20087136	1.24629156
0.43	1.12626698	1.16274778	1.20334165	1.24891815
0.44	1.12850300	1.16510588	1.20583802	1.25157272
0.45	1.13076247	1.16748889	1.20836099	1.25425585
0.46	1.13304587	1.16989735	1.21091113	1.25696814
0.47	1.13535370	1.17233178	1.21348901	1.25971022
0.48	1.13768649	1.17479274	1.21609523	1.26248272
0.49	1.14004475	1.17728080	1.21873040	1.26528630
0.50	1.14242906	1.17979655	1.22139514	1.26812165
0.51	1.14483997	1.18234060	1.22409013	1.27098947
0.52	1.14727809	1.18491358	1.22681602	1.27389050
0.53	1.14974401	1.18751614	1.22957352	1.27682549
0.54	1.15223837	1.19014896	1.23236336	1.27979521

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.55	1.15476183	1.19281274	1.23518629	1.28280049
0.56	1.15731505	1.19550819	1.23804307	1.28584215
0.57	1.15989875	1.19823606	1.24093452	1.28892107
0.58	1.16251364	1.20099714	1.24386146	1.29203813
0.59	1.16516049	1.20379222	1.24682476	1.29519429
0.60	1.16784006	1.20662214	1.24982531	1.29839050
0.61	1.17055317	1.20948776	1.25286405	1.30162776
0.62	1.17330066	1.21238998	1.25594194	1.30490713
0.63	1.17608340	1.21532974	1.25905998	1.30822967
0.64	1.17890230	1.21830800	1.26221921	1.31159653
0.65	1.18175830	1.22132578	1.26542072	1.31500887
0.66	1.18465239	1.22438412	1.26866563	1.31846791
0.67	1.18758558	1.22748411	1.27195513	1.32197491
0.68	1.19055894	1.23062690	1.27529042	1.32553121
0.69	1.19357358	1.23381366	1.27867278	1.32913817
0.70	1.19663065	1.23704563	1.28210355	1.33279724
0.71	1.19973136	1.24032411	1.28558411	1.33650991
0.72	1.20287697	1.24365044	1.28911591	1.34027776
0.73	1.20606878	1.24702602	1.29270046	1.34410241
0.74	1.20930819	1.25045233	1.29633934	1.34798558
0.75	1.21259662	1.25393091	1.30003421	1.35192906
0.76	1.21593557	1.25746336	1.30378681	1.35593473
0.77	1.21932664	1.26105138	1.30759894	1.36000456
0.78	1.22277147	1.26469674	1.31147251	1.36414060
0.79	1.22627180	1.26840129	1.31540953	1.36834502
0.80	1.22982944	1.27216699	1.31941209	1.37262010
0.81	1.23344633	1.27599588	1.32348241	1.37696822
0.82	1.23712446	1.27989014	1.32762280	1.38139192

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.83	1.24086597	1.28385202	1.33183572	1.38589383
0.84	1.24467310	1.28788393	1.33612374	1.39047675
0.85	1.24854820	1.29198840	1.34048960	1.39514364
0.86	1.25249377	1.29616811	1.34493616	1.39989762
0.87	1.25651245	1.30042587	1.34946648	1.40474199
0.88	1.26060703	1.30476468	1.35408378	1.40968024
0.89	1.26478047	1.30918771	1.35879147	1.41471607
0.90	1.26903591	1.31369833	1.36359319	1.41985343
0.91	1.27337670	1.31830012	1.36849279	1.42509650
0.92	1.27780637	1.32299688	1.37349438	1.43044972
0.93	1.28232871	1.32779268	1.37860232	1.43591785
0.94	1.28694777	1.33269184	1.38382130	1.44150595
0.95	1.29166786	1.33769899	1.38915630	1.44721944
0.96	1.29649360	1.34281909	1.39461266	1.45306412
0.97	1.30142994	1.34805745	1.40019612	1.45904621
0.98	1.30648221	1.35341979	1.40591285	1.46517241
0.99	1.31165614	1.35891225	1.41176947	1.47144992
1.00	1.31695790	1.36454147	1.41777315	1.47788651

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.00	1.20097859	1.25310229	1.31379284	1.38586625
0.01	1.20290814	1.25516922	1.31602309	1.38829483
0.02	1.20485240	1.25725210	1.31827074	1.39074262
0.03	1.20681160	1.25935115	1.32053606	1.39320991
0.04	1.20878594	1.26146660	1.32281930	1.39569700
0.05	1.21077566	1.26359871	1.32512073	1.39820417
0.06	1.21278097	1.26574772	1.32744064	1.40073174
0.07	1.21480213	1.26791389	1.32977929	1.40328003
0.08	1.21683935	1.27009747	1.33213698	1.40584934
0.09	1.21889290	1.27229874	1.33451400	1.40844001
0.10	1.22096301	1.27451797	1.33691065	1.41105237
0.11	1.22304995	1.27675544	1.33932724	1.41368676
0.12	1.22515398	1.27901142	1.34176408	1.41634354
0.13	1.22727536	1.28128623	1.34422149	1.41902307
0.14	1.22941438	1.28358015	1.34669981	1.42172570
0.15	1.23157130	1.28589349	1.34919937	1.42445182
0.16	1.23374642	1.28822657	1.35172052	1.42720182
0.17	1.23594004	1.29057970	1.35426362	1.42997608
0.18	1.23815245	1.29295322	1.35682901	1.43277502
0.19	1.24038397	1.29534747	1.35941709	1.43559904
0.20	1.24263490	1.29776278	1.36202823	1.43844858
0.21	1.24490559	1.30019952	1.36466281	1.44132407
0.22	1.24719635	1.30265805	1.36732125	1.44422595
0.23	1.24950754	1.30513875	1.37000395	1.44715469
0.24	1.25183950	1.30764199	1.37271133	1.45011076
0.25	1.25419259	1.31016816	1.37544384	1.45309464
0.26	1.25656718	1.31271768	1.37820190	1.45610683

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.27	1.25896365	1.31529095	1.38098598	1.45914783
0.28	1.26138238	1.31788840	1.38379655	1.46221817
0.29	1.26382379	1.32051046	1.38663409	1.46531839
0.30	1.26628827	1.32315759	1.38949909	1.46844904
0.31	1.26877625	1.32583025	1.39239206	1.47161068
0.32	1.27128816	1.32852890	1.39531353	1.47480390
0.33	1.27382445	1.33125403	1.39826402	1.47802931
0.34	1.27638557	1.33400614	1.40124410	1.48128751
0.35	1.27897199	1.33678576	1.40425432	1.48457914
0.36	1.28158421	1.33959340	1.40729528	1.48790486
0.37	1.28422271	1.34242961	1.41036758	1.49126533
0.38	1.28688800	1.34529496	1.41347183	1.49466126
0.39	1.28958063	1.34819001	1.41660867	1.49809335
0.40	1.29230112	1.35111537	1.41977877	1.50156233
0.41	1.29505004	1.35407164	1.42298278	1.50506898
0.42	1.29782797	1.35705946	1.42622143	1.50861406
0.43	1.30063550	1.36007948	1.42949541	1.51219838
0.44	1.30347324	1.36313237	1.43280548	1.51582277
0.45	1.30634183	1.36621883	1.43615241	1.51948809
0.46	1.30924192	1.36933956	1.43953697	1.52319523
0.47	1.31217419	1.37249530	1.44295999	1.52694509
0.48	1.31513932	1.37568682	1.44642231	1.53073863
0.49	1.31813803	1.37891490	1.44992480	1.53457681
0.50	1.32117108	1.38218036	1.45346836	1.53846064
0.51	1.32423922	1.38548403	1.45705391	1.54239117
0.52	1.32734325	1.38882679	1.46068243	1.54636948
0.53	1.33048399	1.39220953	1.46435491	1.55039668
0.54	1.33366229	1.39563319	1.46807237	1.55447393

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.55	1.33687903	1.39909873	1.47183589	1.55860242
0.56	1.34013512	1.40260714	1.47564656	1.56278339
0.57	1.34343150	1.40615947	1.47950555	1.56701813
0.58	1.34676915	1.40975678	1.48341402	1.57130797
0.59	1.35014909	1.41340019	1.48737322	1.57565431
0.60	1.35357236	1.41709085	1.49138443	1.58005856
0.61	1.35704006	1.42082995	1.49544897	1.58452223
0.62	1.36055333	1.42461876	1.49956822	1.58904686
0.63	1.36411334	1.42845854	1.50374363	1.59363406
0.64	1.36772131	1.43235067	1.50797667	1.59828551
0.65	1.37137853	1.43629652	1.51226890	1.60300296
0.66	1.37508632	1.44029756	1.51662194	1.60778822
0.67	1.37884607	1.44435531	1.52103747	1.61264318
0.68	1.38265920	1.44847134	1.52551724	1.61756982
0.69	1.38652722	1.45264731	1.53006309	1.62257019
0.70	1.39045170	1.45688492	1.53467692	1.62764643
0.71	1.39443427	1.46118599	1.53936072	1.63280080
0.72	1.39847663	1.46555238	1.54411658	1.63803564
0.73	1.40258058	1.46998606	1.54894667	1.64335339
0.74	1.40674797	1.47448907	1.55385328	1.64875662
0.75	1.41098076	1.47906356	1.55883879	1.65424803
0.76	1.41528099	1.48371178	1.56390569	1.65983041
0.77	1.41965081	1.48843609	1.56905662	1.66550674
0.78	1.42409247	1.49323896	1.57429431	1.67128010
0.79	1.42860833	1.49812299	1.57962166	1.67715375
0.80	1.43320086	1.50309091	1.58504170	1.68313112
0.81	1.43787268	1.50814559	1.59055764	1.68921581
0.82	1.44262654	1.51329005	1.59617283	1.69541162

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.83	1.44746533	1.51852749	1.60189082	1.70172255
0.84	1.45239210	1.52386126	1.60771535	1.70815282
0.85	1.45741007	1.52929491	1.61365037	1.71470690
0.86	1.46252266	1.53483220	1.61970007	1.72138950
0.87	1.46773346	1.54047709	1.62586887	1.72820562
0.88	1.47304629	1.54623379	1.63216145	1.73516055
0.89	1.47846521	1.55210677	1.63858279	1.74225993
0.90	1.48399450	1.55810076	1.64513817	1.74950972
0.91	1.48963874	1.56422080	1.65183321	1.75691627
0.92	1.49540280	1.57047226	1.65867390	1.76448636
0.93	1.50129186	1.57686087	1.66566661	1.77222721
0.94	1.50731147	1.58339273	1.67281817	1.78014654
0.95	1.51346755	1.59007438	1.68013588	1.78825261
0.96	1.51976643	1.59691283	1.68762756	1.79655429
0.97	1.52621494	1.60391559	1.69530161	1.80506109
0.98	1.53282040	1.61109075	1.70316704	1.81378323
0.99	1.53959068	1.61844702	1.71123360	1.82273175
1.00	1.54653430	1.62599381	1.71951180	1.83191858

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.00	1.47369857	1.58459524	1.58459524
0.01	1.47637485	1.58759293	1.58759293
0.02	1.47907263	1.59061515	1.59061515
0.03	1.48179225	1.59366228	1.59366228
0.04	1.48453403	1.59673469	1.59673469
0.05	1.48729831	1.59983278	1.59983278
0.06	1.49008543	1.60295695	1.60295695
0.07	1.49289575	1.60610760	1.60610760
0.08	1.49572962	1.60928515	1.60928515
0.09	1.49858743	1.61249004	1.61249004
0.10	1.50146955	1.61572268	1.61572268
0.11	1.50437636	1.61898355	1.61898355
0.12	1.50730826	1.62227308	1.62227308
0.13	1.51026566	1.62559176	1.62559176
0.14	1.51324897	1.62894005	1.62894005
0.15	1.51625863	1.63231847	1.63231847
0.16	1.51929506	1.63572750	1.63572750
0.17	1.52235872	1.63916768	1.63916768
0.18	1.52545005	1.64263952	1.64263952
0.19	1.52856955	1.64614357	1.64614357
0.20	1.53171767	1.64968039	1.64968039
0.21	1.53489493	1.65325056	1.65325056
0.22	1.53810182	1.65685466	1.65685466
0.23	1.54133887	1.66049328	1.66049328
0.24	1.54460661	1.66416706	1.66416706
0.25	1.54790559	1.66787662	1.66787662
0.26	1.55123637	1.67162263	1.67162263

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.27	1.55459953	1.67540573	1.67540573
0.28	1.55799567	1.67922664	1.67922664
0.29	1.56142538	1.68308604	1.68308604
0.30	1.56488931	1.68698468	1.68698468
0.31	1.56838808	1.69092329	1.69092329
0.32	1.57192238	1.69490264	1.69490264
0.33	1.57549287	1.69892354	1.69892354
0.34	1.57910026	1.70298678	1.70298678
0.35	1.58274526	1.70709320	1.70709320
0.36	1.58642863	1.71124368	1.71124368
0.37	1.59015113	1.71543909	1.71543909
0.38	1.59391353	1.71968035	1.71968035
0.39	1.59771666	1.72396841	1.72396841
0.40	1.60156135	1.72830422	1.72830422
0.41	1.60544846	1.73268881	1.73268881
0.42	1.60937888	1.73712319	1.73712319
0.43	1.61335352	1.74160843	1.74160843
0.44	1.61737333	1.74614564	1.74614564
0.45	1.62143928	1.75073595	1.75073595
0.46	1.62555239	1.75538052	1.75538052
0.47	1.62971369	1.76008058	1.76008058
0.48	1.63392425	1.76483737	1.76483737
0.49	1.63818519	1.76965219	1.76965219
0.50	1.64249766	1.77452637	1.77452637
0.51	1.64686284	1.77946131	1.77946131
0.52	1.65128196	1.78445843	1.78445843
0.53	1.65575630	1.78951921	1.78951921
0.54	1.66028716	1.79464520	1.79464520

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.55	1.66487593	1.79983799	1.79983799
0.56	1.66952401	1.80509923	1.80509923
0.57	1.67423287	1.81043062	1.81043062
0.58	1.67900403	1.81583396	1.81583396
0.59	1.68383906	1.82131108	1.82131108
0.60	1.68873962	1.82686390	1.82686390
0.61	1.69370740	1.83249440	1.83249440
0.62	1.69874418	1.83820467	1.83820467
0.63	1.70385178	1.84399685	1.84399685
0.64	1.70903214	1.84987319	1.84987319
0.65	1.71428724	1.85583601	1.85583601
0.66	1.71961916	1.86188776	1.86188776
0.67	1.72503007	1.86803095	1.86803095
0.68	1.73052221	1.87426825	1.87426825
0.69	1.73609795	1.88060239	1.88060239
0.70	1.74175975	1.88703628	1.88703628
0.71	1.74751016	1.89357291	1.89357291
0.72	1.75335188	1.90021544	1.90021544
0.73	1.75928771	1.90696716	1.90696716
0.74	1.76532059	1.91383153	1.91383153
0.75	1.77145361	1.92081215	1.92081215
0.76	1.77768998	1.92791282	1.92791282
0.77	1.78403311	1.93513752	1.93513752
0.78	1.79048653	1.94249044	1.94249044
0.79	1.79705400	1.94997595	1.94997595
0.80	1.80373943	1.95759870	1.95759870
0.81	1.81054698	1.96536355	1.96536355
0.82	1.81748099	1.97327562	1.97327562

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{3},n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9	1.0
0.83	1.82454607	1.98134035	1.98134035
0.84	1.83174707	1.98956344	1.98956344
0.85	1.83908912	1.99795095	1.99795095
0.86	1.84657766	2.00650928	2.00650928
0.87	1.85421842	2.01524520	2.01524520
0.88	1.86201750	2.02416592	2.02416592
0.89	1.86998138	2.03327907	2.03327907
0.90	1.87811694	2.04259278	2.04259278
0.91	1.88643149	2.05211570	2.05211570
0.92	1.89493283	2.06185706	2.06185706
0.93	1.90362931	2.07182671	2.07182671
0.94	1.91252982	2.08203519	2.08203519
0.95	1.92164389	2.09249379	2.09249379
0.96	1.93098176	2.10321462	2.10321462
0.97	1.94055440	2.11421070	2.11421070
0.98	1.95037363	2.12549606	2.12549606
0.99	1.96045222	2.13708581	2.13708581
1.00	1.97080393	2.14899632	2.14899632

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Complete Elliptic Integral of the Third Kind

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.00	1.57079633	1.65576471	1.75620368	1.87746071
0.01	1.57474556	1.66003741	1.76086561	1.88260159
0.02	1.57873991	1.66435934	1.76558179	1.88780296
0.03	1.58278034	1.66873158	1.77035340	1.89306612
0.04	1.58686785	1.67315521	1.77518163	1.89839242
0.05	1.59100345	1.67763135	1.78006774	1.90378326
0.06	1.59518822	1.68216116	1.78501301	1.90924010
0.07	1.59942324	1.68674586	1.79001878	1.91476441
0.08	1.60370965	1.69138667	1.79508641	1.92035774
0.09	1.60804862	1.69608488	1.80021734	1.92602169
0.10	1.61244135	1.70084182	1.80541302	1.93175789
0.11	1.61688909	1.70565885	1.81067497	1.93756807
0.12	1.62139314	1.71053740	1.81600477	1.94345397
0.13	1.62595483	1.71547893	1.82140405	1.94941743
0.14	1.63057555	1.72048496	1.82687449	1.95546034
0.15	1.63525673	1.72555707	1.83241783	1.96158466
0.16	1.63999987	1.73069688	1.83803588	1.96779241
0.17	1.64480649	1.73590610	1.84373053	1.97408571
0.18	1.64967821	1.74118647	1.84950371	1.98046675
0.19	1.65461667	1.74653982	1.85535744	1.98693778
0.20	1.65962360	1.75196803	1.86129382	1.99350116
0.21	1.66470079	1.75747306	1.86731503	2.00015934
0.22	1.66985009	1.76305696	1.87342333	2.00691486
0.23	1.67507343	1.76872185	1.87962107	2.01377037
0.24	1.68037282	1.77446993	1.88591070	2.02072861
0.25	1.68575035	1.78030349	1.89229476	2.02779245
0.26	1.69120820	1.78622493	1.89877591	2.03496486

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.27	1.69674862	1.79223672	1.90535690	2.04224895
0.28	1.70237398	1.79834147	1.91204061	2.04964796
0.29	1.70808673	1.80454188	1.91883005	2.05716526
0.30	1.71388945	1.81084076	1.92572834	2.06480438
0.31	1.71978481	1.81724106	1.93273876	2.07256899
0.32	1.72577561	1.82374586	1.93986473	2.08046295
0.33	1.73186478	1.83035838	1.94710982	2.08849027
0.34	1.73805537	1.83708197	1.95447775	2.09665515
0.35	1.74435060	1.84392017	1.96197246	2.10496200
0.36	1.75075380	1.85087665	1.96959803	2.11341544
0.37	1.75726850	1.85795528	1.97735876	2.12202030
0.38	1.76389839	1.86516012	1.98525915	2.13078165
0.39	1.77064732	1.87249542	1.99330393	2.13970482
0.40	1.77751937	1.87996565	2.00149809	2.14879542
0.41	1.78451880	1.88757551	2.00984683	2.15805932
0.42	1.79165012	1.89532995	2.01835566	2.16750272
0.43	1.79891804	1.90323417	2.02703037	2.17713215
0.44	1.80632756	1.91129366	2.03587707	2.18695450
0.45	1.81388394	1.91951421	2.04490219	2.19697702
0.46	1.82159273	1.92790195	2.05411254	2.20720738
0.47	1.82945980	1.93646332	2.06351532	2.21765370
0.48	1.83749136	1.94520516	2.07311813	2.22832456
0.49	1.84569400	1.95413473	2.08292903	2.23922905
0.50	1.85407468	1.96325971	2.09295658	2.25037682
0.51	1.86264080	1.97258824	2.10320986	2.26177812
0.52	1.87140024	1.98212899	2.11369850	2.27344383
0.53	1.88036136	1.99189118	2.12443280	2.28538555
0.54	1.88953308	2.00188465	2.13542368	2.29761563

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.55	1.89892491	2.01211987	2.14668283	2.31014727
0.56	1.90854702	2.02260804	2.15822272	2.32299455
0.57	1.91841027	2.03336116	2.17005672	2.33617257
0.58	1.92852632	2.04439205	2.18219914	2.34969750
0.59	1.93890767	2.05571452	2.19466534	2.36358669
0.60	1.94956775	2.06734337	2.20747184	2.37785883
0.61	1.96052104	2.07929457	2.22063645	2.39253403
0.62	1.97178316	2.09158535	2.23417837	2.40763401
0.63	1.98337098	2.10423432	2.24811837	2.42318225
0.64	1.99530278	2.11726165	2.26247894	2.43920420
0.65	2.00759840	2.13068924	2.27728453	2.45572750
0.66	2.02027943	2.14454091	2.29256171	2.47278224
0.67	2.03336941	2.15884265	2.30833948	2.49040124
0.68	2.04689408	2.17362287	2.32464958	2.50862040
0.69	2.06088165	2.18891272	2.34152677	2.52747910
0.70	2.07536314	2.20474647	2.35900931	2.54702066
0.71	2.09037275	2.22116187	2.37713940	2.56729287
0.72	2.10594832	2.23820075	2.39596372	2.58834862
0.73	2.12213186	2.25590949	2.41553413	2.61024669
0.74	2.13897018	2.27433984	2.43590843	2.63305259
0.75	2.15651565	2.29354965	2.45715130	2.65683963
0.76	2.17482709	2.31360397	2.47933545	2.68169027
0.77	2.19397093	2.33457621	2.50254297	2.70769762
0.78	2.21402250	2.35654969	2.52686703	2.73496738
0.79	2.23506776	2.37961945	2.55241396	2.76362019
0.80	2.25720533	2.40389458	2.57930579	2.79379459
0.81	2.28054914	2.42950112	2.60768357	2.82565070
0.82	2.30523174	2.45658572	2.63771145	2.85937492

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi\left(n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.0	0.1	0.2	0.3
0.83	2.33140857	2.48532041	2.66958201	2.89518601
0.84	2.35926355	2.51590877	2.70352320	2.93334297
0.85	2.38901649	2.54859412	2.73980755	2.97415553
0.86	2.42093296	2.58367054	2.77876450	3.01799821
0.87	2.45533803	2.62149802	2.82079742	3.06532970
0.88	2.49263532	2.66252366	2.86640741	3.11671999
0.89	2.53333455	2.70731217	2.91622753	3.17288937
0.90	2.57809211	2.75659096	2.97107343	3.23476617
0.91	2.62777333	2.81131910	3.03202078	3.30357508
0.92	2.68355141	2.87279720	3.10052875	3.38097785
0.93	2.74707300	2.94285117	3.17864629	3.46930875
0.94	2.82075250	3.02415876	3.26937914	3.57199319
0.95	2.90833725	3.12087708	3.37739486	3.69435227
0.96	3.01611249	3.23998026	3.51052622	3.84531871
0.97	3.15587495	3.39456121	3.68348245	4.04167372
0.98	3.35414145	3.61405789	3.92934623	4.32117508
0.99	3.69563736	3.99255561	4.35388801	4.80459329
1.00	∞	∞	∞	∞

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.00	2.02788934	2.22144147	2.48364707	2.86786860
0.01	2.03363674	2.22798689	2.49130049	2.87719102
0.02	2.03945260	2.23461139	2.49904795	2.88663037
0.03	2.04533840	2.24131670	2.50689153	2.89618929
0.04	2.05129569	2.24810463	2.51483339	2.90587049
0.05	2.05732607	2.25497702	2.52287576	2.91567678
0.06	2.06343118	2.26193580	2.53102094	2.92561106
0.07	2.06961272	2.26898294	2.53927131	2.93567633
0.08	2.07587245	2.27612050	2.54762933	2.94587569
0.09	2.08221218	2.28335059	2.55609755	2.95621235
0.10	2.08863379	2.29067540	2.56467860	2.96668964
0.11	2.09513924	2.29809720	2.57337521	2.97731098
0.12	2.10173052	2.30561833	2.58219020	2.98807995
0.13	2.10840973	2.31324123	2.59112649	2.99900023
0.14	2.11517902	2.32096840	2.60018711	3.01007564
0.15	2.12204063	2.32880247	2.60937520	3.02131015
0.16	2.12899687	2.33674614	2.61869402	3.03270787
0.17	2.13605016	2.34480220	2.62814695	3.04427308
0.18	2.14320299	2.35297359	2.63773749	3.05601021
0.19	2.15045794	2.36126330	2.64746929	3.06792386
0.20	2.15781770	2.36967450	2.65734612	3.08001881
0.21	2.16528508	2.37821044	2.66737193	3.09230005
0.22	2.17286297	2.38687450	2.67755080	3.10477274
0.23	2.18055439	2.39567023	2.68788698	3.11744228
0.24	2.18836249	2.40460129	2.69838491	3.13031426
0.25	2.19629054	2.41367150	2.70904919	3.14339453
0.26	2.20434193	2.42288485	2.71988462	3.15668918

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.27	2.21252023	2.43224549	2.73089623	3.17020456
0.28	2.22082914	2.44175774	2.74208923	3.18394729
0.29	2.22927251	2.45142612	2.75346908	3.19792429
0.30	2.23785437	2.46125535	2.76504146	3.21214278
0.31	2.24657894	2.47125035	2.77681234	3.22661032
0.32	2.25545061	2.48141627	2.78878793	3.24133481
0.33	2.26447399	2.49175849	2.80097474	3.25632451
0.34	2.27365389	2.50228266	2.81337959	3.27158808
0.35	2.28299534	2.51299467	2.82600962	3.28713461
0.36	2.29250364	2.52390071	2.83887231	3.30297359
0.37	2.30218432	2.53500727	2.85197551	3.31911502
0.38	2.31204319	2.54632116	2.86532747	3.33556940
0.39	2.32208636	2.55784954	2.87893684	3.35234773
0.40	2.33232023	2.56959991	2.89281274	3.36946163
0.41	2.34275156	2.58158021	2.90696474	3.38692329
0.42	2.35338746	2.59379875	2.92140295	3.40474558
0.43	2.36423539	2.60626431	2.93613800	3.42294206
0.44	2.37530325	2.61898615	2.95118111	3.44152705
0.45	2.38659938	2.63197405	2.96654414	3.46051567
0.46	2.39813256	2.64523833	2.98223962	3.47992393
0.47	2.40991211	2.65878992	2.99828081	3.49976873
0.48	2.42194788	2.67264039	3.01468176	3.52006804
0.49	2.43425029	2.68680200	3.03145735	3.54084088
0.50	2.44683043	2.70128776	3.04862339	3.56210745
0.51	2.45970007	2.71611151	3.06619669	3.58388925
0.52	2.47287169	2.73128793	3.08419510	3.60620914
0.53	2.48635863	2.74683271	3.10263768	3.62909150
0.54	2.50017509	2.76276252	3.12154473	3.65256235

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.55	2.51433620	2.77909520	3.14093795	3.67664948
0.56	2.52885818	2.79584983	3.16084055	3.70138265
0.57	2.54375837	2.81304680	3.18127737	3.72679373
0.58	2.55905536	2.83070803	3.20227510	3.75291696
0.59	2.57476913	2.84885704	3.22386239	3.77978913
0.60	2.59092116	2.86751912	3.24607009	3.80744986
0.61	2.60753459	2.88672158	3.26893146	3.83594191
0.62	2.62463442	2.90649386	3.29248246	3.86531149
0.63	2.64224769	2.92686785	3.31676197	3.89560865
0.64	2.66040370	2.94787812	3.34181219	3.92688770
0.65	2.67913429	2.96956222	3.36767899	3.95920772
0.66	2.69847410	2.99196105	3.39441234	3.99263310
0.67	2.71846096	3.01511928	3.42206682	4.02723421
0.68	2.73913626	3.03908577	3.45070218	4.06308815
0.69	2.76054540	3.06391417	3.48038403	4.10027961
0.70	2.78273832	3.08966349	3.51118461	4.13890189
0.71	2.80577016	3.11639891	3.54318371	4.17905813
0.72	2.82970195	3.14419262	3.57646973	4.22086265
0.73	2.85460150	3.17312482	3.61114098	4.26444266
0.74	2.88054445	3.20328503	3.64730718	4.30994026
0.75	2.90761547	3.23477347	3.68509127	4.35751477
0.76	2.93590979	3.26770293	3.72463165	4.40734562
0.77	2.96553500	3.30220085	3.76608478	4.45963588
0.78	2.99661325	3.33841201	3.80962851	4.51461645
0.79	3.02928402	3.37650177	3.85546607	4.57255146
0.80	3.06370753	3.41666014	3.90383110	4.63374475
0.81	3.10006899	3.45910690	3.95499399	4.69854823
0.82	3.13858412	3.50409810	4.00926994	4.76737246

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.4	0.5	0.6	0.7
0.83	3.17950613	3.55193443	4.06702931	4.84070026
0.84	3.22313495	3.60297220	4.12871122	4.91910453
0.85	3.26982933	3.65763780	4.19484147	5.00327188
0.86	3.32002324	3.71644727	4.26605680	5.09403454
0.87	3.37424838	3.78003312	4.34313815	5.19241416
0.88	3.43316569	3.84918198	4.42705741	5.29968339
0.89	3.49761070	3.92488881	4.51904465	5.41745455
0.90	3.56866069	4.00843702	4.62068769	5.54781107
0.91	3.64773740	4.10152132	4.73408467	5.69350889
0.92	3.73677076	4.20644339	4.86208736	5.85829801
0.93	3.83847286	4.32643953	5.00870859	6.04746139
0.94	3.95682522	4.46626361	5.17984763	6.26877497
0.95	4.09801570	4.63330815	5.38468593	6.53435657
0.96	4.27243679	4.83999673	5.63866715	6.86461673
0.97	4.49962169	5.10969542	5.97086477	7.29803533
0.98	4.82354293	5.49504227	6.44684058	7.92152351
0.99	5.38493004	6.16463199	7.27682136	9.01426780
1.00	∞	∞	∞	∞

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9
0.00	3.51240737	4.96729413
0.01	3.52461996	4.98628904
0.02	3.53698995	5.00553879
0.03	3.54952094	5.02504936
0.04	3.56221664	5.04482694
0.05	3.57508090	5.06487790
0.06	3.58811768	5.08520888
0.07	3.60133111	5.10582670
0.08	3.61472543	5.12673846
0.09	3.62830505	5.14795149
0.10	3.64207451	5.16947340
0.11	3.65603854	5.19131206
0.12	3.67020204	5.21347564
0.13	3.68457005	5.23597262
0.14	3.69914785	5.25881178
0.15	3.71394088	5.28200225
0.16	3.72895480	5.30555351
0.17	3.74419549	5.32947541
0.18	3.75966904	5.35377817
0.19	3.77538180	5.37847245
0.20	3.79134036	5.40356932
0.21	3.80755157	5.42908031
0.22	3.82402258	5.45501741
0.23	3.84076080	5.48139315
0.24	3.85777398	5.50822055
0.25	3.87507019	5.53551321
0.26	3. 89265783	5. 56328533

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9
0.27	3.91054567	5.59155173
0.28	3.92874288	5.62032789
0.29	3.94725903	5.64962999
0.30	3.96610412	5.67947497
0.31	3.98528859	5.70988055
0.32	4.00482341	5.74086527
0.33	4.02472001	5.77244861
0.34	4.04499043	5.80465094
0.35	4.06564723	5.83749368
0.36	4.08670364	5.87099931
0.37	4.10817352	5.90519146
0.38	4.13007146	5.94009497
0.39	4.15241277	5.97573601
0.40	4.17521359	6.01214214
0.41	4.19849092	6.04934240
0.42	4.22226266	6.08736745
0.43	4.24654772	6.12624969
0.44	4.27136607	6.16602334
0.45	4.29673879	6.20672462
0.46	4.32268823	6.24839192
0.47	4.34923804	6.29106591
0.48	4.37641328	6.33478978
0.49	4.40424057	6.37960942
0.50	4.43274821	6.42557364
0.51	4.46196627	6.47273445
0.52	4.49192681	6.52114729
0.53	4.52266401	6.57087137
0.54	4.55421437	6.62196998

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi\left(n,k\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9
0.55	4.58661694	6.67451091
0.56	4.61991352	6.72856684
0.57	4.65414894	6.78421581
0.58	4.68937136	6.84154175
0.59	4.72563260	6.90063513
0.60	4.76298852	6.96159353
0.61	4.80149941	7.02452249
0.62	4.84123051	7.08953633
0.63	4.88225251	7.15675915
0.64	4.92464221	7.22632593
0.65	4.96848319	7.29838381
0.66	5.01386666	7.37309361
0.67	5.06089235	7.45063146
0.68	5.10966965	7.53119084
0.69	5.16031882	7.61498484
0.70	5.21297247	7.70224886
0.71	5.26777732	7.79324374
0.72	5.32489617	7.88825950
0.73	5.38451036	7.98761978
0.74	5.44682264	8.09168708
0.75	5.51206058	8.20086916
0.76	5.58048077	8.31562666
0.77	5.65237387	8.43648253
0.78	5.72807084	8.56403347
0.79	5.80795059	8.69896424
0.80	5.89244962	8.84206547
0.81	5.98207408	8.99425620
0.82	6.07741521	9.15661265

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)=\Pi(n,k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

k/n	0.8	0.9
0.83	6.17916922	9.33040545
0.84	6.28816338	9.51714849
0.85	6.40539053	9.71866384
0.86	6.53205580	9.93716974
0.87	6.66964089	10.17540190
0.88	6.81999443	10.43678468
0.89	6.98546228	10.72567838
0.90	7.16908094	11.04774733
0.91	7.37487427	11.41052651
0.92	7.60832782	11.82432979
0.93	7.87718492	12.30377933
0.94	8.19286681	12.87054314
0.95	8.57321178	13.55863439
0.96	9.04833748	14.42579696
0.97	9.67517168	15.58184514
0.98	10.58266035	17.27724691
0.99	12.18639385	20.32600550
1.00	∞	∞

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้