แบบจำลองราคาออปชันโดยใช้ต้นไม้ทวินามฟัซซี
Option pricing model using fuzzy binomial tree

ธิดา พัฒนอางกุล
พลอยรุ้ง ยิ่งหาญ
วรรณนิษา ทองดี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

แบบจำลองราคาออปชันโดยใช้ต้นไม้ทวินามฟัซซี
Option pricing model using fuzzy binomial tree

ธิดา พัฒนอางกุล
พลอยรุ้ง ยิ่งหาญ
วรรณนิษา ทองดี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

Option pricing model using fuzzy binomial tree

THIDA PHATTANA-ANGKUL
PLOYRUNG YINGHAN
WANNISA TONGDEE

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE(APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ	แบบจำลองราคาออปชันโดยใช้ต้นไม้ทวินามฟัซซี		
	Option pricing model using fuzzy binomial tree		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวธิดา	พัฒนอางกุล	55050072
	นางสาวพลอยรุ้ง	ยิ่งหาญ	55050098
	นางสาววรรณนิษา	ทองดี	55050131
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์		
ปีการศึกษา	2558		
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ		

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ประธานกรรมการ	
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการ	
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ แบบจำลองราคาออปชันโดยใช้ต้นไม้ทวินามฟัซซี

ชื่อนักศึกษา นางสาวธิดา พัฒนอางกุล 55050072

นางสาวพลอยรุ้ง ยิ่งหาญ 55050098

นางสาววรรณนิษา ทองดี 55050131

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

หลักสูตร คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2558

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องตราสารอนุพันธ์ ซึ่งเป็นเครื่องมือทางการเงินที่ใช้สำหรับการป้องกันความเสี่ยง แต่ในงานวิจัยนี้เราจะเน้นตราสารประเภทออปชัน โดยนำออปชันมาประยุกต์ใช้กับตรรกศาสตร์ฟัซซี เพื่อความสะดวกในการแก้สมการคำนวณ และนำความรู้เรื่องการเงินมาเป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจลงทุนในสินทรัพย์ทางการเงิน โดยคาดหวังเอาไว้ว่าจะสามารถช่วยให้นักลงทุนมีทางเลือกได้มากขึ้น ดังนั้นการที่เรากำหนดราคาออปชันโดยประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีน่าจะเป็นตัวเลือกอีกทางนึงในการตัดสินใจลงทุนซื้อขายสินทรัพย์ทางการเงิน

คำสำคัญ : ออปชัน ตรรกศาสตร์ฟัซซี ต้นไม้ทวินาม

Special Problem Title	Option pricing model using fuzzy binomial tree
Students	Ms. Thida Phattana-angkul 55050072
	Ms. Ployrung Yinghan 55050098
	Ms. Wannisa Tongdee 55050131
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Major Program	Mathematics
Academic Year	2015
Advisor	Assist.Prof.Dr. Wichai Witayakiattilerd

ABSTRACT

In this special problem studies on Derivative, which are financial instruments used for risk, but in this study, we will focus on the instrument type options. By presenting options to understand has for ease of calculations, equation solving, and use knowledge of financial matters came as a criterion in deciding whether to invest in financial assets. Expect that it will be able to help investors with more choices. Therefore, we set the option pricing model using fuzzy binomial tree, Another option would be to investment in trading financial assets.

Keywords : Options, Fuzzy logic, Binomial tree

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาอย่างสูงจากท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ โดยให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยหาวิธีการแก้ไขปัญหาข้อบกพร่องต่างๆที่เกิดขึ้น ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านการศึกษาหรือปัญหาทางด้านการทำงาน รวมทั้งให้กำลังใจผู้จัดทำตั้งแต่เริ่มทำปัญหาพิเศษฉบับนี้จนสำเร็จ โดยอาจารย์จะเน้นเสมอว่า “ต้องขยันและอดทน” นับว่าเป็นพระคุณยิ่งสำหรับคณะผู้จัดทำ ที่มีโอกาสได้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษในครั้งนี้ ขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ที่เป็นประธานกรรมการ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ที่เป็นกรรมการ สำหรับการทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้ ซึ่งอาจารย์ทั้ง 2 จะคอยแนะนำและให้แนวคิดใหม่ๆมาปรับปรุงและพัฒนาตลอดจนแก้ไขตรวจสอบปัญหาพิเศษให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ทางคณะผู้จัดทำจึงขอขอบคุณทั้ง 2 ท่านอีกครั้งที่ให้เกียรติมาเป็นประธานกรรมการและกรรมการในการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้ ขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาผู้ให้กำเนิด ซึ่งท่านได้วางรากฐานชีวิต พื้นฐานทางความคิดให้ผู้จัดทำมีความเชื่อมั่นในสิ่งที่ถูกต้องและเป็นกำลังใจแก่ผู้จัดทำเสมอมาอันเป็นแนวทางไปสู่ความสำเร็จของผู้จัดทำ

สุดท้ายนี้ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาความรู้และขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือด้วยดีมาโดยตลอด

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ตราสารอนุพันธ์ เป็นเครื่องมือทางการเงินชนิดหนึ่ง ซึ่งใช้สำหรับการป้องกันความเสี่ยงหรือการบริหารจัดการความเสี่ยง ซึ่งมีประวัติว่าเกิดขึ้นมานานแล้ว ในอดีตเกิดขึ้นกับการซื้อขายสินค้าเกษตรล่วงหน้า ยุคกรีกและโรมัน พ่อค้ามีการทำสัญญาซื้อขายล่วงหน้า แบบฟอร์เวิร์ดซึ่งเป็นตราสารอนุพันธ์ประเภทหนึ่ง บทบาทของตราสารอนุพันธ์ที่ชัดเจนดูได้จากการซื้อขายสินค้าทางการเกษตรล่วงหน้า ปี ค.ศ.1600 การซื้อขายออปชันเกิดขึ้นในเมืองอัมสเตอร์ดัม ประเทศฮอลแลนด์ ในปี ค.ศ. 1630 การทำสัญญาซื้อขายสินค้าเกษตรล่วงหน้า แบบฟอร์เวิร์ดเกิดขึ้นที่ The Royal Exchange ประเทศอังกฤษ ช่วงทศวรรษ 1630 เกิดการซื้อขายสินค้าเกษตรล่วงหน้า (ฟิวเจอร์ส) ขึ้นในตลาด The Yodoya Rice Market ที่เมืองโอซาก้า ประเทศญี่ปุ่น เอกสารสัญญาซื้อขายนี้ถูกเรียกว่า Rice tickets ซึ่งเป็นลักษณะเกี่ยวกับสัญญาฟิวเจอร์สในปัจจุบัน ช่วงต้นทศวรรษ 1800 เกิดการซื้อขายตราสารอนุพันธ์แบบพุทออปชันและคอลออปชันของหุ้นสามัญ ที่ The London Stock Exchange ปี ค.ศ.1848 มีการก่อตั้งตลาดซื้อขายสินค้าเกษตรล่วงหน้าเกิดขึ้นในเมืองชิคาโก สหรัฐอเมริกา ในชื่อ The Chicago Board of Trade (CBOT) เพื่อเป็นศูนย์กลางให้ผู้ซื้อและผู้ขายสินค้าได้พบกัน ช่วงทศวรรษ 1860 ตราสารอนุพันธ์แบบออปชันของสินค้าเกษตร และหุ้นถูกนำมาซื้อขายในตลาดของสหรัฐอเมริกา ซึ่งได้เกิดขึ้นอีกหลายตลาด สมาคมนายหน้าซื้อขายออปชันถูกจัดตั้งขึ้นในช่วงต้นๆของ ค.ศ.1900 ปัจจุบันในตลาดทุน ตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน (Financial Derivatives) อยู่ในตลาดอนุพันธ์ เป็นตราสารทางการลงทุนประเภทหนึ่งที่ได้รับความนิยมและมีบทบาทสำคัญ มีปริมาณในการซื้อขายสูงอย่างต่อเนื่อง มีลักษณะเป็นสัญญาซื้อหรือขายในราคาและเงื่อนไขที่ตกลงกันไว้ โดยทำการส่งมอบทรัพย์กันในอนาคต ทั้งนี้ มูลค่าของอนุพันธ์จะขึ้นอยู่กับมูลค่าของราคาหลักทรัพย์อ้างอิง และหากมูลค่าราคาหลักทรัพย์อ้างอิงเปลี่ยนแปลงไป ตราสารอนุพันธ์ก็จะมีมูลค่าเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ปัจจุบันตลาดอนุพันธ์เป็นตลาดที่ได้รับความนิยมและมีการใช้ตราสารอนุพันธ์กันอย่างแพร่หลายในตลาดการเงิน มีจุดเด่นที่ใช้เงินลงทุนน้อยแต่มีโอกาสได้ผลตอบแทนสูง สามารถใช้ตราสารอนุพันธ์ในการบริหารความเสี่ยง การลงทุนหรือการเก็งกำไร นับเป็นการช่วยเสริมสภาพคล่องให้กับตลาดการเงินของประเทศได้อีกทางและยังมีบทบาทสำคัญในการดำรงความเสถียรภาพทางเศรษฐกิ จ เนื่องจากตราสารอนุพันธ์ส่วนใหญ่ใช้อ้างอิงกับราคาหรือดัชนีของราคาสินค้าหรือสินทรัพย์ทางการเงินต่างๆ ตราสารอนุพันธ์ในตลาดเงินทั่วโลกสามารถแบ่งออกเป็น 4 ประเภทใหญ่ๆได้แก่ ฟิวเจอร์ส, ออปชัน, ฟอร์เวิร์ดและสวอป แต่ประเทศไทยมีการซื้อขายอยู่ 2 ประเภทคือฟิวเจอร์สและออปชันที่ผ่านมาได้มีการศึกษาและงานวิจัยที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองในการกำหนดราคาสัญญาซื้อขายตราสารอนุพันธ์มากมายซึ่งปรากฏใน [1 2 3 และอ้างอิงในบทความเหล่านั้น] อาทิเช่น

ในปี ค.ศ. 1995 Andrew W. และ Jiang Wang ได้นำเสนอแบบจำลองการกำหนดราคาออปชันในกรณีที่สามารถคาดการณ์อัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ได้

ในปี ค.ศ.1997 Simon Benninga และ Zvi Wiener ได้ศึกษาแบบจำลองทวินามในการกำหนดราคาออปชัน

ในปี ค.ศ. 2005 Henry L. Bryant และ Michael S. Haigh ได้นำเสนอแบบจำลองการกำหนดราคาอนุพันธ์และอนุกรมเวลาของการป้องกันความเสี่ยง

ในปี ค.ศ. 2008 Alok Gupta, Christoph Reisinger และ Alan Whitley ได้ศึกษาและเขียนบทความเกี่ยวกับความไม่แน่นอนของแบบจำลองและผลกระทบต่อการกำหนดราคาอนุพันธ์

ในปี ค.ศ. 2011 วลัยลักษณ์ ชวนัสพร ได้ทำงานวิจัยเรื่องการพิจารณาปัญหาการตัดสินใจในการลงทุนด้วยวิธีการวิเคราะห์การลงทุนที่เลียนแบบการหาค่าของออปชัน

ในปี ค.ศ. 2014 F.S. Emmanuel, A. O. Adedoyin และ O.O. Hammed ได้นำเสนอวิธีการวัดประสิทธิภาพและการคณิตศาสตร์เชิงการคำนวณของแบบจำลองการกำหนดราคาออ ปชันแบบอเมริกันและออปชันแบบยูโรเปียน

ตรรกศาสตร์ฟัซซี (Fuzzy Logic) เป็นตรรกศาสตร์ที่อยู่บนพื้นฐานความเป็นจริงที่ว่า ทุกสิ่งบนโลกแห่งความเป็นจริงไม่ใช่มีเฉพาะสิ่งที่มีความแน่นอนเท่านั้น แต่มีหลายสิ่งหลายเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างไม่เที่ยงและไม่แน่นอน คิดค้นโดย L.A. Zadeh ในปี ค.ศ. 1965 ต่อมาได้มีการนำตรรกศาสตร์ฟัซซี ไปประยุกต์ใช้ด้านต่างๆ อาทิเช่นทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ คอมพิวเตอร์ รวมทั้งทางด้านการเงินและการตัดสินใจ และเนื่องจากความผันผวนของราคาหุ้น การไม่ทราบถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงที่แน่ชัดของหุ้น นักคณิตศาสตร์และนักวิจับหลายคนจึงได้พยายามนำตรรกศาสตร์ฟัซซีมาประยุกต์ใช้กับการเลือกหุ้นลงทุนซึ่งสอดคล้องและสามารถแก้ปัญหาได้ตามหลักการของตรรกศาสตร์ฟัซซี

จากการศึกษาผลงานวิจัยดังกล่าว คณะผู้จัดจึงเกิดแนวคิด สร้างแบบจำลองตราสารอนุพันธ์ด้วยต้นไม้ทวินามโดยการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีซึ่งเป็นแนวคิดที่ยังไม่ปรากฏในงานวิจัยใดมาก่อน เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการพยากรณ์และคาดการณ์แนวโน้มของราคาตราสารอนุพันธ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การกำหนดราคาออปชัน

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาตลาดตราสารอนุพันธ์ออปชัน

1.2.2 เพื่อศึกษาแบบจำลองการกำหนดราคา

1.2.3 เพื่อศึกษาแบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม

1.2.4 เพื่อศึกษาแบบจำลองต้นไม้ทวินามของออปชันที่มีการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซี

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ศึกษาแบบจำลองราคาต้นไม้ทวินามของตราสารออปชันโดยประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์ฟัซซี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ช่วยให้นักลงทุนมีทางเลือกในการลงทุนมากขึ้น เช่นใช้ในการทำกำไรจากความแตกต่างระหว่างตลาด (Arbitrage) หรือใช้ในการเก็งกำไรหรือลงทุนให้ได้ผลตอบแทนเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงระดับราคาในตลาด

1.4.2 สามารถนำแบบจำลองต้นไม้ทวินามของออปชัน ที่มีการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีไปใช้ในการกำหนดราคาซื้อขาย

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับตราสารอนุพันธ์ออปชัน

1.5.2 ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับการกำหนดราคาออปชัน

1.5.3 ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ฟัซซี

1.5.4 ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองต้นไม้ทวินาม

1.5.5 ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองราคาอย่างง่าย, แบบจำลองราคาเวลาไม่ต่อเนื่อง

1.5.6 การกำหนดราคาออปชันโดยใช้แบบจำลองราคาอย่างง่ายที่มีการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซี

1.5.7 การกำหนดราคาออปชันโดยใช้แบบจำลองราคาเวลาไม่ต่อเนื่องที่มีการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซี

15.8 สรุปผลงานวิจัยและจัดทำรายงาน

1.6 ระยะเวลาดำเนินการ

ในการทำปัญหาพิเศษนี้ใช้เวลา 8เดือนระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงานแสดงไว้ในตาราง

การดำเนินงาน	ระยะเวลา							
	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับตราสารอนุพันธ์ออปชัน								
2. ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองต้นไม้ทวินาม								
3. ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ฟัซซี								
4. ศึกษาแบบจำลองต้นไม้ทวินามของออปชัน								
5. ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองราคาอย่างง่าย, แบบจำลองราคาเวลาไม่ต่อเนื่อง								
6. การกำหนดราคาออปชันโดยใช้แบบจำลองราคาอย่างง่ายที่มีการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซี								
7. การกำหนดราคาออปชันโดยใช้แบบจำลองราคาเวลาไม่ต่อเนื่องที่มีการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซี								
8. สรุปผลการวิจัยและจัดทำรายงาน								

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานตรรกศาสตร์ฟัซซี

Zadeh ได้เสนอแนวคิดการนิยามเซตฟัซซีจากฟังก์ชันสมาชิกในทำนองเดียวกับการกล่าวถึงเซตดั้งเดิมด้วยฟังก์ชันบ่งชี้เฉพาะ โดยมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า ค่าความเป็นสมาชิกสามารถเป็นไปได้หลายทางและมีค่าความเป็นสมาชิกเป็นจำนวนจริงได้ตั้งแต่ 0 ถึง 1 แทนที่จะมีค่าแค่เพียง 0 กับ 1 เท่านั้น โดยในบทที่ 2 นี้จะกล่าวถึงบทนิยามพื้นฐานของตรรกศาสตร์ฟัซซีในรูปของเซตฟัซซี

2.1 เซตฟัซซี (Fuzzy set)

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ A เป็นเซตดั้งเดิม ของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ บนเซตดั้งเดิม A

นิยามโดย $$\mathcal{A}=\{(x,\mu_A(x))\,|\,x\in A,\mu_A(x)\in[0,1]\} \tag{2.1}$$

เมื่อ $\mu_A:\mathrm{A}\to[0,1]$ และเรียก μ_A ว่า <u>ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก</u> ของเซตฟัซซี $\mathcal{A}$

หมายเหตุ ถ้าจะกล่าวถึงเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ บนเซตดั้งเดิม A จะกล่าวโดยย่อว่า " เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ "

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $A=\{1,2,3,4,5\}$ และ $\mathcal{U}=\{1,2,3,...,10\}$ นิยามเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ ภายใต้ความเป็นสมาชิกกำหนดโดย $\mu_A(x)=\dfrac{1}{x}$

จะได้ $$\mathcal{A}=\{(1,\mu_A(1)),(2,\mu_A(2)),(3,\mu_A(3)),(4,\mu_A(4)),(5,\mu_A(5))\}$$
$$=\left\{(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(4,\frac{1}{4}\right),\left(5,\frac{1}{5}\right)\right\}$$ #

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A

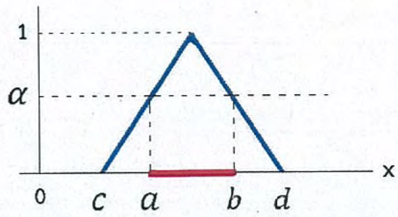
1. เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ <u>เป็นนอร์มอล (Normalized)</u> ก็ต่อเมื่อ มี $x\in A$ ซึ่ง $\mu_A(x)=1$
2. เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ <u>เป็นนอนนอร์มอล (Nonnormalized)</u> ก็ต่อเมื่อ $\mu_A(x)<1$ สำหรับทุกๆ $x\in A$

หมายเหตุ สำหรับเซตฟัซซีนอนนอร์มอล $\mathcal{A}$ สามารถทำให้เป็นเซตฟัซซีนอร์มอลได้ โดยนิยามฟังก์ชันสมาชิกใหม่เป็น $\bar{\mu}_A(x)=\dfrac{\mu_A(x)}{\max\mu_A(x)}$

บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A สำหรับทุกๆ $\alpha\in[0,1]$ เซตระดับ α (α-cut) ของ $\mathcal{A}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $[\mu_A]^\alpha$ นิยามโดย

$$[\mu_A]^\alpha=\begin{cases}\{x\in A\,|\,\mu_A(x)\geq\alpha\}&;\forall\alpha\in(0,1]\\ \overline{\{x\in A\,|\,\mu_A(x)>0\}}&;\alpha=0\end{cases} \tag{2.2}$$

หมายเหตุ เมื่อ $\bar{A}$ หมายถึง โคลสเชอร์ของ A



รูปที่ 2.1 แสดงเซตระดับ α

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดให้ $\mathcal{A}=\{(1,0.02),(2,0.05),(3,0.1),(4,0.5),(5,1)\}$ จงหาเซตระดับ α ต่อไปนี้ $[\mu_A]^0,[\mu_A]^{0.5},[\mu_A]^1$

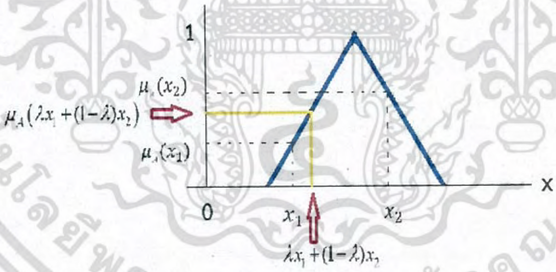
วิธีทำ จากบทนิยาม 2.3 จะได้

$$[\mu_A]^0 = \overline{\{x \in A \mid \mu_A(x) > 0\}} = \overline{\{1,2,3,4,5\}} = \{1,2,3,4,5\}$$

$$[\mu_A]^{0.5} = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq 0.5\} = \{4,5\}$$

$$[\mu_A]^1 = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq 1\} = \{5\}$$ #

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A เรียก $\mathcal{A}$ ว่า <u>เซตฟัซซีนูน</u> (Convex fuzzy set) เมื่อ $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$, สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in A$ และ $\lambda \in [0,1]$



รูปที่ 2.2 แสดงเซตฟัซซีนูน

2.2 จำนวนฟัซซี

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงนิยามทั่วไปของจำนวนฟัซซี ซึ่งจำนวนฟัซซีเป็นเซตฟัซซีชนิดหนึ่งที่มีสมบัติตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.5 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ จะเรียก $\mathcal{A}$ ว่า*จำนวนฟัซซี* ถ้า $\mathcal{A}$ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

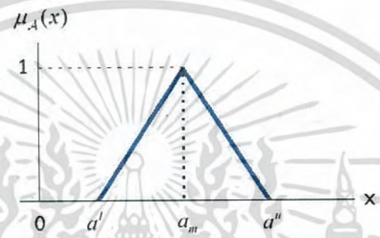
1. มี $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\mu_A(x) = 1$ (สมบัตินอร์มอล)
2. $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$, สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ และ $\lambda \in [0,1]$(สมบัตินูนฟัซซี)
3. สำหรับทุกๆ $\alpha \in [0,1]$ เซตระดับแอลฟา $[\mu_A]^\alpha = [a,b]$ สำหรับบางช่วงปิด $[a,b]$

ตัวอย่าง 2.3 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซี ซึ่งฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\mathcal{A}}:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$

นิยามโดย
$$\mu_{\mathcal{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a^l}{a^m-a^l} & ;a^l\le x\le a^m\\[2ex] \dfrac{x-a^u}{a^m-a^u} & ;a^m\le x\le a^u\\[2ex] 0 & ;otherwise\end{cases}$$

จะได้ว่า $\mathcal{A}$ เป็นจำนวนฟัซซี

พิสูจน์ จากนิยามของ $\mu_{\mathcal{A}}$ สามารถวาดกราฟได้ดังนี้



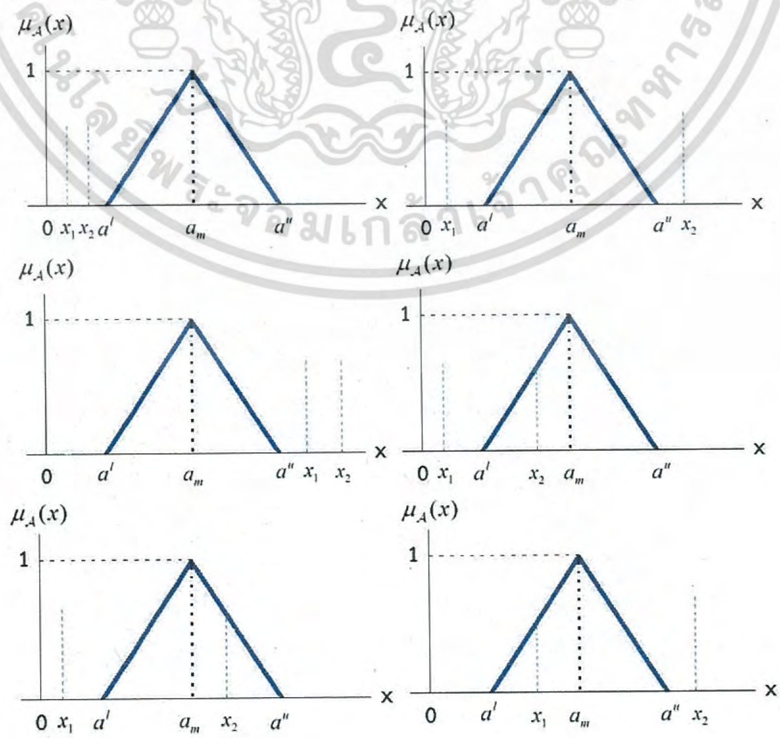
รูปที่ 2.3 แสดงเซตฟัซซี $\mathcal{A}$

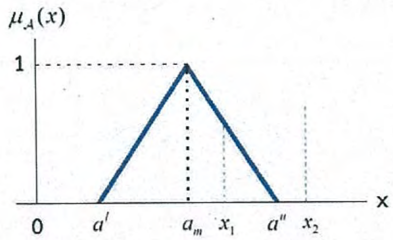
1) เนื่องจาก $\mu_{\mathcal{A}}(a^m)=\dfrac{a^m-a^l}{a^m-a^l}=\dfrac{a^m-a^u}{a^m-a^u}=1$

เพราะฉะนั้น $\mathcal{A}$ มีคุณสมบัติสอดคล้องเงื่อนไขที่ 1 ของบทนิยาม 2.5

2) กำหนดให้ $\lambda\in[0,1]$ และ ให้ $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า $x_1\le x_2$

<u>กรณี 1</u> $x_1\notin\left[a^l,a^u\right]$ หรือ $x_2\notin\left[a^l,a^u\right]$





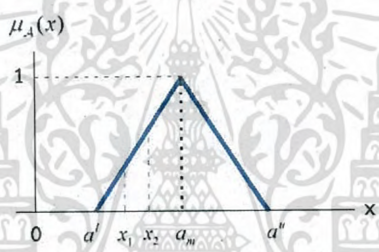
รูปที่ 2.4 แสดงกรณีที่ 1

จะได้ว่า $\mu_A(x_1)=0$ หรือ $\mu_A(x_2)=0$

ดังนั้นจะได้ว่า $\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge 0=\min\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\}$

<u>กรณี 2</u> $x_1\in\left[a^l,a^u\right]$ หรือ $x_2\in\left[a^l,a^u\right]$

<u>กรณีย่อย 2.1</u> $x_1,x_2\in\left[a^l,a^m\right]$



รูปที่ 2.5 แสดงกรณีย่อยที่ 2.1

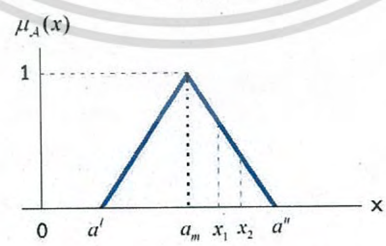
เนื่องจาก $\mu_A(x)=\dfrac{x-a^l}{a^m-a^l}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

และ $x_1\le\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\le x_2$

ดังนั้น $\mu_A(x_1)\le\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\mu_A(x_2)$

$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\mu_A(x_1)=\min\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\}=\mu_A(x_1)$

<u>กรณีย่อย 2.2</u> $x_1,x_2\in\left[a^m,a^u\right]$



รูปที่ 2.6 แสดงกรณีย่อยที่ 2.2

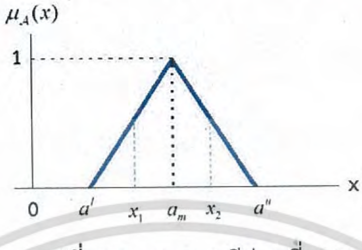
เนื่องจาก $\mu_A(x)=\dfrac{x-a^u}{a^m-a^u}$ เป็นฟังก์ชันลด

และ $x_1\le\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\le x_2$

ดังนั้น $\mu_A(x_1) \le \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \mu_A(x_2)$

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \mu_A(x_1) = \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} = \mu_A(x_1)$$

<u>กรณีย่อย 2.3</u> $x_1, x_2 \in \left[a^l, a^m\right] \wedge x_1, x_2 \in \left[a^m, a^u\right]$



รูปที่ 2.7 แสดงกรณีย่อยที่ 2.3

จะได้ $x_1 \le \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \le x_2$

และ $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \left[a^l, a^m\right] \vee \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \left[a^m, a^u\right]$

ถ้า $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \left[a^l, a^m\right]$

จะได้ $\mu_A(x_1) \le \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ เนื่องจาก μ_A เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left[a^l, a^m\right]$

ดังนั้น $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \mu_A(x_1) \ge \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$

ถ้า $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \left[a^m, a^u\right]$

จะได้ $\mu_A(x_2) \le \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ เนื่องจาก μ_A เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $\left[a^m, a^u\right]$

ดังนั้น $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \mu_A(x_2) \ge \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$

จากทั้ง กรณี 1 และ กรณี 2 สรุปได้ว่า จะได้เซตฟัซซี A มีสมบัตินูนฟัซซี

3) จากการนิยามของ μ_A เห็นชัดว่า

$$[\mu_A]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) > 0\}} = \overline{(a^l, a^u)} = \left[a^l, a^u\right]$$

ต่อไปจะแสดงว่า สำหรับทุกๆ $\alpha \in (0,1]$ เซตระดับแอลฟา $[\mu_A]^\alpha = [a,b]$ สำหรับบางช่วงปิด $[a,b]$

กำหนดให้ $\alpha \in (0,1]$ จะได้

$y \in \left\{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) \ge \alpha\right\}$

$\Leftrightarrow\ \mu_A(y) \ge \alpha$

$\Leftrightarrow\ \mu_A(y) = \dfrac{y-a^l}{a^m-a^l} \ge \alpha$ และ $\mu_A(y) = \dfrac{y-a^u}{a^m-a^u} \ge \alpha$

$\Leftrightarrow \mu_A(y) = y - a^l \ge \alpha(a^m - a^l)$ และ $\mu_A(y) = y - a^u \le \alpha(a^m - a^u)$

$\Leftrightarrow y \ge \alpha(a^m - a^l) + a^l > a^l$ และ $y \le \alpha(a^m - a^u) + a^u < a^u$

$\Leftrightarrow \alpha(a^m - a^l) + a^l \le y \le \alpha(a^m - a^u) + a^u$

$\Leftrightarrow y \in [\alpha(a^m - a^l) + a^l, \alpha(a^m - a^u) + a^u]$

นั่นคือ $[\mu_A]^\alpha = [\alpha(a^m - a^l) + a^l, \alpha(a^m - a^u) + a^u]$

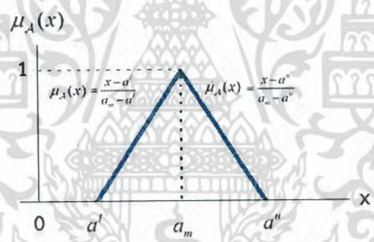
เพราะว่า $\mathcal{A}$ มีคุณสมบัติสอดคล้องเงื่อนไขทั้ง 3 ของบทนิยาม 2.5 ดังนั้น $\mathcal{A}$ จำนวนฟัซซี #

หมายเหตุ จำนวนฟัซซีในตัวอย่าง 2.3 เรียกว่า *จำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม* เนื่องจากกราฟของฟังก์ชันความเป็นสมาชิกมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม

จำนวนฟัซซีที่ใช้ในงานวิจัยนี้ เรียกว่า *จำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม* นิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 2.6 กำหนดให้ a^l, a^m, a^u เป็นจำนวนจริง และ $\hat{a}$ เป็นจำนวนฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\hat{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ เรียก $\hat{a}$ ว่า <u>จำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม</u> เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\langle a^l, a^m, a^u \rangle$ ถ้าฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\hat{a}}$ นิยามโดย

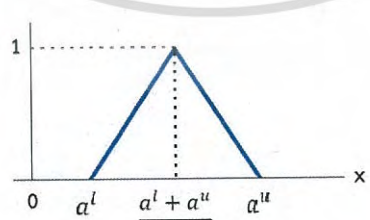
$$\mu_{\hat{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a^l}{a^m - a^l} & ; a^l \le x \le a^m \\ \dfrac{x - a^u}{a^m - a^u} & ; a^m \le x \le a^u \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$



รูปที่ 2.8 แสดงจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม

บทนิยาม 2.7 กำหนดให้ $\hat{a} = \langle a^l, a^m, a^u \rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม เรียก $\hat{a}$ ว่า <u>จำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว</u> เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\langle a^l, a^u \rangle$

เมื่อ $a_m = \dfrac{a^l + a^u}{2}$



รูปที่ 2.9 แสดงจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม 2.8 กำหนดให้ $\hat{a}=\langle a^l, a^u \rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะกล่าวว่า $\hat{a}$ เป็นจำนวนฟัซซีบวก ถ้า $a^l > 0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a} > 0$

จะกล่าวว่า $\hat{a}$ เป็นจำนวนฟัซซีลบ ถ้า $a^u < 0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a} < 0$

2.3 ตัวดำเนินการของฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม 2.9 กำหนดให้ $\hat{a}=\langle a^l, a^u \rangle$และ $\hat{b}=\langle b^l, b^u \rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $k \in \mathbb{R}$ นิยามตัวดำเนินการระหว่าง $\hat{a}$, $\hat{b}$ และ k ดังนี้

1) การบวก: $\hat{a}+\hat{b}=\langle a^l + b^l, a^u + b^u \rangle$

2) การคูณ: $\hat{a}\times\hat{b}=\left\langle \min\left\{a^l b^l, a^l b^u, a^u b^l, a^u b^u\right\}, \max\left\{a^l b^l{}_1, a^l b^u, a^u b^l, a^u b^u\right\}\right\rangle$

3) การคูณด้วยสเกลาร์: $k\cdot\hat{a}\begin{cases} =\langle ka^l, ka^u \rangle \;;\; k \geq 0 \\ =\langle ka^u, ka^l \rangle \;;\; k < 0 \end{cases}$

4) การลบ: $\hat{a}-\hat{b}=\hat{a}+(-1)\hat{b}=\langle a^l - b^u, a^u - b^l \rangle$

5) สำหรับจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ ซึ่ง $\hat{a}>0$ หรือ $\hat{a}<0$ อินเวอร์สเทียม(Pseudo inverse) ของ $\hat{a}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a}^{-1}$ นิยามโดย $\langle (a^u)^{-1}, (a^l)^{-1} \rangle$

6) การหาร: สำหรับจำนวนฟัซซี $\hat{b}>0$, จำนวนฟัซซี $\hat{a}$ หารด้วย $\hat{b}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a}/\hat{b}$ นิยามโดย $\hat{a}/\hat{b}=\hat{a}\times\hat{b}^{-1}=\left\langle \min\left\{\frac{a^l}{b^l},\frac{a^l}{b^u},\frac{a^u}{b^l},\frac{a^u}{b^u}\right\}, \max\left\{\frac{a^l}{b^l},\frac{a^l}{b^u},\frac{a^u}{b^l},\frac{a^u}{b^u}\right\}\right\rangle$

2.4 ดีฟัซซีฟิเคชัน

ดีฟัซซีฟิเคชันคือการแปลงเซตฟัซซีบนเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ให้เป็นค่าดั้งเดิม (ค่าจำนวนจริง) ที่นิยมใช้กันมีอยู่หลายวิธี ได้แก่

1. วิธีหลักความเป็นสมาชิกมากสุด (Maxima principle or Height method)
2. วิธีหลักความเป็นสมาชิกมากสุดตัวน้อยสุด (First-of-Maxima)
3. วิธีหลักความเป็นสมาชิกมากสุดตัวมากสุด (Last-of-Maxima)
4. วิธีค่าจุดกึ่งกลางต่ำสุด-จุดสูงสุด (Middle of Max-min)
5. วิธีค่าเฉลี่ยของจุดกึ่งจุดต่ำสุด-จุดสูงสุด (Average of Middle of Max-min)
6. วิธีจุดศูนย์ถ่วง (Center of gravity method or Centroid method)
7. วิธีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของจุดศูนย์ถ่วง (Weighted average of Center of gravity method)

ซึ่งในงานวิจัยนี้ทั้ง 7 วิธีนี้สามารถหาคำตอบได้เท่ากัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $D_{\max}$

บทนิยาม 2.10 กำหนดให้ $\hat{u}=\langle u^l, u^u \rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว การดีฟัซซีฟิเคชันวิธีหลักความเป็นสมาชิกสูงสุด จะได้ $\bar{u}=D_{\max}(\hat{u})=\frac{u^l+u^u}{2}$

2.5 ตัวดำเนินการดีฟัซซีฟิเคชันของฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม 2.11 กำหนดให้ $\hat{u}=\left\langle u^{l},u^{u}\right\rangle$ และ $\hat{v}=\left\langle v^{l},v^{u}\right\rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $k\in\mathbb{R}$ เป็นสเกลาร์ นิยามตัวดำเนินการระหว่าง $\hat{u}$, $\hat{v}$ และ k ดังนี้

1) การหาจำนวนจริง: $D_{\max}\left(k\right)=k$

2) การคูณด้วยสเกลาร์: $D_{\max}\left(k\cdot\hat{u}\right)=kD_{\max}(u)$

3) การบวก: $D_{\max}\left(\hat{u}+\hat{v}\right)=D_{\max}\left(\hat{u}\right)+D_{\max}\left(\hat{v}\right)$

4) การคูณ: $D_{\max}\left(\hat{u}\cdot\hat{v}\right)=v^{l}D_{\max}\left(\hat{u}\right)+u^{u}D_{\max}\left(\hat{v}\right)-v^{l}u^{u}$

บทที่ 3

ความรู้พื้นฐานทางด้านการเงิน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานทางด้านการเงินที่ใช้ในงานวิจัย

3.1 อัตราดอกเบี้ย

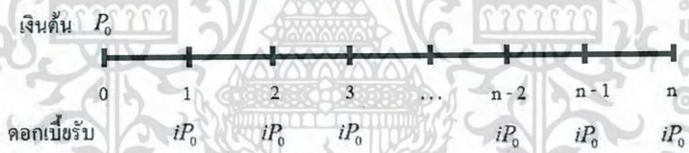
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอัตราดอกเบี้ย โดยทั่วไปแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ ดอกเบี้ยเชิงเดียวหรือดอกเบี้ยอย่างง่าย (Simple Interest) และดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest) ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1 ดอกเบี้ยเชิงเดียวคือ ดอกเบี้ยหรือผลตอบแทนที่คิดจากเงินต้นเท่านั้นในแต่ละคาบเวลา

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้าลงทุนด้วยเงินต้น P_0 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว i ระยะเวลา n คาบ จะได้เงินสะสมหรือมูลค่าสะสมที่เวลา t

$$S_t = P_0\left(1+it\right) \tag{3.1}$$

ดอกเบี้ยที่ได้รับแต่ละงวดสามารถเขียนแสดง ตามแผนภาพ ดังนี้

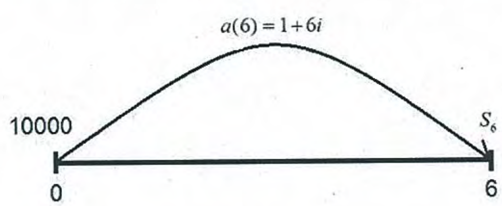


รูปที่ 3.1 แสดงดอกเบี้ยเชิงเดียว จากการลงทุนด้วยเงินต้น P_0 บาท

บทนิยาม 3.3 ให้ $i>0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว เรียก $a(t)=1+it$ สำหรับ $t\geq 0$ ว่าฟังก์ชันเงินสะสม ด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว ซึ่งเป็นเงินสะสมของเงินต้น 1 บาท ณ เวลา t ใดๆ

ตัวอย่าง 3.1 จงหาเงินสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 6 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว 10% ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์สามารถเขียนแทนได้ด้วยแผนภาพการเงิน ดังนี้



นั่นคือ $S_6 = 10,000\left(1+0.1(6)\right) = 16,000$

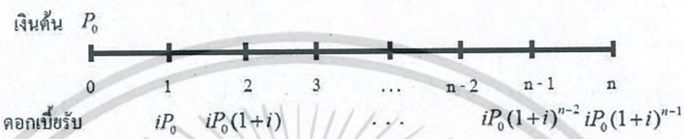
ดังนั้น เงินสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 6 เท่ากับ 16,000 บาท #

บทนิยาม 3.4 ดอกเบี้ยทบต้นคือ ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้น และสำหรับคาบเวลาถัดไปจะนำดอกเบี้ยที่ได้รับในแต่ละงวดที่ผ่านมาไปรวมเป็นเงินต้น ณ คาบเวลานั้น

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้าลงทุนด้วยเงินต้น P_0 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ระยะเวลา n คาบ จะได้เงินสะสมหรือมูลค่าสะสมที่เวลา t

$$S_t = P_0\left(1+i\right)^t \tag{3.2}$$

ดอกเบี้ยที่ได้รับแต่ละงวดสามารถเขียนแสดง ตามแผนภาพ ดังนี้

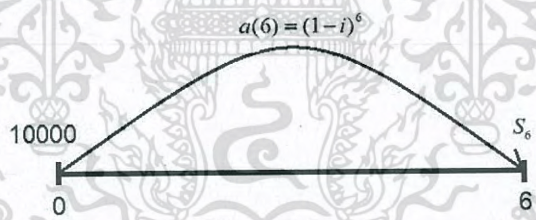


รูปที่ 3.2 แสดงดอกเบี้ยทบต้น จากการลงทุนด้วยเงินต้น P_0 บาท

บทนิยาม 3.5 ให้ $i>0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้น เรียก $a(t)=(1+i)^t$ สำหรับ $t \geq 0$ ว่าฟังก์ชันเงินสะสม ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น ซึ่งเป็นเงินสะสมของเงินต้น 1 บาท ณ เวลา t ใดๆ

ตัวอย่าง 3.2 จงหาเงินสะสมของเงินต้น $10,000$ บาท ณ ปลายปีที่ 6 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์สามารถเขียนแทนได้ด้วยแผนภาพการเงิน ดังนี้



นั่นคือ $S_6 = 10,000(1+0.1)^6 = 17,715.61$

ดังนั้น เงินสะสมของเงินต้น $10,000$ บาท ณ ปลายปีที่ 6 เท่ากับ $17,715.61$ บาท #

3.2 มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงมูลค่าปัจจุบัน (Present Value) และมูลค่าอนาคต (Future Value) ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.6 มูลค่าปัจจุบัน เป็นมูลค่า ณ ปัจจุบันหรือมูลค่าของเงินลงทุน ณ วันใดวันหนึ่งที่เราพิจารณา ซึ่งแทนด้วย PV และมูลค่าอนาคต เป็นมูลค่าสะสม ณ เวลาที่ t ในอนาคตจากการลงทุนด้วยมูลค่าปัจจุบัน PV สะสมด้วยฟังก์ชันเงินสะสม $a(t)$ นั่นคือ

$$FV = PV \cdot a(t) \tag{3.3}$$

เมื่อ t เป็นระยะเวลาการลงทุนจากปัจจุบัน(วันที่พิจารณา)

จากสมการ (3.3) สามารถหามูลค่าปัจจุบันได้เท่ากับ

$$PV = FV \cdot \frac{1}{a(t)}$$

หมายเหตุ สำหรับ $\frac{1}{a(t)}$ เรียกว่า ฟังก์ชันส่วนลด(Discount Function)

สำหรับฟังก์ชันส่วนลดซึ่งคิดจากดอกเบี้ยเชิงเดียว จะได้ว่า

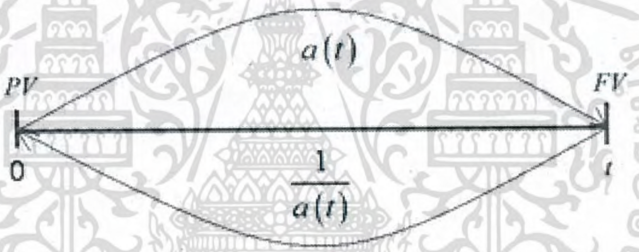
$$\frac{1}{a(t)} = (1+it)^{-1} \tag{3.4}$$

สำหรับฟังก์ชันส่วนลดซึ่งคิดจากดอกเบี้ยทบต้น จะได้ว่า

$$\frac{1}{a(t)} = (1+i)^{-t} = v^t \tag{3.5}$$

เมื่อ $v = (1+i)^{-t}$ จะเรียก v ว่าตัวประกอบส่วนลด(Discount Factor)

เราสามาเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตได้ดังนี้



รูปที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

ตัวอย่าง 3.3 บริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งออกพันธบัตรชนิดหนึ่งที่เรียกว่าCatastrophe Bond หรือ CAT Bond พันธบัตรนี้ให้ผลตอบแทนเป็นดอกเบี้ยทบต้น 8%ต่อปี เป็นระยะเวลา 1ปี โดยพันธบัตรนี้จะจ่ายเงินเท่ามูลค่าอนาคตให้กับผู้ถือพันธบัตร ถ้าในปีนั้นมูลค่าความเสียหายต่ำกว่ามูลค่าอนาคต แต่หากมูลค่าความเสียหายสูงกว่ามูลค่าอนาคต ผู้ลงทุนจะได้รับคืนเฉพาะเงินต้น สมมติว่า นักลงทุนตัดสินใจซื้อพันธบัตรจำนวน 100ล้านบาท

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) บริษัทประกันภัยแห่งนี้จะต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าใดในกรณีไม่เกิดมหัตภัยหรือมูลค่าความเสียหายน้อยกว่ามูลค่าอนาคต

วิธีทำ บริษัทประกันภัยแห่งนี้จะต้องจ่ายเงินเท่ามูลค่าอนาคต

จะได้ $FV = PV \cdot a(1)$

$= 100,000,000(1+0.08)$

$= 108,000,000$ บาท #

2) ถ้าบริษัทประกันภัยแห่งนี้ นำเงิน 100 ล้านบาทที่ได้รับมาไปลงทุนต่อโดยได้ผลตอบแทน 4% ต่อปี จงหาว่าบริษัทประกันภัยแห่งนี้ยังต้องเตรียมเงินเพื่อชดใช้เงินต้นและดอกเบี้ยที่จะต้องจ่ายกับผู้ถือพันธบัตรCAT Bondเป็นจำนวนเท่าใด หลังจากหักมูลค่าอนาคตของเงินที่นำไปลงทุนตามที่กล่าวมาข้างต้น

วิธีทำ บริษัทประกันภัยแห่งนี้นำเงินไปลงทุนได้ผลตอบแทน 4% ต่อปี

จะได้ $S_1 = 100,000,000(1+0.04)$

$= 104,000,000$ บาท

ดังนั้น บริษัทประกันภัยแห่งนี้ต้องเตรียมเงินอีก $= 108,000,000 - 104,000,000$

$= 4,000,000$ บาท #

3) จากข้อ 2) เพื่อเป็นการเพิ่มความมั่นใจแก่ผู้ถือพันธบัตร CAT Bond บริษัทประกันภัยแห่งนี้จำเป็นต้องสำรองเงินเพื่อฝากในกองทุนป้องกันความเสี่ยง (Trust Fund) ที่ให้ผลตอบแทน 5%ต่อปี เป็นเงินเท่าใดจึงจะเพียงพอกับเงินที่ชดใช้เงินต้นและดอกเบี้ยที่ต้องจ่ายกับผู้ถือพันธบัตร CAT Bond

วิธีทำ จากข้อ 2) บริษัทประกันภัยแห่งนี้ต้องจ่ายเพิ่มปลายปีที่ $1 = 4,000,000$ บาท

นั่นแสดงว่า บริษัทประกันภัยแห่งนี้ต้องสำรองเงิน x บาท เพื่อนำไปฝากกองทุนแล้วปลายปีที่ 1 ต้องได้เท่ากับ $4,000,000$ บาท

จะได้ว่า
$$S_1 = x(1+0.05)$$
$$4,000,000 = x(1+0.05)$$
$$x = 3,809,523 \text{ บาท}$$

ดังนั้น บริษัทประกันภัยแห่งนี้ต้องสำรองเงินเพื่อนำไปฝากกองทุนเป็นเงิน $3,809,523$ บาท #

3.3 อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามและอัตราดอกเบี้ยแท้จริง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม(Nominal Interest Rate : NIR)และอัตราดอกเบี้ยแท้จริง(Effective Interest Rate : EIR) ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.7 จะเรียกอัตราดอกเบี้ย i ต่อปีซึ่งคิดทบต้น m ครั้งต่อปี ว่า **อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม** เขียนแทนด้วย i^m และเรียก $\frac{i^m}{m}$ ว่าอัตราดอกเบี้ยต่อครั้ง

โดยทั่วไป m สามารถเป็นจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ได้ เช่น $i^{(2/3)}$ หมายความว่า การคิดดอกเบี้ย $\frac{2}{3}$ ครั้งต่อปีหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า คิดดอกเบี้ย 2 ครั้ง ต่อ 3 ปี

บทนิยาม 3.8 ให้ $i^{(m)}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม และ i เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปี จะเรียก i ว่า **อัตราดอกเบี้ยแท้จริง** เทียบเท่ากับ อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)}$ ถ้า

$$1+i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \tag{3.6}$$

จากบทนิยาม 3.8 อาจกล่าวว่า i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริง เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)}$ ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันเงินสะสมของทั้งสองเท่ากัน นั่นคือ

$$(1+i)^t = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} \text{ สำหรับทุกๆ } n \ge 0 \text{ (ปี)} \qquad (3.7)$$

ตัวอย่าง 3.4 จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี คิดทบต้นทุก 4 เดือน

วิธีทำ จาก
$$1+i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

ในที่นี้ $m=3$ และ $i^{(3)}=0.06$ แทนค่าจะได้

$$1+i = \left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{3}$$

$$i = 0.0612$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ย i เท่ากับ 6.12% ต่อปี #

ตัวอย่าง 3.5 จงหาอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(3)}$ ที่เทียบเท่ากับ อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(12)}=12\%$

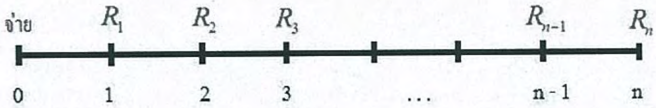
วิธีทำ ความสัมพันธ์ $\left(1+\frac{i^{(3)}}{3}\right)^{3} = 1+i = \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$

จะได้ $\left(1+\frac{i^{(3)}}{3}\right)^{3} = \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$

โดยการแก้สมการ จะได้ $i^{(3)} = 0.1218 = 12.18\%$ #

3.4 กระแสเงินสดจ่าย

กระแสเงินสดจ่าย (Streams of Payments) แสดงถึงเงินสดที่จ่ายในแต่ละเวลา กำหนดให้ $R_k, k=1,2,\ldots,n$ เป็นเงินสดจ่ายที่เวลา $n=k$ ภายใต้อัตราดอกเบี้ย i ต่อคาบ สามารถพิจารณากระแสเงินสดจ่ายซึ่งด้วยแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 3.4 แสดงกระแสเงินสดที่จ่ายในละเวลา

มูลค่าอนาคตหรือมูลค่าเงินสะสม $S_n = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \ldots + R_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-k}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $R_k = R$ ทุกๆ $k=1,2,3,\ldots,n$ จะได้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} R(1+i)^{n-k} = RS_{\overline{n}|i}$

เมื่อ $S_{\overline{n}|i} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

มูลค่าปัจจุบัน $PV = R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n$

$$= \sum_{k=1}^{n} R_k v^k \quad \text{โดยที่} \quad v = \frac{1}{1+i}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $R_k = R$ ทุกๆ $k = 1,2,3,\ldots,n$ จะได้ $PV = \sum_{k=1}^{n} Rv^k = Ra_{\overline{n}|i}$

เมื่อ $a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} v^k = \dfrac{1-v^n}{i}$

3.5 สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง

สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงในที่นี้จะหมายถึง สินทรัพย์ที่ทราบมูลค่าหรือราคาที่เวลาต่างๆ แน่นอน นั่นคือ ถ้าเราลงทุนในสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง แล้วเราจะได้ผลตอบแทนในอัตราที่แน่นอน ตัวอย่างของสินทรัพย์เช่น เงินฝาก ตั๋วเงินฝาก ตราสารหนี้ พันธบัตรรัฐบาล ตั๋วเงินคลัง เป็นต้น สำหรับในงานวิจัยนี้ จะใช้ตราสารหนี้เป็นตัวแทนของสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง

3.5.1 ตราสารหนี้

ตราสารหนี้ (Bonds) เป็นตราสารทางการเงินชนิดหนึ่งซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างผู้ออกตราสาร (ลูกหนี้) กับผู้ซื้อตราสาร (เจ้าหนี้) ตราสารหนี้ประกอบด้วยองค์ประกอบต่างๆดังต่อไปนี้

1) ราคาที่ตราไว้หรือมูลค่าที่ตราไว้ (Face value) แทนด้วย F

2) ราคาไถ่ถอนหรือมูลค่าไถ่ถอน (Maturity value) แทนด้วย C

3) วันครบกำหนดไถ่ถอนหรืออายุของตราสาร แทนด้วย T

4) อัตราคูปอง แทนด้วย r

5) อัตราผลตอบแทนหรืออัตราดอกเบี้ย แทนด้วย i

6) ราคาซื้อของตราสาร แทนด้วย P

3.5.2 ประเภทของตราสารหนี้ แบ่งตามลักษณะของการจ่ายคูปอง

ประเภทของตราสารหนี้ แบ่งตามลักษณะของการจ่ายคูปองแบ่งได้ 2 ประเภท คือ

1) ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (Zero-coupon bond) เป็นตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายคูปองซึ่งราคาที่ตราไว้อาจจะเท่ากับหรือไม่เท่ากับ ราคาไถ่ถอนก็ได้ ถ้าราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้นักลงทุนมักจะซื้อตราสารในราคาส่วนลด (ราคาที่ต่ำกว่าราคาที่ตราไว้)

2) ตราสารหนี้มีคูปอง (Coupon bond) เป็นตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองตามอัตราคูปองที่กำหนดไว้ ราคาที่ตราไว้อาจจะเท่ากับหรือไม่เท่ากับราคาไถ่ถอนก็ได้ แต่โดยทั่วไปมักจะกำหนดให้เท่ากัน

3.6 การประเมินราคาตราสารหนี้

3.6.1 ราคาตราสารหนี้ที่ไม่มีคูปอง

พิจารณา ตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ n ปี ซึ่งมีราคาที่ตราไว้ F ราคาไถ่ถอน C อัตราดอกเบี้ย i ถ้าให้ P เป็นราคาซื้อ ณ เวลาเริ่มต้น จะได้สมการแสดงมูลค่า

มูลค่าปัจจุบันของเงินที่ลงทุน = มูลค่าปัจจุบันของเงินที่ได้รับ

$$P = C(1+i)^{-n}$$
$$= Cv^n$$

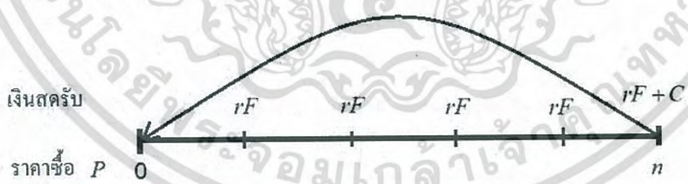
เมื่อ $v = (1+i)^{-1}$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $C = F$

จะได้ $$P = F(1+i)^{-n}$$
$$= Fv^n$$

3.6.2 ราคาตราสารหนี้ที่มีคูปอง

พิจารณาตราสารหนี้ที่มีคูปอง อายุ n ปี ซึ่งมีราคาที่ตราไว้ F ราคาไถ่ถอน C อัตราดอกเบี้ย i ถ้าให้ P เป็นราคาซื้อ ณ เวลาเริ่มต้น จะได้สมการแสดงมูลค่า



มูลค่าปัจจุบันของเงินที่ลงทุน = มูลค่าปัจจุบันของเงินที่ได้รับ

$$P = rFa_{\overline{n}|i} + Cv^n$$

เมื่อ $v = (1+i)^{-1}$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $C = F$

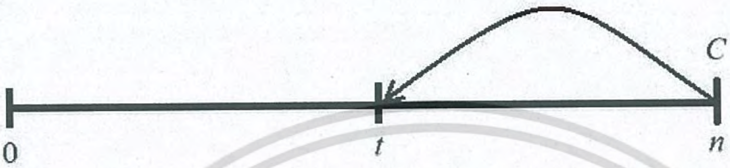
จะได้ $$P = rFa_{\overline{n}|i} + Fv^n$$
$$= F\left(ra_{\overline{n}|i} + v^n\right)$$

3.7 มูลค่าตามบัญชีของตราสารหนี้

มูลค่าตามบัญชีของตราสารหนี้อายุ n ปีโดยพิจารณามูลค่าปัจจุบันของตราสารหนี้ที่เวลา t ใดๆ ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(t,n)$

1) ตราสารหนี้ที่ไม่มีคูปอง

พิจารณามูลค่าตามบัญชีของตราสารหนี้ $B(t,n)$ จะได้ว่า



$$B(t,n)=Cv^{n-t}$$

2) ตราสารหนี้ที่มีคูปอง

พิจารณามูลค่าตามบัญชีของตราสารหนี้ $B(t,n)$ ณ ที่ t หลังจากจ่ายคูปองครั้งที่ t ไปแล้ว จะได้ว่า

$$B(t,n)=rFa_{\overline{n-t}|i}+Cv^{n-t}$$

3.8 สินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง

สินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง (Risky Assets) ในที่นี้จะหมายถึง สินทรัพย์ที่ทราบมูลค่าหรือราคาไม่แน่นอนนั่นคือ ถ้าเราลงทุนในสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง แล้วเราจะได้ผลตอบแทนในอัตราที่ไม่แน่นอน เช่น การซื้อขายหุ้น การซื้อขายแลกเปลี่ยนเงินตรา ราคาทองคำ เป็นต้น สำหรับในงานวิจัยนี้จะใช้หุ้นเป็นตัวแทนของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง

บทนิยาม 3.9 ให้ $S(t)$ เป็นราคาหุ้น สำหรับ $t>0$ เรียก $S(0)$ ว่าเป็นราคาปัจจุบันของหุ้น และเรียก $S(t)$ ว่าเป็นราคาในอนาคตของหุ้น ในที่นี้ $S(t)$ จะพิจารณาเป็นตัวแปรเชิงสุ่มบนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω

บทนิยาม 3.10 กำหนดให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่าง ซึ่งเป็นเซตของผลที่เป็นไปได้ทั้งหมด กำหนดแฟมมิลี $\mathcal{F}=\{\varnothing\}\cup\{E|E\subseteq\Omega\}$ โดยที่ $\mathcal{F}$ มีสมบัติดังนี้

1. ถ้า $E\in\mathcal{F}$ แล้ว $E^c\in\mathcal{F}$

3. ยูเนียนของสมาชิกในแฟมมิลีนับได้ของ $\mathcal{F}$ เป็นสมาชิกของ $\mathcal{F}$ นั่นคือ ถ้า C เป็นแฟมมิลีนับได้ของ $\mathcal{F}$ แล้ว $\bigcup_{E\in C}E\in\mathcal{F}$

บทนิยาม 3.11 กำหนดให้ $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ นิยามโดย $P(E)=\sum_{x\in E}p(x)$ สำหรับทุกๆ $E\in\mathcal{F}$ โดย $p:\Omega\to[0,1]$ ซึ่ง $\sum_{x\in\Omega}p(x)=1$ จะเรียก P ว่า ตัววัดความน่าจะเป็น บน $\mathcal{F}$ และเรียก p ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น และเรียกสามสิ่งอันดับ $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ว่า ปริภูมิความน่าจะเป็น

บทนิยาม 3.12 กำหนดให้ Ω เป็นปริภูมิความน่าจะเป็นเหตุการณ์การเคลื่อนไหวราคาที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งจะเรียกว่า **สถานการณ์** หรือ **ซีนารีโอส์** และในที่นี้กำหนด $S(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มบวกบนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω นั่นคือ

$$S(t):\Omega\to(0,\infty)$$

บทนิยาม 3.13 กำหนดให้ $S(t,\omega)$ แทนราคาหุ้นที่เวลา t เมื่อราคาในตลาดเป็นไปตามสถานการณ์ $\omega\in\Omega$ และสำหรับแต่ละ $t>0$ นั่นคือ จะมีอย่างน้อย 2 สถานการณ์ $\omega_1,\omega_2\in\Omega$ ซึ่ง $S(t,\omega_1)\neq S(t,\omega_2)$ ในที่นี้กำหนดให้เวลา $t=n\tau$ โดยที่ $n=0,1,2,3...$ และ τ เป็นความกว้างของ 1 คาบเวลา

3.8.1 ผลตอบแทน (Return) คือกระแสเงินสดที่ผู้ลงทุนได้รับช่วงระยะเวลาที่ลงทุน มีลักษณะเป็นดอกเบี้ยที่ผู้ออกตราสารจ่ายให้แก่ผู้ลงทุน เมื่อครบกำหนดจ่ายดอกเบี้ย ผู้ออกตราสารสามารถจ่ายเงินปันผลในรูปเงินสดหรือหุ้นก็ได้

บทนิยาม 3.14 ให้ $S(t)$ เป็นราคาต่อหุ้นที่ราคา t อัตราผลตอบแทนบนช่วงเวลา $[m,n]$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $K(m,n)$

$$K(m,n)=\frac{S(n)-S(m)}{S(m)}$$

หรืออีกรูปแบบหนึ่งเขียนเป็น

$$S(n)=(1+K(m,n))S(m)$$

และ ผลตอบแทน บน 1 ช่วงเวลา คือ $K(n-1,n)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $K(n)$

กรณีที่ไม่นำเงินปันผลมาพิจาณา จะได้อัตราผลตอบแทน

$$K(n)=\frac{S(n)-S(n-1)}{S(n-1)}$$

กรณีที่นำเงินปันผลเข้ามาพิจารณา จะได้อัตราผลตอบแทน

$$K(n)=\frac{S(n)-S(n-1)+Div(n)}{S(n-1)}$$

หมายเหตุ เมื่อ $Div(n)$ เป็นเงินปันผลต่อหุ้นที่จ่ายในคาบที่ n

3.8.2 ผลตอบแทนคาดหวัง

บทนิยาม 3.15 กำหนดให้ เป็นอัตราผลตอบแทนซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่เวลา และกำหนด เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น เรียก ว่า ผลตอบแทนคาดหวัง

บทนิยาม 3.16 กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ความแปรปรวน (Variance) ของ X เขียนแทนด้วย $Var[X]$ นิยามโดย

$$Var[X] = E[X - E[X]]^2$$

บทนิยาม 3.17 กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ของ X เขียนแทนด้วย σ_X นิยามโดย

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$$

ทฤษฎีบท 3.18 กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม จะได้ว่า

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

ทฤษฎีบท 3.19 กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม และ $a,b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$$

ทฤษฎีบท 3.20 กำหนดให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งทุกคู่ใดๆอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$Var[X_1 + X_2 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X]$$

3.9 ตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน

ตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน (Financial Derivative) เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการบริหารจัดการความเสี่ยงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์ เป็นสัญญาทางการเงินระหว่างบุคคลตั้งแต่สองฝ่ายขึ้นไปเพื่อตกลงซื้อขายสินทรัพย์ทางการเงินในปัจจุบัน แต่ทำการส่งมอบและชำระกันในอนาคต ดังนั้นตราสารอนุพันธ์ ผูกติดกับสินทรัพย์อย่างใดอย่างหนึ่ง เรียกว่า เป็นสินทรัพย์อ้างอิง (Underlying assets) เช่น หุ้น อัตราดอกเบี้ย เงินตราต่างประเทศ ทอง บ้าน เป็นต้น

ตราสารอนุพันธ์แบ่งออกได้ 3กลุ่มใหญ่ คือสัญญาฟิวเจอร์สและสัญญาฟอร์เวิร์ดออปชัน และสวอป

3.9.1 สัญญาฟิวเจอร์สและสัญญาฟอร์เวิร์ด (Future & Forward Contract)

เป็นสัญญาหรือข้อตกลงที่ต้องปฏิบัติตามในการที่จะซื้อหรือจะขายสินทรัพย์ล่วงหน้าโดยจะต้องมีการส่งมอบและชำระเงินตามราคาที่ตกลงกันไว้ล่วงหน้า ซึ่งมักทำครั้งเดียว

3.9.2 สวอป (Swaps)

เป็นสัญญาหรือข้อตกลงในการแลกเปลี่ยนกระแสเงินหรืออัตราดอกเบี้ย โดยมีการกระทำอย่างต่อเนื่อง (สัญญาสวอป คือ สัญญาฟิวเจอร์สที่มีการทำธุรกรรมอย่างต่อเนื่อง)

3.9.3 ออปชัน (Option)

เป็นตราสารอนุพันธ์ที่จะให้สิทธิแก่ผู้ถือ โดยที่ผู้ถือสามารถเลือกได้ว่าจะซื้อหรือขายสินค้าอ้างอิงในเงื่อนไขตามที่ระบุไว้ในสัญญา ในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงสัญญาออปชันเท่านั้น

สำหรับในงานวิจัยนี้จะศึกษาตราสารอนุพันธ์ประเภทออปชันเท่านั้น ซึ่งจะขอลงรายละเอียดดังต่อไปนี้

ผู้ใช้ประโยชน์จากอนุพันธ์

1.ผู้ป้องกันความเสี่ยง: การแลกเปลี่ยนเงินตราล่วงหน้าเพื่อป้องกันความเสี่ยงที่ค่าของเงินอาจสูงขึ้น

3.นักค้ากำไร (Arbitrage): นักลงทุนโดยอาศัยความไม่สมดุลของราคา (ช่วงว่างของราคา) ของ 2 ตลาด เช่น ตราสารอนุพันธ์

3.นักเก็งกำไร (Speculator): อาศัยความผันผวนของกำไรในตลาดเดียวกัน

3.10 ออปชัน

3.10.1 ประเภทของออปชัน

ออปชันแบ่งตามการให้สิทธิออกเป็น 2 ประเภทคือ

1) คอลออปชันซึ่งป็นออปชันที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือในการซื้อสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคตมีการกำหนดราคาใช้สิทธิและช่วงราคาที่สามารถใช้สิทธิได้อย่างชัดเจน

2) พุทออปชันจะเป็นออปชันที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือในการขายสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคตมีการกำหนดราคาใช้สิทธิและช่วงราคาที่สามารถใช้สิทธิได้อย่างชัดเจนเช่นกัน

ทั้งนี้วันที่ที่ระบุไว้ในสัญญาจะแสดงถึงวันหมดอายุหรือวันสิ้นอายุการใช้สิทธิ และราคาที่ระบุไว้ในสัญญาจะเรียกว่าราคาใช้สิทธิ และยังสามารถแบ่งตามระยะเวลาใช้สิทธิเป็น อเมริกันออปชันและยูโรเปียนออปชัน ซึ่งอเมริกันออปชันนั้นจะเป็นออปชันที่ผู้ถือสามารถใช้สิทธิได้ตลอดเวลาจนกระทั่งสิ้นสุดการใช้สิทธิ แต่ยูโรเปียนออปชันจะเป็นออปชันที่ผู้ถือสามารถใช้สิทธิได้เฉพาะวันสิ้นสุดการใช้สิทธิที่ระบุไว้ในสัญญาเท่านั้น

3.10.2 ประโยชน์ของออปชัน

1. ป้องกันความเสี่ยง

3. การเก็งกำไร การลงทุนในสัญญาออปชันแทนการลงทุนในสินทรัพย์อ้างอิงจะทำให้นักลงทุนสามารถสร้างผลตอบแทนได้สูงขึ้น

3. ช่วยเพิ่มผลตอบแทนจากการลงทุน

4. เป็นทางเลือกในการลงทุนที่ให้อัตราผลตอบแทนสูง

5. เครื่องมือช่วยในการตัดสินใจซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิง

ตัวอย่าง 3.6 พิจารณาหุ้น ในราคาและเวลาที่กำหนด

ราคาหุ้น	60 บาท
ราคาออปชัน	0.5 บาท
ราคาใช้สิทธิ	55 บาท
ระยะเวลาออปชัน	1 มกราคม 2558

สมมติว่าเราซื้อออปชันนี้ 100 ออปชัน ใช้เงินทั้งสิ้น 50 บาท

- กรณีที่หุ้นราคาต่ำกว่า 55 บาท เราก็จะไม่ใช้สิทธิในการซื้อหุ้น ดังนั้นเราจะขาดทุนเต็มที่ 50 บาท
- กรณีที่หุ้นราคาสูงกว่าเป็น 65 บาท เราจะได้กำไรทั้งหมดดังนี้

กำไรจากการซื้อหุ้นในราคาถูกกว่าราคาตลาด 65 – 55 = 10 บาท/หุ้น หรือได้กำไรรวม 1,000บาท

ค่าใช้จ่ายในการซื้อออปชัน 50 บาท

ดังนั้นได้กำไร 1,000 – 50 = 950 บาท

จะเห็นได้ว่าการซื้อออปชันเป็นการลงทุนที่มีผลประโยชน์สูง คือลงทุนน้อยแต่มีโอกาสได้ผลตอบแทนมาก เช่นใช้เงินเพียง 0.5 บาท/หุ้น ซึ่งผิดกับการซื้อหุ้นที่ต้องลงทุนมาก (60บาท/หุ้น) และถ้าขาดทุนก็มีโอกาสขาดทุนสูงมาก

โดยปกติราคาใช้สิทธิ จะสูงกว่าราคาหุ้น #

ตัวอย่าง 3.7 หุ้น ในราคาและเวลาที่กำหนด

ราคาปัจจุบัน	53.50 บาท
ราคาใช้สิทธิ	50 บาท
ราคาพุทออปชัน	218.75 บาท

ถ้าราคาหุ้นลดลงเป็น 45 บาท

เราก็จะใช้สิทธิในการขายหุ้น จะได้กำไร 50 – 45 = 5 บาท/หุ้น (500 บาท/ 100 หุ้น)

กำไรจริง 500 – 218.75 = 281.25 บาท

ถ้าราคาหุ้นขึ้นเป็น 65 บาท ก็จะไม่ใช้สิทธิในการขายหุ้นนั้น เพราะถ้าขายต้องราคา 50 บาท ดังนั้น เราจะขาดทุนเต็มที่คือ 218.75 บาท คือราคาของออปชันนั่นเอง #

3.10.3 สถานะของสัญญาออปชัน

ออปชันแต่ละสัญญาจะประกอบด้วยคู่สัญญา 2 ฝ่าย คือ ฝ่ายนักลงทุนที่ซื้อ (Long Position) และฝ่ายนักลงทุนที่ขาย (Short Position) หรือเรียกว่า ฝ่ายขายออปชัน โดยผู้ขายออปชันจะได้รับเงินสดจากการขายออปชันแต่จะต้องมีภาระผูกพันจากสถานะออปชันซึ่งผลกำไรหรือขาดทุนของผู้ขายออปชันจะเปลี่ยนแปลงไปตามราคาหุ้นในวันสิ้นสุดการใช้สิทธิโดยเราจะศึกษาเฉพาะยูโรเปียนออปชัน ซึ่งแบ่งเป็น 4 สถานะ

1. ซื้อคอลออปชัน
3. ซื้อพุทออปชัน
3. ขายคอลออปชัน
4. ขายพุทออปชัน

3.10.4 สินทรัพย์อ้างอิงของออปชัน

1) <u>ออปชันของหุ้นสามัญ</u> ส่วนใหญ่มักจะทำการซื้อขายกันในตลาดที่ขายกันอย่างเป็นทางการ ออปชันของหุ้นสามัญในปัจจุบันมีการอ้างอิงหุ้นสามัญของบริษัทต่างๆมากกว่า 1,000 บริษัท แต่ละสัญญาจะให้สิทธิกับผู้ถือในการซื้อหรือขายหุ้นสามัญจำนวน 100 หุ้น ณ ราคาใช้สิทธิที่ระบุไว้

2) <u>ออปชันของเงินสกุลต่างประเทศ</u> มักจะมีการซื้อขายในตลาดอย่างไม่เป็นทางการ ซึ่งมีการซื้อขายแบบทั้งที่เป็นยูโรเปียนออปชันและอเมริกันออปชัน โดยขนาดของสัญญาจะขึ้นอยู่กับสกุลเงิน

3) <u>ออปชันของดัชนีหลักทรัพย์</u> มีการซื้อขายทั้งแบบเป็นทางการและไม่เป็นทางการ โดยทั่วไปออปชันแต่ละสัญญาจะกำหนดให้ทำการซื้อขายกันเป็นจำนวน 100 เท่าของดัชนีหลักทรัพย์นั้นๆ ณ ราคาที่ระบุเอาไว้ และจะชำระเป็นเงินสด

4) <u>ออปชันของสัญญาฟิวเจอร์ส</u> โดยปกติแล้วออปชันของสัญญาฟิวเจอร์สจะมีอายุครบกำหนดก่อนวันส่งมอบสัญญา การใช้สิทธิออปชันจะทำให้ผู้ถือคอลออปชันถือสถานะซื้อสัญญาฟิวเจอร์สจากผู้ขายคอลออปชัน และได้เงินสดเท่ากับส่วนต่างของราคาฟิวเจอร์สที่เกินจากราคาใช้สิทธิ และพุทออปชันจะให้ผู้ถือพุทออปชันถือสถานะขายฟิวเจอร์สจากผู้ขายพุทออปชัน และจะได้เงินสดเท่ากับส่วนต่างของราคาใช้สิทธิที่เกินจากราคาฟิวเจอร์ส

3.10.5 การกำหนดราคาออปชัน

3.10.5.1 ปัจจัยที่ส่งผลต่อราคาออปชัน

1) ราคาสินทรัพย์อ้างอิงมูลค่าของคอลออปชันจะเพิ่มขึ้นตามราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่สูงขึ้น แต่มูลค่าของพุทออปชันจะเพิ่มขึ้น เมื่อราคาสินทรัพย์อ้างอิงลดลง

2) ราคาใช้สิทธิมูลค่าของคอลออปชันจะเพิ่มขึ้นเมื่อราคาใช้สิทธิต่ำลงเนื่องจาก ผู้ซื้อคอลออปชันสามารถใช้สิทธิซื้อหุ้นตามสัญญาออปชันได้ในราคาที่ต่ำกว่าและมูลค่าของพุทออปชันจะเพิ่มขึ้นเมื่อราคาใช้สิทธิสูงขึ้น เนื่องจากผู้ซื้อพุทออปชัน สามารถใช้สิทธิ ขายสินทรัพย์อ้างอิงตามสัญญาออปชันได้ในราคาที่สูงกว่า

3) อายุสัญญามูลค่าของคอลออปชันจะแปรผันตามระยะเวลาก่อนครบกำหนดสัญญา หรืออายุของออปชัน คือ หากระยะเวลาก่อนครบกำหนดสัญญายาวขึ้น มูลค่าของคอลออปชันจะสูงขึ้น และมูลค่าของพุทออปชันอาจจะแปรผันตามระยะเวลาก่อนครบกำหนดสัญญาหรืออายุออปชัน หรือไม่ก็ได้ ขึ้นอยู่กับขนาดของผลกระทบระหว่างความน่าจะเป็นที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะเปลี่ยนแปลงไป

4) อัตราดอกเบี้ยอัตราดอกเบี้ยที่สูงขึ้น จะส่งผลให้คอลออปชันมีมูลค่าสูงขึ้น แต่จะส่งผลให้พุทออปชันมีมูลค่าต่ำลง

5) ความผันผวนของราคาหุ้น มูลค่าของคอลและพุทออปชันจะแปรผันตามความผันผวนของราคาหุ้น คือยิ่งความผันผวนของราคาสินทรัพย์อ้างอิงมีมากขึ้น โอกาสที่ผู้ซื้อจะได้กำไรจากการใช้สิทธิจะมีมากขึ้น

6) เงินปันผลที่คาดว่าจะได้ตลอดอายุของออปชันการจ่ายเงินปันผลหรือผลตอบแทนของสินทรัพย์อ้างอิงส่งให้มูลค่าของคอลออปชันลดลง แต่พุทออปชันเพิ่มขึ้น เนื่องจากราคาตลาดของหุ้นจะมีการปรับตัวเท่ากับจำนวนเงินปันผลหรือผลตอบแทนที่จ่าย ส่งผลกระทบให้ค่าพรีเมียมปรับตัวตามไปด้วย

บทที่ 4

แบบจำลองราคาอย่างง่าย

ในบทนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองราคาอย่างง่ายซึ่งจะเป็นแนวความคิดพื้นฐานที่สำคัญของงานวิจัย

4.1 แบบจำลองราคาอย่างง่าย

แบบจำลองราคาอย่างง่าย (A simple market model) หรือแบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม 1 ขั้น (One-Step Binomial Model) เป็นแบบจำลองราคาแสดงการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ ซึ่งในที่นี้จะหมายถึงหุ้นในรูปต้นไม้ทวินาม1 ขั้นของราคาสินทรัพย์ ซึ่งประกอบด้วย 2 จุดเวลา คือ จุดเวลาปัจจุบันซึ่งจะแทนด้วย $t=0$ และจุดเวลาอนาคตซึ่งจะแทนด้วย $t=1$ นั่นคือ ถ้า $S(t)$ เป็นราคาหุ้นต่อหน่วย ที่เวลา t ($t=0,1$) เมื่อกำหนดราคาปัจจุบันของหุ้น $S(0)$ แล้วราคาหุ้นในอนาคต $S(1)$ จะอยู่ในรูป

$$S(1)=\begin{cases}(1+u)S(0), & prob=p\\(1+d)S(0), & prob=1-p\end{cases}$$

โดยที่ d และ u เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นที่ซึ่ง $-1<d<u$ และ $0<p<1$ เป็นความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นจะเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา u

บทนิยาม 4.1 พอร์ตการลงทุน (portfolio) คือ เวกเตอร์แสดงปริมาณสินทรัพย์แต่ละสินทรัพย์ของการลงทุน ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $Port$

สำหรับเวลา $t=0,1$ กำหนดให้

$A(t)$ คือ ราคาตราสารหนี้ต่อ 1 ตราสาร ที่เวลา t

$V(t)$ คือ มูลค่าของพอร์ตการลงทุน ที่เวลา t

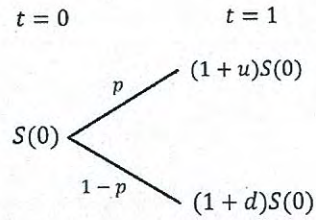
x แทนปริมาณหุ้น (หน่วย)

y แทนปริมาณตราสารหนี้ (ตราสาร)

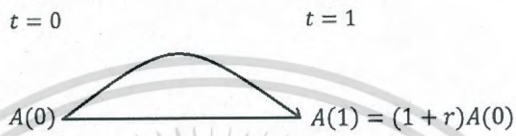
r แทนอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ต่อคาบ

ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $Port=[x,y]$ จะได้

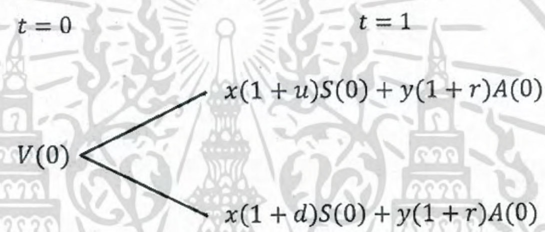
$$V(t)=xS(t)+yA(t)$$



รูปที่ 4.1 แสดงราคาหุ้นที่เวลา $t=0$ และ $t=1$



รูปที่ 4.2 แสดงราคาตราสารหนี้ที่เวลา $t=0$ และ $t=1$



รูปที่ 4.3 แสดงพอร์ตการลงทุนที่เวลา $t=0$ และ $t=1$

บทนิยาม 4.2 อัตราผลตอบแทน K_V ของพอร์ตการลงทุน $Port=[x,y]$ คือ อัตราส่วนของผลต่างของมูลค่าพอร์ตการลงทุนในอนาคตกับมูลค่าของพอร์ตการลงทุน ณ ปัจจุบัน นั่นคือ

$$K_V = \frac{V(1)-V(0)}{V(0)} = \begin{cases} \dfrac{x(1+u)S(0)+y(1+r)A(0)}{xS(0)+yA(0)}, & prob = p \\ \dfrac{x(1+d)S(0)+y(1+r)A(0)}{xS(0)+yA(0)}, & prob = 1-p \end{cases}$$

บทนิยาม 4.3 กำหนดให้ K_V เป็นอัตราผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน นิยาม

1) *ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจากการลงทุน* คือ $E(K_V)$
2) *ความเสี่ยงของการลงทุน* คือ $\sigma_{K_V} = \sqrt{Var(K_V)}$

กำหนดให้ $K(1) = \begin{cases} u, & prob = p \\ d, & prob = 1-p \end{cases}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นต่อคาบ โดยที่ $-1 < d < u$ และ $0 < p < 1$

กำหนดให้ $K_A = r$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาตราสารหนี้ต่อคาบ

ทฤษฎีบท 4.4 กำหนดให้ $K(1)$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นต่อคาบ และ K_A เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาตราสารหนี้ต่อคาบ จะได้

1) $E(K(1)) = pu + (1-p)d$ และ $E(K_A) = r$

2) $\sigma_{K(1)}=\sqrt{(u-\mu)^2p+(d-\mu)^2(1-p)}$ เมื่อ $\mu=E(K(1))$ และ $\sigma_{K_A}=0$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจากนิยามของ $K(1)$ และ K_A #

สำหรับการกำหนดราคาออปชันด้วยแบบจำลองราคาอย่างง่ายนั้นจะต้องอยู่ภายใต้สมมติฐาน ดังต่อไปนี้

สมมติฐานที่ 4.5 ราคาหุ้นในอนาคต $S(1)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และราคาตราสารหนี้ในอนาคต $A(1)$ ทราบค่าที่แน่นอน

สมมติฐานที่ 4.6 ราคาของ $A(t)$ และ $S(t)$ มีค่าเป็นบวก สำหรับทุกๆ $t=0,1$

สมมติฐานที่ 4.7 จำนวนหุ้น x และ จำนวนตราสารหนี้ y สามารถเป็นจำนวนจริงใดๆได้ โดยที่

- เครื่องหมาย + หมายถึง การเปิดสถานะซื้อ (Long position)
- เครื่องหมาย - หมายถึง การเปิดสถานะขาย (Short position)

สมมติฐานที่ 4.8 มูลค่าของพอร์ตการลงทุนจะต้องไม่เป็นลบ นั่นคือ $V(t)\geq 0$ สำหรับทุกๆ $t=0,1$

สมมติฐานที่ 4.9 ถ้า $V(0)=0$ แล้ว จะไม่เกิดเหตุการณ์ $V(1)>0$

เราเรียก สมมติฐานที่ 4.9 ว่า *หลักการปราศจากการค้ากำไร* (No-Arbitrage Principle) นั่นคือจะไม่เกิดการณ์ที่นักลงทุนจะได้ผลกำไรโดยปราศจากการลงทุน

สมมติฐานที่ 4.10 ราคาหุ้นในอนาคต $S(1)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ต้องสอดคล้องกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ $A(0)=100$, $A(1)=110$, $S(0)=50$ และ $S(1)=\begin{cases}52\ ;\ prob=0.8\\48\ ;\ prob=0.2\end{cases}$

จงคำนวณหา $K(1)$, K_A, $E(K(1))$, $E(K_A)$, $\sigma_{K(1)}$ และ σ_{K_A}

วิธีทำ จากนิยาม $K(1)=\dfrac{S(1)-S(0)}{S(0)}=\begin{cases}\dfrac{52-50}{50}=0.04\ ;\ prob=0.8\\[2mm]\dfrac{48-50}{50}=-0.04\ ;\ prob=0.2\end{cases}$

$$K_A=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{110-100}{100}=0.1=10\%$$

โดย ทฤษฎีบท 4.4

$$E(K(1))=0.8(0.04)+0.2(-0.04)=0.024$$
$$E(K_A)=0.1$$
$$\sigma_{K(1)}=\sqrt{0.8(0.04-0.024)^2+0.2(-0.04-0.024)^2}=0.032$$
$$\sigma_{K_A}=0$$
#

ตัวอย่าง 4.2 จากตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ลงทุนซื้อหุ้น 20 หน่วย และตราสารหนี้ 10 ตราสาร จงหา K_V , ค่าคาดหวังของการลงทุน $E(K_V)$ และ ความเสี่ยงของการลงทุน σ_{K_V}

วิธีทำ จาก $V(t)=xS(t)+yA(t)$

จะได้ว่า $V(0) = 20S(0) + 10A(0) = 20(50) + 10(100) = 2,000$

และ $V(1) = 20S(1) + 10A(1) = 10(110) + 20\left(\begin{cases} 52 & ; prob = 0.8 \\ 48 & ; prob = 0.2 \end{cases}\right)$

$$= \begin{cases} 1,040 + 1,100 = 2,140 & ; prob = 0.8 \\ 960 + 1,100 = 2,060 & ; prob = 0.2 \end{cases}$$

จากนิยามของ $K_V = \dfrac{V(1) - V(0)}{V(0)} = \begin{cases} \dfrac{2,140 - 2,000}{2,000} = 0.07, & prob = 0.8 \\ \dfrac{2,060 - 2,000}{2,000} = 0.03, & prob = 0.2 \end{cases}$

ค่าคาดหวังของการลงทุน $E(K_V) = 0.8(0.07) + 0.2(0.03) = 0.062$

ความเสี่ยงของการลงทุน $\sigma_{K_V} = \sqrt{0.8(0.07 - 0.062)^2 + 0.2(0.03 - 0.062)^2} = 0.016$ #

ทฤษฎีบท 4.11 ถ้าไม่เกิดการค้ากำไร แล้ว $S(0) = A(0)$ โดยที่ $d < r < u$

พิสูจน์ สมมติให้ไม่มีการค้ากำไร (No-Arbitrage) และสมมติให้ $S(0) = A(0)$

จะแสดงว่า $d < r < u$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง สมมติ ในทางตรงกันข้ามว่า $d \geq r$ หรือ $r \geq u$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $d \geq r$

ที่เวลา $t = 0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ยืมตราสารหนี้มาขาย 1 ตราสาร ได้รับเงิน $A(0)$ บาท
- ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท

ดังนั้น $V(0) = A(0) - S(0) = 0$

ที่เวลา $t = 1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายหุ้น 1 หน่วย ได้รับเงิน $S(1) = \begin{cases} (1+u)S(0), & prob = p \\ (1+d)S(0), & prob = 1-p \end{cases}$ บาท
- ซื้อตราสารหนี้คืน 1 ตราสาร จ่ายเงิน $A(1) = (1+r)A(0)$ บาท

จะได้ $V(1) = S(1) - A(1) = \left(\begin{cases} (1+u)S(0) \\ (1+d)S(0) \end{cases}\right) - (1+r)A(0)$

เพราะว่า $d \geq r$ ส่งผลให้ $(1+u)S(0) - (1+r)A(0) > (1+d)S(0) - (1+r)A(0) \geq 0$

นั่นคือ $V(1) > 0$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ No-Arbitrage principle

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $r \geq u$

ที่เวลา $t = 0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย ได้รับเงิน $S(0)$ บาท
- ซื้อตราสารหนี้ 1 ตราสาร จ่ายเงิน $A(0)$ บาท

ดังนั้น $V(0) = A(0) - S(0) = 0$

ที่เวลา $t = 1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายตราสารหนี้ 1 ตราสารได้รับเงิน $A(1)=(1+r)A(0)$ บาท
- ซื้อหุ้นคืน 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(1)=\begin{cases}(1+u)S(0)\ , \ prob=p\\(1+d)S(0), \ prob=1-p\end{cases}$ บาท

จะได้ $V(1)=A(1)-S(1)=(1+r)A(0)-\left(\begin{cases}(1+u)S(0)\\(1+d)S(0)\end{cases}\right)$

เพราะว่า $r\geq u$ ส่งผลให้ $(1+r)A(0)-(1+d)S(0)>(1+r)A(0)-(1+u)S(0)\geq 0$

นั่นคือ $V(1)>0$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ No-Arbitrage principle

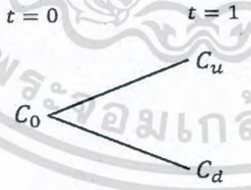
จากทั้ง 2 กรณีจึงทำให้เราสรุปได้ว่า $d<r<u$ #

4.2 การกำหนดราคาออปชัน

ออปชันคือสัญญาที่ให้สิทธิซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคต โดยผู้ถือสามารถใช้สิทธิซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงที่ราคาใช้สิทธิ (Strike price: K) หรือไม่ใช้สิทธิตามสัญญาก็ได้ตามประเภทของสิทธิ ซึ่งได้แก่ พุทออปชันซึ่งให้สิทธิซื้อสินทรัพย์อ้างอิง และ คอลออปชันซึ่งให้สิทธิขายสินทรัพย์อ้างอิง การกำหนดราคาออปชันในที่นี้จะหมายถึงการกำหนดราคาซื้อของออปชันซึ่งเรียกว่า *ค่าพรีเมียม* ในที่นี้จะกล่าวถึง การกำหนดราคาซื้อของคอลออปชันโดยใช้แบบจำลองราคาอย่างง่าย โดยมีหุ้นเป็นสินทรัพย์อ้างอิง

และเพื่อความสะดวก ต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ $\uparrow$ แทนกรณีที่ราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา u ด้วยความน่าจะเป็น p และสัญลักษณ์ $\downarrow$ แทนกรณีที่ราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา d ด้วยความน่าจะเป็น $1-p$

กำหนดให้ $C(0)=C_0$, $C(1)=\begin{cases}C_u=\max\{(1+u)S(0)-K,0\}\ ;\ \uparrow\\C_d=\max\{(1+d)S(0)-K,0\};\ \downarrow\end{cases}$ เป็นราคาของคอลออปชันต่อ 1 สัญญาที่เวลา $t=0,1$ ตามลำดับ



รูปที่ 4.4 แสดงราคาคอลออปชันที่เวลา $t=0$ และ $t=1$

กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชัน

การกำหนดราคาคอลออปชัน สามารถทำได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1) กำหนดให้ $[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ซึ่ง

$$V(0)=xS(0)+yA(0)=C(0) \tag{4.1}$$

และ

$$V(1)=xS(1)+yA(1)=C(1) \tag{4.2}$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (4.2) เพื่อหาค่า x และ y

ขั้นตอนที่ 3) ค่าพรีเมียมหรือ ราคาของคอลออปชัน $C(0)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (4.1) ด้วยการแทนค่า x และ y ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2)

ตัวอย่าง 4.11 กำหนดให้ $A(0)=100, A(1)=110, S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}120 ; \uparrow \\ 80 \quad ; \downarrow\end{cases}$

กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=100$ จงคำนวณหาค่าพรีเมียม $C(0)$ ของคอลออปชัน

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ จะได้

$$C(1)=\begin{cases}\max\{(1+u)S(0)-K,0\} ; \uparrow \\ \max\{(1+d)S(0)-K,0\}; \downarrow\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\max\{120-100,0\} ; \uparrow \\ \max\{80-100,0\}; \downarrow\end{cases}=\begin{cases}20 ; \uparrow \\ 0 \quad ; \downarrow\end{cases}$$

การกำหนดราคาคอลออปชัน สามารถทำได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1) กำหนดให้ $[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ซึ่ง

$$V(0)=xS(0)+yA(0)=C(0) \text{ และ } V(1)=xS(1)+yA(1)=C(1)$$

จะได้

$$C(0)=100x+100y \qquad (1)$$

และ

$$C(1)=\begin{cases}120x+110y ; \uparrow \\ 80x+110y \quad ; \downarrow\end{cases}=\begin{cases}20 ; \uparrow \\ 0 \quad ; \downarrow\end{cases}$$

นั่นคือ

$$120x+110y=20 \qquad (2)$$

$$120x+110y=0 \qquad (3)$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (2) และ (3) เพื่อหาค่า x และ y

จะได้ $x=\frac{1}{2}$ และ $y=\frac{-4}{11}$

ขั้นตอนที่ 3) นำค่า $x=\frac{1}{2}$ และ $y=\frac{-4}{11}$ ไปแทนในสมการ (1) จะได้ ค่าพรีเมียมหรือ

ราคาของคอลออปชัน $C(0)=100\left(\frac{1}{2}\right)+100\left(\frac{-4}{11}\right)\approx 13.6364$ #

สำหรับกรณีทั่วๆไป โดยใช้กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชันตามขั้นตอนที่ 1)-3)

จะได้ $C(0)=\dfrac{C_u-C_d}{u-d}+\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ ซึ่งแสดงให้เห็นชัดได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1) กำหนดให้ $[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ซึ่ง

$$V(0)=xS(0)+yA(0)=C(0) \qquad (1)$$

และ

$$V(1)=xS(1)+yA(1)=C(1)$$

นั่นคือ

$$x(1+u)S(0)+y(1+r)A(0)=C_u \qquad (2)$$

และ

$$x(1+d)S(0)+y(1+r)A(0)=C_d \qquad (3)$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (2) และ (3) เพื่อหาค่า x และ y ดังนี้

$$(2)-(3) \qquad x(1+u)S(0)-x(1+d)S(0)=C_u-C_d$$

$$x(u-d)S(0)=C_u-C_d$$

$$\therefore \qquad x=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}$$

$$(2)\times(1+d); \quad x(1+u)(1+d)S(0)+y(1+r)(1+d)A(0)=(1+d)C_u \qquad (4)$$

$$(3)\times(1+u); \quad x(1+u)(1+d)S(0)+y(1+r)(1+u)A(0)=(1+u)C_d \qquad (5)$$

$$(5)-(4) \quad ; \quad y(1+r)(1+u)A(0)-y(1+r)(1+d)A(0)=(1+u)C_d-(1+d)C_u$$

$$y(1+r)(u-d)A(0)=(1+u)C_d-(1+d)C_u$$

$$\therefore \qquad y=\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$$

ขั้นตอนที่ 3) ค่าพรีเมียมหรือ ราคาของคอลออปชัน $C(0)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (1) ด้วยการแทนค่า x และ y ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2) จะได้

$$C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$$

ทฤษฎีบท 4.12 ถ้าไม่เกิดการค้ากำไร แล้ว $C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

โดยสมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C(0)\neq\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

นั่นคือ $$C(0)>\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$$

หรือ $$C(0)<\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $C(0)>\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ออกสัญญาคอลออปชันเพื่อขาย 1 สัญญา ได้รับเงิน $C(0)$ บาท
- ซื้อหุ้น $\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\frac{C_u-C_d}{u-d}$ บาท
- ซื้อตราสารหนี้ $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ ตราสาร จ่ายเงิน $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน $C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}>0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ $C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ ไปซื้อตราสาร

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุน $V(0)=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายหุ้น $\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\begin{cases}(1+u)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); \uparrow \\ (1+d)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); \downarrow\end{cases}$

- ขายตราสารหนี้ $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ หน่วยได้รับเงิน $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$ บาท

- ขายตราสารจากทุน $C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ บาท จะได้เงินอีก

$\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$ บาท

- ผู้ถือคอลออปชันใช้สิทธิ ดังนั้นผู้ออก(เรา) ต้องจ่ายเงิน

$$C(1)=\begin{cases}C_u=\max\{(1+u)S(0)-K,0\}\ ; \uparrow \\ C_d=\max\{(1+d)S(0)-K,0\}\ ; \downarrow\end{cases} \text{ บาท}$$

ดังนั้นจะได้

$$V(1)=\begin{cases}(1+u)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); \uparrow \\ (1+d)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); \downarrow\end{cases}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-\begin{cases}C_u; \uparrow \\ C_d; \downarrow\end{cases}$$

พิจารณา $V(1)$ เป็น 2 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow$ จะได้

$$V(1)=(1+u)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right)+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$
$$=\frac{(1+u)C_u-(1+u)C_d+(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$
$$=\frac{C_u+uC_u-C_u-dC_u}{u-d}+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$

$$=\frac{(u-d)C_u}{(u-d)}+(1+r)\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)-C_u$$
$$=(1+r)\big(C(0)-xS(0)-yA(0)\big)>0$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow$ จะได้

$$V(1)=(1+d)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right)+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$
$$=\frac{(1+d)C_u-(1+d)C_d+(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$
$$=\frac{-C_d-dC_d+C_d+uC_d}{u-d}+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$
$$=\frac{(u-d)C_d}{(u-d)}+(1+r)\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)-C_d$$
$$=(1+r)\big(C(0)-xS(0)-yA(0)\big)>0$$

จาก1) และ 2) ทำให้สรุปได้ว่า $V(1)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $C(0)<\dfrac{C_u-C_d}{u-d}+\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ยืมหุ้นมาขาย $\dfrac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\dfrac{C_u-C_d}{u-d}$ บาท
- ยืมตราสารหนี้มาขาย $\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ ตราสาร ได้รับเงิน $\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ บาท
- ซื้อสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน $C(0)$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน $\dfrac{C_u-C_d}{u-d}+\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}-C(0)>0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ $\dfrac{C_u-C_d}{u-d}+\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}-C(0)$ บาท ไปซื้อตราสารหนี้

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุนที่เวลา $t=0$ คือ $V(0)=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายคอลออปชัน 1 สัญญาได้รับเงิน $C(1)=\begin{cases}C_u=\max\{(1+u)S(0)-K,0\}\ ;\ \uparrow\\ C_d=\max\{(1+d)S(0)-K,0\}\ ;\ \downarrow\end{cases}$ บาท

- ขายตราสารจากที่ลงทุน $\dfrac{C_u - C_d}{u-d} + \dfrac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} - C(0)$ บาท

ได้รับเงิน $\left(\dfrac{C_u - C_d}{u-d} + \dfrac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} - C(0)\right)(1+r)$ บาท

- ซื้อหุ้นคืน $\dfrac{C_u - C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\begin{cases} (1+u)\left(\dfrac{C_u - C_d}{u-d}\right); \uparrow \\ (1+d)\left(\dfrac{C_u - C_d}{u-d}\right); \downarrow \end{cases}$ บาท

- ซื้อตราสารหนี้คืน $\dfrac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ ตราสาร จ่ายเงิน $\dfrac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)}$ บาท

ดังนั้นจะได้

$$V(1) = \begin{cases} C_u; \uparrow \\ C_d; \downarrow \end{cases} + \left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$$

$$-\begin{cases} (1+u)\left(\dfrac{C_u - C_d}{u-d}\right); \uparrow \\ (1+d)\left(\dfrac{C_u - C_d}{u-d}\right); \downarrow \end{cases} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{u-d}$$

พิจารณา $V(1)$ เป็น 2 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow$ จะได้

$$V(1) = C_u + \left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$$

$$-(1+u)\left(\frac{C_u - C_d}{u-d}\right) - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{u-d}$$

$$= C_u + \left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$$

$$+ \frac{-(1+u)C_u + (1+u)C_d - (1+u)C_d + (1+d)C_u}{u-d}$$

$$= C_u + \left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r) + \frac{-C_u - uC_u + C_u + dC_u}{u-d}$$

$$= C_u + \left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r) - \frac{(u-d)C_u}{(u-d)}$$

$$= \left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r) > 0$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow$ จะได้

$$V(1) = C_d + \left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$$

$$-(1+d)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right)-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$$

$$=C_d+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$$

$$+\frac{-(1+d)C_u+(1+d)C_d-(1+u)C_d+(1+d)C_u}{u-d}$$

$$=C_d+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-\frac{(u-d)C_d}{(u-d)}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)>0$$

จาก1) และ 2) ทำให้ได้ว่า $V(1)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

จากกรณี 1) และ กรณี 2) จึงทำให้สรุปได้ว่า $C(0)=\dfrac{C_u-C_d}{u-d}+\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ #

บทแทรก 4.13 ถ้า ความน่าจะเป็น $p=\dfrac{r-d}{u-d}$ แล้ว $C(0)=\dfrac{pC_u+(1-p)C_d}{(1+r)}$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 4.12

$$C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$$

$$=\frac{(C_u-C_d)(1+r)+C_d+uC_d-C_u-dC_u}{(u-d)(1+r)}$$

$$=\frac{C_u-C_d+rC_u-rC_d+C_d+uC_d-C_u-dC_u}{(u-d)(1+r)}$$

$$=\frac{uC_d-dC_u+rC_u-rC_d}{(u-d)(1+r)}$$

$$=\frac{(r-d)C_u+(u-r)C_d}{(u-d)(1+r)}$$

$$=\frac{(r-d)C_u}{(u-d)(1+r)}+\frac{(u-r)C_d}{(u-d)(1+r)}$$

$$=\frac{pC_u}{(1+r)}+\frac{[(u-d)-(r-d)]C_d}{(u-d)(1+r)}$$

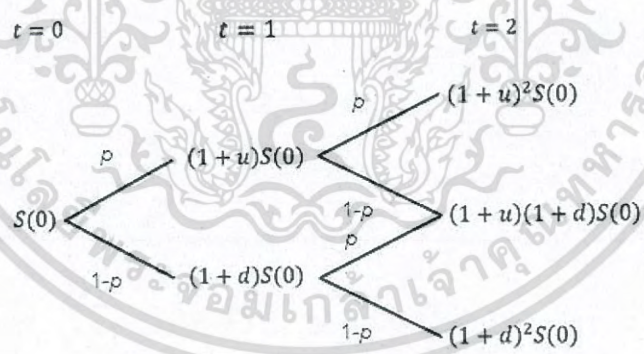
$$=\frac{pC_u+(1-p)C_d}{(1+r)}$$ #

บทที่ 5
การกำหนดราคาออปชันด้วยแบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม2 ขั้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม 2 ขั้น ซึ่งจะเป็นแนวความคิดที่สำคัญของงานวิจัย

5.1 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม 2 ขั้น

แบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม 2 ขั้น (Two-Step Binomial Model) เป็นแบบจำลองราคาแสดงการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ซึ่งในที่นี้จะหมายถึงหุ้นในรูปต้นไม้ทวินาม 2 ขั้นของราคาสินทรัพย์ ซึ่งประกอบด้วย 3 จุดเวลา คือ จุดเวลาปัจจุบันซึ่งจะแทนด้วย $t=0$ จุดเวลาที่ 1 ซึ่งจะแทนด้วย $t=1$ และจุดเวลาที่ 2 ซึ่งจะแทนด้วย $t=2$ นั่นคือ ถ้า $S(t)$ เป็นราคาหุ้นต่อหน่วย ที่เวลา t ($t=0,1,2$) เมื่อกำหนดราคาปัจจุบันของหุ้น $S(0)$ และ $K(n)=\begin{cases} u \ ; \ prob=p \\ d \ ; \ prob=1-p \end{cases}$; $n=1,2$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของหุ้นในแต่ละกิ่งของต้นไม้ทวินาม โดยที่ $-1<d<r<u$ และ $0<p<1$ เมื่อ r เป็นอัตราผลตอบแทนหรืออัตราดอกเบี้ยต่อคาบของตราสารหนี้ แล้วจะได้ราคาหุ้น $S(t)$ จะเคลื่อนที่ขึ้น หรือลง ด้วยตัวประกอบ $1+u$ หรือ $1+d$ สำหรับแต่ละเวลาที่ t ส่วนอสมการ $-1<d<u$ จะเป็นตัวยืนยันว่า $S(n)$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอ ก็ต่อเมื่อ $S(0)$ เป็นบวก โดยสามารถเขียนต้นไม้ของราคา $S(t)$, $t=0,1,2$ ได้ดังนี้



รูปที่ 5.1 แสดงต้นไม้ของราคาหุ้น $S(t)$, $t=0,1,2$

จากแผนสำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม $S(1)$, $S(2)$ จะได้ว่า

$$S(1)=\begin{cases} (1+u)S(0) & with\ probability\ p \\ (1+d)S(0) & with\ probability\ 1-p \end{cases} \tag{5.1}$$

$$S(2)=\begin{cases}(1+u)^2 S(0) & with\ probability\ \ p^2 \\ (1+u)(1+d)S(0) & with\ probability\ 2p(1-p) \\ (1+d)^2 S(0) & with\ probability\ (1-p)^2\end{cases} \tag{5.2}$$

5.2 การกำหนดราคาออปชัน

เพื่อความสะดวก ต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ ↑ แทนกรณีที่ราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา u ด้วยความน่าจะเป็น p และสัญลักษณ์ ↓ แทนกรณีที่ราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา d ด้วยความน่าจะเป็น $1-p$ และ สำหรับเวลา $t=0,1,2$ กำหนดให้

$A(t)$ คือ ราคาตราสารหนี้ต่อ 1 ตราสาร ที่เวลา t

$V(t)$ คือ มูลค่าของพอร์ตการลงทุน ที่เวลา t

x แทนปริมาณหุ้น (หน่วย)

y แทนปริมาณตราสารหนี้ (ตราสาร)

r แทนอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ต่อคาบ

$Port=[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุน

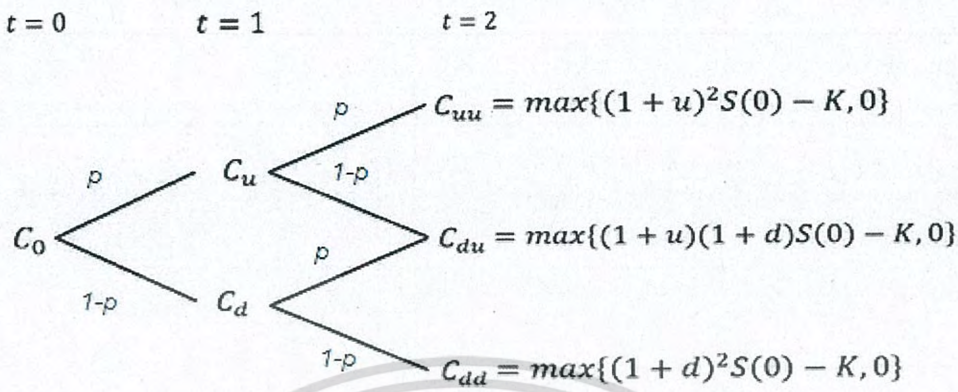
ดังนั้น จะได้ $V(t)=xS(t)+yA(t)$

กำหนดให้ $C(0)=C_0$ ราคาของคอลออปชันต่อ 1 สัญญา ราคาออปชัน $C(t)$ ที่เวลา $t=0,1,2$ ตามแบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม 2 ขั้น กำหนดดังนี้

$$C(1)=\begin{cases}C_u=\max\{(1+u)S(0)-K,0\}\ ;\ \uparrow \\ C_d=\max\{(1+d)S(0)-K,0\};\ \downarrow\end{cases} \tag{5.3}$$

$$C(2)=\begin{cases}C_{uu}=\max\left\{(1+u)^2 S(0)-K,0\right\}\ ;\ \uparrow\uparrow \\ C_{du}=\max\left\{(1+d)(1+u)S(0)-K,0\right\}\ ;\ \downarrow\uparrow\ or \uparrow\downarrow \\ C_{uu}=\max\left\{(1+d)^2 S(0)-K,0\right\};\ \downarrow\downarrow\end{cases} \tag{5.4}$$

แสดงได้ ดังรูป



รูปที่ 5.2 แสดงต้นไม้ของราคาหุ้น $C(t)$, $t = 0,1,2$

ต่อไปจะแสดงการกำหนดราคาโดยประยุกต์ บทแทรก 4.13 ที่กล่าวว่า "ถ้า ความน่าจะเป็น $p = \dfrac{r-d}{u-d}$ แล้ว $C(0) = \dfrac{pC_u + (1-p)C_d}{(1+r)}$" โดยประยุกต์กับแต่ละขั้วกิ่งของต้นไม้ทวินาม 2 ขั้น ตามรูป 5.2 ซึ่งได้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$C_0 = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{(1+r)} \qquad (5.5)$$

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{du}}{1+r} \qquad (5.6)$$

$$C_d = \frac{pC_{du} + (1-p)C_{dd}}{1+r} \qquad (5.7)$$

เมื่อแทน (5.6) และ (5.7) ใน (5.5) จะได้

$$C_0 = \frac{p\left(pC_{uu} + (1-p)C_{du}\right) + (1-p)\left(pC_{du} + (1-p)C_{dd}\right)}{(1+r)^2}$$

$$= \frac{p^2C_{uu} + p(1-p)C_{du} + p(1-p)C_{du} + (1-p)^2C_{dd}}{(1+r)^2}$$

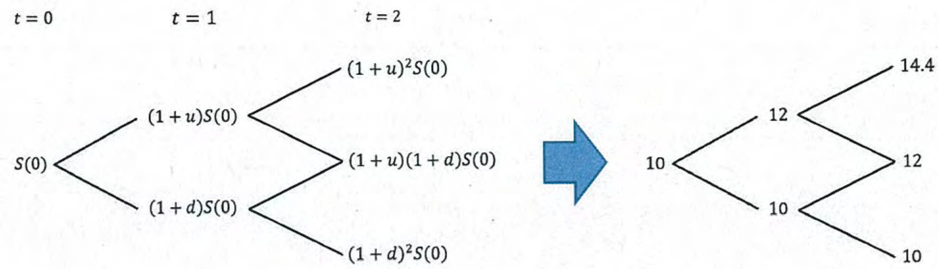
ดังนั้น ในกรณีที่ $p = \dfrac{r-d}{u-d}$ ค่าพรีเมียม $C_0 = \dfrac{p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{du} + (1-p)^2C_{dd}}{(1+r)^2}$

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้อัตราดอกเบี้ย $r = 10\%$ และ $K(n) = \begin{cases} u = 0.2 & ; prob = 0.5 \\ d = 0 & ; prob = 0.5 \end{cases}$

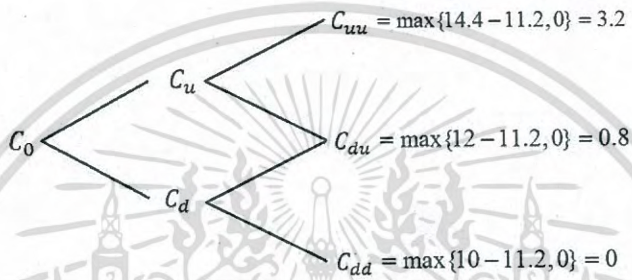
กำหนดราคาสินทรัพย์อ้างอิง (หุ้น) $S(0) = 10$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K = 11.2$

วิธีทำ เพราะว่า $p = \dfrac{r-d}{u-d} = \dfrac{0.1-0}{0.2-0} = 0.5$ จะได้ $C_0 = \dfrac{pC_u + (1-p)C_d}{(1+r)}$

เมื่อ $C_u = \dfrac{pC_{uu} + (1-p)C_{du}}{1+r}$ และ $C_d = \dfrac{pC_{du} + (1-p)C_{dd}}{1+r}$



รูปที่ 5.3 แสดงต้นไม้ของราคาหุ้น $S(t)$, $t=0,1,2$



รูปที่ 5.4 แสดงต้นไม้ของราคาหุ้น $C(t)$, $t=0,1,2$

จากแผนภาพ จะได้

$$C_u = \frac{pC_{uu}+(1-p)C_{du}}{1+r} = \frac{0.5(3.2)+0.5(0.8)}{1.1} = 1.8$$

$$C_d = \frac{pC_{du}+(1-p)C_{dd}}{1+r} = \frac{0.5(0.8)+0.5(0)}{1.1} = 0.36$$

$$\therefore \quad C_0 = \frac{pC_u+(1-p)C_d}{1+r} = \frac{0.5(1.8)+0.5(0.36)}{1.1} = 1 \qquad \#$$

กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชัน

การกำหนดราคาคอลออปชันแบบต้นไม้ทวินาม 2 ขั้น โดยใช้กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชัน กรณี ความน่าจะเป็น $0<p<1$ ใดๆ ตามขั้นตอนที่ 1)-3) ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1)</u> กำหนดให้ $[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ซึ่ง

$$V(0) = xS(0) + yA(0) = C(0) \qquad (1)$$

และ

$$V(2) = xS(2) + yA(2) = C(2)$$

นั่นคือ

$$x(1+u)^2 S(0) + y(1+r)^2 A(0) = C_{uu} \qquad (2)$$

และ

$$x(1+d)(1+u)S(0) + y(1+r)^2 A(0) = C_{du} \qquad (3)$$

และ

$$x(1+d)^2 S(0) + y(1+r)^2 A(0) = C_{dd} \qquad (4)$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (2) ,(3) และ (4) เพื่อหาค่า x และ y ดังนี้

$(2)+(4)-2\times(3)$; $x(u-d)^2S(0)=C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}$

$$\therefore \quad x=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2S(0)}$$

แทนค่า x ใน (2), (3) และ (4) จะได้

$(4)\times(1+u)^2+(2)\times(1+d)^2-(3)\times 2(1+d)(1+u)$

$$;\quad y(1+r)^2(u-d)^2A(0)=(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}$$

$$\therefore \quad y=\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2A(0)}$$

ขั้นตอนที่ 3) ค่าพรีเมียมหรือ ราคาของคอลออปชัน $C(0)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (1) ด้วยการแทนค่า x และ y ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2) จะได้

$$C(0)=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

ทฤษฎีบท 5.1 ถ้าไม่เกิดการค้ากำไร แล้ว

$$C(0)=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $C(0)=\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\dfrac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$

โดยสมมติในทางตรงกันข้ามว่า

$$C(0)\neq\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

นั่นคือ
$$C(0)>\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

หรือ
$$C(0)<\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $C(0)>\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\dfrac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ออกสัญญาคอลออปชันเพื่อขาย 1 สัญญา ได้รับเงิน $C(0)$ บาท
- ซื้อหุ้น $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}$ บาท
- ซื้อตราสารหนี้ $\dfrac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2A(0)}$ ตราสาร

  จ่ายเงิน $\dfrac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน

$$C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}>0 \text{ บาท}$$

(โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ

$$C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2} \text{ ไปซื้อตรา}$$

สาร

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุน $V(0)=0$

ที่เวลา $t=2$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายหุ้น $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2S(0)}$ หน่วย

$$\text{ได้รับเงิน} \begin{cases} (1+u)^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\uparrow\uparrow \\ (1+d)(1+u)\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right); & \downarrow\uparrow \\ (1+d)^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\downarrow\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

- ขายตราสารหนี้ $\dfrac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2A(0)}$ หน่วย

ได้รับเงิน $\dfrac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$ บาท

- ขายตราสารจากทุน

$$C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2} \text{ บาท จะ}$$

ได้เงินอีก

$$\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

บาท

- ผู้ถือคอลออปชันใช้สิทธิ ดังนั้นผู้ออก(เรา) ต้องจ่ายเงิน

$$C(2)=\begin{cases} C_{uu}=\max\left\{(1+u)^2S(0)-K,0\right\} & ;\uparrow\uparrow \\ C_{du}=\max\{(1+d)(1+u)S(0)-K,0\} & ;\downarrow\uparrow \\ C_{dd}=\max\left\{(1+d)^2S(0)-K,0\right\} & ;\downarrow\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

ดังนั้นจะได้

$$V(2)=\begin{cases}(1+u)^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\uparrow\uparrow\\ (1+d)(1+u)\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\downarrow\uparrow\\ (1+d)^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$$

$$+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\begin{cases}C_{uu}; & \uparrow\uparrow\\ C_{du}; & \downarrow\uparrow\\ C_{dd}; & \downarrow\downarrow\end{cases}$$

พิจารณา $V(2)$ เป็น 3 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow\uparrow$ จะได้

$$V(2)=(1+u)^2\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right)+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{uu}$$

$$=\frac{(1+u)^2C_{uu}-2(1+u)^2C_{du}+(1+u)^2C_{dd}+(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{uu}$$

$$=\frac{(u-d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{uu}$$

$$=(1+r)^2\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)>0$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow\uparrow$ จะได้

$$V(2)=(1+d)(1+u)\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right)+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{du}$$

$$=\frac{(1+d)(1+u)C_{uu}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)(1+u)C_{dd}}{(u-d)^2}$$

$$+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{du}$$

$$=\frac{(u-d)^2C_{du}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{du}$$

$$=(1+r)^2\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)>0$$

3) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow\downarrow$ จะได้

$$V(2)=(1+d)^2\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right)+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{dd}$$

$$=\frac{(1+d)^2C_{uu}-2(1+d)^2C_{du}+(1+d)^2C_{dd}+(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{dd}$$

$$=\frac{(u-d)^2C_{dd}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2-C_{dd}$$

$$=(1+r)^2\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)>0$$

จาก1) , 2) และ 3) ทำให้สรุปได้ว่า $V(2)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $C(0)<\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ยืมหุ้นมาขาย $\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}$ บาท
- ยืมตราสารหนี้มาขาย $\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2A(0)}$ ตราสาร

ได้รับเงิน $\dfrac{(1+u)^2 C_{dd} - 2(1+d)(1+u)C_{du} + (1+d)^2 C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$ บาท

- ซื้อสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน $C(0)$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน $\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2}$

$+\dfrac{(1+u)^2 C_{dd} - 2(1+d)(1+u)C_{du} + (1+d)^2 C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2} - C(0) > 0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ $\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2}$

$+\dfrac{(1+u)^2 C_{dd} - 2(1+d)(1+u)C_{du} + (1+d)^2 C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2} - C(0)$ บาท ไปซื้อตราสารหนี้

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุนที่เวลา $t=0$ คือ $V(0)=0$

ที่เวลา $t=2$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายคอลออปชัน 1 สัญญาได้รับเงิน

$$C(2) = \begin{cases} C_{uu} = \max\left\{(1+u)^2 S(0) - K, 0\right\} & ; \uparrow\uparrow \\ C_{du} = \max\left\{(1+d)(1+u)S(0) - K, 0\right\} & ; \downarrow\uparrow \\ C_{dd} = \max\left\{(1+d)^2 S(0) - K, 0\right\} & ; \downarrow\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

- ขายตราสารจากที่ลงทุน $\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2}$

$+\dfrac{(1+u)^2 C_{dd} - 2(1+d)(1+u)C_{du} + (1+d)^2 C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2} - C(0)$ บาท

ได้รับเงิน $\left(\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2}\right.$

$\left.+\dfrac{(1+u)^2 C_{dd} - 2(1+d)(1+u)C_{du} + (1+d)^2 C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2} - C(0)\right)(1+r)$ บาท

- ซื้อหุ้นคืน $\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2 S(0)}$ หน่วย

$$\text{จ่ายเงิน} \begin{cases} (1+u)^2\left(\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ; \uparrow\uparrow \\ (1+d)(1+u)\left(\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ; \downarrow\uparrow \\ (1+d)^2\left(\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ; \downarrow\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

- ซื้อตราสารหนี้คืน $\dfrac{(1+u)^2 C_{dd} - 2(1+d)(1+u)C_{du} + (1+d)^2 C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2 A(0)}$ ตราสาร

จ่ายเงิน $\dfrac{(1+u)^2 C_{dd} - 2(1+d)(1+u)C_{du} + (1+d)^2 C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$ บาท

ดังนั้นจะได้

$$V(2)=\begin{cases}C_{uu}\,; & \uparrow\uparrow\\ C_{du}\,; & \downarrow\uparrow\\ C_{dd}\,; & \downarrow\downarrow\end{cases}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)$$

$$-\begin{cases}(1+u)^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\uparrow\uparrow\\ (1+d)(1+u)\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\downarrow\uparrow\\ (1+d)^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right) & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$$

$$-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

พิจารณา $V(2)$ เป็น 3 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow\uparrow$ จะได้

$$\begin{aligned}V(2)&=C_{uu}\\&+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2\\&-(1+u)^2\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right)-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}\\&=C_{uu}\\&+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2\\&+\frac{-(1+u)^2C_{uu}+2(1+u)^2C_{du}-(1+u)^2C_{dd}-(1+u)^2C_{dd}+2(1+d)(1+u)C_{du}-(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}\\&=C_{uu}\\&+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2\\&-\frac{(u-d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}\\&=\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2>0\end{aligned}$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow\uparrow$ จะได้

$$V(2)=C_{du}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-(1+d)(1+u)\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right)$$

$$-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$=C_{du}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(1+d)(1+u)C_{uu}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)(1+u)C_{dd}}{(u-d)^2}$$

$$-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$=C_{du}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(u-d)^2C_{du}}{(u-d)^2}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2>0$$

3) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow\downarrow$ จะได้

$$V(2)=C_{dd}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-(1+d)^2\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}\right)-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$=C_{dd}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(1+d)^2C_{uu}-(1+d)^2 2C_{du}+(1+d)^2C_{dd}}{(u-d)^2}$$

$$-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$=C_{dd}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(u-d)^2C_{dd}}{(u-d)^2}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}-\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2>0$$

จาก1) , 2) และ 3) ทำให้ได้ว่า $V(2)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

จากกรณี 1) , กรณี 2) และ กรณี 3) จึงทำให้สรุปได้ว่า

$$C(0)=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2} \qquad \#$$

บทแทรก 5.2 ถ้า ความน่าจะเป็น $p=\dfrac{r-d}{u-d}$ แล้ว

$$C(0)=\frac{p^2C_{uu}+2p(1-p)C_{du}+(1-p)^2C_{dd}}{(1+r)^2}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 5.1

$$C(0)=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(u-d)^2}+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

$$=\frac{(1+r)^2C_{uu}-2(1+r)^2C_{du}+(1+r)^2C_{dd}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

$$+\frac{(1+u)^2C_{dd}-2(1+d)(1+u)C_{du}+(1+d)^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

$$=\frac{C_{uu}+2rC_{uu}+r^2C_{uu}-2C_{du}-4rC_{du}-2r^2C_{du}+C_{dd}+2rC_{dd}+r^2C_{dd}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

$$+\frac{C_{dd}+2uC_{dd}+u^2C_{dd}-2C_{du}+dC_{du}+uC_{du}+duC_{du}+C_{uu}+2dC_{uu}+d^2C_{uu}}{(u-d)^2(1+r)^2}$$

$$=\frac{p^2C_{uu}+2p(1-p)C_{du}+(1-p)^2C_{dd}}{(1+r)^2} \qquad \#$$

บทที่ 6

การกำหนดราคาออปชันด้วยการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซี

ในบทนี้จะศึกษาการกำหนดราคาออปชันด้วยการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีซึ่งจะเป็นแนวความคิดที่สำคัญของงานวิจัย

6.1 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวินามฟัซซี 1 ขั้น

กำหนดให้ $K(1)=\begin{cases}\hat{u}=\langle u^l,u^u\rangle, & prob=p\\ \hat{d}=\langle d^l,d^u\rangle, & prob=1-p\end{cases}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นต่อคาบ

กำหนดให้ $\bar{u}=D_{\max}(\hat{u})=\dfrac{u^l+u^u}{2}$, $\bar{d}=D_{\max}(\hat{d})=\dfrac{d^l+d^u}{2}$ โดยที่ $-1<\bar{d}<\bar{u}$ และ $0<p<1$

กำหนดให้ $K_A=r$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาตราสารหนี้ต่อคาบ

การกำหนดราคาคอลออปชันแบบต้นไม้ทวินาม1 ขั้นด้วยการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีโดยใช้กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชันตามขั้นตอนที่ 1)-3)

จะได้ $C(0)=\dfrac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\dfrac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$ ซึ่งแสดงให้เห็นชัดได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1) กำหนดให้ $[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ซึ่ง

$$V(0)=xS(0)+yA(0)=C(0) \tag{1}$$

และ

$$V(1)=xS(1)+yA(1)=C(1)$$

นั่นคือ

$$x(1+\bar{u})S(0)+y(1+r)A(0)=C_u \tag{2}$$

และ

$$x(1+\bar{d})S(0)+y(1+r)A(0)=C_d \tag{3}$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (2) และ (3) เพื่อหาค่า x และ y ดังนี้

$(2)-(3)$ $\quad x(1+\bar{u})S(0)-x(1+\bar{d})S(0)=C_u-C_d$

$$x(\bar{u}-\bar{d})S(0)=C_u-C_d$$

$$\therefore \quad x=\frac{C_u-C_d}{(\bar{u}-\bar{d})S(0)}$$

$(2)\times(1+\bar{d})$; $\quad x(1+\bar{u})(1+\bar{d})S(0)+y(1+r)(1+\bar{d})A(0)=(1+\bar{d})C_u \quad (4)$

$(3)\times(1+\bar{u})$; $\quad x(1+\bar{u})(1+\bar{d})S(0)+y(1+r)(1+\bar{u})A(0)=(1+\bar{u})C_d \quad (5)$

$(5)-(4)$; $\quad y(1+r)(1+\bar{u})A(0)-y(1+r)(1+\bar{d})A(0)=(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u$

$$y(1+r)(\bar{u}-\bar{d})A(0)=(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u$$

$$\therefore \qquad y=\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)A(0)}$$

ขั้นตอนที่ 3) ค่าพรีเมียมหรือ ราคาของคอลออปชัน $C(0)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (1) ด้วยการแทนค่า x และ y ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2) จะได้

$$C(0)=\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$$

ทฤษฎีบท 6.1 ถ้าไม่เกิดการค้ากำไรแล้ว $C(0)=\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $C(0)=\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$

โดยสมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C(0)\neq\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$

นั่นคือ $\qquad C(0)>\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$

หรือ $\qquad C(0)<\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $C(0)>\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ออกสัญญาคอลออปชันเพื่อขาย 1 สัญญา ได้รับเงิน $C(0)$ บาท
- ซื้อหุ้น $\frac{C_u-C_d}{(\bar{u}-\bar{d})S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}$ บาท
- ซื้อตราสารหนี้ $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)A(0)}$ ตราสาร จ่ายเงิน $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน $C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}>0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ $C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$ ไปซื้อตราสาร

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุน $V(0)=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายหุ้น $\frac{C_u-C_d}{(\bar{u}-\bar{d})S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\begin{cases}(1+\bar{u})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right); \uparrow \\ (1+\bar{d})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right); \downarrow\end{cases}$
- ขายตราสารหนี้ $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)A(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$ บาท

- ขายตราสารจากทุน $C(0)-\dfrac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\dfrac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$ บาท จะได้เงินอีก

$\left(C(0)-\dfrac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\dfrac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)$ บาท

- ผู้ถือคอลออปชันใช้สิทธิ ดังนั้นผู้ออก(เรา) ต้องจ่ายเงิน

$$C(1)=\begin{cases} C_u=\max\left\{(1+\bar{u})S(0)-K,0\right\}\ ;\ \uparrow \\ C_d=\max\left\{(1+\bar{d})S(0)-K,0\right\}\ ;\ \downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

ดังนั้นจะได้

$$V(1)=\begin{cases} (1+\bar{u})\left(\dfrac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right);\ \uparrow \\ (1+\bar{d})\left(\dfrac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right);\ \downarrow \end{cases}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-\begin{cases} C_u;\ \uparrow \\ C_d;\ \downarrow \end{cases}$$

พิจารณา $V(1)$ เป็น 2 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow$ จะได้

$$V(1)=(1+\bar{u})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right)+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$
$$=\frac{(1+\bar{u})C_u-(1+\bar{u})C_d+(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$
$$=\frac{(1+\bar{u})C_u-(1+\bar{u})C_d+(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$
$$=\frac{\left(1+\dfrac{u^l+u^u}{2}\right)C_u-\left(1+\dfrac{u^l+u^u}{2}\right)C_d+\left(1+\dfrac{u^l+u^u}{2}\right)C_d-\left(1+\dfrac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\dfrac{u^l+u^u}{2}-\dfrac{d^l+d^u}{2}}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$

$$=\frac{C_u+\left(\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_u-C_u-\left(\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$

$$=\frac{\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)}+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_u$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)>0$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow$ จะได้

$$V(1)=(1+\bar{d})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right)+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$

$$=\frac{(1+\bar{d})C_u-(1+\bar{d})C_d+(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$

$$=\frac{(1+\bar{d})C_u-(1+\bar{d})C_d+(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$

$$=\frac{\left(1+\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u-\left(1+\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_d+\left(1+\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_d-\left(1+\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$

$$=\frac{-C_d-\left(\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_d+C_d+\left(\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_d}{\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$

$$=\frac{\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_d}{\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)}+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)-C_d$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)>0$$

จาก1) และ 2) ทำให้สรุปได้ว่า $V(1)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $C(0)<\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ยืมหุ้นมาขาย $\frac{C_u-C_d}{(\bar{u}-\bar{d})S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}$ บาท
- ยืมตราสารหนี้มาขาย $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)A(0)}$ ตราสาร ได้รับเงิน $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$ บาท
- ซื้อสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน $C(0)$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน $\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}-C(0)>0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ $\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}-C(0)$ บาท ไปซื้อตราสารหนี้

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุนที่เวลา $t=0$ คือ $V(0)=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายคอลออปชัน 1สัญญาได้รับเงิน $C(1)=\begin{cases}C_u=\max\{(1+\bar{u})S(0)-K,0\}\ ;\ \uparrow\\ C_d=\max\{(1+\bar{d})S(0)-K,0\}\ ;\ \downarrow\end{cases}$ บาท
- ขายตราสารจากที่ลงทุน $\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}-C(0)$ บาท ได้รับเงิน $\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}-C(0)\right)(1+r)$ บาท
- ซื้อหุ้นคืน $\frac{C_u-C_d}{(\bar{u}-\bar{d})S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\begin{cases}(1+\bar{u})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right);\ \uparrow\\ (1+\bar{d})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right);\ \downarrow\end{cases}$ บาท

- ซื้อตราสารหนี้คืน $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)A(0)}$ ตราสาร จ่ายเงิน $\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})}$ บาท

ดังนั้นจะได้

$$V(1)=\begin{cases}C_u;\ \uparrow\\ C_d;\ \downarrow\end{cases}+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)$$

$$-\begin{cases}(1+\bar{u})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right);\ \uparrow\\ (1+\bar{d})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right);\ \downarrow\end{cases}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$

พิจารณา $V(1)$ เป็น 2 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow$ จะได้

$$\begin{aligned}V(1)&=C_u+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)\\
&\quad-(1+\bar{u})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right)-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}\\
&=C_u+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)\\
&\quad+\frac{-(1+\bar{u})C_u+(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{u})C_d+(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}\\
&=C_u+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)\\
&\quad+\frac{-\left(1+\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_u+\left(1+\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_d-\left(1+\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_d+\left(1+\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}}\\
&=C_u+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)\\
&\quad+\frac{-C_u-\left(\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_u+C_u+\left(\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}}\\
&=C_u+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)\\
&\quad+\frac{-\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)>0$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow$ จะได้

$$V(1)=C_d+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)$$

$$-(1+\bar{d})\left(\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}\right)-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$

$$=C_d+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)$$

$$+\frac{-(1+\bar{d})C_u+(1+\bar{d})C_d-(1+\bar{u})C_d+(1+\bar{d})C_u}{\bar{u}-\bar{d}}$$

$$=C_d+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)$$

$$+\frac{-\left(1+\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u+\left(1+\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_d-\left(1+\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_d+\left(1+\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_u}{\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}}$$

$$=C_d+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)$$

$$+\frac{C_d+\left(\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_d-C_d-\left(\frac{u^l+u^u}{2}\right)C_d}{\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}}$$

$$=C_d+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)+\frac{-\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)C_d}{\left(\frac{u^l+u^u}{2}-\frac{d^l+d^u}{2}\right)}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}-\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}\right)(1+r)\ >0$$

จาก1) และ 2) ทำให้ได้ว่า $V(1)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

จากกรณี 1) และ กรณี 2) จึงทำให้สรุปได้ว่า $C(0)=\frac{C_u-C_d}{\bar{u}-\bar{d}}+\frac{(1+\bar{u})C_d-(1+\bar{d})C_u}{(\bar{u}-\bar{d})(1+r)}$ #

6.2 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวินามฟัซซี 2 ขั้น

กำหนดให้ $K(2)=\begin{cases}\hat{u}=\langle u^l,u^u\rangle, & prob=p\\ \hat{d}=\langle d^l,d^u\rangle, & prob=1-p\end{cases}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นต่อคาบ

การกำหนดราคาคอลออปชันแบบต้นไม้ทวินาม2 ขั้นด้วยการประยุกต์ใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซี โดยใช้กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชันตามขั้นตอนที่ 1)-3)

<u>ขั้นตอนที่ 1)</u> กำหนดให้ $[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ซึ่ง

$$V(0)=xS(0)+yA(0)=C(0) \qquad (1)$$

และ

$$V(2)=xS(2)+yA(2)=C(2)$$

นั่นคือ

$$x(1+\bar{u})^2S(0)+y(1+r)^2A(0)=C_{uu} \qquad (2)$$

และ

$$x(1+\bar{d})(1+\bar{u})S(0)+y(1+r)^2A(0)=C_{du} \qquad (3)$$

และ

$$x(1+\bar{d})^2S(0)+y(1+r)^2A(0)=C_{dd} \qquad (4)$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (2) ,(3) และ (4) เพื่อหาค่า x และ y ดังนี้

$(2)+(4)-2\times(3)$; $x(\bar{u}-\bar{d})^2S(0)=C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}$

$$\therefore \quad x=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2S(0)}$$

แทนค่า x ใน (2), (3) และ (4) จะได้

$(4)\times(1+\bar{u})^2+(2)\times(1+\bar{d})^2-(3)\times2(1+\bar{d})(1+\bar{u})$

$$;\quad y(1+r)^2(\bar{u}-\bar{d})^2A(0)=(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}$$

$$\therefore \quad y=\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2A(0)}$$

ขั้นตอนที่ 3) ค่าพรีเมียมหรือ ราคาของคอลออปชัน $C(0)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (1) ด้วยการแทนค่า x และ y ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2) จะได้

$$C(0)=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$$

ทฤษฎีบท 5.1 $C(0)=\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$

ไม่เช่นนั้นจะเกิดการค้ากำไร

พิสูจน์ จะแสดงว่า

$C(0)=\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$ โดยสมมติในทางตรงกันข้ามว่า

$$C(0) \neq \frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$$

นั่นคือ $$C(0) > \frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$$

หรือ $$C(0) < \frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $C(0) > \dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ออกสัญญาคอลออปชันเพื่อขาย 1 สัญญา ได้รับเงิน $C(0)$ บาท
- ซื้อหุ้น $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$ บาท
- ซื้อตราสารหนี้ $\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2A(0)}$ ตราสาร

  จ่ายเงิน $\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน

$$C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}>0 \text{ บาท}$$

(โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ

$C(0)-\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$ ไปซื้อตรา

สาร

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุน $V(0)=0$

ที่เวลา $t=2$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายหุ้น $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2S(0)}$ หน่วย

$$\text{ได้รับเงิน} \begin{cases} (1+\bar{u})^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\uparrow\uparrow \\ (1+\bar{d})(1+\bar{u})\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\downarrow\uparrow \\ (1+\bar{d})^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\downarrow\downarrow \end{cases} \text{บาท}$$

- ขายตราสารหนี้ $\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2A(0)}$ หน่วย

ได้รับเงิน $\dfrac{(1+\bar{u})^2 C_{dd} - 2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du} + (1+\bar{d})^2 C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$ บาท

- ขายตราสารจากทุน

$C(0) - \dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} - \dfrac{(1+\bar{u})^2 C_{dd} - 2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du} + (1+\bar{d})^2 C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$ บาท จะได้เงินอีก

$$\left(C(0) - \frac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} - \frac{(1+\bar{u})^2 C_{dd} - 2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du} + (1+\bar{d})^2 C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2} \right)(1+r)$$

บาท

- ผู้ถือคอลออปชันใช้สิทธิ ดังนั้นผู้ออก(เรา) ต้องจ่ายเงิน

$$C(2) = \begin{cases} C_{uu} = \max\left\{(1+\bar{u})^2 S(0) - K, 0\right\} & ; \uparrow\uparrow \\ C_{du} = \max\{(1+\bar{d})(1+\bar{u})S(0) - K, 0\} & ; \downarrow\uparrow \\ C_{dd} = \max\left\{(1+\bar{d})^2 S(0) - K, 0\right\} & ; \downarrow\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

ดังนั้นจะได้

$$V(2) = \begin{cases} (1+\bar{u})^2 \left(\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} \right) & ; \uparrow\uparrow \\ (1+\bar{d})(1+\bar{u}) \left(\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} \right) & ; \downarrow\uparrow \\ (1+\bar{d})^2 \left(\dfrac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} \right) & ; \downarrow\downarrow \end{cases}$$

$$+ \frac{(1+\bar{u})^2 C_{dd} - 2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du} + (1+\bar{d})^2 C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$+ \left(C(0) - \frac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} - \frac{(1+\bar{u})^2 C_{dd} - 2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du} + (1+\bar{d})^2 C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2} \right)(1+r)^2$$

$$- \begin{cases} C_{uu} ; & \uparrow\uparrow \\ C_{du} ; & \downarrow\uparrow \\ C_{dd} ; & \downarrow\downarrow \end{cases}$$

พิจารณา $V(2)$ เป็น 3 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow\uparrow$ จะได้

$$V(2) = (1+\bar{u})^2 \left(\frac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} \right) + \frac{(1+\bar{u})^2 C_{dd} - 2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du} + (1+\bar{d})^2 C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$+ \left(C(0) - \frac{C_{uu} - 2C_{du} + C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2} - \frac{(1+\bar{u})^2 C_{dd} - 2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du} + (1+\bar{d})^2 C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2} \right)(1+r)^2$$

$$- C_{uu}$$

$$=\frac{(1+\bar{u})^2C_{uu}-2(1+\bar{u})^2C_{du}+(1+\bar{u})^2C_{dd}+(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$
$$-C_{uu}$$
$$=\frac{(\bar{u}-\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$
$$-C_{uu}$$
$$=(1+r)^2\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)>0$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow\uparrow$ จะได้

$$V(2)=(1+\bar{d})(1+\bar{u})\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right)$$
$$+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$
$$-C_{du}$$
$$=\frac{(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{uu}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$
$$+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$
$$-C_{du}$$
$$=\frac{(\bar{u}-\bar{d})^2C_{du}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$
$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$
$$-C_{du}$$
$$=(1+r)^2\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)>0$$

3) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\downarrow\downarrow$ จะได้

$$V(2)=(1+\bar{d})^2\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right)+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-C_{dd}$$

$$=\frac{(1+\bar{d})^2C_{uu}-2(1+\bar{d})^2C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{dd}+(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(u-d)^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-C_{dd}$$

$$=\frac{(\bar{u}-\bar{d})^2C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-C_{dd}$$

$$=(1+r)^2\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)>0$$

จาก1) , 2) และ 3) ทำให้สรุปได้ว่า $V(2)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $C(0)<\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ยืมหุ้นมาขาย $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$ บาท
- ยืมตราสารหนี้มาขาย $\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2A(0)}$ ตราสาร

  ได้รับเงิน $\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$ บาท
- ซื้อสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน $C(0)$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$

$+\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}-C(0)>0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

นำเงินที่เหลือ $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$

$+\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}-C(0)$ บาท ไปซื้อตราสารหนี้

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุนที่เวลา $t=0$ คือ $V(0)=0$

ที่เวลา $t=2$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

- ขายคอลออปชัน 1 สัญญาได้รับเงิน

$$C(2)=\begin{cases} C_{uu}=\max\left\{(1+\bar{u})^2S(0)-K,0\right\} & ;\ \uparrow\uparrow \\ C_{du}=\max\left\{(1+\bar{d})(1+\bar{u})S(0)-K,0\right\} & ;\ \downarrow\uparrow \\ C_{dd}=\max\left\{(1+\bar{d})^2S(0)-K,0\right\} & ;\ \downarrow\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

- ขายตราสารจากที่ลงทุน $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$

$$+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}-C(0) \text{ บาท}$$

ได้รับเงิน $\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right.$

$$\left.+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}-C(0)\right)(1+r) \text{ บาท}$$

- ซื้อหุ้นคืน $\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2S(0)}$ หน่วย

$$\text{จ่ายเงิน}\begin{cases} (1+\bar{u})^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\ \uparrow\uparrow \\ (1+\bar{d})(1+\bar{u})\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\ \downarrow\uparrow \\ (1+\bar{d})^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\ \downarrow\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

- ซื้อตราสารหนี้คืน $\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2A(0)}$ ตราสาร

จ่ายเงิน $\dfrac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$ บาท

ดังนั้นจะได้

$$V(2)=\begin{cases} C_{uu};\ \uparrow\uparrow \\ C_{du};\ \downarrow\uparrow \\ C_{dd};\ \downarrow\downarrow \end{cases}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)$$

$$-\begin{cases}(1+\bar{u})^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\uparrow\uparrow\\ (1+\bar{d})(1+\bar{u})\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\downarrow\uparrow\\ (1+\bar{d})^2\left(\dfrac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right) & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$$

$$-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}$$

พิจารณา $V(2)$ เป็น 3 กรณี ดังนี้

1) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง $\uparrow\uparrow$ จะได้

$$\begin{aligned}V(2)&=C_{uu}\\&+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2\\&-(1+\bar{u})^2\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right)-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\\&=C_{uu}\\&+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2\\&+\frac{-(1+\bar{u})^2C_{uu}+2(1+\bar{u})^2C_{du}-(1+\bar{u})^2C_{dd}-(1+\bar{u})^2C_{dd}+2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}-(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\\&=C_{uu}\\&+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2\\&-\frac{(\bar{u}-\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\\&=\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2>0\end{aligned}$$

2) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง ↓↑ จะได้

$$V(2)=C_{du}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-(1+\bar{d})(1+\bar{u})\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right)$$

$$-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$=C_{du}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{uu}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$=C_{du}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(\bar{u}-\bar{d})^2C_{du}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2>0$$

3) ถ้าหุ้นเปลี่ยนแปลง ↓↓ จะได้

$$V(2)=C_{dd}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-(1+\bar{d})^2\left(\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}\right)-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$=C_{dd}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(1+\bar{d})^2C_{uu}-(1+\bar{d})^2 2C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$=C_{dd}$$

$$+\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2$$

$$-\frac{(\bar{u}-\bar{d})^2C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}-\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2}\right)(1+r)^2>0$$

จาก1) , 2) และ 3) ทำให้ได้ว่า $V(2)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ No-Arbitrage Principle

จากกรณี 1) , กรณี 2) และ กรณี 3) จึงทำให้สรุปได้ว่า

$$C(0)=\frac{C_{uu}-2C_{du}+C_{dd}}{(\bar{u}-\bar{d})^2}+\frac{(1+\bar{u})^2C_{dd}-2(1+\bar{d})(1+\bar{u})C_{du}+(1+\bar{d})^2C_{uu}}{(\bar{u}-\bar{d})^2(1+r)^2} \qquad \#$$

บทที่ 7
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

7.1 สรุปผลงานวิจัย

ในการสร้างแบบจำลองราคาออปชันโดยใช้ต้นไม้ทวินามฟัซซี เราศึกษาตราสารอนุพันธ์ทางการเงินประเภทออปชัน เพื่อไปใช้ในการบริหารความเสี่ยง ต่อไปเราศึกษาแบบจำลองราคาต้นไม้ทวินาม เพื่อกำหนดราคาออปชัน เมื่อได้แบบจำลองการกำหนดราคาออปชันมาแล้ว เราจะใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีมากำหนดราคาของออปชันให้เป็นช่วง ก็จะทำให้ได้แบบจำลองราคาออปชันโดยใช้ต้นไม้ทวินามฟัซซีออกมา

เราใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีในการแก้ปัญหา ในกรณีนี้เราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาที่ไม่แน่นอน จะส่งผลให้การคาดเดาของราคาเป็นไปได้ยาก แต่เราสามารถทราบขอบเขต ซึ่งเราสามารถนำมาแปลงให้อยู่ในรูปจำนวนฟัซซีได้

7.2 ข้อเสนอแนะ

ในปัญหาพิเศษนี้เราเลือกที่จะใช้ตรรกศาสตร์ฟัซซีมาใช้ในการสร้างแบบจำลอง ซึ่งอาจทำให้การคิดคำนวณเกิดความยุ่งยากซับซ้อน แต่ผลลัพธ์ที่ได้นั้นค่อนข้างแน่นอนและสามารถคาดเดาได้

เอกสารอ้างอิง

[1] Alok Gupta, Christoph Reisinger,Alan Whitley, Model Uncertainty and Its Impact on Derivative Pricing,RETHINKING RISK MEASUREMENT AND REPORTING,2008

[2] ECON4510 Finance theory.Diderik Lund,28 March 2011.

[3] Fadugba Sunday Emmanuel*, Ajayi Olayinka Adedoyin, Okedele Olanrewaju

[4] Henry L. Bryant, Michael S. Haigh,Derivative pricing model and time-series approaches to hedging: A comparison,Journal of Futures Markets · July 2005

[5] Implimenting option pricing models when asset returns are predictable

[6] John C.Hull.Fundamantals of Futures and Options Markets(แนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับตราสารอนุพันธ์: ฟอร์เวิร์ด ฟิวเจอร์ส สวอป และออปชัน).กรุงเทพมหานคร: บริษัท เพียร์สัน เอ็ดดูเคชัน อินโดไชน่า จำกัด

[7] Marek Capinski,Tomasz Zastawniak.Mathematics for Finance: An Introduction to To Financail Engineering.New york:Springer.January 2003.

[8] Rama CONT, Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments,3rd METU Economics Research Conference (2003)

[9] Rebecca Stockbridge,The Discrete Binomial Model for Option Pricing Hammed, Performance measure of binomial model for pricing American and European options,Applied and Computational Mathematics 2014; 3(6-1): 18-30

[10] Rene Garcia,Eric Ghysels,Eric Renault,The Econometrics of Option Pricing,August, 2003

[11] S. G. Kou,A Jump-Diffusion Model for Option Pricing,Management Science © 2002 INFORMS.Vol. 48, No. 8, August 2002 pp. 1086–1101

[12] Simon Benninga and Zvi Wiener,The Binomial Option Pricing Model, Mathematica in Education and Research,Vol. 6 No. 3 1997