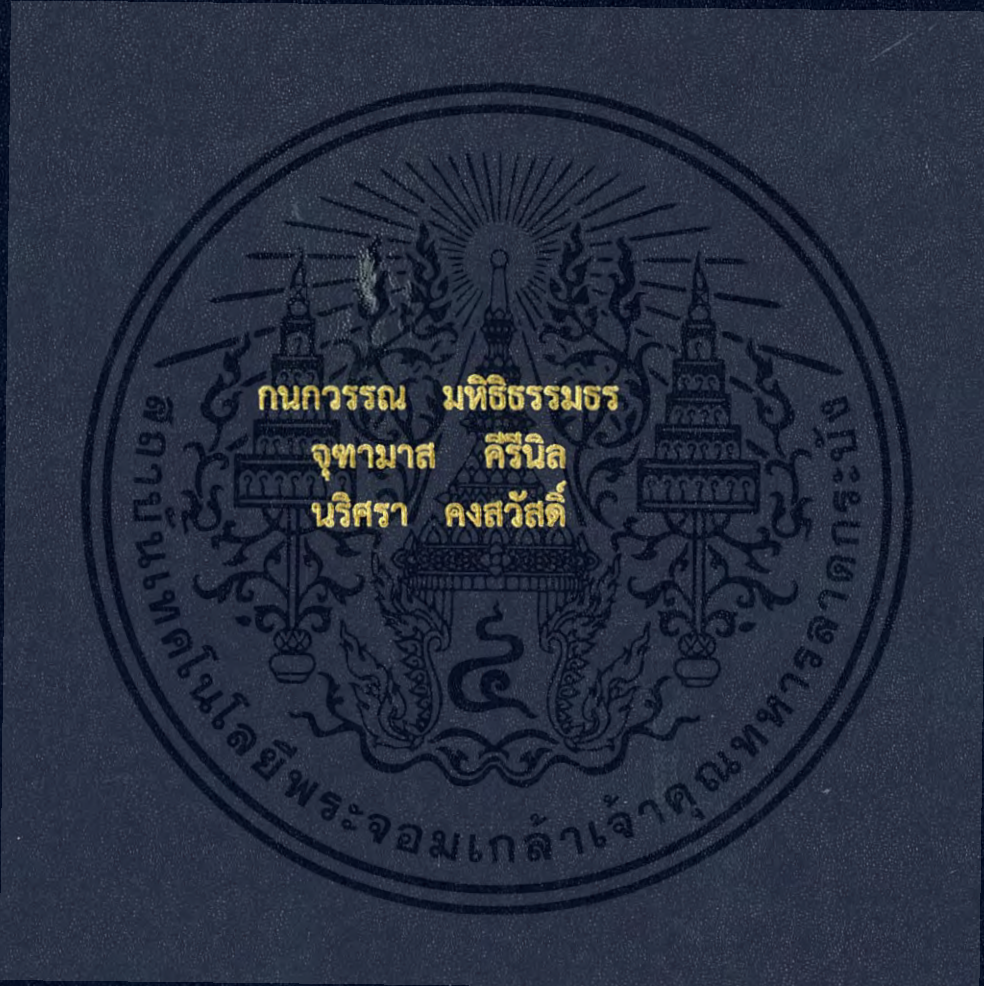


ผลเฉลยโดยประมาณของสมการการสั่นดัพฟิงไม่เชิงเส้น

APPROXIMATE SOLUTIONS FOR NON-LINEAR
DUFFING OSCILLATING EQUATION



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

ผลเฉลยโดยประมาณของสมการการสั่นดัดพองไม่เชิงเส้น

APPROXIMATE SOLUTIONS FOR NON-LINEAR
DUFFING OSCILLATING EQUATION



b.00265850
i.....

TB00196

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

APPROXIMATE SOLUTIONS FOR NON-LINEAR
DUFFING OSCILLATING EQUATION



KANOKWAN MAHITHITHUMMATHORN
JUTAMAS KIRININ
NARISARA KONGSAWASDI

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2015




เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ ผลเฉลยโดยประมาณของสมการการสั่นดัพฟิงไม่เชิงเส้น
Approximate Solutions for Non-Linear Duffing
Oscillating Equation

ชื่อนักศึกษา นางสาวกนกวรรณ มหิทธิธรรมธร รหัสนักศึกษา 55050005
นางสาวจุฑามาส ศิรินิล รหัสนักศึกษา 55050033
นางสาวนริศรา คงสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 55050077

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2558
อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง(สจล.) อนุมัติให้
ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต(คณิตศาสตร์
ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.พันธินี พงศ์สัมพันธ์ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.กัญญ์ณัฏฐ์ แจ่มศรี กรรมการ	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลเฉลยโดยประมาณของสมการการสั่นดัพฟิงไม่เชิงเส้น
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกรรณ มหิทธิธรรมธร รหัสนักศึกษา 55050005 นางสาวจุฑามาส ศิรินิล รหัสนักศึกษา 55050033 นางสาวนริศรา คงสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 55050077
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณณ์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ได้ทำการศึกษาการประมาณค่าผลเฉลยของสมการการสั่นดัพฟิงไม่เชิงเส้น ด้วยวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากทั้ง 3 วิธีโดยใช้กราฟ เราพบว่าผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และมีค่าใกล้เคียงกับวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ เมื่อขนาด (γ) และความถี่ (ω) จากแรงภายนอกมีค่าน้อยๆ และมีค่าต่างกันเมื่อขนาด (γ) และความถี่ (ω) จากแรงภายนอกมีค่ามาก

คำสำคัญ : วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ วิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม สมการดัพฟิง

Title	Approximate Solutions for Non-Linear Duffing Oscillating Equation	
Students	Miss Kanokwan Mahithithummathorn	Student ID 55050005
	Miss Jutamas Kirinin	Student ID 55050033
	Miss Narisara Kongsawasdi	Student ID 55050077
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Faculty	Science	
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)	
Academic Year	2015	
Advisor	Asst.Prof.Dr.Jaipong Kasemsuwan	

Abstract

This special problem are concerned with the finding approximate solution for duffing oscillating equations by applying Runge-Kutta-Nystrom method, modified differential transform method and Mathematica. The obtained three results are graphically compared. We found the two results from Runge-Kutta-Nystrom method and Mathematica are exactly the same and close to the another result obtained from modified differential transform method when the amplitude (γ) and frequency (ω) of the external force is very small. The results are quite different when the amplitude (γ) and frequency (ω) of the external force are larger.

Keywords : The Modified Differential transform method, Runge-Kutta-Nystrom method, Duffing Equation

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องผลเฉลยโดยประมาณของสมการการสั่นดัพฟิงไม่เชิงเส้น (Approximate Solutions for Non-Linear Duffing Oscillating Equation) สามารถสำเร็จจุล่งไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษเป็นอย่างสูง ที่ได้ให้คำปรึกษาและแนวทางในการดำเนินงาน ตลอดจนการตรวจสอบและการแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ แก่คณะผู้จัดทำเป็นอย่างดี ทำให้ปัญหาพิเศษนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์ และ ผศ.ดร.กัญญ์ณัฏฐ์ แจ่มศรี กรรมการผู้คุมสอบปัญหาพิเศษนี้ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะ ข้อแก้ไข และให้แนวคิดต่างๆ ที่เกิดประโยชน์ในการทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ทั้งภาคทฤษฎีและปฏิบัติ ทำให้การดำเนินงานเป็นไปได้ด้วยดี

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดามารดาและครอบครัวของคณะผู้จัดทำ ที่คอยให้กำลังใจ ให้ความช่วยเหลือ และสนับสนุนการศึกษาด้วยดีเสมอมา

กนกวรรณ มหิทธิธรรมธร
จุฑามาส คีรีนิล
นริศรา คงสวัสดิ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	จ
สารบัญรูป.....	ฉ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	2
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	2
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน.....	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน.....	4
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
2.1 อนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์.....	5
2.1.1 อนุกรมกำลัง.....	5
2.1.2 อนุกรมเทย์เลอร์.....	5
2.2 สมการดีฟฟิง.....	8
2.3 นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง.....	13
2.4 การประมาณปาเด.....	23
2.5 นิยามผลการแปลงลาปลาซ และการแปลงลาปลาซผกผัน.....	25
2.5.1 ผลการแปลงลาปลาซ.....	25
2.5.2 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน.....	29
2.6 การหาคำตอบโดยวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์.....	32
2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	34
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....	36
3.1 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดีฟฟิงด้วยวิธีรุงเง-คุตตา และนี่สตรอม.....	36
3.2 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดีฟฟิงด้วยวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์.....	37
3.3 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดีฟฟิงด้วยคำสั่งใน Mathematica.....	38
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล.....	39
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	88
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	88
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	91
เอกสารอ้างอิง.....	92

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1.1	แสดงระยะเวลาในการดำเนินงาน.....	4
2.1	แสดงผลการประมาณค่าด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม.....	12
2.2	แสดงผลการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน.....	27
2.3	แสดงผลการแปลงลาปลาซผกผันของบางฟังก์ชัน.....	31
4.1	แสดงผลการคำนวณตั้งตัวอย่างที่ 4.1 ด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม.....	40
4.2	แสดงผลการคำนวณตั้งตัวอย่างที่ 4.2 ด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม.....	50
4.3	แสดงผลการคำนวณตั้งตัวอย่างที่ 4.3 ด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม.....	58
4.4	แสดงผลการคำนวณตั้งตัวอย่างที่ 4.4 ด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม.....	64
5.1	แสดงสมการและเงื่อนไขเริ่มต้นของแต่ละตัวอย่าง.....	88



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า	
2.1	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม.....	12
2.2	กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ และวิธีรุงง-คุดตา.....	34
4.1	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม.....	41
4.2	กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.7) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์.....	44
4.3	กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.9) ที่ได้จากวิธีการแปลงลาปลาซ.....	45
4.4	กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.12) ที่ได้จากการประมาณปาเด.....	46
4.5	กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.14) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์	47
4.6	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica.....	48
4.7	กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.1.....	48
4.8	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม.....	51
4.9	กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.21) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์.....	52
4.10	กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.21) ที่ได้จากวิธีการแปลงลาปลาซ.....	53
4.11	กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.26) ที่ได้จากการประมาณปาเด.....	55
4.12	กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.28) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์	56
4.13	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica.....	56
4.14	กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.2.....	57
4.15	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม.....	59
4.16	กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.40) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์	61
4.17	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica.....	62
4.18	กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.3.....	62
4.19	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงง-คุดตาและนิสตรอม.....	65
4.20	กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.52) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์	66
4.21	กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica.....	67

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.22 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.4.....	67
4.23 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.5.....	71
4.24 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.6.....	73
4.25 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.7.....	76
4.26 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.8.....	78
4.27 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematicaของตัวอย่างที่ 4.9.....	80
4.28 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.10.....	83
4.29 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตา และนีสตรอม คำสั่งใน Mathematica และ วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์เมื่อกำหนดให้ค่าของขนาด จากแรงภายนอกคงที่ ($\gamma = 1$).....	84
4.30 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงง-คุดตา และนีสตรอม คำสั่งใน Mathematica และ วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์เมื่อกำหนดให้ค่าของความถี่ จากแรงภายนอกคงที่ ($\omega = 1$).....	85
4.31 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ เมื่อกำหนดให้ค่าของขนาดจากแรงภายนอกคงที่ ($\gamma = 1$).....	86
4.32 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ เมื่อกำหนดให้ค่าของความถี่จากแรงภายนอกคงที่ ($\omega = 1$).....	87

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการแก้ปัญหาของสมการการสั่นไม่เชิงเส้นนั้นมีหลายวิธี โดยวิธีการแต่ละวิธีก็มีความแตกต่างกันไป เช่น Harmonic-Balance Method (HB) [1] Lindstedt-Poincare method(LP) [1-3] Krylov-Bogolibov-Mitropolsky method (KBM) [4,5] โดยวิธีเหล่านี้จะใช้เพอร์เทอเบชันเทคนิค เพื่อลดรูประบบสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย แล้วจึงทำการแก้ปัญหา วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform Method: DTM) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้เพื่อแก้สมการการสั่นไม่เชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่ได้แนวคิดมาจากอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และวิธีนี้จะให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ แต่เนื่องจากวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวนั้นให้ผลเฉลยที่อาจมีความคลาดเคลื่อน จึงได้มีการปรับปรุงวิธีในการหาผลเฉลย ซึ่ง Shaher Momani และ Vedat Suat Erturk [6] ได้ศึกษาวิธีการแก้ปัญหสมการการสั่นไม่เชิงเส้นโดยใช้วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์(Modified Differential Transform Method: MDTM)

วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์(Modified Differential Transform Method: MDTM) เป็นการนำวิธีการแปลงลาปลาซ(Laplace Transform) และการประมาณปาด (Pade' Approximate) เข้ามาช่วยในการแก้สมการ และผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากวิธีการดังกล่าวถูกนำมาเปรียบเทียบกับวิธีรุงเง-คุดตาและนีสตรอม(Runge-Kutta-Nystrom Method) และ คำสั่งใน Mathematica

ในโครงการงานปัญหาพิเศษนี้จะศึกษาวิธีรุงเง-คุดตาและนีสตรอม(Runge-Kutta-Nystrom Method) วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Modified Differential Transform Method: MDTM) และคำสั่งใน Mathematica สำหรับสมการดัฟฟิง (Duffing Equations) ซึ่งเป็นสมการการสั่นไม่เชิงเส้นประเภทหนึ่งที่อยู่ในรูปแบบของ

$$y'' + \delta y' + \alpha y + \beta y^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

$$y(0) = a, y'(0) = b; \quad a, b \in R \quad (1.2)$$

เมื่อ $\delta, \alpha, \beta, \gamma$ และ ω เป็นค่าคงที่ สมการดัฟฟิง (Duffing Equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองไม่เชิงเส้น ถูกนำมาประยุกต์ใช้ประโยชน์ทางด้านฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ เป็นต้น[9-11]

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) เพื่อศึกษาวิธีการ บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) วิธีการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) และ วิธีการประมาณปาเด (Padé Approximate)
- 2) เพื่อศึกษาวิธีการแก้ปัญหасмการดัดฟิง (Duffing Equations) ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองไม่เชิงเส้น
- 3) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดัดฟิง (Duffing Equations) ด้วยวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์(MDTM)

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

สมการดัดฟิง (Duffing Equations) ที่ศึกษาในโครงการงานปัญหาพิเศษนี้จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น จึงจะสามารถใช้วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (MDTM) ในการหาผลเฉลยได้ ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$y(0) = a, y'(0) = b; \quad a, b \in R \quad (1.3)$$

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

- 1) ศึกษาคุณสมบัติของสมการดัดฟิง (Duffing Equations)
- 2) ศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) เกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไปในการแก้ปัญหасмการการสันไม่เชิงเส้น
- 3) ศึกษาวิธีการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) และการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) เกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไป
- 4) ศึกษาวิธีการประมาณปาเด (Padé Approximate) เกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไป
- 5) ทำการหาผลเฉลยโดยประมาณโดยใช้วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (MDTM)
- 6) เปรียบเทียบกราฟของผลเฉลยโดยประมาณ (Approximated Solutions) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (MDTM) กับผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม
- 7) จัดทำเล่มโครงการงานปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้รับความรู้ในการศึกษาวิธีการ บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) วิธีการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) และ วิธีการประมาณปาเด (Padé Approximate)

2) ได้รับความรู้ในการศึกษาวิธีการแก้ปัญหสมการดัฟฟิง (Duffing Equations) ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองไม่เชิงเส้น

3) ได้รับความรู้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดัฟฟิง (Duffing Equations) ด้วยวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (MDTM)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ จะกล่าวถึงข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับอนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ สมการดีฟฟิง นิยาม การแปลงเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง การประมาณปาเด นิยามผลการแปลงลาปลาซและ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน และการหาคำตอบด้วยวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

2.1 อนุกรมกำลัง และ อนุกรมเทย์เลอร์ [1]

2.1.1 อนุกรมกำลัง (Power Series)

นิยามที่ 1 [12] อนุกรมกำลังใน $x-x_0$ (Power Series in $x-x_0$) คือ อนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad (2.1)$$

สำหรับจำนวนจริง x จะมี x_0 เป็นค่าคงตัวเรียกว่าจุดศูนย์กลางของการกระจาย (Center of Expansion) เรียกอนุกรมที่ (2.1) ว่าอนุกรมกำลังรอบจุด x_0 และเรียก a_n ว่า สัมประสิทธิ์ของ อนุกรมกำลัง

หมายเหตุ อนุกรมที่ (2.1) ลู่เข้าไปสู่ a_0 เมื่อ $x = x_0$ เสมอและอาจลู่เข้าสำหรับทุกค่าของ x ก็ได้ ถ้าอนุกรมที่ (2.1) ไม่ลู่เข้าตามที่กล่าวมา จะมี $R > 0$ ซึ่งอนุกรมที่ (2.1) ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์สำหรับทุกค่า x ในช่วง $|x-x_0| < R$ และลู่ออก เมื่อ $|x-x_0| > R$ เราเรียก R ว่า รัศมีของการลู่เข้า ($R = 0$ อนุกรมลู่เข้าที่ x_0 และ $R = \infty$ อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x) และเรียกช่วง $(x_0 - R, x_0 + R)$ ว่า ช่วงของการลู่เข้าและถ้าอนุกรมที่ (2.1) ลู่เข้าไปสู่ $f(x)$ จะเขียนได้เป็น

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (2.2)$$

2.1.2 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) และอนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin's Series)

นิยามที่ 2 [12] อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคคลอริน

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบนช่วง I ที่มี x_0 เป็นจุดภายใน อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด $x = x_0$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots \quad (2.3)$$

อนุกรมแมคคลอริน คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots \quad (2.4)$$

นั่นคือ อนุกรมเทย์เลอร์ กรณี $x_0 = 0$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = e^x$ อนุกรมเทย์เลอร์ที่กระจายรอบจุด $x = 0$

วิธีทำ ให้ $f(x) = e^x$ จะได้อนุพันธ์อันดับต่างๆดังนี้

$f(x) = e^x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x$	$f''(0) = 1$
$f'''(x) = e^x$	$f'''(0) = 1$
$f^{(4)}(x) = e^x$	$f^{(4)}(0) = 1$
\vdots	\vdots
$f^{(n)}(x) = e^x$	$f^{(n)}(0) = 1$

ดังนั้น แทนลงในนิยามที่ 2 เมื่อ $x_0 = 0$ จะได้ อนุกรมเทย์เลอร์สำหรับ e^x รอบ $x = 0$ คือ

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n &= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!} (x)^2 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = \frac{1}{x}$ อนุกรมเทย์เลอร์ที่กระจายรอบจุด $x = 1$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ จะได้อนุพันธ์อันดับต่างๆดังนี้

$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(1) = 1$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(1) = -1$
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$	$f''(1) = 2!$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= -\frac{3 \cdot 2}{x^4} & f'''(1) &= -3! \\
 f^{(4)}(x) &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{x^5} & f^{(4)}(1) &= (-1)^n n! \\
 \vdots & & \vdots & \\
 f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^n} & f^{(n)}(1) &= (-1)^n n!
 \end{aligned}$$

ดังนั้น แทนลงในนิยามที่ 2 เมื่อ $x_0 = 1$ จะได้ อนุกรมเทย์เลอร์สำหรับ $\frac{1}{x}$ รอบ $x = 1$ คือ

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \dots \\
 &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

นิยามที่ 3 [12] เราเรียก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ มีช่วง $I: (x_0 - R, x_0 + R), R > 0$ ซึ่งสำหรับทุก x ในช่วงนี้ถ้าเข้าไปสู่ $f(x)$ เราสามารถเขียนแทน $f(x)$ ได้ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) รอบจุด x_0 นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (2.5)$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงอนุกรมเทย์เลอร์ (อนุกรมแมคลอริน) ของฟังก์ชันวิเคราะห์ บนช่วงของ x

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{ทุกค่า } x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{ทุกค่า } x$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

นอกจากฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ยกมาเป็นตัวอย่างนี้ ฟังก์ชันที่เราพบมากและเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ คือ ฟังก์ชันโพลิโนเมียลและฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function) สำหรับฟังก์ชันตรรกยะเป็น ฟังก์ชันวิเคราะห์ยกเว้นที่จุดซึ่งทำให้ฟังก์ชันมีค่าเข้าสู่อนันต์ เช่นฟังก์ชัน $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ เป็นฟังก์ชัน วิเคราะห์ทุกค่า x ยกเว้นที่จุด $x = 1$ และ $x = 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ ฟังก์ชันในรูป $f(x) = (x-1)^5$ มีค่าจำกัดไม่ว่า x จะมีค่าเท่าใด แต่ฟังก์ชันนี้ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด $x=1$ เพราะว่า $f''(x)$ มีค่าเข้าสู่อินฟินิตี้ เมื่อ $x=1$ $f(x)$ จึงไม่สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ ณ จุด $x=1$ ได้

2.2 สมการดัฟฟิง (Duffing Equation) [6]

สมการดัฟฟิง (Duffing Equation) หรือสมการการสั่นดัฟฟิง (Duffing Oscillator) ตั้งชื่อตามจอร์จ ดัฟฟิง (Georg Duffing) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองไม่เชิงเส้น ที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้ประโยชน์ทางด้าน วิศวกรรม ชีววิทยาและฟิสิกส์ เป็นต้น

นิยามที่ 4 [6] สมการดัฟฟิง (Duffing Equation) เป็นพหุคูณแบบไม่เชิงเส้นที่พบได้ในระบบฟิสิกส์ วิศวกรรม และชีววิทยา สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$y'' + \delta y' + \alpha y + \beta y^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

เมื่อ $\delta, \alpha, \beta, \gamma$ และ ω เป็นค่าคงที่

โดย δ คือ สัมประสิทธิ์ของความหน่วง

α คือ สัมประสิทธิ์ของความฝืด

β คือ ค่าคงที่ของความแข็ง

γ คือ ขนาดของแรงภายนอกที่มากระทำ

ω คือ ความถี่ของแรงภายนอก

ซึ่งการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นนั้นจะกระทำได้ยากจึงต้องมาใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Numerical Methods for Ordinary Differential Equations) ในการแก้ปัญหา แต่จะต้องมีเงื่อนไขเริ่มต้นซึ่งจะประกอบด้วย

$$y(a) = \alpha, y'(b) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราอาจใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตาในการหาคำตอบ โดยสามารถทำสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ไม่เชิงเส้นให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ไม่เชิงเส้น จากสมการที่ (2.7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y_1 = y$ และ $y_2 = y'$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\delta y_2 - \alpha y_1 - \beta y_1^3 + \gamma \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

แต่ในที่นี่จะแสดงการหาคำตอบของสมการดัฟฟิง (Duffing Equation) โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา และนี่สตรอม(Runge-Kutta-Nystrom Method) จัดเป็นวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งให้ค่าคลาดเคลื่อน ในรูปของช่วงกว้าง $O(h^4)$ ลักษณะของค่าผลลัพธ์ที่ได้จะมีความเที่ยงตรงสูง รูปของสมการรุงเง-คุดตาและนี่สตรอม(Runge-Kutta-Nystrom Method) ที่ใช้กันโดยทั่วไปสามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง และมีลักษณะดังนี้[15]

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2

$$y'' = f(t, y, y') \quad \text{โดย } y(t_0) = y_0 \quad \text{และ } y'(t_0) = y_0 \quad (2.9)$$

ถ้า f มีคำตอบที่เป็นไปได้เพียงอย่างเดียว (Unique) บนช่วงที่มี t_0 อยู่ด้วยแล้ว สามารถใช้วิธีของรุงเงและคุดตา และนี่สตรอม (Runge-Kutta-Nystrom Method) ประมาณค่าของ $y_{n+1} = y(t_{n+1})$

โดยที่ $t_{n+1} = t_0 + (n+1)h$ เมื่อ $n=0,1,2,\dots$ (2.10)

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y_n' + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \right] \quad (2.11)$$

$$y_{n+1}' = y_n' + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.12)$$

โดยที่ $k_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y_n')$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y_n' + k_1\right) \quad \text{โดย } K = \frac{h}{2}\left(y_n' + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y_n' + k_2\right) \quad (2.13)$$

$$k_4 = \frac{h}{2} f(t_n + h, y_n + L, y_n' + 2k_3) \quad \text{โดย } L = h(y_n' + k_3)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $y'' + y + 0.3y^3 = 0$

เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0, y'(0) = 1$

วิธีทำ ในที่นี้ $f(t, y, y') = -y - 0.3y^3$ กำหนดให้ $h = 0.1$

จาก

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y'_n) \\ &= 0.05[-y_n - 0.3y_n^3] \\ &= -0.05y_n - 0.015y_n^3 \end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_1\right) \text{ โดยที่ } K = \frac{h}{2}\left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ K &= 0.05[-0.025y_n - 0.0075y_n^3] \\ &= -0.00125y_n - 0.000375y_n^3 \\ k_2 &= 0.05\left(-0.99875y_n + 0.000375y_n^3 - 0.3(0.99875y_n - 0.000375y_n^3)^3\right) \\ &= -0.0499375y_n - 0.0149251y_n^3 + 0.0000168328y_n^5 - \\ &\quad 6.32021 \times 10^{-9}y_n^7 + 7.91016 \times 10^{-13}y_n^9 \end{aligned}$$

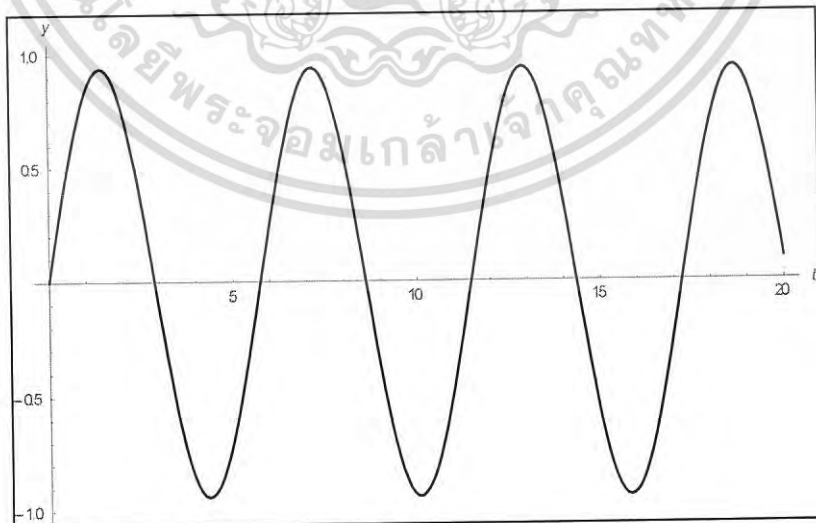
จาก

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_2\right) \\ &= 0.05\left(-0.99875y_n + 0.000375y_n^3 - 0.3(0.99875y_n - 0.000375y_n^3)^3\right) \\ &= -0.0499375y_n - 0.0149251y_n^3 + 0.0000168328y_n^5 - \\ &\quad 6.32021 \times 10^{-9}y_n^7 + 7.91016 \times 10^{-13}y_n^9 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 แสดงผลการประมาณค่าด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม

n	t_n	y_n	y'_n
0	0	0	1
1	0.1	0.0998332	0.994997
2	0.2	0.198664	0.979948
3	0.3	0.295484	0.954749
4	0.4	0.389271	0.919252
5	0.5	0.478987	0.873314
6	0.6	0.563582	0.816849
7	0.7	0.642006	0.749897
8	0.8	0.713219	0.672685
9	0.9	0.776217	0.585691
10	1	0.830057	0.489692
50	5	-0.672983	0.718558
100	10	-0.938284	-0.0579838
200	20	0.0974784	-0.99523



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุดตาและนี้สตรอม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

นิยามที่ 5 [7] การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform) ของ ฟังก์ชัน $f(t)$ กำหนดโดย

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0} \quad \text{โดยที่ } F: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.14)$$

เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และสามารถหาอนุพันธ์ได้ เรียก $f(t)$ ว่าเป็นฟังก์ชันเดิม (Original Function) และเรียก $F(k)$ ว่าเป็นฟังก์ชันการแปลง (Transform Function) ของ $f(t)$ หรือเรียกว่าฟังก์ชันที (T-Function)

นิยามที่ 6 [7] การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse Transform) การแปลงเชิงผกผันของ $F(k)$ ในสมการที่ (2.14) กำหนดโดย

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)t^k \quad \text{โดยที่ } F: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.15)$$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่ใช้นิยามในสมการที่(2.14) มาใช้ในการพิสูจน์ ในงานวิจัยนี้จะพิสูจน์ทั้งหมด 8 ทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ

$F: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $U: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $V: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, α, β คือ ค่าคงที่ และ

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=0}, \quad V(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} v(t) \right]_{t=0}$$

ถ้า $f(t) = \alpha u(t) \pm \beta v(t)$ แล้ว $F(k) = \alpha U(k) \pm \beta V(k)$ (2.17)

พิสูจน์ จากสมการที่ (2.14) $F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0}$

แทนค่า $f(t) = \alpha u(t) \pm \beta v(t)$ ในสมการที่ (2.14) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} (\alpha u(t) \pm \beta v(t)) \right]_{t=0} \\ &= \frac{\alpha}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=0} \pm \frac{\beta}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} v(t) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

ดังนั้น $F(k) = \alpha U(k) \pm \beta V(k)$

ทฤษฎีบทที่ 2 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $F: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $U: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{และ } U(k+m) = \frac{1}{(k+m)!} \left[\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}} u(t) \right]_{t=0}$$

$$\text{ถ้า } f(t) = \frac{d^m}{dt^m} u(t) \text{ แล้ว } F(k) = \frac{(k+m)!}{k!} U(k+m) \quad (2.18)$$

พิสูจน์ จากสมการที่ (2.14) $F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0}$

แทนค่า $f(t) = \frac{d^m}{dt^m} u(t)$ ในสมการที่ (2.14) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{d^m}{dt^m} u(t) \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}} u(t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{(k+m)!}{k!(k+m)!} \left[\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}} u(t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{(k+m)!}{(k)!} \frac{1}{(k+m)!} \left[\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}} u(t) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

ดังนั้น $F(k) = \frac{(k+m)!}{k!} U(k+m)$

บทแทรกที่ 1 [12] สูตรของไลบ์นิตซ์ สำหรับการหาอนุพันธ์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

$$D^k (uv) = u^{(k)}v + \binom{k}{1} u^{(k-1)}v' + \binom{k}{2} u^{(k-2)}v'' + \dots + \binom{k}{k} uv^{(k)} \quad (2.19)$$

พิสูจน์ โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ $D^k (uv) = u^{(k)}v + \binom{k}{1} u^{(k-1)}v' + \binom{k}{2} u^{(k-2)}v'' + \dots + \binom{k}{k} uv^{(k)}$

จะได้ $P(1)$ คือ $D(uv) = u'v + uv'$ เป็นจริง

จะพิสูจน์ว่าถ้า $P(k)$ เป็นจริงแล้ว $P(k+1)$ จะเป็นจริงด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $P(k)$ เป็นจริง

$$D^k(uv) = u^{(k)}v + \binom{k}{1}u^{(k-1)}v' + \binom{k}{2}u^{(k-2)}v'' + \dots + \binom{k}{k}uv^{(k)}$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ จะเป็นจริง นั่นคือ

$$\begin{aligned} D(D^k(uv)) &= D\left(u^{(k)}v + \binom{k}{1}u^{(k-1)}v' + \binom{k}{2}u^{(k-2)}v'' + \dots + \binom{k}{k}uv^{(k)}\right) \\ D^{k+1}(uv) &= \left(u^{(k)}v' + v u^{(k+1)}\right) + \binom{k}{1}\left(u^{(k-1)}v'' + v'u^{(k)}\right) + \binom{k}{2}\left(u^{(k-2)}v''' + v''u^{(k-1)}\right) + \dots + \\ &\quad \binom{k}{k-1}\left(u'v^{(k)} + v^{(k-1)}u''\right) + \binom{k}{k}\left(uv^{(k+1)} + v^{(k)}u'\right) \\ &= u^{(k)}v' + v u^{(k+1)} + \binom{k}{1}u^{(k-1)}v'' + \binom{k}{1}v'u^{(k)} + \binom{k}{2}u^{(k-2)}v''' + \binom{k}{2}v''u^{(k-1)} + \dots + \\ &\quad \binom{k}{k-1}u'v^{(k)} + \binom{k}{k-1}v^{(k-1)}u'' + \binom{k}{k}uv^{(k+1)} + \binom{k}{k}v^{(k)}u' \\ &= u^{(k+1)}v + \binom{k}{0}u^{(k)}v' + \binom{k}{1}v'u^{(k)} + \binom{k}{1}u^{(k-1)}v'' + \binom{k}{2}v''u^{(k-1)} + \dots + \\ &\quad \binom{k}{k-1}u'v^{(k)} + \binom{k}{k}v^{(k)}u' \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1} = \binom{k+1}{r+1}$ จะได้ว่า

$$D^{k+1}(uv) = u^{(k+1)}v + \binom{k+1}{1}u^{(k)}v' + \binom{k+1}{2}u^{(k-1)}v'' + \dots + \binom{k+1}{k+1}uv^{(k+1)}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ จริง เมื่อ $P(k)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ 3 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ

$$F: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, U: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, V: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ และ } U(l) = \frac{1}{l!} \left[\frac{d^l}{dt^l} u(t) \right]_{t=0},$$

$$V(k-l) = \frac{1}{(k-l)!} \left[\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t) \right]_{t=0}$$

$$\text{ถ้า } f(t) = u(t)v(t) \text{ แล้ว } F(k) = \sum_{l=0}^k U(l)V(k-l) \quad (2.20)$$

$$\text{โดยที่ } U(l) = \frac{1}{l!} \left[\frac{d^l}{dt^l} u(t) \right]_{t=0} \text{ และ } V(k-l) = \frac{1}{(k-l)!} \left[\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t) \right]_{t=0}$$

พิสูจน์ จากสมการที่ (2.14) $F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0}$

แทนค่า $f(t) = u(t)v(t)$ ในสมการที่ (2.14) จะได้ว่า

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} u(t)v(t) \right]_{t=0}$$

ใช้บทแทรกที่ 1 จะได้

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \left[\frac{d^l}{dt^l} u(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t) \right]_{t=0} \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \left[\frac{d^l}{dt^l} u(t) \right]_{t=0} \left[\frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t) \right]_{t=0} \\ &= \sum_{l=0}^k U(l)V(k-l) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } F(k) = \sum_{l=0}^k U(l)V(k-l)$$

ทฤษฎีบทที่ 4 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $F: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \{0,1\}, t \in \mathbb{R}$

$$\text{ถ้า } f(t) = t^m; m = 0, 1, 2, \dots \text{ แล้ว } F(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (2.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ จากสมการที่ (2.14) $F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0}$

แทนค่า $f(t) = t^m$; $m = 0, 1, 2, \dots$ ในสมการที่(2.14) จะได้

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} t^m \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} t^m \right]_{t=0} \end{aligned}$$

กรณี $m = k$; $F(k) = \frac{1}{(k)!} \left[\frac{d^k}{dt^k} t^k \right]_{t=0}$

$$= \frac{1}{(k)!} \cdot (k)!$$

$$F(k) = 1$$

กรณี $m \neq k$; แบ่งเป็น 2 กรณีย่อยคือ

กรณี $m < k$; $F(k) = \frac{1}{(k)!} \left[\frac{d^k}{dt^k} t^m \right]_{t=0}$

$$= \frac{1}{(k)!} (0)$$

$$F(k) = 0$$

กรณี $m > k$; $F(k) = \frac{1}{(k)!} \left[\frac{d^k}{dt^k} t^m \right]_{t=0}$

$$= \frac{1}{(k)!} [m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k) \cdot t^{m-k-1}]_{t=0}$$

$$= \frac{1}{(k)!} [m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k) \cdot (0)^{m-k-1}]$$

$$F(k) = 0$$

เนื่องจาก $\left[\frac{d^k}{dt^k} t^m \right]_{t=0} = \begin{cases} k!, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$

ดังนั้น $F(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบทที่ 5 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $F: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{ถ้า } f(t) = e^t \text{ แล้ว } F(k) = \frac{1}{k!} \quad (2.22)$$

พิสูจน์ จากสมการที่ (2.14)
$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0}$$

แทนค่า $f(t) = e^t$ ในสมการที่ (2.14) จะได้

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} e^t \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} [e^t]_{t=0} \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$F(k) = \frac{1}{k!}$$

ทฤษฎีบทที่ 6 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{Z}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$

$$\text{ถ้า } f(t) = \sin(\omega t + \alpha) \text{ แล้ว } F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \quad (2.23)$$

จากสมการที่ (2.14)
$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} c(t) \right]_{t=0}$$

และแทนค่า $f(t) = \sin(\omega t + \alpha)$ ในสมการที่ (2.14) จะได้ว่า

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} [\sin(\omega t + \alpha)] \right]_{t=0}$$

พิสูจน์ โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

ให้ $F(k)$ แทนข้อความ
$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$$

พิจารณา $F(1)$

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dt} \sin(\omega t + \alpha) \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \sin(\omega t + \alpha) \right]_{t=0} \\ &= [\cos(\omega t + \alpha)(\omega)]_{t=0} \\ &= \omega \cos \alpha \end{aligned}$$

หรือ $F(1) = \omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

ดังนั้น $F(1)$ เป็นจริง

จะพิสูจน์ว่าถ้า $F(k)$ เป็นจริงแล้ว $F(k+1)$ จะเป็นจริงด้วย

ให้ $F(k)$ เป็นจริง

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \quad (2.24)$$

จะแสดงว่า $F(k+1)$ จะเป็นจริง นั่นคือ

$$\begin{aligned} F(k+1) &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \sin(\omega t + \alpha) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d^k}{dt^k} \sin(\omega t + \alpha) \right) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

จากสมการ (2.24) จะได้

$$\begin{aligned} F(k+1) &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d}{dt} \left(\omega^k \sin\left(\omega t + \frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\omega^{k+1} \cos\left(\omega t + \frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\omega^{k+1} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \right] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ จะได้

$$F(k+1) = \frac{\omega^{k+1}}{(k+1)!} \left[\sin \frac{(k+1)\pi}{2} \right] \text{ เป็นจริง}$$

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $F(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก นั่นคือ

$$\text{ถ้า } f(t) = \sin(\omega t + \alpha) \text{ แล้ว } F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \text{ เป็นจริง}$$

ทฤษฎีบทที่ 7 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{Z}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$

$$\text{ถ้า } f(t) = \cos(\omega t + \alpha) \text{ แล้ว } F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \quad (2.25)$$

$$\text{จากสมการที่ (2.14) } F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0}$$

แทนค่า $f(t) = \cos(\omega t + \alpha)$ ในสมการที่ (2.14) จะได้

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} [\cos(\omega t + \alpha)] \right]_{t=0}$$

พิสูจน์ โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

$$\text{ให้ } F(k) \text{ แทนข้อความ } F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$$

พิจารณา $F(1)$

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dt} \cos(\omega t + \alpha) \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \cos(\omega t + \alpha) \right]_{t=0} \\ &= \left[-\sin(\omega t + \alpha)(\omega) \right]_{t=0} \\ &= -\omega \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\text{หรือ } F(1) = -\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $F(1)$ เป็นจริง

จะพิสูจน์ว่าถ้า $F(k)$ เป็นจริงแล้ว $F(k+1)$ จะเป็นจริงด้วย

ให้ $F(k)$ เป็นจริง

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \quad (2.26)$$

จะแสดงว่า $F(k+1)$ จะเป็นจริง นั่นคือ

$$\begin{aligned} F(k+1) &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \cos(\omega t + \alpha) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d^k}{dt^k} \cos(\omega t + \alpha) \right) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

จากสมการ (2.26) จะได้

$$\begin{aligned} F(k+1) &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d}{dt} \left(\omega^k \cos\left(\omega t + \frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\omega^{k+1} \sin\left(\omega t + \frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left[\omega^{k+1} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \right] \end{aligned}$$

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ จะได้

$$F(k+1) = \frac{\omega^{k+1}}{(k+1)!} \left[\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right) \right] \text{ เป็นจริง}$$

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $F(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก นั่นคือ

$$\text{ถ้า } f(t) = \cos(\omega t + \alpha) \text{ แล้ว } F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) \quad \text{เป็นจริง}$$

ทฤษฎีบทที่ 8 [6] ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_m: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $m=1, 2, \dots, n$ และ

$F: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $G_m: \mathbb{Z}^+ U \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $m=1, 2, \dots, n$ และ

$$G_1(k_1) = \frac{1}{k_1!} \left[\frac{d^{k_1}}{dt^{k_1}} g_1(t) \right]_{t=0}, G_2(k_2 - k_1) = \frac{1}{(k_2 - k_1)!} \left[\frac{d^{k_2 - k_1}}{dt^{k_2 - k_1}} g_2(t) \right]_{t=0}, \dots,$$

$$G_{m-1}(k_{m-1} - k_{m-2}) = \frac{1}{(k_{m-1} - k_{m-2})!} \left[\frac{d^{k_{m-1} - k_{m-2}}}{dt^{k_{m-1} - k_{m-2}}} g_{m-1}(t) \right]_{t=0},$$

$$G_m(k - k_{m-1}) = \frac{1}{(k - k_{m-1})!} \left[\frac{d^{k - k_{m-1}}}{dt^{k - k_{m-1}}} g_m(t) \right]_{t=0}$$

ถ้า $f(t) = g_1(t)g_2(t)\dots g_{m-1}(t)g_m(t)$ แล้ว

$$F(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^k \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2 - k_1)\dots G_{m-1}(k_{m-1} - k_{m-2})G_m(k - k_{m-1}) \quad (2.27)$$

พิสูจน์ จากสมการที่ (2.14) $F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right]_{t=0}$

แทนค่า $f(t) = g_1(t)g_2(t)\dots g_{m-1}(t)g_m(t)$ ในสมการที่ (2.14) จะได้ว่า

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} (g_1(t)g_2(t)\dots g_{m-1}(t)g_m(t)) \right]_{t=0}$$

ใช้บทแทรกที่ 1 จะได้

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\sum_{k_{m-1}=0}^k \frac{(k)!}{(k - k_{m-1})!(k_{m-1})!} \left[\frac{d^{k_{m-1}}}{dt^{k_{m-1}}} (g_1(t)g_2(t)\dots g_{m-1}(t)) \cdot \frac{d^{k - k_{m-1}}}{dt^{k - k_{m-1}}} (g_m(t)) \right]_{t=0} \right]$$

$$= \left[\sum_{k_{m-1}=0}^k \frac{1}{(k - k_{m-1})!(k_{m-1})!} \left[\sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \frac{k_{m-1}}{(k_{m-1} - k_{m-2})!(k_{m-2})!} \cdot \frac{d^{k_{m-2}}}{dt^{k_{m-2}}} (g_1(t)g_2(t)\dots g_{m-2}(t)) \cdot \frac{d^{k_{m-1} - k_{m-2}}}{dt^{k_{m-1} - k_{m-2}}} g_{m-1}(t) \cdot \frac{d^{k - k_{m-1}}}{dt^{k - k_{m-1}}} g_m(t) \right]_{t=0} \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^k \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \frac{1}{(k-k_{m-1})!(k_{m-1}-k_{m-2})!\dots(k_2)!} \left[\sum_{k_1=0}^{k_2} \frac{(k_2)!}{(k_2-k_1)!(k_1)!} \frac{d^{k_1}}{dt^{k_1}} g_1(t) \cdot \frac{d^{k_2-k_1}}{dt^{k_2-k_1}} g_2(t) \dots \right]_{t=0}$$

$$= \left[\sum_{k_{m-1}=0}^{k+1} \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)\dots G_{m-1}(k_{m-1}-k_{m-2})G_m(k+1-k_{m-1}) \right]$$

ดังนั้น
$$F(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^k \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)\dots G_{m-1}(k_{m-1}-k_{m-2})G_m(k-k_{m-1})$$

2.4 การประมาณปาเด (Padé Approximate)[8]

การประมาณปาเดเป็นอัตราส่วนของสองพหุนามที่สร้างจากสัมประสิทธิ์ของอนุกรมเทย์เลอร์ ถูกกำหนดโดย

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \quad (2.27)$$

ที่ $P_L(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีสูงสุด L และ $Q_M(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีสูงสุด M รูปแบบทั่วไปของอนุกรมกำลังคือ

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \quad (2.28)$$

$$y(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}) \quad (2.29)$$

กำหนดให้ $P_L(x)$ และ $Q_M(x)$ ไม่มีพหุนามร่วมกัน และเขียน $P_L(x)$ และ $Q_M(x)$ ในรูปของพหุนาม ดังนี้

$$\begin{aligned} P_L(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L \\ Q_M(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M \end{aligned} \quad (2.30)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และหาสัมประสิทธิ์ของ $P_L(x)$ และ $Q_M(x)$ จากขั้นตอนต่อไปนี้

เนื่องจากเราสามารถคูณทั้งเศษทั้งส่วนได้ด้วยค่าคงที่ และ $\frac{L}{M}$ ไม่เปลี่ยนเราจะกำหนด

เงื่อนไขปกติคือ

$$Q_M(0) = 1.0 \quad (2.31)$$

จาก สมการที่ (2.30) และ สมการที่ (2.31) เราอาจคูณสมการที่ (2.29) ด้วย $Q_M(x)$

$$\begin{aligned} \left(y(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \right) \cdot Q_M(x) &= O(x^{L+M+1}) \cdot Q_M(x) \\ [y(x)Q_M(x)] - P_L(x) &= 0 \\ y(x)Q_M(x) &= P_L(x) \end{aligned} \quad (2.32)$$

แทนค่าสมการที่ (2.28) และ (2.30) ในสมการที่ (2.32)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \right) (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_L x^L \\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{L+M} x^{L+M}) (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_L x^L \\ \left(\begin{array}{l} a_0 (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M) + \\ a_1 x (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M) + \\ a_2 x^2 (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M) + \dots + \\ a_{L+M} x^{L+M} (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M) \end{array} \right) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_L x^L \end{aligned} \quad (2.33)$$

จากสมการที่ (2.33) ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ ดังนั้นสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{L+1} + a_L q_1 + \dots + a_{L-M+1} q_M &= 0 \\ a_{L+2} + a_{L+1} q_1 + \dots + a_{L-M+2} q_M &= 0 \\ \vdots & \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \dots + a_0 q_M &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
a_0 &= p_0 \\
a_1 + a_0 q_1 &= p_1 \\
a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 &= p_2 \\
&\vdots \\
a_L + a_{L-1} q_1 + \cdots + a_0 q_L &= p_L
\end{aligned} \tag{2.35}$$

ถ้า สมการที่ (2.34) และ (2.35) มีค่าของตัวกำหนด(Det)ไม่เป็นศูนย์ เราสามารถหาคำตอบได้โดยตรง และแสดงในสมการที่ (2.36) เมื่อสมการที่ (2.36) เป็นจริง และถ้าผลรวมของดัชนีต่ำสุดมีค่ามากกว่าผลรวมดัชนีสูงสุด ผลรวมจะถูกแทนที่ด้วย 0

$$\left[\begin{array}{c} L \\ M \end{array} \right] = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^L a_{j-M} x^j & \sum_{j=M-1}^L a_{j-M+1} x^j & \cdots & \sum_{j=0}^L a_j x^j \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}} \tag{2.36}$$

2.5 นิยามผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผัน[13]

2.5.1 ผลการแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซเป็นวิธีการที่ใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยการแปลงปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาทางพีชคณิต (Algebraic Problem) ซึ่งเราสามารถแก้ปัญหานั้นได้สะดวกและในปัจจุบันเรานำการแปลงลาปลาซไปใช้ในการแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอีกด้วย ผู้คิดค้นการแปลงลาปลาซนี้เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ ลาปลาซ ปีแยร์ ซิมง เดอ (คศ. 1749-1829) อีกประการหนึ่ง การแปลงลาปลาซสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิศวกรรมได้อย่างกว้างขวาง ดังนิยามดังกล่าวต่อไปนี้

นิยามที่ 7 [13] กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t ซึ่ง $t > 0$ ดังนั้นการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $L[f(t)]$ นิยามโดยอินทิกรัล

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (2.38)$$

เมื่อ s เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าศูนย์

การแปลงลาปลาซของ $f(t)$ หาค่าได้ ถ้าอินทิกรัลของสมการที่ (2.38) ลู่เข้า (Converges) สำหรับบางค่าของ s และหาค่าไม่ได้ ถ้าอินทิกรัลของสมการที่ (2.38) ลู่ออก (Diverges)

สมบัติที่สำคัญบางประการของผลการแปลงลาปลาซ (Some Basic Properties of Laplace Transform)

ทฤษฎีบทที่ 9 [14] สมบัติเชิงเส้น (The Linear Property)

ถ้า a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ $L[f_1(t)] = F_1(s)$ และ $L[f_2(t)] = F_2(s)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)] \\ &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \end{aligned} \quad (2.39)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\begin{aligned} L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_0^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= a_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)] \\ &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \end{aligned}$$

คุณสมบัติข้อนี้ยังคงเป็นจริง เมื่อมีการขยายฟังก์ชันให้มากกว่าสองฟังก์ชัน

ทฤษฎีบทที่ 10 [14] สมบัติการเลื่อนออกไป (Shifting Property of First Translation)

$$\text{ถ้า } L[f(t)] = F(s) \text{ ดังนั้น } L[e^{at} f(t)] = F(s-a) = F(s)|_{s \rightarrow (s-a)} \quad (2.40)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\begin{aligned} L[e^{at} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= F(s-a) = F(s) \Big|_{s \rightarrow (s-a)} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 11 [14] สมบัติการเปลี่ยนสเกล (Change of Scale Property)

$$\text{ถ้า } L[f(t)] = F(s) \text{ ดังนั้น } L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2.41)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ $L[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt$

ให้ $at = x, \quad dt = \frac{1}{a} dx$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} L[f(at)] &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-s\left(\frac{x}{a}\right)} \frac{1}{a} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(x) e^{-\left(\frac{s}{a}\right)x} dx \\ L[f(at)] &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} F(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{a}} \end{aligned}$$

ตารางที่ 2.2 แสดงผลการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน

	$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
1	1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
4	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.2 (ต่อ) แสดงผลการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน

	$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
5	$e^{bt} \sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}, s > a $
6	$e^{bt} \cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}, s > a $
7	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > 0$
8	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > 0$
9	$t^n, n: \text{จำนวนเต็มบวก}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
11	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
12	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
13	$\frac{1}{a} \sin at - t \cos at$	$\frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $F(s) = L[f(t)]$ เมื่อกำหนดให้ $f(t) = 5e^{2t} - 2 + e^{-2t}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} L[5e^{2t} - 2 + e^{-2t}] &= 5L[e^{2t}] - 2L[1] + L[e^{-2t}] \\ &= \frac{5}{s-2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.2 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

นิยามที่ 8 [13] การแปลงลาปลาซผกผัน (Definition of Inverse Laplace Transform)

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ $F(s)$ นั่นคือ ถ้า $L[f(t)] = F(s)$ ดังนั้น $f(t)$

ถูกเรียกว่า “การแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ ” และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \quad (2.42)$$

และเรียก L^{-1} ว่า ตัวดำเนินการการแปลงลาปลาซผกผัน (The Inverse Laplace Transformation Operation)

สมบัติบางประการของการแปลงลาปลาซผกผัน (Some Properties of Inverse Laplace Transform)

ทฤษฎีบทที่ 12 [14] สมบัติเชิงเส้น (Linearly Property)

ถ้า c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่ $F_1(s)$ และ $F_2(s)$ คือการแปลงลาปลาซของ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 L^{-1}[F_1(s)] + c_2 L^{-1}[F_2(s)] \quad (2.43)$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $F_1(s) = L[f_1(t)]$ และ $F_2(s) = L[f_2(t)]$

จะได้ $f_1(t) = L^{-1}[F_1(s)]$ และ $f_2(t) = L^{-1}[F_2(s)]$

และเนื่องจาก $L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)]$
 $= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$

นั่นคือ $L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$

ฉะนั้น $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)]$

จากสมการที่ (2.39) จะได้ว่า

$$L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = c_1 L^{-1}[F_1(s)] + c_2 L^{-1}[F_2(s)]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบทที่ 13 [14] สมบัติการเลื่อนออกไป (First Shifting Property)

ถ้า $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ แล้ว จะได้ว่า $L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t)$ นั่นคือ

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t) \quad (2.44)$$

พิสูจน์ จากสมบัติการเลื่อนของผลการแปลงลาปลาซจะได้ว่า

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

จากสมการที่ (2.40) จะได้ว่า

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t) = e^{at} L^{-1}[F(s)]$$

ทฤษฎีบทที่ 14 [14] สมบัติการเปลี่ยนสเกล (Change of Scale Property)

ถ้า $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวแล้วจะได้ว่า

$$L^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \quad (2.45)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทสมบัติการเปลี่ยนสเกลการแปลงลาปลาซ $L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

แทนค่า $a = \frac{1}{k}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} L\left[f\left(\frac{t}{k}\right)\right] &= \frac{1}{1/k} F\left(\frac{s}{1/k}\right) \\ &= kF(ks) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $L^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$

ตารางที่ 2.3 แสดงผลการแปลงลาปลาซผกผันของบางฟังก์ชัน

	$F(s)$	$f(t) = L^{-1}[F(s)]$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$	1
2	$\frac{1}{s-a}, s > a$	e^{at}
3	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$	$\sin at$
4	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$	$\cos at$
5	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}, s > a $	$e^{bt} \sin at$
6	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}, s > a $	$e^{bt} \cos at$
7	$\frac{a}{s^2-a^2}, s > 0$	$\sinh at$
8	$\frac{s}{s^2-a^2}, s > 0$	$\cosh at$
9	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$	$t^n, n: \text{จำนวนเต็มบวก}$
10	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$	$t^n e^{at}$
11	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t \sin at$
12	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
13	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{a} \sin at - t \cos at$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ เมื่อกำหนดให้ $F(s) = \frac{s+2}{s^3 - 3s^2 + 2s}$

วิธีทำ โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{s+2}{s^3 - 3s^2 + 2s} = \frac{s+2}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $s^3 - 3s^2 + 2s$ จะได้

$$s+2 = A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1)$$

แทนค่า $s = 0$ จะได้ $2 = A(-1)(2)$ ดังนั้น $A = 1$

แทนค่า $s = 1$ จะได้ $3 = B(1)(-1)$ ดังนั้น $B = -3$

แทนค่า $s = 2$ จะได้ $4 = C(2)(1)$ ดังนั้น $C = 2$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^3 - 3s^2 + 2s}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 3L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = 1 - 3e^t + 2e^{2t}$$

2.6 การหาคำตอบโดยวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Modified Differential Transform Method: MDTM)

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $y''(t) + y(t) + 0.3y^3(t) = 0$ (2.46)

เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (2.47)

วิธีทำ ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (2.46) และ สมการที่ (2.47) โดยใช้ทฤษฎีบท

ของการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2 - k_1)Y(k - k_2) + Y(k) \right) \right] \quad (2.48)$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = 1 \quad (2.49)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (2.48) เพื่อหา $Y(k)$ ของสมการ $y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)(t)^k$ โดยที่ $N=9$

และจัดรูปสมการจะได้

$$y(t) = t - 0.166667t^3 - 0.00666667t^5 + 0.00373016t^7 - 0.000315697t^9 + O(t^{11}) \quad (2.50)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (2.50)

$$L[y(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} - \frac{0.8}{s^6} + \frac{18.8}{s^8} - \frac{114.56}{s^{10}} - \dots \quad (2.51)$$

จากสมการที่ (2.51) แทนค่า $s = \frac{1}{t}$ เพื่อจะแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t จะได้

$$L[y(t)] = t^2 - t^4 - 0.8t^6 + 18.8t^8 - 114.56t^{10} - \dots \quad (2.52)$$

ใช้การประมาณพาดกับสมการที่ (2.52)

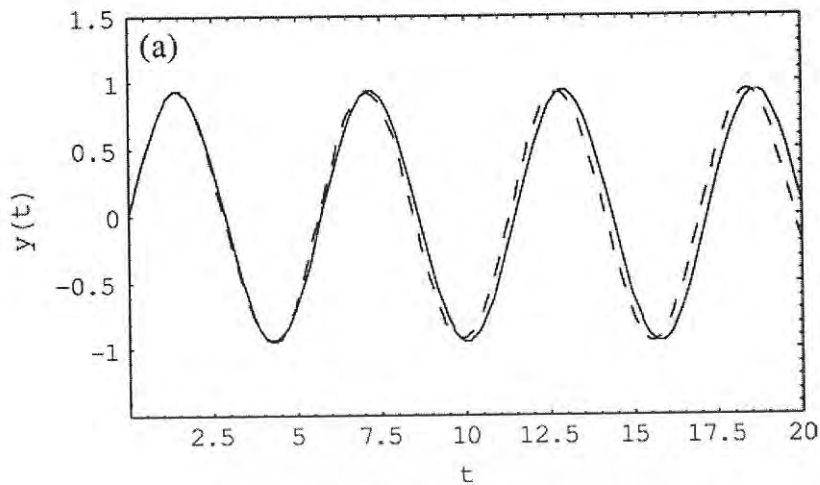
$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{9t^4 + t^2}{10.8t^4 + 10t^2 + 1} \quad (2.53)$$

ให้ $t = \frac{1}{s}$ เพื่อจะแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ s จะได้

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{9 + s^2}{10.8 + 10s^2 + s^4} \quad (2.54)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผัน กับสมการที่ (2.54) เราจะได้สมการการประมาณค่าผลเฉลย

$$y(t) = 0.928746 \sin(1.10982t) - 0.0103828 \sin(2.96113t) \quad (2.55)$$



รูปที่ 2.2 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ และวิธีรุงเง-คุดตา

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ธีรวัจน์ แสงเพชร และ สุวัฒน์ กุลธนปรีดา (2009) [9] ได้กล่าวถึงตัวควบคุมชนิดโครงข่ายประสาทเทียมสำหรับการชิงโครโนเซชันของการสั่นแบบ Duffing-Holmes ซึ่งประกอบด้วยระบบมาสเตอร์และระบบสเลฟ ตัวควบคุมทำหน้าที่ควบคุมระบบสเลฟให้มีพฤติกรรมเหมือนระบบมาสเตอร์ โดยตัวควบคุมมีโครงสร้างเป็นโครงข่ายประสาทเทียมแบบป้อนไปข้างหน้าที่มีชั้นซ่อนภายในหนึ่งชั้น การควบคุมเป็นแบบป้อนกลับทุกสถานะ กระบวนการฝึกสอนตัวควบคุมใช้วิธีแบบจำลองอ้างอิง แบบจำลองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ $x'' + \alpha x' + \beta x + x^3 = \gamma \cos \omega t$ ซึ่งเป็นสมการของแบบจำลองการสั่นสะเทือนโดยใช้แรงภายนอกกระทำต่อคานแบบคานย่นที่อยู่ในสนามแม่เหล็กที่ไม่คงตัวของแม่เหล็กสองอัน ผลลัพธ์ของการควบคุมแสดงด้วยการจำลองในคอมพิวเตอร์พบว่าตัวควบคุมสามารถควบคุมให้ระบบสเลฟมีผลตอบสนองเหมือนระบบมาสเตอร์ตามที่ต้องการได้ นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมยังสามารถทำงานได้ดีในกรณีที่ระบบมาสเตอร์ถูกสัญญาณรบกวน

Abolfazl Jalivand, Hadi Fotoohabadi (2011) [11] ได้กล่าวถึงวิธีการในระบบโกลาหลของการสั่นดพฟิง ซึ่งถูกนำมาใช้ในการตรวจสอบสัญญาณที่อ่อน วิธีนี้เป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ความถี่สเปกตรัม ความสัมพันธ์ของวิธีนี้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการศึกษารายละเอียดต่างๆ ดังนี้คือความซับซ้อนของการคำนวณที่เหมาะสม ความทนทานต่อปริมาณเสียงระดับปานกลาง และความสามารถในการตรวจจับสัญญาณที่มีช่วงความถี่ต่ำ ซึ่งสมการอยู่ในรูปแบบ $x'' + \alpha x' - x + x^3 = \gamma \cos \omega t$ โดยสามารถทำสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองไม่เชิงเส้นเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งไม่เชิงเส้นเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งวิธีนี้เหมาะสมกับสมการที่ซับซ้อนและมีจำนวนสัญญาณรบกวนมากถึงปานกลาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Shaher Momani and Vedat Suat Erturk (2008) [6] ได้กล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยของการสั่นไม่เชิงเส้นด้วยวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Modified Differential Transform Method: MDTM) ซึ่งสมการจะอยู่ในรูปของ $y''(t) + cy(t) = \varepsilon f(y(t), y'(t))$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$ ซึ่ง c, a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ε เป็นพารามิเตอร์ และ $f(y(t), y'(t))$ เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และทำการศึกษเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta Method) ผลการศึกษาพบว่าผลเฉลยที่ได้จากทั้งสองวิธีนี้มีความใกล้เคียงกันมาก

S. Nourazar and A. Mirzabeigy (2013) [7] ได้กล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการการสั่นดัดพียงไม่เชิงเส้นด้วยความหวัง โดยใช้วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Modified Differential Transform Method: MDTM) ซึ่งสมการจะอยู่ในรูปของ $x'' + \alpha x' + \beta x + \gamma x^3 = 0$, $x(0) = A$, $x'(0) = B$ และทำการศึกษเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta Method) ผลการศึกษาพบว่าผลเฉลยที่ได้จากทั้งสองวิธีมีความใกล้เคียงกันมาก ทำให้ได้ว่าวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์สามารถเป็นอีกหนึ่งทางเลือกในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการการสั่นดัดพียงไม่เชิงเส้นด้วยความหวังได้



บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดัดฟิง จะแบ่งเป็น 3 วิธี คือ

1. วิธีรุงเง-คุดตา และนี่สตรอม (Runge-Kutta-Nystrom Method)
2. วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Modified Differential Transform Method: MDTM)
3. คำสั่งใน Mathematica

กำหนดให้

$$y'' + \delta y' + \alpha y + \beta y^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = a, y'(0) = b \text{ เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริง} \quad (3.2)$$

3.1 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดัดฟิงด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนี่สตรอม

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2

$$y'' = f(t, y, y') \text{ โดย } y(t_0) = a \text{ และ } y'(t_0) = b$$

ขั้นตอนการดำเนินการ

ขั้นตอนที่ 1) ลดรูปสมการให้อยู่ในรูป

$$y'' = f(t, y, y') = -\delta y' - \alpha y - \beta y^3 + \gamma \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

กำหนดให้ค่า $h = 0.1$

ขั้นตอนที่ 2) แทนค่าในสูตรวิธีรุงเง-คุดตา และนี่สตรอม

$$\text{จาก } k_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_1\right) \text{ โดยที่ } K = \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_2\right)$$

$$k_4 = \frac{h}{2} f(t_n + h, y_n + L, y'_n + 2k_3) \text{ โดยที่ } L = h(y'_n + k_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \right]$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

ขั้นตอนที่ 3) วาดกราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คูตตา และนี้สตรอม

3.2 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดีฟฟิงด้วยวิธีการปรับปรุงการแปลง

เชิงอนุพันธ์

การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดีฟฟิงโดยใช้วิธีการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งเราเริ่มต้นจากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นั้น ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k \quad \text{โดยที่} \quad Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} y(t) \right]_{t=0} \quad \text{เป็นฟังก์ชันการแปลงสมการดีฟฟิง}$$

ขั้นตอนการดำเนินการ

ขั้นตอนที่ 1) ใช้ทฤษฎีที่ได้จากบทที่ 2 กับสมการที่ (3.1) แล้วหาฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$

และจัดรูปสมการ จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\left(\alpha \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + Y(k) + \delta(k+1)Y(k+1) - \left(\gamma \left(\frac{\omega^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (3.4)$$

เมื่อ $\delta, \alpha, \beta, \gamma$ และ ω เป็นค่าคงที่

โดย δ คือ สัมประสิทธิ์ของความหน่วง

α คือ สัมประสิทธิ์ของความฝืด

β คือ ค่าคงที่ของความแข็ง

γ คือ ขนาดของแรงภายนอกที่มากระทำ

ω คือ ความถี่ของแรงภายนอก

ขั้นตอนที่ 2) ใช้ทฤษฎีที่ได้จากบทที่ 2 กับสมการที่ (3.2) แล้วหาฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$ ของเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้

$$Y(0) = a, Y(1) = b \quad \text{เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริง} \quad (3.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 3) แทนค่า k ลงในสมการที่ (3.4) เพื่อหา $Y(k)$ ของสมการ $y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k$ และจัดรูปสมการจะได้

$$y(t) = Y(0) + Y(1)t + Y(2)t^2 + Y(3)t^3 + Y(4)t^4 + Y(5)t^5 + \dots \quad (3.6)$$

ขั้นตอนที่ 4) ใช้การแปลงลาปลาซจากบทที่ 2 กับสมการที่ (3.6) จะได้ว่า $y(t)$ จะอยู่ในรูปของ $Y(s)$ และ ให้ $s = \frac{1}{t}$ เพื่อจะแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t

ขั้นตอนที่ 5) ใช้การประมาณปาดจากบทที่ 2 กับสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 4)

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \frac{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_L t^L}{q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_M t^M} \quad (3.7)$$

ให้ $t = \frac{1}{s}$ เพื่อจะแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ s และจัดรูปสมการจะได้

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \frac{p_0 s^L + p_1 s^{L-1} + p_2 s^{L-2} + \dots + p_L}{q_0 s^L + q_1 s^{L-1} + q_2 s^{L-2} + \dots + q_M} \quad (3.8)$$

ขั้นตอนที่ 6) ใช้การแปลงลาปลาซผกผัน กับสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 5) เราจะได้สมการการประมาณค่าผลเฉลย

ขั้นตอนที่ 7) วาดกราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

3.3 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการดีฟิ๊งด้วยคำสั่งใน Mathematica

ขั้นตอนการดำเนินการ

ขั้นตอนที่ 1) เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการโดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

$$y' = V$$

$$V' = -\delta V - \alpha y - \beta y^3 + \gamma \cos(\omega t)$$

ขั้นตอนที่ 2) ใช้รูปแบบคำสั่ง

```
sol = NDSolve[{ V'[t] == -\delta y[t] - \alpha y[t] - \beta V[t]^3 + \gamma Cos[\omega t], y'[t] == V[t], y[0] == a, V[0] == b }, { y, V }, { t, 0, 20 }];
```

```
Plot[Evaluate[y[t]/sol], { t, 0, 20 }, PlotRange -> All, PlotLabel -> { y, t }]
```

ขั้นตอนที่ 3) นำผลเฉลยที่ได้จากทั้ง 3 วิธี คือ วิธีรุงเง-คุตตา และนิสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica มาเปรียบเทียบกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในบทที่ผ่านมาได้ศึกษานิยาม ทฤษฎีบท รวมถึงคุณสมบัติที่เป็นความรู้พื้นฐานของวิธี รุ่งเง-คุดตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์และนำมาใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณ ของสมการการสั่นดัดพืดที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น

ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากทั้งสามวิธีถูกนำมาเปรียบเทียบกัน ในรูปของกราฟโดยใช้ โปรแกรม Mathematica

ตัวอย่างที่ 4.1

$$\text{กำหนดให้ } y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.05 \cos 0.1t \quad (4.1)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (4.2)$$

ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการที่ (4.1) ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น (4.2) จะแบ่งเป็น 3 วิธีคือ วิธีรุ่งเง-คุดตา และนีสตรอม วิธีการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ วิธีคำสั่งใน Mathematica โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1.1 วิธีรุ่งเง-คุดตา และนีสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.1) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -y' - y - 0.3y^3 + 0.05 \cos(0.1t) \quad (4.3)$$

$$\text{กำหนดให้ } h = 0.1$$

จากสูตรวิธีรุ่งเง-คุดตาและนีสตรอม

$$k_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_1\right) \text{ โดยที่ } K = \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_2\right)$$

$$k_4 = \frac{h}{2} f\left(t_n + h, y_n + L, y'_n + 2k_3\right) \text{ โดยที่ } L = h(y'_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \right]$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 0.0025\cos(0.1t_n) - 0.05y'_n - 0.05y_n - 0.015y_n^3 \\
 k_2 &= -0.05K - 0.015K^3 - 0.000125\cos(0.1t_n) + 0.0025\cos(0.1(0.05+t_n)) - 0.047499y'_n + \\
 &\quad (-0.047499 - 0.045K^2)y_n - 0.04Ky_n^2 - 0.0142499y_n^3 \\
 k_3 &= -0.0475K - 0.01424K^3 + 0.00000625\cos(0.1t_n) + 0.002375\cos(0.1(0.05+t_n)) - \\
 &\quad 0.047625y'_n + (-0.047625 - 0.04274K^2)y_n - 0.04274Ky_n^2 - 0.0142875y_n^3 \\
 k_4 &= 0.00475K + 0.001425K^3 - 0.05L - 0.015L^3 - (6.25 \times 10^{-7})\cos(0.1t_n) + \\
 &\quad 0.0022625\cos(0.1(0.05+t_n)) - 0.045237y'_n + (-0.045237 + 0.004274K^2 - \\
 &\quad 0.045L^2)y_n + (0.004274K - 0.045b)y_n^2 - 0.01357y_n^3 \\
 y_{n+1} &= -0.00325K - 0.000974K^3 + 0.000079375\cos(0.1t_n) + 0.0001625\cos(0.1(0.05+t_n)) + \\
 &\quad 0.0951624y'_n + (0.9951625 - 0.002925K^2)y_n - 0.002925Ky_n^2 - 0.00145125y_n^3
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 K &= 0.0000625\cos(0.1t_n) + 0.04875y'_n - 0.00125y_n - 0.000375y_n^3 \\
 L &= -0.00475K - 0.001425K^3 + (6.25 \times 10^{-7})\cos(0.1t_n) + 0.0002375\cos(0.1(0.05+t_n)) + \\
 &\quad 0.0952375y'_n + (-0.0047625 - 0.004275K^2)y_n - 0.004275Ky_n^2 - 0.0014287y_n^3
 \end{aligned}$$

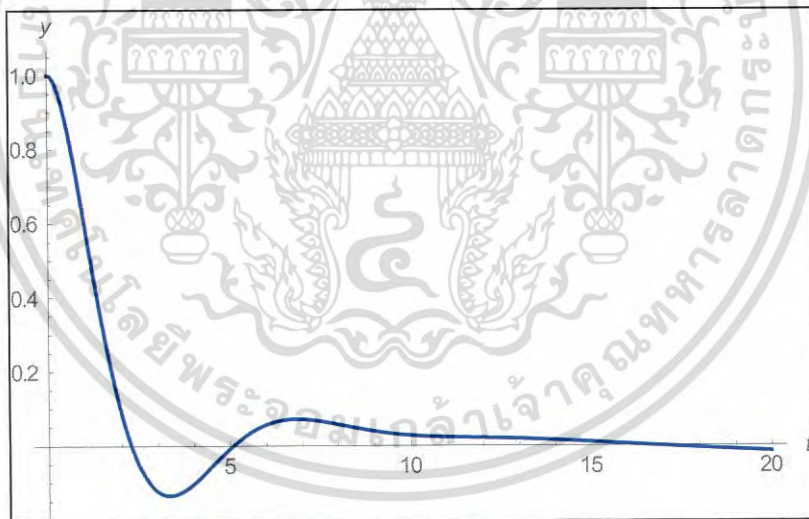
ตารางที่ 4.1 แสดงผลการคำนวณดังตัวอย่างที่ 4.1 ด้วยวิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม

n	t_n	y_n
0	0	1
1	0.1	0.993963
2	0.2	0.976732
3	0.3	0.949679
4	0.4	0.914208
5	0.5	0.87172

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 (ต่อ) แสดงผลการคำนวณดังตัวอย่างที่ 4.1 ด้วยวิธีรุงเง-คุดตา และนีสตรอม

n	t_n	y_n
6	0.6	0.823576
7	0.7	0.771064
8	0.8	0.715386
9	0.9	0.657632
10	1	0.598783
50	5	-0.00765936
100	10	0.0273049
200	20	-0.0161835



รูปที่ 4.1 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุดตาและนีสตรอม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.1) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.05 \cos 0.1t$$

$$\frac{(k+2)!}{k!} Y(k+2) + \frac{(k+1)!}{k!} Y(k+1) + Y(k) + 0.3 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1) Y(k_2 - k_1) Y(k - k_2) = 0.05 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{2} \right)$$

ดังนั้น

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1) Y(k_2 - k_1) Y(k - k_2) \right) + Y(k) + (k+1)Y(k+1) - \left(0.05 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right) \right] \quad (4.5)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.2) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 0 \quad (4.6)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.5) เพื่อหา $Y(k)$ ของผลเฉลย $y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k$ โดยที่ $N = 7$

เมื่อ $k = 0$

$$\begin{aligned} Y(2) &= -\frac{1}{(1)(2)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^0 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1) Y(k_2 - k_1) Y(0 - k_2) \right) + Y(0) + (1)Y(1) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^0}{0!} \right) \cos(0) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} [0.3(Y(0)Y(0)Y(0)) + Y(0) + Y(1) - 0.05] \\ &= -\frac{1}{2} [0.3 + 1 - 0.05] \\ &= -0.625 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $k=1$

$$\begin{aligned}
 Y(3) &= -\frac{1}{(2)(3)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(1-k_2) \right) + Y(1) + (2)Y(2) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^1}{1!} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{6} \left[0.3(Y(0)Y(0)Y(1) + Y(0)Y(1)Y(0) + Y(1)Y(0)Y(0)) + Y(1) + 2Y(2) \right] \\
 &= -\frac{1}{6} (2(-0.625)) \\
 &= 0.20833
 \end{aligned}$$

เมื่อ $k=2$

$$\begin{aligned}
 Y(4) &= -\frac{1}{(3)(4)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^2 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(2-k_2) \right) + Y(2) + (3)Y(3) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^2}{2!} \right) \cos(\pi) \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{12} \left[0.3 \left(\begin{array}{l} Y(0)Y(0)Y(2) + Y(0)Y(1)Y(1) + Y(1)Y(0)Y(1) \\ + Y(0)Y(2)Y(0) + Y(1)Y(1)Y(0) + Y(2)Y(0)Y(0) \end{array} \right) + Y(2) + 3Y(3) - \frac{1}{4000} \right] \\
 &= -\frac{1}{12} \left[0.3(-1.875) - 0.625 + 3(0.20833) - \frac{1}{4000} \right] \\
 &= 0.0468542
 \end{aligned}$$

⋮

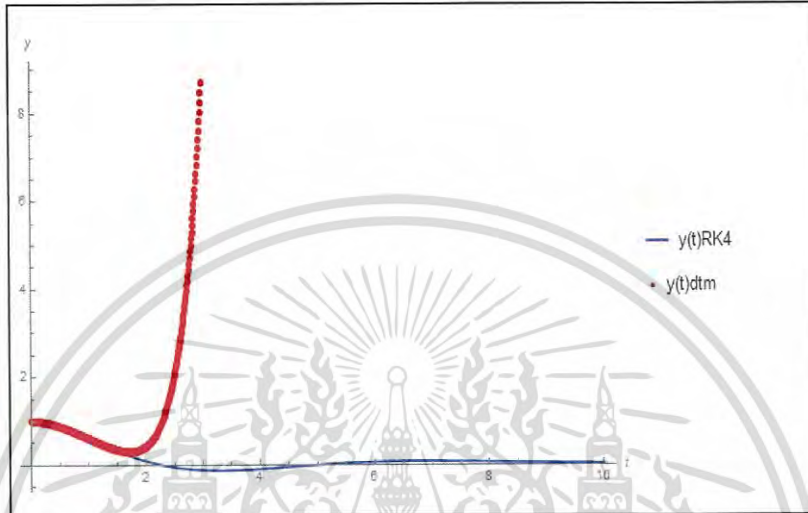
เมื่อ $k=5$

$$\begin{aligned}
 Y(7) &= -\frac{1}{(6)(7)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^5 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(5-k_2) \right) + Y(5) + (6)Y(6) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^5}{5!} \right) \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[0.3 \left(\begin{array}{l} Y(0)Y(0)Y(5) + Y(0)Y(1)Y(4) + Y(1)Y(0)Y(4) \\ + Y(0)Y(2)Y(3) + Y(1)Y(1)Y(3) + Y(2)Y(0)Y(3) \\ + Y(0)Y(3)Y(2) + Y(1)Y(2)Y(2) + Y(2)Y(1)Y(2) \\ + Y(3)Y(0)Y(2) + Y(0)Y(4)Y(1) + Y(1)Y(3)Y(1) \\ + Y(2)Y(2)Y(1) + Y(3)Y(1)Y(1) + Y(4)Y(0)Y(1) \\ + Y(0)Y(5)Y(0) + Y(1)Y(4)Y(0) + Y(2)Y(3)Y(0) \\ + Y(3)Y(2)Y(0) + Y(4)Y(1)Y(0) + Y(5)Y(0)Y(0) \end{array} \right) + Y(5) + 6Y(6) \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[0.3(-0.0291625 - 0.13020625 - 0.13020625 - 0.0291625 \right. \\
 &\quad \left. - 0.13200625 - 0.13020625 - 0.0291625) - 0.0291625 + 6(-0.00982576) \right] \\
 &= 0.008303018
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ $y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k$

$$y(t) = 1 - 0.625t^2 + 0.020833t^3 + 0.0468542t^4 - 0.0291625t^5 - 0.00982576t^6 + 0.008303018t^7 \quad (4.7)$$



รูปที่ 4.2 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุดตาและวิธีสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.7) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากรูปที่ 4.2 จะเห็นว่าผลเฉลยจากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (ยังไม่ได้ปรับปรุง) กราฟมีลักษณะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว จากผลที่ได้ในรูป 4.2 ทำให้ต้องมีการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้ ดังนี้

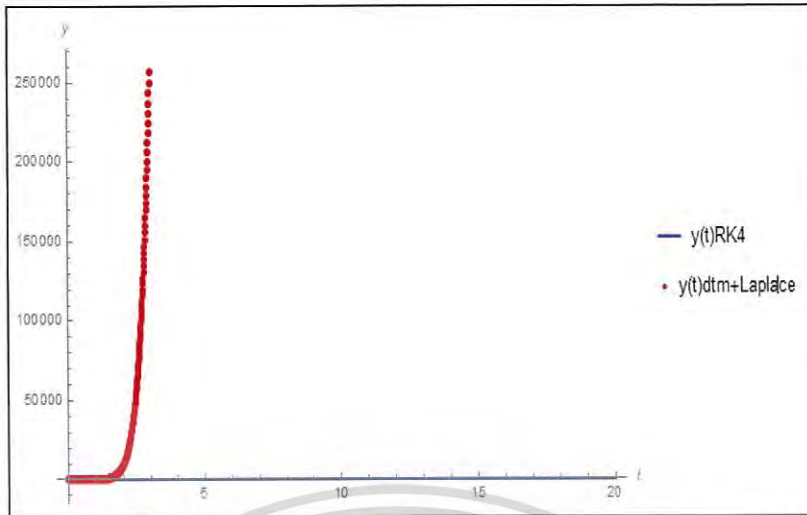
ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.7)

$$L[y(t)] = \frac{41.8486}{s^8} - \frac{7.04755}{s^7} - \frac{3.4995}{s^6} + \frac{1.1245}{s^5} + \frac{1.24998}{s^4} - \frac{1.25}{s^3} - \frac{1}{s} \quad (4.8)$$

แทนค่า $s = \frac{1}{t}$ ในสมการที่ (4.8) เพื่อแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t

$$L[y(t)] = t - 1.25t^3 + 1.24998t^4 + 1.1245t^5 - 3.4995t^6 - 7.07455t^7 + 41.8486t^8 \quad (4.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.9) ที่ได้จากวิธีการแปลงลาปลาซ

จากรูปที่ 4.3 จะเห็นว่าใช้การแปลงลาปลาซแล้วจะทำให้กราฟเหลือแต่ส่วนปลายที่เพิ่มขึ้นของรูปที่ 4.2 จากการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.9) ให้ $L=4$ และ $M=4$ โดยที่

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -1.25, \quad a_4 = 1.24998, \\ a_5 = 1.1245, \quad a_6 = -3.4995, \quad a_7 = -7.4959, \quad a_8 = 41.8486$$

จากสมการที่ (2.34) ในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_5 + a_1 q_1 + a_3 q_2 + a_2 q_3 + a_1 q_4 &= 0 \\ a_6 + a_5 q_1 + a_4 q_2 + a_3 q_3 + a_2 q_4 &= 0 \\ a_7 + a_6 q_1 + a_5 q_2 + a_4 q_3 + a_3 q_4 &= 0 \\ a_8 + a_7 q_1 + a_6 q_2 + a_5 q_3 + a_4 q_4 &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่า a_1 ถึง a_8 ในสมการที่ (2.48) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1.1245 + 1.24998q_1 - 1.25q_2 + q_4 &= 0 \\ -3.4995 + 1.1245q_1 + 1.24998q_2 - 1.25q_3 &= 0 \\ -7.4995 - 3.4995q_1 + 1.1245q_2 + 1.24998q_3 - 1.25q_4 &= 0 \\ 41.8486 - 7.4995q_2 - 3.4995q_2 + 1.1245q_3 + 1.24998q_4 &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

จากสมการที่ (4.10) จะได้

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 3.33233, \quad q_2 = 14.6263, \quad q_3 = 14.8243, \quad q_4 = 12.9931$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

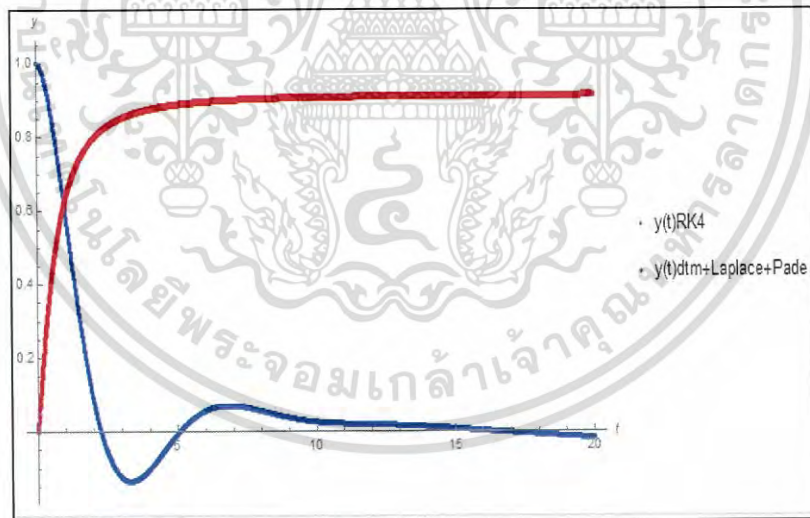
จากสมการที่ (2.35) ในบทที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned}
 a_0 &= P_0 \\
 a_1 + a_0 q_1 &= P_1 \\
 a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 &= P_2 \\
 a_3 + a_2 q_1 + a_1 q_2 + a_0 q_3 &= P_3 \\
 a_4 + a_3 q_1 + a_2 q_2 + a_1 q_3 + a_0 q_4 &= P_4
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

แทนค่า a_0 ถึง a_8 และ q_0 ถึง q_8 จะได้

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 0 \\
 P_1 &= 1 \\
 P_2 &= 3.33233 \\
 P_3 &= -1.25 + 14.6263 = 13.3763 \\
 P_4 &= 1.24998 - 1.25(3.33233) + 14.8243 = 11.9088
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left[\frac{L}{M} \right] = \left[\frac{4}{4} \right] = \frac{t + 3.33233t^2 + 13.3763t^3 + 11.9088t^4}{1 + 3.33233t + 14.6263t^2 + 14.8243t^3 + 12.4931t^4}$ (4.12)



รูปที่ 4.4 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุดตาและนี้สตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.12) ที่ได้จากการประมาณปาเด

จากรูปที่ 4.4 จะเห็นว่าการประมาณปาเดจะเป็นการขยายช่วงเมื่อ t เพิ่มมากขึ้นของผลเฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $t = \frac{1}{s}$ ในสมการที่ (4.12) จะได้

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{\frac{11.9088}{s^4} + \frac{13.3763}{s^3} + \frac{3.33233}{s^2} + \frac{1}{s}}{1 + \frac{12.9931}{s^4} + \frac{14.8243}{s^3} + \frac{14.6263}{s^2} + \frac{3.33233}{s}}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \left[\frac{4}{4} \right] = \frac{11.9088 + 13.3763s + 3.33233s^2 + s^3}{12.9931 + 14.8243s + 14.6263s^2 + 3.33233s^3 + s^4} \quad (4.13)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.13) จะได้

$$y(t) = (0.498067 - 0.282208i)e^{(-0.555597 - 0.935559i)t} ((0.513957 + 0.857816i) + (1+i)e^{(1.87112i)t}) + (0.00193268 - 0.00475773i)e^{(-1.11057 - 3.12105i)t} ((-0.716717 + 0.697364i) + (1+i)e^{(6.24209i)t}) \quad (4.14)$$



รูปที่ 4.5 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.14) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

4.1.3 คำสั่งใน Mathematica

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

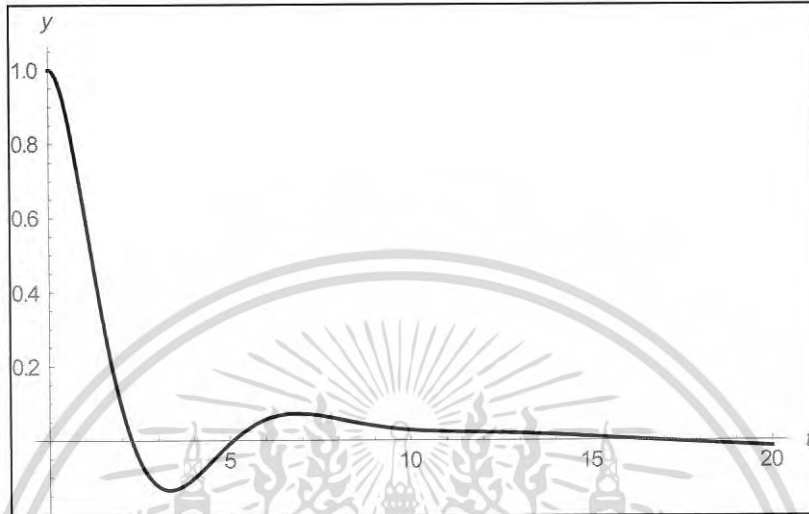
$$y' = V$$

$$V' = -V - y - 0.3y^3 + 0.05 \cos(0.1t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปแบบคำสั่ง

```
sol = NDSolve[ { V'[t] == -y[t] -0.3y[t]^3 -V[t] +0.05Cos[0.1t] , y'[t] == V[t] , y[0]
== 1 ,V[0] == 0 } , { y , V } , { t , 0 , 20 } ] ;
Plot [Evaluate[y[t]/.sol] , { t , 0 , 20 } , PlotRange -> All , PlotLabel -> { y , t } ]
```



รูปที่ 4.6 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica



รูปที่ 4.7 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.1

จากรูปที่ 4.7 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากับกราฟจึงทับกันสนิท และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.2

$$\text{กำหนดให้ } y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.05 \cos 0.1t \quad (4.15)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (4.16)$$

ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการที่ (4.15) ภายใต้อิเงื่อนไขเริ่มต้น (4.16) จะแบ่งเป็น 3 วิธีคือ วิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม วิธีการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ วิธีคำสั่งใน Mathematica โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.2.1 วิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.15) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -y' - y - 0.3y^3 + 0.05 \cos(0.1t) \quad (4.17)$$

$$\text{กำหนดให้ } h = 0.1$$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม

$$k_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_1\right) \text{ โดยที่ } K = \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_2\right)$$

$$k_4 = \frac{h}{2} f\left(t_n + h, y_n + L, y'_n + 2k_3\right) \text{ โดยที่ } L = h(y'_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \right]$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

จะได้ว่า

$$k_1 = 0.0025 \cos(0.1t_n) - 0.05y'_n - 0.05y_n - 0.015y_n^3$$

$$k_2 = -0.05K - 0.015K^3 - 0.000125 \cos(0.1t_n) + 0.0025 \cos(0.1(0.05 + t_n)) - 0.04749y'_n + (-0.04749 - 0.045K^2)y_n - 0.045Ky_n^2 - 0.014249y_n^3$$

$$k_3 = -0.0475K - 0.014249K^3 + 0.00000625 \cos(0.1t_n) + 0.002375 \cos(0.1(0.05 + t_n)) - 0.047625y'_n + (-0.047625 - 0.042749K^2)y_n - 0.042749Ky_n^2 - 0.0142875y_n^3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k_4 = 0.00475K + 0.001425K^3 - 0.05L - 0.015L^3 - (6.25 \times 10^{-7})\cos(0.1t_n) + 0.00226\cos(0.1(0.05+t_n)) - 0.045237y'_n + (-0.045237 + 0.0042749K^2 - 0.045L^2)y_n + (0.0042749K - 0.045L)y_n^2 - 0.01357y_n^3$$

$$y_{n+1} = -0.00325K - 0.0009749K^3 + 0.000079375\cos(0.1t_n) + 0.0001625\cos(0.1(0.05+t_n)) + 0.09516y'_n + (0.9951625 - 0.002925K^2)y_n - 0.002925Ky_n^2 - 0.00145125y_n^3 \quad (4.18)$$

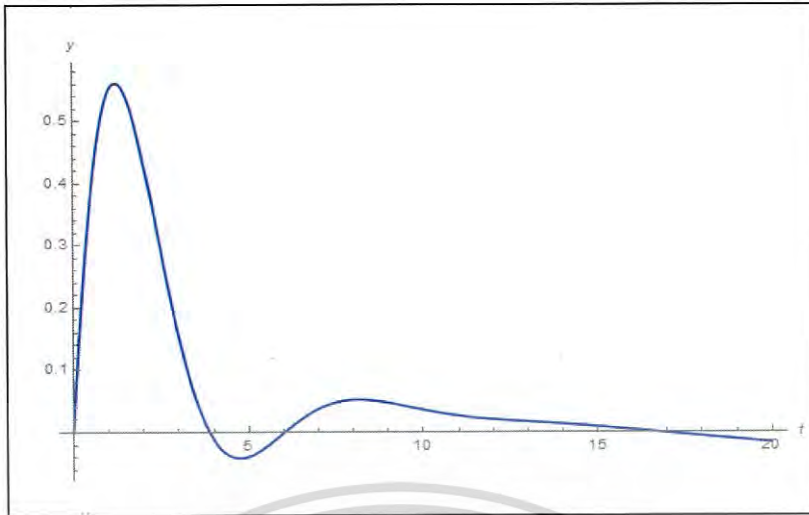
โดยที่ $K = 0.0000625\cos(0.1t_n) + 0.04875y'_n - 0.00125y_n - 0.000375y_n^3$

$$L = -0.00475K - 0.001425K^3 + (6.25 \times 10^{-7})\cos(0.1t_n) + 0.0002375\cos(0.1(0.05+t_n)) + 0.0952375y'_n + (-0.0047625 - 0.004275K^2)y_n - 0.004275Ky_n^2 - 0.001429y_n^3$$

ตารางที่ 4.2 แสดงผลการคำนวณดังตัวอย่างที่ 4.2 ด้วยวิธีรุงเง-คูดตา และนี้สรอม

n	t_n	y_n
0	0	0
1	0.1	0.0952456
2	0.2	0.180994
3	0.3	0.257317
4	0.4	0.324356
5	0.5	0.382307
6	0.6	0.431423
7	0.7	0.472007
8	0.8	0.504416
9	0.9	0.529052
10	1	0.546365
50	5	-0.039385
200	20	-0.0162223

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.8 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุ่งเง-คูตดาและนิสตรอม

4.2.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.15) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + Y(k) + (k+1)Y(k+1) - \left(0.05 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (4.19)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.16) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = 1 \quad (4.20)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.19) เพื่อหา $Y(k)$ ของผลเฉลย $y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k$ โดยที่ $N = 7$

เมื่อ $k = 0$

$$Y(2) = -\frac{1}{(1)(2)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^0 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(0-k_2) \right) + Y(0) + (1)Y(1) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^0}{0!} \right) \cos(0) \right) \right] \\ = -0.475$$

เมื่อ $k = 1$

$$Y(3) = -\frac{1}{(2)(3)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(1-k_2) \right) + Y(1) + (2)Y(2) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^1}{1!} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \\ = -0.00833333$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $k = 2$

$$Y(4) = -\frac{1}{(3)(4)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^2 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(2-k_2) \right) + Y(2) + (3)Y(3) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^2}{2!} \right) \cos(\pi) \right) \right]$$

$$= 0.0416485$$

⋮

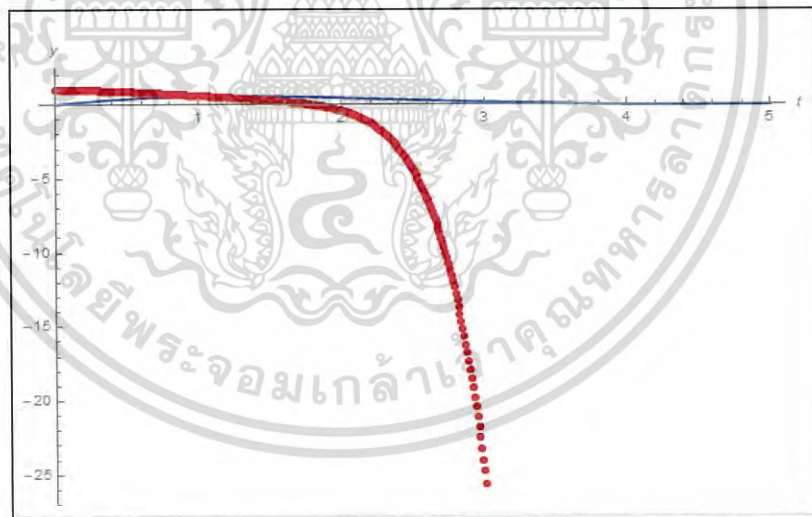
เมื่อ $k = 5$

$$Y(7) = -\frac{1}{(6)(7)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^5 \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(5-k_2) \right) + Y(5) + (6)Y(6) - \left(0.05 \left(\frac{(0.1)^5}{5!} \right) \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right) \right]$$

$$= -0.00644365$$

แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ $y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k$ จะได้

$$y(t) = t - 0.475t^2 + 0.00833333t^3 + 0.0416458t^4 - 0.0229125t^5 + 0.0166806t^6 + 0.00649365t^7 \quad (4.21)$$



รูปที่ 4.9 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุตตาและนี้สตรอม และผลเฉลยตามสมการที่ (4.21) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากรูปที่ 4.9 จะเห็นว่าผลเฉลยจากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (ยังไม่ได้ปรับปรุง) กราฟมีลักษณะลดลงอย่างรวดเร็ว จากผลที่ได้ในรูป 4.2 ทำให้ต้องมีการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้ดังนี้

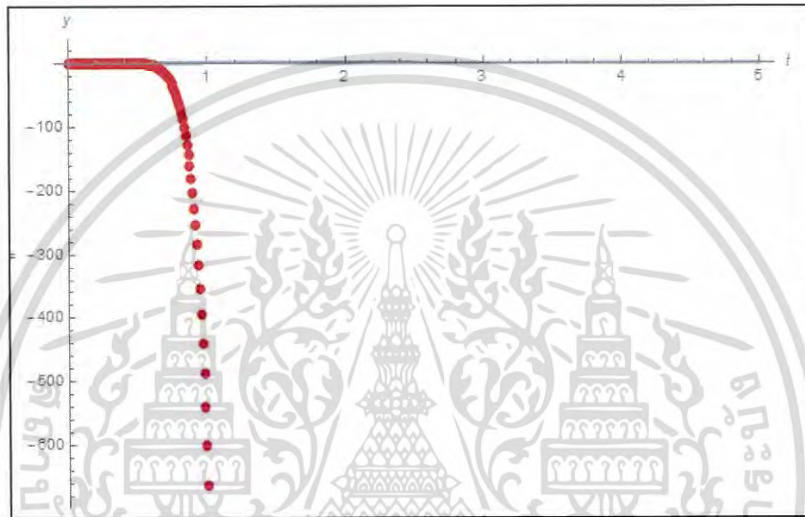
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.21)

$$L[y(t)] = \frac{-32.728}{s^8} + \frac{12.01}{s^7} - \frac{2.7495}{s^6} + \frac{0.999499}{s^5} - \frac{0.499998}{s^4} - \frac{0.95}{s^3} + \frac{1}{s^2} \quad (4.22)$$

แทนค่า $s = \frac{1}{t}$ ในสมการที่ (4.22) เพื่อแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t

$$L[y(t)] = t^2 - 0.95t^3 - 0.499998t^4 + 0.999499199t^5 - 2.7495t^6 + 12.010032t^7 - 32.727996t^8 \quad (4.23)$$



รูปที่ 4.10 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.21) ที่ได้จากการแปลงลาปลาซ

จากรูปที่ 4.10 จะเห็นว่าใช้การแปลงลาปลาซแล้วจะทำให้กราฟเหลือแต่ส่วนปลายที่ลดลงของรูปที่ 4.9 จากการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ใช้การประมาณปาเดกับสมการที่ (4.23) ให้ $L=4$ และ $M=4$ โดยที่

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -0.95, \quad a_4 = 0.0499998, \\ a_5 = 0.999499199, \quad a_6 = -2.7495, \quad a_7 = 12.010032, \quad a_8 = -32.727996$$

จากสมการที่ (2.34) ในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_5 + a_1q_1 + a_3q_2 + a_2q_3 + a_1q_4 &= 0 \\ a_6 + a_5q_1 + a_4q_2 + a_3q_3 + a_2q_4 &= 0 \\ a_7 + a_6q_1 + a_5q_2 + a_4q_3 + a_3q_4 &= 0 \\ a_8 + a_7q_1 + a_6q_2 + a_5q_3 + a_4q_4 &= 0 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า a_1 ถึง a_8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 1.1245 + 1.24998q_1 - 1.25q_2 + q_4 &= 0 \\
 -3.4995 + 1.1245q_1 + 1.24998q_2 - 1.25q_3 &= 0 \\
 -7.4995 - 3.4995q_1 + 1.1245q_2 + 1.24998q_3 - 1.25q_4 &= 0 \\
 41.8486 - 7.4995q_2 - 3.4995q_3 + 1.1245q_4 + 1.24998q_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

จากสมการที่ (4.24) จะได้

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 3.33233, \quad q_2 = 14.6263, \quad q_3 = 14.8243, \quad q_4 = 12.9931$$

จากสมการที่ (2.35) ในบทที่ 2 จะได้

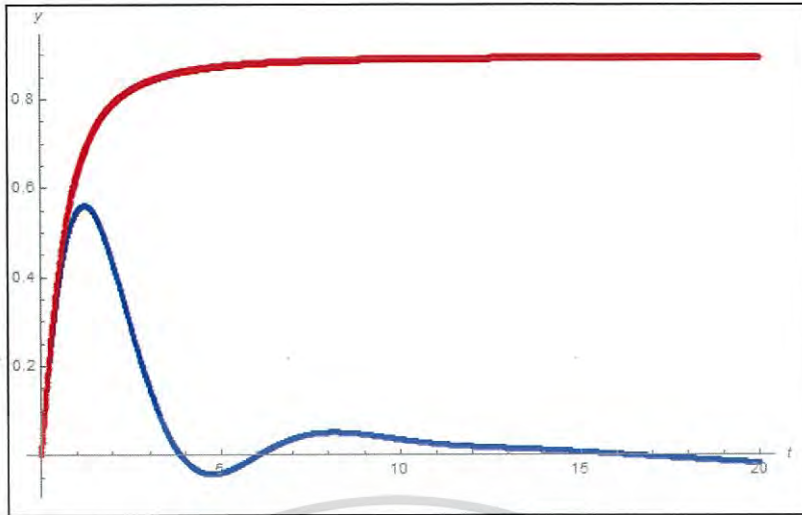
$$\begin{aligned}
 a_0 &= P_0 \\
 a_1 + a_0q_1 &= P_1 \\
 a_2 + a_1q_1 + a_0q_2 &= P_2 \\
 a_3 + a_2q_1 + a_1q_2 + a_0q_3 &= P_3 \\
 a_4 + a_3q_1 + a_2q_2 + a_1q_3 + a_0q_4 &= P_4
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

แทนค่า a_0 ถึง a_8 และ q_0 ถึง q_8 ในสมการที่ (4.25) จะได้

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 0 \\
 P_1 &= 0 \\
 P_2 &= 1 \\
 P_3 &= 5.21557 \\
 P_4 &= 16.1935
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \left[\frac{L}{M} \right] = \left[\frac{4}{4} \right] = \frac{t^2 + 5.21557t^3 + 16.1935t^4}{1 + 6.16557t + 22.1007t^2 + 20.3045t^3 + 16.98131t^4} \tag{4.26}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



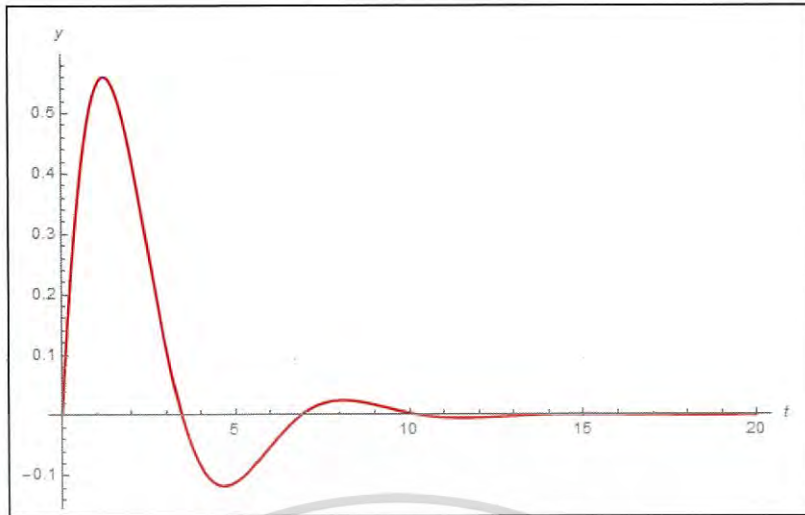
รูปที่ 4.11 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุ่งเง-คุดตาและนิสตรอม และผลเฉลยตามสมการที่(4.26) ที่ได้จากการประมาณปาเด

จากรูปที่ 4.11 จะเห็นว่าการประมาณปาเดจะเป็นการขยายช่วงเมื่อ t เพิ่มมากขึ้นของผลเฉลย แทนค่า $t = \frac{1}{s}$ ในสมการที่ (4.26) จะได้

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{16.1935 + 5.21557s + s^2}{16.9813 + 20.3045s + 22.1007s^2 + 6.16557s^3 + s^4} \quad (4.27)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.27) จะได้

$$y(t) = (0.498067 - 0.282208i)e^{(-0.555597 - 0.935559i)t} \left((0.513957 + 0.857816i) + (1+i)e^{(1.87112i)t} \right) + (0.00193268 - 0.00475773i)e^{(-1.11057 - 3.12105i)t} \left((-0.716717 + 0.697364i) + (1+i)e^{(6.24209i)t} \right) \quad (4.28)$$



รูปที่ 4.12 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.28) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

4.2.3 คำสั่งใน Mathematica

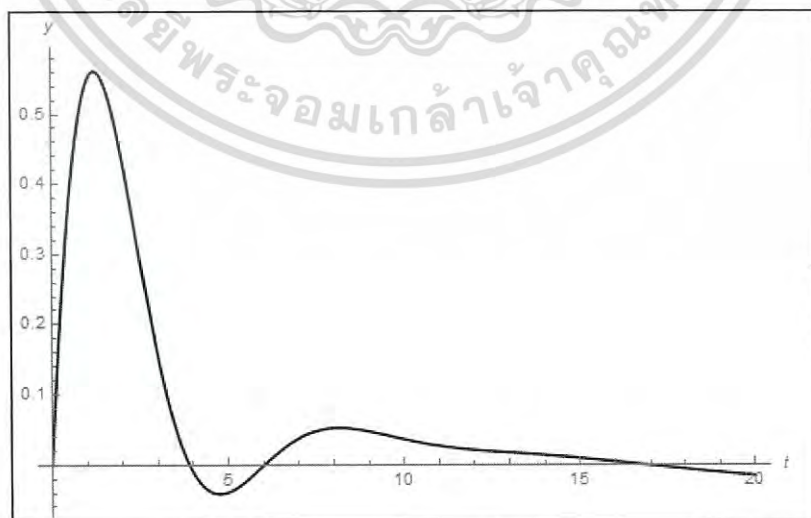
เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

$$y' = V$$

$$V' = -V - y - 0.3y^3 + 0.05 \cos(0.1t)$$

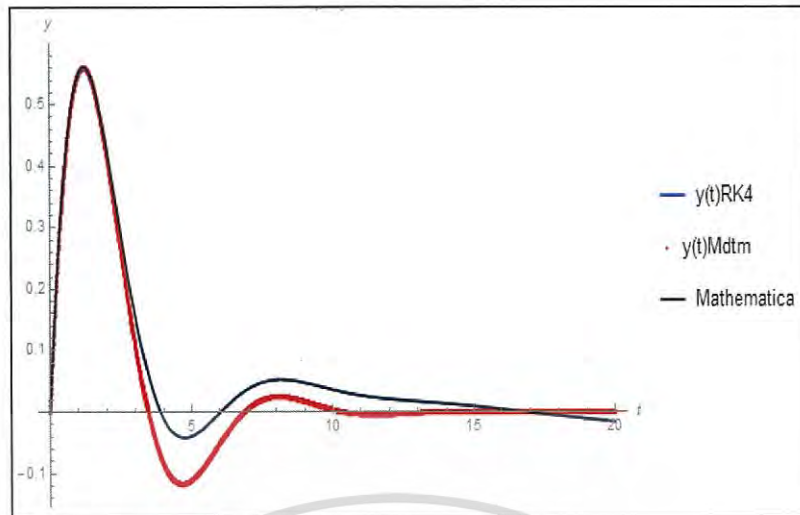
รูปแบบคำสั่ง

```
sol = NDSolve[ { V'[t] == - y[t] - 0.3y[t]^3 - V[t] + 0.05Cos[0.1t] , y'[t] == V[t] ,
y[0] == 0 , V[0] == 1 } , { y , V } , { t , 0 , 20 } ] ;
Plot[Evaluate[y[t]/.sol] , { t , 0 , 20 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```



รูปที่ 4.13 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.14 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุดตาและนี้สตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.2

จากรูปที่ 4.14 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 4.3

$$\text{กำหนดให้ } y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.05 \cos t \quad (4.29)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (4.30)$$

4.3.1 วิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.29) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -y' - y - 0.3y^3 + 0.05 \cos(t) \quad (4.31)$$

$$\text{กำหนดให้ } h = 0.1$$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุดตาและนี้สตรอม

$$k_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_1\right) \text{ โดยที่ } K = \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_2\right)$$

$$k_4 = \frac{h}{2} f\left(t_n + h, y_n + L, y'_n + 2k_3\right) \text{ โดยที่ } L = h(y'_n + k_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \right]$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

จะได้ว่า

$$k_1 = 0.0025 \cos(0.1t_n) - 0.005y'_n - 0.005y_n - 0.0015y_n^3$$

$$k_2 = -0.005K - 0.0015K^3 - 0.00000125 \cos(0.1t_n) + 0.00025 \cos(0.005+t_n) - 0.004975y'_n + (-0.004975 - 0.0045K^2)y_n - 0.0045Ky_n^2 - 0.0014249y_n^3$$

$$k_3 = -0.004975K - 0.0014925K^3 + (6.25 \times 10^{-9}) \cos(0.1t_n) + 0.00024875 \cos(0.005+t_n) - 0.004975y'_n + (-0.004975 - 0.0044775K^2)y_n - 0.0044775Ky_n^2 - 0.0014925y_n^3$$

$$k_4 = 0.0000475K + 0.000014925K^3 - 0.005L - 0.0015L^3 - (6.25 \times 10^{-11}) \cos(0.1t_n) + 0.0002475 \cos(0.005+t_n) - 0.00495y'_n + (-0.00495 + 0.000044775K^2 - 0.0045L^2)y_n + (0.000044775K - 0.0045L)y_n^2 - 0.001485y_n^3$$

$$y_{n+1} = -0.0000325K - 0.000009974K^3 + (8.29 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.0000016625 \cos(0.005+t_n) + 0.00995y'_n + (0.99995 - 0.00002992K^2)y_n - 0.00002992Ky_n^2 - 0.00001495y_n^3 \quad (4.32)$$

โดยที่ $K = (6.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.0049875y'_n - 0.00000125y_n - 0.00000375y_n^3$

$$L = -0.00004975K - 0.00001492K^3 + (6.25 \times 10^{-11}) \cos(0.1t_n) + 0.0000024875 \cos(0.005+t_n) + 0.00995024875y'_n + (-0.00004975 - 0.00004477K^2)y_n - 0.00004477Ky_n^2 - 0.000014925y_n^3$$

ตารางที่ 4.3 แสดงผลการคำนวณดังตัวอย่างที่ 4.3 ด้วยวิธีรุงเง-คูตดา และนี้สตรอม

n	t_n	y_n
0	0	1
1	0.1	0.993963
2	0.2	0.976729
3	0.3	0.949664

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.3 (ต่อ) แสดงผลการคำนวณดังตัวอย่างที่ 4.3 ด้วยวิธีรุงเง-คุตตา และนี้สตรอม

n	t_n	y_n
4	0.4	0.914163
5	0.5	0.871612
6	0.6	0.823356
7	0.7	0.770666
8	0.8	0.714723
9	0.9	0.6566
10	1	0.597254
50	5	0.0999904
100	10	-0.0313386
200	20	0.0454723



รูปที่ 4.15 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุตตาและนี้สตรอม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.29) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + Y(k) + (k+1)Y(k+1) - \left(0.05 \left(\frac{1}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (4.33)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.30) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 0 \quad (4.34)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.34) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k$ จะได้ โดยที่ $N=7$ จะได้

$$y(t) = 1 - 0.625t^2 + 0.20833t^3 + 0.0447917t^4 - 0.02875t^5 - 0.00969444t^6 + 0.00826587t^7 \quad (4.35)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.35)

$$L[y(t)] = \frac{41.66}{s^8} - \frac{6.98}{s^7} - \frac{3.45}{s^6} + \frac{1.075}{s^5} + \frac{1.2499}{s^4} - \frac{1.25}{s^3} + \frac{1}{s} \quad (4.36)$$

แทนค่า $s = \frac{1}{t}$ ในสมการที่ (4.36) เพื่อแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t

$$L[y(t)] = t - 1.25t^3 + 1.24998t^4 + 1.075t^5 - 3.45t^6 - 6.98t^7 + 41.66t^8 \quad (4.37)$$

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.37) ให้ $L=4$ และ $M=4$ จะได้

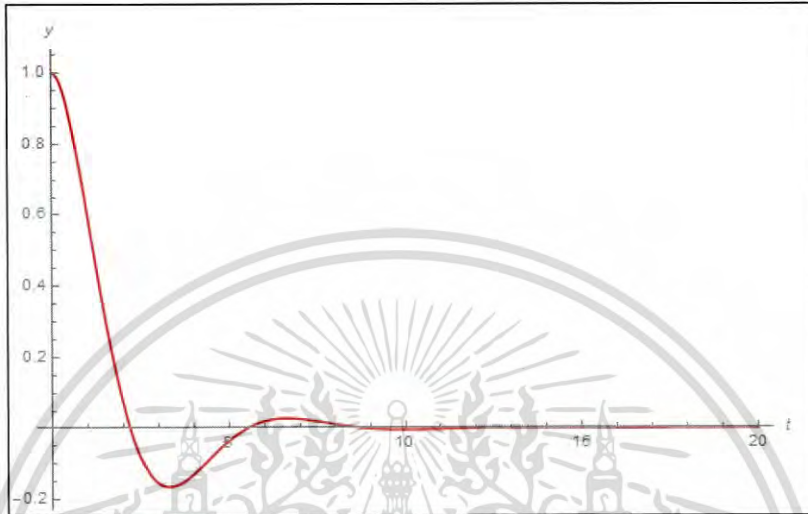
$$\left[\frac{L}{M} \right] = \left[\frac{4}{4} \right] = \frac{t + 3.26105t^2 + 14.1422t^3 + 12.6101t^4}{1 + 3.26105t + 15.3922t^2 + 15.4364t^3 + 14.098t^4} \quad (4.38)$$

แทนค่า $t = \frac{1}{s}$ ในสมการที่ (4.38) จะได้

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{12.6161 + 14.1422s + 3.26105s^2 + s^3}{14.089 + 15.4364s + 15.3922s^2 + 3.26105s^3 + s^4} \quad (4.39)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.39) จะได้

$$y(t) = (0.49813 - 0.27568i)e^{(-0.54247 - 0.94632i)t} ((0.53104 + 0.84734i) + e^{(1.89264i)t}) + (0.00186 - 0.00348i)e^{(-1.08805 - 3.26459i)t} ((-0.5525 + 0.8335i) + e^{(6.52918i)t}) \quad (4.40)$$



รูปที่ 4.16 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.40) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

4.3.3 คำสั่งใน Mathematica

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

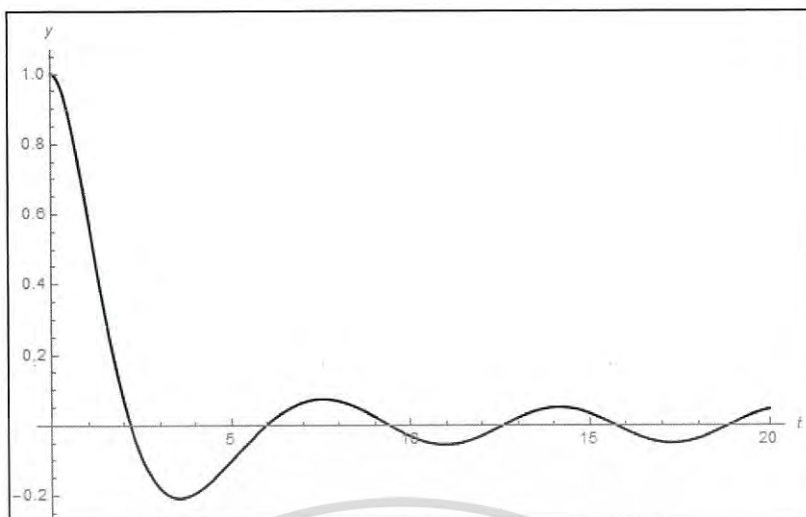
$$\begin{aligned} y' &= V \\ V' &= -V - y - 0.3y^3 + 0.05 \cos(t) \end{aligned}$$

รูปแบบคำสั่ง

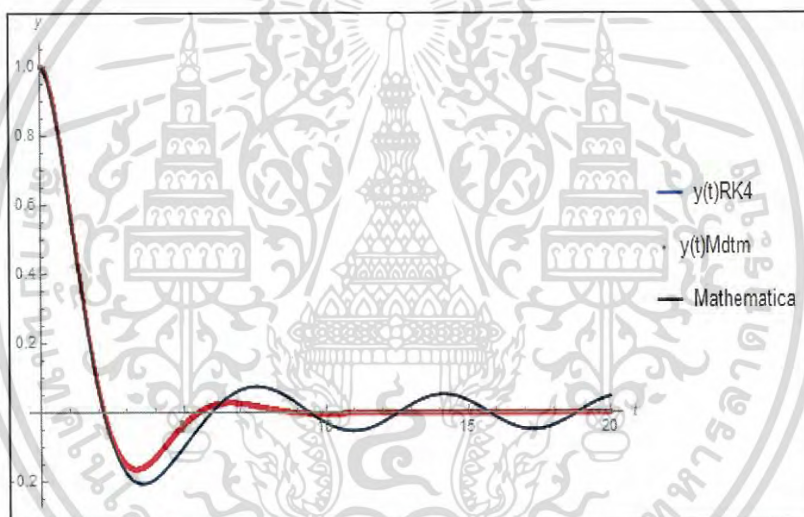
```
sol = NDSolve[ { V'[t] == - y[t] - 0.3y[t]^3 - V[t] + 0.05Cos[t], y'[t] == V[t], y[0] == 1, V[0] == 0 }, { y, V }, { t, 0, 20 }];
```

```
Plot[Evaluate[y[t]/.sol], { t, 0, 20 }, PlotStyle -> Black, PlotRange -> All, PlotLegends -> { "Mathematica" }, AxesLabel -> { t, y }]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.17 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica



รูปที่ 4.18 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตาและนี้สตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.3

จากรูปที่ 4.18 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุตตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 4.4

$$\text{กำหนดให้} \quad y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.5 \cos 0.1t \quad (4.41)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (4.42)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4.1 วิธีรุงเง-คุดตา และนี่สตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.41) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -y' - y - 0.3y^3 + 0.5 \cos(0.1t) \quad (4.43)$$

กำหนดให้ $h = 0.1$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุดตาและนี่สตรอม

$$k_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_1\right) \text{ โดยที่ } K = \frac{h}{2} \left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_2\right)$$

$$k_4 = \frac{h}{2} f\left(t_n + h, y_n + L, y'_n + 2k_3\right) \text{ โดยที่ } L = h(y'_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \right]$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

จะได้ว่า

$$k_1 = 0.0025 \cos(0.1t_n) - 0.005y'_n - 0.005y_n - 0.0015y_n^3$$

$$k_2 = -0.005K - 0.0015K^3 - 0.00000125 \cos(0.1t_n) + 0.00025 \cos(0.1(0.005 + t_n)) - 0.004975y'_n + (-0.004975 - 0.0045K^2)y_n - 0.0045Ky_n^2 - 0.0014249y_n^3$$

$$k_3 = -0.004975K - 0.0014925K^3 + (6.25 \times 10^{-8}) \cos(0.1t_n) + 0.00024875 \cos(0.1(0.005 + t_n)) - 0.004975y'_n + (-0.004975 - 0.0044775K^2)y_n - 0.0044775Ky_n^2 - 0.0014925y_n^3$$

$$k_4 = 0.0000475K + 0.000014925K^3 - 0.005L - 0.0015L^3 - (6.25 \times 10^{-10}) \cos(0.1t_n) + 0.0002475 \cos(0.1(0.005 + t_n)) - 0.00495y'_n + (-0.00495 + 0.000044775K^2 - 0.0045L^2)y_n + (0.000044775K - 0.0045L)y_n^2 - 0.001485y_n^3$$

$$y_{n+1} = -0.0000325K - (9.975 \times 10^{-6})K^3 + (8.29 \times 10^{-6}) \cos(0.1t_n) + 0.0000016625 \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.00995y'_n + (0.99995 - 0.00002992K^2)y_n - 0.00002992Ky_n^2 - 0.00001495y_n^3$$

(4.44)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

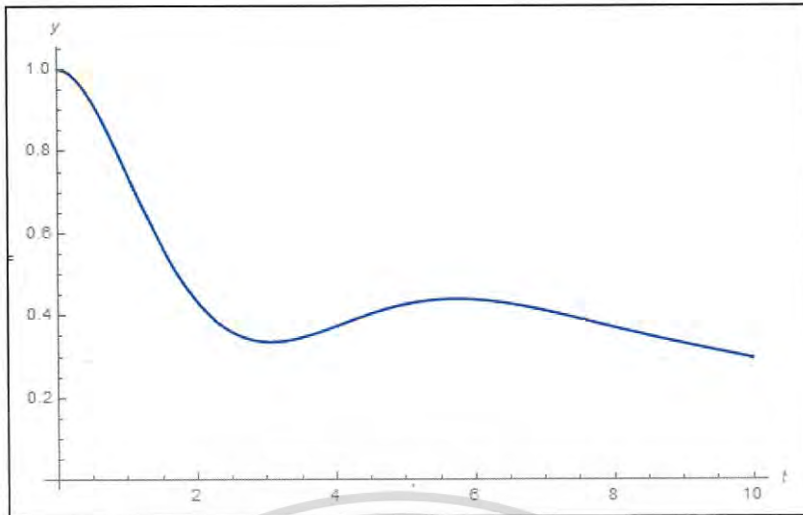
$$K = (6.25 \times 10^{-6}) \cos(0.1t_n) + 0.0049875y'_n - 0.0000125y_n - 0.00000375y_n^3$$

$$L = -0.00004975K - 0.00001492K^3 + (6.25 \times 10^{-10}) \cos(0.1t_n) \\ + 0.0000024875 \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.00497513y'_n + (-0.004975 - 0.004477K^2)y_n \\ - 0.004477Ky_n^2 - 0.0014925y_n^3$$

ตารางที่ 4.4 แสดงผลการคำนวณดังตัวอย่างที่ 4.4 ด้วยวิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม

n	t_n	y_n
0	0	1
1	0.1	0.996136
2	0.2	0.985108
3	0.3	0.967795
4	0.4	0.945097
5	0.5	0.917919
6	0.6	0.881745
7	0.7	0.85362
8	0.8	0.818139
9	0.9	0.781433
10	1	0.744164
50	5	0.427406
100	10	0.297331
200	20	-0.161382

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.19 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จากวิธีรุงเง-คุตตาและนิสตรอม

4.4.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.41) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\left(0.3 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1) Y(k_2 - k_1) Y(k - k_2) \right) + Y(k) + (k+1)Y(k+1) - \left(0.5 \left(\frac{1^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (4.45)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.42) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = 1 \quad , \quad Y(1) = 0 \quad (4.46)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.45) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k \quad \text{จะได้ โดยที่ } N = 7 \quad \text{จะได้}$$

$$y(t) = 1 - 0.4t^2 + 0.133333t^3 + 0.02979167t^4 - 0.018625t^5 - 0.0035825t^6 + 0.00364t^7 \quad (4.47)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.47)

$$L[y(t)] = \frac{18.3459}{s^8} - \frac{2.57945}{s^7} - \frac{2.235}{s^6} + \frac{0.715}{s^5} + \frac{0.8}{s^4} - \frac{0.8}{s^3} + \frac{1}{s} \quad (4.48)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $s = \frac{1}{t}$ ในสมการที่ (4.48) เพื่อแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t

$$L[y(t)] = t - 0.8t^3 + 0.8t^4 + 0.715t^5 - 2.235t^6 - 2.57945t^7 + 18.3456t^8 \quad (4.49)$$

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.49) ให้ $L = 3$ และ $M = 3$ จะได้

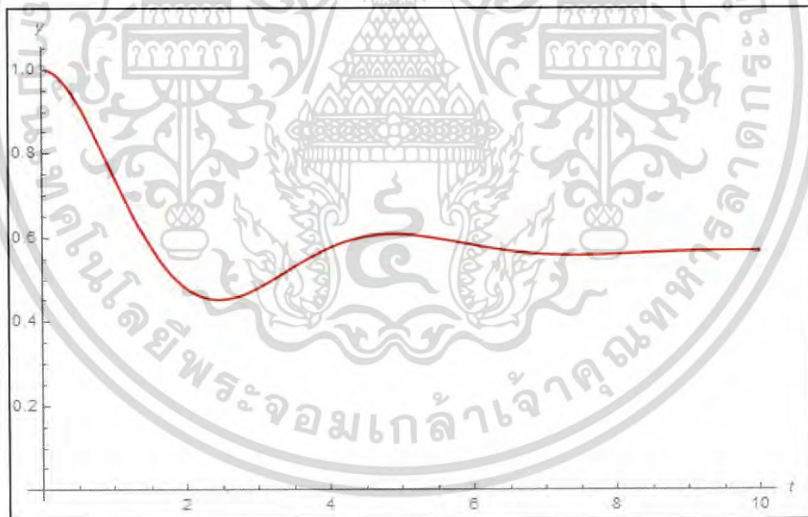
$$\left[\frac{L}{M} \right] = \left[\frac{3}{3} \right] = \frac{t + 1.00571t^2 + 1.09946t^3}{1 + 1.00571t + 1.89946t^2 + 0.00457143t^3} \quad (4.50)$$

แทนค่า $t = \frac{1}{s}$ ในสมการที่ (4.50) จะได้

$$\left[\frac{3}{3} \right] = \frac{1.09946s + 1.00571s^2 + s^3}{0.00457143s + 1.89946s^2 + 1.00571s^3 + s^4} \quad (4.51)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.51) จะได้

$$y(t) = 0.57902e^{-0.00240t} + (0.210485 - 0.082861i)e^{(-0.50165 - 1.28272i)t} + ((0.73164 + 0.68168i) + e^{(2.56545i)t}) \quad (4.52)$$



รูปที่ 4.20 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.52) ที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

4.4.3 คำสั่งใน Mathematica

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

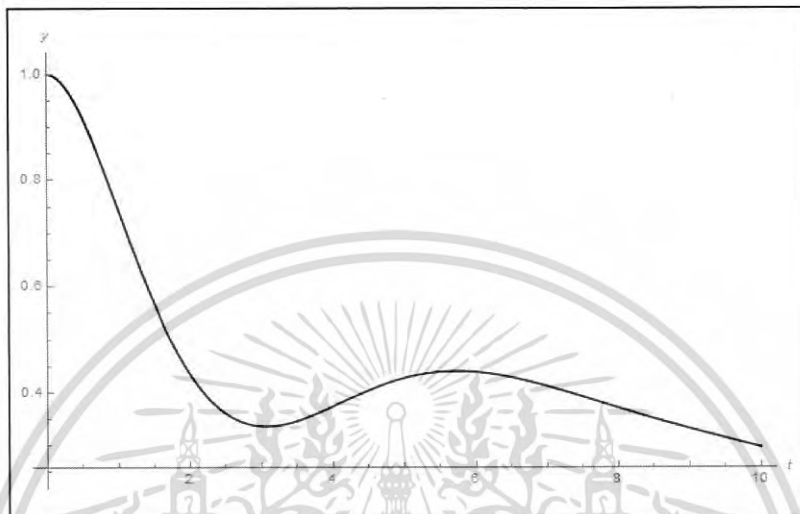
$$y' = V$$

$$V' = -V - y - 0.3y^3 + 0.5 \cos(0.1t)$$

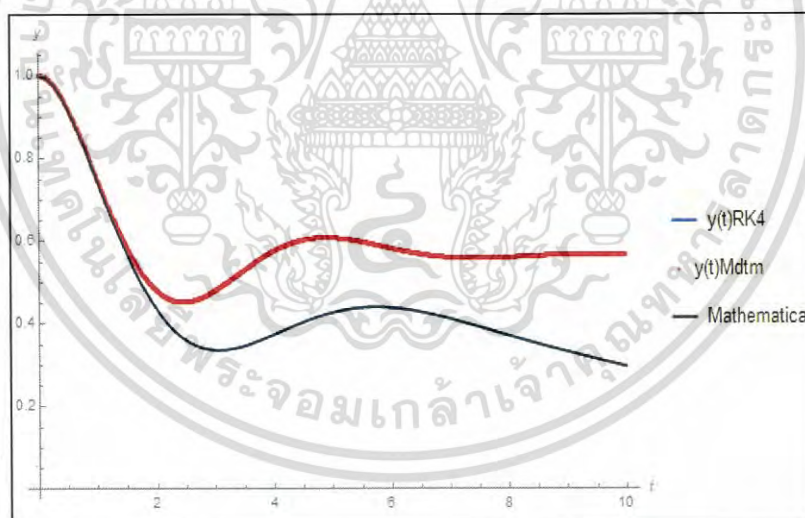
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปแบบคำสั่ง

```
sol = NDSolve[ { V[t] == - y[t] - 0.3y[t]^3 - V[t] + 0.5Cos[0.1t] , y'[t] == V[t] ,
y[0] == 1 , V[0] == 0 } , { y , V } , { t , 0 , 10 } ] ;
Plot[Evaluate[y[t]/sol] , { t , 0 , 10 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```



รูปที่ 4.21 กราฟแสดงผลเฉลยที่ได้จาก คำสั่งใน Mathematica



รูปที่ 4.22 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.4

จากรูปที่ 4.22 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.5

$$\text{กำหนดให้ } y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = 0.05 \cos 0.1t \quad (4.53)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0.1, y'(0) = 0 \quad (4.54)$$

4.5.1 วิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.53) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -0.5y' - 25y - 25y^3 + 0.05 \cos(0.1t) \quad (4.55)$$

$$\text{กำหนดให้ } h = 0.1$$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม

$$k_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_1\right) \text{ โดยที่ } K = \frac{h}{2}\left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K, y'_n + k_2\right)$$

$$k_4 = \frac{h}{2} f\left(t_n + h, y_n + L, y'_n + 2k_3\right) \text{ โดยที่ } L = h(y'_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \right]$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.00025 \cos(0.1t_n) - 0.0025y'_n - 0.125y_n - 0.1225y_n^3 \\ k_2 &= -0.125K - 0.125K^3 - (6.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.00025 \cos(0.1(0.005 + t_n)) - 0.002493y'_n + \\ &\quad (-0.124688 - 0.375K^2)y_n - 0.375Ky_n^2 - 0.124688y_n^3 \\ k_3 &= -0.124688K - 0.124688K^3 + (1.5625 \times 10^{-9}) \cos(0.1t_n) + 0.0002493 \cos(0.1(0.005 + t_n)) - \\ &\quad 0.002493y'_n + (-0.124688 - 0.374063K^2)y_n - 0.374063Ky_n^2 - 0.124688y_n^3 \\ k_4 &= 0.000623K + 0.000623K^3 - 0.125L - 0.125L^3 - (7.81 \times 10^{-12}) \cos(0.1t_n) + \\ &\quad 0.0002487 \cos(0.1(0.005 + t_n)) - 0.002487y'_n + (-0.124377 + 0.00187K^2 - \\ &\quad 0.375L^2)y_n + (0.00187K - 0.375L)y_n^2 - 0.124377y_n^3 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{n+1} = -0.000832K - 0.0008322K^3 + (8.31 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + (1.664 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005+t_n)) + 0.009975y'_n + (0.998752 - 0.00249688K^2)y_n - 0.00249688Ky_n^2 - 0.124377y_n^3 \quad (4.56)$$

โดยที่

$$K = (6.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.004999375y'_n - 0.0003125y_n - 0.0003125y_n^3$$

$$L = -0.00124688K - 0.00124688K^3 + (1.5625 \times 10^{-11}) \cos(0.1t_n) + (2.49375 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005+t_n)) + 0.009975y'_n + (-0.00124688 - 0.00974063K^2)y_n - 0.00374063Ky_n^2 - 0.00124688y_n^3$$

4.3.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.53) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \left[\left(25 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + 25Y(k) + 0.5(k+1)Y(k+1) - \left(0.05 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2} \right) \right) \right] \quad (4.57)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.54) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = 0.1, \quad Y(1) = 0 \quad (4.58)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.57) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k$ จะได้ โดยที่ $N=7$ จะได้

$$y(t) = 1 - 1.2375t^2 + 0.20625t^3 + 2.62967t^4 - 0.528514t^5 - 2.59594t^6 + 0.600609t^7 \quad (4.59)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.59)

$$L[y(t)] = \frac{3027.07}{s^8} - \frac{1869.08}{s^7} - \frac{63.4217}{s^6} + \frac{63.1121}{s^5} + \frac{1.2375}{s^4} - \frac{2.475}{s^3} + \frac{0.1}{s} \quad (4.60)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $s = \frac{1}{t}$ ในสมการที่ (4.60) เพื่อแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t

$$L[y(t)] = 0.1t - 2.475t^3 + 1.2375t^4 + 63.1121t^5 - 63.4217t^6 - 1869.08t^7 + 3027.07t^8 \quad (4.61)$$

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.61) ให้ $L = 4$ และ $M = 4$ จะได้

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \left[\frac{4}{4} \right] = \frac{0.1t + 0.166654t^2 + 11.2981t^3 + 5.68651t^4}{1 + 1.66654t + 137.731t^2 + 85.737t^3 + 2757.09t^4} \quad (4.62)$$

แทนค่า $t = \frac{1}{s}$ ในสมการที่ (4.62) จะได้

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{5.68651 + 11.2981s + 0.166654s^2 + 0.1s^3}{2757.09 + 85.7375s + 137.731s^2 + 1.66654s^3 + s^4} \quad (4.63)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.63) จะได้

$$y(t) = (0.049843 - 0.002517i)e^{(-0.25485 - 4.94018i)t} ((0.99491 + 0.10074i) + e^{(9.88036i)t}) + (0.0001566 - 0.0000338i)e^{(-0.57841 - 10.59888i)t} ((0.91085 + 0.41272i) + e^{(21.19776i)t}) \quad (4.64)$$

4.5.3 คำสั่งใน Mathematica

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

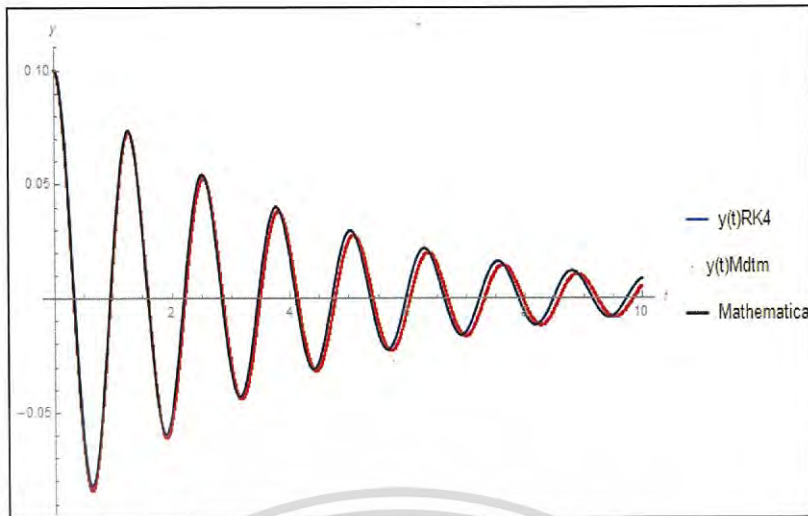
$$y' = V$$

$$V' = -0.5V - 25y - 25y^3 + 0.05 \cos(0.1t)$$

รูปแบบคำสั่ง

```
sol = NDSolve[ { V[t] == - 25y[t] - 25y[t]^3 - 0.5V[t] + 0.05Cos[0.1t] , y'[t] ==
V[t] , y[0] == 0.1 , V[0] == 0 } , { y , V } , { t , 0 , 10 } ] ;
Plot[Evaluate[y[t]/.sol] , { t , 0 , 10 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.23 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.5

จากรูปที่ 4.23 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 4.6

$$\text{กำหนดให้ } y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = 0.5 \cos t \quad (4.65)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0.1, y'(0) = 0 \quad (4.66)$$

4.6.1 วิธีรุงเง-คุตตา และนีสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.65) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -0.5y' - 25y - 0.25y^3 + 0.5 \cos(t) \quad (4.67)$$

$$\text{กำหนดให้ } h = 0.1$$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุตตาและนีสตรอม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & -0.000832K - 0.0008322K^3 + (8.31 \times 10^{-7}) \cos(t_n) \\ & + (1.664 \times 10^{-6}) \cos(0.005 + t_n) + 0.009975y'_n + (0.998752 - 0.00249688K^2)y_n \\ & - 0.00249688Ky_n^2 - 0.00124377y_n^3 \end{aligned} \quad (4.68)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$K = (6.25 \times 10^{-6}) \cos(t_n) + 0.004999375 y_n' - 0.0003125 y_n - 0.0003125 y_n^3$$

$$L = -0.00124688 K - 0.00124688 K^3 + (1.5625 \times 10^{-10}) \cos(t_n) + (2.49375 \times 10^{-5}) \cos(0.005 + t_n) + 0.009975 y_n' + (-0.00124688 - 0.00974063 K^2) y_n - 0.00374063 K y_n^2 - 0.00124688 y_n^3$$

4.6.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.65) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \left[\left(25 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1) Y(k_2 - k_1) Y(k - k_2) \right) + 25Y(k) + 0.5(k+1)Y(k+1) - \left(0.5 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (4.69)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.66) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = 0.1, \quad Y(1) = 0 \quad (4.70)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.69) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k) t^k \quad \text{จะได้ โดยที่ } N = 7 \quad \text{จะได้}$$

$$y(t) = 0.1 - 1.0125t^2 + 0.16874t^3 + 2.130729t^4 - 0.430338t^5 - 2.048609t^6 + 0.471189t^7 \quad (4.71)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.71)

$$L[y(t)] = \frac{2374.79}{s^8} - \frac{1475}{s^7} - \frac{51.6406}{s^6} + \frac{51.1375}{s^5} + \frac{1.0125}{s^4} - \frac{2.025}{s^3} + \frac{0.1}{s} \quad (4.72)$$

แทนค่า $s = \frac{1}{t}$ ในสมการที่ (4.72) เพื่อแสดงให้อยู่ในรูปพจน์ของ t

$$L[y(t)] = 0.1t - 2.025t^3 + 1.0125t^4 + 51.1375t^5 - 51.1375t^6 - 1475t^7 + 2371.79t^8 \quad (4.73)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.73) ให้ $L = 3$ และ $M = 3$ จะได้

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \left[\frac{3}{3} \right] = \frac{0.1t + 0.05235t^2 + 0.526480t^3}{1 + 0.5235t + 25.5148t^2 + 0.475811t^3} \quad (4.74)$$

แทนค่า $t = \frac{1}{s}$ ในสมการที่ (4.74) จะได้

$$\left[\frac{3}{3} \right] = \frac{0.526484 + 0.05235025s + 0.1s^2}{0.475911 + 25.5148s + 0.523502s^2 + s^3} \quad (4.75)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.75) จะได้

$$y(t) = 0.02061e^{-0.018659t} + (0.03969 - 0.002024i)e^{(-0.25242 - 5.04397i)t} ((0.99481 + 0.10174i) + e^{(10.08795i)t}) \quad (4.76)$$

4.6.3 คำสั่งใน Mathematica

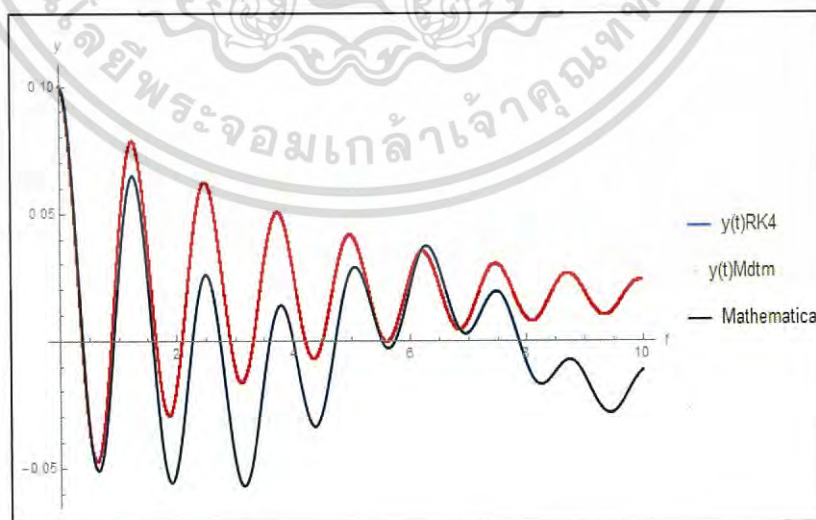
เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

$$y' = V$$

$$V' = -0.5V - 25y - 25y^3 + 0.5 \cos(t)$$

รูปแบบคำสั่ง

```
sol = NDSolve[ { V'[t] == - 25y[t] - 25y[t]^3 - 0.5V[t] + 0.5Cos[t] , y'[t] == V[t] ,
y[0] == 0.1 , V[0] == 0 } , { y , V } , { t , 0 , 10 } ] ;
Plot[Evaluate[y[t]/.sol] , { t , 0 , 10 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```



รูปที่ 4.24 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตาและนี้สตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.24 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 4.7

$$\text{กำหนดให้ } y'' + 2y' + y + 25y^3 = 0.05 \cos 0.1t \quad (4.77)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0.1, y'(0) = 0 \quad (4.78)$$

4.7.1 วิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.77) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -2y' - y - 25y^3 + 0.05 \cos(0.1t) \quad (4.79)$$

$$\text{กำหนดให้ } h = 0.1$$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุดตาและนิสตรอม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & -0.0000332K - 0.0008291K^3 + (8.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + \\ & (1.658 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.0099y'_n + (0.99995 - 0.0024875K^2)y_n - \\ & 0.0024875Ky_n^2 - 0.00124171y_n^3 \end{aligned} \quad (4.80)$$

โดยที่

$$K = (6.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.004975y'_n - 0.0000125y_n - 0.0003125y_n^3$$

$$\begin{aligned} L = & -0.0000495K - 0.0012375K^3 + (2.5 \times 10^{-10}) \cos(0.1t_n) + (2.475 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + \\ & 0.0099y'_n + (-0.0000495 - 0.0037125K^2)y_n - 0.0037125Ky_n^2 - 0.00123763y_n^3 \end{aligned}$$

4.7.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.77) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$\begin{aligned} Y(k+2) = & -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \\ & \left[\left(25 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + Y(k) + 2(k+1)Y(k+1) - \left(0.05 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.81)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.78) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = 0.1 \quad , \quad Y(1) = 0 \quad (4.82)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.81) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k \quad \text{จะได้ โดยที่ } N = 7 \quad \text{จะได้}$$

$$y(t) = 0.1 - 0.375t^2 + 0.025t^3 + 0.00705208t^4 - 0.00063t^5 - 0.000151t^6 + 0.0003516t^7 \quad (4.83)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.83) และแทนค่า $s = \frac{1}{t}$ จะได้

$$L[y(t)] = 0.1t - 0.075t^3 + 1.15t^4 + 0.16925t^5 - 0.076t^6 - 0.108932t^7 + 1.77237t^8 \quad (4.84)$$

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.84) และแทนค่า $t = \frac{1}{s}$ จะได้

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{1.15359 + 1.373925s + 0.663716s^2 + 0.1s^3}{2.60362 + 15.0138s + 14.4892s^2 + 6.63716s^3 + s^4} \quad (4.85)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.85) จะได้

$$y(t) = -0.000263e^{-3.83247t} + 0.09171e^{-0.21309t} + (0.004275 - 0.012053i)e^{(-1.295796 - 1.22837i)t} + ((-0.77649 + 0.63012i)e^{(2.45675i)t}) \quad (4.86)$$

4.7.3 คำสั่งใน Mathematica

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

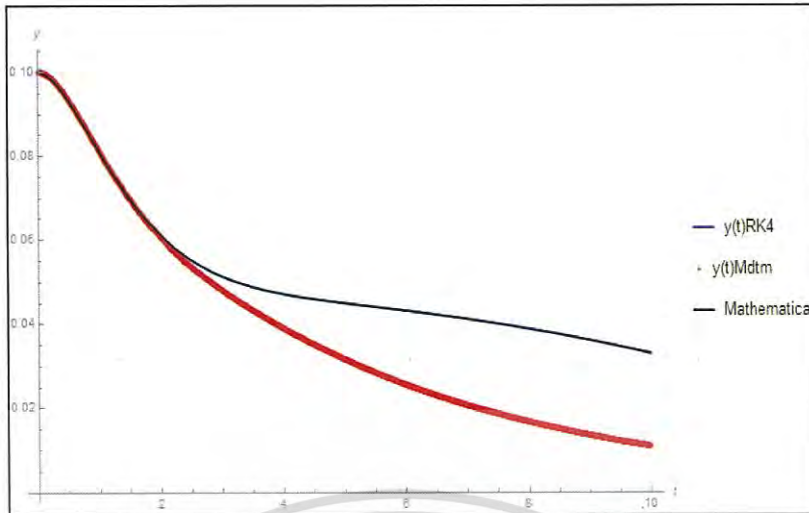
$$\begin{aligned} y' &= V \\ V' &= -2V - y - 25y^3 + 0.05 \cos(0.1t) \end{aligned}$$

รูปแบบคำสั่ง

```
sol1 = NDSolve[ { V'[t] == - y[t] - 25y[t]^3 - 2V[t] + 0.05Cos[0.1t] , y'[t] == V[t] ,
y[0] == 0.1 , V[0] == 0 } , { y , V } , { t , 0 , 10 } ] ;
```

```
Plot[Evaluate[y[t]/.sol1] , { t , 0 , 10 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.25 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุดตาและนิสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.7

จากรูปที่ 4.25 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 4.8

$$\text{กำหนดให้ } y'' + y' + 20y + 2y^3 = 0.05 \cos 0.1t \quad (4.87)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = -0.2, y'(0) = 2 \quad (4.88)$$

4.8.1 วิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.87) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -y' - 20y - 2y^3 + 0.05 \cos(0.1t) \quad (4.89)$$

กำหนดให้ $h = 0.1$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุดตาและนิสตรอม

$$y_{n+1} = -0.000832K - 0.0008322K^3 + (8.31 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + (1.664 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.009975y'_n + (0.998752 - 0.00249688K^2)y_n - 0.00249688Ky_n^2 - 0.124377y_n^3 \quad (4.90)$$

\

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$K = (6.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.004999375y'_n - 0.0003125y_n - 0.0003125y_n^3$$

$$L = -0.00124688K - 0.00124688K^3 + (1.5625 \times 10^{-11}) \cos(0.1t_n) + (2.49375 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.009975y'_n + (-0.00124688 - 0.00974063K^2)y_n - 0.00374063Ky_n^2 - 0.00124688y_n^3$$

4.8.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.87) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \left[\left(2 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + 20Y(k) + (k+1)Y(k+1) - \left(0.05 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (4.91)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.88) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = -0.2, \quad Y(1) = 2 \quad (4.92)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.91) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k \quad \text{จะได้ โดยที่ } N=7 \quad \text{จะได้}$$

$$y(t) = -0.20 + 2t + 1.033t^2 - 7.091t^3 + 0.430402t^4 + 6.53793t^5 - 3.29831t^6 + 0.698261t^7 \quad (4.93)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.93) และแทนค่า $s = \frac{1}{t}$ จะได้

$$L[y(t)] = -0.2t + 2t^2 + 0.066t^3 - 42.546t^4 + 10.3296t^5 + 784.552t^6 - 2374.78t^7 + 3519.23544t^8 \quad (4.94)$$

ใช้การประมาณปาเดกับสมการที่ (4.94) และแทนค่า $t = \frac{1}{s}$ จะได้

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{273.676 - 22.127s + 0.894097s^2 - 0.2s^3}{3082.26 + 238.614s + 176.26s^2 + 5.52952s^3 + s^4} \quad (4.95)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.95) จะได้

$$y(t) = (-0.10028 - 0.21206i)e^{(-0.48075 - 4.48445i)t} + (-0.63451 - 0.77291i)e^{(8.96889i)t} + (0.00028 - 0.000118i)e^{(-2.284003 - 12.09586i)t} + (0.69503 + 0.71898i)e^{(24.19173i)t} \quad (4.96)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.8.3 คำสั่งใน Mathematica

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

$$y' = V$$

$$V' = -V - 20y - 2y^3 + 0.05 \cos(0.1t)$$

รูปแบบคำสั่ง

```
sol1 = NDSolve[ { V[t] == - 20y[t] - 2y[t]^3 - V[t] + 0.05Cos[0.1t] , y[t] == V[t] ,
y[0] == - 0.2 , V[0] == 2 } , { y , V } , { t , 0 , 10 } ] ;
Plot[Evaluate[y[t]/.sol] , { t , 0 , 10 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```



รูปที่ 4.26 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุดตาและนิสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.8

จากรูปที่ 4.26 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 4.9

$$\text{กำหนดให้ } y'' + y' + 20y + 2y^3 = 2 \cos 0.5t \quad (4.97)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = -0.2 , y'(0) = 2 \quad (4.98)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.9.1 วิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.97) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -y' - 20y - 2y^3 + 2 \cos(0.5t) \quad (4.99)$$

กำหนดให้ $h = 0.1$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุดตาและนิสตรอม

$$y_{n+1} = -0.000832K - 0.0008322K^3 + (8.31 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + (1.664 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.009975y'_n + (0.998752 - 0.00249688K^2)y_n - 0.00249688Ky_n^2 - 0.124377y_n^3 \quad (4.100)$$

โดยที่

$$K = (6.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.004999375y'_n - 0.0003125y_n - 0.0003125y_n^3$$

$$L = -0.00124688K - 0.00124688K^3 + (1.5625 \times 10^{-11}) \cos(0.1t_n) + (2.49375 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.009975y'_n + (-0.00124688 - 0.00974063K^2)y_n - 0.00374063Ky_n^2 - 0.00124688y_n^3$$

4.9.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.97) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \left[\left(2 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + 20Y(k) + (k+1)Y(k+1) - \left(2 \left(\frac{0.5^k}{k!} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (4.101)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.98) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = -0.2, \quad Y(1) = 2 \quad (4.102)$$

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.101) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k \text{ จะได้ โดยที่ } N = 7 \text{ จะได้}$$

$$y(t) = -0.2 + 2t + 2.008t^2 - 7.4159999t^3 + 1.15366t^4 + 7.4176t^5 - 3.084418t^6 - 1.030333t^7 \quad (4.103)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.103) และแทนค่า $s = \frac{1}{t}$ จะได้

$$L[y(t)] = -0.2t + 2t^2 + 4.016t^3 - 44.496t^4 - 27.6876t^5 + 890.117t^6 - 2224.4t^7 - 5192.88t^8 \quad (4.104)$$

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.104) และแทนค่า $t = \frac{1}{s}$ จะได้

$$\left[\frac{3}{3} \right] = \frac{3.41878s + 1.65997s^2 - 0.2s^3}{11.5337 + 19.9875s + 1.70041s^2 + s^3} \quad (4.105)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.105) จะได้

$$y(t) = 0.12388e^{-0.5967t} - (0.16194 + 0.21725i)e^{(-0.55172 - 4.36173i)t} + ((-0.285673 - 0.95833i) + e^{(8.72346i)t}) \quad (4.106)$$

4.9.3 คำสั่งใน Mathematica

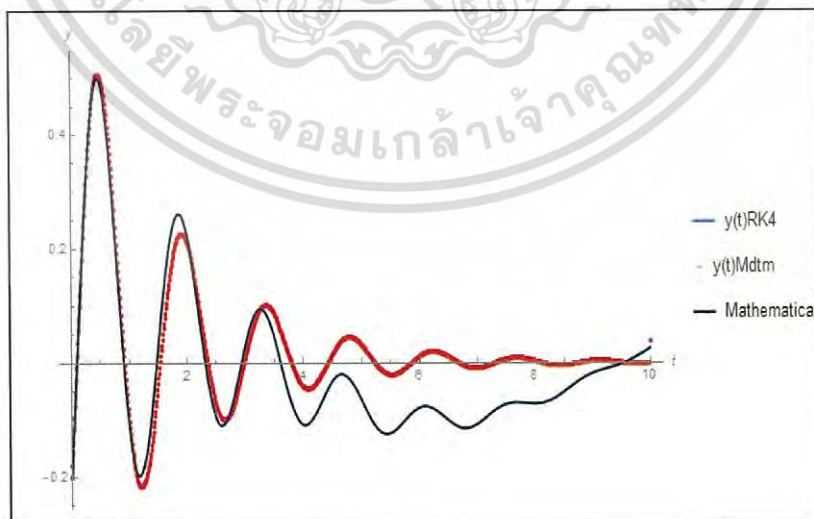
เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

$$y' = V$$

$$V' = -V - 20y - 2y^3 + 2\cos(0.5t)$$

รูปแบบคำสั่ง

```
sol1 = NDSolve[ { V'[t] == - 20y[t] - 2y[t]^3 - V[t] + 2Cos[0.5t] , y'[t] == V[t] ,
y[0] == - 0.2 , V[0] == 2 } , { y , V } , { t , 0 , 10 } ] ;
Plot[Evaluate[y[t] /. sol] , { t , 0 , 10 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```



รูปที่ 4.27 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตาและนิสตรอม วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.27 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนีสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 4.10

$$\text{กำหนดให้ } y'' + y' + 20y + 2y^3 = 0.05 \sin 0.1t \quad (4.107)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = -0.2, \quad y'(0) = 2 \quad (4.108)$$

4.10.1 วิธีรุงเง-คุดตา และนีสตรอม

$$\text{จัดรูปสมการที่ (4.107) จะได้ว่า } f(t, y, y') = -y' - 20y - 2y^3 + 0.05 \sin(0.1t) \quad (4.109)$$

$$\text{กำหนดให้ } h = 0.1$$

จากสูตรวิธีรุงเง-คุดตาและนีสตรอม

$$y_{n+1} = -0.000832K - 0.0008322K^3 + (8.31 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + (1.664 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.009975y'_n + (0.998752 - 0.00249688K^2)y_n - 0.00249688Ky_n^2 - 0.124377y_n^3 \quad (4.110)$$

โดยที่

$$K = (6.25 \times 10^{-7}) \cos(0.1t_n) + 0.004999375y'_n - 0.0003125y_n - 0.0003125y_n^3$$

$$L = -0.00124688K - 0.00124688K^3 + (1.5625 \times 10^{-11}) \cos(0.1t_n) + (2.49375 \times 10^{-6}) \cos(0.1(0.005 + t_n)) + 0.009975y'_n + (-0.00124688 - 0.00974063K^2)y_n - 0.00374063Ky_n^2 - 0.00124688y_n^3$$

4.10.2 วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.107) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \times \left[\left(2 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \right) + 20Y(k) + (k+1)Y(k+1) - \left(0.05 \left(\frac{0.1^k}{k!} \right) \sin \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right) \right] \quad (4.111)$$

ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการที่ (4.108) โดยใช้ทฤษฎีบทของการแปลงเชิงอนุพันธ์จะได้

$$Y(0) = -0.2, \quad Y(1) = 2 \quad (4.112)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า k ลงในสมการที่ (4.108) เพื่อหา $Y(k)$ และ แทนค่า $Y(1)$ ถึง $Y(7)$ ลงในสมการ

$$y(t) = \sum_{k=0}^N Y(k)t^k \text{ จะได้ โดยที่ } N = 7 \text{ จะได้}$$

$$y(t) = -0.2 + 2t + 1.008t^2 - 7.08183t^3 + 0.470298t^4 + 6.51468t^5 - 3.30192t^6 - 0.734543t^7 \quad (4.113)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ (4.113) และแทนค่า $s = \frac{1}{t}$ จะได้

$$L[y(t)] = -0.2t + 2t^2 + 2.016t^3 - 42.491t^4 + 11.2872t^5 + 781.762t^6 - 2377.38t^7 + 3702.1t^8 \quad (4.114)$$

ใช้การประมาณปาดกับสมการที่ (4.114) และแทนค่า $t = \frac{1}{s}$ จะได้

$$\left[\frac{3}{3} \right] = \frac{11.517s + 0.524492s^2 - 0.2s^3}{124.615s + 26.2705s^2 + 7.37754s^3 + s^4} \quad (4.115)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับสมการที่ (4.115) จะได้

$$y(t) = (-0.10023 - 0.21197i)e^{(-0.49633 - 4.48226i)t} ((-0.63455 - 0.77288i) + e^{(8.96453i)t}) + (0.000226 - 0.000049i)e^{(-2.02375 - 12.65412i)t} ((0.91036 + 0.41382i) + e^{(25.30825i)t}) \quad (4.116)$$

4.10.3 คำสั่งใน Mathematica

เขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการ โดยกำหนดให้ $y = V$ และ $V = y'$ ได้ดังนี้

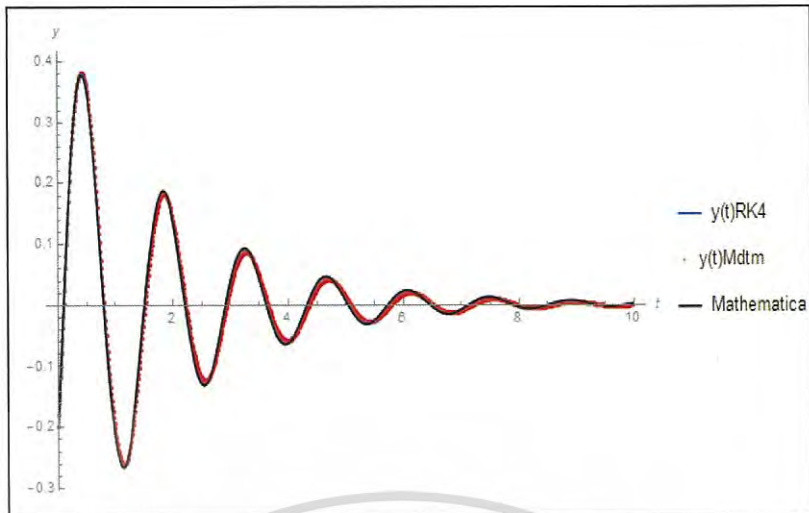
$$\begin{aligned} y' &= V \\ V' &= -V - 20y - 2y^3 + 0.05 \sin(0.1t) \end{aligned}$$

รูปแบบคำสั่ง

```
sol1 = NDSolve[ { V'[t] == - 20y[t] - 2y[t]^3 - V[t] + 0.05Sin[0.1t] , y'[t] == V[t] ,
y[0] == - 0.2 , V[0] == 2 } , { y , V } , { t , 0 , 10 } ] ;
```

```
Plot[Evaluate[y[t]/.sol] , { t , 0 , 10 } , PlotStyle -> Black , PlotRange -> All ,
PlotLegends -> { "Mathematica" } , AxesLabel -> { t , y } ]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.28 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตาและนี้สตรอม วิธีปรับปรุง การแปลงเชิงอนุพันธ์ และคำสั่งใน Mathematica ของตัวอย่างที่ 4.10

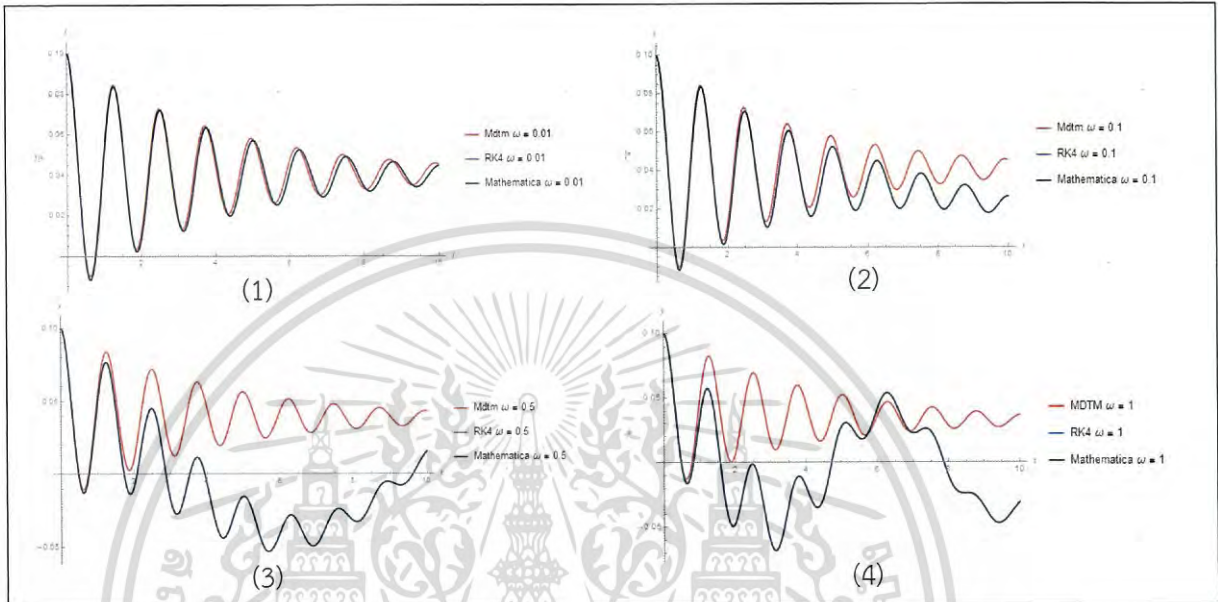
จากรูปที่ 4.28 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุตตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.11

$$\text{กำหนดให้ } y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \cos \omega t \quad (4.117)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0.1, y'(0) = 0 \quad (4.118)$$



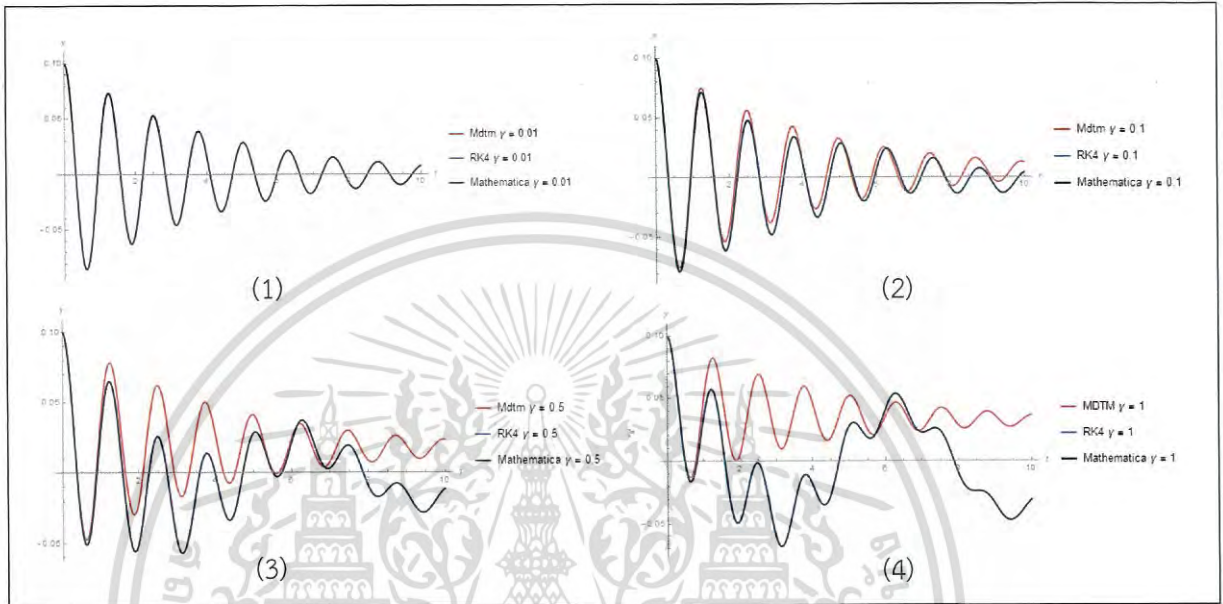
รูปที่ 4.29 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม คำสั่งใน Mathematica และ วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ เมื่อกำหนดให้ค่าของขนาดจากแรงภายนอกคงที่ ($\gamma = 1$)

จากรูปที่ 4.29 จะเห็นว่าเมื่อขนาดของแรงภายนอก (γ) มีค่าน้อย ๆ กราฟจากทั้งสามวิธี จะใกล้เคียงกัน ดังรูป (1) และ (2) และเมื่อค่อย ๆ เพิ่มค่าขนาดของแรงภายนอก (γ) ให้มีค่ามากขึ้น กราฟจากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์จะแตกต่างจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica ดังรูป (3) และ (4)

ตัวอย่างที่ 4.12

$$\text{กำหนดให้ } y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \gamma \cos t \quad (4.119)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0.1, y'(0) = 0 \quad (4.120)$$



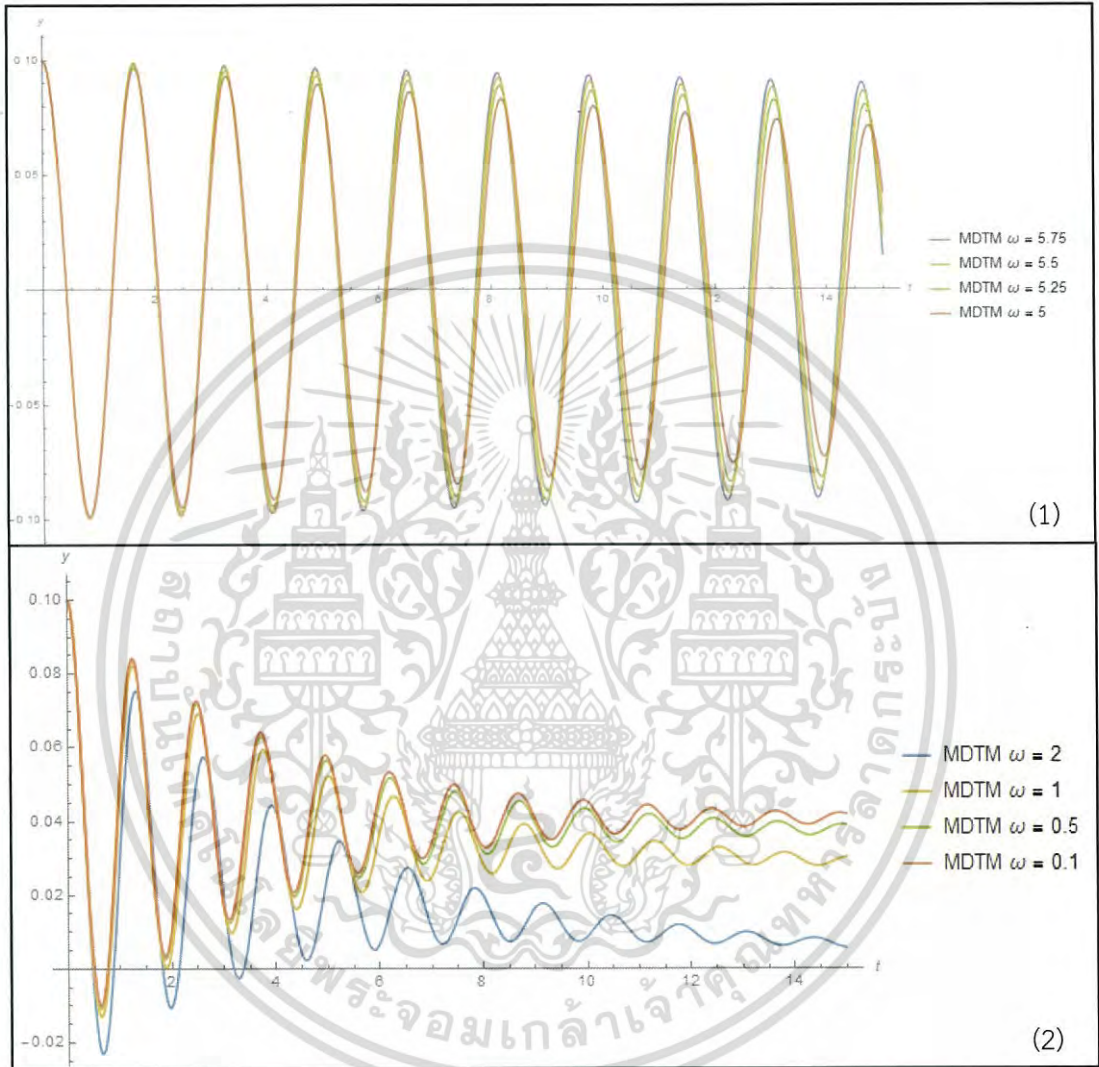
รูปที่ 4.30 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีรุงเง-คุตตา และนี้สตรอม คำสั่งใน Mathematica และ วิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ เมื่อกำหนดให้ค่าของความถี่จากแรงภายนอกคงที่ ($\omega = 1$)

จากรูปที่ 4.30 จะเห็นว่าเมื่อความถี่ของแรงภายนอก (ω) มีค่าน้อย ๆ กราฟจากวิธีทั้งสามจะใกล้เคียงกัน ดังรูป (1) และ (2) และเมื่อค่อย ๆ เพิ่มค่าความถี่ของแรงภายนอก (ω) ให้มีค่ามากขึ้น กราฟจากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์จะแตกต่างจากวิธีรุงเง-คุตตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica ดังรูป (3) และ (4)

ตัวอย่างที่ 4.13

$$\text{กำหนดให้ } y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \cos \omega t \quad (4.121)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0.1, y'(0) = 0 \quad (4.122)$$



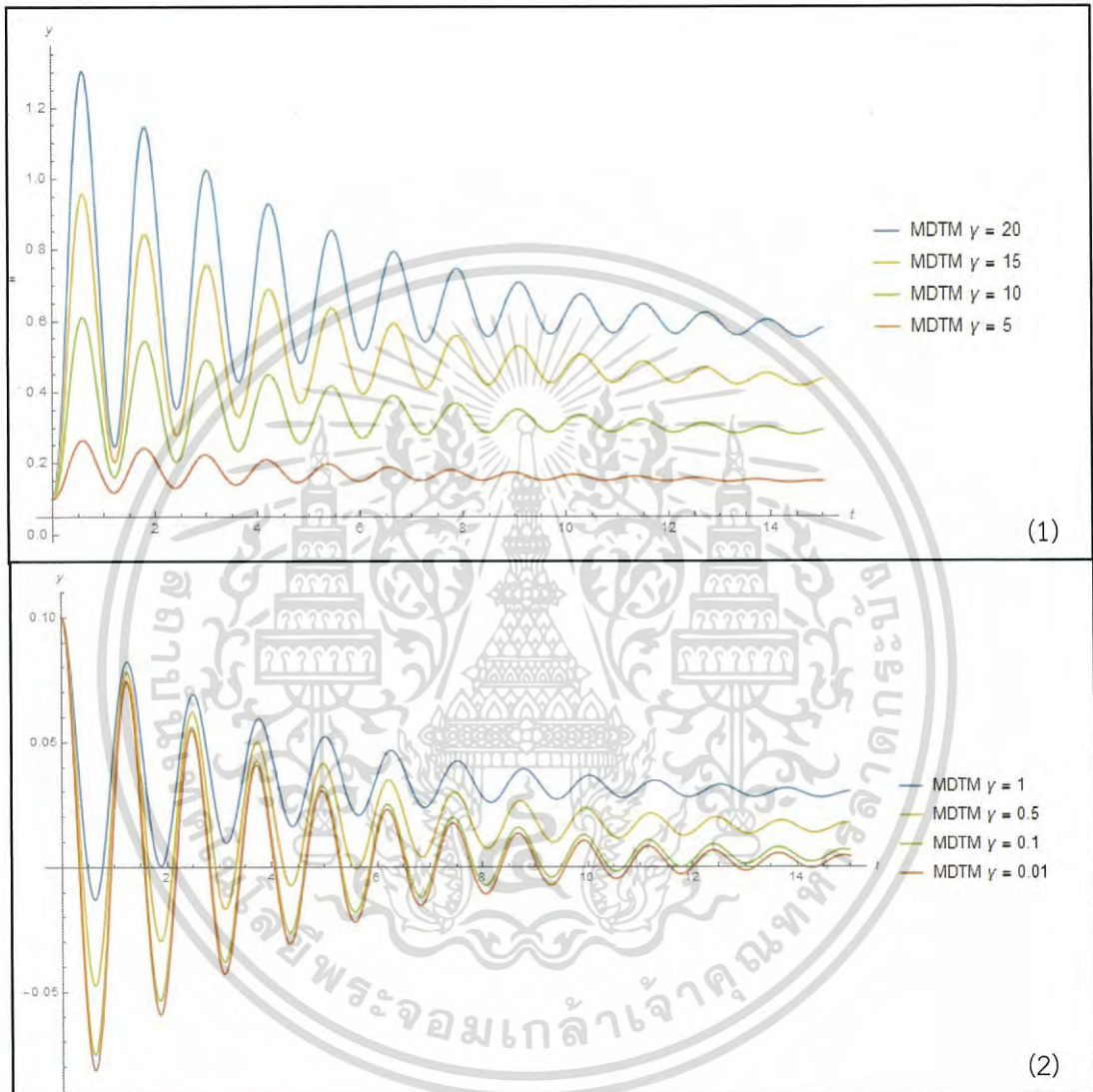
รูปที่ 4.31 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ เมื่อกำหนดให้ค่าของขนาดจากแรงภายนอกคงที่ ($\gamma = 1$)

จากรูปที่ 4.31 จะเห็นว่าเมื่อเพิ่มความถี่ของแรงภายนอก (ω) ในทิศทางเดียวกันกับการสั่นเดิม กราฟจะมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเนื่องจากเกิดการเสริมแรงกันดังรูปที่ (1) และเมื่อเพิ่มความถี่ของแรงภายนอก (ω) ในทิศทางที่สวนทางกับการสั่นเดิมกราฟจะมีแอมพลิจูดลดลงเนื่องจากเกิดการหักล้างแรงกันดังรูปที่ (2)

ตัวอย่างที่ 4.14

$$\text{กำหนดให้ } y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \gamma \cos t \quad (4.123)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น } y(0) = 0.1, y'(0) = 0 \quad (4.124)$$



รูปที่ 4.32 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ เมื่อกำหนดให้ค่าของความถี่จากแรงภายนอกคงที่ ($\omega = 1$)

จากรูปที่ 4.32 จะเห็นว่าเมื่อเพิ่มขนาดของแอมพลิจูดของแรงภายนอก (γ) ในทิศทางเดียวกันกับการสั่นเดิม กราฟจะมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเนื่องจากเกิดการเสริมแรงกันดังรูปที่ (1) และเมื่อเพิ่มขนาดของแอมพลิจูดของแรงภายนอก (γ) ในทิศทางที่สวนทางกับการสั่นเดิมกราฟจะมีแอมพลิจูดลดลงเนื่องจากเกิดการหักล้างแรงกันดังรูปที่ (2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ตารางที่ 5.1 แสดงสมการและเงื่อนไขเริ่มต้นของแต่ละตัวอย่าง

ตัวอย่างที่	สมการ	เงื่อนไขเริ่มต้น
4.1	$y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.05 \cos 0.1t$	$y(0) = 1, y'(0) = 0$
4.2	$y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.05 \cos 0.1t$	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
4.3	$y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.05 \cos t$	$y(0) = 1, y'(0) = 0$
4.4	$y'' + y' + y + 0.3y^3 = 0.5 \cos 0.1t$	$y(0) = 1, y'(0) = 0$
4.5	$y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = 0.05 \cos 0.1t$	$y(0) = 0.1, y'(0) = 0$
4.6	$y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = 0.5 \cos t$	$y(0) = 0.1, y'(0) = 0$
4.7	$y'' + 2y' + y + 25y^3 = 0.05 \cos 0.1t$	$y(0) = 0.1, y'(0) = 0$
4.8	$y'' + y' + 20y + 2y^3 = 0.05 \cos 0.1t$	$y(0) = -0.2, y'(0) = 2$
4.9	$y'' + y' + 20y + 2y^3 = 2 \cos 0.5t$	$y(0) = -0.2, y'(0) = 2$
4.10	$y'' + y' + 20y + 2y^3 = 0.05 \sin 0.1t$	$y(0) = -0.2, y'(0) = 2$
4.11	$y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \cos \omega t$	$y(0) = 0.1, y'(0) = 0$
4.12	$y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \gamma \cos t$	$y(0) = 0.1, y'(0) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.1 (ต่อ) แสดงสมการและเงื่อนไขเริ่มต้นของแต่ละตัวอย่าง

ตัวอย่างที่	สมการ	เงื่อนไขเริ่มต้น
4.13	$y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \cos \omega t$ เมื่อ $\omega = 5.75, 5.5, 5.25, 5, 2, 1, 0.5, 0.1$	$y(0) = 0.1, y'(0) = 0$
4.14	$y'' + 0.5y' + 25y + 25y^3 = \gamma \cos t$ เมื่อ $\gamma = 20, 15, 10, 5, 1, 0.5, 0.1, 0.01$	$y(0) = 0.1, y'(0) = 0$

จากตัวอย่างที่ 4.1 จากรูปที่ 4.7 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากับกราฟจึงทับกันสนิท และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.2 ทำการเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นจากตัวอย่างที่ 4.1 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากับ และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.3 ทำการเพิ่มค่าของความถี่จากแรงภายนอก ($\omega = 1$) จากตัวอย่างที่ 4.1 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากับ และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.4 ทำการเพิ่มขนาดของแรงภายนอกที่มากกระทำ ($\gamma = 0.5$) จากตัวอย่างที่ 4.1 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากับ และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.5 ทำการเปลี่ยนสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ในสมการและเงื่อนไขเริ่มต้น จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากับ และใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.6 ทำการเพิ่มขนาดของแรงภายนอกที่มากกระทำ ($\gamma = 0.5$) และเพิ่มค่าของความถี่จากแรงภายนอก ($\omega = 1$) จากตัวอย่างที่ 4.5 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนิสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากับ และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 4.7 ทำการเปลี่ยนสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ในสมการและกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น เช่นเดียวกับ ตัวอย่างที่ 4.6 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.8 ทำการเปลี่ยนสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ในสมการและเงื่อนไขเริ่มต้น จะเห็นว่า กราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และใกล้เคียงกับ ผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.9 ทำการเพิ่มขนาดของแรงภายนอกที่มากกระทำ ($\gamma = 0.5$) และ เพิ่มค่าของ ความถี่จากแรงภายนอก ($\omega = 2$) จากตัวอย่างที่ 4.8 จะเห็นว่ากราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และแตกต่างกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลง เชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.10 เปลี่ยนค่าของแรงภายนอกเป็นฟังก์ชันไซน์ จากตัวอย่างที่ 4.8 จะเห็นว่า กราฟจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน และใกล้เคียงกับ ผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากตัวอย่างที่ 4.11 จะเห็นว่าเมื่อขนาดของแรงภายนอก (γ) มีค่าน้อยๆ กราฟจากทั้งสามวิธี จะใกล้เคียงกัน และเมื่อค่อยๆ เพิ่มค่าขนาดของแรงภายนอก (γ) ให้มีค่ามากขึ้นกราฟจากวิธี ปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์จะแตกต่างจากวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica

จากตัวอย่างที่ 4.12 จะเห็นว่าเมื่อเรากำหนดให้ค่าของความถี่จากแรงภายนอก (ω) คงที่ และ เปลี่ยนค่าขนาดจากแรงภายนอก (γ) ให้ค่อยๆ เพิ่มขึ้น กราฟจะมีลักษณะค่อยๆ แตกต่างกัน นั่นคือ เมื่อขนาดจากแรงภายนอก (γ) มีค่าน้อยๆ กราฟที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์จะใกล้เคียง กับวิธีรุงเง-คุดตา และนี้สตรอม และคำสั่งใน Mathematica

จากตัวอย่างที่ 4.13 จะเห็นว่าเมื่อเพิ่มความถี่ของแรงภายนอก (ω) ในทิศทางเดียวกันกับการ สั่นเดิม กราฟจะมีแอมพิจูดเพิ่มขึ้นเนื่องจากเกิดการเสริมแรงกัน และเมื่อเพิ่มความถี่ของ แรงภายนอก (ω) ในทิศทางที่สวนทางกับการสั่นเดิมกราฟจะมีแอมพิจูดลดลงเนื่องจากเกิดการหักล้าง แรงกันดังรูปที่

จากตัวอย่างที่ 4.14 จะเห็นว่าเมื่อเพิ่มขนาดของแอมพิจูดของแรงภายนอก (γ) ในทิศทาง เดียวกันกับการสั่นเดิม กราฟจะมีแอมพิจูดเพิ่มขึ้นเนื่องจากเกิดการเสริมแรงกัน และเมื่อเพิ่มขนาด ของแอมพิจูดของแรงภายนอก (γ) ในทิศทางที่สวนทางกับการสั่นเดิมกราฟจะมีแอมพิจูดลดลง เนื่องจากเกิดการหักล้างแรงกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าผลเฉลยโดยประมาณของสมการดัดพิจจากวิธีรุงเง-คุดตาและ นีสตรอม และคำสั่งใน Mathematica มีค่าเท่ากัน ทำให้ผู้วิจัยคาดว่า Mathematica ใช้วิธีการของ รุงเง-คุดตา และ นีสตรอม ในการประมาณค่าผลเฉลย ผลเฉลยที่ได้จาก 2 วิธีดังกล่าวมีค่าใกล้เคียงกับ ผลเฉลยที่ได้จากวิธีปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ ในกรณีที่ค่าของขนาด (γ) และ ความถี่ (ω) จากแรงภายนอกมีค่าน้อยๆ และแตกต่างกันในกรณีที่ค่าของขนาด (γ) และ ความถี่ (ω) จากแรงภายนอกมีค่ามาก ดังนั้นอาจสรุปได้ว่าการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้เป็นอีกหนึ่งวิธี ทางเลือกที่ใช้ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการการสั่นดัดพิจไม่เชิงเส้นได้

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาที่เราได้ดำเนินการแล้วนั้น เราขอสรุปปัญหาที่เกิดขึ้นและข้อเสนอแนะสำหรับผู้ ที่สนใจจะศึกษาต่อในงานนี้ ดังต่อไปนี้

1. วิธีการปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์นอกจากจะใช้กับปัญหาของสมการดัดพิจ แล้วยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาของสมการการสั่นไม่เชิงเส้นในรูปแบบอื่นๆได้
2. ควรศึกษาหาหลักการในการเปลี่ยนแปลงค่าของขนาด (γ) ความถี่ (ω) จากแรงภายนอก และเงื่อนไขเริ่มต้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] A.H. Nayfeh. 1973. *Perturbation Methods*. New York : John Wiley.
- [2] A.H. Nayfeh, D.T. Mook. 1979. *Nonlinear Oscillations*. New York : John Wiley.
- [3] A.H. Nayfeh. 1981. *Introduction to Perturbation Methods*. New York : John Wiley.
- [4] N. Krylov, and N. Bogolioubov. 1943. *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Princeton: Princeton University Press.
- [5] N.N. Bogolioubov, Y.A. Mitropolsky. 1961. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York : Gordon and Breach.
- [6] Shaher Momani. and Vedat Suat Erturk. 2008. "Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method." *Computer and Mathematics with Application* 55. : 833-842.
- [7] S. Nourazar. and A. Mirzabeigy. 2013. "Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method." *Scientia Iranica*. : 364-268.
- [8] G.A. Baker. 1975. *Essentials of Pad e Approximants*. London : Academic Press.
- [9] อธิวัฒน์ แสงเพชร, สุวัฒน์ กุลธนปรีดา. 2009. "การซิงโครไนเซชันของการสั่นแบบ Duffing-Holmes ด้วยโครงข่ายประสาทเทียม Synchronization of Duffing-Holmes Oscillators using Neural Networks." กรุงเทพฯ : คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.
- [10] Tonya De George. and Anne Marie Marshall. 2009. "The Duffing Equation: A Nonlinear Differential Equation."
- [11] Abolfazl Jalivand. and Hadi Fotoohabadi. 2011. "The Application of Duffing Oscillator in Weak Signal Detection." *Electronics and Communications*. 9(1) : 1-6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง (ต่อ)

- [12] ดำรง ทิพย์โยธา. 2538. คณิตศาสตร์ชั้นสูง. ภาควิชาคณิตศาสตร์ : คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [13] ศรีบุตตร แววจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. 2543. สมการเชิงอนุพันธ์2 และการแปลงลาปลาซ. กรุงเทพฯ: บริษัท วงตะวัน จำกัด.
- [14] สมชาย สุทธิขาว. 2542. การแปลงฟูรีเยร์และลาปลาซ. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
- [15] กิตติวุฒิ จินนະบุตร. 2553. การแก้สมการเชิงอนุพันธ์. [Online]. Available : http://www.rmuti.ac.th/user/kittiwut/company_files/numerical_pdf/num1_47U5.pdf

