ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

POINT SPECTRUM MAPPING THEOREM FOR LINEAR FRACTIONAL FUNCTION

กรวีร์ วงศ์สุวรรณ
ไพรัตน์ ศรีสวัสดิ์
อภิสิทธิ์ ถนอมศักดิ์กุล

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

POINT SPECTRUM MAPPING THEOREM FOR LINEAR FRACTIONAL FUNCTION

กรวีร์ วงศ์สุวรรณ
ไพรัตน์ ศรีสวัสดิ์
อภิสิทธิ์ ถนอมศักดิ์กุล

b 00265913
TB00193

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

POINT SPECTRUM MAPPING THEOREM FOR LINEAR FRACTIONAL FUNCTION

KORAWEE WONGSUWAN
PAIRAT SRISAWAT
APISIT THANOMSAKKUN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น Point Spectrum Mapping Theorem for Linear Fractional Function
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกรวีร์ วงศ์สุวรรณ รหัสนักศึกษา 56050005 นายไพรัตน์ ศรีสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 56050099 นายอภิสิทธิ์ ถนอมศักดิ์กุล รหัสนักศึกษา 56050173
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.พุทธพร วานิชกร

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.จินดา ไชยช่วย ประธานกรรมการ	
ดร.กัมปนาท นามงาม กรรมการ	
ดร.พุทธพร วานิชกร กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น
Point Spectrum Mapping Theorem for Linear Fractional Function

ชื่อนักศึกษา นางสาวกรวีร์ วงศ์สุวรรณ รหัสนักศึกษา 56050005
นายไพรัตน์ ศรีสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 56050099
นายอภิสิทธิ์ ถนอมศักดิ์กุล รหัสนักศึกษา 56050173

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
คณะ วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา 2559
อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.พุทธพร วานิชกร

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ศึกษาเกี่ยวกับการส่งสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้นสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น โดยมีพื้นฐานการศึกษาจากการส่งสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้นสำหรับฟังก์ชันผกผัน ซึ่งใช้ความรู้จากเรื่องตัวดำเนินการเชิงเส้น ตัวผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น ค่าลักษณะเฉพาะ สเปกตรัมจุด และฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น ผลจากการศึกษาพบว่า สเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นของตัวดำเนินการเชิงเส้นจะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้นโดยเศษส่วนเชิงเส้น

คำสำคัญ : การส่ง ตัวดำเนินการเชิงเส้น เศษส่วนเชิงเส้น สเปกตรัมจุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Point Spectrum Mapping Theorem for Linear Fractional Function
Students	Miss Korawee Wongsuwan Student ID 56050005
	Mr. Pairat Srisawat Student ID 56050099
	Mr. Apisit Thanomsakkun Student ID 56050173
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Dr.Buddhaporn Vanishkorn

Abstract

This special problem studies about point spectrum mapping of linear operator for linear fractional function by using basic theorem of point spectrum mapping of linear operator for inverse function that use knowledge from linear operator, inverse of linear operator, eigenvalue, point spectrum and linear fractional function. The special problem result shows that the point spectrum for linear fractional of linear operator is equal to the image of point spectrum of linear operator by linear fractional.

Keyword : mapping, linear operator, linear fractional, point spectrum

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำหัวข้อปัญหาพิเศษ เรื่อง ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น เนื่องมาจากความกรุณาและความร่วมมือของทุกๆ ท่าน คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ ดร.พุทธพร วานิชกร อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษที่คอยให้คำปรึกษาดูแลอย่างใกล้ชิดและให้ความช่วยเหลือแนะนำที่ดีในการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องในการทำปัญหาพิเศษ และขอขอบพระคุณกรรมการสอบปัญหาพิเศษ คือ ดร.กัมปนาท นามงาม และ อ.จินดา ไชยช่วย ที่ให้ข้อคิดเห็นและคำแนะนำช่วยเหลือในการทำปัญหาพิเศษลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบคุณ คุณอุดร บุญธรรม เจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ให้ความสะดวกใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษนี้

ท้ายที่สุดทางคณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดา - มารดาที่ให้ได้รับการศึกษา ตลอดจนคอยเลี้ยงดู อบรมสั่งสอน และเป็นกำลังใจเป็นแรงผลักดันในการทำปัญหาพิเศษนี้ให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี รวมถึงอาจารย์ทุกท่านที่ประสาทวิชาความรู้ในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ และบุคคลอื่นๆ ที่ไม่ได้กล่าวมา จนกระทั่งปัญหาพิเศษสัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ ทางคณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

นางสาวกรวีร์ วงศ์สุวรรณ
นายไพรัตน์ ศรีสวัสดิ์
นายอภิสิทธิ์ ถนอมศักดิ์กุล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข
กิตติกรรมประกาศ ..... ค
สารบัญ ..... ง
คำย่อ/สัญลักษณ์ ..... ฉ
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย 1
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย 1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 1
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน 1
1.6 ระยะเวลาดำเนินงาน 2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 3
2.1 ฟิลด์ 3
2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ 3
2.3 ปริภูมิเมตริก 4
2.4 ปริภูมินอร์มและปริภูมิบานาค 6
2.5 ปริภูมิย่อยของปริภูมิบานาค 6
2.6 ปริภูมิผลคูณภายในและปริภูมิฮิลเบิร์ต 7
2.7 ตัวดำเนินการเชิงเส้น 8
2.8 ตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต 12
2.9 ตัวดำเนินการผกผัน 12
2.10 การส่งแบบเปิด 13
2.11 ค่าลักษณะเฉพาะ 13
2.12 สเปกตรัมจุด 13
2.13 ฟังก์ชันเชิงเส้น 15
2.14 ฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น 15
2.15 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย 17
3.1 ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น 17
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล 23
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ 24
5.1 สรุปผลการวิจัย 24
5.2 ข้อเสนอแนะ 24
เอกสารอ้างอิง 25

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำย่อ/สัญลักษณ์

คำย่อ/สัญลักษณ์	คำอธิบาย
$B(X,X)$	เซตของตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขตส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง จาก X ไปทั่วถึง X
$\mathbb{C}$	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$D(T)$	โดเมนของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$d(x,y)$	ฟังก์ชันระยะทางระหว่าง x และ y
F	ฟิลด์
$\hat{f}(\Pi_0(T))$	ภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยเศษส่วนเชิงเส้น $\hat{f}$
$N(T)$	นัลสเปซของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$R(T)$	เรนจ์ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
T	ตัวดำเนินการเชิงเส้น T
T^{-1}	ตัวผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\|x\|$	นอร์มของ x
(X,d)	ปริภูมิเมตริก
$\langle x,y\rangle$	ผลคูณภายในของ x และ y
$\sigma_0(T)$	สเปกตรัมต่อเนื่องของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\sigma_r(T)$	สเปกตรัมเรซิดิวซ์ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\Pi_0(T)$	สเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\Pi_0(f(T))$	สเปกตรัมจุดของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในทางคณิตศาสตร์ค่าลักษณะเฉพาะมักจะถูกนำมาใช้ในบริบทของพีชคณิตเชิงเส้นหรือทฤษฎีเมทริกซ์ เซตของค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T จะเรียกว่า สเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T เขียนแทนด้วย $\Pi_0(T)$ ซึ่งในปัญหาพิเศษนี้จะใช้ความรู้ในเรื่องของค่าลักษณะเฉพาะมาใช้ศึกษาการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาถึงขั้นตอน กระบวนการซึ่งนำไปสู่การหาสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นและภาพของสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

1.2.2 เพื่อศึกษาการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ศึกษาทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้นสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้ความรู้เกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค

1.4.2 ได้ความรู้เกี่ยวกับสเปกตรัมจุด

1.4.3 สามารถนำความรู้เกี่ยวกับสเปกตรัมจุดไปศึกษาเกี่ยวกับสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้นสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

1.4.4 สามารถนำความรู้ที่ได้ไปศึกษาต่อเกี่ยวกับสเปกตรัมได้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงเส้น

1.5.2 ศึกษาหาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าลักษณะเฉพาะสำหรับเวกเตอร์ที่มีมิติอนันต์

1.5.3 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสเปกตรัมจุด

1.5.4 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาค

1.5.5 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

1.5.6 พิสูจน์ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5.7 ตรวจสอบและแก้ไขการพิสูจน์

1.5.8 ประเมินและสรุปผล

1.5.9 จัดทำเล่มปัญหาพิเศษพร้อมนำเสนอ

1.6 ระยะเวลาดำเนินงาน

การดำเนินการ	ระยะเวลา									
	2559					2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.6.1 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงเส้น		←	—	→						
1.6.2 ศึกษาหาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าลักษณะเฉพาะสำหรับเวกเตอร์ที่มีมิติอนันต์		←	—	→						
1.6.3 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสเปกตรัมจุด		←	—	→						
1.6.4 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาค		←	—	→						
1.6.5 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น			←	—	→					
1.6.6 พิสูจน์ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น				←	—	—	→			
1.6.7 ตรวจสอบและแก้ไขการพิสูจน์							←	—	→	
1.6.8 ประเมินและสรุปผล								←	—	→
1.6.9 จัดทำเล่มปัญหาพิเศษพร้อมนำเสนอ		←	—	—	→				←	—

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาพิเศษฉบับนี้กล่าวถึงทฤษฎีการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น โดยใช้คุณสมบัติของทฤษฎีค่าลักษณะเฉพาะสำหรับเวกเตอร์ที่มีมิติอนันต์ สเปกตรัมจุดบนปริภูมิฮิลเบิร์ต ฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น และทฤษฎีตัวดำเนินการเชิงเส้น

2.1 ฟิลด์ (Field)

บทนิยาม 2.1.1 ฟิลด์ (Field) คือ เซต F ประกอบกับการดำเนินการสองชนิดระหว่างสมาชิกในเซตนั้น โดยที่การดำเนินการชนิดแรกเปรียบเทียบได้กับ “การบวก” และการดำเนินการอย่างที่สองเปรียบเทียบได้กับ “การคูณ” โดยมีสมบัติต่อไปนี้

1. เซต F ประกอบกับการบวกเป็นอาบีเลียนกรุป
2. เซต F (ไม่รวมเอกลักษณ์การบวก) ประกอบกับการคูณเป็นอาบีเลียนกรุป
3. การบวกและการคูณเกี่ยวข้องกันโดยกฎการแจกแจง กล่าวคือ สำหรับสมาชิก a,b และ c ใดๆใน F จะได้ว่า $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ เมื่อ $*$ แทนเครื่องหมายคูณ และ $+$ แทนเครื่องหมายบวก (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 2)

2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)

บทนิยาม 2.2.1 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space) เหนือฟิลด์ $\mathbb{C}$ คือ โครงสร้างทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยเซต V กับการดำเนินการสองอย่างดังนี้

1. การบวก $+ : V\times V\to V$ นั่นคือ การบวกเป็นฟังก์ชันจาก $V\times V$ ไปยัง V ซึ่งทำให้สำหรับแต่ละ $x,y\in V$ จะได้ว่ามี $x+y\in V$ เพียงหนึ่งเดียว ซึ่งการบวกต้องสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1.1 การเปลี่ยนกลุ่ม : สำหรับแต่ละ $x,y,z\in V$ จะได้ว่า $(x+y)+z=x+(y+z)$

1.2 การมีเอกลักษณ์ : มี $s\in V$ ที่ทำให้ $x+s=x=s+x$ สำหรับทุก $x\in V$ เรียก s ว่าเอกลักษณ์การบวกใน V และใช้สัญลักษณ์ 0 แทน s

1.3 การมีตัวผกผัน : สำหรับแต่ละ $x\in V$ จะมี $t\in V$ ที่ทำให้ $x+t=0=t+x$ เรียก t ว่าตัวผกผันการบวกของ x และใช้สัญลักษณ์ $-x$ แทน t

1.4 การสลับที่ : สำหรับแต่ละ $x,y\in V$ จะได้ว่า $x+y=y+x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. การคูณด้วยสเกลาร์ $\bullet : \mathbb{C}\times V \to V$ นั่นคือ การคูณด้วยสเกลาร์เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{C}\times V$ ไปยัง V ซึ่งทำให้สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$ จะได้ว่ามี $k \cdot v \in V$ เพียงหนึ่งเดียว ซึ่งการคูณด้วยสเกลาร์ต้องสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

2.1 สำหรับแต่ละ $x \in V$ จะได้ว่า $1 \cdot x = x$

2.2 สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$ จะได้ว่า $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

3. การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์มีความสัมพันธ์กันดังนี้

3.1 สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$ จะได้ว่า $(\alpha+\beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$

3.2 สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathbb{C}$ และ $x, y \in V$ จะได้ว่า $\alpha \cdot (x+y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $k \cdot x$ ด้วย kx สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$ (ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม, 2558, น. 3)

ปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของ $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของ $\mathbb{R}$ จะเรียก V ว่า ปริภูมิเวกเตอร์จริง (real vector space) และถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของ $\mathbb{C}$ จะเรียก V ว่า ปริภูมิเวกเตอร์เชิงซ้อน (complex vector space) (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 3)

2.3 ปริภูมิเมตริก (Metric space)

บทนิยาม 2.3.1 ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกฟังก์ชัน d ว่า ฟังก์ชันระยะทาง (distance function) หรือ เมตริก (metric) บน X ถ้าสำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (คุณสมบัติการสมมาตร)
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (อสมการสามเหลี่ยม)

เรียกคู่อันดับ (X,d) ว่า ปริภูมิเมตริก และเรียก $d(x,y)$ ว่า ระยะทางระหว่าง x และ y ในบางครั้งเราจะเขียนแทนปริภูมิเมตริก (X,d) ง่ายๆด้วย X ถ้าไม่ทำให้เกิดความสับสนและเป็นที่เข้าใจว่ามีเมตริก d บน X ซึ่งเป็นที่เข้าใจตรงกันแล้ว (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 8)

ตัวอย่าง 2.3.2 ปริภูมิยุคลิด (Euclidean space $\mathbb{R}^n$) เป็นปริภูมิเมตริกภายใต้เมตริกยุคลิด (Euclidean metric) ซึ่งนิยามโดย

$$d((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.3.3 ลำดับ (x_n) ในปริภูมิเมตริก (X,d) จะถูกกล่าวว่าเป็นลำดับที่ลู่เข้า (convergent sequence) ถ้ามี $x \in X$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$ จะเรียก x ว่าเป็น ลิมิต ของ (x_n) และกล่าวว่าลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ x (converges to x) และเขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ถ้าลำดับ (x_n) ไม่เป็นลำดับลู่เข้า จะเรียกลำดับ (x_n) ว่าลำดับลู่ออก (divergent sequence) (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 22)

บทนิยาม 2.3.4 ลำดับ (x_n) ในปริภูมิเมตริก (X,d) จะถูกกล่าวว่าเป็น ลำดับโคชี (Cauchy sequence) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ มีจำนวนนับ N_ε ซึ่ง $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ สำหรับทุกๆ $m,n \geq N_\varepsilon$ จะเรียกว่าปริภูมิเมตริก X ว่า ปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric space) ถ้าทุกๆลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้า (นั่นคือ มีลิมิตซึ่งเป็นสมาชิกของ X) (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 22)

ตัวอย่าง 2.3.5 ปริภูมิ $\mathbb{R}^n (n\geq 1)$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

พิสูจน์ ให้ (x^m) เมื่อ $x^m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},...,x_n^{(m)})$ เป็นลำดับโคชีใน $\mathbb{R}^n$ ต้องการแสดงว่า (x^m) เป็นลำดับลู่เข้าใน $\mathbb{R}^n$ เนื่องจาก (x^m) เป็นลำดับโคชีจะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนนับ N_ε ซึ่ง

$$d(x^m,x^r)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(m)}-x_k^{(r)})^2}<\varepsilon \quad \text{สำหรับทุกๆ } m,r\geq N_\varepsilon \qquad .....(2.1)$$

โดยการยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้ว่าสำหรับ $k=1,2,3,...,n$

$$(x_k^{(m)}-x_k^{(r)})^2<\varepsilon^2 \quad \text{สำหรับทุกๆ } m,r\geq N_\varepsilon$$

ดังนั้นจะได้ว่า สำหรับ $k=1,2,3,...,n$

$\left|x_k^{(m)}-x_k^{(r)}\right|<\varepsilon$ สำหรับทุกๆ $m,r\geq N_\varepsilon$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า ลำดับ $(x_k^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีใน $\mathbb{R}$ สำหรับทุก $k=1,2,3,...,n$ เนื่องจาก $\mathbb{R}$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ ดังนั้น แต่ละ $k=1,2,3,...,n$ จะมี $x_k\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} x_k^{(m)}=x_k$ ให้ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ต่อไปเราจะแสดงว่า (x^m) ลู่เข้าสู่ x เมื่อ $r\to\infty$ ใน (2.1) จะได้ว่า

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(m)}-x_k^{(r)})^2}<\varepsilon \quad \text{สำหรับทุกๆ } m,r\geq N_\varepsilon$$

นั่นคือ $d(x^m,x)\leq\varepsilon$ สำหรับทุกๆ $m\geq N_\varepsilon$ เพราะฉะนั้น (x^m) เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ x

ดังนั้น $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 ปริภูมินอร์ม (Norm space) และปริภูมิบานาค (Banach space)

บทนิยาม 2.4.1 ปริภูมินอร์ม X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งกำหนดนอร์มบนปริภูมิบานาคเป็นปริภูมินอร์มบริบูรณ์ (กำหนดโดยนอร์มบริบูรณ์ในเมตริก) ที่นอร์มบน ($\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$) ปริภูมิเวกเตอร์ X คือ ฟังก์ชันค่าจริงบน X ที่มี $x \in X$ กำหนดโดย $\|x\|$ (เรียกว่า นอร์มของ x) และมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (อสมการสามเหลี่ยม)

เมื่อ $x, y \in X$ และ $\alpha \in \mathbb{C}$

นอร์มบน X กำหนดเมตริก d บน X ซึ่งกำหนดโดย

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad (x, y \in X)$$

และเราเรียกเมตริก d ว่าเป็น เมตริกที่เกิดจากนอร์ม (metric induced by the norm) ปริภูมินอร์มจะกำหนดสัญลักษณ์โดย $(X, \|\cdot\|)$ หรือเขียนได้อีกแบบคือ X (Kreyszig, 1978, p. 58-59)

บทนิยาม 2.4.2 จะเรียกปริภูมินอร์ม $\left(X, \|\cdot\|\right)$ ว่าปริภูมิบานาค (Banach space) ถ้า X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ภายใต้เมตริกที่เกิดจากนอร์ม (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 47)

ตัวอย่าง 2.4.3 $\mathbb{R}^n$ และ $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมินอร์ม ที่นิยามโดย

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

จะได้เมตริก d ที่เกิดจากนอร์มที่นิยามข้างบนเป็น

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

เมื่อ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ และ $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

เราจะทราบดีอยู่แล้วว่า $\mathbb{R}^n$ และ $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

ดังนั้น $\mathbb{R}^n$ และ $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิบานาค

2.5 ปริภูมิย่อยของปริภูมิบานาค (Subspace of a Banach space)

ทฤษฎีบท 2.5.1 ปริภูมิย่อย Y ของปริภูมิบานาค X จะบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ เซต Y เป็นเซตปิดใน X (Kreyszig, 1978, p. 67)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6 ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner product space) และปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space)

บทนิยาม 2.6.1 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน ผลคูณภายในบน X (Inner product on X) คือฟังก์ชันจาก $X \times X$ ไปยัง $\mathbb{C}$ นั่นคือ สำหรับแต่ละคู่ของ x และ y เราเขียนแทนด้วย $\langle x, y \rangle$ และจะเรียกมันว่าผลคูณภายในของ x และ y โดยที่ฟังก์ชันดังกล่าวมีสมบัติต่อไปนี้

สำหรับแต่ละเวกเตอร์ x, y, z ใน X และสเกลาร์ α

1. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ และ $\langle x, x \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

เราจะเรียก X ว่าเป็น ปริภูมิผลคูณภายใน ถ้ามีผลคูณภายในนิยามบน X

(สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 118)

ตัวอย่าง 2.6.2

1. ปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในโดยมีผลคูณภายในนิยามดังนี้

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

จะเห็นว่า $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

2. ปริภูมิยูนิแทรี (Unitary space) $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่ผลคูณภายในนิยามโดย

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + ... + x_n \overline{y_n}$$

(เมื่อ $\overline{y}$ คือสังยุคของ y)

ทฤษฎีบท 2.6.3 ถ้า X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน จะได้ว่าฟังก์ชัน $\|\cdot\|$ ที่นิยาม $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ โดย $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ เป็นนอร์มบน X หรือ นอร์มที่เกิดจากผลคูณภายใน (the norm induced by the inner product) (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 119)

ตัวอย่าง 2.6.4

1. ปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในโดยมีนอร์มที่เกิดจากผลคูณภายในนิยามดังนี้

$$\|x\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle} = \sqrt{x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n}$$

จะเห็นว่า $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ปริภูมิยูนิแทรี (Unitary space) $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่ผลคูณภายในนิยามโดย

$$\|x\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle} = \sqrt{x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + ... + x_n\overline{y_n}}$$

(เมื่อ $\overline{y}$ คือสังยุคของ y)

บทนิยาม 2.6.5 ปริภูมิผลคูณภายใน X จะเรียกว่าเป็น ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคใต้นอร์มที่เกิดจากผลคูณภายใน (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 122)

ตัวอย่าง 2.6.6

1. ปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในโดยมีผลคูณภายในนิยามดังนี้

$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$

จะเห็นว่า $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

2. ปริภูมิยูนิแทรี (Unitary space) $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่ผลคูณภายในนิยามโดย

$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + ... + x_n\overline{y_n}$

(เมื่อ $\overline{y}$ คือสังยุคของ y)

สำหรับ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ เราจะได้ว่า

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

เขียนในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

และเราทราบดีว่า $\mathbb{C}^n$ และ $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิบานาคภายใต้นอร์มข้างต้น

ดังนั้น $\mathbb{C}^n$ และ $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต

2.7 ตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear operator)

ในแคลคูลัสเราพิจารณาเส้นจำนวนจริง $\mathbb{R}$ และค่าฟังก์ชันของจำนวนจริงบน $\mathbb{R}$ (หรือบนสับเซต $\mathbb{R}$) เห็นได้ชัดว่า ฟังก์ชันใดๆ คือ การส่งจากโดเมนของมันไปยัง $\mathbb{R}$ ในเรื่องของการวิเคราะห์ฟังก์ชัน เราจะพิจารณาบนปริภูมิทั่วไปมากขึ้น เช่น ปริภูมิเมตริก ปริภูมินอร์ม และการส่งของปริภูมิเหล่านี้ ในกรณีของปริภูมิเวกเตอร์ และปริภูมินอร์ม การส่ง เรียกว่า ตัวดำเนินการเชิงเส้น สิ่งที่น่าสนใจคือ ตัวดำเนินการเชิงเส้นซึ่งดำรงการดำเนินการทางพีชคณิตของปริภูมิเวกเตอร์ได้ตามบทนิยามดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.7.1 T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น เมื่อ

1. โดเมน $D(T)$ ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T คือ ปริภูมิเวกเตอร์ และเรนจ์ $R(T)$ อยู่ในปริภูมิเวกเตอร์ฟิลด์เดียวกัน

2. สำหรับแต่ละ $x, y \in D(T)$ และสเกลาร์ α ที่ซึ่ง

2.1 $T(x+y) = Tx+Ty$

2.2 $T(\alpha x) = \alpha Tx$

เราสามารถเขียน Tx แทน $T(x)$

$D(T)$ แทน โดเมนของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

$R(T)$ แทน เรนจ์ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

$N(T)$ แทน นัลสเปซ

โดยนิยาม นัลสเปซ (null space) ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T คือ เซตของแต่ละ $x \in D(T)$ ซึ่ง

$$Tx = 0$$

ให้ $D(T) \subset X$ และ $R(T) \subset Y$ ซึ่ง X และ Y เป็นปริภูมิเวกเตอร์จริงหรือเชิงซ้อน แล้ว T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นจาก $D(T)$ ไปทั่วถึง $R(T)$ เขียนได้เป็น

$$T : D(T) \to R(T)$$

หรือจาก $D(T)$ ไป Y เขียนได้เป็น

$$T : D(T) \to Y$$

ถ้า $D(T)$ คือ พื้นที่ทั้งหมดของ X แล้ว จะเขียนได้ว่า

$$T : X \to Y$$

เห็นได้ชัดว่าสมการข้อ 2.1 และข้อ 2.2 สามารถเขียนได้เป็น

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

โดยเมื่อให้ $\alpha = 0$ ในสมการในข้อ 2.2 เราจะได้ว่า

$$T(0) = 0$$

จากการส่ง $T : D(T) \to Y$ จะเรียกว่า การส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (injective or one-to-one) ถ้า จุดที่ต่างกันในโดเมนมีภาพที่ต่างกัน นั่นคือ ถ้ามี $x_1, x_2 \in D(T)$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 + Tx_2$$

จะสอดคล้องกับ

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีนี้จะมีการส่ง

$$T^{-1}: R(T) \to D(T)$$

$$y_0 \to x_0 \qquad (y_0 = Tx_0)$$

ซึ่ง การส่งแต่ละ $y_0 \in R(T)$ ไปทั่วถึง $x_0 \in D(T)$ สำหรับ $Tx_0 = y_0$

และ T^{-1} เรียกว่า ตัวผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

เราจะเห็นได้ชัดว่า

$$T^{-1}Tx = x \quad \forall x \in D(T)$$

$$T^{-1}Ty = y \quad \forall y \in R(T)$$ (Kreyszig, 1978, p. 82-87)

ตัวอย่าง 2.7.2

1. ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ (identity operator) บนปริภูมิเวกเตอร์ X คือ $I:X\to X$ ซึ่งนิยามโดย $Ix=x$ สำหรับทุกๆ $x\in X$ เห็นได้ว่า I เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

2. ตัวดำเนินการศูนย์ (zero operator) คือตัวดำเนินการเชิงเส้น $T:X\to Y$ ซึ่งนิยามโดย $Tx=0$ สำหรับทุกๆ $x\in X$ จะเขียนแทนตัวดำเนินการเชิงเส้น T ด้วย 0 เห็นได้ชัดว่าตัวดำเนินการศูนย์เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

บทนิยาม 2.7.3 ให้ X และ Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T: X \to Y$ ว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น จะกล่าวว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น T มีขอบเขต (bounded) ถ้ามีค่าคงที่ $c>0$ ซึ่ง $\|Tx\| \le c\|x\|$ สำหรับทุกๆ $x \in X$

ถ้า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นและมีขอบเขต เราจะกล่าวว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต (bounded linear operator) (สุเทพ สวนใต้, 2548, น. 75)

ตัวอย่าง 2.7.4

ให้ตัวดำเนินการเชิงเส้น $A \in B(X,X)$ และตัวดำเนินการเชิงเส้น $B \in B(X,X)$ จงแสดงว่า $(A+B) \in B(X,X)$

พิสูจน์ ให้ $A \in B(X,X)$ และ $B \in B(X,X)$

$$(A+B)x = Ax + Bx$$

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\|$$

$$\le \|Ax\| + \|Bx\|$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก บทนิยาม 2.7.3 จะได้ว่า

$$\|Ax\|+\|Bx\| \le c_1\|x\|+c_2\|x\|$$

$$=(c_1+c_2)\|x\|$$

ดังนั้น ถ้าตัวดำเนินการเชิงเส้น $A \in B(X,X)$ และ ตัวดำเนินการเชิงเส้น $B \in B(X,X)$ แล้ว $(A+B) \in B(X,X)$

บทนิยาม 2.7.5 ตัวดำเนินการเชิงเส้น T บนปริภูมิฮิลเบิร์ต H จะเรียกว่า มีตัวดำเนินการผกผัน ถ้ามีตัวดำเนินการเชิงเส้น S ที่ทำให้ $ST=TS=I$ เมื่อ I เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์ นั่นคือ $Ix=x$ $\forall x \in H$ เขียนในรูปแบบของ $S=T^{-1}$ และเรียก T^{-1} ว่าตัวผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น T (Takayuki Furuta, 2002, p. 79)

ทฤษฎีบท 2.7.6 กำหนดให้ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T:A \to B$ เรากล่าวว่า ตัวดำเนินการเชิงเส้น T มีตัวผกผัน เขียนแทนด้วย T^{-1} ก็ต่อเมื่อ ตัวดำเนินการเชิงเส้น T เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (พัฒนี อุดมกะวานิช, 2555, น. 139)

บทนิยาม 2.7.7 ให้ $T:U \to V$ และ $S:V \to W$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ซึ่งการคอมโพสิท (composition) ของตัวดำเนินการเชิงเส้น S และ T คือฟังก์ชัน $S \circ T:U \to W$ จะนิยามโดย

$$(S \circ T)(u)=S(T(u))$$

เนื่องจาก S และ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะเห็นได้ชัดเจนว่า $S \circ T$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (Robert A., 2012, p. 432)

บทนิยาม 2.7.8 ให้ $T:U \to V$ และ $S:V \to W$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ที่ซึ่ง $D(T)$, $D(S) \subseteq X$ เมื่อผลรวมของ $T+S$ และการคูณสเกลาร์ αT นิยามโดย

1. $(T+S)(x)=Tx+Sx$ เมื่อ $x \in D(T) \cap D(S)$

2. $(\alpha T)(x)=\alpha(Tx)$

เนื่องจาก T และ S เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะเห็นได้ชัดว่า $T+S$ และ αT เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (Kôsaku Yosida, 1980, p. 43)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8 ตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต (Bound linear operator)

บทนิยาม 2.8.1 ให้ X และ Y เป็นปริภูมิบานาคและตัวดำเนินการเชิงเส้น $T : D(T) \to Y$ ซึ่ง $D(T) \subset X$ ตัวดำเนินการเชิงเส้น T จะเรียกว่ามีขอบเขต ถ้ามีจำนวนจริง ที่ซึ่ง แต่ละ $x \in D(T)$

$$\|Tx\| \le c\|x\| \qquad \text{.....(2.2)}$$

จากสมการ (2.2) นอร์มทางซ้าย ($\|Tx\|$) อยู่ใน Y และนอร์มทางขวา ($\|x\|$) จากสมการแสดงให้เห็นว่าตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตส่งเซตที่มีขอบเขตใน $D(T)$ ไปทั่วถึงเซตที่มีขอบเขตใน Y นี่คือการส่งในรูปแบบของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{x} \qquad \text{.....(2.3)}$$

$\|T\|$ เรียกว่า นอร์มของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

ถ้า $D(T) = \{0\}$ เรากำหนด $\|T\| = 0$ ในกรณีนี้ $T = 0$ จาก $T(0) = 0$ จากสมการ (1) เมื่อ $c = \|T\|$ คือ

$$\|Tx\| \le \|T\|\|x\| \qquad \text{.....(2.4)}$$

(Kreyszig, 1978, p. 91-92)

ตัวอย่าง 2.8.2

1. ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ $I : X \to X$ บนปริภูมินอร์ม $X \neq \{0\}$ มีขอบเขต และ มีนอร์มคือ $\|I\| = 1$
2. ตัวดำเนินการศูนย์ $0 : X \to X$ บนปริภูมินอร์ม X มีขอบเขต และ มีนอร์มคือ $\|0\| = 0$

ทฤษฎีบท 2.8.3 ถ้า T และ S เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตแล้ว ST เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต (Jeffrey A. Fessler, 2004, p. 4)

2.9 ตัวดำเนินการผกผัน (Inverse operator)

ทฤษฎีบท 2.9.1 ให้ X, Y เป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงซ้อน ให้ $T : D(T) \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นซึ่งโดเมน $D(T) \subset X$ และเรนจ์ $R(T) \subset Y$ แล้ว

1. ผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ หาได้ก็ต่อเมื่อ $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$
2. ถ้าผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น T^{-1} หาได้แล้ว T^{-1} จะเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น
3. ถ้า $\dim D(T) = n < \infty$ และผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น T^{-1} หาได้ แล้ว $\dim R(T) = \dim D(T)$

(Kreyszig, 1978, p. 88)

เอกสารนี้สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทตั้ง 2.9.2 ให้ $T:X\to Y$ และ $S:Y\to Z$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง เมื่อ X,Y,Z เป็นปริภูมิเวกเตอร์ แล้วตัวผกผัน $(ST)^{-1}:Z\to X$ ของตัวดำเนินการประกอบ (ST) หาได้ และ $(ST)^{-1}=S^{-1}T^{-1}$ (Kreyszig, 1978, p. 89)

2.10 การส่งแบบเปิด (Open mapping)

นิยาม 2.10.1 ให้ X และ Y เป็นปริภูมิเมตริก ดังนั้น ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T:D(T)\to Y$ โดยที่โดเมน $D(T)\subset X$ ซึ่งเรียกว่า การส่งแบบเปิด ถ้าสำหรับทุกเซตเปิดใน $D(T)$ ภาพเป็นเซตเปิดใน Y (Kreyszig, 1978, p. 286)

ทฤษฎีบท 2.10.2 ตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต T ส่งจากปริภูมิบานาค X ไปยังปริภูมิบานาค Y เป็นการส่งแบบเปิด ดังนั้น ถ้าตัวดำเนินการเชิงเส้น T เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง แล้วตัวผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น T^{-1} ต่อเนื่องและมีขอบเขต (Kreyszig, 1978, p. 286)

2.11 ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue)

บทนิยาม 2.11.1 ให้ $T:V\to V$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ V บนฟิลด์ $\mathbb{C}$ จำนวนเชิงซ้อน $\lambda\in\mathbb{C}$ จะกล่าวว่าเป็นค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T ก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $v\in V$ ที่ทำให้ $Tv=\lambda v$ ในกรณีนี้ เราเรียกเวกเตอร์ v ว่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับ λ (Weisstein, n.d., para. 1)

2.12 สเปกตรัมจุด (Point spectrum)

ให้ $X\neq\{0\}$ เป็นปริภูมินอร์มเชิงซ้อน และ $T:D(T)\to X$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น เมื่อ $D(T)\subset X$ ซึ่งตัวดำเนินการเชิงเส้น T สอดคล้องกับตัวดำเนินการเชิงเส้น $T_\lambda=T-\lambda I$

ซึ่ง λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ I เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์บน $D(T)$ ถ้า T_λ มีตัวผกผันนิยามโดย $R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$ และเรียกว่า รีโซเวนท์ ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

บทนิยาม 2.12.1 (ค่าปกติ, เซตรีโซเวนท์, สเปกตรัม) ให้ $X\neq\{0\}$ เป็นปริภูมินอร์มเชิงซ้อน และ ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T:D(T)\to X$ เมื่อ $D(T)\subset X$ ค่าปกติ λ ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T คือจำนวนเชิงซ้อน ที่ซึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(R1) $(T-\lambda I)^{-1}$ หาได้

(R2) $(T-\lambda I)^{-1}$ มีขอบเขต

(R3) $(T-\lambda I)^{-1}$ นิยามบนเซตที่ซึ่งหนาแน่นใน X

เซตรีโซเวนท์ $\rho(T)$ ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T เป็นเซตของค่าปกติทั้งหมดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T มีคอมพลีเมนท์คือ $\sigma(T)=\mathbb{C}-\rho(T)$ ในระนาบเชิงเส้น $\mathbb{C}$ เรียกว่าสเปกตรัมของตัวดำเนินการเชิงเส้น T และ $\lambda\in\sigma(T)$ เรียกว่า ค่าสเปกตรัมของตัวดำเนินการเชิงเส้น T นอกจากนี้ สเปกตรัม $\sigma(T)$ แบ่งออกเป็น 3 เซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนี้

1. สเปกตรัมจุด หรือสเปกตรัมไม่ต่อเนื่อง (Point spectrum) $\Pi_0(T)$ คือ เซตที่ซึ่งไม่มี $(T-\lambda I)^{-1}$ และ $\lambda\in\Pi_0(T)$ เรียกว่า ค่าลักษณะเฉพาะ ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

2. สเปกตรัมต่อเนื่อง (Continuous spectrum) $\sigma_0(T)$ คือ เซตที่ซึ่ง $(T-\lambda I)^{-1}$ หาได้ และสอดคล้องกับ (R3) แต่ไม่สอดคล้องกับ (R2) นั่นคือ $(T-\lambda I)^{-1}$ ไม่มีขอบเขต

3. สเปกตรัมเรซิดิวซ์ (Residual spectrum) $\sigma_r(T)$ คือ เซตที่ซึ่ง $(T-\lambda I)^{-1}$ หาได้ (อาจมีหรือไม่มีขอบเขต) แต่ไม่สอดคล้องกับ (R3) ที่ซึ่งโดเมนของ $(T-\lambda I)^{-1}$ ไม่หนาแน่นใน X

โดยการแบ่งของสเปกตรัมเป็นไปตามตารางดังนี้

สอดคล้องกับ	ไม่สอดคล้องกับ	λ เป็นสมาชิกของ
(R1), (R2), (R3)	-	$\rho(T)$
	(R1)	$\Pi_0(T)$
(R1) (R3)	(R2)	$\sigma_0(T)$
(R1)	(R3)	$\sigma_r(T)$

จากตารางแสดงให้เห็นว่า $\sigma(T)=\Pi_0(T)\cup\sigma_0(T)\cup\sigma_r(T)$

ที่ซึ่ง $\Pi_0(T)\cap\sigma_0(T)=\phi$

$\Pi_0(T)\cap\sigma_r(T)=\phi$

$\sigma_0(T)\cap\sigma_r(T)=\phi$ (Kreyszig, 1978, p. 371)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.13 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear functional)

บทนิยาม 2.13.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น f คือ ตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีโดเมนในปริภูมิเวกเตอร์เชิงซ้อน X และเรนจ์ในสเกลาร์ฟิลด์ $\mathbb{C}$ นั่นคือ $f : D(f) \to \mathbb{C}$ (Kreyszig, 1978, p. 104)

2.14 ฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น (Linear fractional function)

บทนิยาม 2.14.1 ถ้า a,b,c และ d เป็นค่าคงที่เชิงซ้อน โดยที่ $ad-bc \neq 0$ และ $\theta \neq -\frac{d}{c}$ แล้วให้ $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ นิยามโดย $\hat{f}(\theta) = \frac{a\theta+b}{c\theta+d}$ เรียกว่า ฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น (Linear fractional function) (Dennis G. Zill & Patrick D. Shanahan, n.d., p. 360)

2.15 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (Related research)

ทฤษฎีบท 2.15.1 ให้ X เป็นปริภูมิบานาคเชิงซ้อนและตัวดำเนินการเชิงเส้น $T \in B(X,X)$ เมื่อ $\lambda \in \Pi_0(T)$ ก็ต่อเมื่อ $T-\lambda I$ ไม่เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้ $\lambda \in \Pi_0(T)$ เมื่อมีเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $x_0 \in X$

ซึ่ง $Tx_0 = \lambda x_0$ หรือ $(T-\lambda I)x_0 = 0 = (T-\lambda I)0$

ดังนั้น $T-\lambda I$ ไม่เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

($\Leftarrow$) ให้ $T-\lambda I$ ไม่เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อมี $x_1, x_2 \in X$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} (T-\lambda I)x_1 &= (T-\lambda I)x_2 \\ Tx_1 - \lambda x_1 &= Tx_2 - \lambda x_2 \\ Tx_1 - Tx_2 &= \lambda x_1 - \lambda x_2 \\ T(x_1 - x_2) &= \lambda(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lambda \in \Pi_0(T)$ (พุทธพร วานิชกร, 2547, น. 8)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.15.2 ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ $f:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}-\{0\}$ สำหรับทุก $\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$ $f(\lambda)=\lambda^{-1}$ และตัวดำเนินการเชิงเส้น $T\in B(X,X)$ มีตัวผกผัน สามารถเขียนได้โดย $f(T)=T^{-1}$ แล้ว $f(\Pi_0(T))=\Pi_0(f(T))$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ให้ $f(\lambda_0)\in f(\Pi_0(T))$ เมื่อ $\lambda_0\in\Pi_0(T)$ สำหรับบาง $x_0\neq 0$ โดยที่ $x_0\in X$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} Tx_0 &= \lambda_0 x_0 \\ \lambda_0^{-1}Tx_0 &= \lambda_0^{-1}\lambda_0 x_0 \\ T(\lambda_0^{-1}x_0) &= x_0 \\ T^{-1}T(\lambda_0^{-1}x_0) &= T^{-1}x_0 \\ \lambda_0^{-1}x_0 &= T^{-1}x_0 \\ f(\lambda_0)x_0 &= f(T)x_0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(\lambda_0)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $f(T)$

นั่นคือ $f(\lambda_0)\in\Pi_0(f(T))$ จะได้ว่า $f(\Pi_0(T))\subseteq\Pi_0(f(T))$

$(\Leftarrow)$ ให้ $\lambda_0\in\Pi_0(f(T))$ จะได้ว่ามีเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $x_0\in X$

ดังนั้น $f(T)(x_0)=\lambda_0 x_0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} f(T)x_0 &= \lambda_0 x_0 \\ T^{-1}x_0 &= \lambda_0 x_0 \\ TT^{-1}x_0 &= T(\lambda_0 x_0) \\ x_0 &= \lambda_0(Tx_0) \\ \lambda_0^{-1}x_0 &= \lambda_0^{-1}\lambda_0(Tx_0) \\ \lambda_0^{-1}x_0 &= Tx_0 \\ f(\lambda_0)x_0 &= Tx_0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $f(\lambda_0)\in\Pi_0(T)$ ดังนั้น $f(f(\lambda_0))=\lambda_0\in f(\Pi_0(T))$

จะได้ว่า $\Pi_0(f(\lambda_0))=f(\Pi_0(T))$

เพราะฉะนั้น $f(\Pi_0(T))=\Pi_0(f(T))$ (พุทธพร วานิชกร, 2547, น. 23)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น (Point spectrum mapping theorem for linear fractional function)

ทฤษฎีบทการส่งเชิงสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันผกผัน (ทฤษฎีบท 2.15.2) ที่เราศึกษานั้น ได้ทำการส่งเชิงสเปกตรัมจุดบนปริภูมิบานาค เราจึงนำมาเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาค้นคว้าในปัญหาพิเศษนี้ เราจึงนำคุณสมบัติต่างๆบนปริภูมิบานาคนำมาใช้กับทฤษฎีบทการส่งเชิงสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น บนปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งทุกๆ ปริภูมิฮิลเบิร์ตเป็นปริภูมิบานาค ทำให้สามารถทำการส่งเชิงสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ตได้

เนื่องจากการพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไปนี้ต้องแสดงว่า ถ้า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นแล้ว $aT+bI$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นด้วยหรือไม่

บทตั้ง 3.1.1 ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ถ้า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นแล้ว $(aT+bI)x=(a\lambda+b)x$ โดยที่ $x \in X$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า 1. $(aT+bI)(x+y)=(aT+bI)x+(aT+bI)y$ เมื่อ $x,y \in X$

2. $(aT+bI)(kx)=k(aT+bI)x$ เมื่อ $x \in X$ และ $k \in \mathbb{C}$

สมมติ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

1. ให้ $x,y \in X$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}(aT+bI)(x+y) &= (a\lambda+b)(x+y)\\ &= a\lambda(x+y)+b(x+y)\\ &= a\lambda x+a\lambda y+bx+by\\ &= a\lambda x+bx+a\lambda y+by\\ &= (a\lambda+b)x+(a\lambda+b)y\\ &= (aT+bI)x+(aT+bI)y\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ให้ $x \in X$ และ $k \in \mathbb{C}$

จะได้ว่า $(aT+bI)(kx) = (a\lambda+b)(kx)$

$$= a\lambda(kx)+b(kx)$$
$$= ka\lambda x+kbx$$
$$= k(a\lambda x+bx)$$
$$= k(a\lambda+b)x$$
$$= k(aT+bI)x$$

ดังนั้น เมื่อ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น แล้ว $aT+bI$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

นอกจากแสดงว่า $aT+bI$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นแล้ว ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า $cT+dI$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นด้วย และการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ จะต้องมีตัวผกผัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(cT+dI)^{-1}$ นั่นคือเราจะแสดงว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ มีตัวผกผันโดยใช้ทฤษฎีบท 2.7.6 ซึ่งตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ จะมีตัวผกผันได้จะต้องเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และจากทฤษฎีบท 2.10.2 ตัวผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ จะมีขอบเขตถ้าตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ดังนั้น จะต้องแสดงว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

บทตั้ง 3.1.2 ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $(cT+dI)x = (c\lambda+d)x$ ซึ่ง $\lambda \neq -\frac{d}{c}$ และ $x \in X$ แล้วตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

พิสูจน์ 1. แสดงว่า $cT+dI$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $x_1, x_2 \in X$

สมมติ $(cT+dI)x_1 = (cT+dI)x_2$

เพราะว่า $(cT+dI)x = (c\lambda+d)x$ ทำให้ได้ว่า $(c\lambda+d)x_1 = (c\lambda+d)x_2$

นั่นคือ $x_1 = x_2$

ดังนั้น ตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

2. แสดงว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบทั่วถึง

ให้ $y \in X$ และ $y = (c\lambda+d)x$

เลือก $x = (c\lambda+d)^{-1}y$

จะได้ว่า $(cT+dI)x = (c\lambda+d)(c\lambda+d)^{-1}y$

$$= y$$

ดังนั้น ตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบทั่วถึง

สรุปได้ว่า ตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากบทตั้งที่ 3.1.2 จะได้ว่า ตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ทำให้ได้ว่า ตัวดำเนินการเชิงเส้น $cT+dI$ มีตัวผกผันที่มีขอบเขต ซึ่งเขียนแทนด้วย $(cT+dI)^{-1}$

เมื่อเราทราบว่า $(cT+dI)^{-1}$ มีขอบเขตแล้ว เราต้องการแสดงว่า $(aT+bI)(cT+dI)^{-1}$ มีขอบเขตโดยทฤษฎีบท 2.8.3 ซึ่งจะต้องแสดงว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น $aT+bI$ มีขอบเขต

บทตั้ง 3.1.3 ให้ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T\in B(X,X)$ และ $I\in B(X,X)$ แล้วตัวดำเนินการเชิงเส้น $aT+bI\in B(X,X)$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{C}$

พิสูจน์ ให้ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T\in B(X,X)$ และ $I\in B(X,X)$

จะได้ว่า $(aT+bI)x = aTx+bIx$

$$\begin{aligned}\|(aT+bI)x\| &= \|aTx+bIx\| \\ &\le \|aTx\|+\|bIx\|\end{aligned}$$

จากบทนิยาม 2.7.3 จะได้ว่า จะมีค่าคงที่ k_1,k_2 ที่ทำให้

$$\begin{aligned}\|aTx\|+\|bIx\| &\le k_1\|x\|+k_2\|x\| \\ &\le (k_1+k_2)\|x\|\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าตัวดำเนินการเชิงเส้น $T\in B(X,X)$ และ $I\in B(X,X)$ แล้วตัวดำเนินการเชิงเส้น $aT+bI\in B(X,X)$

ทฤษฎีบท 3.1.4 ให้ $X\neq\{0\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อน และตัวดำเนินการเชิงเส้น $T\in B(X,X)$ ให้ $\hat{f}(\theta)=(a\theta+b)(c\theta+d)^{-1}$ โดยที่ $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $\theta\neq-\frac{d}{c}$ และ $ad-bc\neq 0$ แล้ว $\hat{f}(\Pi_0(T))=\Pi_0(f(T))$ เมื่อ $f(T)=(aT+bI)(cT+dI)^{-1}$ และ $f(T)\in B(X,X)$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ให้ $\hat{f}(\lambda)\in\hat{f}(\Pi_0(T))$ จะได้ $\lambda\in\Pi_0(T)$

จะมี $x_0\in X$ เมื่อ $x_0\neq 0$

ที่ทำให้

$$\begin{aligned}Tx_0 &= \lambda x_0 \\ cTx_0 &= c\lambda x_0 \\ cTx_0+dx_0 &= c\lambda x_0+dx_0 \\ (cT+dI)x_0 &= (c\lambda+d)x_0 \\ (c\lambda+d)^{-1}(cT+dI)x_0 &= (c\lambda+d)^{-1}(c\lambda+d)x_0 \\ (cT+dI)(c\lambda+d)^{-1}x_0 &= x_0\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(cT+dI)^{-1}(cT+dI)(c\lambda+d)^{-1}x_0 = (cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(c\lambda+d)^{-1}x_0 = (cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(aT+bI)(c\lambda+d)^{-1}x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(c\lambda+d)(aT+bI)x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(c\lambda+d)(aTx_0+bx_0) = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

จาก $Tx_0 = \lambda x_0$

$$(c\lambda+d)^{-1}(a\lambda x_0+bx_0) = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(c\lambda+d)^{-1}(a\lambda+b)x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(a\lambda+b)(c\lambda+d)^{-1}x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$\hat{f}(\lambda)x_0 = f(T)x_0$$

ดังนั้น $\hat{f}(\lambda)$ คือ ค่าลักษณะเฉพาะของ $f(T)$

ดังนั้น $\hat{f}(\lambda)\in\Pi_0(f(T))$

นั่นคือ $\hat{f}(\Pi_0(T))\subseteq\Pi_0(f(T))$

($\Leftarrow$) ให้ $\hat{f}(\lambda)\in\Pi_0(f(T))$

จะมี $x_0\in X$ เมื่อ $x_0\neq 0$

ที่ทำให้ $\hat{f}(\lambda)x_0 = f(T)x_0$

$$(a\lambda+b)(c\lambda+d)^{-1}x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(c\lambda+d)^{-1}(a\lambda+b)x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(c\lambda+d)^{-1}(a\lambda x_0+bx_0) = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

จาก $Tx_0 = \lambda x_0$

$$(c\lambda+d)^{-1}(aTx_0+bx_0) = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(c\lambda+d)^{-1}(aT+bI)x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(aT+bI)(c\lambda+d)^{-1}x_0 = (aT+bI)(cT+dI)^{-1}x_0$$

$$(aT+b)^{-1}(aT+b)(c\lambda+d)^{-1}x_0 = (aT+b)^{-1}(aT+b)(cT+d)^{-1}x_0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(c\lambda + d)^{-1} x_0 = (cT + dI)^{-1} x_0$$

$$(cT + dI)(c\lambda + d)^{-1} x_0 = (cT + dI)(cT + dI)^{-1} x_0$$

$$(c\lambda + d)^{-1}(cT + dI) x_0 = x_0$$

$$(c\lambda + d)(c\lambda + d)^{-1}(cT + dI) x_0 = (c\lambda + d) x_0$$

$$(cT + dI) x_0 = (c\lambda + d) x_0$$

$$cTx_0 + dx_0 = c\lambda x_0 + dx_0$$

$$cTx_0 = c\lambda x_0$$

$$Tx_0 = \lambda x_0$$

ทำให้ได้ว่า $\lambda \in \Pi_0(T)$ เมื่อ λ คือค่าลักษณะเฉพาะของ T

ดังนั้น $\hat{f}(\lambda) \in \hat{f}(\Pi_0(T))$

นั่นคือ $\Pi_0(f(T)) \subseteq \hat{f}(\Pi_0(T))$

สรุปได้ว่า $\hat{f}(\Pi_0(T)) = \Pi_0(f(T))$

ตัวอย่าง 3.1.5 ให้ $X \subseteq \mathbb{C}$ และตัวดำเนินการเชิงเส้น $T \in B(X, X)$

ให้ $\hat{f}(\theta) = (2\theta + 3)(5\theta + 8)^{-1}$ โดยที่ $2, 3, 5, 8 \in \mathbb{C}$, $\theta \neq -\frac{8}{5}$

แล้ว $\hat{f}(\Pi_0(T)) = \Pi_0(f(T))$ เมื่อ $f(T) = (2T + 3I)(5T + 8I)^{-1}$ และ $f(T) \in B(X, X)$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ให้ $\hat{f}(\lambda) \in \hat{f}(\Pi_0(T))$ จะได้ $\lambda \in \Pi_0(T)$

จะมี $x_0 \in X$ เมื่อ $x_0 \neq 0$

ที่ทำให้

$$Tx_0 = \lambda x_0$$

$$5Tx_0 = 5\lambda x_0$$

$$5Tx_0 + 8x_0 = 5\lambda x_0 + 8x_0$$

$$(5T + 8I) x_0 = (5\lambda + 8) x_0$$

$$(5\lambda + 8)^{-1}(5T + 8I) x_0 = (5\lambda + 8)^{-1}(5\lambda + 8) x_0$$

$$(5T + 8I)(5\lambda + 8)^{-1} x_0 = x_0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(5T+8I)^{-1}(5T+8I)(5\lambda+8)^{-1}x_0 = (5T+8I)^{-1}x_0$$

$$(5\lambda+8)^{-1}x_0 = (5T+8I)^{-1}x_0$$

$$(2T+3I)(5\lambda+8)^{-1}x_0 = (2T+3I)(5T+8I)^{-1}x_0$$

$$(5\lambda+8)(2T+3I)x_0 = (2T+3I)(5T+8I)^{-1}x_0$$

$$(5\lambda+8)(2Tx_0+3x_0) = (2T+3I)(5T+8I)^{-1}x_0$$

จาก $Tx_0 = \lambda x_0$

$$(5\lambda+8)^{-1}(2\lambda x_0+3x_0) = (2T+3I)(5T+8I)^{-1}x_0$$

$$(5\lambda+8)^{-1}(2\lambda+3)x_0 = (2T+3I)(5T+8I)^{-1}x_0$$

$$(2\lambda+3)(5\lambda+8)^{-1}x_0 = (2T+3I)(5T+8I)^{-1}x_0$$

$$\hat{f}(\lambda)x_0 = f(T)x_0$$

ดังนั้น $\hat{f}(\lambda)$ คือ ค่าลักษณะเฉพาะของ $f(T)$

นั่นคือ $\hat{f}(\lambda) \in \Pi_0(f(T))$

ดังนั้น $\Pi_0(f(T)) = \hat{f}(\Pi_0(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} - \{-\frac{8}{5}\} \mid \hat{f}(\lambda) = (2\lambda+3)(5\lambda+8)^{-1}\}$

($\Leftarrow$) เนื่องจาก $\hat{f}(\lambda) \in \hat{f}(\Pi_0(T))$

นั่นคือ $(2\lambda+3)(5\lambda+8)^{-1} \in \hat{f}(\Pi_0(T))$

ดังนั้น $\hat{f}(\Pi_0(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} - \{-\frac{8}{5}\} \mid \hat{f}(\lambda) = (2\lambda+3)(5\lambda+8)^{-1}\}$

สรุปได้ว่า $\hat{f}(\Pi_0(T)) = \Pi_0(f(T))$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} - \{-\frac{8}{5}\} \mid \hat{f}(\lambda) = (2\lambda+3)(5\lambda+8)^{-1}\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ผลการวิจัยของปัญหาพิเศษฉบับนี้ ทางคณะผู้จัดทำได้ศึกษาถึงงานวิจัยที่เกี่ยวกับการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันผกผันในปริภูมิบานาค ซึ่งทำให้คณะผู้จัดทำได้เล็งเห็นถึงความน่าสนใจของการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น โดยคณะผู้จัดทำได้ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับฟิลด์ ปริภูมิเวกเตอร์ ปริภูมิเมตริก ปริภูมินอร์ม ปริภูมิบานาค ปริภูมิย่อยของปริภูมิบานาค ปริภูมิผลคูณภายใน ปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการเชิงเส้น ตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต ตัวดำเนินการผกผัน การส่งแบบเปิด ฟังก์ชันเชิงเส้น ค่าลักษณะเฉพาะ สเปกตรัมจุด และฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น ที่ต้องนำมาใช้ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ รวมทั้งทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง นั่นคือทฤษฎีบท 2.15.2 โดยจะนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.4 นั่นคือ ให้ $\hat{f}(\lambda)\in\hat{f}(\Pi_0(T))$ จะได้ว่า $\lambda\in\Pi_0(T)$ จะมี $x_0\in X$ เมื่อ $x_0\neq 0$ ที่ทำให้ $Tx_0=\lambda x_0$ จากนั้นใช้คุณสมบัติของตัวการดำเนินการเชิงเส้นในการทำให้เกิด $f(T)x_0=\hat{f}(\lambda)x_0$ นั่นคือ $\hat{f}(\lambda)\in\Pi_0 f(T)$ และในทางกลับกัน ให้ $\hat{f}(\lambda)\in\Pi_0 f(T)$ จากนั้นใช้คุณสมบัติของตัวการดำเนินการเชิงเส้นเช่นเดิมในการทำให้เกิด $Tx_0=\lambda x_0$ นั่นคือ $\lambda\in\Pi_0(T)$ ดังนั้น $\hat{f}(\lambda)\in\Pi_0 f(T)$

ผลที่ได้จากการวิจัยทฤษฎีบท 3.1.4 ทำให้ได้ว่า สเปกตรัมจุดของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นของตัวดำเนินการเชิงเส้น T จะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยเศษส่วนเชิงเส้น $\hat{f}$ โดยการพิสูจน์แบบตรง ซึ่งการเป็นเซตย่อยซึ่งกันและกันสเปกตรัมจุดของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นของตัวดำเนินการเชิงเส้น T และภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยเศษส่วนเชิงเส้น $\hat{f}$ ทำให้ได้ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น นั่นคือ ให้ $X\neq\{0\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อน และตัวดำเนินการเชิงเส้น $T\in B(X,X)$ และฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นซึ่ง $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ และ $\theta\neq-\frac{d}{c}$ เราจะนิยามฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นในรูปตัวดำเนินการเชิงเส้น ดังนี้

$f(T)=(aT+bI)(cT+dI)^{-1}$ แล้ว $\hat{f}(\Pi_0(T))=\Pi_0(f(T))$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น โดยใช้ความรู้พื้นฐานเรื่อง ตัวดำเนินการเชิงเส้น ปริภูมิฮิลเบิร์ต ค่าลักษณะเฉพาะ สเปกตรัมจุด และฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้น เข้ามาเกี่ยวข้อง โดยการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.1.4 ทำให้ทราบว่า สามารถส่งสเปกตรัมจุดโดยใช้ตัวดำเนินการเชิงเส้นสำหรับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นได้ ส่งผลให้สเปกตรัมจุดของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นของตัวดำเนินการเชิงเส้น T เท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยเศษส่วนเชิงเส้น $\hat{f}$ ปัญหาที่เกิดจากการศึกษาปัญหาพิเศษนี้คือทฤษฎีบทเกี่ยวกับสเปกตรัมจุดเป็นเรื่องที่ไม่เคยศึกษาในระดับปริญญาตรี จึงทำให้เสียเวลาในการศึกษาค้นคว้าในส่วนของความรู้พื้นฐานที่นำมาใช้ในปัญหาพิเศษนี้

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 สามารถนำปัญหาพิเศษนี้ไปต่อยอดในการศึกษาทฤษฎีบทการส่งเชิงสเปกตรัมสำหรับฟังก์ชันแบบอื่นๆ เช่น สเปกตรัมต่อเนื่อง สเปกตรัมเรซิดิวช์ เป็นต้น เพื่อเป็นการต่อยอดองค์ความรู้

5.2.2 สามารถนำทฤษฎีบทที่สร้างขึ้นมาใหม่ในปัญหาพิเศษเล่มนี้ไปประยุกต์ใช้งานในสาขาวิชาอื่นๆ ในด้านวิทยาศาสตร์

5.2.3 สามารถพัฒนาความรู้ที่ได้ ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

พัฒนี อุดมกะวานิช. (2555). **หลักคณิตศาสตร์.** บริษัท วี.พริ้นท์ (1991) จำกัด: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พุทธพร วานิชกร. (2547). **ทฤษฎีการส่งเชิงสเปกตรัมสำหรับพหุนามและฟังก์ชันอื่นบางฟังก์ชัน.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม. (2558). **ทฤษฎีเมทริกซ์.** เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีเมทริกซ์. (อัดสำเนา).

สุเทพ สวนใต้. (2548). **ทฤษฎีปริภูมิบานาค. เชียงใหม่: จรัสธุรกิจการพิมพ์.**

Dennis G. Zill, Patrick D. Shanahan. (n.d.). **A First Course in Complex Analysis with Applications.** 40 Tall Pine Drive Sudbury, MA 01776: Jones and Bartlett Publishers.

Jeffrey A. Fessler. (2004). **Linear operators and adjoints.** Retrieved June 7, 2017, form https://web.eecs.umich.edu/~fessler/course/600/l/l06.pdf

Kôsaku Yosida. (1980). **Functional Analysis.** Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Kreyszig, E. (1978). **Introductory functional analysis with applications.** Unitcd States of America: n.p.

Robert, A. (2012). **Linear operator composition.** Retrieved March 2, 2017, from http://linear.ups.edu/html/section-LT.html

Takayuki, F. (2002). **Invitation to linear operators : from matrices to bounded linear operators on a Hilbert space.** London: Taylor & Francis.

Weisstein, E.W. (n.d.). **Eigenvalue.** Retrieved November 9, 2016, from http://mathworld.wolfram.com/Eigenvalue.html.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้