

LOWER BOUNDS OF THREE-COLOR BIPARTITE RAMSEY NUMBERS  
FOR PATHS AND CYCLES



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE  
DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2015

KMITL-2015-SC-M-001-039

LOWER BOUNDS OF THREE-COLOR BIPARTITE RAMSEY NUMBERS  
FOR PATHS AND CYCLES



E077723

SARINEE LOTRAKULNUKID

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน.....077723  
รับเดือนปี..... 3 พ.ค. 2559

b.....
i.....

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE  
DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF SCIENCE  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
2015  
KMITL-2015-SC-M-001-039

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2015

FACULTY OF SCIENCE

KING MON GKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Faculty of Science  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang  
Thesis Certification

Thesis Title "LOWER BOUNDS OF THREE-COLOR BIPARTITE RAMSEY NUMBERS FOR PATHS AND CYCLES"

Student Name Miss. Sarinee Lotrakulnukid

Student ID 56605063

Degree Master of Science (Applied Mathematics)

Department Mathematics

Thesis Advisor Dr.Decha Samana

Thesis Co-advisor -

Thesis Committee	Signatures
Asst. Prof. Dr.Wichai Wittayakittilerd Chairperson	<i>W. Wittayakittilerd</i>
Dr. Wannaporn Sanprasert Examiner	<i>Wannaporn Sanprasert</i>
Asst. Prof. Dr.Keaitsuda Nakprasit External Examiner	<i>Keaitsuda Nakprasit</i>
Dr.Decha Samana Thesis Advisor	<i>DBCHA SAMANA</i>

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

Examination Date 20<sup>th</sup> July 2015 Time 13.00-16.00 p.m.

Place Faculty of Science room 207

Approved by Faculty of Science



(Assoc.Prof.Dr. Dusanee Thanaboripat)

Dean

Date 28/07/15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์สองส่วนสามสีสำหรับวิถีและวง
นักศึกษา	นางสาวสาริณี ล้อตระกูลนุกิจ
รหัสประจำตัว	56605063
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2558
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ดร.เดชา สมณะ

### บทคัดย่อ

สำหรับกราฟสองส่วน  $G_1$ ,  $G_2$  และ  $G_3$  จำนวนแรมเซย์สองส่วนสามสี  $br(G_1, G_2, G_3)$  คือจำนวนเต็มบวก  $p$  ที่น้อยที่สุด ซึ่งระบายสีให้กับเส้นเชื่อมของกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์  $K_{p,p}$  ด้วยสี 3 สี แล้วจะทำให้  $K_{p,p}$  บรรจุกราฟสีเดียวที่สมสัณฐานกับ  $G_i$  ซึ่งถูกระบายสีด้วยสีที่  $i$  สำหรับ  $1 \leq i \leq 3$  ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราได้ศึกษาขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์สองส่วนสามสีสำหรับวิถีและวง  $br(P_l, P_m, C_n)$  เมื่อ  $l, m$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ที่มากกว่า 2

คำสำคัญ : กราฟ การระบายสีเส้นเชื่อม จำนวนแรมเซย์ จำนวนแรมเซย์สองส่วน

Thesis Title	Lower Bounds of Three-Color Bipartite Ramsey Numbers for Paths and Cycles
Student	Miss Sarinee Lotrakulnukid
Student ID	56605063
Degree	Master of Science
Program	Applied Mathematics
Year	2015
Thesis Advisor	Dr.Decha Samana

### Abstract

For given bipartite graphs  $G_1, G_2$  and  $G_3$ , the three-color bipartite Ramsey number  $br(G_1, G_2, G_3)$  is defined to be the least positive integer  $p$  such that any edges coloring of  $K_{p,p}$  with 3 colors contains a monochromatic isomorphic to  $G_i$  colored with  $i$ , for  $1 \leq i \leq 3$ . In this thesis, we give lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers for paths and cycles  $br(P_l, P_m, C_n)$  where  $l, m$  are positive integers more than 1 and  $n$  is even positive integer more than 2.

Keywords: Graph, Edge coloring, Ramsey number, bipartite Ramsey number.

## Acknowledgement

I would like to express my sincere thanks to my thesis advisor, Dr. Decha Samana for his invaluable help and constant encouragement throughout the course of this thesis. I am most grateful for his teaching. I would not have achieved this far and this thesis would not have been completed without all the support that I have always received from him. Besides, I am thankful to all committee, Assistant Professor Dr. Wichai Witayakittlerd and Dr. Wannaporn Sanprasert for many useful recommendation and valuable advices. I also thanks to my external committee, Assistant Professor Dr. Keaitsuda Nakprasit from Department of Mathematics, Faculty of Science, Khon Kaen University for helpful advices and suggestion. This thesis wouldn't be finished without these people.

Thank you every lecturers of the department of mathematics who gave knowledge and advices in the master of science program, officers of the department of mathematics whom assist in every problem.

I also wish to thank Mr. Wongvisarut Khuangsatung and Mr. Sarawut Suwannaut for providing suggestion about content. They also keep checking and correcting languages in this thesis.

This thesis was funded by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang for scholarship.

Finally, I most gratefully acknowledge my parents for their support throughout the period of this thesis.

Miss Sarinee Lotrakulnukid

# Table of Contents

	Page
Abstract in Thai .....	i
Abstract in English .....	ii
Acknowledgements.....	iii
Table of Contents.....	iv
List of Figures.....	v
List of Figures (Continued).....	vi
List of Tables .....	vii
<b>Chapter 1 Introduction .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapter 2 Basic Concepts and Preliminaries .....</b>	<b>5</b>
2.1 Graphs.....	5
2.2 Edge Colorings.....	12
2.3 Ramsey Number .....	13
2.4 Bipartite Ramsey Number .....	15
<b>Chapter 3 Some Lower bounds of <math>br(P_r, P_m, C_n)</math> .....</b>	<b>17</b>
<b>Chapter 4 Conclusion.....</b>	<b>29</b>
4.1 The three-color bipartite Ramsey number .....	29
4.2 Some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers.....	29
References.....	30
Appendices .....	32
Appendix A.....	33
Appendix B.....	37
Author Biography .....	39

## List of Figures

Figure	Page
1.1 Shows this graph and it has no triangle.....	1
1.2 The vertex $v_1$ joins with other 5 vertices.....	2
1.3 The graph shows that $v_2v_3$ is dash line.....	2
1.4 The graph shows that $v_2v_3$ , $v_3v_4$ and $v_2v_4$ are dark line.....	3
2.1 Graph $G=(V(G),E(G))$ in Example 2.1.2.....	5
2.2 Graph illustrating adjacent vertices and incident.....	6
2.3 The $(n,m)$ -graphs.....	6
2.4 The graphs show $G_1 \subseteq G_2$ , $G_1 \subseteq G_3$ but $G_2 \not\subseteq G_3$ .....	7
2.5 A degree sequence of a graph.....	7
2.6 The graphs $P_2$ , $P_3$ , $P_4$ and $P_5$ .....	8
2.7 The graphs $C_3$ , $C_4$ and $C_5$ .....	9
2.8 Graph illustrating walks, trails, paths and cycles.....	9
2.9 Distances from the vertex $v$ to vertices of $G$ .....	10
2.10 Isomorphic graphs $G_1 \cong G_2$ .....	10
2.11 The complete graphs $K_n$ , $1 \leq n \leq 5$ .....	11
2.12 The complete bipartite graphs $K_{2,3}$ , $K_{2,5}$ , $K_{3,3}$ and $K_{3,6}$ .....	12
2.13 A graph $G$ with $\chi'(G) = 3$ .....	13
3.1 The partition of $V(K_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4})$ .....	17
3.2 The red and blue edges represented by dash line.....	18
3.3 All edges between $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}^1$ and $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}^2$ are colored with green.....	18
3.4 A partition of vertex set of $K_{3n, 3n}$ into $V(G_1)$ , $V(G_2)$ and $V(G_3)$ .....	19
3.5 Red subgraph of 3-edge coloring of $K_{3n, 3n}$ .....	20
3.6 Blue subgraph of 3-edge coloring of $K_{3n, 3n}$ .....	20
3.7 Green subgraph of 3-edge coloring of $K_{3n, 3n}$ .....	21
3.8 The 3-edge coloring of $K_{3n, 3n}$ .....	21
3.9 The vertex $v_1$ adjacent to all vertices of $V_2(G)$ with red.....	22
3.10 The vertex $v_2$ adjacent to all vertices of $V_2(G)$ with blue.....	22
3.11 The remaining edges are colored with green $G_3$ .....	23
3.12 The 3-edge coloring of $G$ .....	23
3.13 Red subgraph of 3-edge coloring of $K_{4,4}$ .....	24
3.14 Blue subgraph of 3-edge coloring of $K_{4,4}$ .....	24
3.15 Green subgraph of 3-edge coloring of $K_{4,4}$ .....	24

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## List of Figures (Continued)

Figure	Page
3.16 Patterns of subgraphs of $G$ with size 4 .....	25
3.17 Patterns of subgraphs of $G$ with size 5 .....	25
3.18 Patterns of subgraphs of $G$ with size 6 .....	26
3.19 Patterns of subgraphs of $G$ with size 7 .....	26
3.20 Patterns of subgraphs of $G$ with size 8 .....	26
3.21 $\deg(v_i) = 4, 1, 1, 1, 1$ and $\deg(u_i) = 1, 1, 1, 1, 4$ .....	26
3.22 $\deg(v_i) = 1, 1, 1, 1, 3$ and $\deg(u_i) = 3, 1, 1, 1, 1$ .....	27
3.23 $\deg(v_i) = 0, 3, 3, 3, 1$ and $\deg(u_i) = 1, 3, 3, 3, 0$ in case I .....	27
3.24 $\deg(v_i) = 0, 3, 3, 3, 1$ and $\deg(u_i) = 1, 3, 3, 3, 0$ in case II .....	28



## List of Tables

Table	Page
2.1 Known exact values and bounds of Ramsey numbers. ....	14
2.2 Some exact values and upper bounds of bipartite Ramsey numbers.....	15



## Chapter 1

### Introduction

Ramsey Theory is the branch of mathematics that deals with the basic question of the minimum number of elements of a particular structure that must be present so that a particular property holds. Ramsey Theorem states that in any coloring of the edges of a sufficiently large complete graph, one will always find monochromatic complete subgraph, for example the party's problems. The party problem asks: what is the minimum number of people attending a party for which we are guaranteed to find 3 people none of whom know the other two or 3 people each of whom know the other two? Consider one person for one vertex as well as red line (indicated by dash line) for the know relation to each other and blue line (indicated by dark line) for the unknown relation.

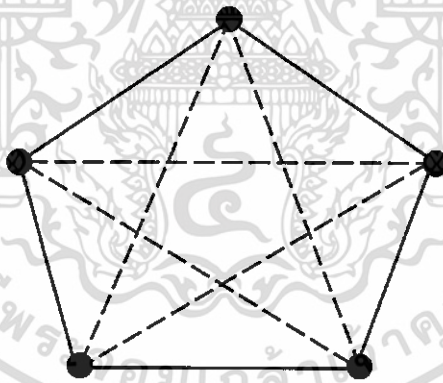


Figure 1.1 Shows this graph and it has no triangle.

As is illustrated by Figure 1.1, there is no triangle forming for red or blue lines. Therefore, we could make a conclusion that a triangle is not always formed with red or blue lines if number of vertices are less than 6.

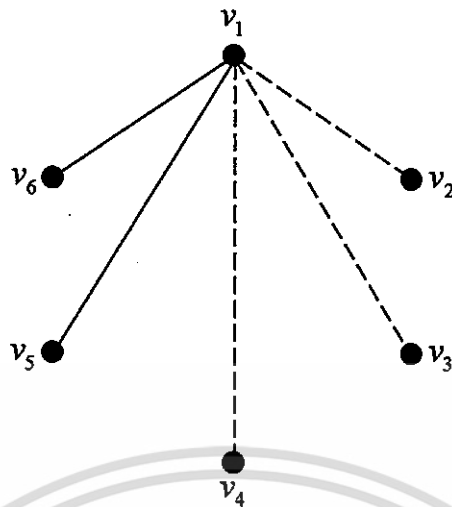


Figure 1.2 The vertex  $v_1$  joins with other 5 vertices.

The vertex  $v_1$  in Figure 1.2 must join with other 5 vertices and at least 3 lines will be red or blue. Assume that  $v_1v_2$ ,  $v_1v_3$  and  $v_1v_4$  are red lines. Therefore, if at least one of  $v_2v_3$ ,  $v_3v_4$  and  $v_2v_4$  are red, then there will be red triangle as shown in Figure 1.3. But if none of them are red lines, there will be a blue triangle as shown in Figure 1.4. Hence, six is the least number for this problem.

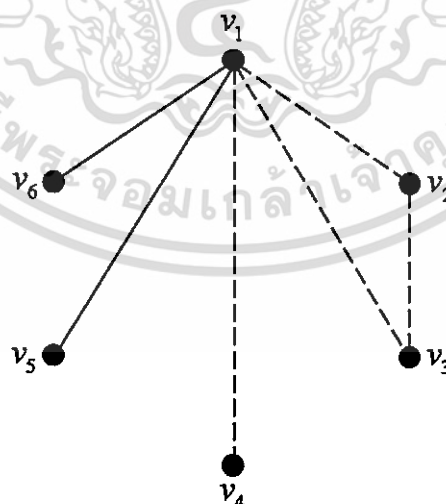


Figure 1.3 The graph shows that  $v_2v_3$  is dash line.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

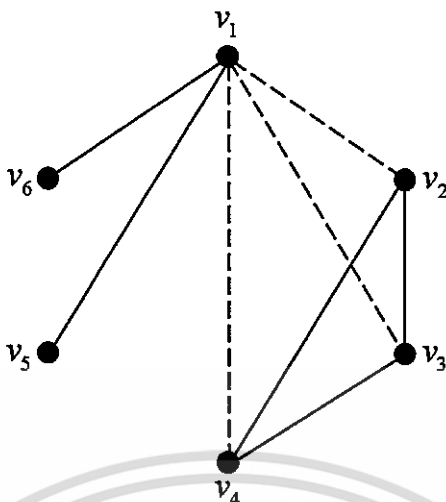


Figure 1.4 The graph shows that  $v_2v_3$ ,  $v_3v_4$  and  $v_2v_4$  are dark line.

There will be more formation of a triangle with red or blue lines if more vertices are added. This problem is the beginning of the study about the definition and properties of Ramsey numbers of a complete graph ( $K_n$ ) and the development of other forms of graph for example, cycles ( $C_n$ ), paths ( $P_n$ ) and wheels ( $W_n$ ) as well as increasing of 2-relation to the multi-relation (2-color to multi-color).

Further studies in Ramsey numbers have been done by studying different forms. There are several definitions such as  $R(C_n, C_m)$ ,  $R(P_n, P_m)$ ,  $R(P_n, P_m, C_1)$ ,  $br(C_n, C_m)$ ,  $br(P_n, P_m)$ ,  $br_k(C_n)$ ,  $br_k(P_n)$ , etc.

In 1975, Fauduree and Schelp [9] showed the values of  $br(G_1, G_2)$  when both  $G_1$  and  $G_2$  are two even paths. They obtained that  $br(P_{2m}, P_{2n}) = n + m - 1$  for  $n, m \in \mathbb{Z}^+$ .

In 1991, Exoo [8] showed that  $br_3(C_4) = 11$ .

In 1998, Hattingh and Henning [13] proved that

$$br(P_m, K_{1,n}) \leq n + \left\lfloor \frac{(m-1)}{2} \right\rfloor \quad \text{for integers } n, m \geq 2.$$

In 2011, Rui and Yonggi [15] showed that

$$br(C_{2m}, K_{2,2}) = m + 1 \quad \text{for integer } m \geq 4$$

and

$$br(C_{2m}, C_{2n}) \geq m + n - 1 \quad \text{for integers } m \neq n.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This thesis is divided into four chapters. In Chapter 1, we provide the basic idea of Ramsey numbers. In Chapter 2, more formal definitions related to Ramsey numbers are discussed and deals with some preliminaries and some useful results which will be used in the next chapter. In Chapter 3, we demonstrate our results on some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers. We conclude our main results in Chapter 4.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## Chapter 2

### Basic Concepts and Preliminaries

In this chapter, we begin by introduce some important concepts in graph theory that will allow us to develop Ramsey theory later. First, we will establish what a graph is and some important terminology used in graph theory.

#### 2.1 Graphs

**Definition 2.1.1** A graph  $G=(V(G),E(G))$  consists of a non-empty set of all elements, called *vertices*, and a set of unordered pairs of these elements, called *edges*. The set of vertices of the graph  $G$  is called the *vertex set* of  $G$ , denoted by  $V(G)$ , and the set of edges is called the *edge set* of  $G$ , denoted by  $E(G)$ .

**Example 2.1.2** Let  $G=(V(G),E(G))$  be a graph with  $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$  and  $E(G)=\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\}\}$ . The graph  $G$  is shown in Figure 2.1.



Figure 2.1 Graph  $G=(V(G),E(G))$  in Example 2.1.2.

**Definition 2.1.3** The edge  $e=\{u,v\}$  is said to *join* the vertices  $u$  and  $v$ . If  $e=\{u,v\}$  is a edge of a graph  $G$ , then  $u$  and  $v$  are *adjacent vertices*, while  $u$  and  $e$  are *incident*, as are  $v$  and  $e$ . Furthermore, if  $e_1$  and  $e_2$  are distinct edges of  $G$  incident with a common vertex, then  $e_1$  and  $e_2$  are *adjacent edges*.

It is often convenient to denote an edge by  $uv$  or  $vu$  rather than by  $\{u,v\}$ .

Note that  $uv=vu$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

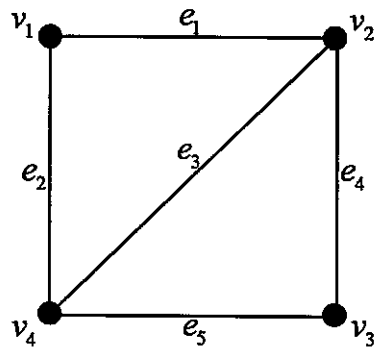


Figure 2.2 Graph illustrating adjacent vertices and incident.

**Example 2.1.4** From Figure 2.2,  $v_1$  and  $v_2$  are adjacent vertices, while  $v_1$  and  $v_3$  are not adjacent vertices,  $v_2$  and  $e_3$  are incident, while  $v_3$  and  $e_3$  are not incident.

**Definition 2.1.5** The cardinality of the vertex set of a graph  $G$  is called the *order* of  $G$  and commonly denoted by  $n(G)$ , or more simply by  $n$  when the graph under consideration is clear; while the cardinality of its edge set is the *size* of  $G$  and is often denoted by  $m(G)$  or  $m$ . An  $(n, m)$ -graph has order  $n$  and size  $m$ .

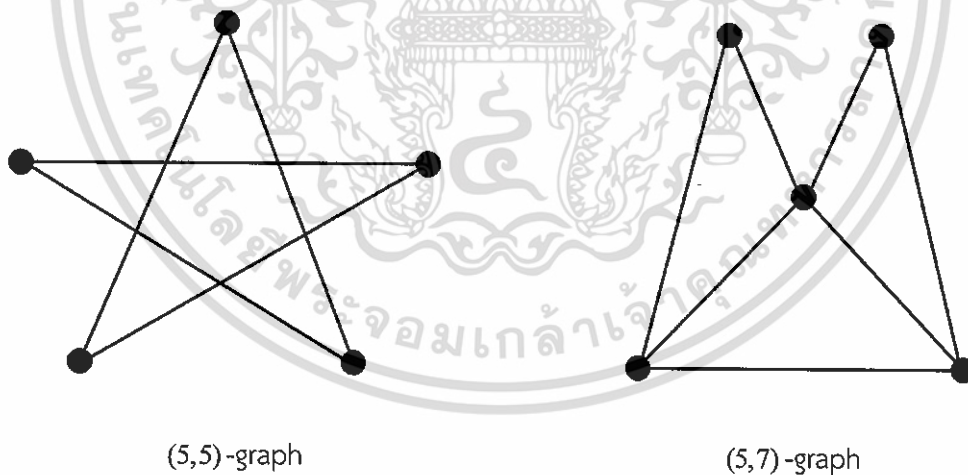


Figure 2.3 The  $(n, m)$ -graphs.

**Definition 2.1.6** A graph  $H$  is a *subgraph* of a graph  $G$  if  $V(H) \subseteq V(G)$  and  $E(H) \subseteq E(G)$ . If  $H$  is a subgraph of  $G$ , then we write  $H \subseteq G$ .

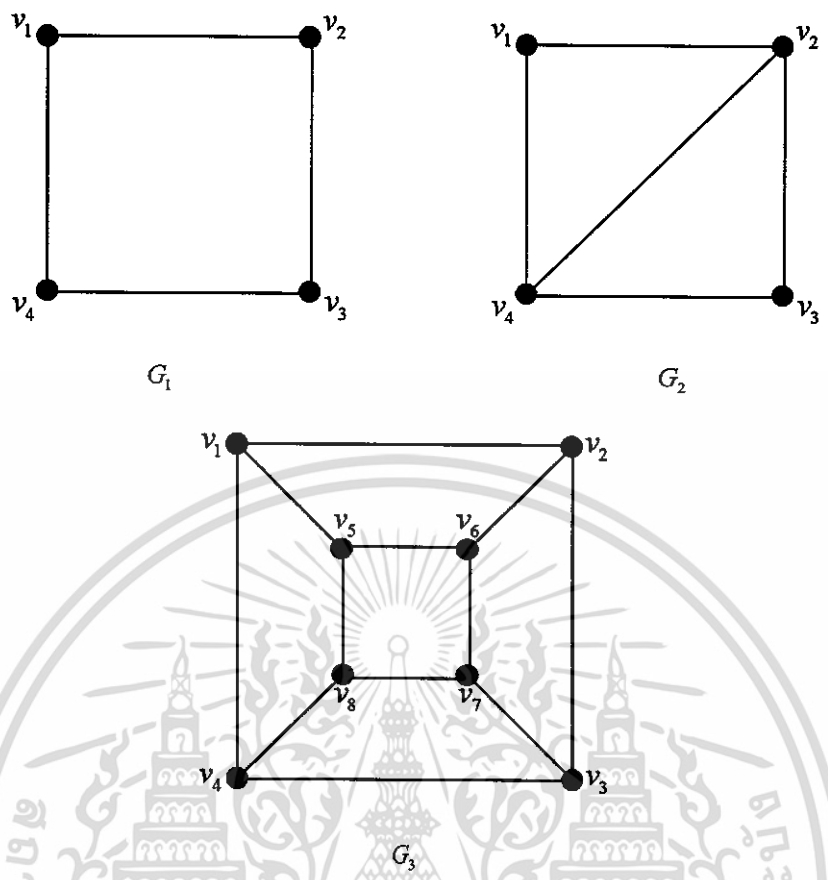


Figure 2.4 The graphs show  $G_1 \subseteq G_2$ ,  $G_1 \subseteq G_3$ , but  $G_2 \not\subseteq G_3$ .

Definition 2.1.7 The *degree* of a vertex  $v$  in a graph  $G$  is the number of edges of  $G$  incident with  $v$ , and is denoted by  $\text{deg}(v)$ .

Definition 2.1.8 A sequence  $d_1, d_2, \dots, d_n$  of nonnegative integers is called a *degree sequence* of a graph  $G$  if the vertices of  $G$  can be labeled  $v_1, v_2, \dots, v_n$  so that  $\text{deg}(v_i) = d_i$  for all  $i$ . For example, a degree sequence of a graph of Figure 2.5 is  $3, 3, 2, 2, 4, 2$ .

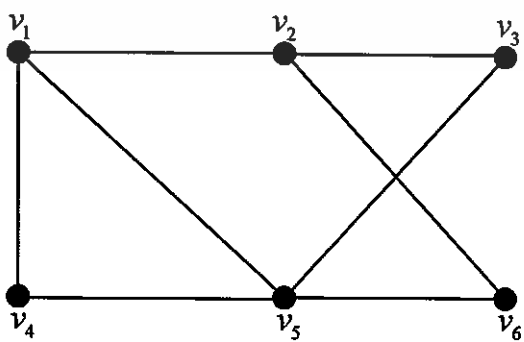


Figure 2.5 A degree sequence of a graph.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Definition 2.1.9** Let  $u$  and  $v$  be vertices of a graph  $G$ . A  $u-v$  walk of  $G$  is a finite, alternating sequence

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v$$

of vertices and edges, beginning with a vertex  $u$ , called the *initial vertex*, and ending with a vertex  $v$ , called the *terminal vertex*, in which  $e_i = u_{i-1}u_i$  for  $i = 1, 2, \dots, k$  are edges in  $G$ . The number  $k$ , the number of edges, is called *length of walk*.

**Definition 2.1.10** Consider a walk from a vertex  $u$  to a vertex  $v$  in  $G$ . If  $u$  and  $v$  are the same, then a  $u-v$  walk is called a *closed walk*. If  $u$  and  $v$  are different, then a  $u-v$  walk is called an *open walk*.

**Definition 2.1.11** A walk with no repeated edges is called a *trail*, and a walk with no repeated vertices is called a *path*. A path with  $n$  vertices is denoted by  $P_n$ .

For example, the graphs in Figure 2.6 are  $P_2, P_3, P_4$  and  $P_5$ , respectively.

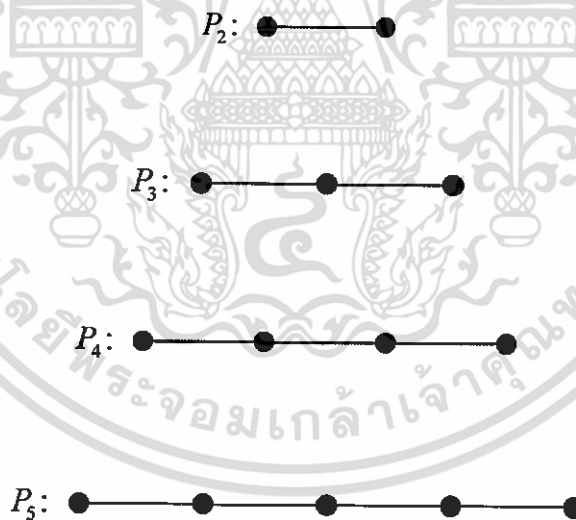


Figure 2.6 The graphs  $P_2, P_3, P_4$  and  $P_5$ .

**Definition 2.1.12** A walk, path, or trail is called *trivial* if it has only one vertex and no edge. A walk, path, or trail that is not trivial is called *nontrivial*.

**Definition 2.1.13** A nontrivial closed trail from a vertex  $u$  to itself is called a *circuit* in a graph. A circuit  $v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_n, v_nv_1, v_1$  ( $n \geq 3$ ) whose  $n$  vertices with  $v_1$  are all distinct is called a *cycle*. The number of vertices in a cycle is called its *length*. The cycle with  $n$  vertices is denoted by  $C_n$ .

For example, the graphs in Figure 2.7 are  $C_3$ ,  $C_4$  and  $C_5$ , respectively.

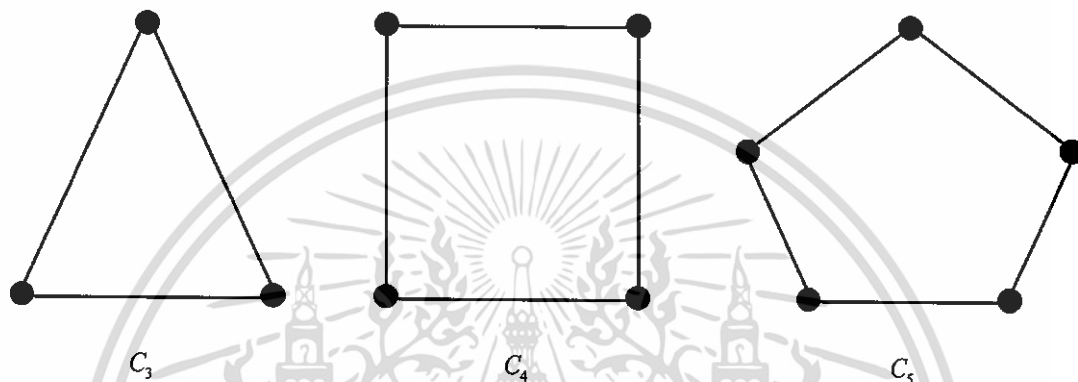


Figure 2.7 The graphs  $C_3$ ,  $C_4$  and  $C_5$ .

**Example 2.1.14** Consider the graph in Figure 2.8.

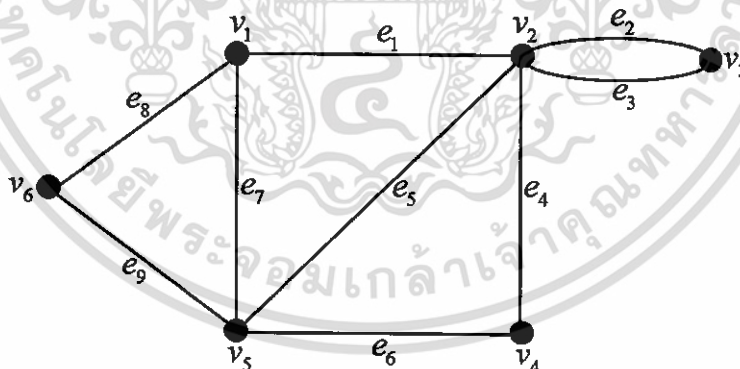


Figure 2.8 Graph illustrating walks, trails, paths and cycles.

In this graph,  $v_5, e_7, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_6$  is a walk but not trail;  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_2, e_1, v_1$  is a closed walk;  $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_6, v_5, e_9, v_6$  is a trail;  $v_6, e_8, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3$  is a path and  $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_6, v_5, e_7, v_1$  is a cycle. Also  $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3$  is a path and  $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_6, v_5, e_9, v_6, e_8, v_1$  is a cycle of this graph.

**Definition 2.1.15** A vertex  $u$  is said to be *connected* to a vertex  $v$  in graph  $G$  if there exists a  $u-v$  path in  $G$ . A graph  $G$  is *connected* if every two vertices are connected.

**Definition 2.1.16** For a connected graph  $G$ , we define the *distance*  $d(u,v)$  between two vertices  $u$  and  $v$  as the minimum number of length of  $u-v$  path of  $G$ .

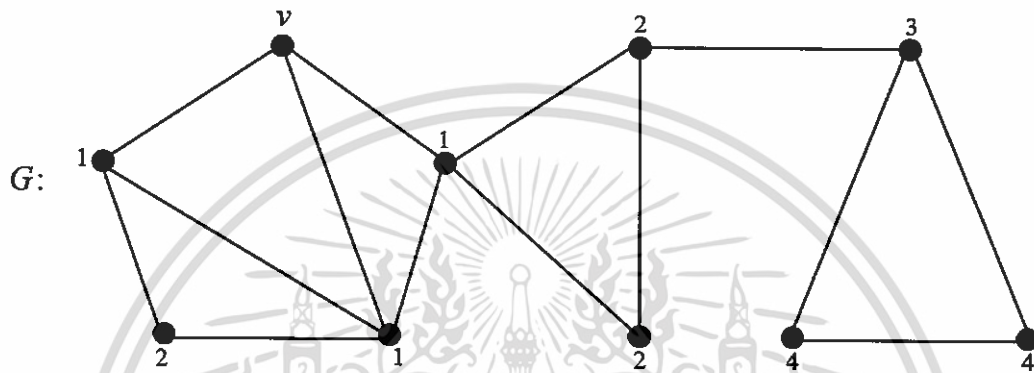


Figure 2.9 Distances from the vertex  $v$  to vertices of  $G$ .

**Definition 2.1.17** A graph  $G_1$  is *isomorphic* to a graph  $G_2$  if there exists a one-to-one mapping  $\phi$ , called an *isomorphism* from  $V(G_1)$  into  $V(G_2)$  such that  $\phi$  preserves adjacency; that is,  $uv \in E(G_1)$  if and only if  $\phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$ . If  $G_1$  is isomorphic to  $G_2$ , then we say  $G_1$  and  $G_2$  are isomorphic or equal and written by  $G_1 \cong G_2$ .

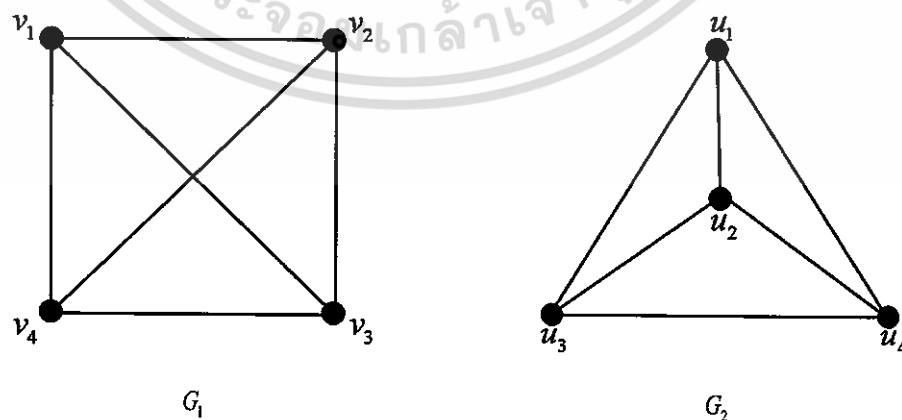


Figure 2.10 Isomorphic graphs  $G_1 \cong G_2$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Definition 2.1.18** A simple graph is a *complete graph* if every two distinct vertices are adjacent. A complete graph of order  $n$  is denoted by  $K_n$ .

The graphs  $K_n$  for  $n=1,2,3,4,5$ , are displayed in Figure 2.11.

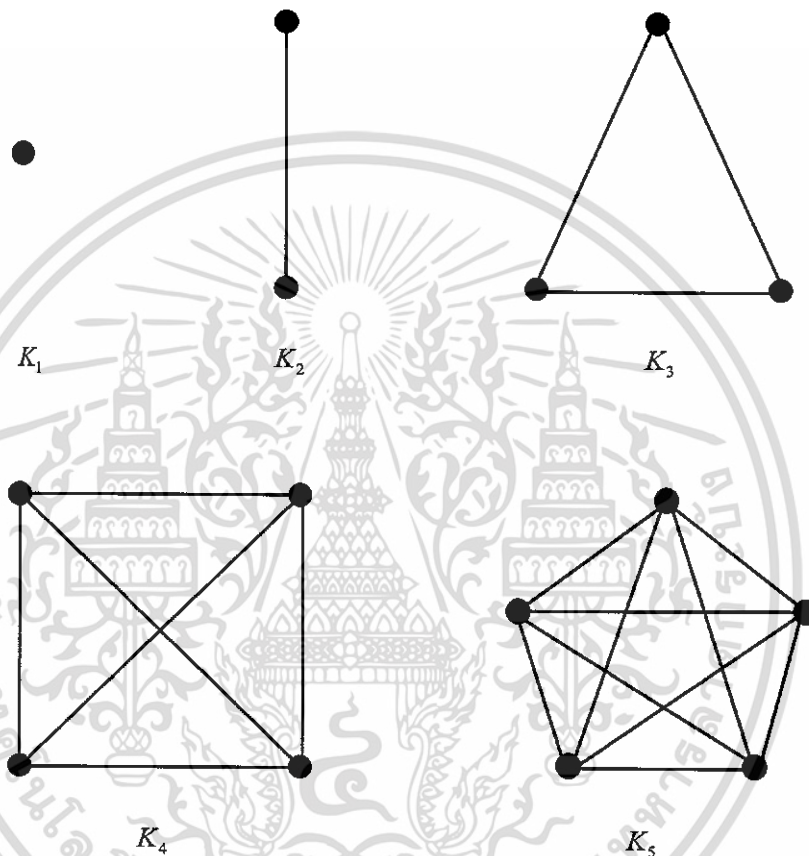


Figure 2.11 The complete graphs  $K_n, 1 \leq n \leq 5$ .

**Definition 2.1.19** A simple graph  $G$  is called a *bipartite graph*, denoted by  $G(V_1, V_2)$ , if its vertex set  $V$  can be partitioned into two disjoint nonempty sets  $V_1$  and  $V_2$  such that each edge in the graph joins a vertex in  $V_1$  and a vertex in  $V_2$  (so that no edge in  $G$  joins either two vertices in  $V_1$  or two vertices in  $V_2$ ).

**Definition 2.1.20** The *complete bipartite graph*, denoted by  $K_{n,m}$ , consists of two disjoint vertex sets  $V_1$  and  $V_2$  where  $n(V_1) = n$  and  $n(V_2) = m$  and the edge set is  $E = \{uv \mid v \in V_1 \text{ and } u \in V_2\}$ .

The complete bipartite graphs  $K_{2,3}$ ,  $K_{2,5}$ ,  $K_{3,3}$  and  $K_{3,6}$  are displayed in Figure 2.12.

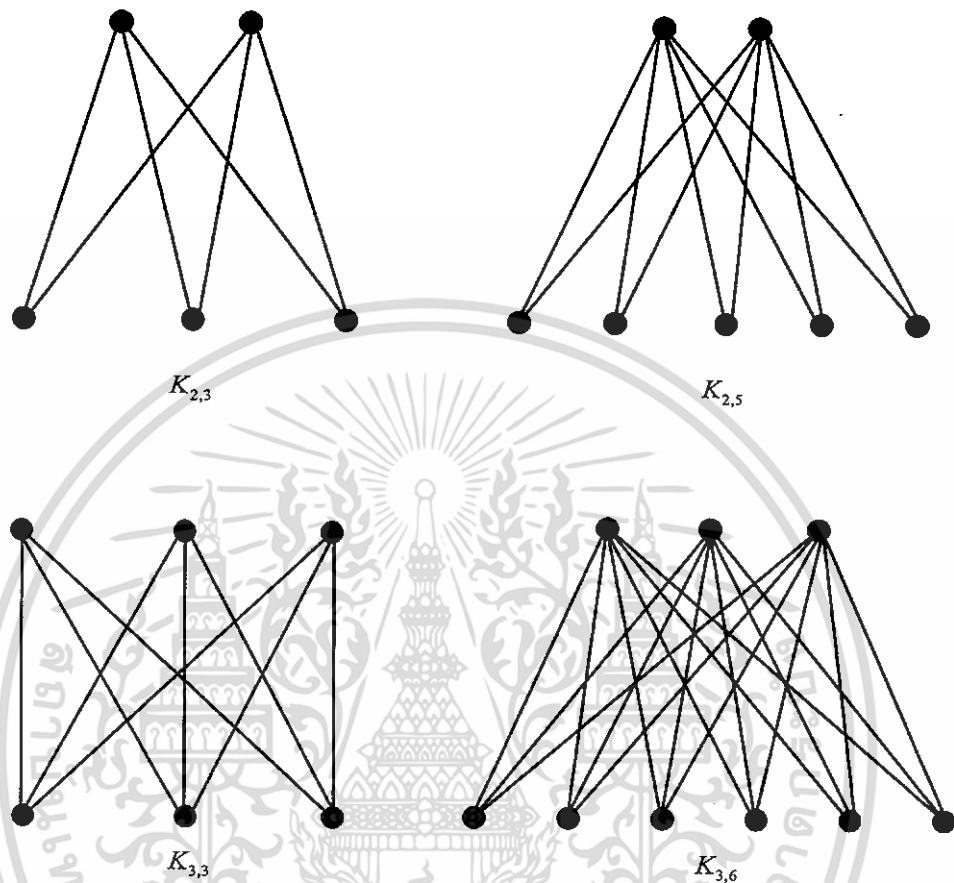


Figure 2.12 The complete bipartite graphs  $K_{2,3}$ ,  $K_{2,5}$ ,  $K_{3,3}$  and  $K_{3,6}$ .

## 2.2 Edge Colorings

**Definition 2.2.1** An *edge coloring* of graph  $G$  is an assignment of colors (which are actually consider as elements of some set) to the edges of  $G$  one color to each edge, so that adjacent edges are assigned different colors.

**Definition 2.2.2** A  $k$ -*edge coloring* of  $G$  is an edge coloring with  $k$  colors.

**Definition 2.2.3** A graph  $G$  is  $k$ -*edge colorable* if there exists an  $l$ -edge coloring of  $G$  for some  $l \leq k$ . The least positive integer  $k$  for which a graph  $G$  is  $k$ -edge colorable is called the *edge chromatic number* or *chromatic index* and is denoted by  $\chi'(G)$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Example 2.2.4** The graph  $G$  in Figure 2.13 shows a 3-edge colorable of its edge set. Since  $G$  is not 2-edge colorable, its chromatic index is 3.

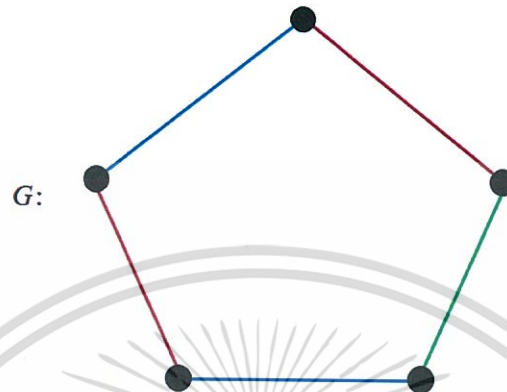


Figure 2.13 A graph  $G$  with  $\chi'(G)=3$ .

**Definition 2.2.5** Given graphs  $H$  and  $G$ , we say that  $G$  is  $H$ -free if  $G$  has no subgraph isomorphic to  $H$ .

**Definition 2.2.6** Given graphs  $H_1, H_2, H_3$  and  $G$ , we say that  $(H_1, H_2, H_3)$ -free if 3-edge coloring (red or blue or green) of  $G$  does not contain monochromatics isomorphic to  $H_1$  (red),  $H_2$  (blue) and  $H_3$  (green).

### 2.3 Ramsey Number

The Ramsey number is named for Frank P. Ramsey who proved its first result. He was born on February 22, 1903 in Cambridge and studied this concept in a set theoretical framework and essentially verified the existence Ramsey numbers.

**Definition 2.3.1** For integers  $s$  and  $t$ , the *two-color classical Ramsey number*  $R(s, t)$  is defined as the least positive integer  $p$  such that if the edges of the complete graph  $K_p$  are arbitrarily colored using the colors red and blue, then either a red  $K_s$  or a blue  $K_t$  will be forced as a subgraph of  $K_p$ . A red  $K_s$  (blue  $K_t$ ) is a subgraph  $K_s$  ( $K_t$ ) which all of whose edges are colored red.



**Definition 2.3.2** For given graphs  $G_1$  and  $G_2$ , the *two-color Ramsey number*  $R(G_1, G_2)$  is the least positive integer  $p$  such that when the edges of  $K_p$  are colored arbitrarily red or blue, there necessarily exists either a red  $G_1$  or a blue  $G_2$  as a subgraph of  $K_p$ . A red  $G_1$  (blue  $G_2$ ) is a subgraph  $G_1$  ( $G_2$ ) which all of whose edges are colored red (blue).

## 2.4 Bipartite Ramsey Number

Consider a complete bipartite graph  $K_{p,p}$  of order  $2p$ . Let each edge of  $K_{p,p}$  be colored by using either red or blue. We shall call such a  $K_{p,p}$  as 2-colored.

Consider a subgraph  $K_{s,t}$  of a two-colored  $K_{p,p}$ . If all edges of  $K_{s,t}$  have red (blue) color, we shall say that the  $K_{p,p}$  contains a red (blue)  $K_{s,t}$ . The least positive integer  $p$  of vertices such that  $K_{p,p}$  always contains red  $K_{s,t}$  or blue  $K_{s,t}$  is called bipartite Ramsey number and denoted by  $br(K_{s,t}, K_{s,t})$ .

**Definition 2.4.1** For given bipartite graphs  $G_1$  and  $G_2$ , the *bipartite Ramsey number*  $br(G_1, G_2)$  is the least positive integer  $p$  such that if the edges of  $K_{p,p}$  are colored with two colors (red or blue), then there always exists either a red  $G_1$  or a blue  $G_2$ .

**Theorem 2.4.1** [5] For every positive integers  $s$  and  $t$ , the bipartite Ramsey number  $br(K_{s,s}, K_{t,t})$  exists; moreover,

$$br(K_{s,s}, K_{t,t}) \leq \binom{s+t}{s} - 1.$$

In [10], some exact values and some upper bounds of bipartite Ramsey numbers  $br(K_{s,s}, K_{t,t}) = b(s, t)$  are shown in Table 2.2.

$br(s, t)$		$t$				
		2	3	4	5	6
$s$	2	5	9	14	$\leq 19$	$\leq 25$
	3		17	$\leq 29$	$\leq 41$	$\leq 56$
	4			$\leq 48$	$\leq 72$	$\leq 101$
	5				$\leq 115$	$\leq 168$

**Table 2.2** Some exact values and upper bounds of bipartite Ramsey numbers.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Definition 2.4.2** For given bipartite graphs  $G_1$ ,  $G_2$  and  $G_3$ , the *three-color bipartite Ramsey number*  $br(G_1, G_2, G_3)$  is defined to be the least positive integer  $p$  such that if the edges of  $K_{p,p}$  with 3 colors (red or blue or green), then there always exists either a red  $G_1$  or a blue  $G_2$  or a green  $G_3$ . We denote by  $G^r$  (resp.  $G^b$  and  $G^g$ ) a subgraph induced by red (resp. blue and green)

**Theorem 2.4.2** [9] For all integers  $n$  and  $m$ ,

$$br(P_{2m}, P_{2n}) = n + m - 1$$

and

$$br(P_{2m}, P_{2n+1}) = n + m - 1.$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 3

Some Lower Bounds of  $br(P_l, P_m, C_n)$

In this chapter, we will find some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers for paths and cycles  $br(P_l, P_m, C_n)$  and the three-color bipartite Ramsey number  $br(P_4, P_4, C_4)$ .

The following Theorem show some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers for paths and cycles  $br(P_l, P_m, C_n)$  when  $P_l$  is an even path and  $P_m$  is an even or odd path.

**Theorem 3.1** If  $n \geq 3$  and  $m \geq 1$ , then  $br(P_{2m}, P_n, C_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 2}) \geq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 3$ .

**Proof.** Let  $K^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}$  and  $K^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}$  be vertex partition of a complete bipartite graph  $K_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4}$  which partition partite sets  $V_i(K_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4})$  into  $V_i^1 = V_i^1(K_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4})$  and  $V_i^2 = V_i^2(K_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4})$  with  $|V_i^1| = |V_i^2| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2$  for  $i \in \{1, 2\}$ .

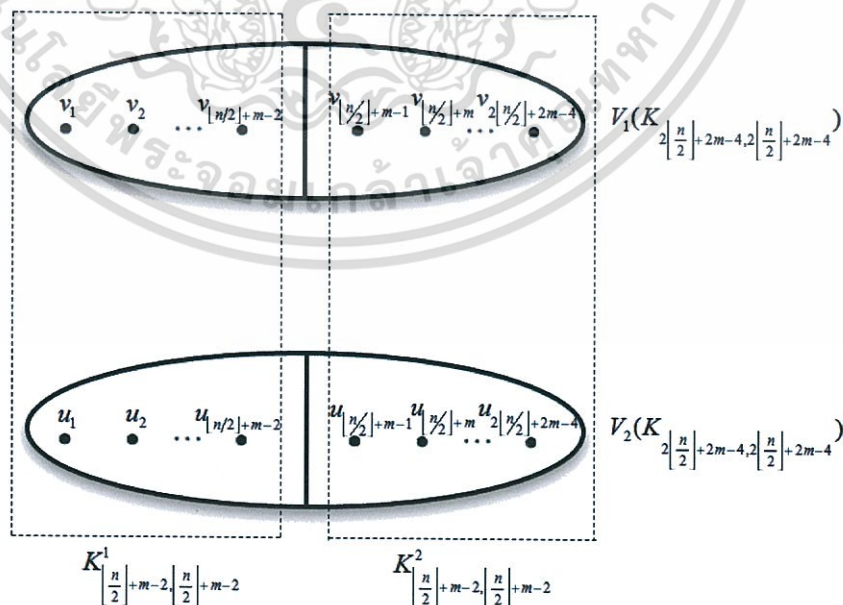


Figure 3.1 The partition of  $V(K_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4})$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Since  $br(P_{2m}, P_n) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2$  from Theorem 2.4.2, there is a 2-edge coloring (red and blue) of  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}^1$  (resp.  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}^2$ ) which no red  $P_{2m}$  and no blue  $P_n$  as shown in Figure 3.2.

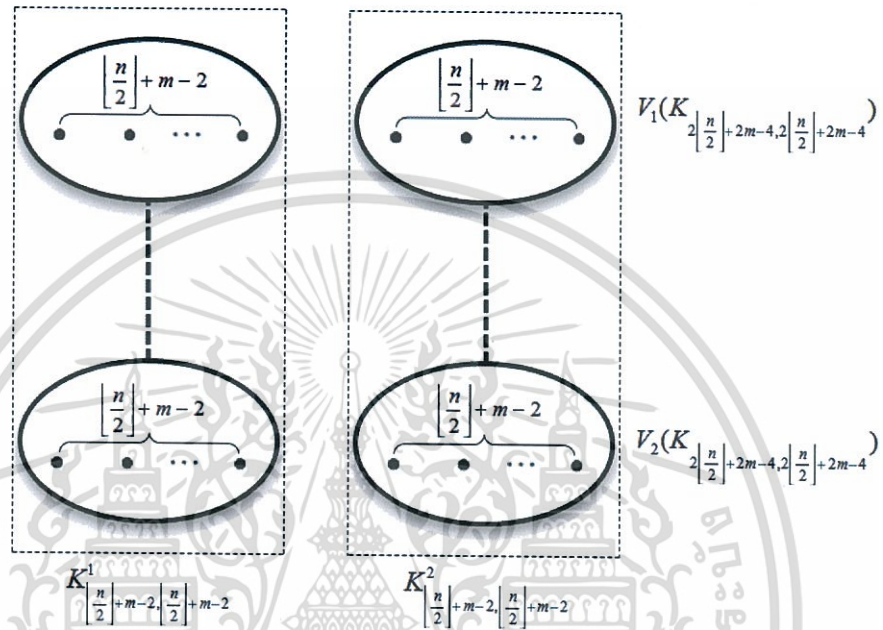


Figure 3.2 The red and blue edges represented by dash line.

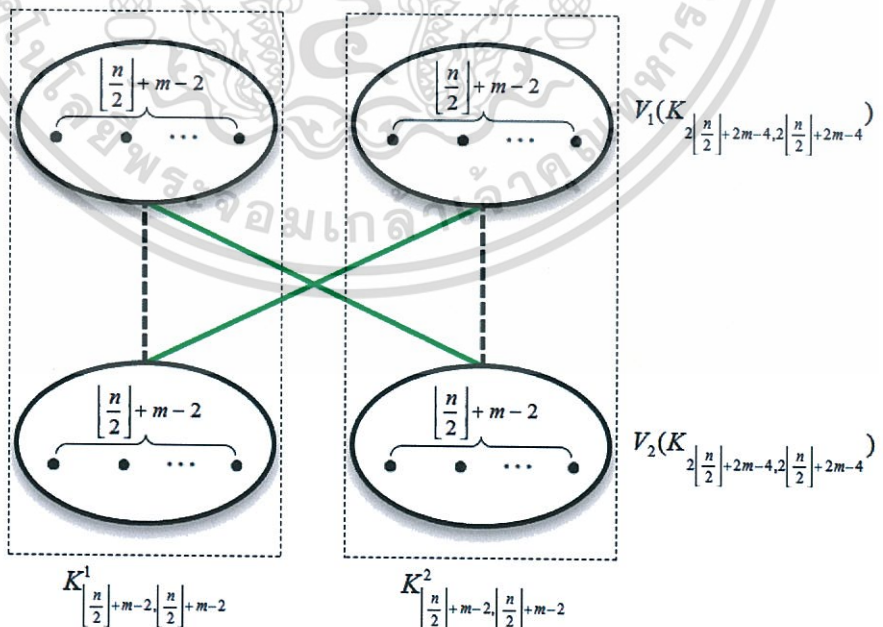


Figure 3.3 All edges between  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}^1$  and  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}^2$  are colored with green.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Next, color edges between  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}$  and  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m - 2}$  with green. Then this edge coloring contains maximal cycle of order  $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 4$ . In other words, it does not contain  $C_{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 2}$ . Therefore,  $br(P_{2m}, P_n, C_{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 2}) \geq 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 3$ .  $\square$

The following corollary are straightforward.

**Corollary 3.1** If  $n \geq 2$ , then  $br(P_4, P_{2n-2}, C_{2n}) \geq 2n - 1$ .

Next, we will find some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers  $br(P_l, P_m, C_n)$  when both  $P_l$  and  $P_m$  are odd paths.

**Theorem 3.2** If  $n \geq 1$ , then  $br(P_{2n+1}, P_{2n+1}, C_{2n+2}) \geq 3n + 1$ .

**Proof.** Let  $G_1, G_2$  and  $G_3$  be bipartite graphs with  $V_1(G_i) = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i\}$  and  $V_2(G_j) = \{u_1^j, u_2^j, \dots, u_n^j\}$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . The vertex set of  $G_i$  are obtained from the vertex partition of  $K_{3n, 3n}$  by removing all edges as shown in Figure 3.4.

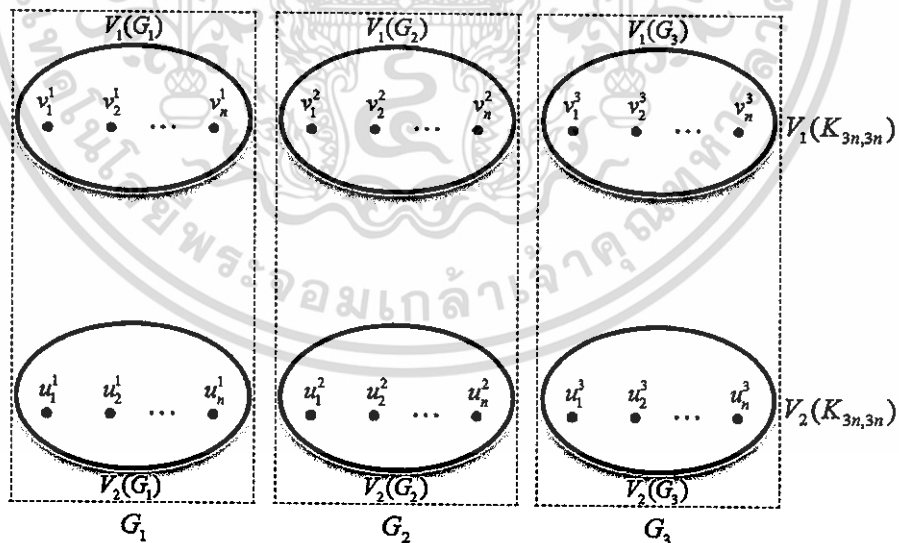


Figure 3.4 A partition of vertex set of  $K_{3n, 3n}$  into  $V(G_1), V(G_2)$  and  $V(G_3)$ .

Next, we define an edge coloring between  $V_1(G_i)$  and  $V_2(G_j)$  with 3 colors (red, blue and green) as follows:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 1) The red edges join edges between  $V_1(G_i)$  and  $V_2(G_j)$  where  $i = j$ .

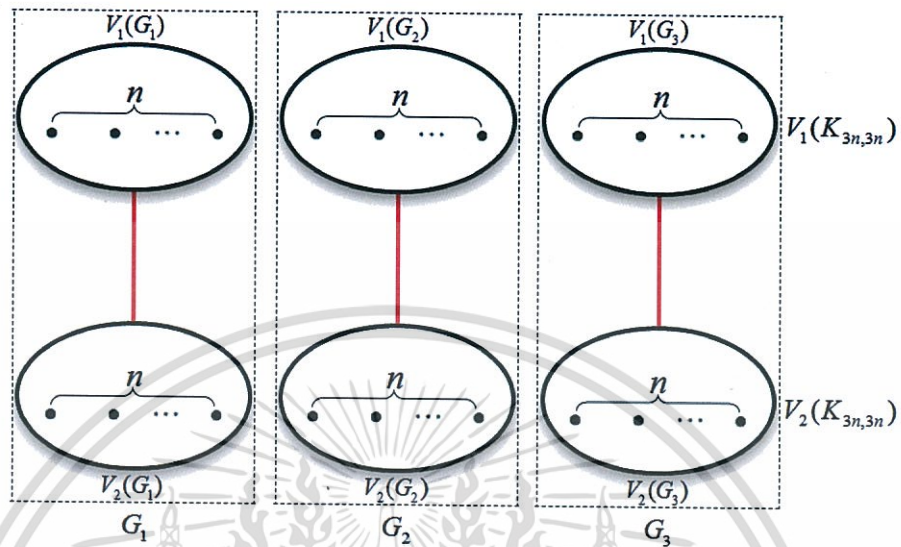


Figure 3.5 Red subgraph of 3-edge coloring of  $K_{3n,3n}$ .

- 2.) The blue edges join edges between  $V_1(G_i)$  and  $V_2(G_j)$  where  $j = \begin{cases} i+1 \pmod{3} & \text{if } i = 1,3 \\ i+1 & \text{if } i = 2. \end{cases}$

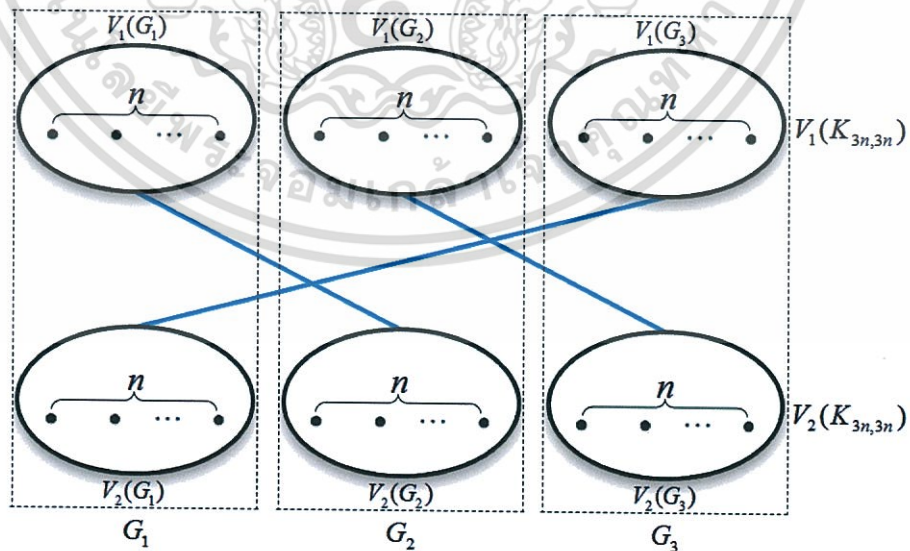


Figure 3.6 Blue subgraph of 3-edge coloring of  $K_{3n,3n}$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 3.) The green edges join edges between  $V_1(G_i)$  and  $V_2(G_j)$  where 
$$j = \begin{cases} i+2 & \text{if } i=1 \\ i+2 \pmod{3} & \text{if } i=2,3. \end{cases}$$

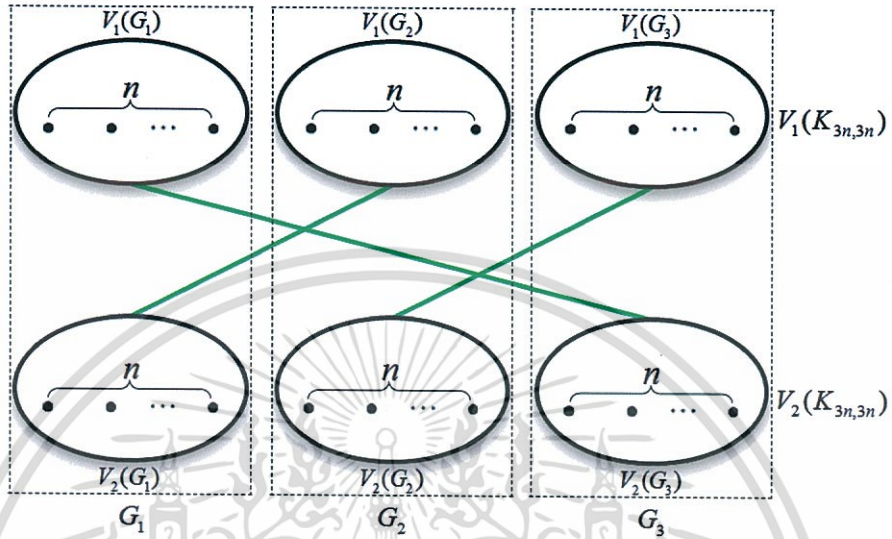


Figure 3.7 Green subgraph of 3-edge coloring of  $K_{3n,3n}$ .

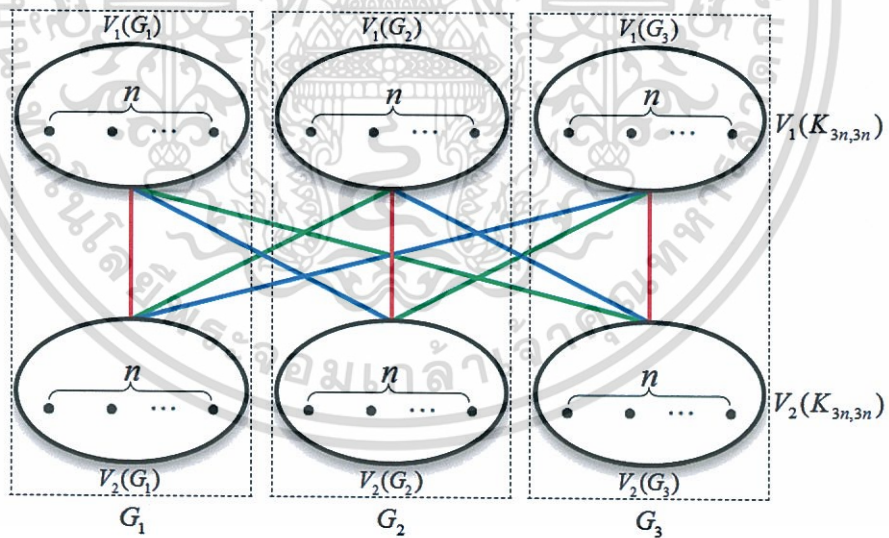


Figure 3.8 The 3-edge coloring of  $K_{3n,3n}$ .

From Figure 3.8, we see that  $K_{3n,3n}^r$  and  $K_{3n,3n}^b$  contain maximal paths of order  $2n$  and  $K_{3n,3n}^g$  contains a maximal cycle of order  $2n$ . This implies that  $K_{3n,3n}^r$ ,  $K_{3n,3n}^b$  and  $K_{3n,3n}^g$  contain no  $P_{2n+1}$ ,  $P_{2n+1}$  and  $C_{2n+2}$ , respectively. Therefore,  $br(P_{2n+1}, P_{2n+1}, C_{2n+2}) \geq 3n+1$ . □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Finally, we will find some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers  $br(P_l, P_m, C_n)$  when both  $P_l$  and  $P_m$  are even paths and the three-color bipartite Ramsey number  $br(P_4, P_4, C_4)$ .

**Theorem 3.3** If  $n \geq 1$ , then  $br(P_4, P_{2n}, C_4) \geq n + 2$ .

**Proof.** Let  $G$  be a 3-edge coloring of  $K_{n+1, n+1}$  with  $V_1(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$  and  $V_2(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$  such that the vertex  $v_1$  ( $v_2$ ) adjacent to all vertices of  $V_2(G)$  with red (blue).

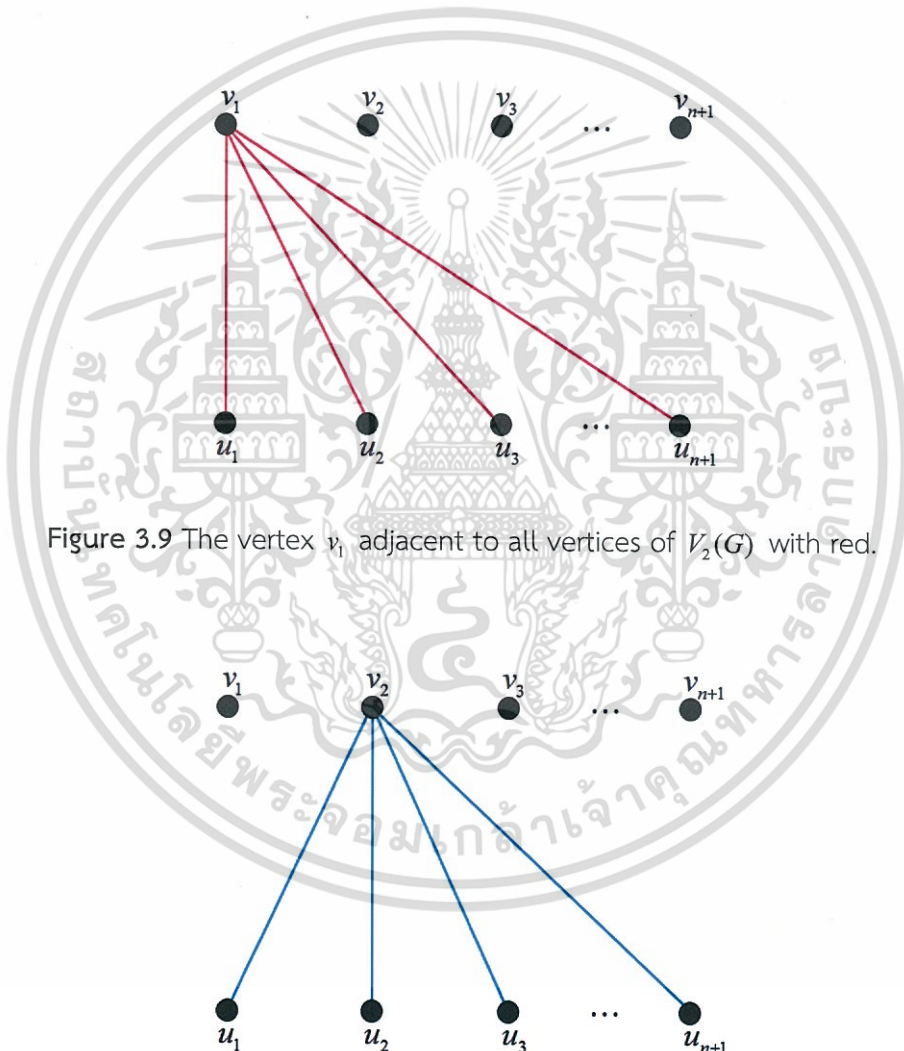


Figure 3.9 The vertex  $v_1$  adjacent to all vertices of  $V_2(G)$  with red.

Figure 3.10 The vertex  $v_2$  adjacent to all vertices of  $V_2(G)$  with blue.

Next, the remaining edges of  $G$  are colored with green, in other words  $K_{n, n-1}$  is colored with green.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

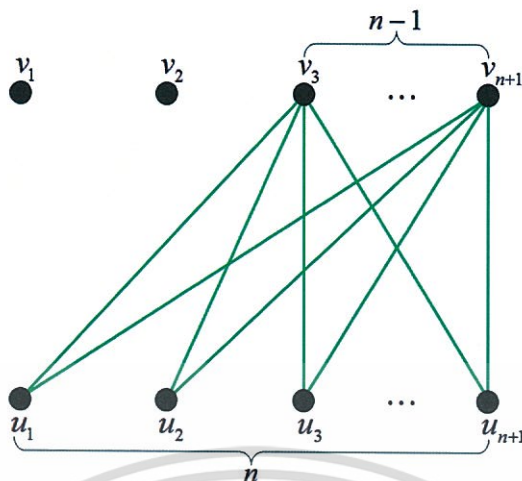


Figure 3.11 The remaining edges are colored with green.

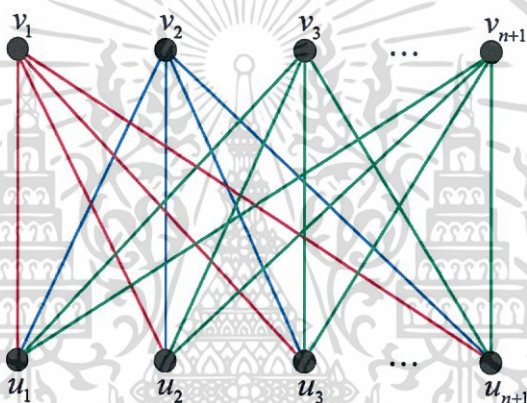


Figure 3.12 The 3-edge coloring of  $K_{n+1, n+1}$ .

From Figure 3.12, it is easy to see that  $K_{n+1, n+1}^r$  and  $K_{n+1, n+1}^b$  contain maximal paths of order 3 and  $K_{n+1, n+1}^g$  contains maximal path of order  $2n-3$ . Then for each monochromatic copy of  $K_{n+1, n+1}$  is a  $(P_4, C_4, P_{2n})$ -free. It implies that  $K_{n+1, n+1}^r$  contains no  $P_4$ ,  $K_{n+1, n+1}^b$  contains no  $C_4$  and  $K_{n+1, n+1}^g$  contains no  $P_{2n}$ . Therefore,  $br(P_4, P_{2n}, C_4) \geq n+2$ . □

In fact, this lower bound can slightly improve the three-color bipartite Ramsey number  $br(P_4, P_4, C_4)$ .

**Theorem 3.4**  $br(P_4, P_4, C_4) = 5$ .

**Proof.** Firstly, we will show that  $br(P_4, P_4, C_4) > 4$ . Theorem 3.3 yields  $br(P_4, P_4, C_4) \geq 4$ . Consider subgraphs of  $K_{4,4}$  as illustrated in Figure 3.13, Figure 3.14 and Figure 3.15 which represent subgraphs of the 3-edge colored of  $K_{4,4}$  with red, blue and green, respectively.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

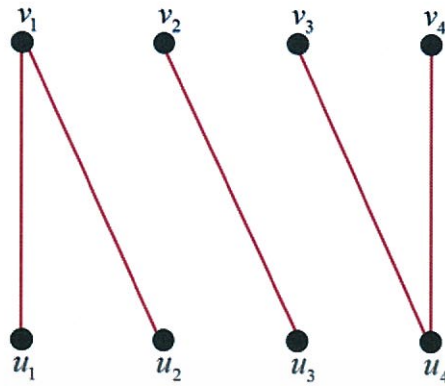


Figure 3.13 Red subgraph of 3–edge coloring of  $K_{4,4}$ .



Figure 3.14 Blue subgraph of 3–edge coloring of  $K_{4,4}$ .

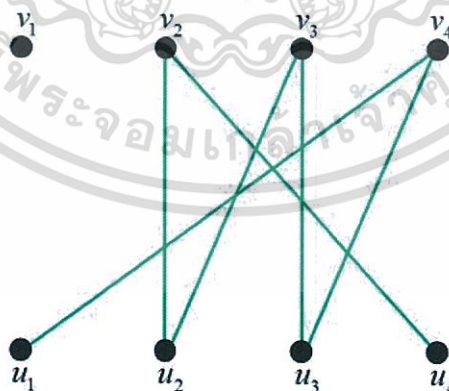


Figure 3.15 Green subgraph of 3–edge coloring of  $K_{4,4}$ .

Consider the 3–edge coloring of  $K_{4,4}$ . It can be verified that  $K_{4,4}$  contains no red  $P_4$ , no blue  $P_4$  and no green  $C_4$ . Therefore,  $br(P_4, P_4, C_4) > 4$ . That is,  $br(P_4, P_4, C_4) \geq 5$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Secondly, we will show that  $br(P_4, P_4, C_4) \leq 5$ . Suppose to the contrary that there exists a 3-edge coloring with color red, blue and green of  $K_{5,5}$  such that the  $K_{5,5}^r$  contains no  $P_4$ ,  $K_{5,5}^b$  contains no  $P_4$  and  $K_{5,5}^g$  contains no  $C_4$ . Since  $K_{5,5}$  has 25 edges, the numbers of red, blue and green edges are 8, 8, 9, respectively.

Let  $G$  be a bipartite graph with  $V_1(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  and  $V_2(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ . We illustrate patterns of subgraphs of  $G$  does not contain  $P_4$  as follows:

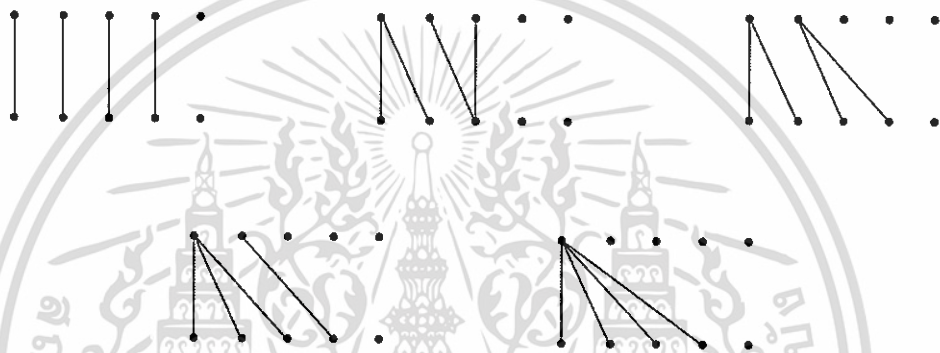


Figure 3.16 Patterns of subgraphs of  $G$  with size 4.

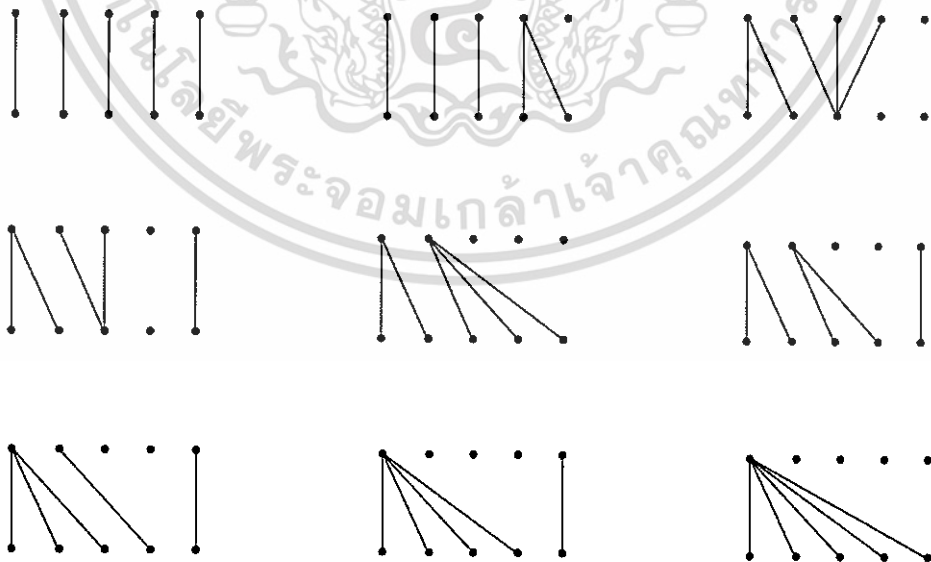


Figure 3.17 Patterns of subgraphs of  $G$  with size 5.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

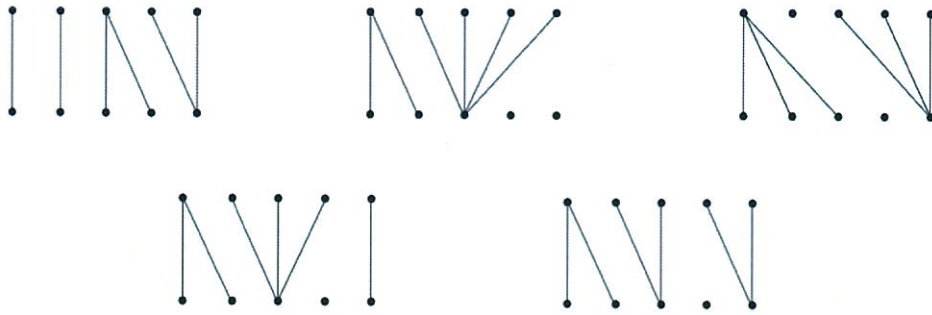


Figure 3.18 Patterns of subgraphs of  $G$  with size 6.



Figure 3.19 Patterns of subgraphs of  $G$  with size 7.

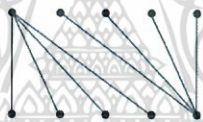


Figure 3.20 Patterns of subgraphs of  $G$  with size 8.

From Patterns of subgraphs of  $G$ , it has at most 8 edges. So  $K_{5,5}^r$  can be represent by one pattern of degree with  $\deg(v_i)=4,1,1,1,1$  and  $\deg(u_i)=1,1,1,1,4$ , as shown in Figure 3.21.

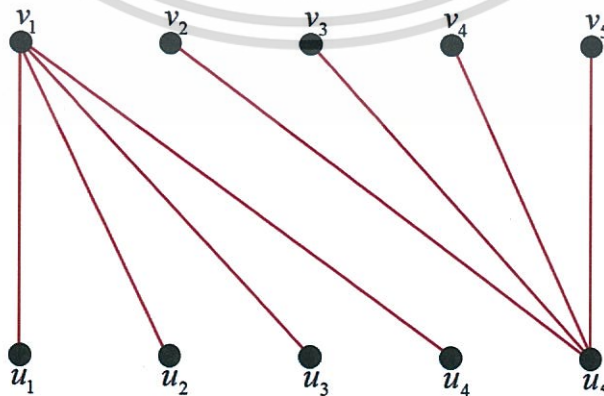


Figure 3.21  $\deg(v_i)=4,1,1,1,1$  and  $\deg(u_i)=1,1,1,1,4$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In Figure 3.21, we consider the vertex  $v_1$  which one edge with joint vertex set of  $V_2(G)$ , that is  $v_1u_5$ . This implies that the blue edges can't have 8 edges. So, we reduce number of blue edges to 7 edges. It implies that  $K_{5,5}^b$  has pattern of degree is  $\deg(v_i)=1,1,1,1,3$  and  $\deg(u_i)=3,1,1,1,1$  as shown in Figure 3.22.

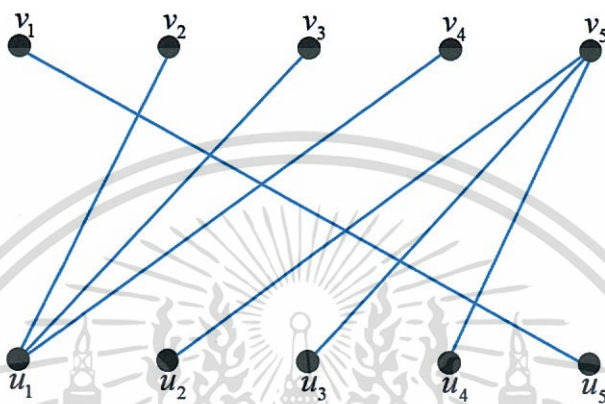


Figure 3.22  $\deg(v_i)=1,1,1,1,3$  and  $\deg(u_i)=3,1,1,1,1$ .

Next, we consider  $K_{5,5}^g$  which does not contain  $C_4$ . It has a pattern of degree is  $\deg(v_i)=0,3,3,3,1$  and  $\deg(u_i)=1,3,3,3,0$ . We consider two cases:

Case I. Vertices  $v_i$  and  $u_j$  are joined with  $\deg(v_i)=1$  and  $\deg(u_j)=1$ . Then we have green edges that contain  $C_4$  as shown in Figure 3.23.

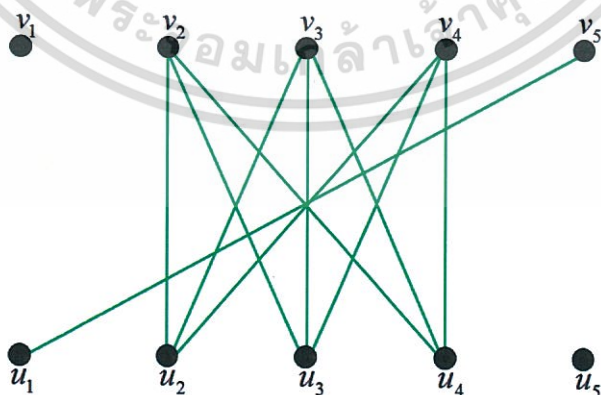


Figure 3.23  $\deg(v_i)=0,3,3,3,1$  and  $\deg(u_i)=1,3,3,3,0$  in case I.

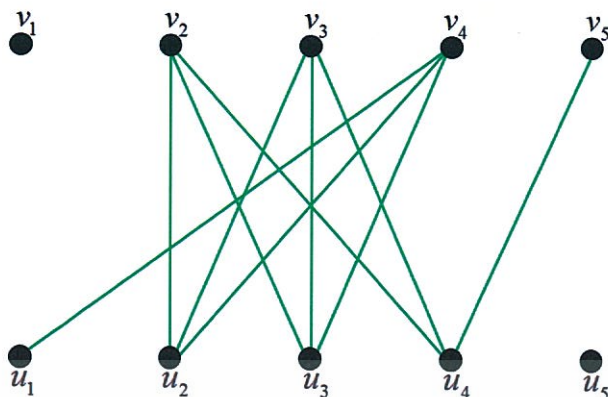


Figure 3.24  $\deg(v_i) = 0, 3, 3, 3, 1$  and  $\deg(u_i) = 1, 3, 3, 3, 0$  in case II.

Case II. Vertices  $v_i$  and  $u_j$  are joined with  $\deg(v_i) = 1$  and  $\deg(u_j) = 3$  or  $\deg(v_i) = 3$  and  $\deg(u_j) = 1$ . Then, the remaining green edges have exactly 8 edges such that  $|V_1| = 3 = |V_2|$  and a pattern of degree is  $\deg(v_i) = 3, 3, 2$  and  $\deg(u_i) = 3, 3, 2$ . It is clearly that edge coloring of green edges contains  $C_4$ , (see Figure 3.24), a contradiction. This proof is completed.  $\square$

## Chapter 4

### Conclusion

From our study in Chapter 3, we obtained the three-color bipartite Ramsey number  $br(P_4, P_4, C_4)$  and some lower bounds of three-color bipartite Ramsey number  $br(P_1, P_m, C_n)$ . We conclude the following results.

#### 4.1 The three-color bipartite Ramsey number

(1) 
$$br(P_4, P_4, C_4) = 5.$$

#### 4.2 Some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers

(1) For integers  $n \geq 3$  and  $m \geq 1$ ,

$$br(P_{2m}, P_n, C_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m - 2}) \geq 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2m - 3.$$

(2) For integer  $n \geq 2$ ,

$$br(P_4, P_{2n-2}, C_{2n}) \geq 2n - 1.$$

(3) For integer  $n \geq 1$ ,

$$br(P_{2n+1}, P_{2n+1}, C_{2n+2}) \geq 3n + 1.$$

(4) For integer  $n \geq 1$ ,

$$br(P_4, P_{2n}, C_4) \geq n + 2.$$

## References

- [1] Balakrishnan, B. and Ranganathan, K. 2000. *A Textbook of Graph Theory*. New York : Springer-Verlag New York.
- [2] Behzad, M. Chartrand, G. and Foster, L.L. 1979. *Graphs and Digraphs*. Boston : Prindle, Weber and Schmidt.
- [3] Bielak, H. 2009. "Multicolor Ramsey number for some paths and cycles." *Discuss. Math. Graph Theory*. 29(2) : 209-218.
- [4] Buada, S. 2012. "Some tripartite ramsey numbers." Thesis for Doctor of Science, Chiang Mai University.
- [5] Chartrand, G. and Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs*. London : Chapman and Hall.
- [6] Dybizbanski, J. and Dzido, T. 2015. "On some Zarankiewicz numbers and bipartite Ramsey numbers for quadrilateral." *Ars Combin*. 119 : 275-287.
- [7] Dzido, T. and Fidytek, R. 2009. "On some three color Ramsey number for paths and cycles." *Discrete Math*. 309(15) : 4955-4958.
- [8] Exoo, G. 1991. "A bipartite Ramsey number." *Graphs Combin*. 7(4) : 395-396.
- [9] Faudree, R. J. and Schelp, R. H. 1975. "Path-path Ramsey-type number for the complete bipartite graph." *J. Combinatorial Theory Ser. B* 19(2) : 161-173.
- [10] Goddard, W. Henning, M. A. and Oellermann, O. R. 2000. "Bipartite Ramsey number and Zarankiewicz." *Discrete Math*. 219(1-3) : 85-95.
- [11] Gross, J. L. and Yellen, J. 2003. *Handbook of Graph Theory*. Florida : CRC PRESS.
- [12] Harary, F. 1969. *Graph Theory*. California : Addison-Wesley.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [13] Hattingh, J. H. and Henning, M. A. 1998. "Star-path bipartite Ramsey number." *Discrete Math.* 185(1-3) : 255-258.
- [14] Radziszowski, S. P. 1994. "Small Ramsey Numbers." *Electron. J. Combin.* Dynamic Survey 1 : 1-30.
- [15] Rui, Z. and Yongqi, S. 2011. "The Bipartite Ramsey numbers  $b(C_{2m}; K_{2,2})$ ." *The Electronic Journal of Combinatorics.* 18(1) : 51-60.
- [16] Rui, Z. Yongqi, S. and Yali, W. 2013. "The bipartite Ramsey numbers  $b(C_{2m}; C_{2n})$ ." *International Journal of Mathematical, Computational, Natural and Physical Engineering.* 7(1) : 80-83.
- [17] Samana, D. 2010. "Upper and lower bounds of ramsey numbers." Thesis for Doctor of Science, Chiang Mai University.
- [18] Shao, Z. Xu, X. Shi, X. and Pan, L. 2009. "Some three-color Ramsey number  $R(P_4, P_5, C_k)$  and  $R(P_4, P_6, C_k)$ ." *European J. Combina.* 30(2) : 396-403.
- [19] Wilson, R. J. and Watkins, J. J. 1990. *Graph : An Introductory Approach.* Singapore : John Wiley and Sons.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## Some Lower Bounds of Three-Color Bipartite Ramsey Numbers for Paths and Cycles

Sarinee Lotrakulnukid<sup>a</sup> and Decha Samana<sup>b</sup>

<sup>ab</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science,  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,  
Bangkok 10520, Thailand

E-mail addresses: <sup>a</sup>soma\_jung@hotmail.com, <sup>b</sup>dechsamana@hotmail.com

**Abstract.** For given graphs  $G_1, G_2, G_3$  the three – color bipartite Ramsey number  $br(G_1, G_2, G_3)$  is defined to be the least positive  $p$  such that any coloring of edges of  $K_{p,p}$  with 3-colors contains a monochromatic copy of  $G_i$  colored with  $i$ , for some  $1 \leq i \leq 3$ . In this paper, we give some lower bounds of  $br(P_1, P_m, C_n)$ .

**Keywords:** Bipartite Ramsey number, Edge coloring, Graph.

### INTRODUCTION

Throughout this paper, we shall consider only finite undirected graphs without loops or multiple edges. For a graph  $G$  with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ , we denote the order and the size of  $G$  by  $|V(G)|$  and  $|E(G)|$ , respectively. A graph  $G$  is called a  $(G_1, G_2, G_3)$ -graph if  $G$  does not contain monochromatics  $G_1, G_2$  and  $G_3$ .

The bipartite Ramsey number  $br(G_1, G_2)$  is the least positive integer  $p$  such that if the edges of the complete bipartite graph  $(K_{p,p})$  are colored with red and blue, then there always exists a blue  $G_1$  or a red  $G_2$ . For given graphs  $G_1, G_2, \dots, G_k$ ,  $k \geq 2$ , the multicolor bipartite Ramsey number  $br(G_1, G_2, \dots, G_k)$  is the least positive integer  $p$  such that if we arbitrarily color the edges of  $K_{p,p}$  with  $k$  colors, then it always contains a monochromatic copy of  $G_i$  colored with  $i$ , for some  $1 \leq i \leq k$ . When all graphs  $G_i$  are identical, we usually abbreviate  $br(G, \dots, G)$  by  $br_k(G)$ . We only consider 3-color bipartite Ramsey number  $br(G_1, G_2, G_3)$  (in other words we color the edges of  $K_{p,p}$  with colors red, blue and green).

Fauduree and Schelp [5] proved the values of  $br(G_1, G_2)$  when both  $G_1$  and  $G_2$  are two paths

$$br(P_{2m}, P_{2n}) = n + m - 1 \quad \text{for } n, m \in \mathbb{Z}^+.$$

Similarly, Rui and Yonggi [9] showed that

$$br(C_{2m}, K_{2,2}) = m + 1 \quad \text{for integers } m \geq 4$$

and

$$br(C_{2m}, C_{2n}) \geq m + n - 1 \quad \text{for integers } m \neq n.$$

Hattingh and Henning [8] proved that

$$br(P_m, K_{1,n}) \leq n + \left\lfloor \frac{(m-1)}{2} \right\rfloor \quad \text{for integers } n, m \geq 2.$$

Samana and Longani [10] showed that

$$br_k(C_{2m}) \geq k(m-1) + 2,$$

$$br_k(P_{2m}) \geq k(m-1) + 1,$$

and

$$br_k(P_{2m+1}) \geq k(m-1) + \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor \quad \text{for } k \text{ and } m \text{ are positive integers.}$$

Exoo [4] showed the value of  $br_3(C_4) = 11$ .

In this paper, we determine the value of some lower bounds of three-color bipartite Ramsey numbers  $br(G_1, G_2, G_3)$  as follows: For  $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $br(P_4, P_{2n-2}, C_4)$ ,  $br(P_4, P_4, C_4)$ ,  $br(P_{2m}, P_n, C_{n+2m-2})$  and  $br(P_4, P_{2n-2}, C_{2n})$ .

**SOME LOWER BOUNDS OF  $br(P_1, P_m, C_n)$**

**Theorem 1.** If  $n \geq 3$ , then  $br(P_4, P_{2n-2}, C_4) \geq n+1$ .

**Proof.** Let  $G$  be a 3-coloring of edges of  $K_{n,n}$  with  $V_1(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  and  $V_2(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  such that the vertex  $v_i$  ( $v_2$ ) adjacent to all vertices of  $V_2(G)$  by red (blue). The color of other edges of  $G$  is green, then for each monochromatic subgraph of  $G$  is a  $(P_4, P_{2n-2}, C_4)$ -graph. It implies that  $br(P_4, P_{2n-2}, C_4) \geq n+1$ .  $\square$

But, in fact, this bound can be slightly improved.

**Theorem 2.**  $br(P_4, P_4, C_4) \geq 5$ .

**Proof.** From Theorem 1, we have  $br(P_4, P_4, C_4) \geq 4$ . Next, we will show that  $br(P_4, P_4, C_4) > 4$ . Consider the subgraphs of a  $K_{4,4}$  illustrated in FIGURE 1. Hence, (a), (b) and (c) represent subgraphs of the 3-colored  $K_{4,4}$  with red, blue and green, respectively.

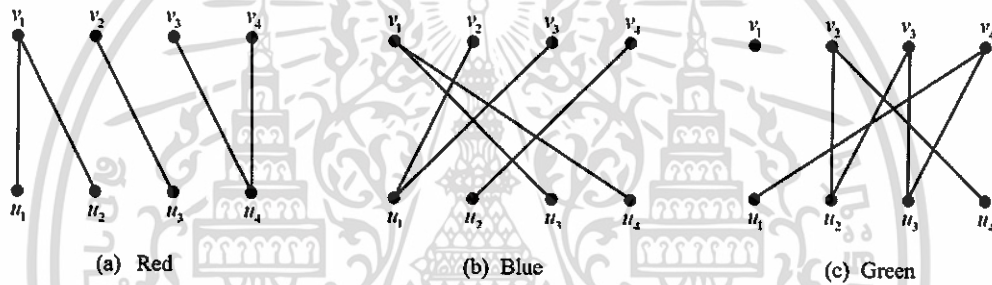


FIGURE 1. Subgraphs of the 3-colored  $K_{4,4}$ .

It can be verified that the  $K_{4,4}$  contains no red  $P_4$ , no blue  $P_4$  and no green  $C_4$ . Therefore  $br(P_4, P_4, C_4) > 4$ . That is  $br(P_4, P_4, C_4) \geq 5$ .  $\square$

**Theorem 3.** If  $n \geq 3$  and  $m \geq 1$ , then  $br(P_{2m}, P_n, C_{n+2m-2}) \geq n+2m-3$ .

**Proof.** Suppose that  $K_{\frac{n}{2}+m-2, \frac{n}{2}+m-2}^1$  and  $K_{\frac{n}{2}+m-2, \frac{n}{2}+m-2}^2$  are separated by a complete bipartite graph order  $n+2m-4$  which the vertices of  $V_1(K_{n+2m-4, n+2m-4})$  into  $V_1^1 = V_1^1(K_{n+2m-4, n+2m-4})$  and  $V_1^2 = V_1^2(K_{n+2m-4, n+2m-4})$  with  $|V_1^1| = |V_1^2| = \frac{n}{2} + m - 2, i \in \{1, 2\}$ . From [5], we get  $br(P_{2m}, P_n) > \frac{n}{2} + m - 2$ , there is a 2-coloring (red and blue) of edges of  $K_{\frac{n}{2}+m-2, \frac{n}{2}+m-2}^1$  (resp.  $K_{\frac{n}{2}+m-2, \frac{n}{2}+m-2}^2$ ) such that there is no red  $P_{2m}$  and no blue  $P_n$ .

Next, all edges between  $K_{\frac{n}{2}+m-2, \frac{n}{2}+m-2}^1$  and  $K_{\frac{n}{2}+m-2, \frac{n}{2}+m-2}^2$  are colored with green that contains green cycle order more than  $n+2m-4$ . Therefore  $br(P_{2m}, P_n, C_{n+2m-2}) \geq n+2m-3$ .  $\square$

The following corollary is straightforward.

**Corollary 1.** If  $n \geq 2$ , then  $br(P_4, P_{2n-2}, C_{2n}) \geq 2n-1$ .

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand.

## REFERENCES

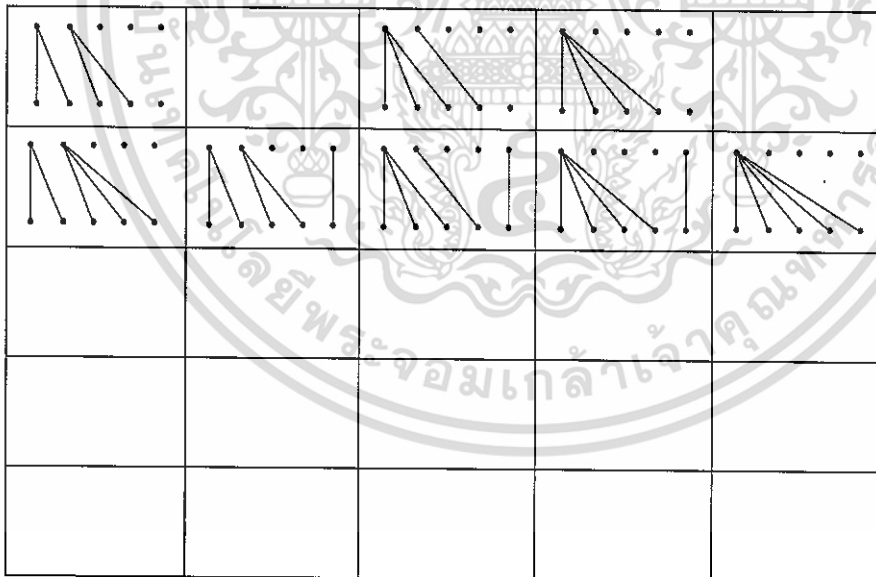
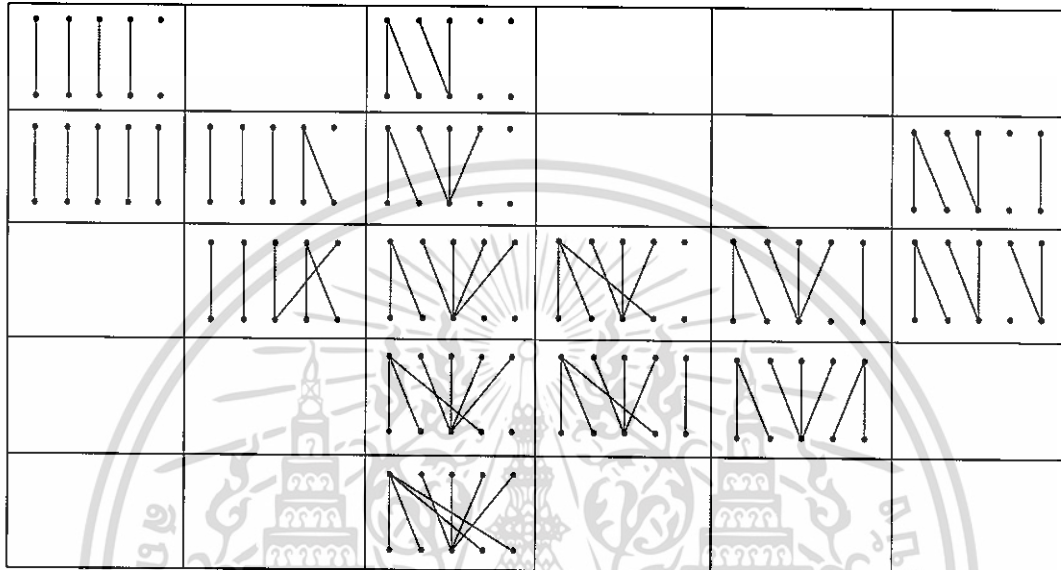
1. H. Bielak, "Multicolor Ramsey number for some paths and cycles", *Discuss. Math. Graph Theory* **29**, 2009, pp. 209-218.
2. J. Dybizbanski and T. Dzido, "On some Zarankiewicz numbers and bipartite Ramsey numbers for quadrilateral", submitted.
3. T. Dzido and R. Fidytek, "On some three color Ramsey number for paths and cycles", *Discrete Math.* **309**, 2009, pp. 4955-4958.
4. G. Exoo, "A bipartite Ramsey number", *Graph and Combin.* **7**, 1991, pp. 395-396.
5. R. J. Faudree and R. H. Schelp, "Path-path Ramsey-type number for the complete bipartite graph", *J. Combin. Theory B* **19**, 1975, pp. 161-173.
6. W. Goddard, M. A. Henning and O. R. Oellermann, "Bipartite Ramsey number and Zarankiewicz", submitted.
7. J. L. Gross and J. Yellen, *Graph Theory-Handbooks*, Discrete Math. And its Applications, 2003, pp.789.
8. J. H. Hattingh and M. A. Henning, "Star-path bipartite Ramsey number", *Discrete Math.* **185**, 1998, pp. 255-258.
9. Z. Rui and S. Yongqi, "The Bipartite Ramsey numbers  $b(C_{2m}; K_{2,2})$ ", *The Electron. J. of Combin.* **18**, 2011.
10. D. Samana and V. Longani, "Lower bounds of Multicolor bipartite Ramsey numbers for cycles and paths", submitted.
11. Z. Shao, X. Xu, X. Shi and L. Pan, "Some three-color Ramsey number,  $R(P_4, P_5, C_4)$  and  $R(P_4, P_6, C_4)$ ", *European J. Combin.* **30**, 2009, pp. 396-403.
12. R. Zhang, Y. Sun and Y. Wu, "The bipartite Ramsey numbers  $b(C_{2m}; C_n)$ ", *International J. of Mathematical, Computational, Phys. And Quantum Engineering* **V7, N1**, 2013.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### Pattern of $G$ contains no $P_4$

Let  $G$  be a bipartite graph with  $V_1(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  and  $V_2(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ . We illustrate that the pattern of  $G$  does not contains  $P_4$ , where  $G$  have size 4, 5, 6, 7 and 8.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## Author Biography

**Name** Miss Sarinee Lotrakulnukid

**Date of Birth** 22 July 1990

**Address** 575 Moo 1, Laharn, Pluakdaeng, Rayong 21140

**Education** (2013) Bachelor of Science in Applied Mathematics. GPA 2.62  
(King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang)

(2015) Master of Science in Applied Mathematics. GPA 3.64  
(King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang)

**E-mail** soma\_jung@hotmail.com



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้