การพิสูจน์กฎไซน์และโคไซน์บนโมเดลแผ่นกลมแบบปวงกาเร
The proving for the Laws of Sine and Cosine on Poincare disk model

ณัฐพล อุทาน
ปุญญิศา บุญไทย
วรงกรณ์ ฝ่ายกำ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

การพิสูจน์กฎไซน์และโคไซน์บนโมเดลแผ่นกลมแบบปวงกาเร
The proving for the Laws of Sine and Cosine on Poincare disk model

ณัฐพล อุทาน
ปุญญิศา บุญไทย
วรงกรณ์ ฝายกำ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

The proving for the Laws of Sine and Cosine on Poincare disk model

Natthaphol Utan

Punyisa Boonthai

Warongkorn Faiga

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIRMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อโครงงานพิเศษ	**การพิสูจน์กฎไซน์และโคไซน์บนโมเดลแผ่นกลมแบบปวงกาเร**
	The proving for the Laws of Sine and Cosine on Poincaredisk model
ชื่อนักศึกษา	นาย ณัฐพล อุทาน 56050043
	นางสาว ปุญญิศา บุญไทย 56050087
	นาย วรงกรณ์ ฝายก๋า 56050120
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ประธานกรรรมการ	
ผศ.ดร.กนกณัฎฐข์ วัฒนแจ่มศรี กรรมการ	
รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและที่ปรึกษา	
ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและที่ปรึกษา	

หัวข้อโครงงานพิเศษ	**การพิสูจน์กฎไซน์และโคไซน์บนโมเดลแผ่นกลมแบบปวงกาเร**
	The proving for the Laws of Sine and Cosine on Poincaredisk model
ชื่อนักศึกษา	นาย ณัฐพล อุทาน 56050043
	นางสาว ปุญญิศา บุญไทย 56050087
	นาย วรงกรณ์ ฝายกำ 56050120
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงยุคลิด เชิงทรงกลม และเชิงไฮเพอร์โบลิก เพื่อนำมาศึกษาผลรวมของมุมภายใน และ กฎของไซน์และโคไซน์ของเรขาคณิตเชิงยุคลิด เชิงทรงกลมและเชิงไฮเพอร์โบลิก

โดยศึกษาพื้นฐานต่างๆของเรขาคณิตเชิงยุคลิด เช่น ทฤษฎีบทของสามเหลี่ยมคล้าย สมบัติของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ผกผัน กำลังของจุด วงกลมเชิงตั้งฉาก เพื่อนำไปใช้ศึกษาต่อในเรขาคณิตเชิงทรงกลมและเชิงไฮเพอร์โบลิก และทำให้เห็นถึงความสัมพันธ์และความแตกต่างระหว่างเรขาคณิตเชิงยุคลิด เชิงทรงกลมและเชิงไฮเพอร์โบลิก

ทั้งนี้ในการศึกษาเรขาคณิตเชิงยุคลิด เชิงทรงกลม และเชิงไฮเพอร์โบลิก อาจจะนำไปสู่การศึกษาและพัฒนารูปแบบการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตที่อยู่ในมิติใดๆที่ต่างไปจากเดิม

คำสำคัญ : เรขาคณิตเชิงยุคลิด เรขาคณิตเชิงทรงกลม เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก ทฤษฎีบทกำลังของจุด รูปแบบของปวงกาเร

Title	**The proving for the Laws of Sine and Cosine on Poincaredisk model**
Students	Natthaphol Utan 56050048
	Punyisa Boonthai 5605087
	Warongkorn Faiga 56050120
Degree	Bachelor of science
Department	Mathematics
Academic Year	2016
Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul
Co-Advisor	Dr.Wannaporn Sanprasert

ABSTRACT

The objectives of this study about the sum of interior angle and the laws of sine and cosine for Euclidean geometry ,Spherical geometry and Hyperbolic geometry.

Studying the basic geometry of Euclid's theorem. Such as the theorem of similar triangle ,Properties of triangles, Pythagorean theorem, inversion , power of point and orthogonality of circle. To develop education in Spherical geometry and Hyperbolic geometry. It also makes the relationship and differences between Euclidean ,Spherical and Hyperbolic geometry

In a study of Euclidean geometry, spherical and linear hyperbolic geometry. May lead to the development of studies to solve models geometric problems in any dimension that is different from the original.

Keywords: Euclidean geometry, Spherical geometry , Hyperbolic Geometry , The theory of the power of point. , The Model of Poincare

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง **"การพิสูจน์กฎไซน์และโคไซน์บนโมเดลแผ่นกลมแบบปวงกาเร"** คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล และ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ผู้ให้ความอนุเคราะห์เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาทางด้านความรู้และปัญหาต่างๆ ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพื่อให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้เป็นไปในทิศทางที่ถูกต้องและสมบูรณ์ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง คณะผู้จัดทำตระหนักถึง ความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ประธานกรรมการสอบ และ ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายนี้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การอุปการะอบรมเลี้ยงดู ตลอดจนส่งเสริมการศึกษา และให้กำลังใจเป็นอย่างดี อีกทั้งขอขอบคุณเพื่อนๆในสาขาคณิตศาตร์ประยุกต์ที่ให้การสนับสนุนและช่วยเหลือด้วยดีเสมอมา ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่บริหารทั่วไปและเจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ที่อำนวยความสะดวกในการทำงานต่างๆ และขอขอบพระคุณเจ้าของเอกสารและงานวิจัยทุกท่าน ที่ผู้ศึกษาค้นคว้าได้นำมาอ้างอิงในการทำวิจัยจนกระทั่งงานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ณัฐพล อุทาน

ปุญญิศา บุญไทย

วรงกรณ์ ฝายกำ

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูป

หน้า

สารบัญรูป(ต่อ)

หน้า

บทที่1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

การศึกษาเรขาคณิตเป็นพื้นฐานที่สำคัญ ในการศึกษาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิศวกรรม จากเส้นบนระนาบ เมื่อนำเส้นสามเส้นมาตัดกันจะได้เป็นรูปสามเหลี่ยม จากวงกลมบนทรงกลม เมื่อนำวงกลมสามวงมาตัดกันจะได้เป็นสามเหลี่ยมฐานโค้ง จากสามเหลี่ยมทั้งสองที่แตกต่างกันนี้จึงมีการศึกษาเรขาคณิตเชิงยุคลิด และเรขาคณิตเชิงทรงกลม และมีการพัฒนาเป็นเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก ในงานวิจัยนี้จะนำเสนอเกี่ยวกับผลรวมของมุมภายในของสามเหลี่ยม กฎไซน์และโคไซน์ในระบบเรขาคณิตเชิงยุคลิด เรขาคณิตเชิงทรงกลม และเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

ในกรณีของเรขาคณิตเชิงยุคลิดผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ180องศา ส่วนเรขาคณิตเชิงทรงกลมผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยมมีค่ามากกว่า180องศา และเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิกนั้นผลรวมของมุมภายในของสามเหลี่ยมมีค่าน้อยกว่า180องศา ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างเรขาคณิตเชิงยุคลิด เรขาคณิตเชิงทรงกลม และเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก นอกจากนี้จะแสดงให้เห็นถึงบางแง่มุมของเรขาคณิตแบบยุคลิดที่ปกติเราอาจมองข้ามไป รวมไปถึงแสดงให้เห็นถึงกฎไซน์และกฎโคไซน์ในระบบเรขาคณิตเชิงยุคลิด เรขาคณิตเชิงทรงกลม และเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อการศึกษาถึงความแตกต่างของผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยมและกฎไซน์และโคไซน์ของเรขาคณิตเชิงยุคลิด เรขาคณิตเชิงทรงกลม และเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ศึกษาเรขาคณิตเชิงยุคลิด
2) ศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของเส้นขนาน
3) ศึกษามุมภายในของสามเหลี่ยม
4) ศึกษาสมบัติความคล้ายของสามเหลี่ยม
5) ศึกษาสมบัติของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
6) ศึกษากฎไซน์และโคไซน์สำหรับเรขาคณิตเชิงยุคลิด
7) ศึกษาเรขาคณิตเชิงทรงกลม
8) ศึกษากฎไซน์และโคไซน์สำหรับเรขาคณิตเชิงทรงกลม
9) ศึกษาเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก
10) ศึกษาสมบัติของการผกผัน

11) ศึกษาสมบัติของวงกลมเชิงตั้งฉาก

12) ศึกษาทฤษฎีบทกำลังของจุด

13) ศึกษากฎไซน์และโคไซน์สำหรับเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

จากการศึกษาเรื่องเรขาคณิตเชิงยุคลิด เรขาคณิตเชิงทรงกลม และเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก สามารถนำมาอธิบายถึงความแตกต่างของกฎไซน์และโคไซน์ของสามเหลี่ยมเชิงยุคลิด กฎไซน์และโคไซน์ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม และกฎไซน์และโคไซน์ของสามเหลี่ยมเชิงไฮเพอร์โบลิกได้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย

1.) ศึกษาข้อมูลและกำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ

2.) ศึกษาเรขาคณิตเชิงยุคลิด,คุณสมบัติพื้นฐานของเส้นขนานและมุมภายในของสามเหลี่ยม

3.) ศึกษาสมบัติความคล้ายของสามเหลี่ยม,สมบัติของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ,กฎไซน์และโคไซน์สำหรับเรขาคณิตเชิงยุคลิด

4.) ศึกษาเรขาคณิตเชิงทรงกลม,ผลรวมของมุมภายในของเรขาคณิตเชิงทรงกลม,กฎไซน์และโคไซน์สำหรับเรขาคณิตเชิงทรงกลม

5.) ศึกษาผลรวมมุมภายในของแรขาคณิตเชิงไฮเพอร์ลิก,ศึกษาเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

6.) ศึกษาสมบัติของการผกผัน,ศึกษาสมบัติของวงกลมเชิงตั้งฉาก,ศึกษาทฤษฎีบทกำลังของจุด,ศึกษากฎไซน์และโคไซน์ของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

7.) นำเสนอ

8.) ปรับปรุงแก้ไขผลการสรุปและรูปเล่ม

9.) ส่งรูปเล่ม

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน								
	ปี 2559						ปี 2560		
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค
ศึกษาข้อมูลและกำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ									
ศึกษาเรขาคณิตเชิงยุคลิด,คุณสมบัติพื้นฐานของเส้นขนานและมุมภายในของสามเหลี่ยม									
ศึกษาสมบัติความคล้ายของสามเหลี่ยม,สมบัติของสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ,กฎไซน์และโคไซน์สำหรับเรขาคณิตเชิงยุคลิด									
ศึกษาเรขาคณิตเชิงทรงกลม,ผลรวมของมุมภายในของเรขาคณิตเชิงทรงกลม,กฎไซน์และโคไซน์สำหรับเรขาคณิตเชิงทรงกลม									
ศึกษาผลรวมมุมภายในของแรขาคณิตเชิงไฮเพอร์ลิก,ศึกษาเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก									
ศึกษาสมบัติของการผกผันของวงกลม,ศึกษาสมบัติของวงกลมเชิงตั้งฉาก,ศึกษาทฤษฎีบทกำลังของจุด,ศึกษากฎไซน์และโคไซน์ของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก									
นำเสนอ									
ปรับปรุงแก้ไขผลการสรุปและรูปเล่ม									
ส่งรูปเล่ม									

บทที่ 2

เรขาคณิตเชิงยุคลิด(Euclidian's Geometry)

ในบทนี้จะนำเสนอความรู้เกี่ยวกับเส้นขนาน ผลรวมมุมภายในของสามเหลี่ยม สามเหลี่ยมคล้าย สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ กฎไซน์และกฎโคไซน์ของเรขาคณิตเชิงยุคลิด

เรขาคณิตเชิงยุคลิด

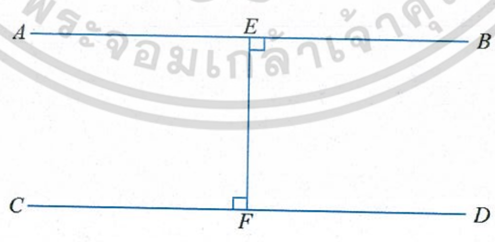
สัจพจน์2.1 สัจพจน์5ข้อของเรขาคณิตเชิงยุคลิดมีดังนี้

1. สามารถลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้
2. สามารถต่อเส้นตรงที่มีความยาวจำกัดออกไปได้เรื่อยๆ
3. สามารถสร้างวงกลมได้เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและระยะทางใด ๆ
4. มุมฉากทุกมุมเท่ากัน
5. เมื่อลากเส้นตรงตัดผ่านเส้นตรงสองเส้น ทำให้มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันน้อยกว่าสองมุมฉาก เส้นตรงสองเส้นนั้นจะตัดกันทางด้านที่มีมุมน้อยกว่าสองมุมฉากถ้าต่อออกไปเรื่อย ๆ

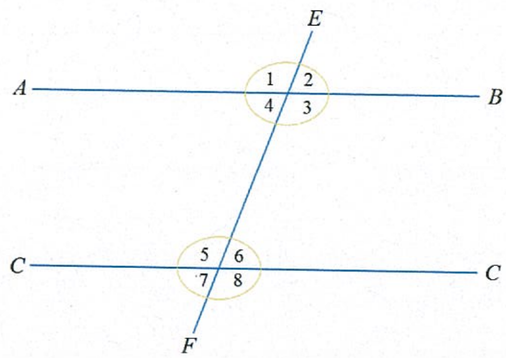
ข้อสังเกตุ สิ่งที่ตามมาจากสัจพจน์ที่ 5 คือ มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นคู่ขนานมีค่าเท่ากับ 180°

2.1 เส้นขนาน

นิยาม2.1 เส้นตรงสองเส้นจะกล่าวว่าขนานกันก็ต่อเมื่อระยะห่างซึ่งเป็นระยะตั้งฉากระหว่างเส้นตรงสองทั้งสองมีค่าเท่ากันตลอดทั้งเส้น นั่นคือ $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$ ก็ต่อเมื่อ $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ ที่ E และ $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ ที่ F ดังรูปที่2.1



รูปที่2.1 เส้นขนาน $\overline{AB}$ กับ $\overline{CD}$ ที่มี $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ ที่ F



รูปที่2.2 เส้นขนาน $\overline{AB}$ กับ $\overline{CD}$ ที่มี $\overline{EF}$ เป็นเส้นตัดขวาง

เส้นตรงสองเส้น $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ขนานกันมีเส้นตัดขวาง $\overline{EF}$ ดังรูปที่2.2

ทฤษฎีบท2.1 เส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวาง มีขนาดของมุมเท่ากัน $(\angle 1=\angle 5, \angle 2=\angle 6, \angle 3=\angle 8, \angle 4=\angle 7)$

กำหนดให้ $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle 2=\angle 6$
สร้างเพื่อการพิสูจน์ สร้าง $\overline{EF}$ เป็นเส้นตัดขวาง กับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ และกำหนดมุมต่างๆ ดังรูป 2.2

พิสูจน์($\rightarrow$)

1.	$\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$	กำหนดให้
2.	$\angle 2+\angle 3=180^\circ$	มุมบนเส้นตรง
3.	$\angle 3+\angle 6=180^\circ$	มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นคู่ขนานรวมกันมีค่า180°
4.	$\angle 2=\angle 6$	จากข้อ2.และข้อ3.

□

กำหนดให้ $\angle 2=\angle 6$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$
สร้างเพื่อการพิสูจน์ สร้าง $\overline{EF}$ เป็นเส้นตัดขวาง กับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ และกำหนดมุมต่างๆ ดังรูป 2.2

พิสูจน์($\leftarrow$)

1.	$\angle 2=\angle 6$	กำหนดให้
2.	$\angle 2+\angle 3=\angle 6+\angle 3$	จากข้อ1.บวกด้วย $\angle 3$ ทั้งสองข้าง
3.	$\angle 2+\angle 3=180^\circ$	มุมบนเส้นตรง
4.	$\angle 6+\angle 3=180^\circ$	จากข้อ2. และข้อ3.

5. $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$ จากข้อ3.(มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นคู่ขนานรวมกันมีค่า 180°) □

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\angle 1 = \angle 5, \angle 3 = \angle 8$ และ $\angle 4 = \angle 7$

ทฤษฎีบท2.2 เส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อมุมแย้งที่อยู่บนเส้นตัดขวางมีขนาดเท่ากัน ($\angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$)

กำหนดให้ $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle 3 = \angle 5$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ สร้าง $\overline{EF}$ เป็นเส้นตัดขวาง กับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ และกำหนดมุมต่างๆ ดังรูป 2.2

พิสูจน์($\rightarrow$)

1.	$\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$	กำหนดให้
2.	$\angle 2 = \angle 6$	ทฤษฎีบท2.1
3.	$\angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$	มุมบนเส้นตรง
4.	$\angle 5 + \angle 6 = 180^{\circ}$	มุมบนเส้นตรง
5.	$\angle 3 = \angle 5$	จากข้อ2,ข้อ3 และ ข้อ4. □

กำหนดให้ $\angle 3 = \angle 5$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ สร้าง $\overline{EF}$ เป็นเส้นตัดขวาง กับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ และกำหนดมุมต่างๆ ดังรูป 2.2

พิสูจน์($\leftarrow$)

1.	$\angle 3 = \angle 5$	กำหนดให้
2.	$\angle 3 + \angle 2 = 180^{\circ}$	มุมบนเส้นตรง
3.	$\angle 5 + \angle 6 = 180^{\circ}$	มุมบนเส้นตรง
4.	$\angle 6 = \angle 2$	จากข้อ1,ข้อ2 และ ข้อ3
5.	$\angle 3 + \angle 6 = 180^{\circ}$	จากข้อ2 และ ข้อ4
6.	$\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$	จากข้อ5.(มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นคู่ขนานรวมกันมีค่า 180°) □

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\angle 4 = \angle 6$

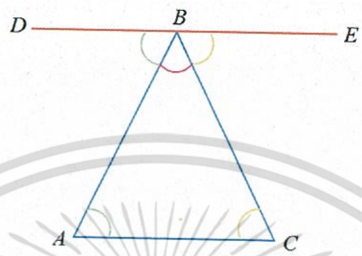
2.2 ผลรวมมุมภายในของสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบท2.3 สำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ในระนาบมีผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180°

กำหนดให้ ใน ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{DE}$ ขนานกับ $\overline{AC}$ ผ่านจุด B ดังรูปที่2.3



รูปที่2.3 รูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีเส้น $\overline{DE}$ เป็นฐานลากผ่านจุด B

พิสูจน์ 1. $\angle ABD = \angle CAB$ มุมแย้ง

2. $\angle CBE = \angle ACB$ มุมแย้ง

3. $\angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180^\circ$ ผลรวมมุมบนเส้นตรง

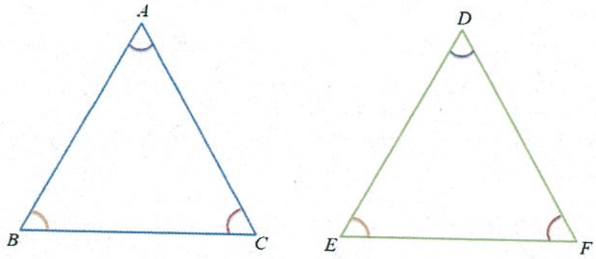
ดังนั้น สำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ในระนาบมีผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180° □

2.3 ความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม

นิยาม2.2 ให้ ΔABC และ ΔDEF เป็นสามเหลี่ยมใดๆ จะกล่าวว่าสามเหลี่ยมทั้งสองรูปคล้ายกันก็ต่อเมื่อ

1. $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$
2. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

และเขียนสัญลักษณ์แทนความคล้ายของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองได้เป็นดังนี้ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



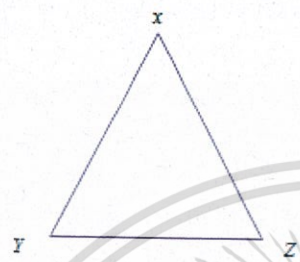
รูปที่2.5 รูปสามเหลี่ยม ΔABC และรูปสามเหลี่ยม ΔDEF

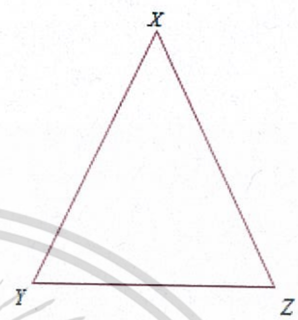
ทฤษฎีบท2.4 สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสองมุมมุมต่อมุม สามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมคล้าย

กำหนดให้ xYZ และ XYZ เป็นสามเหลี่ยม

ต้องการพิสูจน์ว่า ถ้า $\angle x = \angle X$ แล้ว $\Delta xYZ \simeq \Delta XYZ$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ΔxYZ และ ΔXYZ เป็นสามเหลี่ยมดังรูปที่2.4





รูปที่2.4 รูปสามเหลี่ยม xYZ และรูปสามเหลี่ยม XYZ

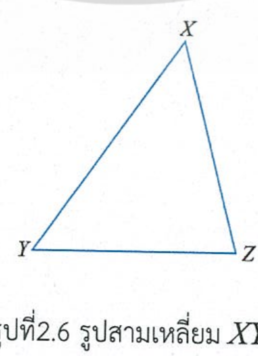
พิสูจน์

1.	$\angle x + \angle Y + \angle Z = 180°$	ผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยม
2.	$\angle x = 180° - \angle Y - \angle Z$	จากข้อ1.
3.	$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180°$	ผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยม
4.	$\angle X = 180° - \angle Y - \angle Z$	จากข้อ3.
5.	$\angle x = \angle X$	จากข้อ2.และข้อ4.
6.	$\Delta xYZ \simeq \Delta XYZ$	จากข้อ5.

□

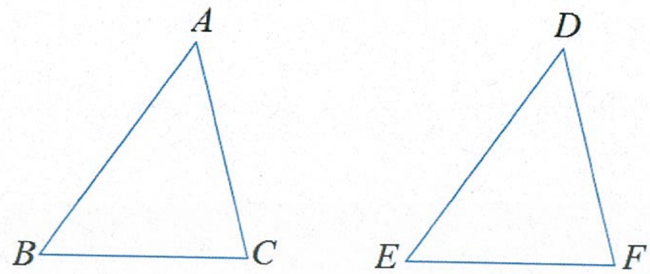
2.4 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

นิยาม2.3 รูปสามเหลี่ยม คือ รูปที่ประกอบด้วยจุดสามจุด และ เส้นสามเส้น แต่ล่ะเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุด เรียกจุดทั้งสามจุดนี้ว่า “จุดยอดของสามเหลี่ยม”



รูปที่2.6 รูปสามเหลี่ยม XYZ

จากรูปที่2.6 จุด X, Y, Z เป็นจุดสามจุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน $\overline{XY}, \overline{YZ}$ และ $\overline{ZX}$ เชื่อมต่อจุด X, Y, Z เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยม XYZ ซึ่งเขียนแทนด้วย ΔXYZ



รูปที่2.7 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

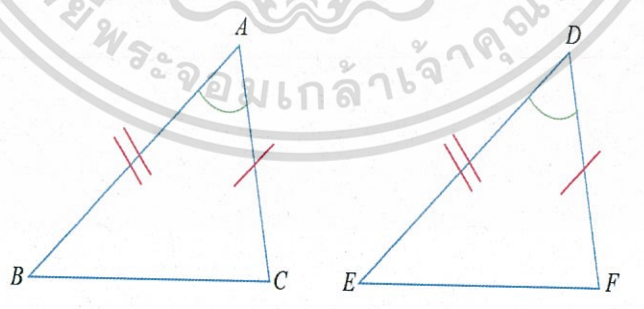
ถ้า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ก็แสดงว่ารูป ΔABC จะทับสนิทกับรูป ΔDEF

จุด A จะทับจุด D	จุด B จะทับจุด E	และจุด C จะทับจุด F
$\overline{AB}$ จะทับ $\overline{DE}$	$\overline{BC}$ จะทับ $\overline{EF}$	และ $\overline{CA}$ จะทับ $\overline{FD}$
$\angle A$ จะทับ $\angle D$	$\angle B$ จะทับ $\angle E$	และ $\angle C$ จะทับ $\angle F$

จากคุณสมบัติดังกล่าวเราจะสรุปได้ว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ”

2.4.1 รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)

สัจพจน์2.2 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปใดๆมีด้านเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

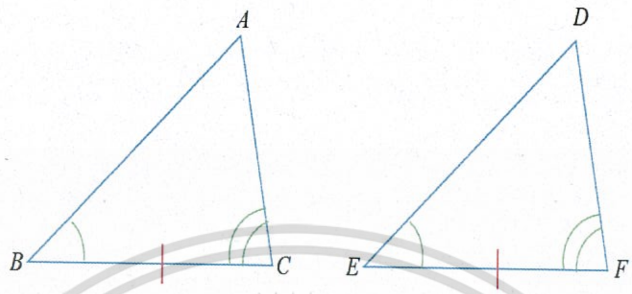


รูปที่2.8 รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

ให้ ΔABC และ ΔDEF มี $\overline{AB} = \overline{DF}, \angle BAC = \angle EDF$ และ $\overline{AC} = \overline{DE}$ ดังรูปที่2.8 จะได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ด.ม.ด.)

2.4.2 รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)

สัจพจน์2.3 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปใดๆมีมุมเท่ากันสองคู่ และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

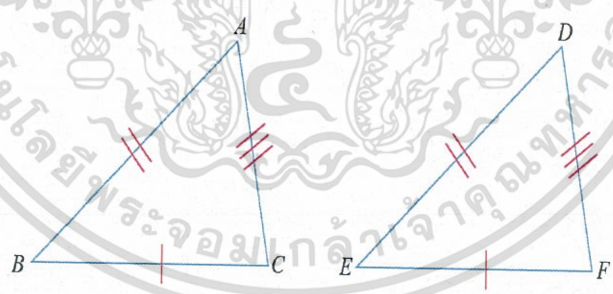


รูปที่2.9 รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

ให้ ΔABC และ ΔDEF มี $\angle ABC = \angle DEF, \overline{BC} = \overline{EF}$ และ $\angle ACB = \angle DFE$ ดังรูปที่2.9 จะได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ม.ด.ม.)

2.4.3 รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)

สัจพจน์2.4 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ มีด้านเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

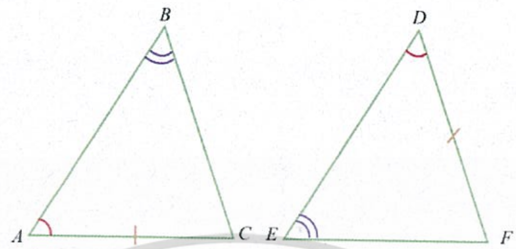


รูปที่2.10 **รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน**

ให้ ΔABC และ ΔDEF มีด้าน $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ และ $\overline{AC} = \overline{DF}$ ดังรูปที่2.10 จะได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ด.ด.ด.)

2.4.4 รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)

ทฤษฎีบท2.5 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ มีมุมเท่ากันสองคู่ และมีด้านเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



รูปที่2.11 รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน

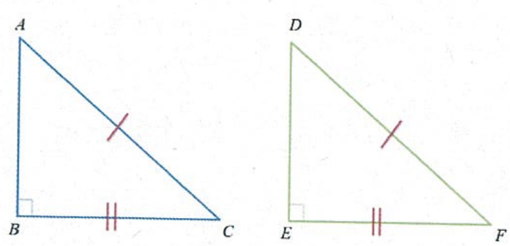
กำหนดให้ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ และ $\overline{AC} = \overline{DF}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

พิสูจน์	1.	$\angle A = \angle D$	กำหนดให้
	2.	$\angle B = \angle E$	กำหนดให้
	3.	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$	ผลรวมมุมภายในสามเหลี่ยมมีค่า 180°
	4	$180^{\circ} - (\angle A + \angle B) = \angle C$.	จากข้อ3.
	5.	$\angle D + \angle E + \angle F = 180^{\circ}$	ผลรวมมุมภายในสามเหลี่ยมมีค่า 180°
	6.	$180^{\circ} - (\angle D + \angle E) = \angle F$	จากข้อ5.
	7.	$\angle C = \angle F$	จากข้อ1,ข้อ2,ข้อ4 และ ข้อ5
	8.	$\overline{AC} = \overline{DF}$	กำหนดให้
	9.	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	จากข้อ1,ข้อ7 และ ข้อ8 (ม.ด.ม.) □

2.4.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)

ทฤษฎีบท2.6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



รูปที่2.12 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

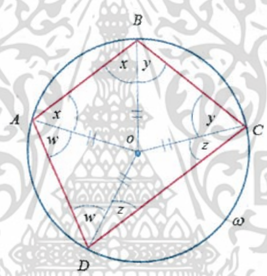
กำหนดให้ $\overline{AC} = \overline{DF}, \overline{BC} = \overline{EF}$ และ $\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

พิสูจน์

1. $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
2. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ จากข้อ1.
3. $\overline{DF}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DE}^2$ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
4. $\overline{DE}^2 = \overline{DF}^2 - \overline{EF}^2$ จากข้อ3.
5. $\overline{AC} = \overline{DF}$ กำหนดให้
6. $\overline{BC} = \overline{EF}$ กำหนดให้
7. $\overline{AB} = \overline{DE}$ จากข้อ2,ข้อ4,ข้อ5 และ ข้อ6
8. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ จากข้อ5,ข้อ6 และ ข้อ7 (ด.ด.ด) □

บทตั้ง 2.1 ผลรวมมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมจะมีค่าเท่ากับ 180°



รูปที่2.13 ผลรวมมุมตรงข้ามของรูปที่เหลี่ยมแนบในวงกลมจะที่ค่าเท่ากับ 180°

กำหนดให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมที่แนบอยู่ในวงกลม ω โดยที่ O เป็นจุดศูนย์กลางของ ω ดังรูป2.13

ต้องการพิสูจน์ว่า ผลรวมมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบอยู่ในวงกลมมีค่าเท่ากับ 180°

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากรัศมีจากจุด O ไปยังจุด A, B, C, D ตามลำดับ จะได้สามเหลี่ยมหน้าจั่ว 4 รูป และ $\angle BAO = \angle ABO = \angle x$ ในทำนองเดียวกันกับสามเหลี่ยมรูปอื่นๆ

พิสูจน์ พิจารณาสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้ง 4 รูป

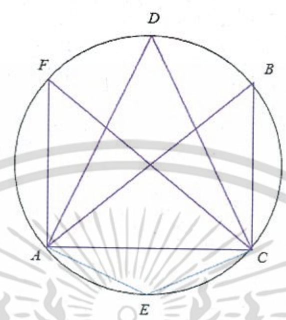
1. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม
2. $\angle x + \angle w = \angle A$ สร้างเพื่อการพิสูจน์ผลรวมมุม A
3. $\angle x + \angle y = \angle B$ สร้างเพื่อการพิสูจน์ผลรวมมุม B
4. $\angle z + \angle y = \angle C$ สร้างเพื่อการพิสูจน์ผลรวมมุม C
5. $\angle z + \angle w = \angle D$ สร้างเพื่อการพิสูจน์ผลรวมมุม D

6. $2(\angle w + \angle x + \angle y + \angle z) = 360^\circ$ จากข้อ1.,ข้อ2.,ข้อ3.,ข้อ4.และข้อ5.

7. $(\angle w + \angle x + \angle y + \angle z) = 180^\circ$ จากข้อ 6. □

ดังนั้นผลรวมของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบอยู่ในวงกลมมีค่าเท่ากับ 180°

บทตั้ง2.2 มุมที่เส้นรอบวงของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดเดียวกันมีค่าเท่ากัน



รูปที่2.14 มุมที่เส้นรอบวงของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดเดียวกันมีค่าเท่ากัน

กำหนดให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นคอร์ดที่อยู่บนวงกลม ω ให้ B,D,F เป็นจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของ ω ที่อยู่ในเซกเมนต์เดียวกัน แล้วมีเส้นตรง จากจุด B,D,F ไปยังจุด A และ C ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า มุมที่รองรับด้วยเส้นคอร์ด $\overline{AC}$ มีค่าเท่ากัน $\angle F = \angle B = \angle D$

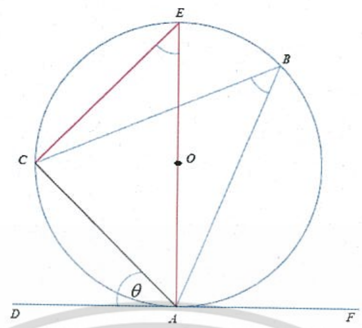
สร้างเพื่อการพิสูจน์ กำหนดจุด E อยู่บนเส้นรอบวงของ ω ที่อยู่ในเซกเมนต์ต่างกับ B,D,F แล้วลากเส้นตรงจากจุด E ไปยังจุด A และ C ดังรูปที่2.14

พิสูจน์ พิจารณา $\angle AFC, \angle ADC, \angle ABC$

1. $ABCE$ เป็นสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม สร้างเพื่อการพิสูจน์
2. $AFCE$ เป็นสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม สร้างเพื่อการพิสูจน์
3. $ADCE$ เป็นสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม สร้างเพื่อการพิสูจน์
4. $\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ$ จากข้อ1. และบทตั้ง 2.1
5. $\angle AFC + \angle AEC = 180^\circ$ จากข้อ2. และบทตั้ง 2.1
6. $\angle ADC + \angle AEC = 180^\circ$ จากข้อ3. และบทตั้ง 2.1
7. $\angle AFC = \angle ABC = \angle ADC$ จากข้อ4. ,ข้อ5. และข้อ6. □

ดังนั้น มุมที่อยู่บนเส้นรอบวงที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดเดียวกันมีค่าเท่ากัน

บทตั้ง2.3 มุมที่เส้นสัมผัสทำกับเส้นคอร์ดของวงกลมมีค่าเท่ากับมุมที่เส้นรอบวงของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดนั้น



รูปที่2.15 วงกลมที่มีเส้นคอร์ดทำมุมกับเส้นสัมผัส

กำหนดให้ กำหนดให้วงกลม O ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง มี $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ เป็นเส้นคอร์ด และมี $\overline{DF}$ เป็นเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสวงกลม O ที่จุด A

ต้องการพิสูจน์ว่า มุมที่เส้นสัมผัสทำกับเส้นคอร์ดมีค่าเท่ากับมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดเดียวกัน $\angle DAC = \angle CEA = \angle CBA$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นผ่านศูนย์กลางผ่านจากจุด A ไปยังจุด E และ ลากเส้นตรงจากจุด C ไปยัง E

พิสูจน์

1.	$\angle CEA = \angle CBA$	จากบทตั้ง 2.2 มุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดเดียวกัน
2.	$\angle AEC + \angle CAE + \angle ACE = 180^\circ$	ผลรวมมุมภายในของสามเหลี่ยม
3.	$\angle ACE = 90^\circ$	มุมในครึ่งวงกลม
4.	$\angle AEC + \angle CAE = 90^\circ$	จากข้อ2. และข้อ3.
5.	$\angle DAC + \angle CAE = 90^\circ$	เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม
6.	$\angle AEC = \angle DAC$	จากข้อ4. และข้อ5.

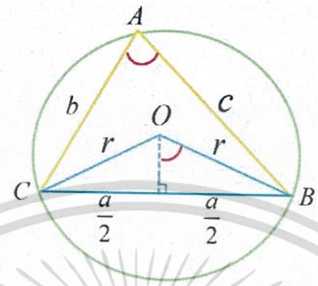
□

ดังนั้น มุมที่เส้นสัมผัสทำกับเส้นคอร์ดเท่ากับมุมที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดนั้น

2.5 กฎไซน์และกฎโคไซน์

2.5.1 กฎไซน์

พิจารณา ΔABC ที่อยู่ในวงกลมซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลางและมี r เป็นรัศมีของวงกลมดังรูปที่2.16



รูปที่2.16 ΔABC ที่อยู่ในวงกลมซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลางและมี r เป็นรัศมีของวงกลม

กรณีที่จุดศูนย์กลาง O อยู่ภายใน ΔABC

กำหนดให้ $\overline{OC} = \overline{OB} = r$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2r$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด O ไปยัง $\overline{CB}$ ที่จุด D โดยแบ่งครึ่ง $\angle COB$ และ $\overline{OD} \perp \overline{CB}$

พิสูจน์ พิจารณา ΔCOB

1. $\overline{OD} \perp \overline{CB}$	สร้างเพื่อการพิสูจน์
2. $\overline{OC} = \overline{OB}$	กำหนดให้

พิจารณา ΔABC และ ΔCOB

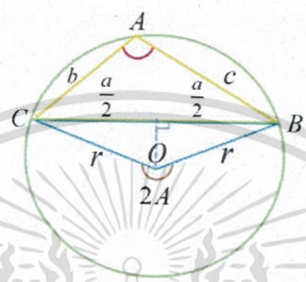
3. $\angle COB = 2\angle CAB$	มุมที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง
4. $\angle DOB = \angle CAB$	จากข้อ1 และข้อ3
5. $\overline{CD} = \dfrac{a}{2} = \overline{DB}$	จากข้อ1
6. $\sin A = \dfrac{a}{2r}$	จากข้อ1 ข้อ2 ข้อ3 และข้อ5
7. $\dfrac{a}{\sin A} = 2r$	จัดรูปจากข้อ6

□

โดยการทำซ้ำในทำนองเดียวกันสำหรับมุม B และ มุม C เราจะได้กฎของไซน์ดังนี้

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

สังเกตว่าการพิสูจน์ต่อไปนี้จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับการพิสูจน์ที่ผ่านมา ถ้าให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งไม่อยู่ภายใน ΔABC เนื่องจากมุมภายนอก ΔBCO คือ $\angle COB$ มีค่าเป็น $2\angle A$ และ $\angle DOB = 180° - A$ ดังรูปที่2.17



รูปที่2.17แสดง $\angle COB$ มีค่าเป็น $2\angle A$ และ $\angle DOB = 180° - A$

กรณีที่จุดศูนย์กลาง O อยู่ภายนอก ΔABC

กำหนดให้ มี $\overline{OC} = \overline{OB} = r$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด O ไปยัง $\overline{CB}$ ที่จุด D โดยแบ่งครึ่ง $\angle COB$ และ $\overline{OD} \perp \overline{CB}$

พิสูจน์ พิจารณา ΔCOB

1.	$\overline{OD} \perp \overline{CB}$	สร้างเพื่อการพิสูจน์
2.	$\overline{OC} = \overline{OB}$	กำหนดให้

พิจารณา ΔABC และ ΔCOB

3.	$\angle COB = 2\angle CAB$	มุมที่รองรับด้วยเส้นคอร์ดเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง
4.	$\angle DOB = 180° - A$	จากข้อ1และข้อ3
5.	$\overline{CD} = \frac{a}{2} = \overline{DB}$	จากข้อ1
6.	$\sin(180° - A) = \sin A$	มุมที่อยู่บนเส้นตรง
7.	$\text{sinA} = \frac{a}{2r}$	จากข้อ1 ข้อ4 ข้อ5 และข้อ6

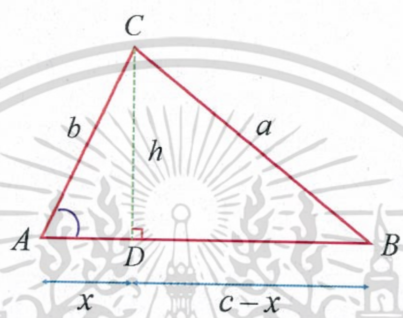
8. $\dfrac{a}{\sin A} = 2r$ จัดรูปจากข้อ7 □

ในทำนองเดียวกันกันกับมุม B และ มุม C จะได้กฎของไซน์ดังนี้

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

2.5.2 กฎโคไซน์

พิจารณา ΔABC ต่อไปนี้ ดังรูปที่2.18



รูปที่2.18 ΔABC ที่มีรูปสามเหลี่ยม $\angle ADC$ และ $\angle BDC$ เป็นมุมฉาก

กรณีที่ A เป็นมุมแหลม

กำหนดให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ดังรูป2.18

ต้องการพิสูจน์ว่า $a^2 = c^2 - 2c(b\cos A) + b^2$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ สร้าง $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ กำหนดความยาว $\overline{AD} = x$ ความยาว $\overline{DB} = c - x$ และความสูง $\overline{CD} = h$ ดังรูป2.18

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC

พิสูจน์ 1. $x^2 + h^2 = b^2$ ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2. $\cos A = \dfrac{x}{b}$ ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

3. $x = b\cos A$ จากข้อ2.

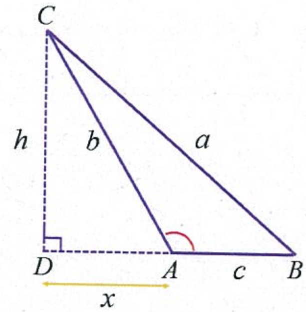
พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก DBC

4. $(c-x)^2 + h^2 = a^2$ ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

5. $a^2 = c^2 - 2cx + (x^2 + h^2)$ จากข้อ4.

6. $a^2 = c^2 - 2c(b\cos A) + b^2$ จากข้อ1.ข้อ3.และข้อ5 □

ในทำนองเดียวกันถ้ามุม A คือมุมป้าน ดังรูปที่2.16



รูปที่2.19สามเหลี่ยม $\angle BAC$ และสามเหลี่ยมมุมฉาก $\angle BDC$

กำหนดให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ดังรูป 2.19

ต้องการพิสูจน์ว่า $a^2 = c^2 - 2c(b\cos A) + b^2$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด A มายังจุด D และ ลาก $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{DA}$ กำหนดความสูง $\overline{CD} = h$ ความยาว $\overline{DA} = x$ ความยาว $\overline{CA} = b$ ความยาว $\overline{AB} = c$ และความยาว $\overline{CB} = a$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC ดังรูป2.19

พิสูจน์ 1. $x^2 + h^2 = b^2$ จากความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2. $\cos(180^o - A) = -\cos A = \dfrac{x}{b}$ จากความรู้เรื่องตรีโกณมิติ

3. $x = -b\cos A$ จากข้อ2.

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC

4. $(c-x)^2 + h^2 = a^2$ จากความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

5. $a^2 = c^2 - 2c(b\cos A) + b^2$ จากข้อ1.ข้อ3.และข้อ4. □

บทที่ 3

เรขาคณิตเชิงทรงกลม (*Spherical Geometry*)

ในบทนี้จะนำเสนอการพิสูจน์มุมภายในของสามเหลี่ยมในเรขาคณิตศาสตร์เชิงทรงกลมและพื้นผิวอานม้าซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิค รวมไปถึงกฎของไซน์และโคไซน์ของเรขาคณิตศาสตร์เชิงทรงกลม โดยเริ่มด้วยการอธิบายถึงจีออเดซิกซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการนำเสนอต่อไป

3.1 จีออเดซิก (*Geodesics*)

ในการศึกษาเรขาคณิต จะศึกษาระยะทางระหว่างจุดสองจุด ซึ่งเส้นโค้งที่มีความสำคัญ คือ จีออเดซิก

<u>**นิยาม3.1**</u> จีออเดซิก เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดนั้นในปริภูมิคือ จีออเดซิกในปริภูมิ

ตัวอย่าง3.1 จีออเดซิกซึ่งเชื่อมจุดสองจุดบนโลกสามารถหาได้โดยการเชื่อมจุดสองจุดนั้นด้วยเชือกแล้วดึงเชือกให้ตึงไปตามพื้นผิวของโลกจะได้จีออเดซิก จีออเดซิกจากลอสแอนเจลิสไปลอนดอน จะเริ่มจากลอสแอนเจลิสไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือผ่านส่วนกลางของแคนาดาตามด้วยใต้สุดของกรีนแลนด์ ต่อไปทางทิศตะวันออกของกรีนแลนด์แล้วถึงลอนดอน ดังรูป3.1

รูปที่3.1 ภาพแสดงจีออเดซิกจากลอสแอนเจลิสไปลอนดอน
ที่มา : https://brentlogan.com/2009/03/great-circle-route-pdx-ams/

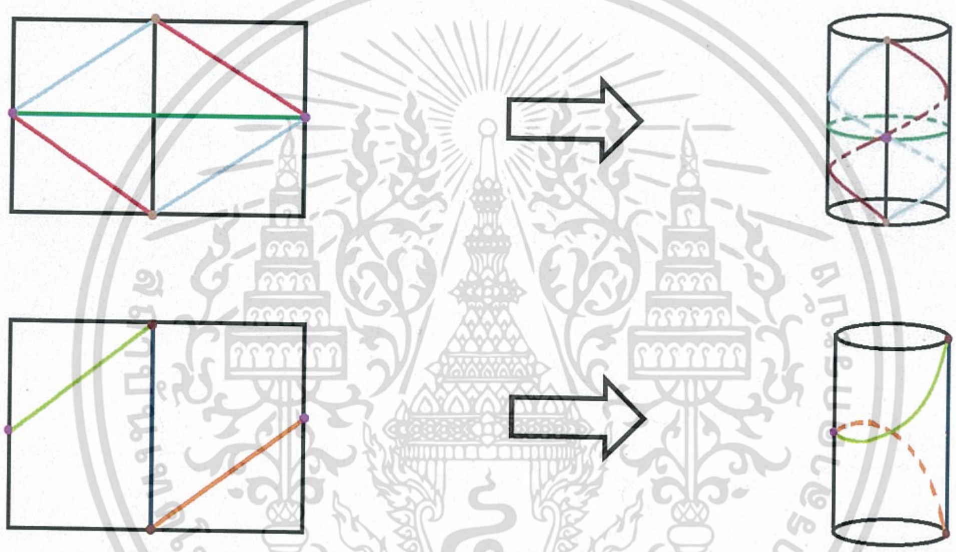
เรือและสายการบินใช้เส้นทางที่สั้นที่สุดนี้ เพื่อเป็นการประหยัดเชื้อเพลิง โดยเส้นทางที่สั้นที่สุดหรือจีออเดซิกบนโลกเรียกว่า วงกลมใหญ่(*Great circle*)

ในการหาจีออเดซิก จะพิจารณาเส้นโค้งที่อยู่บนพื้นผิวโลกอย่างแท้จริง เนื่องจากอาจมีส่วนของเส้นที่สั้นที่สุดที่ไม่อยู่บนพื้นผิว เช่น จากลอสแอนเจลิสถึงลอนดอน ถ้าขุดทะลุเข้าไปในพื้นผิวของโลกจะได้เส้นที่สั้นกว่าเส้นบนพื้นผิวโลก

อาจมีจีออเดซิกมากกว่าหนึ่งเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุด ตัวอย่างเช่น จีออเดซิกที่เชื่อมขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้บนพื้นผิวโลกมีได้อีกมากมาย

อาจมีจีออเดซิกที่สั้นกว่าหรือจีออเดซิกที่ยาวกว่าที่เชื่อมจุดสองจุดเดียวกัน พิจารณาจุดสองจุดบนเส้นศูนย์สูตรซึ่งเป็นวงกลมใหญ่(*Great circle*) ถ้าจุดสองจุดนั้นไม่ใช่จุดตรงกันข้าม แต่อยู่ใกล้กันแล้ว จะพบว่ามีส่วนที่สั้นกว่าซึ่งเรียกว่าส่วนโค้งรอง(*Minor arc*) และส่วนที่ยาวกว่าซึ่งเรียกว่าส่วนโค้งหลัก (*Major arc*)

ตัวอย่าง3.2 ม้วนกระดาษเป็นทรงกระบอก กำหนดจุด2จุดบนทรงกระบอก เชื่อมจุดสองจุดด้วยเชือก ดึงเชือกให้ตึงไปตามทรงกระบอก จะได้จีออเดซิกที่เชื่อมจุดสองจุดนั้น ดังรูป3.2

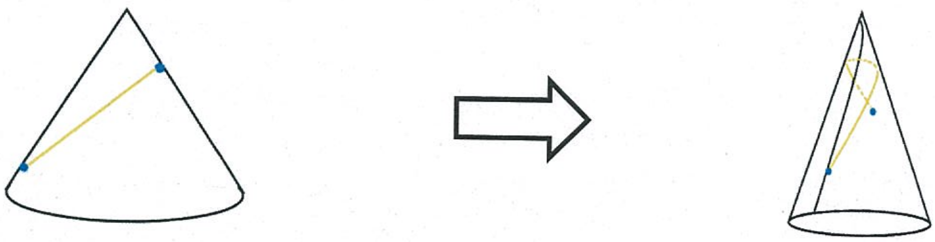


รูปที่ 3.2 จีออเดซิกบนทรงกระบอก

นอกจากนี้ จีออเดซิกอาจมีการวนรอบเป็นจำนวนหลายๆรอบได้ ดังรูป3.3

รูปที่ 3.3 จีออเดซิกบนทรงกระบอก

จีออเดซิกอาจมีการตัดกันเอง ดังรูป3.4



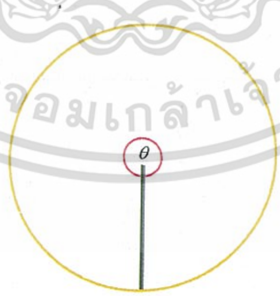
รูปที่ 3.4 จีออเดซิกบนทรงกรวย

<u>**นิยาม3.2**</u> จีออเดซิกไทรแองเกิล(*Geodesic Triangle*) เป็นสามเหลี่ยมซึ่งประกอบไปด้วยจุดสามจุดที่เชื่อมกันโดยจีออเดซิก

ตัวอย่าง3.3 การสร้างกรวยกลมจากกรวยแบน ตัดกระดาษเป็นส่วนของวงกลมมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ Θ ดังรูป5 เรียกรูปนี้ว่ากรวยแบน เมื่อ $\theta < 360^{o}$

รูปที่ 3.5 ทรงกรวยแบน ก

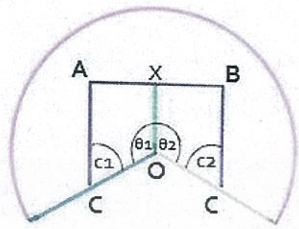
จากนั้นนำรัศมีของกรวยแบนมาชิดกันจะได้กรวยกลม ดังรูป3.6



รูปที่ 3.6 ทรงกรวยแบน ข

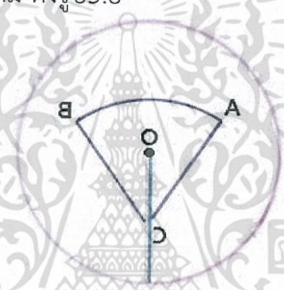
ปัญหา จงแสดงว่ามุมภายในของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่บนกรวยกลมมีค่าเท่ากับ $540^\circ - \theta$ เมื่อ θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของกรวยแบน

ให้ A, B, C เป็นจุดบนกรวยแบน ดังรูป3.7



รูปที่ 3.7 ทรงกรวยแบน ค

เมื่อนำ OC มาชิดกัน จะได้กรวยกลม ดังรูป3.8



รูปที่ 3.8 ทรงกรวยกลม

AB AC และ BC เป็นจีออเดซิกบนกรวยแบน ซึ่งจะเป็นจีออเกซิกบนกรวยกลมด้วย ดังนั้น ΔABC บนกรวยกลมเป็นสามเหลี่ยมจีออเดซิก

สร้างเพื่อการแสดงผล ลาก OX ตั้งฉากกับ AB ที่ X โดย OX แบ่ง Θ เป็น $\theta_1 + \theta_2$ และมุม $\angle C = \angle C_1 + \angle C_2$ มุมภายในของสี่เหลี่ยม $AXOC$ และสี่เหลี่ยม $BXOC$ รวมกันได้ $360^\circ + 360^\circ = 720^\circ$

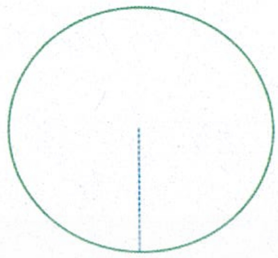
$$\angle A + 90^\circ + \angle\theta_1 + \angle C_1 + \angle B + 90^\circ + \angle\theta_2 + \angle C_2 = 720^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 720^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle\theta = 540^\circ - \angle\theta$$

ถ้า $\theta < 360^\circ$ แล้ว $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$ เช่น $\theta = 359^\circ$ แล้ว $\angle A + \angle B + \angle C = 181^\circ > 180^\circ$

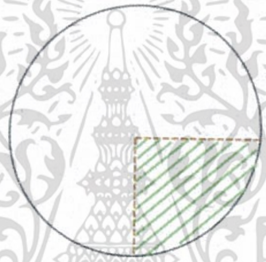
ในกรณีที่พื้นผิวเป็นอานม้าเราจะพบว่า $\theta > 360^{\circ}$ สามารถสร้างรูปได้ดังนี้

ตัดกระดาษเป็นวงกลม 2 วง ที่มีขนาดเท่ากัน แล้วนำวงกลมวงแรกมาตัดตามรอยประ ดังรูป3.9



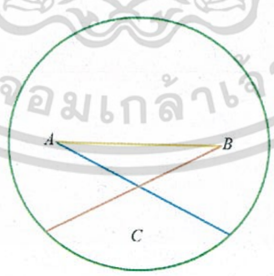
รูปที่ 3.9 วงกลมมีรอยประ

จากนั้น นำวงกลมอีกวงหนึ่งมาตัดตามรอยประจะได้สามเหลี่ยมฐานโค้งหนึ่งรูป ดังรูป3.10



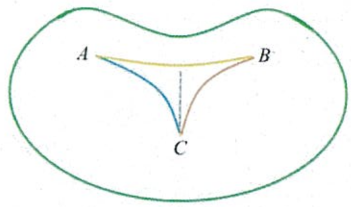
รูปที่ 3.10 วงกลมที่ต้องตัดออกจากพื้นที่ที่แรเงา

จากนั้น นำส่วนของสามเหลี่ยมฐานโค้งมาต่อส่วนของรัศมีกับรัศมีของวงกลมวงแรก ให้ A, B, C เป็นจุดบนวงกลม ขณะนี้จะได้กรวยแบนที่มี $\theta > 360^{\circ}$ ดังรูป3.11



รูปที่ 3.11 กรวยแบน

นำรัศมีของทรงกรวยแบนมาติดกัน จะได้พื้นผิวเป็นรูปอานม้า(*Bowl Shape*) ดังรูป3.12



รูปที่ 3.12 สามเหลี่ยมบนพื้นผิวอานม้า

ผลรวมของมุมภายในของสามเหลี่ยมบนพื้นผิวอานม้าที่ได้จะมีค่าน้อยกว่า 180°

$$\angle A + \angle B + \angle C = 540^\circ - \angle\theta$$

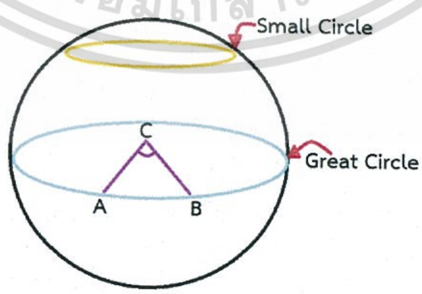
$$\theta > 360^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C < 180^\circ$$

เช่น $\theta = 361^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 179^\circ$

มุมภายในสามเหลี่ยมจีออเดซิกบนระนาบรวมกันได้ 180° บนกรวยกลมรวมกันได้มากกว่า 180° และบนพื้นผิวอานม้ารวมกันได้น้อยกว่า 180°

3.2 จีออเดซิกบนทรงกลม (*Geodesics on Spheres*)

<u>นิยาม3.3</u> วงกลมใหญ่(*great circle*) เป็นวงกลมที่เกิดจากการตัดทรงกลมวงหนึ่งด้วยระนาบหนึ่งระนาบซึ่งระนาบนี้ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม วงกลมอื่นๆบนทรงกลมนอกจากนี้เรียกว่า วงกลมเล็ก(*small circle*) ดังรูป3.13



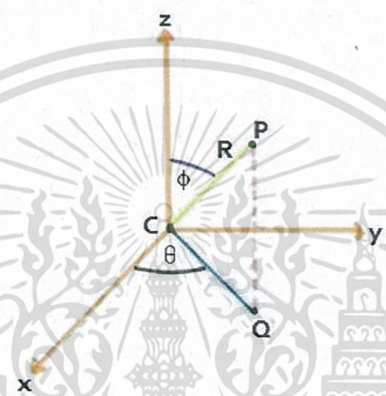
รูปที่ 3.13 แสดงวงกลมใหญ่และวงกลมเล็ก

ให้ จุด A และจุด B เป็นจุดบนทรงกลม และให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลม ความยาวส่วนโค้ง AB ที่รองรับมุม $\angle ACB$ เป็นส่วนของวงกลมใหญ่

ความยาว(AB)$= R\angle ACB$

เมื่อ R เป็นรัศมีของทรงกลม และ $\angle ACB$ คือ มุมที่วัดในหน่วยเรเดียน

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณหาความยาวของเส้นโค้งบนพื้นผิวของทรงกลม จะใช้ระบบพิกัดเชิงทรงกลม (R, θ, ϕ) โดยพิจารณาทรงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด C ในระบบพิกัดฉาก(x,y,z) ให้ P เป็นจุดใดๆในระบบพิกัดฉากที่อยู่บนทรงกลมด้วย แล้ว CP คือ รัศมี R ของทรงกลม ให้ CP ทำมุม ϕ กับแกน z บวก ภาพฉายของ CP ลงบนระนาบ xy คือ CQ ทำมุม θ กับแกน x ดังรูป3.14



รูปที่ 3.14 พิกัดเชิงทรงกลม

จากความรู้ในเรื่องตรีโกณมิติ CQ ตั้งฉากกับแกน z ดังนั้น $CQ = R\sin\phi$ แล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉาก (x, y, z) และพิกัดเชิงทรงกลม (R, θ, ϕ) คือ

$$x = R\sin\phi\cos\theta$$
$$y = R\sin\phi\sin\theta$$
$$z = R\cos\phi$$

<u>ทฤษฎีบท3.1</u> วิถีที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงกลม จะเป็นส่วนโค้งซึ่งเป็นส่วนของวงกลมใหญ่ (*great circle*)

พิสูจน์ ให้ $\sigma:[a,b] \longrightarrow S$ เป็นส่วนโค้งอิงพารามิเตอร์ใน S ซึ่ง

$$\sigma'(a) = A \text{ และ } \sigma'(b) = B$$

ให้ ϕ และ θ เป็นฟังก์ชันของ t

แทน $\sigma(t) = (x(t)), y(t), z(t))$ ในพิกัดฉาก ความยาวเส้นโค้งสามารถหาได้

จากสูตร ความยาว (σ) $= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$ (3.1)

ในพิกัดทรงกลม

$$x(t) = R\sin\phi(t)\cos\theta(t)$$
$$y(t) = R\sin\phi(t)\sin\theta(t)$$
$$z(t) = R\cos\phi(t)$$

โดยการหาอนุพันธ์ $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ จะได้

$$x'(t) = R[-\sin\phi(t)\sin\theta(t)\theta'(t) + \cos\theta(t)\cos\phi(t)\phi'(t)]$$
$$y'(t) = R[\sin\phi(t)\cos\theta(t)\theta'(t) + \sin\theta(t)\cos\phi(t)\phi'(t)]$$
$$z'(t) = R\cos\phi(t)$$

นำฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้มายกกำลังสอง จะได้

$$x'(t)^2 = R^2[\sin^2\phi(t)\sin^2\theta(t)\theta'(t)^2 - 2\sin\phi(t)\sin\theta(t)\theta'(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t)$$
$$+ \cos^2\theta(t)\cos\phi^2(t)\phi'(t)^2]$$
$$y'(t)^2 = R^2[\sin^2\phi(t)\cos^2\theta(t)\theta'(t)^2 + 2\sin\phi(t)\sin\theta(t)\theta'(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t)$$
$$+\sin^2\theta(t)\cos\phi^2(t)\phi'(t)^2]$$
$$z'(t)^2 = R^2\sin\phi(t)\phi'(t)^2$$

นำ 3 สมการข้างต้นมารวมกันจะได้

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = R^2[\sin^2\phi(t)\sin^2\theta(t)\theta'(t)^2 - 2\sin\phi(t)\sin\theta(t)\theta'(t)$$
$$\cos\theta(t)\cos\phi(t) + \cos^2\theta(t)\cos\phi^2(t)\phi'(t)^2$$
$$+\sin^2\phi(t)\cos^2\theta(t)\theta'(t)^2 + 2\sin\phi(t)\sin\theta(t)\theta'(t)$$
$$\cos\theta(t)\cos\phi(t) + \sin^2\theta(t)\cos\phi^2(t)\phi'(t)^2$$
$$+R^2\sin\phi(t)\phi'(t)^2]$$
$$= R^2[\sin^2\phi(t)\theta'(t)^2\sin^2\theta(t) + \sin^2\phi(t)\theta'(t)^2\cos^2\theta(t)$$
$$+\cos^2\phi(t)\phi'(t)^2\cos^2\theta(t) + \cos^2\phi(t)\phi'(t)^2\sin^2\theta(t)$$

$$+\sin^2\phi(t)\phi'(t)^2]$$

$$= R^2[\sin^2\phi(t)\theta'(t)^2(\sin^2\theta(t)+\cos^2\theta(t))+$$

$$\cos^2\phi(t)\phi'(t)^2(\cos^2\theta(t)+\sin^2\theta(t))+\sin^2\phi(t)\phi'(t)^2]$$

$$= R^2[\sin^2\phi(t)\theta'(t)^2+\phi'(t)^2\cos^2\phi(t)+\phi'(t)^2\sin^2\phi(t))]$$

$$= R^2[\sin^2\phi(t)\theta'(t)^2+\phi'(t)^2(\cos^2\phi(t)+\sin^2\phi(t))]$$

$$= R^2\sin^2\phi(t)\theta'(t)^2+\phi'(t)^2$$

นำไปแทนในสมการ *(3.1)* จะได้

$$\text{ความยาว } (\sigma) = \int_a^b R\sqrt{\sin^2\phi(t)\theta'(t)^2+\phi'(t)^2}\,dt$$

$$\text{จาก ความยาว } (\sigma) = \int_a^b R\sqrt{\sin^2\phi(t)\theta'(t)^2+\phi'(t)^2}\,dt$$

$$\geq \int_a^b R\phi'(t)dt$$

$$= R(\phi(b)-\phi(a))$$

$$= R(\angle BCA)$$

$$= \text{ความยาว } (AB)$$

ความยาว (σ) จะมากกว่า ความยาว(AB)เสมอ ยกเว้นเมื่อ $\phi'(t)=0$ หรือ $\sin^2\phi(t)=0$ สำหรับทุกค่าของ t

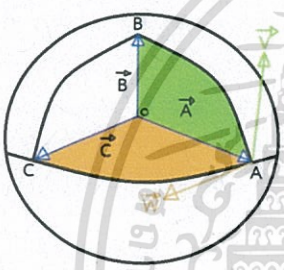
ดังนั้น ความยาว(AB) เป็นวิถีที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนวงกลมใหญ่ □

จีออเดซิกบนทรงกลมจะแตกต่างจากจีออเดซิกบนระนาบ จุดสองจุดที่แตกต่างกันบนระนาบจะมีจีออเดซิกเพีเส้นเดียว แต่จุดสองจุดที่แตกต่างกันบนทรงกลม เช่น ขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้ จะมีจีออเดซิกได้มากมาย จีออเดซิกบนระนาบอาจจะขนานกันหรือตัดกัน แต่จีออเดซิกบนทรงกลมจะตัดกันเสมอ

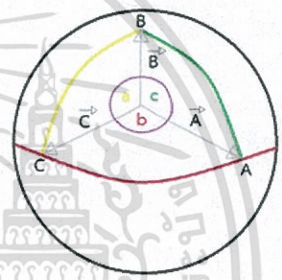
3.3 มุมทั้งหกของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม *(The six angles of a spherical triangle)*

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเป็นสามเหลี่ยมจีออเดซิกบนพื้นผิวทรงกลม ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม โดยด้าน a จะรองรับมุม A ด้าน b จะรองรับมุม B ด้าน c จะรองรับมุม C บนทรงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง

ΔABC จะมีมุมที่เกี่ยวข้องทั้งหมดหกมุม โดยมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AB เรียกมุม $\angle c$ หรือมุม $\angle c$ คือมุมที่แขนของมุมคือ OA และ OB มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AC เรียกมุม $\angle b$ หรือมุม $\angle b$ คือมุมที่แขนของมุมคือ OC และ OA มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้ง BC เรียกมุม $\angle a$ หรือมุม $\angle a$ คือมุมที่แขนของมุมคือ OB และ OC และมุมที่จุดยอด A, B และ C คือ $\angle A, \angle B$ และ $\angle C$ ดังรูป3.15



มุมที่จุดยอดของ ΔABC



มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งของ ΔABC

รูปที่ 3.15 มุมทั้งของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

มุมที่จุดยอด เช่น มุม A สามารถวัดได้ 3 แบบ คือ

1. มุม A คือ มุมระหว่างส่วนโค้ง AB และ AC
2. มุม A เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{V}$ ซึ่งสัมผัส AB ที่ A และเวกเตอร์ $\vec{W}$ ซึ่งสัมผัส AC ที่ A
3. มุม A เป็นมุมระหว่างระนาบ ABO และ ACO
   ในทำนองเดียวกันสำหรับ $\angle B$ และ $\angle C$ ต่อไปนี้

$$\vec{A} = \overrightarrow{OA}, \vec{B} = \overrightarrow{OB}, \vec{C} = \overrightarrow{OC}$$

มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะแทนด้วย $\angle(\vec{A}, \vec{B})$ หรือ $\angle(\vec{B}, \vec{A})$ ก็ได้ ในการศึกษามุมหกมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้จะไม่คิดว่ามีการหมุน

บทตั้ง3.1 ΔABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

1.มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนของวงกลมใหญ่ คือ

$$\angle a = \angle(\vec{B},\vec{C})$$
$$\angle b = \angle(\vec{C},\vec{A})$$
$$\angle c = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

2.มุมที่จุดยอดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ

$$\angle A = \angle(\vec{A}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{C})$$
$$\angle B = \angle(\vec{B}\times\vec{C},\vec{B}\times\vec{A})$$ เมื่อ x คือผลคูณเชิงเวกเตอร์
$$\angle C = \angle(\vec{C}\times\vec{A},\vec{C}\times\vec{B})$$

พิสูจน์ มุมระหว่างระนาบสองระนาบหาได้จากมุมระหว่างเส้นตั้งฉากกับระนาบทั้งสองโดยพิจารณาเป็นมุมแหลมเสมอ ดังนั้น

$$\angle A = \angle(\vec{A}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{C})$$

ให้ $\vec{V}$ เป็นเส้นสัมผัสกับ AB และให้ $\vec{W}$ เป็นเส้นสัมผัสกับ AC

จะได้ว่า $$\angle A = \angle(\vec{V},\vec{W}) \tag{3.2}$$

เนื่องจาก $\vec{V}$ และ $\vec{W}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ A แล้ว

แสดงว่า $\vec{V}$ จะตั้งฉากกับ A และ $\vec{W}$ จะตั้งฉากกับ A และเนื่องจาก $\vec{V}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}\times\vec{V}$ และ $\vec{W}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}\times\vec{W}$ ดังนั้นมุมระหว่าง $\vec{V}$ และ $\vec{W}$ คือมุมระหว่าง $\vec{A}\times\vec{V}$ และ $\vec{A}\times\vec{W}$

ทำให้ได้ว่า $$\angle(\vec{V},\vec{W}) = \angle(\vec{A}\times\vec{V},\overrightarrow{A\times W}) \tag{3.3}$$

แล้วเรายังพบอีกว่า $\vec{A}\times\vec{V}$ ชี้ไปในทิศเดียวกับ $\vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{W}$ ชี้ไปในทิศเดียวกับ $\vec{A}\times\vec{C}$

จะได้ $$\angle(\vec{V},\vec{W}) = \angle(\vec{A}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{C}) \tag{3.4}$$

จากสมการ (3.2) , (3.3) และ (3.4) ดังนั้น

$$\angle A = \angle(\vec{A}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{C})$$

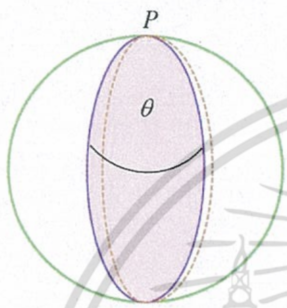
ในทำนองเดียวกัน $\angle B = \angle(\vec{B}\times\vec{C},\vec{B}\times\vec{A})$ และ $\angle C = \angle(\vec{C}\times\vec{A},\vec{C}\times\vec{B})$ □

<u>**ทฤษฎีบท3.2**</u> ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

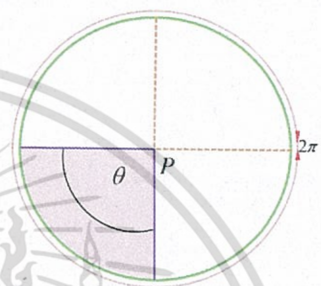
จะได้ว่า $$\angle A+\angle B+\angle C=\pi+ (\text{พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม } ABC \ / R^2)$$

เมื่อ R เป็นรัศมีของทรงกลม กรณีเฉพาะ $\angle A+\angle B+\angle C>180^\circ$

พิสูจน์ ให้ P เป็นจุดที่อยู่บนทรงกลม และให้ $-P$ เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด P บนทรงกลม ลากเส้นออกมาสองเส้นจากจุด P ไปยังจุด $-P$ ดังรูป3.16



ดูจากด้านข้าง



ดูจากด้านบน

รูปที่ 3.16 พื้นที่ผิว *P-Sector*

จากรูปที่16 จะเรียกพื้นที่ส่วนที่ผิวแรเงาว่า *P-Sector* และให้ Θ เป็นมุมภายในของพื้นที่ผิว *P-Sector* และจะพบว่าอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ผิวของ *Sector* กับพื้นที่ผิวทรงกลมจะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างมุม Θ กับเส้นรอบวง

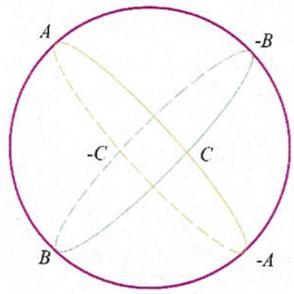
$$\text{พื้นที่ผิวของ}Sector/\text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} = \theta / 2\pi$$

เนื่องจากพื้นที่ผิวของทรงกลมมีค่าเท่ากับ $4\pi R^2$ ทำให้ได้ว่า

$$\text{พื้นที่ผิวของ}Sector/4\pi R^2 = \theta / 2\pi$$

ดังนั้น $$\text{พื้นที่ผิวของ}Sector = 2R^2\theta$$

ให้ A, B, C เป็นจุดบนทรงกลม และให้ $-A, -B, -C$ เป็นจุดซึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุด A, B, C ตามลำดับ ดังรูปที่3.17



รูปที่ 3.17 การหมุนของทรงกลม

ให้ H_c เป็นพื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม จากรูปที่18 ทำให้ได้ว่า

พื้นที่ผิวของ $H_c =$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $ABC +$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $(-A)BC +$ พื้นที่ผิวสามเหลี่ยม $A(-B)C +$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $(-A)(-B)C$ (3.5)

และกำหนดให้

พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $ABC +$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $(-A)BC =$ พื้นที่ผิวของ*A-Sector* (3.6)

พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $ABC +$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $A(-B)C =$ พื้นที่ผิวของ*B-Sector* (3.7)

พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $ABC +$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $AB(-C)$ = พื้นที่ผิวของ*C-Sector* (3.8)

เนื่องจากพื้นที่ผิวสามเหลี่ยม $AB(-C)$ กับพื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $(-A)(-B)C$ เป็นการสะท้อนซึ่งกันและกันปรากฏการณ์นี้เรียกว่า *Isometry* ซึ่งจะทำให้ได้ว่า

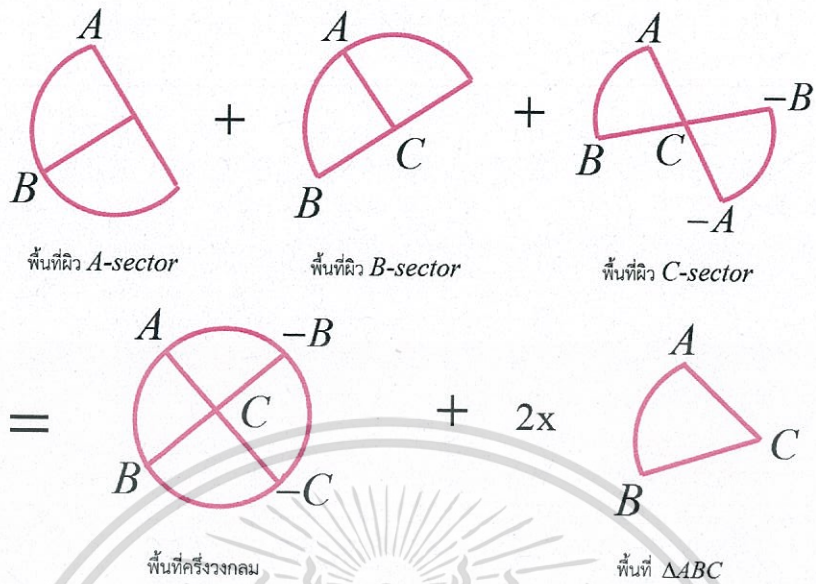
พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $AB(-C) =$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $(-A)(-B)C$

ด้วยเหตุนี้เองจากสมการ(3.8)ทำให้ได้ว่า

พื้นที่ผิวของ*C-Sector*=พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $ABC +$ พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม $(-A)(-B)C$ (3.9)

นำสมการ(3.6),(3.7)และ(3.9)มารวมกันจะได้

พื้นที่ผิว(*A-Sector*)+พื้นที่ผิว(*B-Sector*)+พื้นที่ผิว(*C-Sector*)= พื้นที่ผิวของ H_c +2(พื้นที่สามเหลี่ยม ABC) (3.10)



รูปที่ 3.18 ผลรวมของพื้นที่ผิว *A-Sector*,*B-Sector* และ*C-Sector*
ที่มา : หนังสือ *Modern geometry with application*

เราจะให้ $\angle A, \angle B$ และ $\angle C$ เป็นมุมภายใน *A-Sector*,*B-Sector*และ*C-Sector* ตามลำดับ ในทำนองเดียวกันกับพื้นที่ผิว *P-Sector* จะทำให้ได้ว่า

$$\text{พื้นที่ผิว}(A\text{-}Sector) = 2R^2\angle A$$

$$\text{พื้นที่ผิว}(B\text{-}Sector) = 2R^2\angle B$$

$$\text{พื้นที่ผิว}(C\text{-}Sector) = 2R^2\angle C$$

และพื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลมจะมีค่าเท่ากับ $2\pi R^2$ ทำให้ได้ว่า

$$\text{พื้นที่ผิวของ } H_c = 2\pi R^2 = \frac{1}{2} \text{ (พื้นที่ผิวของทรงกลม)}$$

จากสมการที่ (3.10) จะเขียนได้ใหม่ว่า

$$2R^2\angle A + 2R^2\angle B + 2R^2\angle C = 2\pi R^2 + \text{พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม } ABC$$

นำ $2R^2$ หารทั้งสมการจะได้

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \text{ (พื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม } ABC / R^2 \quad \square$$

3.4 กฎโคไซน์สำหรับด้าน(*The law of cosines for sides*)

ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมซึ่งด้าน a จะรองรับมุม A ด้าน b จะรองรับมุ B และด้าน c จะรองรับมุม C

ประพจน์3.1 กฎโคไซน์สำหรับด้าน คือ

$$\cos\angle a=\cos\angle b\cos\angle c+\sin\angle b\sin\angle c\cos\angle A$$

พิสูจน์ เราจะใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ คำนวณ $\cos\angle A$ โดยบทตั้ง1 คือ $\angle A=\angle(\vec{A}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{C})$ ดังนั้น

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{C})=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\left|\vec{A}\times\vec{C}\right|\cos\angle A$$

นอกจากนี้ $\angle(\vec{A},\vec{B})=\angle c$ และ $\angle(\vec{A},\vec{C})=\angle b$ ดังนั้น

$$\left|\vec{A}\times\vec{C}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{C}\right|\sin\angle c$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\angle b$$

ทำให้ได้ว่า

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{C})=(\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\angle b)(\left|\vec{A}\right|\left|\vec{C}\right|\sin\angle c)\cos\angle A$$

$$=R^4(\sin\angle b)(\sin\angle c)(\cos\angle A) \qquad (3.11)$$

$$(\because \left|\vec{A}\right|=\left|\vec{B}\right|=\left|\vec{C}\right|=R)$$

จากความรู้เรื่องพีชคณิตเวกเตอร์

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\left[(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}\right]\cdot\vec{D}$$

$$=\left[-\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})\right]\cdot\vec{D}$$

$$=\left[-\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})\right]\cdot\vec{D}$$

$$=\left[\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})\right]\cdot\vec{D}$$

$$=\left[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})\right]\cdot\vec{D}$$

$$=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$= \det\begin{pmatrix} (\vec{A}\cdot\vec{C}) & (\vec{B}\cdot\vec{C}) \\ (\vec{A}\cdot\vec{D}) & (\vec{B}\cdot\vec{D}) \end{pmatrix}$$

แสดงว่า
$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) = \det\begin{pmatrix} (\vec{A}\cdot\vec{A}) & (\vec{B}\cdot\vec{A}) \\ (\vec{A}\cdot\vec{C}) & (\vec{B}\cdot\vec{C}) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} |\vec{A}|^2 & |\vec{A}||\vec{C}|\cos\angle b \\ |\vec{B}||\vec{A}|\cos\angle c & |\vec{B}||\vec{C}|\cos\angle a \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} R^2 & R^2\cos\angle b \\ R^2\cos\angle c & R^2\cos\angle a \end{pmatrix}$$

$$= R^4\cos\angle a - R^4\cos\angle b\cos\angle c \qquad (3.12)$$

เนื่องจากสมการที่(3.11)เท่ากับสมการ(3.12)จะได้ว่า

$$R^4\cos\angle a - R^4\cos\angle b\cos\angle c = R^4\sin\angle b\sin\angle c\cos\angle A$$

นำ R^4 หารทั้งสมการจะได้

$$\cos\angle a - \cos\angle b\cos\angle c = \sin\angle b\sin\angle c\cos\angle A$$

$$\cos\angle a = \sin\angle b\sin\angle c\cos\angle A + \cos\angle b\cos\angle c$$

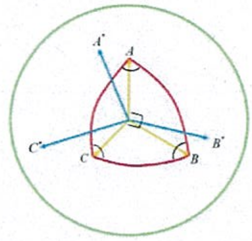
□

3.5 คู่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม(*The Dual Spherical Triangle*)

ความสำคัญของคู่ของสามเหลี่ยม ในความจริงคือ จุดยอดของคู่สามเหลี่ยมสมนัยกับด้านของสามเหลี่ยมเดิมและด้านของคู่สามเหลี่ยมสมนัยกับจุดยอดของสามเหลี่ยมเดิม ทุกทฤษฎีเกี่ยวที่กับด้านของสามเหลี่ยมเดิม ทำให้ไม่มีข้อจำกัดทฤษฎีเกี่ยวกับจุดยอดของสามเหลี่ยมคู่ และทุกทฤษฎีเกี่ยวกับจุดยอดของสามเหลี่ยมเดิม ให้ทฤษฎีเกี่ยวกับด้านของสามเหลี่ยมคู่ โดยใช้ “ความเป็นคู่” เราจึงตัดงานออกครึ่งหนึ่ง

<u>นิยาม3.4</u> คู่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ให้ ΔABC คือสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม คู่สามเหลี่ยมเชิงกลม $^*\Delta ABC$ คือสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม $\Delta A^*B^*C^*$ ดังรูปที่ 3.19



รูปที่ 3.19 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ซึ่ง
$$\overrightarrow{A^*} = \frac{\vec{B}\times\vec{C}}{R\sin\angle a'}$$

$$\overrightarrow{B^*} = \frac{\vec{C}\times\vec{A}}{R\sin\angle b'},$$

$$\overrightarrow{C^*} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{R\sin\angle c'}$$

ในที่นี้ R คือ รัศมีของทรงกลมและจากนี้ไปเมื่อกล่าวถึง R จะหมายถึงรัศมีของทรงกลมเสมอ

$\overrightarrow{A^*} = \overrightarrow{OA^*}, \overrightarrow{B^*} = \overrightarrow{OB^*}$ และ $\overrightarrow{C^*} = \overrightarrow{OC^*}$ เมื่อ O คือจุดศูนย์กลางของทรงกลม

ดังนั้น
$$\left|\overrightarrow{A^*}\right| = \left|\overrightarrow{B^*}\right| = \left|\overrightarrow{C^*}\right| = R$$

<u>บทตั้ง3.2</u>
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \qquad (3.13)$$

พิสูจน์ ถ้าเวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่ง $\vec{A},\vec{B}$ หรือ $\vec{C}$ เป็น $\vec{O}$ จะพบว่า (3.13) เป็นจริง ถ้า $\vec{B}\parallel\vec{C}$ แล้ว $\vec{B} = m\vec{C}$ หรือ $\vec{C} = n\vec{B}$ สำหรับบางสเกลาร์ m และ n แล้วทั้งข้างซ้ายและข้างขวาสมการ (3.13) เป็น O ดังนั้นในการพิสูจน์สมการ (3.13) ต้องสมมติให้ $\vec{A},\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์และ $\vec{B}$ ไม่ขนานกับ $\vec{C}$

สำหรับเวกเตอร์ใดๆ $\vec{X}$ และ $\vec{Y}$ จะได้

$$\vec{X}\cdot\vec{Y}\times\vec{X} = 0$$

ถ้า $\vec{X} = \vec{B}\times\vec{C}$ และ $\vec{Y} = \vec{A}$ แล้ว $\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = 0$

นั่นคือ $\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}$ และ $\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)$ อยู่ในระนาบเดียวกัน (3.14)

ดังนั้นจะมีสเกลาร์ m และ n ซึ่ง

$$\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)=m\overrightarrow{B}-n\overrightarrow{C} \tag{3.15}$$

dot ทั้งสองข้างของสมการ(3.15) ด้วยเวกเตอร์ $\overrightarrow{A}$ จะได้

$$\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)=m\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{B}-n\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{C} \tag{3.16}$$

เนื่องจาก $\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)=0$ (3.17)

จากสมการ (3.16) $m\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{B}-n\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{C}=0$ (3.18)

สมมติ $\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{B}=0$ แล้ว $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$ (3.19)

จากสมการ(3.17) $\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)=0$ แล้ว $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)$

แสดงว่า $\overrightarrow{A}$ ตั้งฉากกับระนาบที่มีเวกเตอร์ $\overrightarrow{B}$ และ $\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)$ อยู่ในระนาบ

จากสมการ (3.14) เนื่องจาก $\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}$ และ $\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)$ อยู่ในระนาบเดียวกัน

ดังนั้น $\overrightarrow{A}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{C}$ และ $\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{C}=0$ (3.20)

เนื่องจาก $\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\perp\overrightarrow{B}$ และ $\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\perp\overrightarrow{C}$

จากสมการ (3.19) และ (3.20) $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$ และ $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{C}$ ดังนั้น $\overrightarrow{A}\parallel\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)$

จะได้ $\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)=0$ ดังนั้น สมการ (3.13) เป็นจริง □

ประพจน์3.2 ให้ A^*,B^*,C^* คือจุดยอดของสามเหลี่ยมคู่ในนิยาม4 ให้ a^* คือ ด้านตรงข้ามมุม A^*,b^* คือ ด้านตรงข้ามมุม B^* และ c^* คือ ด้านตรงข้ามมุม C^* เมื่อ

$$\overrightarrow{A}=s\left(\frac{\overrightarrow{B^*}\times\overrightarrow{C^*}}{R\sin\angle a^*}\right)$$

$$\vec{B} = s\left(\frac{\overrightarrow{A^*} \times \overrightarrow{C^*}}{R\sin\angle b^*}\right)$$

$$\vec{C} = s\left(\frac{\overrightarrow{A^*} \times \overrightarrow{B^*}}{R\sin\angle c^*}\right)$$

ซึ่ง $s = \pm 1$ คือค่าของ $\det\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]$ โดย $s = \begin{cases} 1 & ;\det\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right] < 0 \\ -1 & ;\det\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right] > 0 \end{cases}$

พิสูจน์

$$\overrightarrow{B^*} \times \overrightarrow{C^*} = \left(\frac{\vec{C}\times\vec{A}}{R\sin\angle b}\right)\times\left(\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{R\sin\angle c}\right)$$

$$= \frac{(\vec{C}\times\vec{A})\times(\vec{A}\times\vec{B})}{R^2\sin\angle b\sin\angle c} \tag{3.21}$$

ใช้บทตั้ง3.2

$$\vec{X}\times\left(\vec{Y}\times\vec{Z}\right) = \left(\vec{X}\bullet\vec{Z}\right)\vec{Y} - \left(\vec{X}\bullet\vec{Y}\right)\vec{Z}$$

แทนในสมการ (3.20)

$$\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \left(\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\bullet\vec{B}\right)\vec{A} - \left(\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\bullet\vec{A}\right)\vec{B}$$

$$= \vec{A}\det\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right] + 0$$

จะได้

$$\overrightarrow{B^*} \times \overrightarrow{C^*} = \vec{A}\left(\frac{\det[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]}{R^2\sin\angle b\sin\angle c}\right)$$

$$\vec{A} = \overrightarrow{B^*} \times \overrightarrow{C^*} \left(\frac{R^2 \sin \angle b \sin \angle c}{\det[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]} \right)$$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{A}$ มีทิศทางเดียวกับ $s\left(\frac{\overrightarrow{B^*} \times \overrightarrow{C^*}}{R \sin \angle a^*} \right)$

นอกจากนี้($0 < \sin \angle a^*, \sin \angle b$, $\sin \angle c$ เนื่องจาก $0^\circ < \angle a^*, \angle b, \angle c < 180^\circ$)

$$R = \left|\vec{A}\right| \text{ และ } R = \left(\frac{\overrightarrow{B^*} x \overrightarrow{C^*}}{R \sin \angle a^*} \right)$$

เนื่องจาก $\left|\overrightarrow{B^*}\right| = \left|\overrightarrow{C^*}\right| = R$ และ $\angle\left(\overrightarrow{B^*}, \overrightarrow{C^*}\right) = \angle a^*$ ดังนั้น

$$\vec{A} = s\left(\frac{\overrightarrow{B^*} \times \overrightarrow{C^*}}{R \sin \angle a^*} \right)$$

$\vec{B}$ และ $\vec{C}$ มีการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน □

<u>บทแทรก3.1</u> ความเป็นคู่ของสามเหลี่ยมคู่

คู่ของ $^*\Delta ABC$ คือ

$$*(*\Delta ABC) = \begin{cases} \Delta ABC & \text{if } \det\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right] \geq 0 \\ \Delta(-A)(-B)(-C) & \text{if } \det\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right] \leq 0 \end{cases}$$

<u>บทแทรก3.2</u> $*(*\Delta ABC) \cong \Delta ABC$

พิสูจน์ โดยบทแทรก1 ทุก $*(*\Delta ABC)$ เท่ากับ ΔABC เท่ากับมุมกลับของ ΔABC จากศูนย์กลางของทรงกลม □

<u>บทแทรก3.3</u> ให้ A^*, B^* และ C^* คือมุมยอดของ $*\Delta ABC$ จากนิยาม3.4 ให้ a^* คือด้านที่รองรับมุม A^*, b^* คือด้านที่รองรับมุม B^* และ c^* คือด้านที่รองรับมุม C^* เมื่อ

$$\angle A + \angle a^* = \angle A^* + \angle a = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle b^* = \angle B^* + \angle b = 180^\circ \quad (3.22)$$

$$\angle C + \angle c^* = \angle C^* + \angle c = 180^\circ$$

พิสูจน์ โดย นิยาม3.4และบทตั้ง3.1 $\angle a^* = \angle\left(\overrightarrow{B^*}, \overrightarrow{C^*}\right)$

$$= \angle\left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right)$$

$$= \angle\left(\overrightarrow{-A} \times \overrightarrow{C}, \overrightarrow{A} \times \vec{B}\right)$$

$$= 180^\circ - \angle\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}, \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right)$$

$$= 180^\circ - \angle A$$

ดังนั้น

$$\angle A + \angle a^* = 180^\circ$$

ใช้ผลลัพธ์นี้กับคู่ $\Delta A^{**}B^{**}C^{**}$ ของ $\Delta A^*B^*C^*$ จะได้

$$\angle A^* + \angle a^{**} = 180 \quad (3.23)$$

เมื่อ a^{**} คือด้านที่รองรับ $\angle A^{**}$ แต่ $\angle a^{**} \cong \angle a$ จากบทแทรก3.2 กล่าวว่า $\Delta A^{**}B^{**}C^{**}$ สอดคล้องกันกับ ΔABC ด้วยเหตุนี้

$$\angle A^* + \angle a = 180^\circ$$

โดย สมการ(3.23)

การพิสูจน์นี้คือสมการแรกของสมการ*(3.22)* ในทำนองเดียวกันกับสมการที่เหลือใช้การพิสูจน์เหมือนสมการที่แรก

□

3.6 กฎโคไซน์สำหรับมุม(***The Law of Cosines for Angles***)

ผลลัพธ์ต่อไปนี้ไม่มีข้อจำกัดจากกฎของ *cosine* ของด้าน ในหัวข้อนี้จะแสดงการพิสูจน์กฎโคไซน์สำหรับมุม

<u>**บทแทรก3.4**</u> กฎของมุม *cosine*

ให้ ΔABC คือสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม โดย a คือด้านที่รองรับมุม A,b คือด้านที่รองรับมุม B,c คือด้านที่รองรับมุม C แล้ว

$$\cos\angle A = -\cos\angle B\cos\angle C + \sin\angle B\sin\angle C\cos\angle a \quad (3.24)$$

พิสูจน์ ใช้กฎของ *cosine* สำหรับด้าน (ประพจน์3.1) ของสามเหลี่ยมคู่ $^*\Delta ABC = \Delta A^* B^* C^*$

$$\cos\angle a^* = \cos\angle b^* \cos\angle c^* + \sin\angle b^* \sin\angle c^* \cos\angle A^* \qquad (3.25)$$

เมื่อ a^* คือด้านที่รองรับมุม A^*, b^* คือด้านที่รองรับมุม B^* และ c^* คือด้านที่รองรับมุม C^* โดย บทแทรก3.3 $\angle a^* = 180^\circ - \angle A$, $\angle b^* = 180^\circ - \angle B$, $\angle c^* = 180^\circ - \angle C$ แทนลงในสมการ (3.25) แล้วใช้ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ และ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

สำหรับทุกๆ มุม θ ในสมการ(3.24)

มุมยอดที่กำหนดให้สามารถแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้อย่างสมบูรณ์ โดยใช้กฎของ *cosine* สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม 2 รูป ที่มุมยอดสอดคล้องกัน ในระนาบเรขาคณิตหนึ่ง กล่าวว่า สามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีมุมที่กล้ายคลึงกัน □

ตัวอย่าง3.4 จงหาด้านตรงข้าม $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ถ้ามุมยอด คือ $\angle A = 60^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 80^\circ$

<u>วิธีทำ</u> โดยกฎของ *cosine* สำหรับมุม

$$\cos\angle a = \frac{\cos\angle A + \cos\angle B \cos\angle C}{\sin\angle B \sin\angle C}$$

$$\approx \frac{0.50000 + (0.34202)(0.17365)}{(0.93969)(0.98481)} \approx 0.6447$$

ดังนั้น $$\angle a \approx \arccos(0.60447) \approx 52.809^\circ$$

เช่นเดียวกัน

$$\cos\angle b = \frac{\cos 70^\circ + \cos 60^\circ \cos 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ}$$

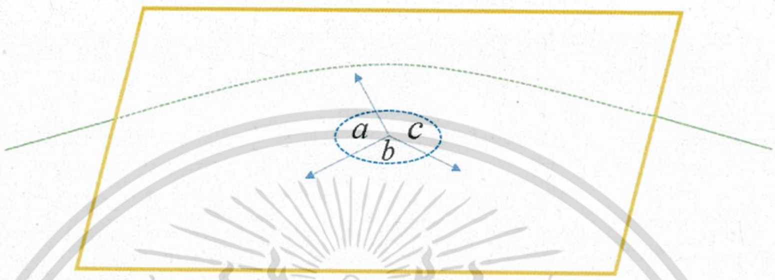
$$\approx \frac{(0.34202) + (0.50000)(0.17365)}{(0.86603)(0.98481)} \approx 0.50283$$

$$\cos\angle c = \frac{\cos 80^\circ + \cos 60^\circ \cos 70^\circ}{\sin 60^\circ \sin 70^\circ}$$

$$\approx \frac{(0.17365) + (0.50000)(0.34202)}{(0.86603)(0.93969)} \approx 0.42352$$

ดังนั้น $\angle b \approx 59.813^\circ$ และ $\angle c \approx 64.943^\circ$

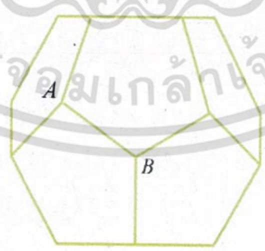
เมื่อรวมมุมบนทรงกลมหลายมุมเข้าด้วยกันที่จุดยอดจะมีมุมเพิ่มขึ้นในระนาบเดียวกัน ตัวอย่าง $\angle a+\angle b+\angle c=360^{\circ}$ ดังรูปที่3.20 ด้วยเหตุนี้ มุมบนทรงกลมระหว่างเส้นโค้งทั้งสองเท่ากับมุมระหว่างเส้นโค้งที่สัมผัสกัน เพราะฉะนั้น ถ้ามุมทั้งหลายที่มีจุดยอดเดียวกัน มุมประกอบทั้งหมดระหว่างเวกเตอร์จะอยู่ในระนาบเดียวกัน มุมระหว่างเส้นโค้งสองเส้นที่ตัดกันบนทรงกลมจะเท่ากับมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งทั้งสองแต่ละเส้น



รูปที่ 3.20 แสดงผลรวมมุมของมุม a,b,c $a+b+c=360^{\circ}$

เมื่อรวมจุดใดๆบนทรงกลม จากผลบวกของมุมรวมกันแล้ว จะได้ว่ามุมมีค่า 360° ตัวอย่างเช่น $\angle a+\angle b+\angle c=360^{\circ}$

ตัวอย่าง3.5 ทรงสิบสองหน้า คือ พื้นผิวสมมาตรปิด ที่เกิดจากจากการรวมกันของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า 12 รูป โดยนำด้านของรูปห้าเหลี่ยม 3 รูป มาต่อกันที่แต่ละมุมยอด ดังรูปที่3.21 จงหาระยะทางจากมุมยอดของทรงสิบสองหน้าไปยังศูนย์กลาง ถ้าแต่ละด้านยาว 1 นิ้ว



รูปที่ 3.21 ทรงสิบสองหน้า

<u>วิธีทำ</u> ให้ A และ B คือจุดยอดที่อยู่ติดกัน และ O เป็นจุดศูนย์กลางของทรงสิบสองหน้า สามารถหาระยะทางของ $\overline{OA}$ โดยการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ΔAOB ซึ่ง $AO = BO$

จะหาขนาดของ $\angle AOB$ จาก

$$(1\ in).^2 = (OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)(OB)\cos\angle AOB$$

$$(1\ in.)^2 = 2(OA)^2 - 2(OA)^2\cos\angle AOB \tag{3.26}$$

โดยกฎของ *cosine* สำหรับสามเหลี่ยมบนระนาบ

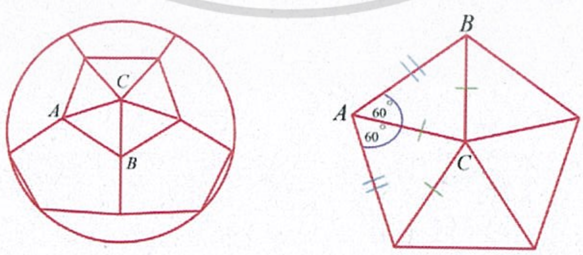
เราจะหา $\angle AOB$ โดยการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ภาพฉายของทรงสิบสองหน้าบนผิวของทรงกลม พื้นผิวของทรงกลมประกอบด้วย ห้าเหลี่ยมเชิงทรงกลมชิดกัน 12 รูป เมื่อแบ่งห้าเหลี่ยมเชิงทรงกลมออกเป็นบริเวณย่อยๆ จะกลายเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วเชิงทรงกลม 5 รูปติดกัน โดยการเชื่อมเส้นโค้งจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอด ดังรูปที่ 3.22

รูปที่ 3.22 ทรงสิบสองหน้าบนผิวของทรงกลม

ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเมื่อ C คือจุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมเชิงทรงกลม ห้าเหลี่ยมเชิงทรงกลมมาบรรจบกันที่จุดยอด B และ A ดังนั้น แต่ละมุมของห้าเหลี่ยมเชิงทรงกลมมีขนาด

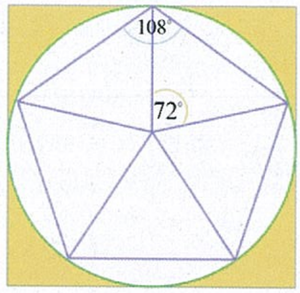
$$\frac{360^\circ}{2} = 120^\circ$$

ภายในรูปห้าเหลี่ยม มีสามเหลี่ยมสองรูปพบกันที่แต่ละจุดยอด ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.23 ขนาดมุมภายในทรงห้าเหลี่ยมที่มี A และ B เป็นจุดศูนย์กลาง

$$\angle A = \angle B = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$



รูปที่ 3.24 ขนาดมุมภายในทรงห้าเหลี่ยมที่มี C เป็นจุดศูนย์กลาง

สามเหลี่ยม 5 รูป พบกันที่จุดศูนย์กลางของรูปห้าเหลี่ยม ดังนั้น

$$\angle C = \frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$$

ใช้กฎของ *cosine* สำหรับมุม

$$\cos\angle A = -\cos\angle B\cos\angle C + \sin\angle B\sin\angle C\cos\angle a$$

$$\cos\angle AB = \frac{\cos 72^{\circ} + \cos^2 60^{\circ}}{\sin^2 60^{\circ}} \approx 0.74536$$

ดังนั้น โดยสมการ (3.26)

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \approx \frac{1\ in.}{\sqrt{2-(2)(0.74536)}} \approx 1.401 in.$$

3.7 กฎไซน์สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม(*The Law of Sines for Spherical Triangles)*

<u>ประพจน์3.3</u> **กฎไซน์สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม**

ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม และด้าน a เป็นด้านที่รองรับมุมยอด A ด้าน b เป็นด้านที่รองรับมุมยอด B และด้าน c เป็นด้านที่รองรับมุมยอด C

ให้ A^*, B^* และ C^* เป็นมุมยอดของสามเหลี่ยมคู่จากนิยาม3.4 เมื่อ

$$\frac{\sin\angle a}{\sin\angle A} = \frac{\sin\angle b}{\sin\angle B} = \frac{\sin\angle c}{\sin\angle C}$$

$$= s\left(\frac{\det\left[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}\right]}{\det\left[\overrightarrow{A^*}, \overrightarrow{B^*}, \overrightarrow{C^*}\right]}\right)$$

ซึ่ง $s = \pm 1$ คือค่าของ $\det\left[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}\right]$ โดย $s = \begin{cases} 1 & ;\det\left[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}\right] < 0 \\ -1 & ;\det\left[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}\right] > 0 \end{cases}$; ;det

พิสูจน์ ให้ R เป็นรัศมีของทรงกลม โดยนิยาม4 และประพจน์2

$$\det\left[\overrightarrow{A^*}, \overrightarrow{B^*}, \overrightarrow{C^*}\right] = \overrightarrow{A^*} \cdot \left(\overrightarrow{B^*} \times \overrightarrow{C^*}\right)$$

$$= \left(\frac{\vec{B} \times \vec{C}}{R \sin\angle a}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A} \frac{R \sin a^*}{s}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin\angle a^*}{\sin\angle a}\right)\left(\frac{\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C})}{s}\right) \qquad (3.27)$$

$$= \left(\frac{\sin\angle a^*}{\sin\angle a}\right)\left(\frac{\det[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}]}{s}\right)$$

แต่ $\sin\angle a^* = \sin\angle A$ เนื่องจาก $\angle A + \angle a^* = 180^\circ$ แทนในสมการ*(3.27)*

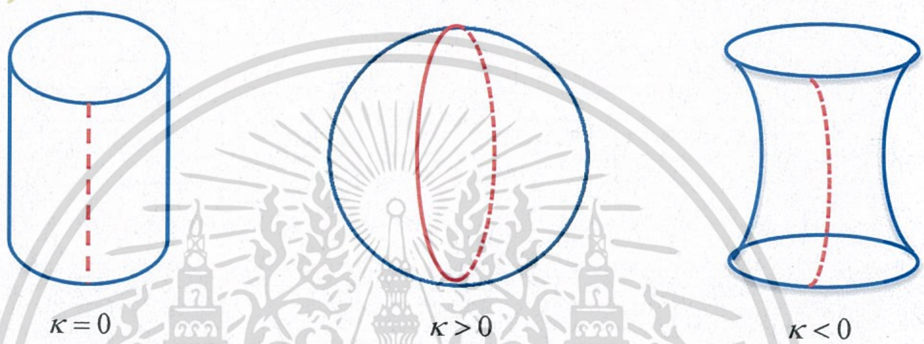
$$\left(\frac{\sin\angle a^*}{\sin\angle a}\right) = s\left(\frac{\det\left[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}\right]}{\det\left[\overrightarrow{A^*}, \overrightarrow{B^*}, \overrightarrow{C^*}\right]}\right)$$

เนื่องจาก $s = \pm 1$ นี่คือการพิสูจน์ส่วนแรกของข้อพิสูจน์ ส่วนที่เหลือก็จะเป็นไปในทำนองเดียวกัน□

บทที่ 4

เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

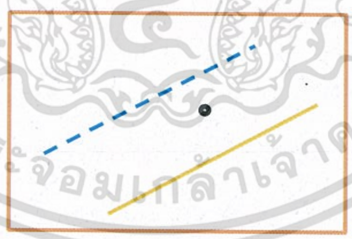
ในการศึกษาเรขาคณิตเชิงยุคลิด เชิงทรงกลม และเชิงไฮเพอร์โบลิก มีการกำหนดเงื่อนไขที่แตกต่างกันหลายแบบ เช่น กำหนดจากค่าความโค้งของเส้นจีออเดซิกที่เป็นเมอริเดียน ถ้าค่าความโค้งเท่ากับศูนย์จะเป็นเรขาคณิตเชิงยุคลิค ถ้าค่าความโค้งมากกว่าศูนย์จะเป็นเรขาคณิตเชิงทรงกลม และถ้าค่าความโค้งน้อยกว่าศูนย์เป็นเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก ซึ่งเมื่อพิจารณาเป็นรูปจะได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ค่าความโค้งของเรขาคณิตเชิงยุคลิด เชิงทรงกลม และเชิงไฮเพอร์โบลิก

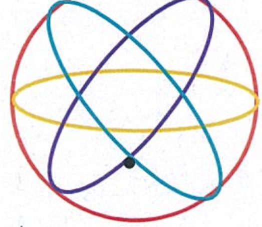
กำหนดเส้น 1 เส้น และจุด 1 จุด

- จะเป็นเรขาคณิตเชิงยุคลิด ถ้ามีเส้นจีออเดซิกเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดและไม่ตัดเส้นแรกดังรูปที่4.2



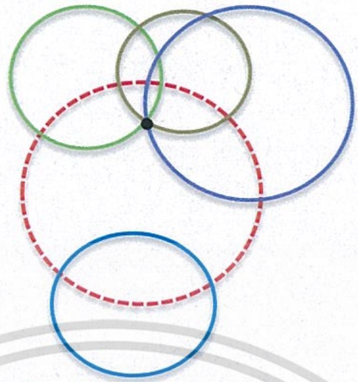
รูปที่4.2 เรขาคณิตเชิงยุคลิด

- จะเป็นเรขาคณิตเชิงทรงกลม ถ้ามีเส้นจีออเดซิกมากกว่า 1 เส้นผ่านจุดและตัดกันกับเส้นแรกดังรูปที่4.3



รูปที่4.3 เรขาคณิตเชิงทรงกลม

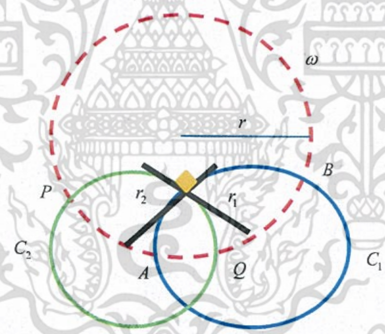
- จะเป็นเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก ถ้ามีเส้นจีออเดซิกมากกว่า 1 เส้นผ่านจุดและไม่ตัดกันกับเส้นแรกดังรูปที่4.4



รูปที่4.4 เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิกแบบแผ่นกลมของปวงการเร

สำหรับเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิกที่ศึกษานี้ ศึกษาโดยใช้โมเดลแผ่นกลมแบบปวงกาเรในระนาบแบบยุคลิดซึ่งมีข้อกำหนดดังนี้

ให้ ω, C_1 และ C_2 เป็นวงกลมที่มี r, r_1 และ r_2 เป็นรัศมีตามลำดับ โดย $r > r_1, r_2$ ดังรูปที่ 4.3

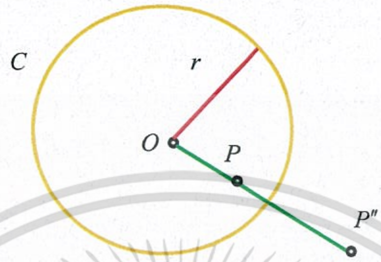


รูปที่4.5 โมเดลที่ใช้ศึกษาเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิกแบบปวงกาเร

1. ให้ ω เป็นวงกลม
2. ให้ C_1 ตัดกับ ω ที่จุด A และจุด B
3. ให้ C_2 ตัดกับ ω ที่จุด P และจุด Q
4. ให้ C_1 และ C_2 ตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยพิจารณาจากเส้นสัมผัสของ C_1 และ C_2 ณ จุดที่วงกลมทั้งสองตัดกัน ตั้งฉากซึ่งกันและกัน
5. ส่วนโค้ง AB และ PQ ที่อยู่ภายใน ω ต้องเป็นส่วนโค้งน้อย
6. ในการศึกษานี้จะศึกษาส่วนของวงกลมภายใน ω

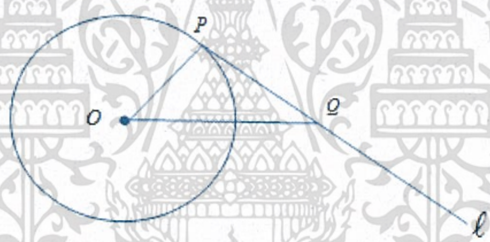
4.1 ผกผัน

นิยาม4.1 กำหนดให้ C เป็นวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และมี r เป็นรัศมี ให้ P เป็นจุดใดๆภายในวงกลมโดย $P \neq O$ ให้ P'' เป็นจุดบนส่วนต่อของ $\overline{OP}$ ที่จุด P ที่อยู่นอกวงกลมดังรูปที่ 4.6 แล้ว P และ P'' เป็น ผกผันซึ่งกันและกันจะได้ว่า $\overline{OP} \bullet \overline{OP''} = r^2$ หรือ $\overline{OP''} = \dfrac{r^2}{\overline{OP}}$



รูปที่4.6 จุด P'' เป็นผกผันของจุด P

ทฤษฎีบท4.1 เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมเสมอ



รูปที่4.7 วงกลมที่มีรัศมีตั้งฉากกับเส้นสัมผัส

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ให้ ℓ สัมผัสวงกลม O ที่จุด P

พิสูจน์เชิงขัดแย้ง ให้ Q เป็นจุดใดๆ บน l ซึ่ง $Q \neq P$

สมมติให้ $\overline{OP}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\overline{P\ell}$

ให้ $\overline{OQ}$ ตั้งฉากกับ $\overline{P\ell}$ ที่ Q ซึ่ง $Q \neq P$

โดย $\overline{OQ} > \overline{OP}$ ดังรูปที่4.7

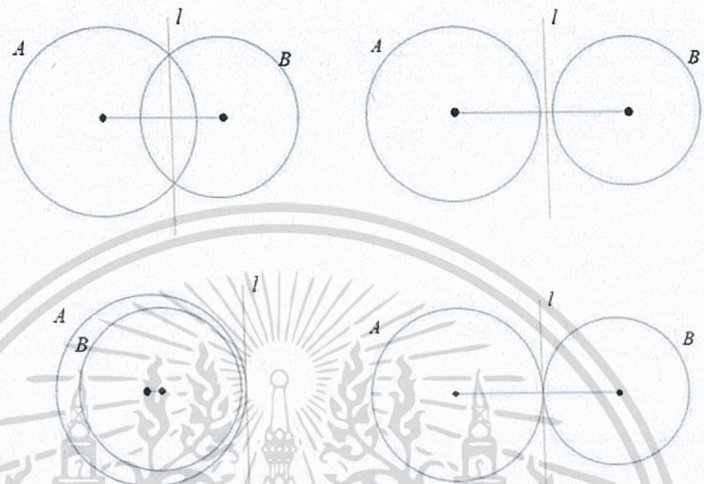
พิจารณา ΔOQP ซึ่งมี Q เป็นมุมฉาก และ $\overline{OP}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

แล้ว $\overline{OP} > \overline{OQ}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง □

ดังนั้น $\overline{OP}$ จึงตั้งฉากกับ $\overline{P\ell}$

4.2 Radical Axis

ถ้า l เป็นเส้นตั้งฉากกับเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวง l เป็น *radical axis* ของวงกลมถ้า $A \neq B$ เป็นจุดศูนย์กลาง ซึ่งมีกรณีที่เป็นไปได้ดังรูปที่4.8



รูปที่4.8 *radical axis*

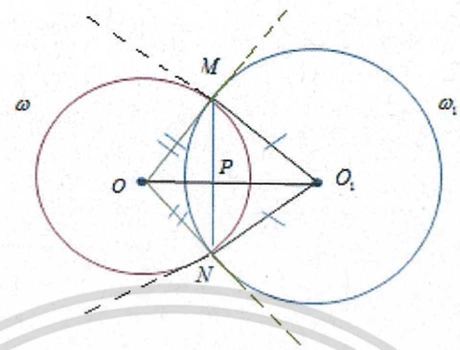
ในการศึกษานี้จะพิจารณากรณีที่ *radical axis* และ คอร์ดร่วมของวงกลมสองวงที่ไม่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันเป็นเส้นเดียวกัน ดังรูป4.9

รูปที่4.9 *radical axis* และ คอร์ดร่วมของวงกลมสองวงที่

ไม่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันเป็นเส้นเดียวกัน

นิยาม4.2 วงกลมสองวงตัดกัน คอร์ดร่วมระหว่างวงกลมทั้งสอง เรียกว่า *Radical axis*

จากรูปที่4.10 $\overline{MN}$ **เป็น** *Radical axis* ของวงกลม ω และ ω_1



รูปที่4.10 วงกลม ω และ ω_1 มีเส้นเชื่อมจุดศูนย์กลางแบ่งครึ่ง *Radical axis*

ทฤษฎีบท4.2 เส้นที่ลากเชื่อมจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวง จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ *Radical axis* ของวงกลมทั้งสอง

กำหนดให้ ω และ ω_1 เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางเป็น O และ O_1 ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{MN}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OO_1}$ ที่จุด P และ $\overline{PM} = \overline{PN}$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด O ไปยังจุด O_1 แล้วลากเส้นตรง $\overline{MN}$ ตัดกับเส้นตรง $\overline{OO_1}$ ที่จุด P โดย $\overline{MN}$ เป็นคอร์ดร่วมของวงกลม ω กับ ω_1 แล้วลากเส้นตรง $\overline{OM}$ และ $\overline{ON}$ และ $\overline{O_1M}$ และ $\overline{O_1N}$ ดังรูปที่4.10

พิสูจน์ พิจารณา ΔMNO

1.	$\overline{OM} = \overline{ON}$	รัศมีของวงกลมเดียวกัน
2.	ΔMNO เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มีสองด้านเป็นด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน
3.	$\angle OMN = \angle ONM$	มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
4.	$\overline{O_1M} = \overline{O_1N}$	รัศมีของวงกลมเดียวกัน
5.	ΔMNO_1 เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มีสองด้านเป็นด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน
6.	$\angle O_1MN = \angle O_1NM$	มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
7.	$\Delta OMO_1 \cong \Delta ONO_1$	จากข้อ1. ,ข้อ4. และมี $\overline{OO_1}$ เป็นด้านร่วม

8. $\angle MOO_1 = \angle NOO_1$ จากข้อ7.

9. $\angle MO_1O = \angle NO_1O$ จากข้อ7.

10. $\Delta MOP \cong \Delta NOP$ จากข้อ1. ,ข้อ3. ,และข้อ8.(ม.ด.ม.)

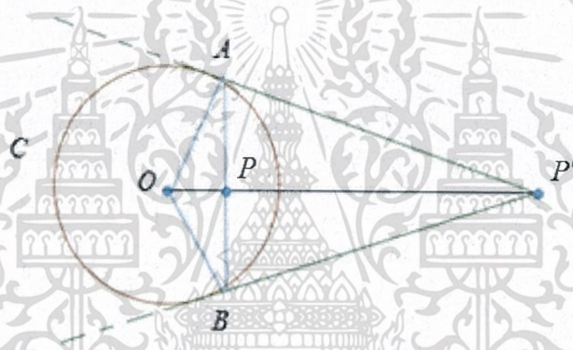
11. $\angle OPM = \angle OPN$ จากข้อ 10.

12. $\angle OPM + \angle OPN = 180^\circ$ เป็นมุมตรง

13. $\angle OPM = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ จากข้อ11. , ข้อ 12.

14. $\overline{PM} = \overline{PN}$ จากข้อ10. □

ทฤษฎีบท4.3 ให้ P เป็นจุดภายในวงกลม C ที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง โดย $P \neq O$ และ P'' เป็นผกผันของ P โดย P'' อยู่ภายนอกวงกลม C แล้วสามารถลากเส้นสัมผัสวงกลม C จาก P'' ได้สองเส้น ซึ่งยาวเท่ากันและตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม C ณ จุดสัมผัส ดังรูปที่4.11



รูปที่4.11 $\overline{P''A}$ และ $\overline{P''B}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม C

กำหนดให้ C เป็นวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง แล้ว P เป็นจุดภายในวงกลม C และ P'' อยู่ภายนอกวงกลม C โดย P'' เป็นผกผันของ P

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{P''A} \perp \overline{OA}$, $\overline{P''B} \perp \overline{OB}$ และ $\overline{P''A} = \overline{P''B}$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ให้ A, B เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม C ซึ่ง $\overline{AB} \perp \overline{OP''}$ ที่จุด P

พิสูจน์

1. $\overline{OA} = \overline{OB}$ รัศมีวงกลมเดียวกัน

2. ΔOAB เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้านสองด้านเป็นด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน

3. $\angle OAB = \angle OBA$ มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

4. $\angle OPA = \angle OPB = 90^\circ$ สร้างเพื่อการพิสูจน์

5 $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ จากข้อ1. และข้อ4. และ $\overline{OP'}$ เป็นด้านร่วม (ฉ.ด.ด.)

6.	$\angle AOP = \angle BOP$	จากข้อ5.
7.	$\Delta AOP'' \cong \Delta OBP''$	จากข้อ1.,ข้อ6. และมี $\overline{OP}$ เป็นด้านร่วม(ด.ม.ด.)
8.	$\overline{P''A} = \overline{P''B}$	จากข้อ7.
9.	$\overline{OP''} \bullet \overline{OP} = r^2 = \overline{OA} \bullet \overline{OA}$	นิยาม4.1
10.	$\dfrac{\overline{OP''}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$	จัดรูปจากข้อ9.
11.	$\Delta AOP \sim \Delta AOP''$	จากข้อ10.
12.	$\angle OPA = \angle OAP''$	มุมในลำดับเดียวกันของรูปสามเหลี่ยม
13.	$\angle OAP'' = 90^\circ$	จากข้อ4.และข้อ12.
14.	$\overline{P''A} \perp \overline{OA}$	จากข้อ13. □

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\overline{P''B} \perp \overline{OB}$

4.3 วงกลมเชิงตั้งฉาก

วงกลมสองวงจะกล่าวว่าเป็นวงกลมเชิงตั้งฉาก ถ้ามุม ณ จุดที่วงกลมทั้งสองตัดกันมีมุมที่มีค่าเท่ากับ 90° ซึ่งการวัดมุมระหว่างวงกลมทั้งสองวงจะวัดจากมุมของเส้นสัมผัสกับวงกลมทั้งสอง ณ จุดตัด ดังรูปที่4.12

รูปที่4.12 วงกลมสองวงตั้งฉากกัน

วงกลม $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ และวงกลม $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ เป็นวงกลมเชิงตั้งฉากแล้ว (f,f') (g,g') และ (c,c') จะเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$2gg' + 2ff' = c + c'$$

เมื่อ (g, f) และ (g', f') คือจุดศูนย์กลางของวงกลมและรัศมีของวงกลมหาได้จาก $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ และ $r'=\sqrt{g'^2+f'^2-c'}$ ตามลำดับ

ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองหรือวงกลมใดวงกลมหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิดแล้ว (g, f) = (0, 0) หรือ (g', f') = (0, 0) แล้วจะเป็นวงกลมเชิงตั้งฉาก เมื่อ $c + c' = 0$

หมายเหตุ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$$x^2+y^2+2gx+2fy=-c$$

$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$$

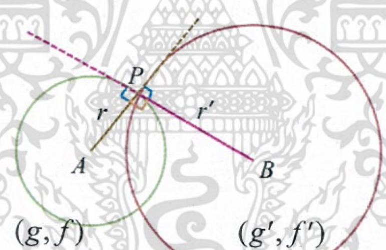
$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

$$r^2=g^2+f^2-c$$

$$r=\sqrt{g^2+f^2-c}$$

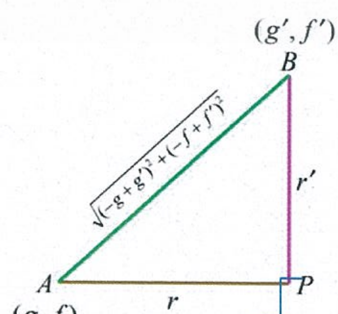
ในทำนองเดียวกันกับวงกลม $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$

ข้อสังเกต ให้วงกลม $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ และ วงกลม $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ เมื่อ (g, f) และ (g', f') คือจุดศูนย์กลางของวงกลมและรัศมีของวงกลมหาได้จาก $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ และ $r'=\sqrt{g'^2+f'^2-c'}$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.13 แล้ว (f,f') (g,g') และ (c,c') จะเป็นไปตามสมการ $2gg'+2ff'=c+c'$



รูปที่4.13 วงกลมสองวงตั้งฉากกัน

พิสูจน์ ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด A กับ จุด B
จะได้ ΔAPB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูปที่ 4.14



รูปที่4.14 ΔAPB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$$

$$(-g+g')^2 + (-f+f')^2 = r^2 + r'^2$$

$$(-g+g')^2 + (-f+f')^2 = (g^2+f^2-c)+(g'^2+f'^2-c')$$

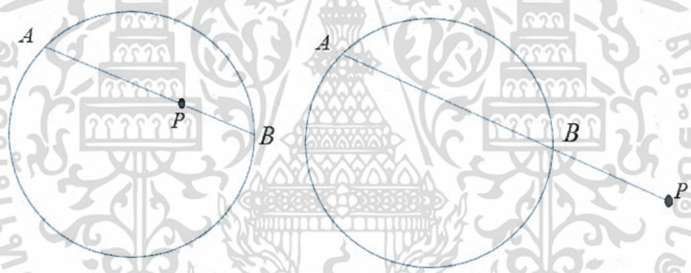
$$g^2+g'^2-2gg'+f^2+f'^2-2ff' = g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$$

$$2gg'+2ff' = c+c'$$

□

4.4 กำลังของจุด

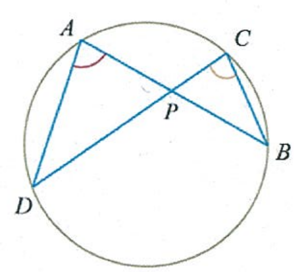
นิยาม กำลังของจุด(*power of point*) ให้ P เป็นจุดที่กำหนดแน่นอนในหรือนอกวงกลมให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นคอร์ดที่ผ่านจุด P แล้วกำลังของจุด ณ จุด P คือผลคูณของระยะทางจากจุด P ไปยังจุด A และจาก P ไปยังจุด B หรือกำลังจุด P คือ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$



รูปที่4.15 กำลังของจุด(*power of point*)

ทฤษฎีบท4.4 $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$ เมื่อ $\overline{AB}, \overline{CD}$ เป็นคอร์ดใดๆ ทั้งกรณีที่ P อยู่ในวงกลมและ P อยู่นอกวงกลม และ $\left|OP^2 - r^2\right| = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$ เมื่อ $\overline{CD}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

พิสูจน์ สามารถพิจารณาได้ 4 กรณี ขึ้นอยู่กับจุด P ว่าจุด P อยู่ภายในหรือภายนอกของวงกลม กรณีที่ 1 จุด P อยู่ภายในวงกลมและไม่อยู่บนเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 แสดงว่า $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$ โดยที่ P อยู่ภายในวงกลม

กำหนดให้ ในวงกลม T

มี $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ โดย $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด P

และมุม $\angle APD = \angle CPB$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{PA} \bullet \overline{PB} = \overline{PC} \bullet \overline{PD}$

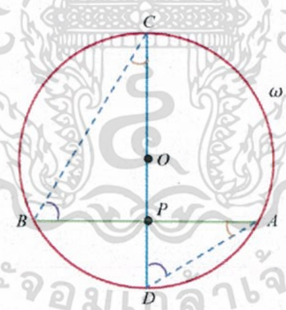
สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังจุด D และจากจุด C ไปยังจุด B จะได้ว่า ΔPAD และ ΔPCB

พิสูจน์ พิจารณา ΔPAD และ ΔPCB

1.	$\angle APD = \angle CPB$	เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามเท่ากัน
2.	$\angle PAD = \angle PCB$	มุมบนคอร์ดเดียวกัน
3.	$\Delta PAD \sim \Delta PCB$	จากข้อ1 และข้อ2
4.	$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$	ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันจะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
5.	$\overline{PA} \bullet \overline{PB} = \overline{PC} \bullet \overline{PD}$	จากข้อ4

□

กรณีที่ 2 จุด P อยู่ภายในวงกลมและอยู่บนเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 วงกลม ω ที่มีเส้นคอร์ดตัดกับเส้นผ่านศูนย์กลาง

กำหนดให้ ω เป็นวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง โดยมี $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดที่ตัดกันกับเส้นผ่านศูนย์กลาง $\overline{CD}$ ที่จุด P ดังรูปที่4.17

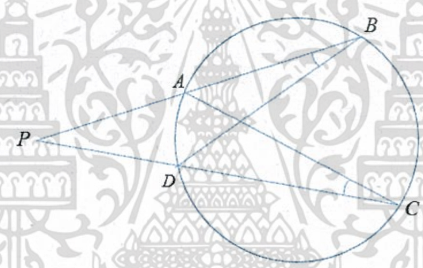
ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{OP}^2 - r^2 = \overline{PA} \bullet \overline{PB}$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังจุด D และจากจุด C ไปยังจุด B จะได้ว่า ΔPAD และ ΔPCB

พิสูจน์ พิจารณา ΔPAD และ ΔPCB

1.	$\angle APD = \angle CPB$	เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามเท่ากัน
2.	$\angle PAD = \angle PCB$	มุมบนคอร์ดเดียวกัน
3.	$\Delta PAD \sim \Delta PCB$	จากข้อ1 และข้อ2
4.	$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$	ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันจะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
5.	$\overline{PA}\bullet\overline{PB} = \overline{PC}\bullet\overline{PD}$	จากข้อ4
6.	$\overline{PA}\bullet\overline{PB} = \left\lvert\left(\overline{OP}+r\right)\right\rvert\left\lvert\left(\overline{OP}-r\right)\right\rvert$	ผลต่างของรัศมีของวงกลม
7.	$\left\lvert OP^2 - r^2\right\rvert = \overline{PA}\bullet\overline{PB}$	จากข้อ6. □

กรณีที่ 3 จุด P อยู่ภายนอกวงกลมดังรูปที่ 4.18



รูปที่4.18 แสดงว่า $\overline{PA}\bullet\overline{PB} = \overline{PC}\bullet\overline{PD}$ โดยที่ P อยู่ภายนอกวงกลม

กำหนดให้ ในวงกลม T มี $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$

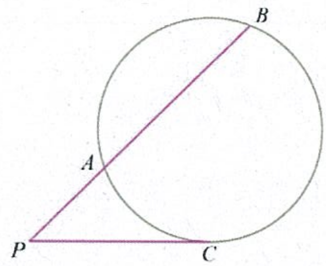
ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{PA}\bullet\overline{PB} = \overline{PC}\bullet\overline{PD}$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังจุด D และจากจุด C ไปยังจุด B จะได้ว่า ΔPAD และ ΔPCB

พิสูจน์ พิจารณา ΔPAD และ ΔPCB

1.	$\angle BPC = \angle APD$	มุมร่วม
2.	$\angle PBD = \angle PCA$	มุมบนคอร์ดเดียวกัน
3.	$\Delta PAC \sim \Delta PDB$	จากข้อ1 และข้อ2
4.	$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$	ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันจะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
5.	$\overline{PA}\bullet\overline{PB} = \overline{PC}\bullet\overline{PD}$	จากข้อ 4 □

กรณีที่ 4 เมื่อจุด P อยู่ภายนอกวงกลมและ $\overline{PC}$ เป็นเส้นสัมผัสดังรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 แสดงว่า $\overline{PA}\bullet\overline{PB}=\overline{PC}^2$ เมื่อ P อยู่ภายนอกวงกลม

กำหนดให้ ในวงกลม T มี $\overline{AB}$ และ $\overline{PB}$ ซึ่งมี $\overline{PC}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{PA}\bullet\overline{PB}=\overline{PC}^2$

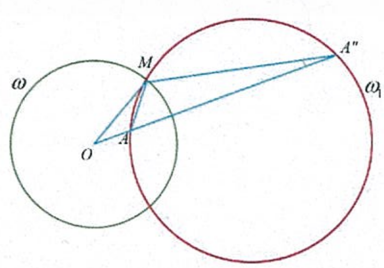
สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังจุด C และลากเส้นตรงจากจุด B ไปจุด C จะได้ ΔPAC และ ΔPBC

พิสูจน์ พิจารณา ΔPAC และ ΔPBC

1.	$\angle BPC=\angle APC$	มุมร่วม
2.	$\angle PCA=\angle CBA$	สร้างเพื่อการพิสูจน์และบทตั้งที่ 4.3
3.	$\Delta PAC\sim\Delta PBC$	จากข้อ1 และข้อ2.
4.	$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$	ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันจะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
5.	$\overline{PA}\bullet\overline{PB}=\overline{PC}^2$	จากข้อ3

□

ทฤษฎีบท4.5 ให้ ω และ ω_1 เป็นวงกลมเชิงตั้งฉาก มี $\overline{OM}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม ω_1 ที่จุด M ให้ A เป็นจุดบน ω_1 ถ้า A และ A'' เป็นผกผันเมื่อเทียบกับวงกลม ω แล้ว A'' อยู่บนวงกลม ω_1



รูปที่4.20 A และ A'' จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ω_1

กำหนดให้ ω และ ω_1 เป็นวงกลมเชิงตั้งฉาก ซึ่ง ω เป็นวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และมี A และ A'' เป็นผกผันซึ่งกันและกัน เมื่อเทียบกับวงกลม ω โดยที่ A อยู่ภายในวงกลม ω และอยู่บนเส้นรอบวงของ ω_1 และมี $\overline{OM}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม ω_1

ต้องการพิสูจน์ว่า A'' อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ω_1

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงจากจุด M ไปยังจุด A'' และลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังจุด M

พิสูจน์ พิจารณา สามเหลี่ยม ΔOAM และ $\Delta AMA''$

1.	$\overline{OA} \bullet \overline{OA''} = \overline{OM}^2$	นิยามการผกผัน
2.	$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA''}}$	จากข้อ1.
3.	$\Delta OAM \sim \Delta OMA''$	จากข้อ2.
4.	$\angle OMA = \angle OA''M$	จากข้อ3.
5.	$\angle OA''M = \angle AA''M$	A อยู่บนเส้นตรง OA''
6.	$\angle OMA = \angle AA''M$	จากข้อ4. และข้อ 5.
7.	ω และ ω_1 เป็นวงกลมเชิงตั้งฉาก	จากข้อ7.
8.	$\overline{OM}$ เป็นเส้นสัมผัส ω_1	กำหนดให้
9.	$\overline{AM}$ เป็นเส้นคอร์ดของ ω_1	สร้างเพื่อการพิสูจน์
10.	A'' อยู่บนเส้นรอบวงของ ω_1	จากข้อ 6. ข้อ 8.ข้อ 9.และบทตั้ง4.3 □

4.5 ไซน์ไฮเพอร์โบลิก โคไซน์ไฮเพอร์ลิก และแทนเจนต์ไฮเพอร์โบลิก

ไซน์ไฮเพอร์โบลิก โคไซน์ไฮเพอร์โบลิก และแทนเจนต์ไฮเพอร์โบลิก จะกำหนดตามสมการดังต่อไปนี้

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

สิ่งแรก คือ เราต้องรู้บางคุณสมบัติของไซน์ไฮเพอร์โบลิก และโคไซน์ไฮเพอร์โบลิก เพื่อใช้ในการพิสูจน์

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(x) \pm \cosh(y)\sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

พิสูจน์บางเอกลักษณ์ตรีโกณมิติไฮเพอร์โบลิก

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

พิสูจน์

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4}$$

$$= 1$$

□

2. $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(x) \pm \cosh(y)\sinh(y)$

พิสูจน์ $\sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \pm \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}\right)\right.$$

$$\left.\pm\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2e^{x+y} \pm 2^{-(x+y)}\right)$$

$$= \sinh(x \pm y)$$ □

3. $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$

พิสูจน์ $\cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \pm \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}\right)\right.$$

$$\left.\pm\left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}\right)\right)$$

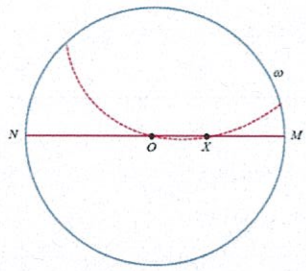
$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2e^{x+y} \pm 2e^{-(x+y)}\right)$$

$$= \cosh(x \pm y)$$ □

เอกลักษณ์อื่นๆ จะพิสูจน์ในทำนองเดียวกันโดยใช้นิยาม

นิยาม4.3 ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง r เป็นรัศมีของวงกลม ω ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางคือ $\overline{NM}$ และ Xอยู่บน $\overline{NM}$ โดยที่ $X \neq O$ ดังรูปที่4.21 ระยะห่างระหว่างจุด O และ X หาได้ดังสมการต่อไปนี้

$$OX = \ln\left(\frac{\overline{OM}\cdot\overline{XN}}{\overline{ON}\cdot\overline{XM}}\right)$$



รูปที่ 4.21 วงกลม ω มี O เป็นจุดศูนย์กลาง $\overline{NM}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางจุด x อยู่บน $\overline{NM}$

จากรูปที่ 4.21 ดังนั้น $\overline{OM} = \overline{ON} = r$ และ เพื่อให้ง่ายกำหนดให้ $a = \overline{OX}$ และ $a' = OX$

จาก
$$a' = OX = \ln\left(\frac{\overline{OM}\cdot\overline{XN}}{\overline{ON}\cdot\overline{XM}}\right) = \ln\left(\frac{r\cdot(r+\overline{OX})}{r\cdot(r-\overline{OX})}\right) = \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right)$$

แล้ว
$$e^{a'} = \frac{r+a}{r-a}$$

และ
$$e^{-a'} = \frac{r-a}{r+a}$$

ด้วยเหตุนี้ทำให้ได้ว่า

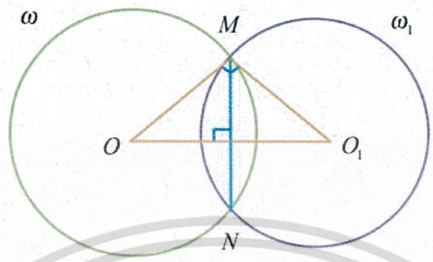
$$\sinh a' = \frac{\frac{r+a}{r-a} - \frac{r-a}{r+a}}{2} = \frac{2ra}{r^2 - a^2} \qquad (1)$$

$$\cosh a' = \frac{\frac{r+a}{r-a} + \frac{r-a}{r+a}}{2} = \frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2} \qquad (2)$$

$$\tanh a' = \frac{\frac{r+a}{r-a} - \frac{r-a}{r+a}}{\frac{r+a}{r-a} + \frac{r-a}{r+a}} = \frac{2ra}{r^2 + a^2} \qquad (3)$$

4.6 สมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากบนเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

ให้ ω และ ω_1 เป็นวงกลมตั้งฉากซึ่งกันและกัน ให้ O และ O_1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ω และ ω_1



รูปที่ 4.22 $\overline{MN}$ ตั้งฉากกับ เส้นเชื่อมจุดศูนย์กลาง $\overline{OO_1}$ ของวงกลม ω และ ω_1

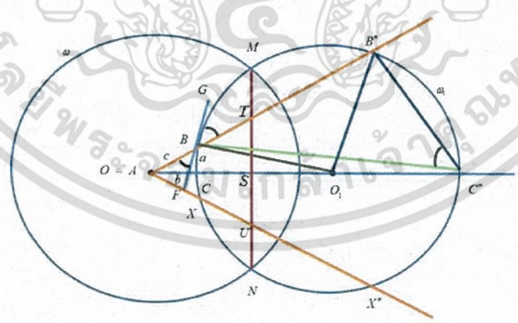
ให้ ω และ ω_1 ตัดกันที่ M และ N

โดยที่ ω และ ω_1 เป็นวงกลมเชิงตั้งฉากแล้วเส้นสัมผัส ณ จุดตัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน

$$\angle OMO_1 = \angle ONO_1 = 90^{\circ}$$

จะได้ว่า $\overline{MN}$ เป็นคอร์ดร่วมของ ω และ ω_1

แล้ว $\overline{MN}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OO_1}$ ซึ่งเป็นเส้นเชื่อมจุดศูนย์กลางของ ω **และ** ω_1 ดังรูปที่ 4.22



รูปที่4.23 สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก
จุดยอด A อยู่ที่ศูนย์กลางของวงกลม

ให้ A เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ω แล้ว $A=O$

ให้ C เป็นจุดซึ่ง $\overline{OO_1}$ ตัดกับวงกลม ω_1

ให้ B เป็นจุดบนเส้นรอบวงของ ω_1 ที่อยู่ระหว่าง C และ M

สามเหลี่ยมฐานโค้ง ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี $\angle ABC = 90^{\circ}$

BC เป็นส่วนของเส้นรอบวงของวงกลม ω_1 (BC และ $\overline{AC}$ ตั้งฉากกัน เพราะเส้นตรง $\overline{AC}$ เป็นส่วนของเส้นตรง $\overline{AO_1}$ ซึ่งมี $\overline{O_1C}$ เป็นรัศมี เส้นสัมผัสกับวงกลมที่ C ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม)

ต่อ $\overline{AB}$ ไปตัดกับเส้นรอบวงของ ω_1 ที่ B'' ตัด $\overline{MN}$ ที่ T

ต่อ $\overline{AC}$ ผ่าน O_1 ไปตัดเส้นรอบวงของ ω_1 ที่ C'' ตัด $\overline{MN}$ ที่ S

ให้ X เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม ω_1 ที่อยู่ระหว่าง C กับ N

ต่อ $\overline{AX}$ ไปตัดเส้นรอบวงของ ω_1 ที่ X'' ตัด $\overline{MN}$ ที่ U

ให้ $\overline{MN}$ เป็น *radical axis* ของ ω และ ω_1

จุด X,B และ C เป็นจุดอยู่ภายในวงกลม ω และอยู่บนเส้นรอบวง ω_1 ผกผันของ X,B และ C คือ X'',B'' และ C'' ซึ่ง X'',B'' และ C'' อยู่บนเส้นรอบวงของ ω_1

$(X,X''),(B,B'')$ และ (C,C'') เป็นผกผันซึ่งกันและกัน เมื่อเทียบกับ ω ดังรูปที่ 4.23 แล้ว

$$\overline{OX''} = \frac{r^2}{\overline{OX}} \ , \ \overline{OB''} = \frac{r^2}{\overline{OB}} \ , \ \overline{OC''} = \frac{r^2}{\overline{OC}}$$

ให้ T,S และ U อยู่บนเส้นคอร์ด $\overline{MN}$ จากทฤษฎีบทกำลังของจุด จะได้ว่า

$$\left|\overline{OT}^2 - r^2\right| = \left|\overline{O_1T}^2 - r_1^2\right| = \overline{BT}\bullet\overline{TB''} \qquad (4)$$

$$\left|\overline{OS}^2 - r^2\right| = \left|\overline{O_1S}^2 - r_1^2\right| = \overline{CS}\bullet\overline{SC''} \qquad (5)$$

$$\left|\overline{OU}^2 - r^2\right| = \left|\overline{O_1U}^2 - r_1^2\right| = \overline{XU}\bullet\overline{UX''} \qquad (6)$$

จากสมการที่ (4) เราสามารถหา $\overline{OT}$

$$\left|\overline{OT}^2 - r^2\right| = \overline{BT}\bullet\overline{TB''}$$

$$= \left|(\overline{OB} - \overline{OT})\right|\left|(\overline{OB''} - \overline{OT})\right|$$

$$= \left|(\overline{OB} - \overline{OT})\right|\left|\left(\frac{r^2}{\overline{OB}} - \overline{OT}\right)\right|$$

$$= \left|r^2 - \overline{OB}\bullet\overline{OT} - \overline{OT}\bullet\frac{r^2}{\overline{OB}} + \overline{OB}^2\right|$$

$$\overline{OT}\left(\overline{OB}+\frac{r^2}{\overline{OB}}\right)=2r^2$$

$$\overline{OT}=\frac{2r^2}{\frac{\overline{OB}^2+r^2}{\overline{OB}}}$$

$$=\frac{2r^2\overline{OB}}{\overline{OB}^2+r^2}$$

จากสมการที่ (3) จะได้

$$\overline{OT}=r\bullet\tanh(\overline{OB})$$

$$=r\bullet\tanh(c) \qquad (*)$$

ในทำนองเดียวกันในสมการที่ (5) จะได้

$$\overline{OS}=r\bullet\tanh(b) \qquad (**)$$

และสามารถหา $\overline{BB''}$ และ $\overline{CC''}$ ได้จาก

$$\overline{BB''}=\overline{OB''}-\overline{OB}$$

$$=\frac{r^2}{\overline{OB}}-\overline{OB}$$

$$=\frac{r^2-\overline{OB}^2}{\overline{OB}}$$

$$=\frac{2r}{\sinh(c)}$$

$$\overline{CC''}=\overline{OC''}-\overline{OC}$$

$$=\frac{r^2}{\overline{OC}}-\overline{OC}$$

$$=\frac{r^2-\overline{OC}^2}{\overline{OC}}$$

$$=\frac{2r}{\sinh(b)}$$

เนื่องจาก b และ c คือเส้นตรง เราสามารถใช้ตรีโกณมิติเชิงยุคลิดหา จาก(*)และ(**)

$$\cos(A) = \frac{b}{c} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OT}} = \frac{\tanh(b)}{\tanh(c)} \tag{6}$$

จากรูปที่ 4.23 และความรู้พื้นฐานเรื่องเส้นคอร์ดของวงกลมแบบยุคลิด $\overline{BG}$ สัมผัสกับ ω_1 ที่จุด B

$$\angle BO_1B'' = 2\angle BC''B'' = 2\angle GBB'' = 2\angle ABC = 2B$$

ดังนั้น $B = \frac{1}{2}\angle BO_1B''$ เราสามารถหา $\sin(B)$ บนฟังก์ชันตรีโกณมิติเชิงไฮเพอร์โบลิก

$$\sin(B) = \sin\left(\frac{\angle BO_1B''}{2}\right) = \frac{\overline{BB''}}{2\overline{O_1C}} = \frac{\overline{BB''}}{\overline{CC''}} = \frac{\sinh(b)}{\sinh(c)} \tag{7}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาผลลัพธ์จากสมการที่ (6) และสมการที่ (7) คือ

$$\cos(B) = \frac{\tanh(a)}{\tanh(c)} \quad \text{และ} \quad \sin(A) = \frac{\sinh(a)}{\sinh(c)}$$

เราจะได้ผลลัพธ์ตามทฤษฎีบทของพีทาโกรัสสำหรับเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติเชิงยุคลิด $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$ จะได้

$$\frac{\tanh^2(b)}{\tanh^2(c)} + \frac{\sinh^2(a)}{\sinh^2(c)} = 1$$

$$\frac{\tanh^2(b)}{\tanh^2(c)} \cdot \sinh^2(c) + \sinh^2(a) = \sinh^2(c)$$

$$1 + \sinh^2(c) = \cosh^2(c) \cdot \tanh^2(b) + 1 + \sinh^2(a)$$

$$\cosh^2(c) = \cosh^2(c)\left(\frac{\sinh^2(b)}{\sinh^2(b)}\right) + \cosh^2(a)$$

$$\cosh^2(c) \cdot \cosh^2(b) = \cosh^2(c) \cdot \sinh^2(b) + \cosh^2(a) \cdot \cosh^2(b)$$

$$\cosh^2(c)\left(\cosh^2(b) - \sinh^2(b)\right) = \cosh^2(a) \cdot \cosh^2(b)$$

จาก $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\cosh^2(c) = \cosh^2(a) \cdot \cosh^2(b)$$

$$\cosh(c) = \cosh(a)\bullet\cosh(b) \tag{8}$$

$$\tan(A) = \frac{\sinh(a)}{\sinh(c)}\bullet\frac{\tanh(c)}{\tanh(b)}$$

$$= \frac{\sinh(a)}{\sinh(c)}\bullet\frac{\dfrac{\sinh(c)}{\cosh(c)}}{\dfrac{\sinh(b)}{\cosh(b)}}$$

$$= \frac{\sinh(a)\bullet\sinh(c)\bullet\cosh(b)}{\sinh(c)\bullet\cosh(a)\cosh(b)\bullet\sinh(b)}$$

$$= \frac{\sinh(a)}{\cosh(c)\sinh(b)}$$

$$= \frac{\tanh(a)}{\sinh(b)}$$

4.7 รูปสามเหลี่ยมทั่วไปในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก

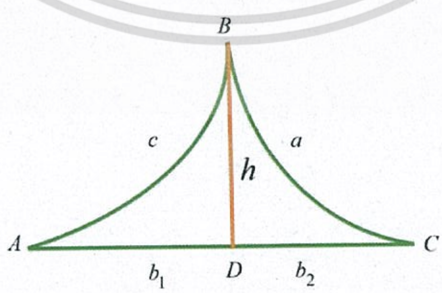
กำหนดให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ซึ่ง $\overline{BD} = h$ จะได้ ΔABD และ ΔBCD ดังรูปที่4.24

พิจารณาที่ ΔABD

ให้ $\overline{AD} = b_1$ และ $\overline{AB} = c$

พิจารณาที่ ΔBCD

กำหนดให้ $\overline{DC} = b_2$ และ $\overline{BC} = a$ และ $b = b_1 + b_2$ ดังรูปที่4.24



รูปที่4.24 สามเหลี่ยม ΔABC โดยมี B เป็นจุดยอดมุม

ทฤษฎีบท4.6 กฎไซน์ในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก คือ

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(A)}=\frac{\sinh(b)}{\sin(B)}=\frac{\sinh(c)}{\sin(C)}$$

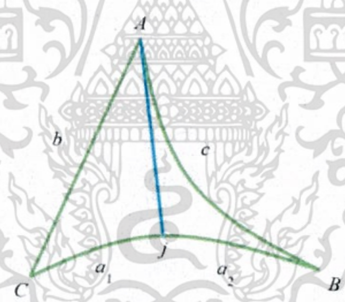
พิสูจน์ จากรูปที่4.24 และสมการที่ 7

จะได้
$$\frac{\sinh(a)}{\sin(A)}=\sin(a)\frac{\sinh(c)}{\sinh(h)}$$

$$=\frac{\sinh(c)}{\left(\frac{\sinh(h)}{\sinh(a)}\right)}$$

$$=\frac{\sinh(c)}{\sinh(C)}$$

ในทำนองเดียวกันถ้าให้ A เป็นจุดยอดและลากเส้นตรง $\overline{Aj}$ มาตั้งฉากกับด้าน $a=a_1+a_2$ ดังรูปที่ 4.25



รูปที่4.25 สามเหลี่ยม ΔABC โดยมี A เป็นจุดยอดมุม

จะได้
$$\frac{\sinh(c)}{\sin(C)}=\frac{\sinh(c)}{\left(\frac{\sinh(j)}{\sinh(b)}\right)}$$

$$=\frac{\sinh(b)}{\left(\frac{\sinh(j)}{\sinh(c)}\right)}$$

$$=\frac{\sinh(b)}{\sin(B)}$$

□

ดังนั้น
$$\frac{\sinh(a)}{\sin(A)}=\frac{\sinh(b)}{\sin(B)}=\frac{\sinh(c)}{\sin(C)}$$

ทฤษฎีบท4.7 กฎโคไซน์ในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก คือ

$$\cosh(a)=\cosh(b)\cosh(c)-\sinh(b)\sinh(c)\cos(A)$$

พิสูจน์ จากรูปที่4.24 และ สมการที่ 8

จะได้
$$\begin{aligned}\cosh(a)&=\cosh(b_2)\cosh(h)\\&=\cosh(b-b_1)\cosh(h)\\&=(\cosh(b)\cosh(b_1)-\sinh(b)\sinh(b_1))\cosh(h)\\&=\cosh(b)(\cosh(b_1)\cosh(h))-\sinh(b)\sinh(b_1)\cosh(h)\\&=\cosh(b)\cosh(c)-\sinh(b)\sinh(b_1)\left(\frac{\cosh(c)}{\cosh(b_1)}\right)\\&=\cosh(b)\cosh(c)-\sinh(b)\sinh(c)\left(\frac{\sinh(b_1)\cosh(c)}{\cosh(b_1)\sinh(c)}\right)\\&=\cosh(b)\cosh(c)-\sinh(b)\sinh(c)\left(\frac{\tanh(b_1)}{\tanh(c)}\right)\\&=\cosh(b)\cosh(c)-\sinh(b)\sinh(c)\cos(A)\end{aligned}$$
□

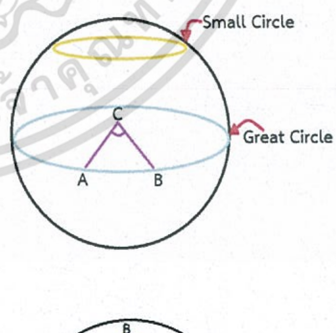
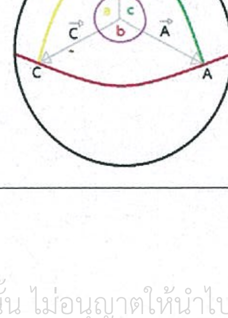
ดังนั้น
$$\cosh(a)=\cosh(b)\cosh(c)-\sinh(b)\sinh(c)\cos(A)$$

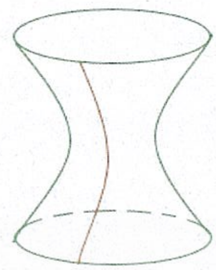
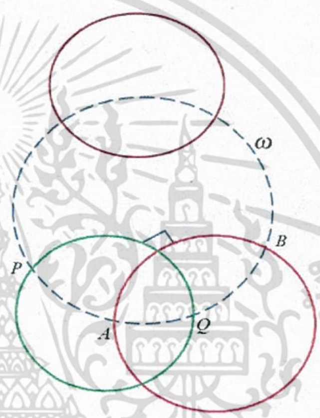
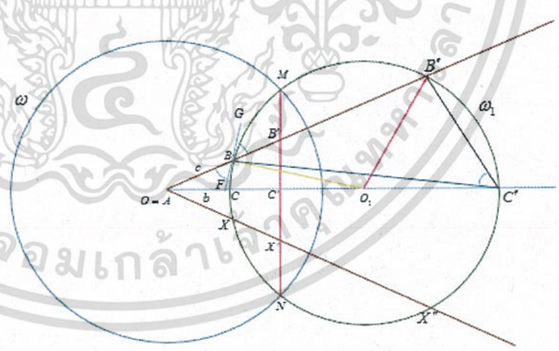
บทที่ 5 สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาเรขาคณิตเชิงยุคลิด เรขาคณิตเชิงทรงกลม และเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิกนั้น ทำให้ได้รับความรู้เกี่ยวกับผลรวมของมุมภายใน และกฎไซน์และโคไซน์ของเรขาคณิตเชิงยุคลิด เชิงทรงกลม และเชิงไฮเพอร์โบลิก

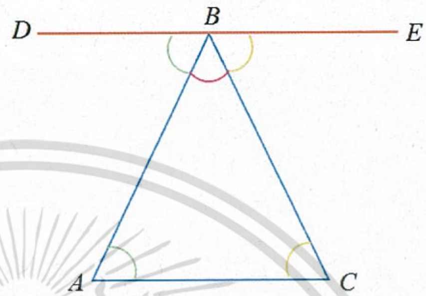
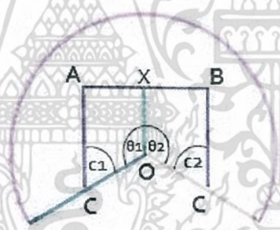
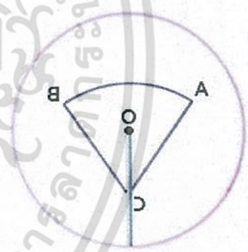
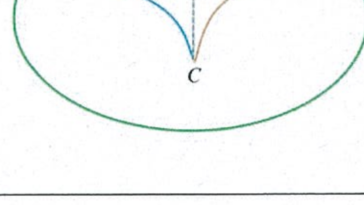
5.1 สรุปผลการศึกษา

1.การแทนรูปทรงทางเรขาคณิตที่ทำการศึกษา

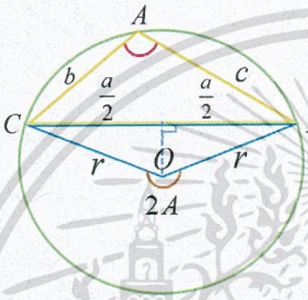
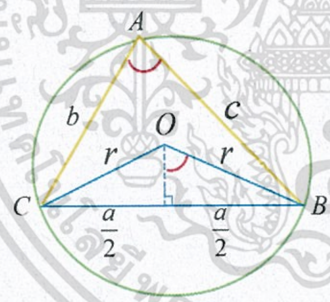
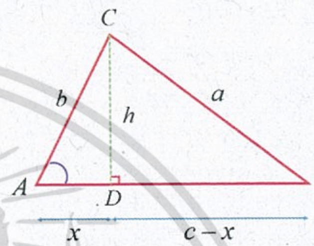
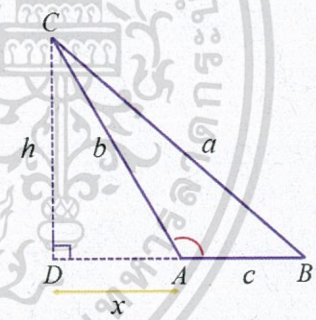
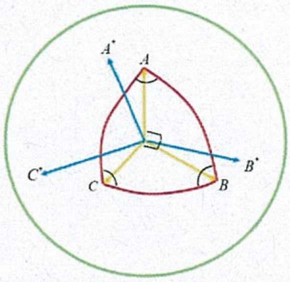
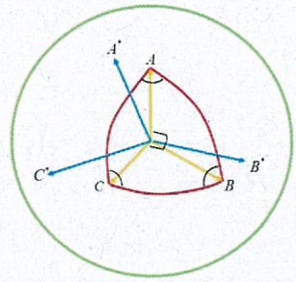
สรุปผลการศึกษา	การแทนรูปทรงทางเรขาคณิต
เรขาคณิตเชิงยุคลิด	ระนาบ  หรือ ทรงกระบอก 
เรขาคณิตเชิงทรงกลม	ทรงกลม  และ 

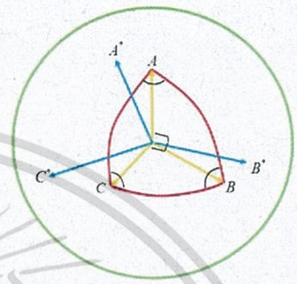
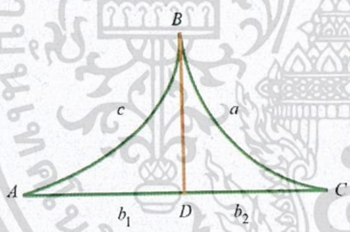
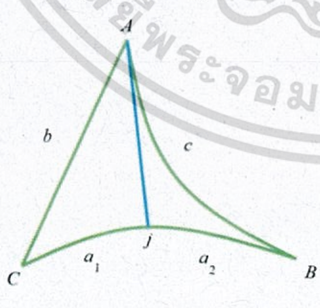
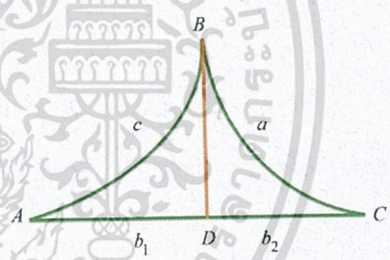
สรุปผลการศึกษา	การแทนรูปทรงทางเรขาคณิต
เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก	ไฮเพอร์โบลิก  และ  และ 

2.ผลรวมของมุมภายในของสามเหลี่ยม

สรุปผลการศึกษา	ค่าความโค้ง	ผลรวมของมุมภายในของสามเหลี่ยม
เรขาคณิตเชิงยุคลิด	$\kappa = 0$	สามเหลี่ยมใดๆ ในระนาบมีผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180° 
เรขาคณิตเชิงทรงกลม	$\kappa = 1$	สามเหลี่ยมใดๆบนทรงกลมมีผลรวมของมุมภายในมากกว่า 180° เช่น $\theta = 359^\circ$ แล้ว $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$  
เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก	$\kappa = -1$	สามเหลี่ยมใดๆที่อยู่บนไฮเพอร์โบลิกมีผลรวมของมุมภายในน้อยกว่า 180° 

3.กฎไซน์และกฎโคไซน์

สรุปผลการศึกษา	กฎไซน์	กฎโคไซน์
เรขาคณิตเชิงยุคลิด	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$ โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณี -กรณีที่จุดศูนย์กลาง O อยู่ภายใน ΔABC  -กรณีที่จุดศูนย์กลาง O อยู่ภายนอก ΔABC 	$a^2=c^2+b^2-2c(b\cos A)$ โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณี -กรณีที่ A เป็นมุมแหลม  -กรณีมุม A คือมุมป้าน 
เรขาคณิตเชิงทรงกลม	กฎไซน์สำหรับสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม $\frac{\sin\angle a}{\sin\angle A}=\frac{\sin\angle b}{\sin\angle B}=\frac{\sin\angle c}{\sin\angle C}$ 	กฎโคไซน์สำหรับด้าน $\cos\angle a=\cos\angle b\cos\angle c+\sin\angle b\sin\angle c\cos\angle A$ 

สรุปผลการศึกษา	กฎไซน์	กฎโคไซน์
เรขาคณิตเชิงทรงกลม		กฎของโคไซน์สำหรับมุม $\cos\angle A = -\cos\angle B\cos\angle C + \sin\angle B\sin\angle C\cos\angle a$ 
เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก	$\frac{\sinh a}{\sin A}=\frac{\sinh b}{\sin B}=\frac{\sinh c}{\sin C}$ ตัวอย่าง -กรณีที่จุดยอดเป็นจุด B  -กรณีที่จุดยอดเป็นจุด A 	$\cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh b\sinh c\cos A$ 

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการศึกษานี้นำเสนอเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก ที่อธิบายด้วยระนาบแบบเรขาคณิตเชิงยุคลิด แต่กรณีทั่วไปเป็นหัวข้อที่อาจจะมีการศึกษาสำหรับการศึกษาของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิก คือ การพิจารณาบนทรงกลมโดยให้ ω เป็นทรงกลมใดๆ ซึ่งมีทรงกลม C_1 และ C_2 เป็นทรงกลมที่ตัดกับทรงกลม ω ในทำนองเดียวกันกับวงกลม C_1 และ C_2 และสามารถขยายไปเป็นกรณีทั่วไป ω เป็นรูปทรงใน n มิติ ที่มีรูปทรง C_1 และ C_2 ตัดกันกับรูปทรง ω

ในการหาความยาวใน เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลิกนั้น ต้องมีการศึกษา *conformal mapping* โดยใช้ *Möbius tranformations* ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้นำผลการศึกษามาใช้เลย จะพบว่าเป็นอีกหัวข้อหนึ่งที่น่าจะมีการศึกษาต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] George A. Jennings 1994. Modern Geometry with Applications. New York: n.p.

[2] Anneke Bart and Bryan Clair. 2007. Flat-under-spherical.[Online].Avalible: http://euler.slu.edu/escher/index.php/File:Flat-under-spherical.png เข้าถึงเมื่อวันที่13 มกราคม 2559

[3] Anneke Bart and Bryan Clair. 2007. Flat-under-spherical.[Online].Avalible: http://euler.slu.edu/escher/index.php/File:Flat-under-spherical.png เข้าถึงเมื่อวันที่13 มกราคม 2559.

[4] David B. Surowski. 2011. Advanced High-School Mathematics. [Online].Avalible: https://www.math.ksu.edu/~dbski/writings/further.pdf เข้าถึงเมื่อวันที่15 มกราคม 2559

[5] J. Milnor, "Hiperbolic geometry: The first 150 years", *Builletin (New Series) of the American Mathematical society*, vol. 6,no. 1,pp. 1-12, 1982

[6] H.S.M Coxeter and S.L. Greizer, *Geometry Revisited*, New York:The Mathematical Association of America Inc., 1967

[7] S.Stahl.1993. The Poincar´e Half-Plan. [Online].Avalible: http://www.francuskirap.com/poincare-half-plane-jones-and-bartlett-a-gateway-to-modern.pdf เข้าถึงเมื่อวันที่ 12 กุมภาพันธ์ 2560

[8] Tiffani Traver , 2014. Trigonometry in the Hyperbolic Plane. [Online].Avalible: https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2014/brewert.pdf เข้าถึงเมื่อวันที่ 24กุมภาพันธ์ 2559

[9] Yufei Zhao, 2011. Power of a point. [Online].Avalible: http://yufeizhao.com/olympiad/power_of_a_point.pdf เข้าถึงเมื่อวันที่ 25 มีนาคม 2560

[10] LAURA VALAAS, 2006. TRIANGLES IN HYPERBOLIC GEOMETRY. [Online].Avalible: https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/valaasla.pdf เข้าถึงเมื่อวันที่ 26 มีนาคม 2560

[11] Howard Eves, 1983. An Introduction to the History of Mathematics. [Online].Avalible: https://faculty.etsu.edu/gardnerr/noneuclidean/euclidean.pdf เข้าถึงเมื่อวันที่ 30 มกราคม 2560