การกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟพัด $F_{n,2}$

SUPER EDGE-MAGIC LABELING OF FAN GRAPH $F_{n,2}$

กัญญาณัฐ ปัญญาทอง
ณิชาลี มีชื่น
ธริณี ปักษี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

การกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟพัด $F_{n,2}$

SUPER EDGE-MAGIC LABELING OF FAN GRAPH $F_{n,2}$

กัญญาณัฐ ปัญญาทอง

ณิชาลี มีชื่น

ธริณี ปักษี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

SUPER EDGE-MAGIC LABELING OF FAN GRAPH $F_{n,2}$

KANYANAT PANYATONG

NICHALEE MEECHUEN

TARINEE PAKSRI

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTAL FULFILLMENT OF

THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟพัด $F_{n,2}$		
	SUPER EDGE-MAGIC LABELING OF FAN GRAPH $F_{n,2}$		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกัญญาณัฐ	ปัญญาทอง	55050012
	นางสาวณิชาลี	มีชื่น	55050055
	นางสาวธริณี	ปักษี	55050067
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต		
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ		
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล		

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	พรชัย ชัยสนิท
ผศ.ดร.เดชา สมนะ กรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

หัวข้อปัญหาพิเศษ การกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟพัด $F_{n,2}$
SUPER EDGE-MAGIC LABELING OF FAN GRAPH $F_{n,2}$

ชื่อนักศึกษา นางสาวกัญญาณัฐ ปัญญาทอง 55050012
นางสาวณิชาลี มีชื่น 55050055
นางสาวธริณี ปักษี 55050067
ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง และศึกษากราฟชนิดต่างๆที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งมาประกอบกับความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้คิดค้นทฤษฎีบทใหม่ของกราฟพัด $F_{n,2}$ ที่ทำให้กราฟเป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่ออย่างยวดยิ่งที่มีค่า $k = 3n+6$

คำสำคัญ : กราฟพัด, การกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง

Title	SUPER EDGE-MAGIC LABELING OF FAN GRAPH $F_{n,2}$		
Students	Ms. KANYANAT	PANYATONG	55050012
	Ms. NICHALEE	MEECHUEN	55050055
	Ms. TARINEE	PAKSRI	55050067
Degree	Bachelor of Science		
Major Program	Applied Mathematics		
Academic Year	2015		
Advisor	Dr. Wannaporn	Sanprasert	
Co-Advisor	Dr. Ngarmcherdn	Danpattanamongkon	

ABSTRACT

The objective of this special problem is to study about property of the fan graph theory which has super edge-magic labeling and study the various types of graphs which has super edge-magic labeling as its property to complement with knowledge of graph theory. So the researchers have invented a new fan graph $F_{n,2}$ theorem. Which make the super edge-magic labeling of graph that is $k = 3n + 6$

Keywords : Fan Graph, Super edge-magic labeling

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษพิเศษเรื่องการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟพัด $F_{n,2}$ สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี สืบเนื่องจากได้รับความช่วยเหลือ การดูแลเอาใจใส่ คำแนะนำ รวมถึงความกรุณาของทุกๆท่าน

คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ และดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่คอยให้คำแนะนำในการแก้ไขปัญหาตลอดจนให้ความช่วยเหลือในการทำโครงงานปัญหาพิเศษนี้จนสำเร็จลุล่วงเสมอมา รวมทั้งประธานกรรมการ อ.พรชัย ชัยสนิท และ ดร.เดชา สมนะ ที่กรุณาให้คำแนะนำ และตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติให้แก่คณะผู้จัดทำ เจ้าหน้าที่สาขาคณิตศาสตร์ที่อำนวยความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการรวมทั้งการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ และกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ให้การสนับสนุนทางด้านการศึกษา และคอยให้กำลังใจเสมอมา สุดท้ายขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษาทุกท่านที่คอยช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่างๆ จนปัญหาพิเศษนี้สำเร็จสมบูรณ์ นอกจากนี้ยังมีบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือที่มิได้กล่าวไว้ ณ ที่นี้ด้วย ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

กัญญาณัฐ ปัญญาทอง
ณิชาลี มีชื่น
ธริณี ปักษี

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญรูป

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทฤษฎีกราฟมีการศึกษาอย่างแพร่หลายในหลายระดับชั้น ซึ่งในปัจจุบันทฤษฎีกราฟได้ถูกบรรจุไว้ในหนังสือวิชาเรียนเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานปีพุทธศักราช 2551 ในระดับอุดมศึกษาก็ยังมีการเรียนในวิชาทฤษฎีกราฟ คณะผู้จัดทำมีจุดประสงค์เพื่อศึกษาค้นคว้ากราฟที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งที่ถูกพัฒนามาจากการกำกับกลบนเส้นเชื่อมปี ค.ศ. 1998 ซึ่ง H.Enomoto, A.S.Llado , T.Nakamigawa และ G.Ringel ได้นิยามการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟ G ที่มี $V(G)$ เป็นเซตของจุดยอด และ $E(G)$ เป็นเซตของเส้นเชื่อม กล่าวคือ ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก $V(G)\cup E(G)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,\ldots,p+q\}$ เมื่อ $p=|V(G)|$ และ $q=|E(G)|$ ที่มีสมบัติว่าสำหรับ เส้นเชื่อม ab ใดๆ ที่เป็นสมาชิกของ $E(G)$ และ $f(a)+f(ab)+f(b)=k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวบางค่า และ $f(V(G))=\{1,2,\ldots,p\}$

ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1998 เป็นต้นมา มีนักวิจัยหลายท่านที่ได้ศึกษาค้นพบกราฟที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ตัวอย่างเช่น

1. ค.ศ. 1998 Enomoto และคณะ ได้พบกราฟ C_n เมื่อ n เป็นเลขคี่ และ ถ้ากราฟ $K_{1,n}$ มี p จุด q เส้น และ $q\le 2p-3$ แล้ว $K_{1,n}$ เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง
2. ค.ศ. 2000 J.Wijaya และ E.T.Baskoro ได้พบกราฟ kP_n เมื่อ $n\ge 1$ และ $k\ge 3$ เป็นจำนวนคี่ ที่มีคุณสมบัติกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง
3. ค.ศ. 2005 E.T. Baskoro, IW. Sudarsana และ Y.M. Cholily ได้คิดค้นวิธีการสร้างกราฟใหม่ที่มีคุณสมบัติกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งจากกราฟเดิม เป็นต้น

ดังนั้นทางคณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะศึกษาค้นคว้าข้อมูลและรวบรวมกราฟพัด $F_{n,2}$ ที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง พร้อมทั้งหาขั้นตอนและวิธีการหาการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟเหล่านั้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาบทนิยามของทฤษฎีกราฟ
2. เพื่อศึกษาความรู้เกี่ยวกับการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง
3. เพื่อรวบรวมข้อมูลกราฟพัด $F_{n,2}$

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

เพื่อพิจารณากราฟที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งและศึกษาค้นคว้าหากราฟพัด $F_{n,2}$ ที่มีคุณสมบัติดังกล่าว

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ
2. ความรู้เกี่ยวกับการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง
3. ได้กราฟใหม่ที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. ศึกษาทฤษฎีกราฟ
2. ศึกษาค้นคว้าข้อมูลและหากราฟที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง
3. หากราฟพัด $F_{n,2}$ ที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง
4. สรุปจัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษเรื่องการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

ความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟ (Graph theory)

นิยาม 2.1 [6] กราฟ G ประกอบด้วยคู่อันดับของเซต $(V(G),E(G))$ โดยที่ $V(G)$ คือเซตของ**จุดยอด** (Vertex) และ $E(G)$ คือเซตของ**เส้นเชื่อม** (Edge) ระหว่างคู่ของจุดในกราฟ โดยจำนวนสมาชิกใน $V(G)$ เรียกว่า **อันดับ** (Order) ของ G

นิยาม 2.2 [6] **วงวน** (Loop) คือเส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียว

นิยาม 2.3 [6] **เส้นเชื่อมขนาน** (Multiple edges) คือกราฟที่มีเส้นเชื่อมมากกว่าหนึ่งเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดเดียวกัน

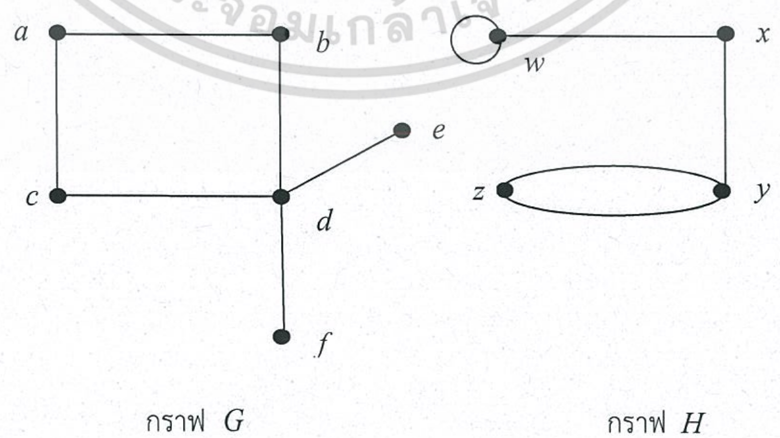
นิยาม 2.4 [6] **กราฟเชิงเดียว** (Simple graph) คือกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้กราฟ G และ H ดังนี้

$V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ และ $V(H)=\{w,x,y,z\}$

โดยที่ $E(G)=\{ab,ac,bd,cd,de,df\}$ และ $E(H)=\{ww,wx,wy,yz,zy\}$

จะแทนกราฟ G และกราฟ H ด้วยแผนภาพ ดังรูปที่ 2.1

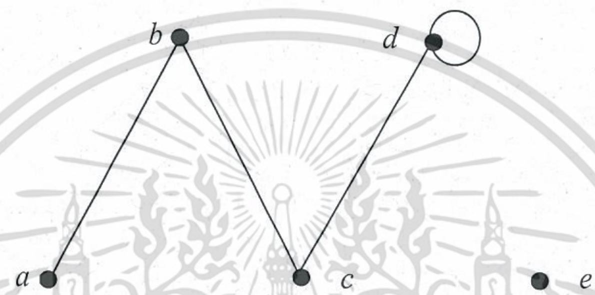


รูปที่ 2.1 G เป็นกราฟเชิงเดียว และ H เป็นกราฟที่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนา

นิยาม 2.5 [5] ให้ u และ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ G เส้นเชื่อมระหว่างจุด u และจุด v เขียนแทนด้วยเส้นเชื่อม uv จะเรียก u และ v ว่าจุดปลายของเส้นเชื่อม และจะกล่าวว่า u **ประชิด (Adjacent)** กับ v

นิยาม 2.6 [5] ให้ u และ v เป็นจุดใดๆในกราฟ G จะกล่าวว่า จุด u และ v ว่าเป็น **จุดตกกระทบ (Incident)** กับเส้นเชื่อม uv

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดให้กราฟ G ดังรูปที่ 2.2



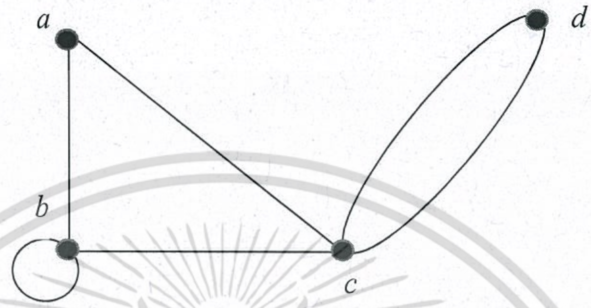
รูปที่ 2.2 จุดประชิดและจุดตกกระทบ

จากรูปที่ 2.2 จุด a และ b เป็นจุดประชิดกัน
จุด a และ c ไม่เป็นจุดประชิดกัน
จุด a ตกกระทบกับเส้นเชื่อม ab
จุด d ไม่ตกกระทบกับเส้นเชื่อม ab และ bc

นิยาม 2.7 [5] ให้ u เป็นจุดใดๆในกราฟ G **ระดับชั้น** (Degree) ของ u ใน G คือจำนวนของเส้นเชื่อมใน G ที่ตกกระทบกับจุด u

หมายเหตุ ถ้าจุด u มีเส้นเป็นวงวนแล้ว ดีกรีของจุด u ที่เกิดจากวงวนจะมีค่าเป็นสอง

ตัวอย่าง 2.3



รูปที่ 2.3 ระดับชั้นของจุด

จากรูปที่ 2.3 จะได้ระดับชั้นของจุด a,b,c และ d เป็น 2,4,4 และ 2 ตามลำดับ

นิยาม 2.8 [9] ให้ u และ v เป็นจุดใดๆในกราฟ G **แนวเดิน** $u-v$ $(u-v\ walk)$ คือลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน $u=u_0,e_1,u_1,e_2,\ldots,u_{n-1},e_n,u_n=v$ ที่เริ่มต้นด้วยจุด u และจบด้วยจุด v จุดปลายของเส้นเชื่อม e_i คือ u_{i-1} และ u_i เมื่อ $i=\{1,2,\ldots,n\}$

นิยาม 2.9 [9] **รอยเดิน** (Trail) ในกราฟ G คือแนวเดิน $u-v$ ที่มีเส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกัน

นิยาม 2.10 [9] **วิถี** (Path) ในกราฟ G คือแนวเดิน $u-v$ ที่มีจุดยอดทั้งหมดแตกต่างกัน

นิยาม 2.11 [9] **รอยเดินปิด (Closed trail)** หรือ **วิถีปิด (Closed path)** คือรอยเดินหรือวิถีที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดจุดเดียวกันและสำหรับรอยเดินหรือวิถีที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดไม่ใช่จุดเดียวกันจะเรียกว่า **รอยเดินเปิด (Open trail)** หรือ **วิถีเปิด (Open path)**

นิยาม 2.12 [9] **วงจร (Circuit)** คือวิถีปิดซึ่งประกอบด้วยเส้นเชื่อมอย่างน้อยหนึ่งเส้นเชื่อม

นิยาม 2.13 [9] **วัฏจักร (Cycle)** คือรอยเดินปิด

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้กราฟ G ดังรูปที่ 2.4

รูปที่ 2.4 แนวเดินของกราฟ

จากรูปที่ 2.4 จะได้

v,e_4,x,e_6,w,e_3,u เป็นวิถีเปิด เนื่องจากจุดในลำดับทั้งหมดแตกต่างกันและจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดต่างกัน

$v,e_4,x,e_6,w,e_2,v,e_1,u$ ไม่เป็นวิถี เนื่องจากจุดในลำดับซ้ำกันแต่เป็นรอยเดินเปิดเนื่องจากเส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกันและจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดต่างกัน

$v,e_4,x,e_6,w,e_7,y,e_5,u,e_1,v$ เป็นวิถีปิด เนื่องจากจุดในกราฟทั้งหมดแตกต่างกัน และจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดจุดเดียวกัน

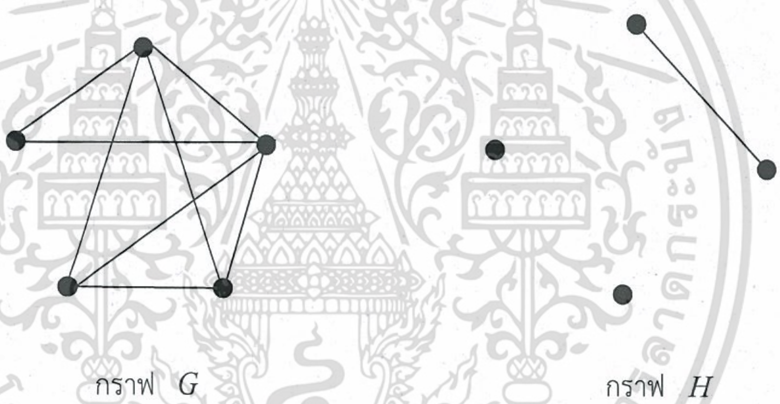
$v,e_4,x,e_6,w,e_7,y,e_5,u,e_3,w,e_2,v$ เป็นรอยเดินปิด เนื่องจากเส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกัน และจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดจุดเดียวกัน แต่ไม่เป็นวิถีปิดเพราะมีจุดในลำดับซ้ำกัน

นิยาม 2.14 [5] ให้ u และ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ G จะกล่าวว่า u และ v **เชื่อมโยง** (Connect) เมื่อมีวิถี $u-v$ และจะกล่าวว่ากราฟ G เป็น **กราฟเชื่อมโยง** (Connected graph) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ u,v ใน $V(G)$ ที่ u และ v เชื่อมโยงกัน ส่วนกราฟที่ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยงจะเรียกว่า **กราฟไม่เชื่อมโยง** (Disconnected graph)

หมายเหตุ กราฟที่มี 1 จุด จะเป็นกราฟเชื่อมโยง

นิยาม 2.15 [5] เรียกกราฟย่อยเชื่อมโยง H ของกราฟ G ว่า **ส่วนประกอบ** (Component) ของ G ถ้า H ไม่เป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยงอื่นๆ ของกราฟ G

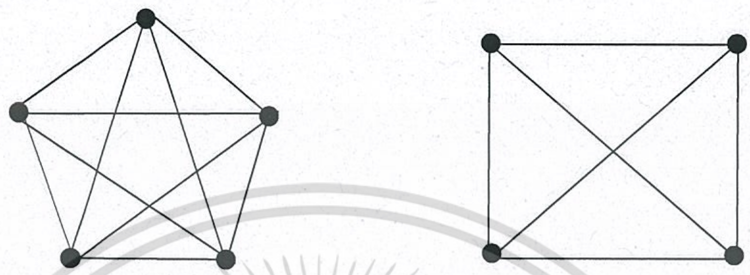
ตัวอย่าง 2.5 จากรูปที่ 2.5 กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยงเนื่องจากทุกๆ 2 จุด ของกราฟ G มีวิถีและ กราฟ H เป็นกราฟไม่เชื่อมโยงเนื่องจากกราฟ H มีส่วนประกอบ 3 ส่วนที่ไม่เชื่อมโยงกัน ทำให้มี 2 จุดในกราฟ H ไม่มีวิถี



รูปที่ 2.5 กราฟเชื่อมโยง และกราฟไม่เชื่อมโยง

นิยาม 2.16 [5] สำหรับกราฟใดๆ จะเรียก **กราฟปกติ (Regular graph)** ถ้าทุกๆจุดของกราฟมีดีกรีเท่ากัน และถ้าดีกรีของทุกๆจุดเท่ากับ r จะเรียกว่า **กราฟปกติดีกรี** r

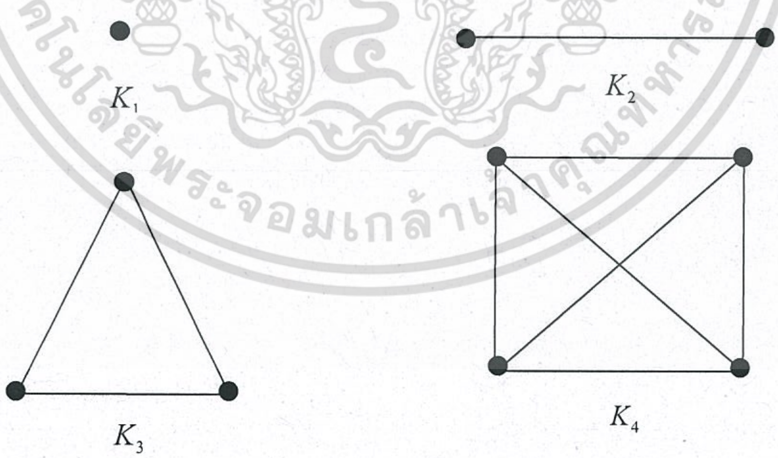
หมายเหตุ จะเรียกกราฟปกติดีกรี 3 ว่า **คิวบิคกราฟ** (Cubic graph)



$r=4$ $r=3$

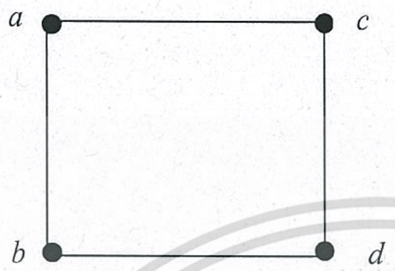
รูปที่ 2.6 กราฟปกติดีกรี 4 และคิวบิคกราฟ

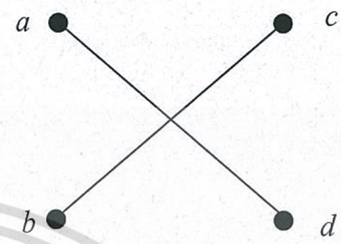
นิยาม 2.17 [5] จะเรียกกราฟเชิงเดียวว่า **กราฟแบบบริบูรณ์ (Complete graph)** ถ้าทุกคู่ของจุดในกราฟเชิงเดียวมีเส้นเชื่อมระหว่างจุด และ K_n แทนกราฟแบบบริบูรณ์ที่มี n จุด



รูปที่ 2.7 กราฟแบบบริบูรณ์

นิยาม 2.18 [5] ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวแล้ว **ส่วนเติมเต็ม (Complement)** ของกราฟ G จะเขียนแทนด้วย $\overline{G}$ ซึ่งมีเซตของจุดเป็น $V(G)$ และจุด 2 จุดใดๆ จะเป็นจุดประชิดกันใน $\overline{G}$ ก็ต่อเมื่อจุด 2 จุดนั้นไม่ประชิดกันใน G



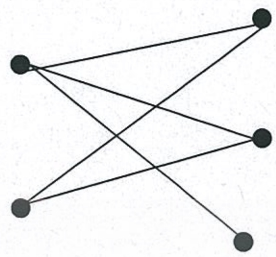


รูปที่ 2.8 กราฟเชิงเดียว G และ ส่วนเติมเต็ม $\overline{G}$

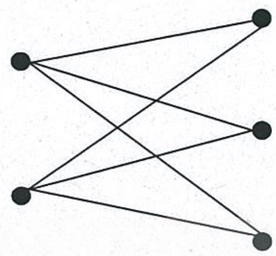
นิยาม 2.19 [5] **กราฟสองส่วน (Bipartite graph)** คือ กราฟ G ซึ่ง $V(G)$ สามารถถูกแบ่งออกเป็น 2 สับเซต คือ V_1 และ V_2 เมื่อ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ โดยที่ทุกเส้นของ G จะมีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ใน V_1 และจุดปลายอีกข้างหนึ่งอยู่ใน V_2 และใช้สัญลักษณ์ $G(V_1,V_2)$ แทนกราฟสองส่วน

นิยาม 2.20 [5] จะเรียก $G(V_1,V_2)$ ว่าเป็น **กราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์** (Complete Bipartite Graph) ถ้า $G(V_1,V_2)$ เป็นกราฟสองส่วน และทุกๆจุดใน V_1 จะมีเส้นเชื่อมกับทุกๆจุดใน V_2 จะใช้สัญลักษณ์ $K_{m,n}$ แทนกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ซึ่งมีจำนวนจุดใน V_1 เท่ากับ m และจำนวนจุดใน V_2 เท่ากับ n

ตัวอย่าง 2.6 พิจารณากราฟต่อไปนี้



กราฟ G



กราฟ H

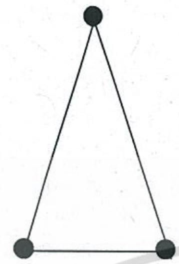
รูปที่ 2.9 กราฟสองส่วน และกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{2,3}$

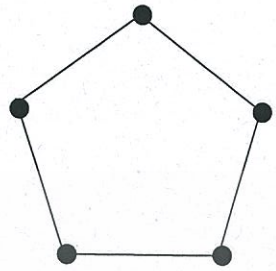
จากรูปที่ 2.9 จะได้ว่า กราฟ G เป็นกราฟสองส่วน และกราฟ H เป็นกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{2,3}$

นิยาม 2.21 [5] จะเรียกกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{1,n}$ ว่า **สตาร์กราฟ** (Star graph)

รูปที่ 2.10 กราฟสตาร์ $K_{1,5}$

นิยาม 2.22 [5] **กราฟวัฏจักร (Cycle graph)** คือกราฟที่มีจุดยอดตั้งแต่ 3 จุดขึ้นไปซึ่งสามารถวาดให้จุดยอดทั้งหมดเรียงอยู่บนวงกลม โดยที่จุดยอดสองจุดนั้นติดกันบนวงกลม เขียนแทนวัฏจักรที่มีจุดยอด n จุดด้วย C_n





รูปที่ 2.11 กราฟวัฏจักร C_3 และ C_5

การดำเนินการบนกราฟ (Operations on graph)

ให้ $G_1=\left(V(G_1),E(G_1)\right)$ และ $G_2=\left(V(G_2),E(G_2)\right)$ เป็นกราฟ โดยที่ $V(G_1)\cap V(G_2)=\varnothing$

นิยาม 2.23 [6] **ยูเนียน (Union)** ของ G_1 และ G_2 แทนด้วยสัญลักษณ์ $G_1\cup G_2$ คือกราฟ G ที่มี $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ และ $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$

นิยาม 2.24 [6] **ผลบวก (Sum)** ของ G_1 และ G_2 แทนด้วยสัญลักษณ์ G_1+G_2 คือกราฟ G ที่มี $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ และ

$$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{v_1v_2 \mid v_1\in V(G_1), v_2\in V(G_2)\}$$

ตัวอย่าง 2.7 ถ้าให้กราฟ G_1 และ G_2 คือ

แล้วจะได้ $G_1 \cup G_2$ และ $G_1 + G_2$ ดังรูป

รูปที่ 2.12 กราฟ $G_1 \cup G_2$ และ กราฟ $G_1 + G_2$

กราฟต้นไม้ (Tree)

นิยาม 2.25 [6] จะเรียกกราฟเชิงเดียว ว่า **ฟอเรส** (Forest) ถ้ากราฟเชิงเดียวนั้นไม่มีวงจร

นิยาม 2.26 [6] ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวซึ่งกราฟ G จะเป็น **กราฟต้นไม้** (Tree) ก็ต่อเมื่อ จุด 2 จุดใดๆ ใน G เชื่อมโยงกันได้ด้วยวิถีเพียงวิถีเดียว

ตัวอย่าง 2.8 พิจารณากราฟต่อไปนี้

G_1 G_2

รูปที่ 2.13 กราฟต้นไม้

จากรูปที่ 2.13 จะเห็นได้ว่ากราฟ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต้นไม้

กราฟต้นไม้เป็นกราฟชนิดหนึ่ง ซึ่งมีการนำไปประยุกต์เพื่อสร้างแบบจำลองอย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะโครงสร้างที่จัดเรียงเป็นลำดับชั้น (Hierarchical structure) เช่น การใช้กราฟต้นไม้ในการแทนความสัมพันธ์ทางเชื้อสายของบุคคลต่างๆ ในวงศ์ตระกูล (Family tree) เป็นต้น

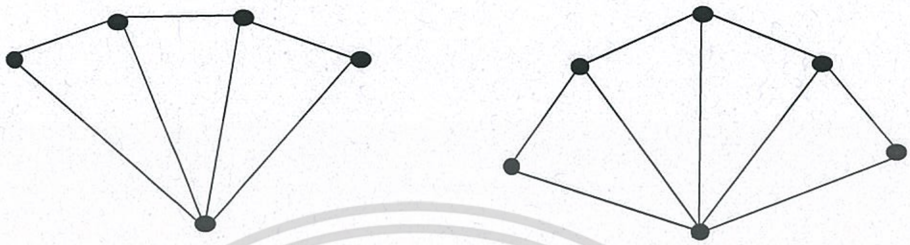
นิยาม 2.27 [6] **กราฟวิถี** (Path graph) คือกราฟต้นไม้ ซึ่งมีจุดยอดที่มีลำดับขั้น 1 เพียง 2 จุดยอด กราฟวิถีเขียนแทนด้วย P_n ที่มีจำนวนจุดยอด n

P_4 P_5

รูปที่ 2.14 กราฟวิถี P_4 และ P_5

นิยาม 2.28 [9] **กราฟว่าง (Empty graph)** คือกราฟ G ที่มีแต่จุดไม่มีเส้นเชื่อม

นิยาม 2.29 [8] **กราฟพัด (Fan graph)** เขียนแทนด้วย $F_n = P_n + K_1$



F_4 F_5

รูปที่ 2.15 กราฟพัด F_4 และ F_5

นิยาม 2.30 [8] **กราฟพัด (Fan graph)** เขียนแทนด้วย $F_{n,2} = \overline{K_n} + P_2$ เมื่อ $n \geq 1$

$F_{4,2}$ $F_{3,2}$

รูปที่ 2.16 กราฟพัดลม $F_{4,2}$ และ $F_{3,2}$

นิยาม 2.31 [5] ฟังก์ชัน $f : A \to B$ จะเรียกว่า f **เป็นฟังก์ชัน** จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมน และมีสับเซตของ B เป็นเรนจ์ เขียนแทนด้วย $f : A \to B$

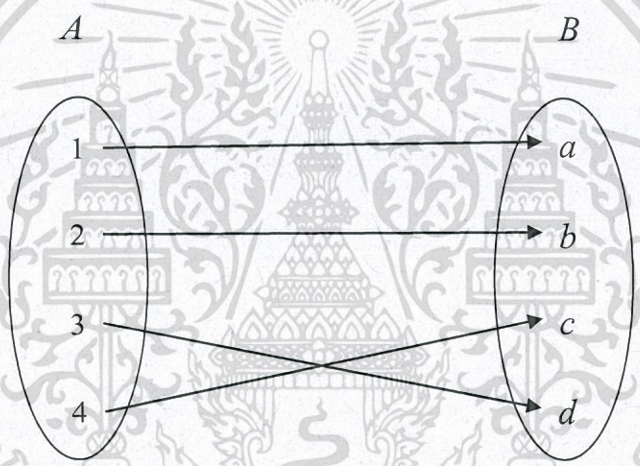
นิยาม 2.32 [5] ฟังก์ชัน $f : A \to B$ จะเรียกว่า f **เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (onto function)** ก็ต่อเมื่อเรนจ์ของ f คือ B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[onto]{} B$

นิยาม 2.33 [5] ฟังก์ชัน $f: A \to B$ จะเรียกว่า f **เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก** A ไป B (one-to-one function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกค่าของ x และ y ใน A ถ้า $f(x)=f(y)$ แล้ว $x=y$ เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$

นิยาม 2.34 [5] **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง** ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติของการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และเป็นฟังก์ชันทั่วถึง เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

ตัวอย่าง 2.9 ให้ $A=\{1,2,3,4\}$ และ $B=\{a,b,c,d\}$

และกำหนดฟังก์ชัน f ดังแผนภาพ



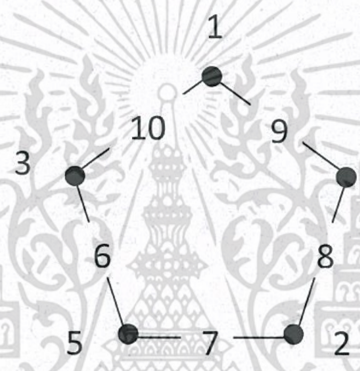
รูปที่ 2.17 แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน**หนึ่งต่อหนึ่ง**จาก A ไปทั่วถึง B เพราะ f เป็นฟังก์ชันที่ $D_f=A$ และ $R_f=B$

นิยาม 2.35 [5] กำหนดให้ $f: A \to B$ $X \subseteq A$

ภาพ (Image) ของ X **ภายใต้** f ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $f[X]$ คือเซตซึ่งกำหนดโดย $f[X]=\{b \in B \mid \exists x \in X, f(x)=b\}$

นิยาม 2.36 [7] **การกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง** บนกราฟ G ให้กราฟ G ที่มี $V(G)$ เป็นเซตของจุดยอด และ $E(G)$ เป็นเซตของเส้นเชื่อม ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(G)\cup E(G)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,..,p+q\}$ เมื่อ $p=|V(G)|$ และ $q=|E(G)|$ ที่มีสมบัติว่าสำหรับเส้นเชื่อม ab ใดๆของกราฟ G ที่เป็นสมาชิกของ $E(G)$ และ $f(a)+f(ab)+f(b)=k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวบางค่าและ $f(V(G))=\{1,2,..,p\}$

ตัวอย่าง 2.10 วัฏจักร C_5 เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=14$



รูปที่ 2.18 วัฏจักร C_5 มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง

นอกจากนี้ยังมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องของ รศ.ดร.วนิดา เหมะกุล และดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ที่ได้ศึกษาค้นพบกราฟเชื่อมโยงที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง รวมถึงกราฟใหม่ที่มีคุณสมบัตินี้ ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

2.37 ทฤษฎีบทการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟเชื่อมโยง

ทฤษฎีบท 2.37.1 [1] **กราฟบริบูรณ์** K_n เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง เมื่อ $n=1,2,3$

ทฤษฎีบท 2.37.2 [1] **วัฏจักร** C_n ที่เป็นจำนวนคี่ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่ง $k=\frac{5n+3}{2}$

ทฤษฎีบท 2.37.3 [4] **วิถี** P_n เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง $k=\frac{5n+2}{2}$ และเมื่อ n เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $k=\frac{5n+3}{2}$

ทฤษฎีบท 2.37.4 [4] **สตาร์กราฟ** $F_{1,n}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่ง $k=2n+4$ หรือ $k=3n+3$

ทฤษฎีบท 2.37.5 [4] **กราฟพัด** $F_{n,1}$ หรือ F_n เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง เมื่อ $1\leq n\leq 6$ ซึ่ง $k=3n+3$

บทที่ 3

ผลการดำเนินงานวิจัย

กราฟการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งที่เราสนใจ คือ กราฟพัด (Fan Graph) เขียนแทนด้วย $F_{n,2}$ เมื่อ $n \geq 1$ ซึ่งทางคณะผู้จัดทำได้ทำการศึกษาจากบทตั้งและสามารถสรุปเกี่ยวกับการเป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟ $F_{n,2}$ ได้ดังต่อไปนี้

<u>บทตั้ง</u> [4] กราฟ G เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชั่นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : V(G) \to \{1,2,3,...,p\}$ ซึ่งเซต $S = \{f(u)+f(v) : uv \in E(G)\}$ ประกอบด้วย จำนวนเต็ม q จำนวนเรียงติดกัน

G เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ที่มีค่า $k = p+q+s$

เมื่อ $s = min(S)$

และ $S = \{f(u)+f(v) : uv \in E(G)\}$

$= \{k-(p+1), k-(p+2), ..., k-(p+q)\}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ G เป็นกราฟที่ประกอบด้วย p จุด q เส้น

($\Rightarrow$) สมมติให้ G เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง

ดังนั้น จะมีฟังก์ชั่นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,...,p+q\}$

และมีค่าคงที่ k ซึ่ง $k = f(u)+f(v)+f(uv)$ สำหรับทุกเส้น uv ใดๆ ของกราฟ G

และ $f(V(G)) = \{1,2,...,p\}$

ดังนั้น $f(E(G)) = \{p+1, p+2, ..., p+q\}$

กำหนดให้ $S = \{f(u)+f(v) : uv \in E(G)\}$

$= \{k - f(uv) : uv \in E(G)\}$

$= \{k-(p+1), k-(p+2), ..., k-(p+q)\}$

ทำให้ได้ว่า $S=\{f(u)+f(v) : uv\in E(G)\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม q จำนวนเรียงติดกัน

($\Leftarrow$) สมมติว่ามี ฟังก์ชั่นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : V(G)\to\{1,2,\ldots,p\}$ ซึ่งเซต

$S=\{f(u)+f(v) : uv\in E(G)\}$ ประกอบด้วยจำนวนเต็ม q จำนวนเรียงติดกัน

ให้ uv เป็นเส้นใน $E(G)$

ซึ่ง $f(u)+f(v)=min(S)=s$

ดังนั้น $S=\{s,s+1,s+2,\ldots,s+q-1\}$

สำหรับเส้นเชื่อม uv ใดๆของกราฟ G

กำหนดให้ $f(uv)=p+q+s-(f(u)+f(v))$

จะได้ $f(E(G))=\{f(uv):uv\in E(G)\}$

$$=\{p+q+s-(f(u)+f(v)):uv\in E(G)\}$$

$$=\{p+q+s-(s),p+q+s-(s+1),\ldots,p+q+s-(s+q-1)\}$$

$$=\{p+1,p+2,\ldots,p+q\}$$

ดังนั้น มีฟังก์ชั่นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $f : V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\ldots,p+q\}$

ซึ่ง $f(u)+f(v)+f(uv)=p+q+s$ คือค่าคงที่ k สำหรับทุกเส้น uv ใดๆของกราฟ G

และ $f(V(G))=\{1,2,\ldots,p\}$

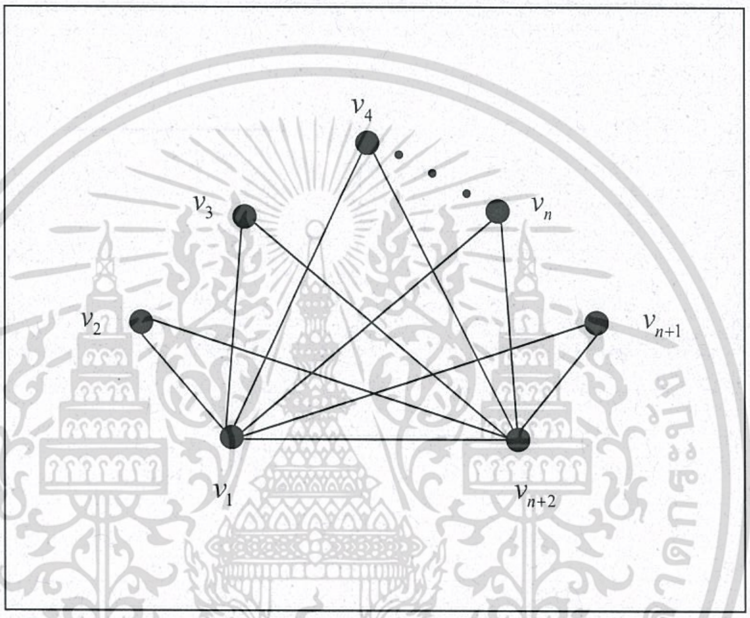
ดังนั้น กราฟ G เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง

<u>ทฤษฎีบท</u> กราฟ $F_{n,2}$ เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง โดยที่ $k=3n+6$

<u>พิสูจน์</u> ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

กำหนดให้ $V\left(F_{n,2}\right)=\left\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}, v_{n+2}\right\}$ และ

$E\left(F_{n,2}\right)=\left\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, \ldots, v_1v_n, v_1v_{n+1}, v_1v_{n+2}\right\} \cup \left\{v_{n+2}v_2, v_{n+2}v_3, \ldots, v_{n+2}v_n, v_{n+2}v_{n+1}\right\}$



รูปที่ 3.1 กราฟพัด $F_{n,2}$

จะทำการพิสูจน์ว่า กราฟพัด $F_{n,2}$ เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง

ให้ $f: V\left(F_{n,2}\right) \to \{1,2,3,\ldots,n+2\}$

กำหนดโดย $f\left(v_i\right)=i$

โดยจะแสดงว่า ก) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

ข) $S=\left\{f(u)+f(v): uv \in E\left(F_{n,2}\right)\right\}$
เป็นเซตของจำนวนเต็ม $2n+1$ จำนวนเรียงติดกัน

สำหรับ ก) จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $v_i, v_j \in V\left(F_{n,2}\right)$ โดยที่ $i, j \in \{1,2,3,\ldots,n+2\}$

สมมติ $f\left(v_i\right) = f\left(v_j\right)$

เพราะว่า $i = f\left(v_i\right)$ และ $f\left(v_j\right) = j$

จะได้ $i = j$

ดังนั้น $v_i = v_j$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $c \in \{1,2,\ldots,n+2\}$

เนื่องจาก $c = f\left(v_c\right)$ ซึ่ง $v_c \in V\left(F_{n,2}\right)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

สำหรับ ข) $S = \left\{ f(u) + f(v) : uv \in E\left(F_{n,2}\right)\right\} = \{3,4,\ldots,2n+3\}$

ให้ $uv \in E\left(F_{n,2}\right)$

$$E\left(F_{n,2}\right) = \left\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, \ldots, v_1v_n, v_1v_{n+1}, v_1v_{n+2}\right\} \cup \left\{v_{n+2}v_2, v_{n+2}v_3, \ldots, v_{n+2}v_n, v_{n+2}v_{n+1}\right\}$$

<u>กรณีที่1</u> $uv = v_i v_1$ โดยที่ $i \in \{2,3,\ldots,n+2\}$

$$f\left(v_i\right) + f\left(v_1\right) = i+1$$

ดังนั้น $\left\{f\left(v_i\right) + f\left(v_1\right) : i = 2,3,\ldots,n+2\right\} = \{3,4,\ldots,n+3\}$

<u>กรณีที่2</u> $uv = v_{n+2} v_i$ โดยที่ $i \in \{2,3,\ldots,n+1\}$

$$f\left(v_{n+2}\right) + f\left(v_i\right) = n+2+i$$

ดังนั้น $\left\{f\left(v_{n+2}\right) + f\left(v_i\right) : i = 2,3,\ldots,n+1\right\} = \{n+4, n+5, \ldots, 2n+3\}$

จะได้ $S = \{f(v_i)+f(v_1) : i = 2,3,...,n+2\} \cup \{f(v_{n+2})+f(v_i) : i = 2,3,...,n+1\}$

$= \{3,4,...,n+3\} \cup \{n+4, n+5,...,2n+3\}$

$= \{3,4,5,...,2n+3\}$ คือเซตของจำนวนเต็ม $2n+1$ จำนวนเรียงติดกัน

จาก ก) ข) และบทตั้ง ทำให้ได้ว่ากราฟพัด $F_{n,2}$ เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง

โดยที่ $k = p+q+s$

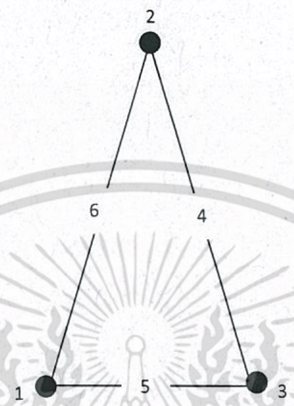
$= (n+2)+(2n+1)+(1+2)$

$= 3n+6$

สรุปได้ว่า กราฟพัด $F_{n,2}$ เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง โดยที่ $k = 3n+6$

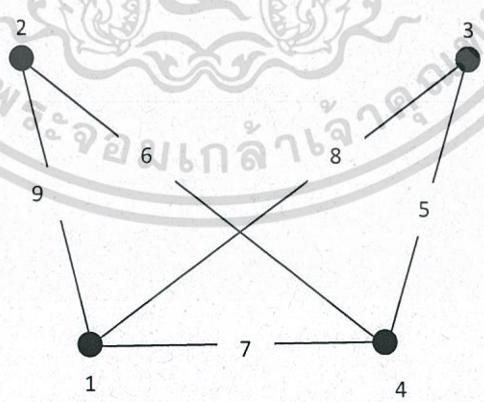
จากทฤษฎีบทของกราฟพัด $F_{n,2}$ เป็นกราฟกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งโดยที่ $k = 3n + 6$ ผู้วิจัยจึงได้ทำการยกตัวอย่างของกราฟพัด $F_{n,2}$ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 3.1 กราฟพัด $F_{1,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k = 9$



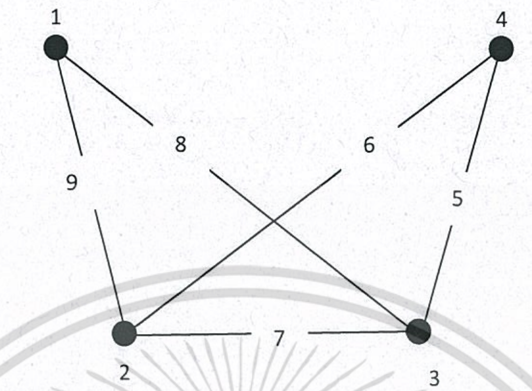
รูปที่ 3.2 กราฟพัด $F_{1,2}$

ตัวอย่างที่ 3.2 กราฟพัด $F_{2,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k = 12$



รูปที่ 3.3 กราฟพัด $F_{2,2}$

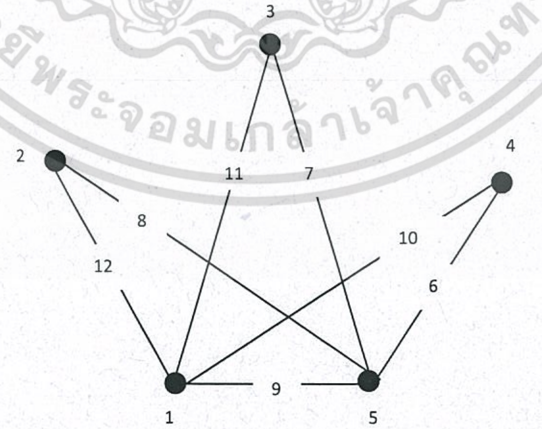
ตัวอย่างที่ 3.3 กราฟพัด $F_{2,2}$



รูปที่ 3.4 กราฟพัด $F_{2,2}$

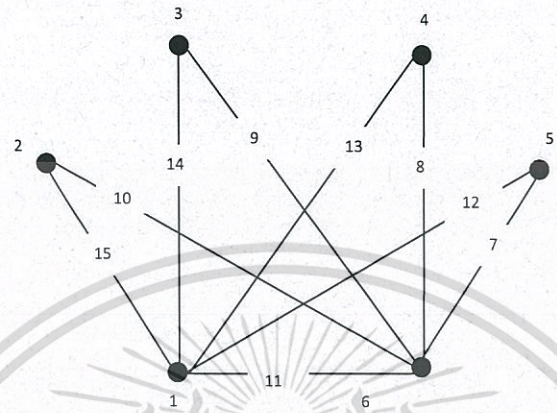
จากตัวอย่าง 3.3 จะเห็นได้ว่ากราฟพัด $F_{2,2}$ มีอีกรูปที่ลงค่าของจุดกับเส้นต่างกันและยังคงเป็นกราฟการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมีค่า $k=12$ ดังรูปที่3.3

ตัวอย่างที่ 3.4 กราฟพัด $F_{3,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=15$



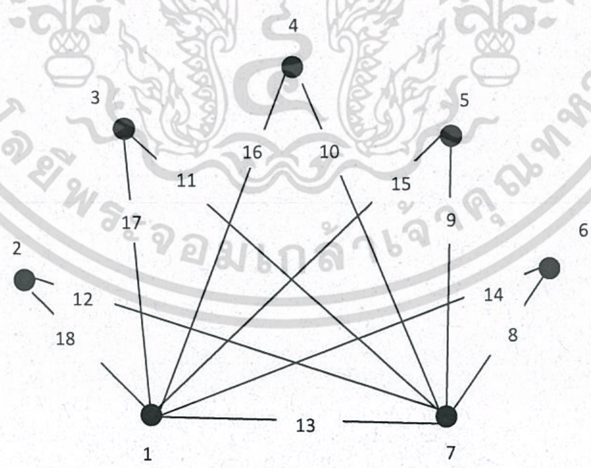
รูปที่ 3.5 กราฟพัด $F_{3,2}$

ตัวอย่างที่ 3.5 กราฟพัด $F_{4,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=18$



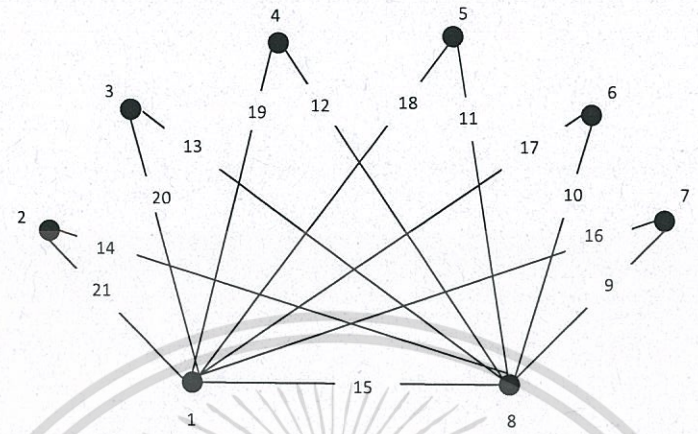
รูปที่ 3.6 กราฟพัด $F_{4,2}$

ตัวอย่างที่ 3.6 กราฟพัด $F_{5,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=21$



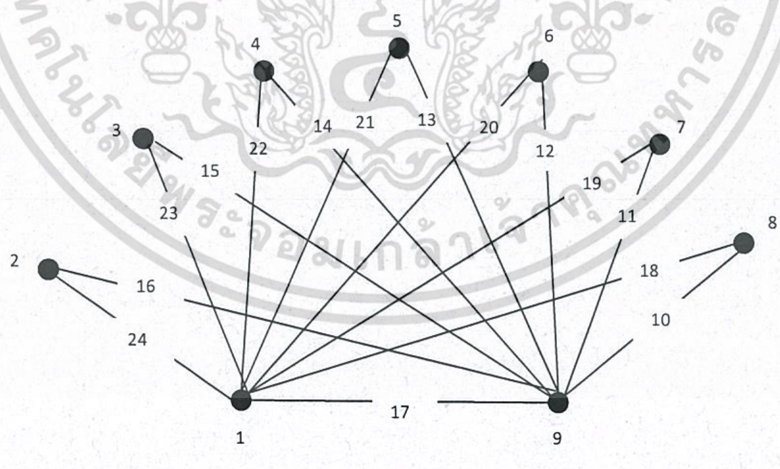
รูปที่ 3.7 กราฟพัด $F_{5,2}$

ตัวอย่างที่ 3.7 กราฟพัด $F_{6,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=24$



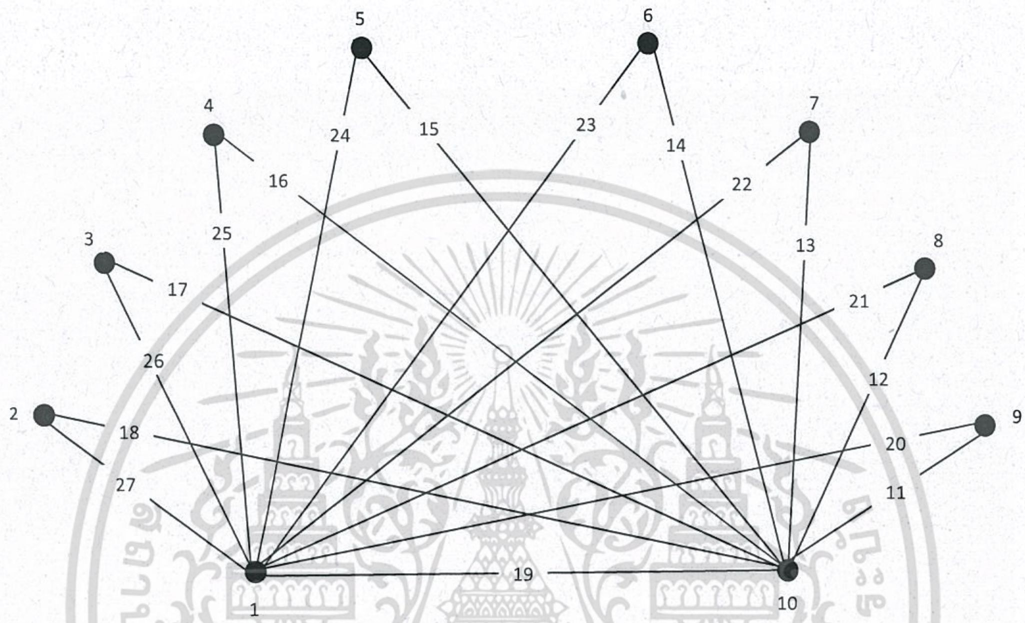
รูปที่ 3.8 กราฟพัด $F_{6,2}$

ตัวอย่างที่ 3.8 กราฟพัด $F_{7,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=27$



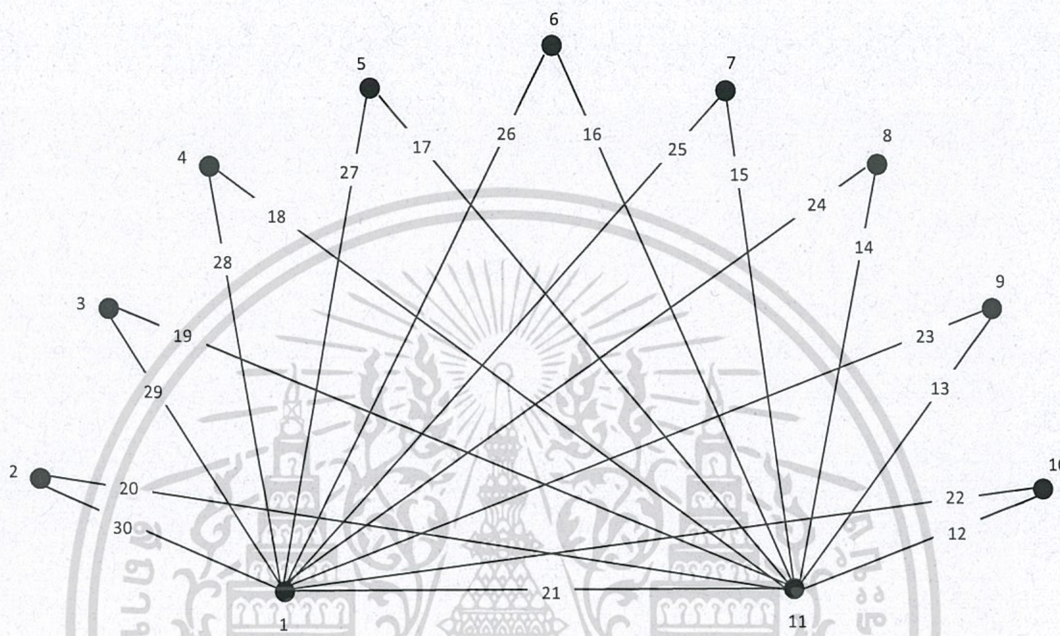
รูปที่ 3.9 กราฟพัด $F_{7,2}$

ตัวอย่างที่ 3.9 กราฟพัด $F_{8,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k = 30$



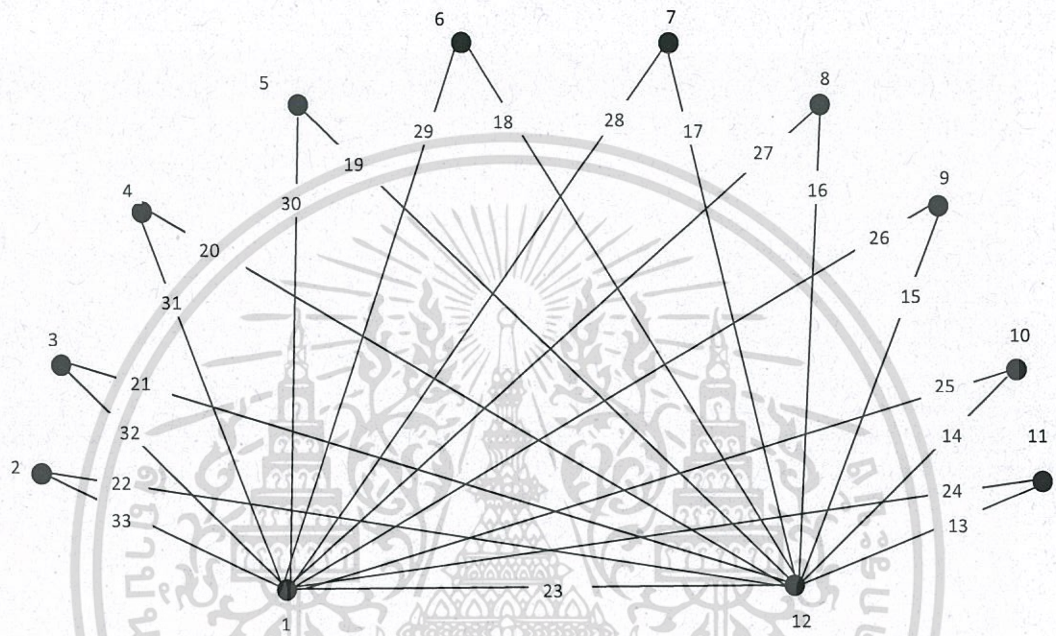
รูปที่ 3.10 กราฟพัด $F_{8,2}$

ตัวอย่างที่ 3.10 กราฟพัด $F_{9,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k = 33$



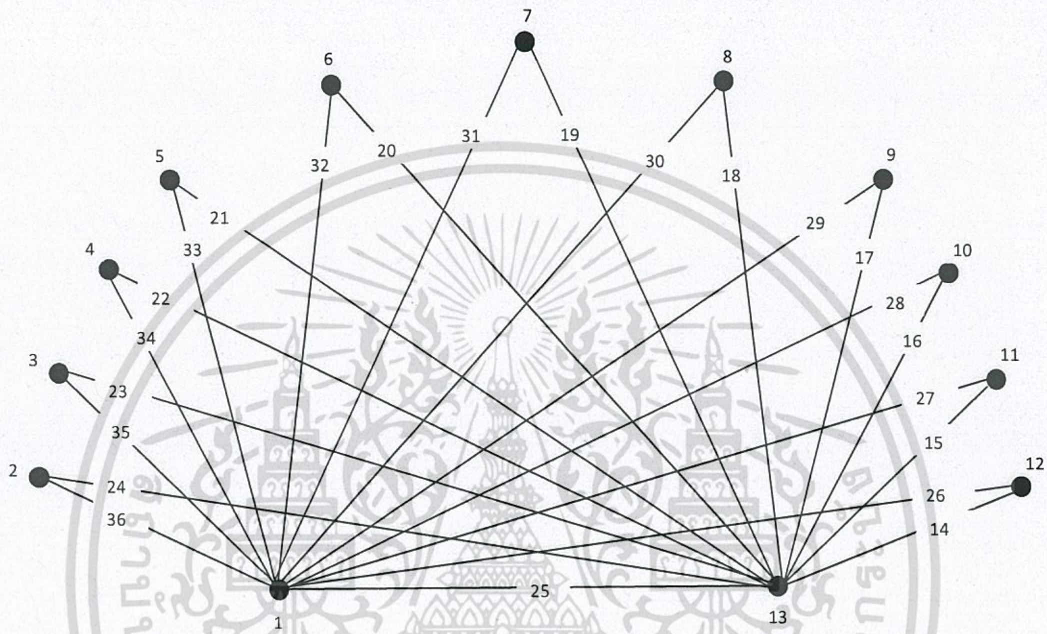
รูปที่ 3.11 กราฟพัด $F_{9,2}$

ตัวอย่างที่ 3.11 กราฟพัด $F_{10,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=36$



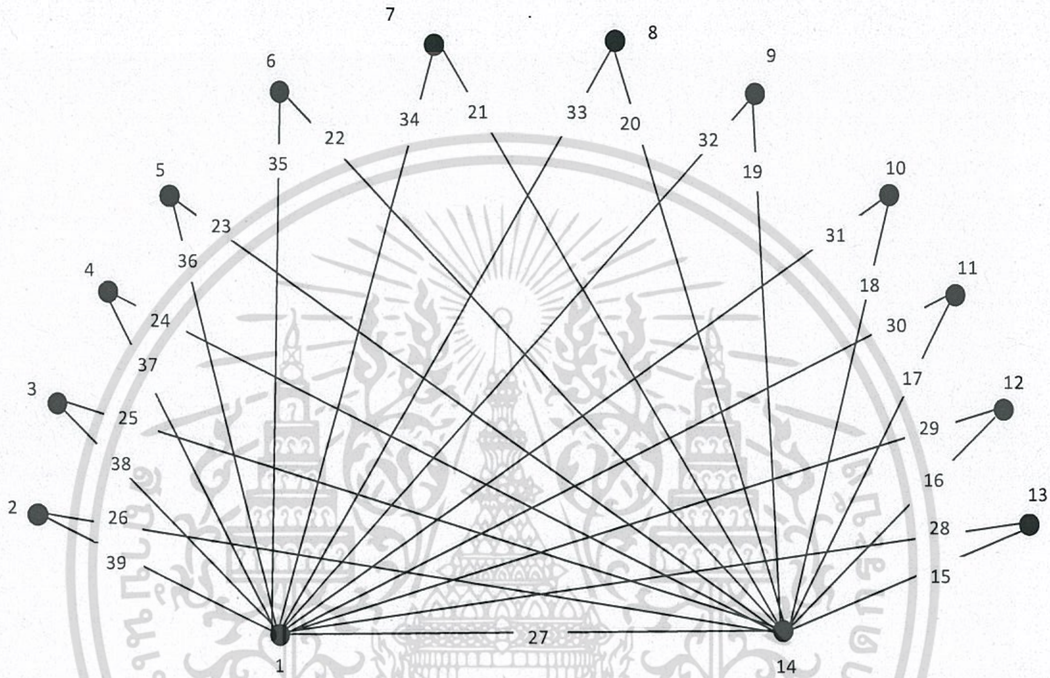
รูปที่ 3.12 กราฟพัด $F_{10,2}$

ตัวอย่างที่ 3.12 กราฟพัด $F_{11,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k = 39$



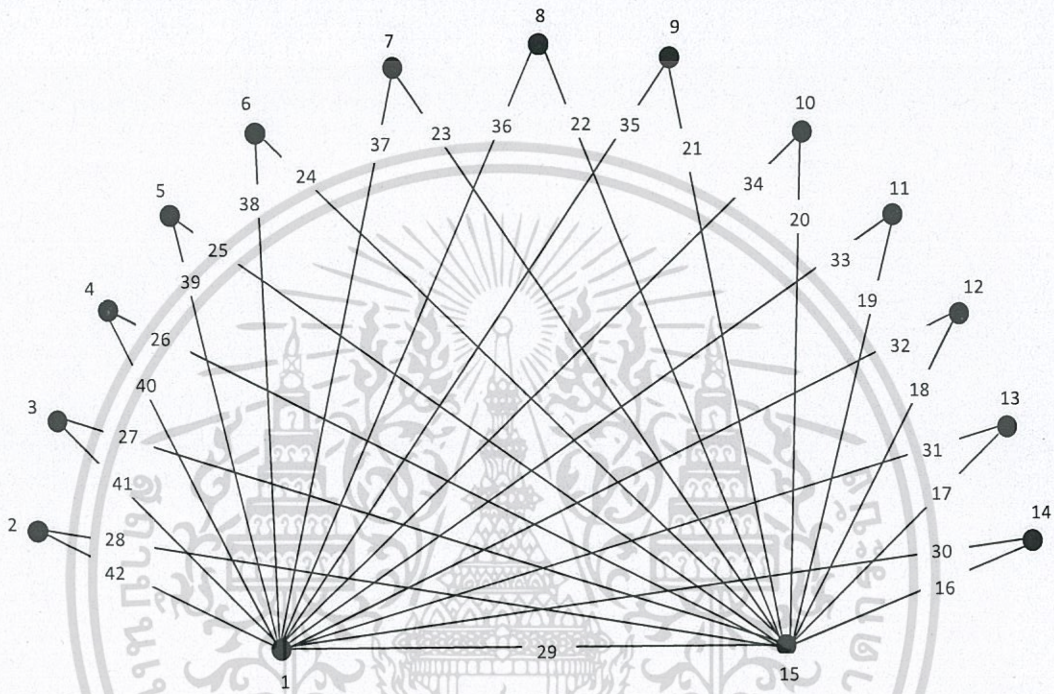
รูปที่ 3.13 กราฟพัด $F_{11,2}$

ตัวอย่างที่ 3.13 กราฟพัด $F_{12,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=42$



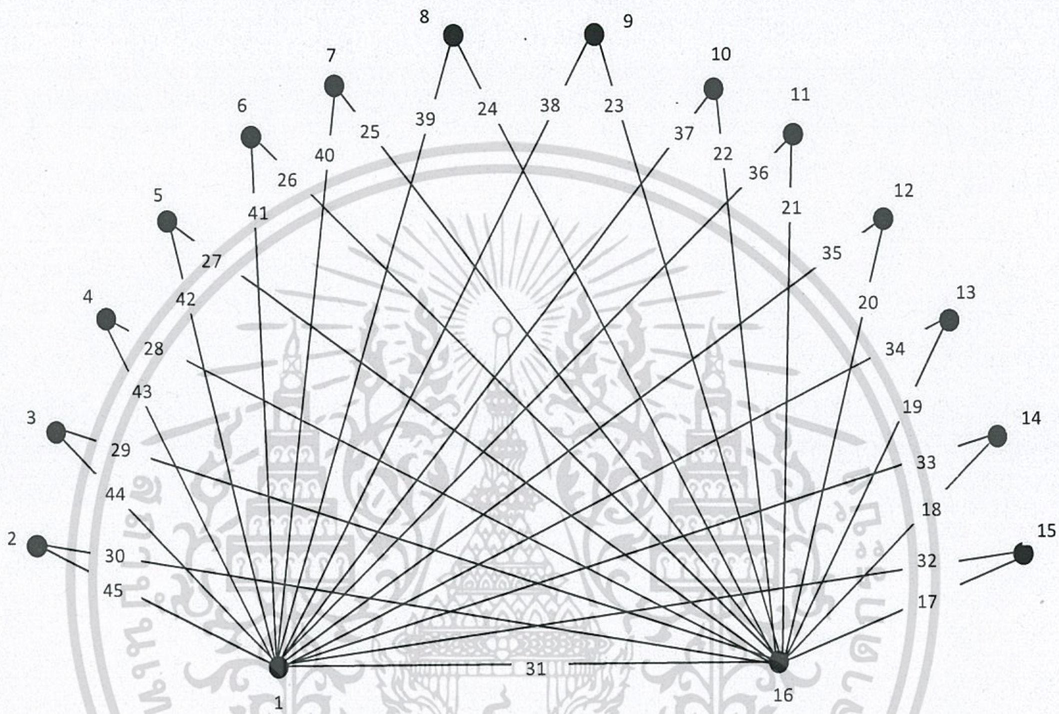
รูปที่ 3.14 กราฟพัด $F_{12,2}$

ตัวอย่างที่ 3.14 กราฟพัด $F_{13,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=45$



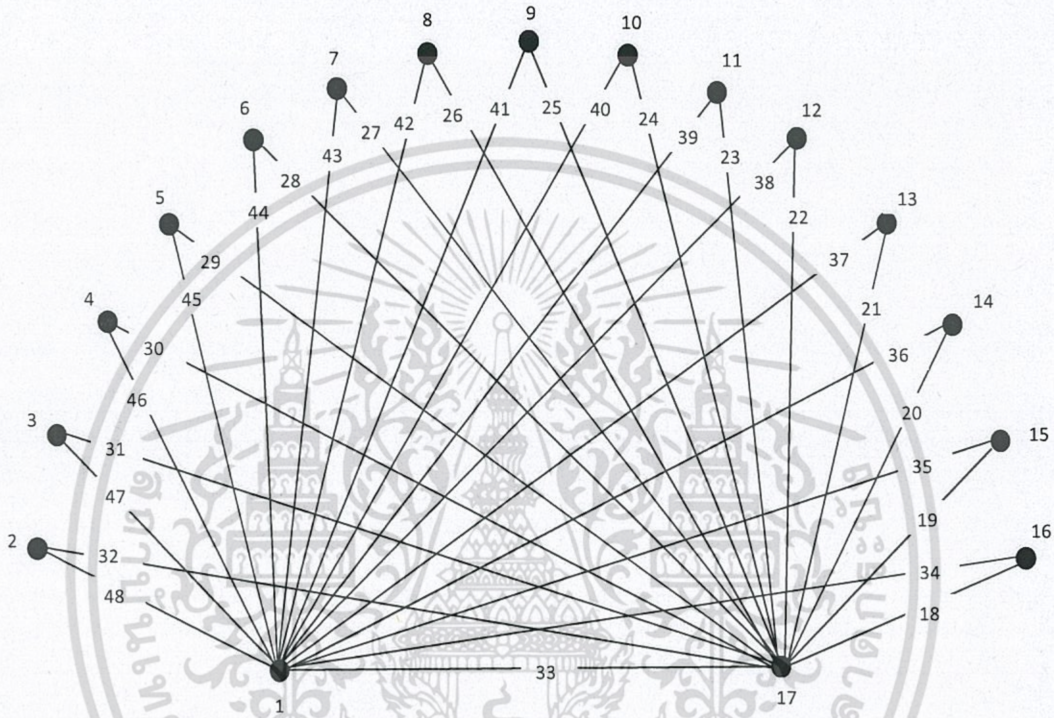
รูปที่ 3.15 กราฟพัด $F_{13,2}$

ตัวอย่างที่ 3.15 กราฟพัด $F_{14,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k = 48$



รูปที่ 3.16 กราฟพัด $F_{14,2}$

ตัวอย่างที่ 3.16 กราฟพัด $F_{15,2}$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง ซึ่งมี $k=51$



รูปที่ 3.17 กราฟพัด $F_{15,2}$

บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับกราฟที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง กล่าวคือ กราฟ G ที่มี $p=|V(G)|$ เป็นเซตของจุดยอด และ $q=|E(G)|$ เป็นเซตของเส้นเชื่อม ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชั่น f ที่เป็นฟังก์ชั่นหนึ่งต่อหนึ่ง จาก $V(G)\cup E(G)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,...,p+q\}$ ที่มีสมบัติว่าสำหรับเส้นเชื่อม ab ใดๆ ของกราฟ G ที่เป็นสมาชิกของ $E(G)$ และ $f(a)+f(ab)+f(b)=k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวบางค่า ซึ่งเป็นการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องทฤษฎีกราฟ และ ทฤษฎีบทกราฟที่มีคุณสมบัติการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่ง มาใช้ร่วมกันเพื่อให้เข้าใจมากยิ่งขึ้นและสามารถนำข้อมูลที่มีอยู่มาศึกษาคิดค้นทฤษฎีบทใหม่ของกราฟพัด $F_{n,2}$ ที่ทำให้กราฟเป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่ออย่างยวดยิ่งที่มีค่า $k=3n+6$

4.2 ข้อเสนอแนะ

4.2.1 จากการวิจัยเพิ่มเติมทำให้ได้ว่า $F_{2,2}$ สามารถหาได้ 2 แบบเท่านั้น ดังรูปที่3.3 และรูปที่3.4 โดยมีค่า $k=12$ แต่การกำหนดค่าต่างกัน

4.2.2 กราฟพัด $F_{n,2}$ เมื่อ $n=3,4,5,6$ สามารถหาได้เพียงแบบเดียว ดังนั้นถ้าผู้สนใจที่จะทำวิจัยต่อเนื่องควรจะศึกษาเพิ่มเติมว่ากราฟพัด $F_{n,2}$ เมื่อ $n\geq 3$ เป็นการกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งที่มีเพียงรูปแบบเดียวจริงหรือไม่

เอกสารอ้างอิง

[1] Enomoto, H.; Llado, A.S.; Nakamgawa, T.; and Ringel, G. **Super edge-magic graph.** SUT J. MATH. 34 (1998): 105-109

[2] Wijaya, K.; and Basloro, T. **Edge-magic total labeling on disconnect graph**. Proc. Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms (2000): 134-144.

[3] E.T. Baskoro , I W. Sudarsana and Y.M. Cholily . **How to construct new super edge-magic graph from some old ones.** Department of Mathematics, Tadulako University , Indonesia.

[4] Figueroa-Centeno, R.M.; Ichishima, R.; and Muntaner-Batle, F.A. **On Super edge-magic graph**. ARS Combinatoria 64 (2002), 81-96.

[5] นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2540. **ทฤษฎีกราฟ1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

[6] นิตยา ชิงชัย. 2530. **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.** ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[7] วนิดา เหมะกุล และวรรณพร สรรประเสริฐ. 2545. **การกำกับกลบนเส้นเชื่อมอย่างยวดยิ่งของกราฟบางชนิด**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[8] **นิยามกราฟพัด** (8 ธันวาคม 2558). Available URL:http://mathworld.wolfram.com/FanGraph.html

[9] **ทฤษฎีกราฟ** (8 ธันวาคม 2558). Available URL:http://www.mwit.ac.th/~noon/style/graph.pdf