ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

BLOCK KRONECKER CONVOLUTION PRODUCT OF ABSOLUTELY INTEGRABLE MAXTRIX-VALUED FUNCTIONS

ศิริวิภา ช่างเครื่อง
ศุภางค์วดี ฤทธิวุฒิ
อารีรัตน์ อ้นทอง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

BLOCK KRONECKER CONVOLUTION PRODUCT OF ABSOLUTELY INTEGRABLE MAXTRIX-VALUED FUNCTIONS

ศิริวิภา ช่างเครื่อง
ศุภางค์วดี ฤทธิวุฒิ
อารีรัตน์ อ้นทอง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

BLOCK KRONECKER CONVOLUTION PRODUCT OF ABSOLUTELY INTEGRABLE MAXTRIX-VALUED FUNCTIONS

SIRIWIPA CHANGKHRUENG
SUPANGWADEE RITTHIWUT
AREERAD ONTHONG

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ Block Kronecker Convolution Product of Absolutely Integrable Matrix – Valued functions
ชื่อนักศึกษา	นางสาวศิริวิภา ช่างเครื่อง รหัสนักศึกษา 56050140 นางสาวศุภางค์วดี ฤทธิวุฒิ รหัสนักศึกษา 56050141 นางสาวอารีรัตน์ อ้นทอง รหัสนักศึกษา 56050181
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ประธานกรรมการ	วรรณพร
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้
ชื่อนักศึกษา	นางสาวศิริวิภา ช่างเครื่อง รหัสนักศึกษา 56050140
	นางสาวศุภางค์วดี ฤทธิวุฒิ รหัสนักศึกษา 56050141
	นางสาวอารีรัตน์ อ้นทอง รหัสนักศึกษา 56050181
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนิยามและศึกษาสมบัติที่สำคัญของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกสำหรับฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ สมบัติดังกล่าวเกี่ยวข้องกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตและตัวทำสลับที่คอนโวลูชัน ยิ่งไปกว่านั้นเราพิจารณาศึกษาการยกกำลังคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก

คำสำคัญ : คูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ ตัวทำสลับที่คอนโวลูชัน ยกกำลังคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก

Title	Block Kronecker Convolution Product of Absolutely Integrable Matrix-Valued functions		
Students	Miss Siriwipa	Changkhrueng	Student ID 56050140
	Miss Supangwadee	Ritthiwut	Student ID 56050141
	Miss Areerad	Onthong	Student ID 56050181
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)		
Department	Mathematic		
Faculty	Science		
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)		
Academic Year	2016		
Advisor	Assist.Prof.Dr. Pattrawut Chansangiam		

Abstract

The purpose of this special problem is to define and to study significant properties of block Kronecker convolution product for absolutely integrable matrix – valued functions. Such properties involve algebraicoperations and commutator convolutions. Moreover, we investigate block Kronecker convolution powers.

Keywords : block Kronecker convolution product, absolutely integrable matrix – valued functions, commutator convolutions, block Kronecker convolution power.

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่องผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาจาก ผศ.ดร. ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ซึ่งได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้ และความเอาใจใส่ในการตรวจสอบและแก้ไขข้อผิดพลาดต่างๆ ให้เกิดความถูกต้องครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามในการทำปัญหาพิเศษนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ และ ผศ.ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการ และกรรมการในการสอบปัญหาพิเศษนี้ ตลอดจนคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประศาสตร์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำ รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ที่จำเป็นในการทำปัญหาพิเศษนี้

ท้ายที่สุดนี้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ช่วยสนับสนุนและเป็นกำลังใจที่สำคัญตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา รวมไปถึงเพื่อนๆ และผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องที่มิได้กล่าวนามข้างต้น ซึ่งมีส่วนช่วยส่งเสริมให้การทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ศิริวิภา ช่างเครื่อง
ศุภางค์วดี ฤทธิวุฒิ
อารีรัตน์ อ้นทอง

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในพีชคณิตเชิงเส้นมีการคูณเมทริกซ์ที่แตกต่างจากการคูณเมทริกซ์แบบปกติ เช่น ผลคูณโครเนคเคอร์ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\otimes$ การคูณรูปแบบดังกล่าวได้จากชื่อนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน Leopold Kronecker นอกจากนี้ยังเป็นที่รู้จักกันในชื่อ ผลคูณตรง (direct product) หรือผลคูณเทนเซอร์ (tensor product) ผลคูณโครเนคเคอร์มีข้อได้เปรียบกว่าการคูณเมทริกซ์แบบปกติ โดยการคูณดังกล่าวนิยามได้สำหรับเมทริกซ์สองเมทริกซ์ที่มีขนาดใดๆ ซึ่งไม่จำเป็นต้องมีขนาดที่มีความสัมพันธ์กัน

ผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker product) ของเมทริกซ์เชิงซ้อน $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ นิยามให้เป็นเมทริกซ์ขนาด $mp\times nq$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์แบบบล็อก โดยบล็อกที่ (i,j) ของ $A\otimes B$ คือ $a_{i,j}B$ การประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ได้มีการนำไปใช้แพร่หลายในวิชาสมการเมทริกซ์ แคลคูลัสเมทริกซ์ และในสาขาอื่นๆ

ในงานวิจัย [2] นักคณิตศาสตร์ Ruud H. Koning, Heinz Neinz Neudecker และ Tom Wansbeek ได้ศึกษาผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์ $A\in M_{m,n}$ และ $B=[B_{kl}]\in M_{p,q}$ ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของ A และ B กำหนดโดย

$$A\boxtimes B=[A\otimes B_{kl}]_{kl}\in M_{mp,nq}$$

คอนโวลูชันนิยามได้โดยให้ $f,g:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ คอนโวลูชันของ f และ g เป็นฟังก์ชันใหม่ เขียนแทนด้วย $f*g$ นิยามโดย

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

สำหรับทุกๆ t ที่อยู่ในช่วง $[0,b]$

คอนโวลูชันเป็นสิ่งที่มีประโยชน์อย่างมากในวิชาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และได้มีการนำไปใช้อย่างแพร่หลายในวิชาอื่นๆ เช่น ทฤษฎีระบบ ทฤษฎีการควบคุม ทฤษฎีความเสถียร และอื่นๆอีกมากมาย และได้มีการนำมาประยุกต์ใช้กับเมทริกซ์ ซึ่งทำให้เกิดประโยชน์หรือการนำไปใช้ต่อในอีกหลากหลายแขนง เช่น สมการเมทริกซ์ อสมการเมทริกซ์ และ สมการเชิงอนุพันธ์ของเมทริกซ์ เป็นต้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ

ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1. ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่พิจารณาเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้
2. สมบัติเชิงพีชคณิตที่พิจารณา ได้แก่ สมบัติที่เกี่ยวกับ การบวก การคูณ การคูณด้วยสเกลาร์ การสลับเปลี่ยน และเมทริกซ์ย่อย

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ศึกษาการคูณของเมทริกซ์รูปแบบใหม่
2. ได้เพิ่มพูนทักษะกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
3. เป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อในสาขาคณิตศาสตร์ หรือสาขาอื่นที่เกี่ยวข้อง

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานปริพันธ์แบบรีมันน์
2. ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันปริพันธ์สัมบูรณ์
3. ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันค่าจริงของคอนโวลูชัน
4. ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์
5. ศึกษาสมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์ที่เป็นจำนวนจริง
6. ศึกษาสมบัติของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์ของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้
7. จัดทำเอกสาร

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน								
	ปี 2559					ปี 2560			
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานปริพันธ์แบบรีมันน์									
2. ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันปริพันธ์สัมบูรณ์									
3. ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันค่าจริงของคอนโวลูชัน									
4. ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์									
5. ศึกษาสมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์ที่เป็นจำนวนจริง									
6. ศึกษาสมบัติของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์ของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้									
7. จัดทำเอกสาร									

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงาน

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์และคณิตวิเคราะห์

2.1 พีชคณิตของเมทริกซ์

บทนิยาม 2.1.1 การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ (Addition and Scalar multiplication)

ให้ $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]\in(\mathbb{R})$ และ $k\in\mathbb{R}$ เรานิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ของเมทริกซ์ดังนี้

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$k\cdot A=kA=\left[ka_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 2.1.2 ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -7\end{bmatrix}$ และ $C=[4 \quad -3 \quad 1]$

$$A+B=\begin{bmatrix}1+2 & 0+3\\ -4+(-1) & 6+(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -5 & -1\end{bmatrix}$$

$$3B=3\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9\\ -3 & -21\end{bmatrix}$$

$$A-3B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 9\\ -3 & -21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -9\\ -1 & 27\end{bmatrix}$$

แต่ $A+C$ ไม่สามารถนิยามได้ เนื่องจาก A และ C มีขนาดไม่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.1.3 คุณสมบัติของการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์

ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน และให้ k และ r เป็นสเกลาร์แล้ว

1. $A+B=B+A$ (สมบัติการสลับที่การบวก)
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก)
3. $A+0=A$ เมื่อ 0 คือ เมทริกซ์ศูนย์ (สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก)
4. $k(A+B)=kA+kB$ (สมบัติการแจกแจง)
5. $(k+r)A=kA+rA$ (สมบัติการแจกแจง)
6. $k(rA)=(kr)A$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณด้วยสเกลาร์)

บทนิยาม 2.1.4 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{n,p}(\mathbb{R})$ เรานิยามการคูณของ A กับ B ดังนี้

$$AB=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]\in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

ในกรณีทั่วไป $AB\neq BA$

ตัวอย่าง 2.1.5 ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}4\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot 4+0\cdot 2+(-2)\cdot(-1)\\ 1\cdot 4+3\cdot 2+5\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 5\end{bmatrix}$$

แต่ BA ไม่สามารถนิยามได้ เนื่องจาก B มีขนาดเป็น 3×1 แต่ A มีขนาดเป็น 2×3 จะเห็นว่า จำนวนคอลัมน์ของเมทริกซ์ตัวตั้ง B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวคูณ A

ทฤษฎีบท 2.1.6 สำหรับทุกเมทริกซ์ A, B และ C ที่ทำให้การดำเนินการของเมทริกซ์ในแต่ละข้อนิยามดีแล้ว จะได้ว่า

1. $(AB)C=A(BC)$
2. $AI=I=IA$ เมื่อ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์
3. $A(B+C)=AB+AC$
4. $(A+B)C=AC+BC$
5. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ สำหรับทุก $k\in\mathbb{R}$
6. $A0=0=0A$

บทนิยาม 2.1.7 การสลับเปลี่ยน (Transpose)

เรานิยามการสลับเปลี่ยน (Transpose) ของ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ดังนี้

$$A^{T}=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

นั่นคือสมาชิกตำแหน่งของ (i,j) ของ A^{T} คือสมาชิกตำแหน่งของ (j,i) ของ A

ตัวอย่าง 2.1.8 ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 4 & 7 & 3\end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$B^T=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.1.9 สำหรับทุกเมทริกซ์ A, B ที่ทำให้การดำเนินการของเมทริกซ์ในแต่ละข้อนิยามดีแล้ว จะได้ว่า

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{R}$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

2.2 ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์จริง

บทนิยาม 2.2.1 สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ จะได้ว่า ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A\otimes B$ ซึ่งจะมีขนาดเท่ากับ $mp\times nq$ นิยามได้โดย

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}B & \cdots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 7 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 9\end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}2B & 4B\\ 5B & -1B\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \\ 5\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} & -1\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 4 & 10 & 12 & 8 & 20 & 24 \\ 14 & 8 & 4 & 28 & 16 & 8 \\ 6 & 2 & 18 & 12 & 4 & 36 \\ 10 & 25 & 30 & -2 & -5 & -6 \\ 35 & 20 & 10 & -7 & -4 & -2 \\ 15 & 5 & 45 & -3 & -1 & -9 \end{bmatrix}
$$

ทฤษฎีบท 2.2.3 สมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์

ให้ A, B, C, D เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย

1. $(\alpha A)\otimes B=\alpha(A\otimes B)=A\otimes(\alpha B)$ เมื่อ α เป็นค่าคงที่
2. $(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$
3. $A\otimes(B+C)=(A\otimes B)+(A\otimes C)$
4. $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$
5. $(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$
6. $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$

บทพิสูจน์

จากเอกสารอ้างอิง [4]

2.3 ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์จริง

บทนิยาม 2.3.1 ให้ $A\in M_{m,n}$ และ $B=[B_{kl}]\in M_{p,q}$ ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของ A และ B กำหนดโดย [2]

$$A\boxtimes B=[A\otimes B_{kl}]_{kl}\in M_{mp,nq}\quad \mathbb{R}$$

โดยที่ $A\otimes B_{kl}$ เป็นเมทริกซ์ย่อย kl ของขนาด $mp_k\times nq_l$ นั่นคือ $A\boxtimes B$ มีบล็อกที่ (k,l) เป็น $A\otimes B_{kl}$

<u>ข้อสังเกต</u> ในกรณีที่ B มี 1 บล็อก จะได้ว่า $A \boxtimes B = A \otimes B$

ตัวอย่าง 2.3.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ \hline d & e & f \end{array}\right]$

จะได้ว่า

$$A \boxtimes B = \begin{bmatrix} A \otimes [a \quad b] & A \otimes [c] \\ A \otimes [d \quad e] & A \otimes [f] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [a \quad b] & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [c] \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [d \quad e] & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [f] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1[a \quad b] & 2[a \quad b] & 1[c] & 2[c] \\ 3[a \quad b] & 4[a \quad b] & 3[c] & 4[c] \\ 1[d \quad e] & 2[d \quad e] & 1[f] & 2[f] \\ 3[d \quad e] & 4[d \quad e] & 3[f] & 4[f] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1a & 1b & 2a & 2b & 1c & 2c \\ 3a & 3b & 4a & 4b & 3c & 4c \\ 1d & 1e & 2d & 2e & 1f & 2f \\ 3d & 3e & 4d & 4e & 3f & 4f \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.3.3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \left[\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & e & f \end{array}\right]$

จะได้ว่า

$$A \boxtimes B = \begin{bmatrix} A \otimes [a] & A \otimes [b \quad c] \\ A \otimes [d] & A \otimes [e \quad f] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [a] & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [b \quad c] \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [d] & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes [e \quad f] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1[a] & 2[a] & 1[b \quad c] & 2[b \quad c] \\ 3[a] & 4[a] & 3[b \quad c] & 4[b \quad c] \\ 1[d] & 2[d] & 1[e \quad f] & 1[e \quad f] \\ 3[d] & 4[d] & 1[e \quad f] & 1[e \quad f] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1a & 2a & 1b & 1c & 2b & 2c \\ 3a & 4a & 3b & 3c & 4b & 4c \\ 1d & 2d & 1e & 1f & 2e & 2f \\ 3d & 4d & 3e & 3f & 4e & 4f \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.3.4 สมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก

1. $(A+B)\boxtimes C = A\boxtimes C + B\boxtimes C$
2. $A\boxtimes(B+C) = A\boxtimes B + A\boxtimes C$
3. $(A\boxtimes B)^T = A^T \boxtimes B^T$
4. $(A\boxtimes B)(C\boxtimes D) = AC\boxtimes BD$

บทพิสูจน์

1. $$\begin{aligned}(A+B)\boxtimes C &= [(A+B)\otimes C_{kl}]_{kl} \\ &= [A\otimes C_{kl} + B\otimes C_{kl}]_{kl} \\ &= [A\otimes C_{kl}]_{kl} + [B\otimes C_{kl}]_{kl} \\ &= A\boxtimes C + B\boxtimes C\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}A\boxtimes(B+C) &= [A\otimes(B+C)_{kl}]_{kl} \\ &= [A\otimes B_{kl} + A\otimes C_{kl}]_{kl} \\ &= [A\otimes B_{kl}]_{kl} + [A\otimes C_{kl}]_{kl} \\ &= A\boxtimes B + A\boxtimes C\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(A\boxtimes B)^T &= [A\otimes B_{kl}]_{kl}^T \\ &= [A^T \boxtimes B_{lk}^T]_{kl} \\ &= A^T \boxtimes B^T\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}(A\boxtimes B)(C\boxtimes B) &= [A\otimes B_{kl}]_{kl}[C\otimes D_{kl}]_{kl} \\ &= \left[(A\otimes I_q)(I_n\otimes B_{kl})\right]_{kl}\left[(C\otimes I_r)(I_p\otimes D_{kl})\right]_{kl} \\ &= \left[(A\otimes I_q)\ (I_n\otimes B_{kl})(C\otimes I_r)\ (I_p\otimes D_{kl})\right]_{kl} \\ &= \left[(A\otimes I_q)(C\otimes B_{kl})(I_p\otimes D_{kl})\right]_{kl} \\ &= \left[(A\otimes I_q)\left[(C\otimes I_q)(I_p\otimes B_{kl})\right](I_p\otimes D_{kl})\right]_{kl}\end{aligned}$$

$$=\left[\left[(A\otimes I_q)(C\otimes I_q)\right]\left[(I_p\otimes B_{kl})(I_p\otimes D_{kl})\right]\right]_{kl}$$

$$=\left[(AC\otimes I_q)(B_{kl}D_{kl}\otimes I_p)\right]_{kl}$$

$$=(AC\otimes B_{kl}D_{kl})_{kl}$$

$$=(AC\otimes BD_{kl})_{kl}$$

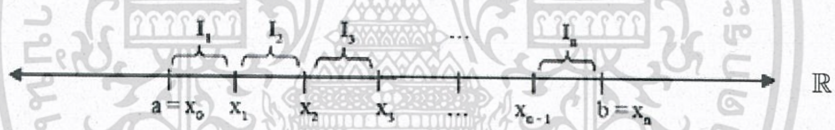
$$=AC\boxtimes BD$$

2.4 ปริพันธ์รีมันน์

(บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทในหัวข้อนี้ จะอ้างจากเอกสารอ้างอิง[2])

ผลแบ่งกั้นและผลแบ่งกั้นติดป้าย (Partitions and Tagged Partitions)

สำหรับช่วง $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ และ P เป็นผลแบ่งกั้น (partition) ของช่วง I ก็ต่อเมื่อ P เป็นเซตจำกัดของจุด $x_0,x_1,\ldots,x_n$ โดยที่ $a=x_0<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n$ จุดทั้งหลายของ $\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ ใช้เพื่อแบ่ง $I=[a,b]$ เป็นช่วงปิดย่อยที่ไม่ทับซ้อนกัน n ช่วง $I_1=[x_0,x_1]$, $I_2=[x_1,x_2],\ldots,I_n=[x_{n-1},x_n]$ ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ผลแบ่งกั้นของช่วง I

สำหรับช่วง $I=[a,b]$ และ $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I นอร์มของ P (norm) เขียนแทนด้วย $\|P\|$ ซึ่งกำหนดโดย

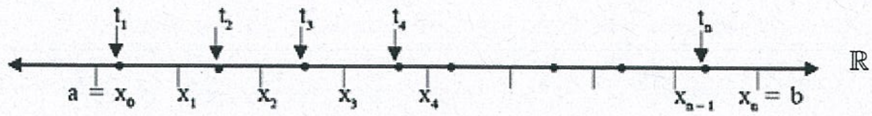
$$\|P\|=\sup\{x_i-x_{i-1}\,|\,i=1,2,\ldots,n\}$$

อาจจะกล่าวว่า $\|P\|$ คือ ความยาวของช่วงปิดย่อยที่ยาวที่สุดสำหรับผลแบ่งกั้น P

ถ้าจุด t_i เป็นจุดที่ถูกเลือกจากแต่ละช่วงย่อย $I_i=[x_{i-1},x_i]$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ แล้ว จุด t_i จะเรียกว่า ป้าย (tag) ของช่วงย่อย I_i และจะได้ว่า เซตของคู่อันดับ

$$\dot{P}:=\{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n}$$

ของช่วงย่อย และป้ายที่สอดคล้องกับช่วงย่อยนั้น เรียกว่า เซตแบ่งกั้นติดป้ายของ I ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 เซตแบ่งกั้นติดป้ายของ $[a,b]$

(จุดบน P เป็นตัวชี้ว่า ป้ายมีการเลือกสำหรับแต่ละช่วงย่อย)

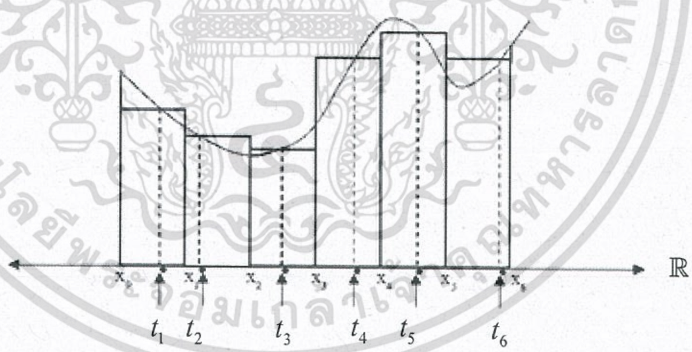
ป้ายสามารถถูกเลือกได้ในทุกๆ รูปแบบ เช่น สามารถเลือกป้ายเป็นจุดปลายสุดทางซ้าย หรือปลายสุดทางขวา หรือ จุดกึ่งกลางของช่วงย่อย หรืออื่นๆ จะสังเกตว่า จุดขอบของช่วงย่อยสามารถเป็นป้ายให้กับช่วงย่อยทั้งสองช่วง

ถ้า $\dot{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นติดป้าย จะนิยามผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) ของฟังก์ชัน $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ที่สมนัยกับ $\dot{P}$ คือ

$$S(f;\dot{P})=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

จะใช้สัญลักษณ์เช่นเดียวกัน เมื่อ $\dot{P}$ แทนเซตย่อยของผลแบ่งกั้น และไม่เป็นผลแบ่งกั้นทั้งหมด

ถ้าฟังก์ชัน f เป็นจำนวนบวกบน $[a,b]$ แล้วผลบวกรีมันน์เป็นผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก n รูป ซึ่งมีฐานเป็นช่วงย่อย $I_i=[x_{i-1},x_i]$ และความสูงคือ $f(t_i)$ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ผลบวกรีมันน์ $S(f;\dot{P})=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$

บทนิยาม 2.4.1 สำหรับ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ f สามารถหาปริพันธ์รีมันน์ได้ (Riemann integrable) บน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวน $L\in\mathbb{R}$ ที่ทำให้ สำหรับทุกๆ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta_\varepsilon>0$ ที่ทำให้

ถ้า $\dot{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นติดป้ายของ $[a,b]$ ถ้า $\|P\|<\delta_\varepsilon$ แล้ว

$$\left|S(f;\dot{P})-L\right|<\varepsilon$$

เราจะเรียกจำนวน L นี้ว่า ปริพันธ์รีมันน์ของ f เหนือ $[a,b]$ และเขียนแทน L ด้วย

$$L = \int_a^b f \text{ หรือ } \int_a^b f(x)dx$$

เราสามารถใช้ตัวอักษรอื่นๆ แทน x ได้ ตราบใดที่ค่าของปริพันธ์ยังคงเดิม

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ แล้วค่าของปริพันธ์จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.4.2 สมมติให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ แล้ว

1. ถ้า $k \in \mathbb{R}$ แล้วฟังก์ชัน kf จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้และจะได้ว่า

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f$$

2. ฟังก์ชัน $f+g$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ และจะได้ว่า

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

ถ้า $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง แล้ว f จะหาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ ใดๆ

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ และ $c \in (a,b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,c]$ และ $[c,b]$ นั่นคือ

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

ทฤษฎีบท 2.4.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus) สมมติว่าฟังก์ชัน $f, F:[a,b] \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. F ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$
2. $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ใน $[a,b]$ ยกเว้นได้อย่างมากจำนวนจำกัดจุด
3. f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$

จะได้ว่า

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

ทฤษฎีบท 2.4.5 ทฤษฎีบทการแทนค่า (Substitution Theorem)

สมมติว่า $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ มีอนุพันธ์ต่อเนื่องบน $[a,b]$

ถ้า $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ ต่อเนื่องบน $[c,d]$ และ $\varphi([a,b]\subseteq[c,d])$ แล้ว

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi^{'}(t)dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

ทฤษฎีบท 2.4.6 การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (Integration by Parts)

ให้ U และ V เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และให้ $u:=U^{'}$ และ $v:=V^{'}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b uV=UV\Big|_a^b-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} Uv$$

ฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ (Absolutely Integrable functions)

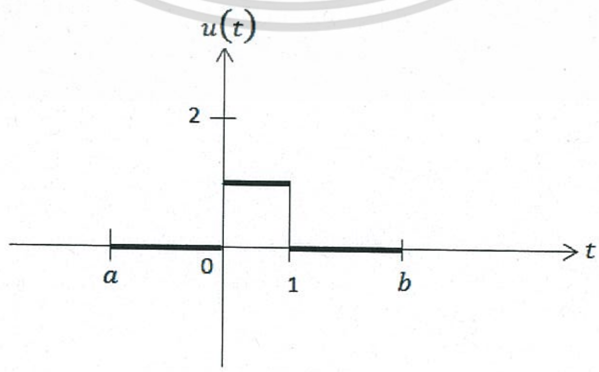
ฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ คือ ฟังก์ชันที่ค่าสัมบูรณ์ของฟังก์ชันสามารถหาปริพันธ์ได้

บทนิยาม 2.4.7 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ (Absolutely Integrable) ก็ต่อเมื่อ

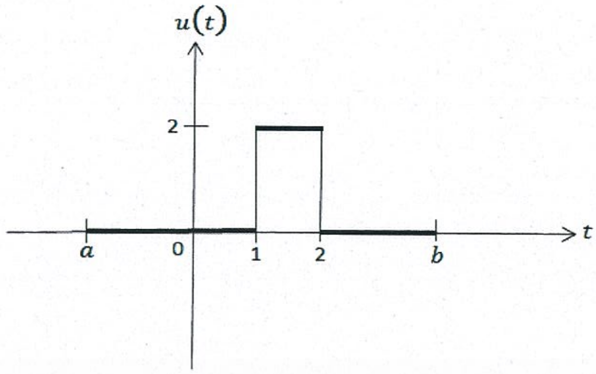
$$\int_a^b |f(x)|dx<\infty$$

ตัวอย่างที่สำคัญของฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ ได้แก่ ฟังก์ชัน $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนแต่ละช่วงย่อยของ $[a,b]$ สำหรับบางการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยจำนวนจำกัดช่วง

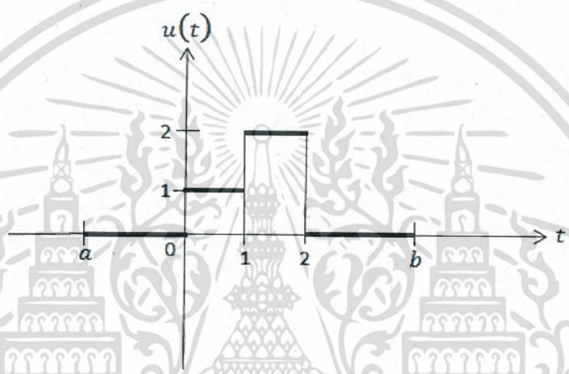
ตัวอย่าง 2.4.8 ฟังก์ชันต่อไปนี้หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้บนช่วง $[a,b]$ สำหรับทุก $a<b$



รูปที่ 2.4 กราฟ $u(t)-u(t-1)$



รูปที่ 2.5 กราฟ $2u(t)-2u(t-2)$



รูปที่ 2.6 กราฟ $u(t)+u(t-1)-2u(t-2)$

2.5 คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าจริง

บทนิยาม 2.5.1 คอนโวลูชัน (Convolution)

ให้ $f,g:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ คอนโวลูชันของ f และ g เป็นฟังก์ชันใหม่ เขียนแทนด้วย $f*g$ นิยามโดย

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

สำหรับทุกๆ t ที่อยู่ในช่วง $[0,b]$

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้ $f(t)=\cos xt$ และ $g(t)=e^{yt}$ เมื่อ x,y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0

$$(f*g)(t)=\int_0^t(\cos x\tau)e^{y(t-\tau)}d\tau$$

$$=\int_0^t(\cos x\tau)e^{yt-y\tau}d\tau$$

$$= e^{yt}\int_0^t (\cos x\tau)e^{-y\tau}d\tau$$

$$= e^{yt}\left(\frac{e^{-y\tau}}{x}(\sin a\tau) - \frac{be^{-y\tau}}{x^2}(\cos x\tau) - \int \frac{y^2e^{-y\tau}}{x^2}(\cos x\tau)d\tau\right)$$

จะได้

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\int (\cos x\tau)e^{y(t-\tau)}d\tau = \frac{e^{y(t-\tau)}}{x}(\sin a\tau) - \frac{be^{y(t-\tau)}}{x^2}(\cos x\tau)$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)\int (\cos x\tau)e^{y(t-\tau)}d\tau = \frac{e^{y(t-\tau)}}{x}(\sin x\tau) - \frac{be^{y(t-\tau)}}{x^2}(\cos x\tau)$$

ดังนั้น

$$\int (\cos x\tau)e^{y(t-\tau)}d\tau = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{e^{y(t-\tau)}}{x}(\sin x\tau) - \frac{ye^{y(t-\tau)}}{x^2}(\cos x\tau)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(xe^{y(t-\tau)}(\sin x\tau) - ye^{y(t-\tau)}(\cos x\tau))$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^t (\cos x\tau)e^{y\,t-\tau}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(xe^{y(t-\tau)}(\sin x\tau) - ye^{y(t-\tau)}(\cos x\tau))\Big|_0^t$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)((xe^{y(t-t)}(\sin xt) - ye^{y(t-t)}(\cos xt)) - (xe^{y(t-0)}(\sin x(0)) - ye^{y(t-0)}(\cos x(0)))$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(x\sin xt - y\cos xt + ye^{yt})$$

$$= \left(\frac{x\sin xt - y\cos xt + ye^{yt}}{x^2+y^2}\right)$$

ตัวอย่าง 2.5.3 ให้ $f(t) = \sin yt$ และ $g(t) = e^{xt}$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0

$$(f * g)(t) = \int_0^t (\sin y\tau)e^{x(t-\tau)}d\tau$$

$$= \int_0^t (\sin y\tau)e^{xt-x\tau}d\tau$$

$$= e^{xt}\int_0^t (\cos y\tau)e^{-x\tau}d\tau$$

$$= e^{xt}\left(-\left(\frac{e^{-x\tau}}{y}\right)(\cos y\tau) - \frac{xe^{-x\tau}}{y^2} \quad (\sin y\tau) - \int \frac{x^2 e^{-y\tau}}{y^2}(\sin x\tau)d\tau\right)$$

จะได้

$$\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\int (\sin x\tau)e^{x(t-\tau)}d\tau = -\left(\frac{e^{x(t-\tau)}}{y}\right)(\cos y\tau) - \frac{xe^{x(t-\tau)}}{y^2}(\sin y\tau)$$

$$\left(\frac{y^2+x^2}{y^2}\right)\int (\sin x\tau)e^{x(t-\tau)}d\tau = -\left(\frac{e^{x(t-\tau)}}{y}\right)(\cos y\tau) - \frac{xe^{x(t-\tau)}}{y^2}(\sin y\tau)$$

ดังนั้น

$$\int (\sin x\tau)e^{x(t-\tau)}d\tau = \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{e^{x(t-\tau)}}{y}\right)(\cos y\tau) - \frac{xe^{x(t-\tau)}}{y^2}(\sin y\tau)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(-ye^{x(t-\tau)}(\cos y\tau))(-xe^{x(t-\tau)}(\sin y\tau))$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^t (\sin y\tau)e^{x(t-\tau)}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(-ye^{x(t-\tau)}(\cos y\tau) - xe^{x(t-\tau)}(\sin y\tau))\Big|_0^t$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)((-ye^{x(t-t)}(\cos yt) - xe^{x(t-t)}(\sin yt)) - (-ye^{x(t-0)}(\cos y(0)) - xe^{x(t-0)}(\sin y(0))))$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(ye^{xt} - y\cos yt - x\sin yt)$$

$$= \frac{ye^{xt} - y\cos yt - x\sin yt}{x^2+y^2}$$

คอนโวลูชันของฟังก์ชันพื้นฐานที่สำคัญแสดงในตารางที่ 2.1 ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน

$f(t)$	$g(t)$	$(f*g)(t)$
t^r	t^s	$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\frac{t^{r+s+1}}{i+s+1}$;$r,s\in\mathbb{N}$
e^{xt}	e^{yt}	$\frac{e^{xt}-e^{yt}}{x-y}$;$x\neq y$
$\sin xt$	e^{yt}	$\frac{xe^{yt}-x\cos(xt)-y\sin(xt)}{x^2+y^2}$
	$\sin yt$	$\frac{-y\sin(xt)+x\sin(yt)}{x^2-y^2}$;$x\neq\pm y$
		$\frac{-xt\cos(xt)+xt\cos(xt)}{2x}$;$x=y$
	$\cos yt$	$\frac{x(-\cos(xt)+\cos(yt))}{x^2-y^2}$;$x\neq\pm y$
		$\frac{1}{2}t\sin(xt)$;$x=y$
$\cos xt$	e^{yt}	$\frac{ye^{yt}-y\cos(xt)+x\sin(xt)}{x^2+y^2}$
	$\sin yt$	$\frac{y(\cos(xt)-\cos(yt))}{y^2-x^2}$;$x\neq\pm y$
		$\frac{1}{2}t\sin(xt)$;$x=y$
	$\cos yt$	$\frac{x\sin(xt)-y\sin(xt)}{x^2-y^2}$;$x\neq\pm y$
		$\frac{xt\cos(xt)-\sin(xt)}{2x}$;$x=y$

ตารางที่ 2.1 แสดงตัวอย่างการคอนโวลูชัน

ทฤษฎีบท 2.5.4 สมบัติของคอนโวลูชัน (The properties of Convolution)

ให้ $f,g,s:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ และ α เป็นค่าคงที่ใดๆ

1. $(f*g)(t)=(g*f)(t)$ (สมบัติการสลับที่)

2. $[f*(g*s)](t)=[(f*g)*s](t)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)

3. $[f*(g+s)](t)=(f*g)(t)+(f*s)(t)$ (สมบัติการแจกแจง)

4. $[\alpha(f*g)](t)=[(\alpha f)*g](t)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มกับค่าคงที่)

บทพิสูจน์

1. สมบัติการสลับที่

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

ให้ $\rho=t-\tau$ จะได้ว่า $\tau=t-\rho$ และ $d\tau=-d\rho$

จะได้ว่า

$$(f*g)(t)=-\int_0^t f(t-\rho)g(\rho)d\rho$$

$$=\int_0^t g(\rho)f(t-\tau)f(t-\rho)d\rho$$

$$=(g*f)(t)$$

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

จะได้ว่า

$$[f*(g*s)](t)=\left[\int_0^t f(\tau_{fg})g(t-\tau_{fg})d\tau_{fg}\right]*s(t)$$

$$=\int_0^t\left[\int_0^t f(\tau_{fg})g(\tau_{gs}-\tau_{fg})d\tau_{fg}\right]h(t-\tau_{gs})d\tau_{gs}$$

$$=\int_0^t\int_0^t f(\tau_{fg})g(\tau_{gs}-\tau_{fg})h(t-\tau_{gs})d\tau_{fg}d\tau_{gs}$$

$$=\int_0^t f(\tau_{fg})\int_0^t g(\tau_{gs}-\tau_{fg})h(t-\tau_{gs})d\tau_{gs}d\tau_{fg}$$

ให้ $\tau_{gs} = \tau_{gs} + \tau_{fg}$ จะได้ $d(\tau_{gs} + \tau_{fg}) = d\tau_{gs}$

$$[(f*g)*s](t) = \int_0^t f(\tau_{fg}) \int_0^t g(\tau_{gs} + \tau_{fg}) h(t - (\tau_{gs} + \tau_{fg})) d\tau_{gs} d\tau_{fg}$$

$$= \int_0^t f(\tau_{fg}) \int_0^t g(\tau_{gs}) h((t - \tau_{fg}) - \tau_{gs}) d\tau_{gs} d\tau_{fg}$$

$$= \int_0^t f(\tau_{fg})(g*s)(t - \tau_{fg}) d\tau_{fg}$$

$$= [f*(g*s)](t)$$

3. สมบัติการแจกแจง

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$

จะได้ว่า

$$[f*(g+s)](t) = \int_0^t f(\tau)\ g(t-\tau) + s(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) s(t-\tau) d\tau$$

$$= (f*g)(t) + (f*s)(t)$$

4. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มกับค่าคงที่

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$

จะได้ว่า

$$[\alpha(f*g)](t) = \alpha \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_o^t (\alpha f(\tau)) g(t-\tau) d\tau$$

$$= [(\alpha f)*g](t)$$

บทที่ 3
ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และผลคูณคอนโวลูชัน

3.1 พีชคณิตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $X \neq \varnothing$ เราเรียกฟังก์ชัน $A : X \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ ว่าฟังก์ชันค่าเมทริกซ์บน X สำหรับแต่ละ $t \in X$ จะสามารถเขียนได้ว่า

$$A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

โดยที่ $a_{ij} : X \to \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 3.1.2 ตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ ที่นิยามบน $X = (0, \infty)$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & t^2 - 1 & e^{2t} \\ \dfrac{t}{2} & \sin 2t & 5t \\ \log t & \dfrac{1}{t} & t^2 \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 5 - t \\ t^3 + 2t & \sin t \\ e^{2t+1} & \dfrac{2t}{5} \end{bmatrix}$$

$$C(x) = \begin{bmatrix} \cos^2 x & 7x + 4 & \ln x \end{bmatrix} \qquad D(x) = \begin{bmatrix} 3x^2 & e^{5x} \\ \sin x & \log x \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 3.1.3 การบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A : X \to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$ และ $B : X \to M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]$

การบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ นิยามโดย

$$A(t) + B(t) = (A + B)(t) = \left[a_{ij}(t) + b_{ij}(t)\right]$$

ตัวอย่าง 3.1.4 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix}\cos t & t^2-1 & e^{2t}\\ \dfrac{t}{2} & \sin 2t & 5t\\ \log t & \dfrac{1}{t} & t^2\end{bmatrix}$ และ $B(t)=\begin{bmatrix}\sin t & 5-t & t^3+2t\\ \dfrac{2t}{5} & e^{2t+1} & -9t\\ 7t & \cos 2t & 3t^2\end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$A(t)+B(t)=\begin{bmatrix}\cos t+\sin t & (t^2+1)+(5-t) & e^{2t}+(t^3+2t)\\ \dfrac{t}{2}+\dfrac{2t}{5} & \sin 2t+e^{2t+1} & 5t+(-9t)\\ (\log t)+7t & \dfrac{1}{t}+\cos 2t & t^2+3t^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t+\sin t & t^2-t+4 & t^3+e^{2t}+2t\\ \dfrac{9t}{10} & e^{2t+1}+\sin 2t & -4t\\ \log t+7t & \dfrac{1}{t}+\cos 2t & 4t^2\end{bmatrix}$$

บทนิยาม 3.1.5 การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A:X\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ และ $\varphi:X\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันนิยามโดย

$$\varphi(t)A(t)=\left[\varphi(t)a_{ij}(t)\right]$$

ตัวอย่าง 3.1.6 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix}\cos t & t^2-1 & e^{2t}\\ \dfrac{t}{2} & \sin 2t & 5t\\ \log t & \dfrac{1}{t} & t^2\end{bmatrix}$ และ $\varphi(t)=2t^2$

จะได้ว่า

$$\varphi(t)A(t)=\begin{bmatrix}2t^2(\cos t) & 2t^2(t^2-1) & 2t^2(e^{2t})\\ 2t^2\left(\dfrac{t}{2}\right) & 2t^2(\sin 2t) & 2t^2(5t)\\ 2t^2(\log t) & 2t^2\left(\dfrac{1}{t}\right) & 2t^2(t^2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2t^2\cos t & 2t^4 - 2t^2 & 2t^2e^{2t} \\ t^3 & 2t^2\sin 2t & 10t^3 \\ 2t^2\log t & 2t & 2t^4 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.1.7 สมบัติของการบวกและการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A,B,C : X \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ และให้ $\delta,\varphi : X \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ แล้ว

1. $A(t)+B(t)=B(t)+A(t)$

2. $(A(t)+B(t))+C(t)=A(t)\ \ t\ \ +(B(t)+C(t))$

3. $A(t)+0=A(t)$

4. $\delta(t)(A(t)+B(t))=\delta(t)A(t)+\delta(t)B(t)$

5. $(\delta(t)+\varphi(t))A(t)=\delta(t)A(t)+\varphi(t)A(t)$

6. $\delta(t)(\varphi(t)A(t))=(\delta(t)\varphi(t))A(t)$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right], B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]$

1. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A(t)+B(t) &= \left[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right] \\ &= \left[b_{ij}(t)+a_{ij}(t)\right] \\ &= B(t)+A(t) \end{aligned}$$

2. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (A(t)+B(t))+C(t) &= \left[(a_{ij}(t)+b_{ij}(t))+c_{ij}(t)\right] \\ &= a_{ij}(t)+(b_{ij}(t)+c_{ij}(t)) \\ &= A(t)+(B(t)+C(t)) \end{aligned}$$

3. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

จะได้ว่า

$$A(t)+0=\left[(a_{ij}+0)\right]=\left[a_{ij}(t)\right]=A(t)$$

4. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta(t)(A(t)+B(t)) &= \delta(t)\left[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right]\\ &= \left[\delta(t)a_{ij}(t)+\delta(t)b_{ij}(t)\right]\\ &= \delta(t)A(t)+\delta(t)B(t)\end{aligned}$$

5. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\delta(t)+\varphi(t))A(t) &= (\delta(t)+\varphi(t))\left[a_{ij}(t)\right]\\ &= \delta(t)a_{ij}(t)+\varphi(t)a_{ij}(t)\\ &= \delta(t)A(t)+\varphi(t)A(t)\end{aligned}$$

6. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta(t)(\varphi(t)A(t)) &= \left[\delta(t)(\varphi(t)a_{ij}(t))\right]\\ &= \left[(\delta(t)\varphi(t))a_{ij}(t)\right]\\ &= (\delta(t)\varphi(t))\left[a_{ij}(t)\right]\\ &= (\delta(t)\varphi(t))(A(t))\end{aligned}$$

บทนิยาม 3.1.8 การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A:X\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ และ $B:X\to M_{n,p}(\mathbb{R}), B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]$

การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ นิยามโดย

$$A(t)B(t)=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right]\in M_{m,p}$$

ตัวอย่าง 3.1.9 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} \cos t & t^2-1 & e^{2t} \\ \dfrac{t}{2} & -6t^{-2} & 5t \\ 4 & \dfrac{1}{t} & t^2 \end{bmatrix}$ และ $B(t)=\begin{bmatrix} 4t^2 & \sin t \\ t^3+2t & -t \\ e^{-t} & 2t \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$A(t)B(t)=\begin{bmatrix} (\cos t)(4t^2)+(t^2-1)(t^3+2t)+(e^{2t})(e^{-t}) & (\cos t)(\sin t)+(t^2-1)(-t)+(e^{2t})(2t) \\ \left(\dfrac{t}{2}\right)(4t^2)+(-6t^{-2})(t^3+2t)+(5t)(e^{-t}) & \left(\dfrac{t}{2}\right)(\sin t)+(-6t^{-2})(-t)+(5t)(2t) \\ (4)(4t^2)+\left(\dfrac{1}{t}\right)(t^3+2t)+(t)(e^{-t}) & (4)(\sin t)+\left(\dfrac{1}{t}\right)(-t)+(t)(2t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t^5+t^3-2t+e^t+4t^2\cos t & -t^3+(1+2e^{2t})t+\cos t\sin t \\ 2t^3-6t-12t^{-1}5te^{-t} & 10t^2+6t^{-1}+\dfrac{t\sin t}{2} \\ 17t^2+te^{-t}+2 & 2t^2-1+4\sin t \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.1.10 สมบัติของการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A(t), B(t)$ และ $C(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่มีขนาดสอดคล้องกับการบวกและการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ แล้ว

1. $A(t)[B(t)+C(t)]=[A(t)B(t)]+[A(t)C(t)]$

2. $[B(t)+C(t)]A(t)=[B(t)A(t)]+[C(t)A(t)]$

3. $A(t)[B(t)C(t)]=[A(t)B(t)]C(t)$

4. $\delta(t)(A(t)B(t))=(\delta(t)A(t))B(t)=A(t)(\delta(t)B(t))$ เมื่อ $\delta(t)$ คือ ฟังก์ชันใดๆ

5. $I_m A(t)=A(t)=A(t)I_n$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]_{n,p}$

โดยนิยามการคูณและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

จะได้ว่า

$$A(t)[B(t)+C(t)]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)(b_{kj}(t)+c_{kj}(t))\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t) + a_{ik}(t)c_{kj}(t)\right]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)c_{kj}(t)\right]$$
$$= [A(t)B(t)] + [A(t)C(t)]$$

2. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]_{q,m}$ และ $C(t) = \left[c_{ij}(t)\right]_{q,m}$ โดยนิยามการคูณและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$[B(t)+C(t)]A(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} (b_{ik}(t) + c_{ik}(t))a_{kj}(t)\right]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)a_{kj}(t) + c_{ik}(t)a_{kj}(t)\right]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)a_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(t)a_{kj}(t)\right]$$
$$= [B(t)A(t)] + [C(t)A(t)]$$

3. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$ และ $C(t) = \left[c_{ij}(t)\right]_{p,q}$ โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$A(t)[B(t)C(t)] = A(t)\left[\sum_{k=1}^{n} b_{kj}(t)c_{kj}(t)\right]$$
$$= \left[\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{iq}(t)b_{qk}(t)c_{kj}(t)\right]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)b_{qk}(t)c_{kj}(t)\right]$$
$$= \left[\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)b_{qk}(t)\right]C(t)$$
$$= [A(t)B(t)]C(t)$$

4. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$ และ $\delta(t)$ คือ ฟังก์ชันใดๆ โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน จะได้ว่า

$$\delta(t)(A(t)B(t)) = \delta(t)\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} (\delta(t) a_{ik}(t)) b_{kj}(t) \right]$$
$$= (\delta(t) A(t)) B(t)$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) (\delta(t) b_{kj}(t)) \right]$$
$$= A(t)(\delta(t) B(t))$$

5. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t) \right]_{m,n}$, $I_m = \left[i_{ij} \right]_m$ และ $I_n = \left[i_{ij} \right]_n$ เมื่อ i_{ij} มีค่าเป็น 0 เมื่อ $i \neq j$ และมีค่าเป็น 1 เมื่อ $i = j$ และโดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

จะได้ว่า

$$I_m A(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} i_{ik} a_{kj}(t) \right] = \left[a_{ij}(t) \right] = A(t)$$

$$A(t) I_n = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(t) i_{kl} \right] = \left[a_{ij}(t) \right] = A(t)$$

ดังนั้น $I_m A(t) = A(t) = A(t) I_n$

บทนิยาม 3.1.11 ฟังชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

โดย $A : X \to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t) = \left[a_{ij}(t) \right]$ ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ $A(t)$ เขียนแทนด้วย $A^T(t)$ นิยามโดย

$$A^T(t) = \left[a_{ij}(t) \right]_{m,n}$$

ตัวอย่าง 3.1.12 ให้ $A(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 5-t \\ t^3 + 2t & \sin t \\ e^{2t+1} & \dfrac{2t}{5} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$A^T(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & t^3 + 2t & e^{2t+1} \\ 5-t & \sin t & \dfrac{2t}{5} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.1.13 สมบัติของฟังชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

ให้ $A: X \to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$ และ $B: X \to M_{n,p}(\mathbb{R}), B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดสอดคล้องกับการบวกและการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ แล้ว

1. $(A^T(t))^T = A(t)$

2. $(A(t) + B(t))^T = A^T(t) + B^T(t)$

3. $(A(t)B(t))^T = B^T(t)A^T(t)$

4. $(\delta(t)B(t))^T = \delta(t)A^T(t)$ เมื่อ $\delta(t)$ คือ ฟังก์ชันใดๆ

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$

โดยนิยามของฟังชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
จะได้ว่า

$$(A^T(t))^T = (a_{ij}(t))^T = \left[a_{ij}(t)\right] = A(t)$$

2. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$ และ $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]_{m,n}$

โดยนิยามการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และฟังชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A(t) + B(t))^T &= \left[a_{ij}(t) + b_{ij}(t)\right]^T \\ &= \left[a_{ji}(t) + b_{ji}(t)\right] \\ &= A^T(t) + B^T(t)\end{aligned}$$

3. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$ และ $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$

โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และฟังชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A(t)B(t))^T &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right]^T \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ki}(t)b_{jk}(t)\right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} b_{jk}(t)a_{ki}(t)\right] \\ &= B^T(t)A^T(t)\end{aligned}$$

4. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$ และ $\delta(t)$ คือฟังก์ชันใดๆ

โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และฟังชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
จะได้ว่า

$$(\delta(t)A(t))^T=\left[\delta(t)a_{ij}(t)\right]^T=\left[\delta(t)a_{ji}(t)\right]=\delta(t)A^T(t)$$

3.2 ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

บทนิยาม 3.2.1 เรากล่าวว่าฟังก์ชัน $A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ ก็ต่อเมื่อ a_{ij} หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ สำหรับแต่ละ i, j

ตัวอย่าง 3.2.2 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ต่อไปนี้หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้บน $[0,2]$

$$A\;\;t=\begin{bmatrix} u(t)-2u(t-1) & 2u(t)e^t \\ 2\sin t & t^2+1 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 3.2.3 การคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันค่าจริง

ให้ $A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ และ $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ การคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันค่าจริง นิยามโดย

$$f(t)*A(t)=\left[f(t)*a_{ij}(t)\right]=\left[\int_0^t f(\tau)a_{ij}(t-\tau)d\tau\right]$$

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ $f(t)=t$ และ $A(t)=\begin{bmatrix} \sin t & e^t \\ \cos t & t^4 \\ t^3 & t+1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$f(t)*A(t)=\begin{bmatrix} t*\sin t & t*e^t \\ t*\cos t & t*t^4 \\ t*t^3 & t*(t+1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t-\sin t & e^t-t-1 \\ 1-\cos t & \dfrac{t^6}{30} \\ \dfrac{t^5}{20} & \dfrac{t^3}{6}+\dfrac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.2.5 ([5]) สมบัติของการบวกและการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A,B:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $\delta,\varphi:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ แล้ว สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ จะได้

1. $\delta(t)*(A(t)+B(t))=\delta(t)*A(t)+\delta(t)*B(t)$
2. $(\delta(t)+\varphi(t))*A(t)=\delta(t)*A(t)+\varphi(t)*A(t)$
3. $\delta(t)*(\varphi(t)*A(t))=(\delta(t)*\varphi(t))*A(t)$

บทพิสูจน์

1. โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน และสมบัติการแจกแจงของคอนโวลูชัน
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta(t)*(A(t)+B(t))&=\delta(t)*\left[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right]\\&=\left[\delta(t)*a_{ij}(t)+\delta(t)*b_{ij}(t)\right]\\&=\delta(t)*A(t)+\delta(t)*B(t)\end{aligned}$$

2. โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน และสมบัติการแจกแจงของคอนโวลูชัน
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\delta(t)+\varphi(t))*A(t)&=(\delta(t)+\varphi(t))*\left[a_{ij}(t)\right]\\&=\left[\delta(t)*a_{ij}(t)+\varphi(t)*a_{ij}(t)\right]\\&=\delta(t)*A(t)+\varphi(t)*A(t)\end{aligned}$$

3. โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน และสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของคอนโวลูชัน
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta(t)*(\varphi(t)*A(t))&=\delta(t)*\left[\varphi(t)*a_{ij}(t)\right]\\&=\left[\delta(t)*(\varphi(t)*a_{ij}(t))\right]\\&=\left[(\delta(t)*\varphi(t))*a_{ij}(t)\right]\\&=(\delta(t)*\varphi(t))*\left[a_{ij}(t)\right]\\&=(\delta(t)*\varphi(t))*A(t)\end{aligned}$$

บทนิยาม 3.2.6 การคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A:[0,b]\rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ และ $B:[0,b]\rightarrow M_{n,p}(\mathbb{R}), B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ ผลคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ นิยามโดย

$$\begin{aligned} A(t)*B(t) &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)\right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}\int_0^t a_{ik}(\tau)*b_{kj}(t-\tau)d\tau\right] \in M_{m,p}^{I} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.2.7 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix}2t\\ e^t\end{bmatrix}$, $B(t)=\begin{bmatrix}\sin t & e^t & \cos t\end{bmatrix}$ และ $C(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ 5t\\ \sin t\end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A(t)*B(t) &= \begin{bmatrix} 2t*\sin t & 2t*e^t & 2t*\cos t \\ e^t*\sin t & e^t*e^t & e^t*\cos t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2t-2\sin t & 2e^t-2t-2 & 2-2\cos t \\ \dfrac{e^t-\cos t-\sin t}{2} & te^t & \dfrac{e^t-\cos t+\sin t}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

แต่ $A(t)*C(t)$ ไม่สามารถนิยามได้ เนื่องจากจำนวนคอลัมน์ของ $A(t)$ ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ $C(t)$

ทฤษฎีบท 3.2.8 ([5]) สมบัติของการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A,B,C:[0,b]\rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$

1. $A(t)*[B(t)+C(t)]=[A(t)*B(t)]+[A(t)*C(t)]$
2. $[B(t)+C(t)]*A(t)=[B(t)*A(t)]+[C(t)*A(t)]$
3. $A(t)*[B(t)*C(t)]=[A(t)*B(t)]*C(t)$
4. $\delta(t)*(A(t)*B(t))=(\delta(t)*A(t))*B(t)=A(t)*(\delta(t)*B(t))$
   เมื่อ $\delta:[0,b]\rightarrow\mathbb{R}$ คือ ฟังก์ชันใดๆ ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]_{n,p}$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A(t)* B(t)+C(t) &=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*(b_{kj}(t)+c_{kj}(t))\right] \\
&=\left[\sum_{k=1}^{n}\{a_{ik}(t)*b_{kj}(t)+a_{ik}(t)*c_{kj}(t)\}\right] \\
&=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*c_{kj}(t)\right] \\
&=[A(t)*B(t)]+[A(t)*C(t)]
\end{aligned}$$

2. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]_{p,m}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]_{p,m}$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
[B(t)+C(t)]*A(t) &=\left[\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}(t)+c_{ik}(t))*a_{kj}(t)\right] \\
&=\left[\sum_{k=1}^{n}\{b_{ik}(t)*a_{kj}(t)+c_{ik}(t)*a_{kj}(t)\}\right] \\
&=\left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)*a_{kj}(t)+\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(t)*a_{kj}(t)\right] \\
&=[B(t)*A(t)]+[C(t)*A(t)]
\end{aligned}$$

3. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]_{p,q}$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A(t)*[B(t)*C(t)] &= A(t)*\left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)*c_{kj}(t)\right] \\
&=\left[\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{iq}(t)*b_{qk}(t)*c_{kj}(t)\right] \\
&=\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)*b_{qk}(t)*c_{kj}(t)\right] \\
&=\left[\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)*b_{qk}(t)\right]*C(t) \\
&=[A(t)*B(t)]*C(t)
\end{aligned}$$

4. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$ และ $\delta(t)$ คือ ฟังก์ชันใดๆ

โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\delta(t)*(A(t)*B(t)) &= \delta(t)*\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} (\delta(t)*a_{ik}(t))*b_{kj}(t)\right] \\
&= (\delta(t)*A(t))*B(t) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*(\delta(t)*b_{kj}(t))\right] \\
&= A(t)*(\delta(t)*B(t))
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.9 ([5]) สมบัติของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนกับการคูณคอนโวลูชัน

ให้ $A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ และ $B:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ซึ่งมีขนาดสอดคล้องกับการบวกและการคูณคอนโวลูชัน และให้ $\delta:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ จะได้ว่า

1. $(A(t)*B(t))^T = B^T(t)*A^T(t)$
2. $(\delta(t)*A(t))^T = \delta(t)*A^T(t)$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$ และ $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]_{n,p}$

โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(A(t)*B(t))^T &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)\right]^T \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ki}(t)*b_{jk}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} b_{jk}(t)*a_{ki}(t)\right] \\
&= B^T(t)*A^T(t)
\end{aligned}$$

2. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{m,n}$ และ $\delta(t)$ คือฟังก์ชันใดๆ

โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\delta(t)*A(t))^T &= \left[\delta(t)*a_{ij}(t)\right]^T \\ &= \left[\delta(t)*a_{ji}(t)\right] \\ &= \delta(t)*A^T(t)\end{aligned}$$

3.3 ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์ของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

บทนิยาม 3.3.1 ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์ของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

ให้ $A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ และ $B:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ คอนโวลูชันผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A(t)\tilde{\otimes}B(t)=\left[a_{ij}(t)*B(t)\right]_{ij}\in M_{mp,nq}\ \mathbb{R}$$

สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$

ตัวอย่าง 3.3.2 กำหนดให้ $A(t)=\begin{bmatrix}5\\ e^t\\ t+1\end{bmatrix}$ และ $B(t)=[\sin t \quad t]$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}A(t)\tilde{\otimes}B(t) &= A(t)\tilde{\otimes}[\sin t \quad t] \\ &= \begin{bmatrix}5\\ e^t\\ t+1\end{bmatrix}\tilde{\otimes}[\sin t \quad t] \\ &= \begin{bmatrix}5*[\sin t \quad t]\\ e^t*[\sin t \quad t]\\ (t+1)*[\sin t \quad t]\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}5*\sin t & 5*t\\ e^t*\sin t & e^t*t\\ (t+1)*\sin t & (t+1)*t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\sin t + 5\cos t & 5\frac{t^2}{2} \\ \frac{e^t - \cos t - \sin t}{2} & e^t - t - 1 \\ t - \cos t - \sin t + 1 & \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.3.3 กำหนดให้ $A(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ t \\ e^t \end{bmatrix}$ และ $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$A(t) \tilde{\otimes} B(t) = A(t) \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin t \\ t \\ e^t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin t * \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix} \\ t * \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix} \\ e^t * \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\sin t * e^t) + (\sin t * t) \\ (t * e^t) + (t * t) \\ (e^t * e^t) + (e^t * t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^t - \cos t - \sin t}{2} + (t - \sin t) \\ (e^t - t - 1) + \frac{t^3}{6} \\ (e^t t) + (e^t - t - 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - \cos t - 2\sin t + 2t \\ \frac{6e^t + t^3 - 6t - 6}{6} \\ e^t t + e^t - t - 1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.3.4 ([5]) ให้ A, B, C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้บน $[0,b]$ โดย $A(t), B(t), C(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่สามารถหาปริพันธ์สัมบูรณ์ในช่วง $[0,b]$ ได้ จะได้ว่า

1. $(A(t)+C(t))\tilde{\otimes} B(t) = A(t)\tilde{\otimes} B(t) + C(t)\tilde{\otimes} B(t)$
2. $B(t)\tilde{\otimes}(A(t)+C(t)) = (B(t)\tilde{\otimes} A(t)) + (B(t)\tilde{\otimes} C(t))$
3. $(f(t)A(t))\tilde{\otimes} B(t) = f(t)(A(t)\tilde{\otimes} B(t)) = A(t)\tilde{\otimes}(f(t)B(t))$
4. $(f(t)*A(t))\tilde{\otimes} B(t) = f(t)*(A(t)\tilde{\otimes} B(t)) = A(t)\tilde{\otimes}(f(t)*B(t))$
5. $(A(t)\tilde{\otimes} B(t))\tilde{\otimes} C(t) = A(t)\tilde{\otimes}(B(t)\tilde{\otimes} C(t))$
6. $(A(t)\tilde{\otimes} B(t))^T = A^T(t)\tilde{\otimes} B^T(t)$
7. $(A(t)\tilde{\otimes} B(t))*(C(t)\tilde{\otimes} D(t)) = (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B(t)*D(t))$

บทพิสูจน์

จากเอกสารอ้างอิง [5]

บทที่ 4

สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก

ในบทนี้เราจะนิยามผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ รวมทั้งพิจารณาตรวจสอบสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณดังกล่าว

4.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

บทนิยาม **4.1.1** ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

ให้ $A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ และ $B:[0,b]\to M_{p,q}(\mathbb{R}), B(t)=[B_{kl}(t)]$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของ A และ B นิยามโดย

$$A(t)\,\tilde{\boxtimes}\,B(t)=[A(t)\,\tilde{\otimes}\,B_{kl}(t)]_{kl}\in M_{mp,nq}$$

นั่นคือ $A(t)\,\tilde{\boxtimes}\,B(t)$ มีบล็อกที่ (k,l) เป็น $A(t)\,\tilde{\otimes}\,B_{kl}(t)$ โดยที่แต่ละ $A(t)\,\tilde{\otimes}\,B_{kl}(t)$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $mp_k\times nq_l$

ตัวอย่าง 4.1.2 กำหนดให้ $A(t)=\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}$ และ $B(t)=\left[\begin{array}{cc|c}\sin t & t^2 & 5\\ \hline t^2 & e^t & 3\end{array}\right]$

จะได้ว่า

$$A(t)\,\tilde{\boxtimes}\,B(t)$$
$$=\begin{bmatrix}A(t)\,\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}\sin t & t^2\end{bmatrix} & A(t)\,\tilde{\otimes}[5]\\ A(t)\,\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}t^2 & e^t\end{bmatrix} & A(t)\,\tilde{\otimes}[3]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & \sin t \\ \sin 2t & e^t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t & \sin t \\ \sin 2t & e^t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} [5] \\ \begin{bmatrix} t & \sin t \\ \sin 2t & e^t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} t^2 & e^t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t & \sin t \\ \sin 2t & e^t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} [3] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t * \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \end{bmatrix} & e^t * \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \end{bmatrix} & t * [5] & e^t * [5] \\ \sin 2t * \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \end{bmatrix} & t^2 * \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \end{bmatrix} & \sin 2t * [5] & t^2 * [5] \\ t * \begin{bmatrix} t^2 & e^t \end{bmatrix} & e^t * \begin{bmatrix} t^2 & e^t \end{bmatrix} & t * [3] & e^t * [3] \\ \sin 2t * \begin{bmatrix} t^2 & e^t \end{bmatrix} & t^2 * \begin{bmatrix} t^2 & e^t \end{bmatrix} & \sin 2t * [3] & t^2 * [3] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t * \sin t & t * t^2 & e^t * \sin t & e^t * t^2 & t * 5 & e^t * 5 \\ \sin 2t * \sin t & \sin 2t * t^2 & t^2 * \sin t & t^2 * t^2 & \sin 2t * 5 & t^2 * 5 \\ t^2 * t^2 & t * e^t & e^t * t^2 & e^t * e^t & t * 3 & e^t * 3 \\ \sin 2t * t^2 & \sin 2t * e^t & t^2 * t^2 & t^2 * e^t & \sin 2t * 3 & t^2 * 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t - \sin t & \frac{t^4}{12} & \frac{e^t - \cos t - \sin t}{2} & 2e^t - t^2 - 2t - 2 & 5\frac{t^2}{2} & 5e^t - 5 \\ -\frac{2}{3}(\cos t - 1)\sin t & \frac{1}{4}(\cos 2t + 2t^2 - 1) & \cos 2t + 2t^2 - 1 & \frac{t^5}{20} & \frac{-5}{2}\cos t & 5\frac{t^3}{3} \\ \frac{t^4}{12} & e^t - t - 1 & 2e^t - t^2 - 2t - 2 & e^t t & 3\frac{t^2}{2} & 3e^t - 3 \\ \frac{1}{4}(\cos 2t + 2t^2 - 1) & \frac{2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t}{5} & \frac{t^5}{20} & 2e^t - t^2 - 2t - 2 & \frac{-3}{2}\cos 2t & t^3 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 4.1.3 กำหนดให้ $A(t) = \begin{bmatrix} \sin t & e^t \\ t^2 & \cos t \end{bmatrix}$ และ $B(t) = \left[\begin{array}{ccc} e^t & \sin t & 3 \\ \hline t & 4 & e^t \end{array}\right]$

จะได้ว่า

$$A(t) \tilde{\boxtimes} B(t)$$

$$=\begin{bmatrix} A(t) \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} e^t & \sin 2t & 3 \end{bmatrix} \\ A(t) \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} t & 4 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & e^t \\ t^2 & \cos t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} e^t & \sin 2t & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sin t & e^t \\ t^2 & \cos t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} t & 4 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sin t*\begin{bmatrix} e^t & \sin 2t & 3 \end{bmatrix} & e^t*\begin{bmatrix} e^t & \sin 2t & 3 \end{bmatrix} \\ t^2*\begin{bmatrix} e^t & \sin 2t & 3 \end{bmatrix} & \cos t*\begin{bmatrix} e^t & \sin 2t & 3 \end{bmatrix} \\ \sin t*\begin{bmatrix} t & 4 & e^t \end{bmatrix} & e^t*\begin{bmatrix} t & 4 & e^t \end{bmatrix} \\ t^2*\begin{bmatrix} t & 4 & e^t \end{bmatrix} & \cos t*\begin{bmatrix} t & 4 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sin t*e^t & \sin t*t^2 & \sin t*3 & e^t*e^t & e^t*\sin 2t & e^t*3 \\ t^2*e^t & t^2*t^2 & t^2*3 & \cos t*e^t & \cos t*\sin 2t & \cos t*3 \\ \sin t*t & \sin t*4 & \sin t*e^t & e^t*t & e^t*4 & e^t*e^t \\ t^2*t & t^2*4 & t^2*e^t & \cos t*t & \cos t*4 & \cos t*e^t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{e^t-\cos t-\sin t}{2} & -\frac{2}{3}(\cos t-1)\sin t & 3\sin t+3\cos t & e^t t & \frac{2e^t-2\cos 2t-\sin 2t}{5} & 3e^t-3 \\ 2e^t-t^2-2t-2 & \frac{1}{4}(\cos 2t+2t^2-1) & t^3 & e^t-\cos t-\sin t & \frac{2}{3}(-\cos 2t)+\cos t & 3\cos t-3\sin t \\ t-\sin t & 4\sin t+4\cos t & \frac{e^t-\cos t-\sin t}{2} & e^t-t-1 & 4e^t-1 & e^t t \\ \frac{t^4}{12} & \frac{4t^3}{3} & 2e^t-t^2-2t-2 & 1-\cos t & 4\cos t-4\sin t & e^t-\cos t+\sin t \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 4.1.4 กำหนดให้ $A(t)=\begin{bmatrix} \sin t \\ e^t \end{bmatrix}$ และ $B(t)=\left[\begin{array}{c:c} t & 5 \\ e^t & t^2 \end{array}\right]$

จะได้ว่า

$$A(t)\,\tilde{\boxtimes}\,B(t)=\begin{bmatrix} A(t)\,\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} & A(t)\,\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} 5 \\ t^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ e^t \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin t \\ e^t \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} 5 \\ t^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sin t*\begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} & \sin t*\begin{bmatrix} 5 \\ t^2 \end{bmatrix} \\ e^t*\begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} & e^t*\begin{bmatrix} 5 \\ t^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (\sin t*t)+(\sin t*e^t) & (\sin t*5)+(\sin t*t^2) \\ (e^t*t)+(e^t*e^t) & (e^t*5)+(e^t*t^2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (t-\sin t)+\dfrac{e^t-\cos t-\sin t}{2} & (5\sin t+5\cos t)+(\cos 2t+2t^2-1) \\ (e^t-t-1)+e^t t & (5e^t-5)+(2e^t-t^2-2t-2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{2t+e^t-3\sin t-\cos t}{2} & 5\sin t+5\cos t+\cos 2t+2t^2-1 \\ e^t+e^t t-t-1 & 7e^t-t^2-2t-7 \end{bmatrix}$$

4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้กับการดำเนินการเชิงพีชคณิต

ทฤษฎีบท 4.2.1 ให้ A, B, C, D เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้บน $[0,b]$ ซึ่ง $A(t)$, $B(t), C(t), D(t)$ มีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย และให้ $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ จะได้ว่า

1. $(A(t)+C(t))\tilde{\boxtimes}B(t)=A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)+C(t)\tilde{\boxtimes}B(t)$
2. $B(t)\tilde{\boxtimes}(A(t)+C(t))=B(t)\tilde{\boxtimes}A(t)+B(t)\tilde{\boxtimes}C(t)$
3. $(f(t)A(t))\tilde{\boxtimes}B(t)=f(t)\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)=A(t)\tilde{\boxtimes}(f(t)B(t))$
4. $(f(t)*A(t))\tilde{\boxtimes}B(t)=f(t)*\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)=A(t)\tilde{\boxtimes}(B(t)*f(t))$
5. $\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)^{T}=A^{T}(t)\tilde{\boxtimes}B^{T}(t)$
6. $\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)\right)=(A(t)*C(t))\tilde{\boxtimes}(B(t)*D(t))$

บทพิสูจน์

1.
$$\begin{aligned}(A(t)+C(t))\tilde{\boxtimes}B(t)&=\left[(A(t)+C(t))\tilde{\otimes}B(t)_{kl}\right]_{kl}\\&=\left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}+\left[C(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}\\&=\left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)+C(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}\\&=A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)+C(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}B(t)\tilde{\boxtimes}(A(t)+C(t))&=B(t)\tilde{\otimes}(A(t)+C(t))_{kl}{}_{kl}\\&=\left[B(t)\tilde{\otimes}A(t)_{kl}\right]_{kl}+\left[B(t)\tilde{\otimes}C(t)_{kl}\right]_{kl}\\&=B(t)\tilde{\boxtimes}A(t)+B(t)\tilde{\boxtimes}C(t)\end{aligned}$$

3. $(f(t)A(t))\tilde{\boxtimes}B(t)=f(t)\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)=A(t)\tilde{\boxtimes}(f(t)B(t))$

$$\begin{aligned}(f(t)A(t))\tilde{\boxtimes}B(t)&=\left[(f(t)A(t))\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}\\&=\left[f(t)\left(A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right)\right]_{kl}\end{aligned}$$

$$= f(t)\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)$$

$$= \left[f(t)\left(A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right)\right]_{kl}$$

$$= f(t)\left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}$$

$$= \left[A(t)\tilde{\otimes}(f(t)B_{kl}(t))\right]_{kl}$$

$$= A(t)\tilde{\boxtimes}(f(t)B(t))$$

4. $(f(t)*A(t))\tilde{\boxtimes}B(t) = f(t)*\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right) = A(t)\tilde{\boxtimes}(B(t)*f(t))$

$$(f(t)*A(t))\tilde{\boxtimes}B(t) = \left[(f(t)*A(t))\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}$$

$$= f(t)*\left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}$$

$$= f(t)*\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)$$

$$= f(t)*\left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}$$

$$= \left[A(t)\tilde{\otimes}(f(t)*B_{kl}(t))\right]_{kl}$$

$$= \left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}*f(t)$$

$$= A(t)\tilde{\boxtimes}(B(t)*f(t))$$

$$= A(t)\tilde{\boxtimes}(f(t)*B(t))$$

5. $\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)^T = \left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}^T$

$$= \left[A^T(t)\tilde{\otimes}B_{kl}^T(t)\right]_{kl}$$

$$= A^T(t)\tilde{\boxtimes}B^T(t)$$

6. $\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)\right) = (A(t)*C(t))\tilde{\boxtimes}(B(t)*D(t))$

$$\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)\right)$$

$$= \left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}*\left[C(t)\tilde{\otimes}D_{kl}(t)\right]_{kl}$$

$$
= A(t)\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} B_{11}(t) & \cdots & B_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i1}(t) & \cdots & B_{ij}(t) \end{bmatrix} * C(t)\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} D_{11}(t) & \cdots & D_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{i1}(t) & \cdots & D_{ij}(t) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A(t)\tilde{\otimes}B_{11}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\otimes}B_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A(t)\tilde{\otimes}B_{i1}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\otimes}B_{ij}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C(t)\tilde{\otimes}D_{11}(t) & \cdots & C(t)\tilde{\otimes}D_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t)\tilde{\otimes}D_{i1}(t) & \cdots & C(t)\tilde{\otimes}D_{ij}(t) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \left(A(t)\tilde{\otimes}B_{11}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{11}(t)\right)+\cdots+\left(A(t)\tilde{\otimes}B_{1j}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{i1}(t)\right) & \cdots & \left(A(t)\tilde{\otimes}B_{11}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{1j}(t)\right)+\cdots+\left(A(t)\tilde{\otimes}B_{1j}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{ij}(t)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(A(t)\tilde{\otimes}B_{i1}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{i1}(t)\right)+\cdots+\left(A(t)\tilde{\otimes}B_{1j}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{i1}(t)\right) & \cdots & \left(A(t)\tilde{\otimes}B_{i1}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{1j}(t)\right)+\cdots+\left(A(t)\tilde{\otimes}B_{ij}(t)\right)*\left(C(t)\tilde{\otimes}D_{ij}(t)\right) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{11}(t)*D_{11}(t))+\cdots+\ A\ t * C\ t\ \tilde{\otimes}\ B_{1j}\ t * D_{i1}\ t & \cdots & (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{11}\ t * D_{1j}\ t\ )+\cdots+(A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{1j}(t)*D_{ij}(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{i1}(t)*D_{i1}(t))+\cdots+\ A\ t * C\ t\ \tilde{\otimes}\ B_{1j}\ t * D_{i1}\ t & \cdots & (A(t)*C(t))\otimes(B_{i1}(t)*D_{1j}(t))+\cdots+(A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{ij}(t)*D_{ij}(t)) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{11}(t)*D_{11}(t)+\cdots+B_{1j}(t)*D_{i1}(t)) & \cdots & (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{11}(t)*D_{1j}(t)+\cdots+B_{1j}(t)*D_{ij}(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{i1}(t)*D_{i1}(t)+\cdots+B_{1j}(t)*D_{i1}(t)) & \cdots & (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(B_{i1}(t)*D_{1j}(t)+\cdots+B_{ij}(t)*D_{ij}(t)) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(row_1(B(t))*col_1(D(t))) & \cdots & (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(row_1(B(t))*col_m(D(t))) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(row_n(B(t))*col_1(D(t))) & \cdots & (A(t)*C(t))\tilde{\otimes}(row_n(B(t))*col_m(D(t))) \end{bmatrix}
$$

$$
= (A(t)*C(t))\tilde{\boxtimes}\begin{bmatrix} row_1(B(t))*col_1(D(t)) & \cdots & row_1(B(t))*col_m(D(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ row_n(B(t))*col_1(D(t)) & \cdots & row_n(B(t))*col_m(D(t)) \end{bmatrix}
$$

$$
= A(t)*C(t)\tilde{\boxtimes}\left(\begin{bmatrix} B_{11}(t) & \cdots & B_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i1}(t) & \cdots & B_{ij}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} D_{11}(t) & \cdots & D_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{i1}(t) & \cdots & D_{ij}(t) \end{bmatrix}\right)
$$

$$
= (A(t)*C(t))\tilde{\boxtimes}(B(t)*D(t))
$$

ข้อสังเกต 4.2.2 สมบัติของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกในกรณีทั่วไปสมบัติต่อไปนี้ ไม่จริง

$$
\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)\tilde{\boxtimes}C(t) = A(t)\tilde{\boxtimes}\left(B(t)\tilde{\boxtimes}C(t)\right)
$$

ตัวอย่าง 4.2.3 กำหนดให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t^2 \\ 3 \end{bmatrix}, B(t)=\left[\begin{array}{c:c} t & e^t \\ 5 & \sin t \end{array}\right]$ และ $C(t)=\left[\begin{array}{cc} t^2 & t \\ \hdashline 2 & e^t \end{array}\right]$

จะได้ว่า

$$\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)\tilde{\boxtimes}C(t)$$

$$=\begin{bmatrix} \left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t^2 & t \end{bmatrix} \\ \left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ 3 \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 \\ 3 \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t^2 & t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ 3 \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 \\ 3 \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 * \begin{bmatrix} t \\ 5 \end{bmatrix} & t^2 * \begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix} \\ 3 * \begin{bmatrix} t \\ 5 \end{bmatrix} & 3 * \begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t^2 & t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} t^2 * \begin{bmatrix} t \\ 5 \end{bmatrix} & t^2 * \begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix} \\ 3 * \begin{bmatrix} t \\ 5 \end{bmatrix} & 3 * \begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 * t & t^2 * e^t \\ t^2 * 5 & t^2 * \sin t \\ 3 * t & 3 * e^t \\ 3 * 5 & 3 * \sin t \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} t^2 & t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} t^2 * t & t^2 * e^t \\ t^2 * 5 & t^2 * \sin t \\ 3 * t & 3 * e^t \\ 3 * 5 & 3 * \sin t \end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
(t^2*t)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix} & (t^2*e^t)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix}\\
(t^2*5)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix} & (t^2*\sin t)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix}\\
(3*t)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix} & (3*e^t)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix}\\
(3*5)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix} & (3*\sin t)*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix}\\
(t^2*t)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix} & (t^2*e^t)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix}\\
(t^2*5)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix} & (t^2*\sin t)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix}\\
(3*t)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix} & (3*e^t)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix}\\
(3*5)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix} & (3*\sin t)*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
(t^2*t)*t^2 & (t^2*t)*t & (t^2*e^t)*t^2 & (t^2*e^t)*t\\
(t^2*5)*t^2 & (t^2*5)*t & (t^2*\sin t)*t^2 & (t^2*\sin t)*t\\
(3*t)*t^2 & (3*t)*t & (3*e^t)*t^2 & (3*e^t)*t\\
(3*5)*t^2 & (3*5)*t & (3*\sin t)*t^2 & (3*\sin t)*t\\
(t^2*t)*2 & (t^2*t)*e^t & (t^2*e^t)*2 & (t^2*e^t)*e^t\\
(t^2*5)*2 & (t^2*5)*e^t & (t^2*\sin t)*2 & (t^2*\sin t)*e^t\\
(3*t)*2 & (3*t)*e^t & (3*e^t)*2 & (3*e^t)*e^t\\
(3*5)*2 & (3*5)*e^t & (3*\sin t)*2 & (3*\sin t)*e^t
\end{bmatrix}
$$

$$
A(t)\tilde{\boxtimes}\left(B(t)\tilde{\boxtimes}C(t)\right)
$$

$$
=A(t)\tilde{\boxtimes}\left[\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}t & e^t\\ 5 & \sin t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix}\\
\hline
\begin{bmatrix}t & e^t\\ 5 & \sin t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
=A(t)\tilde{\boxtimes}\left[\begin{array}{cc}
t*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix} & e^t*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix}\\
5*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix} & \sin t*\begin{bmatrix}t^2 & t\end{bmatrix}\\
\hline
t*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix} & e^t*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix}\\
5*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix} & \sin t*\begin{bmatrix}2 & e^t\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
=A(t)\tilde{\boxtimes}\left[\begin{array}{cccc}
t*t^2 & t*t & e^t*t^2 & e^t*t\\
5*t^2 & 5*t & \sin t*t^2 & \sin t*t\\
\hline
t^2*2 & t*e^t & e^t*2 & e^t*e^t\\
5*2 & 2*e^t & \sin t*2 & \sin t*e^t
\end{array}\right]
$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2\\3\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}t*t^2 & t*t & e^t*t^2 & e^t*t\\5*t^2 & 5*t & \sin t*t^2 & \sin t*t\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}t^2\\3\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}t^2*2 & t*e^t & e^t*2 & e^t*e^t\\5*2 & 2*e^t & \sin t*2 & \sin t*e^t\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t^2*\begin{bmatrix}t*t^2 & t*t & e^t*t^2 & e^t*t\\5*t^2 & 5*t & \sin t*t^2 & \sin t*t\end{bmatrix}\\3*\begin{bmatrix}t*t^2 & t*t & e^t*t^2 & e^t*t\\5*t^2 & 5*t & \sin t*t^2 & \sin t*t\end{bmatrix}\\t^2*\begin{bmatrix}t^2*2 & t*e^t & e^t*2 & e^t*e^t\\5*2 & 2*e^t & \sin t*2 & \sin t*e^t\end{bmatrix}\\3*\begin{bmatrix}t^2*2 & t*e^t & e^t*2 & e^t*e^t\\5*2 & 2*e^t & \sin t*2 & \sin t*e^t\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t^2*(t*t^2) & t^2*(t*t) & t^2*(e^t*t^2) & t^2*(e^t*t)\\t^2*(5*t^2) & t^2*(5*t) & t^2*(\sin t*t^2) & t^2*(\sin t*t)\\3*(t*t^2) & 3*(t*t) & 3*(e^t*t^2) & 3*(e^t*t)\\3*(5*t^2) & 3*(5*t) & 3*(\sin t*t^2) & 3*(\sin t*t)\\t^2*(t^2*2) & t^2*(t*e^t) & t^2*(e^t*2) & t^2*(e^t*e^t)\\t^2*(5*2) & t^2*(2*e^t) & t^2*(\sin t*2) & t^2*(\sin t*e^t)\\3*(t^2*2) & 3*(t*e^t) & 3*(e^t*2) & 3*(e^t*e^t)\\3*(5*2) & 3*(2*e^t) & 3*(\sin t*2) & 3*(\sin t*e^t)\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\left(A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right)\tilde{\boxtimes}C(t)\neq A(t)\tilde{\boxtimes}\left(B(t)\tilde{\boxtimes}C(t)\right)$

ข้อสังเกต 4.2.4 สมบัติของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกที่เกี่ยวกับเมทริกซ์ย่อย

กำหนดให้ $A\in M_{p,q}, B=\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1j}\\\vdots & \ddots & \vdots\\B_{i1} & \cdots & B_{ij}\end{bmatrix}$ โดยที่ B_{ij} คือ เมทริกซ์ย่อยของ B

และ $A\tilde{\boxtimes}B=\begin{bmatrix}A\tilde{\otimes}B_{11} & \cdots & A\tilde{\otimes}B_{1j}\\\vdots & \ddots & \vdots\\A\tilde{\otimes}B_{i1} & \cdots & A\tilde{\otimes}B_{ij}\end{bmatrix}$

เมื่อเราพิจารณาการแบ่งเมทริกซ์ย่อยของเมทริกซ์ B เป็น

$B=\begin{bmatrix}\hat{B}_{11} & \cdots & \hat{B}_{1j}\\\vdots & \ddots & \vdots\\\hat{B}_{i1} & \cdots & \hat{B}_{ij}\end{bmatrix}$ โดยแต่ละ $\hat{B}_{ij}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ย่อยต่างๆของ B นำมาผสานกัน

จะได้ว่า

$$A\tilde{\boxtimes}B=\begin{bmatrix} A\tilde{\otimes}B_{11} & A\tilde{\otimes}B_{12} & \cdots & A\tilde{\otimes}B_{1j} \\ A\tilde{\otimes}B_{21} & A\tilde{\otimes}B_{22} & \cdots & A\tilde{\otimes}B_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\tilde{\otimes}B_{i1} & A\tilde{\otimes}B_{i2} & \cdots & A\tilde{\otimes}B_{ij} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A\tilde{\boxtimes}\hat{B}_{11} & \cdots & A\tilde{\boxtimes}\hat{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A\tilde{\boxtimes}\hat{B}_{m1} & \cdots & A\tilde{\boxtimes}\hat{B}_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\left[A\tilde{\boxtimes}\hat{B}_{kl}\right]_{kl}$$

ข้อสังเกต 4.2.5 สมบัติของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกที่เกี่ยวกับผลบวกตรง

ในกรณีทั่วไปสมบัติต่อไปนี้ไม่จริง

1. $(A\oplus B)\tilde{\boxtimes}C=\left(A\tilde{\boxtimes}C\right)\oplus\left(B\tilde{\boxtimes}C\right)$
2. $C\tilde{\boxtimes}(A\oplus B)=\left(C\tilde{\boxtimes}A\right)\oplus\left(C\tilde{\boxtimes}B\right)$

ตัวอย่าง 4.2.6 ให้ $A\;\,t\;=\begin{bmatrix}\sin t\\ e^t\end{bmatrix}, B\;\,t\;=\begin{bmatrix} t & 5\\ e^t & t^2\end{bmatrix}$ และ $C\;\,t\;=\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$(A\oplus B)\tilde{\boxtimes}C$

$$=\begin{bmatrix} \sin t & 0 & 0 \\ e^t & 0 & 0 \\ 0 & t & 5 \\ 0 & e^t & t^2 \end{bmatrix}\tilde{\boxtimes}\left[\begin{array}{cc} \sin t & e^t \\ \hdashline t^2 & \cos t \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t & 0 & 0\\ e^t & 0 & 0\\ 0 & t & 5\\ 0 & e^t & t^2\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\sin t & 0 & 0\\ e^t & 0 & 0\\ 0 & t & 5\\ 0 & e^t & t^2\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix}\\ e^t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix}\\ 0*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & 5*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix}\\ 0*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & e^t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & t^2*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix}\\ \sin t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix}\\ e^t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & 0*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix}\\ 0*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & 5*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix}\\ 0*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & e^t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & t^2*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin t*\sin t & \sin t*e^t & 0 & 0 & 0 & 0\\ e^t*\sin t & e^t*e^t & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t*\sin t & t*e^t & 5*\sin t & 5*e^t\\ 0 & 0 & e^t*\sin t & e^t*e^t & t^2*\sin t & t^2*e^t\\ \sin t*t^2 & \sin t*\cos t & 0 & 0 & 0 & 0\\ e^t*t^2 & e^t*\cos t & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t*t^2 & t*\cos t & 5*t^2 & 5*\cos t\\ 0 & 0 & e^t*t^2 & e^t*t^2 & t^2*t^2 & t^2*\cos t\end{bmatrix}$$

$$\left(A\tilde{\boxtimes}C\right)\oplus\left(B\tilde{\boxtimes}C\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\sin t\\ e^t\end{bmatrix}\tilde{\boxtimes}\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ \hdashline t^2 & \cos t\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}t & 5\\ e^t & t^2\end{bmatrix}\tilde{\boxtimes}\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ \hdashline t^2 & \cos t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t\\ e^t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\sin t\\ e^t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix}\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}t & 5\\ e^t & t^2\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}t & 5\\ e^t & t^2\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} \sin t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} \\ e^t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} \\ \sin t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} \\ e^t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & 5*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} \\ e^t*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} & t^2*\begin{bmatrix}\sin t & e^t\end{bmatrix} \\ t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & 5*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} \\ e^t*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} & t^2*\begin{bmatrix}t^2 & \cos t\end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \sin t*\sin t & \sin t*e^t \\ e^t*\sin t & e^t*e^t \\ \sin t*t^2 & \sin t*\cos t \\ e^t*t^2 & e^t*\cos t \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} t*\sin t & t*e^t & 5*\sin t & 5*e^t \\ e^t*\sin t & e^t*e^t & t^2*\sin t & t^2*e^t \\ t*t^2 & t*\cos t & 5*t^2 & 5*\cos t \\ e^t*t^2 & e^t*\cos t & t^2*t^2 & t^2*\cos t \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \sin t*\sin t & \sin t*e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^t*\sin t & e^t*e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t*t^2 & \sin t*\cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^t*t^2 & e^t*\cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t*\sin t & t*e^t & 5*\sin t & 5*e^t \\ 0 & 0 & e^t*\sin t & e^t*e^t & t^2*\sin t & t^2*e^t \\ 0 & 0 & t*t^2 & t*\cos t & 5*t^2 & 5*\cos t \\ 0 & 0 & e^t*t^2 & e^t*\cos t & t^2*t^2 & t^2*\cos t \end{bmatrix}
$$

ดังนั้น จะเห็นว่า $(A\oplus B)\tilde{\boxtimes}C \neq \left(A\tilde{\boxtimes}C\right)\oplus\left(B\tilde{\boxtimes}C\right)$

$C\tilde{\boxtimes}(A\oplus B)$

$$
=\begin{bmatrix} \sin t & e^t \\ t^2 & \cos t \end{bmatrix} \tilde{\boxtimes} \begin{bmatrix} \sin t & 0 & 0 \\ e^t & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & t & 5 \\ 0 & e^t & t^2 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & e^t \\ t^2 & \cos t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} \sin t & 0 & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sin t & e^t \\ t^2 & \cos t \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} 0 & t & 5 \\ 0 & e^t & t^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\sin t*\sin t & 0 & 0 & e^t*\sin t & 0 & 0\\
\sin t*e^t & 0 & 0 & e^t*e^t & 0 & 0\\
t^2*\sin t & 0 & 0 & \cos t*\sin t & 0 & 0\\
t^2*e^t & 0 & 0 & \cos t*e^t & 0 & 0\\
0 & \sin t*t & \sin t*5 & 0 & e^t*t & e^t*5\\
0 & \sin t*e^t & \sin t*t^2 & 0 & e^t*e^t & e^t*t^2\\
0 & t^2*t & t^2*5 & 0 & \cos t*t & \cos t*5\\
0 & t^2*e^t & t^2*t^2 & 0 & \cos t*e^t & \cos t*t^2
\end{bmatrix}
$$

$$
\left(C\tilde{\boxtimes}A\right)\oplus\left(C\tilde{\boxtimes}B\right)
$$

$$
=\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\boxtimes}\begin{bmatrix}\sin t\\ \hdashline e^t\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\boxtimes}\begin{bmatrix}t & 5\\ \hdashline e^t & t^2\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\sin t\\ \begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\left[e^t\right]\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\,t \quad 5\\ \begin{bmatrix}\sin t & e^t\\ t^2 & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\otimes}\left[e^t \quad t^2\right]\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\sin t*\sin t & e^t*\sin t\\
t^2*\sin t & \cos t*\sin t\\
\sin t*e^t & e^t*e^t\\
t^2*e^t & \cos t*e^t
\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}
\sin t*t & \sin t*5 & e^t*t & e^t*5\\
t^2*t & t^2*5 & \cos t*t & \cos t*5\\
\sin t*e^t & \sin t*t^2 & e^t*e^t & e^t*t^2\\
t^2*e^t & t^2*t^2 & \cos t*e^t & \cos t*t^2
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\sin t*\sin t & e^t*\sin t & 0 & 0 & 0 & 0\\
t^2*\sin t & \cos t*e^t & 0 & 0 & 0 & 0\\
\sin t*e^t & e^t*e^t & 0 & 0 & 0 & 0\\
t^2*e^t & \cos t*e^t & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \sin t*t & \sin t*5 & e^t*t & e^t*5\\
0 & 0 & t^2*t & t^2*5 & \cos t*t & \cos t*5\\
0 & 0 & \sin t*e^t & \sin t*t^2 & e^t*e^t & e^t*t^2\\
0 & 0 & t^2*e^t & t^2*t^2 & \cos t*e^t & \cos t*t^2
\end{bmatrix}
$$

ดังนั้น จะเห็นว่า $C\tilde{\boxtimes}(A\oplus B)\neq\left(C\tilde{\boxtimes}A\right)\oplus\left(C\tilde{\boxtimes}B\right)$

4.3 ตัวทำสลับที่คอนโวลูชัน

บทนิยาม 4.3.1 ตัวทำสลับที่

ให้ $A, B:[0,b] \to M_n(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ เรานิยาม

$$[A(t), B(t)] = A(t)B(t) - B(t)A(t)$$

บทนิยาม 4.3.2 ตัวทำสลับที่คอนโวลูชัน

ให้ $A, B:[0,b] \to M_n(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ เรานิยาม

$$[A(t), B(t)]_* = A(t) * B(t) - B(t) * A(t)$$

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้ $A(t) = \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \\ t & e^t \end{bmatrix}$ และ $B(t) = \begin{bmatrix} e^t & t \\ t^2 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$[A(t), B(t)]_*$

$= A(t) * B(t) - B(t) * A(t)$

$$= \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \\ t & e^t \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^t & t \\ t^2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^t & t \\ t^2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sin t & t^2 \\ t & e^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\sin t * e^t) + (t^2 * t^2) & (\sin t * t) + (t^2 * 5) \\ (t * e^t) + (e^t * t^2) & (t * t) + (e^t * 5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (e^t * \sin t) + (t * t) & (e^t * t^2) + (t * e^t) \\ (t^2 * \sin t) + (5 * t) & (t^2 * t^2) + (5 * e^t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{e^t - \cos t - \sin t}{2}\right) + \left(\frac{t^5}{20}\right) & (t - \sin t) + \left(\frac{5t^3}{3}\right) \\ (e^t - t - 1) + (2e^t - t^2 - 2t - 2) & \left(\frac{t^3}{6}\right) + (5e^t - 5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{e^t - \cos t - \sin t}{2}\right) + \left(\frac{t^3}{6}\right) & (2e^t - t^2 - 2t - 2) + (e^t - t - 1) \\ (\cos 2t + 2t^2 - 1) + \left(\frac{5t^2}{2}\right) & \left(\frac{t^5}{20}\right) + (5e^t - 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{t^5 + 20e^t - 20\cos t - 20\sin t}{20} & \frac{3t + 5t^3 - 3\sin t}{3} \\ 3e^t - 3t - t^2 - 3 & \frac{t^3 + 30e^t - 30}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3e^t - 3\cos t - 3\sin t + t^3}{6} & 3e^t - t^2 - 3t - 3 \\ \frac{2\cos 2t + 9t^2 - 2}{2} & \frac{60e^t + t^3 - 60}{20} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3t^5 + 60e^t - 60\cos t - 60\sin t - 30e^t + 30\cos t + 30\sin t - 30t^3}{60} & \frac{3t + 5t^3 - 3\sin t - 9e^t + 3t^2 + 9t + 9}{3} \\ \frac{6e^t - 6t - 2t^2 - 6 - 2\cos 2t - 9t^2 + 2}{2} & \frac{10t^3 + 300e^t - 300 - 3t^5 - 300e^t + 300}{60} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3t^5 - 30t^3 + 30e^t - 30\cos t - 30\sin t}{60} & \frac{5t^3 + 3t^2 + 12t - 3\sin t - 9e^t + 9}{3} \\ \frac{-11t^2 - 6t + 6e^t - 2\cos 2t - 4}{2} & \frac{10t^3 - 3t^5}{60} \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 4.3.4 ตัวทำปฏิสลับที่คอนโวลูชัน

ให้ $A,B:[0,b]\to M_n(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ เรานิยาม

$$[A(t),B(t)]_{*,+}=A(t)*B(t)+B(t)*A(t)$$

ตัวอย่าง 4.3.5 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} e^t & t \\ t^2 & \sin t\end{bmatrix}$ และ $B(t)=\begin{bmatrix} 3 & t^2 \\ t & e^t\end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&[A(t),B(t)]_{*,+}\\
&=A(t)*B(t)+B(t)*A(t)\\
&=\begin{bmatrix} e^t & t \\ t^2 & \sin t\end{bmatrix}*\begin{bmatrix} 3 & t^2 \\ t & e^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & t^2 \\ t & e^t\end{bmatrix}*\begin{bmatrix} e^t & t \\ t^2 & \sin t\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} (e^t*3)+(t*t) & (e^t*t^2)+(t*e^t) \\ (t^2*3)+(\sin t*t) & (t^2*t^2)+(\sin t*e^t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (3*e^t)+(t^2*t^2) & (3*t)+(t^2*\sin t) \\ (t*e^t)+(e^t*t^2) & (t*t)+(t*\sin t)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} 3e^t-3+\dfrac{t^3}{6} & 2e^t-t^2-2t-2+e^t-t-1 \\ t^3+t-\sin t & \dfrac{t^5}{20}+\dfrac{e^t-\cos t-\sin t}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3e^t-3+\dfrac{t^5}{20} & \dfrac{3t^2}{2}+\cos 2t+2t^2-1 \\ e^t-t-1+2e^t-t^2-2t-2 & \dfrac{t^3}{6}+t-\sin t\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} \dfrac{6e^t-6+t^3}{6} & 3e^t-t^2-3t-3 \\ t^3+t-\sin t & \dfrac{t^5+10e^t-10\cos t-10\sin t}{20}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{60e^t+t^3-60}{20} & \dfrac{2\cos 2t+7t^2-4}{2} \\ 3e^t-3t-t^2-3 & \dfrac{t^3+6t-6\sin t}{6}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} \dfrac{10e^t-60+180e^t+3t^3-180}{60} & \dfrac{6e^t-2t^2-6t-6}{2} \\ t^3+t-\sin t+3e^t-t^2-3 & \dfrac{3t^5+30e^t-30\cos t-30\sin t+10t^3+60t-60\sin t}{60}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} \dfrac{190e^t+13t^3-240}{60} & -t^2-3 \\ -2t-t^2+t^3+3e^t-\sin t-3 & \dfrac{60t+10t^3+3t^5+30e^t-90\sin t-30\cos t}{60}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.3.6 สมบัติของตัวทำสลับที่คอนโวลูชัน

ให้ $A,B:[0,b]\to M_n(\mathbb{R})$ และ $C,D:[0,b]\to M_m(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ สมมติ $[A(t)\tilde{\boxtimes}C(t),B(t)\tilde{\boxtimes}D(t)]_*=0$ จะได้ว่า

1. $[A(t)\tilde{\boxtimes}C(t),B(t)\tilde{\boxtimes}D(t)]_*=0$
2. $[A(t)\tilde{\boxtimes}B(t),C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)]=\dfrac{1}{2}\left([A(t),C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t),D(t)]_{*,+}+[A(t),C(t)]_{*,+}\tilde{\boxtimes}[B(t),D(t)]\right)$

บทพิสูจน์

1. $[A(t)\tilde{\boxtimes}C(t), B(t)\tilde{\boxtimes}D(t)]_* = 0$

จาก $[A(t), B(t)]_* = A(t)*B(t) - B(t)*A(t) = 0$

และ $[C(t), D(t)]_* = C(t)*D(t) - D(t)*C(t) = 0$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
[A(t)\tilde{\boxtimes}C(t), B(t)\tilde{\boxtimes}D(t)]_* &= [A(t)\tilde{\boxtimes}C(t)*B(t)\tilde{\boxtimes}D(t)] - [B(t)\tilde{\boxtimes}D(t)*A(t)\tilde{\boxtimes}C(t)] \\
&= [(A(t)*B(t))\tilde{\boxtimes}(C(t)*D(t))] - [(B(t)*A(t))\tilde{\boxtimes}(D(t)*C(t))] \\
&= [(A(t)*B(t))\tilde{\boxtimes}(C(t)*D(t))] - [(A(t)*B(t))\tilde{\boxtimes}(C(t)*D(t))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. $[A(t)\tilde{\boxtimes}B(t), C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)] = \frac{1}{2}\left([A(t), C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t), D(t)]_{*,+} + [A(t), C(t)]_{*,+}\tilde{\boxtimes}[B(t), D(t)]\right)$

จาก

$$[A(t)\otimes B(t), C(t)\otimes D(t)] = \frac{1}{2}([A(t), C(t)]\otimes[B(t), D(t)]_+ + [A(t), C(t)]_+\otimes[B(t), D(t)])$$

และ

$$[A(t)\otimes B(t), C(t)\otimes D(t)]_+ = \frac{1}{2}([A(t), C(t)]\otimes[B(t), D(t)] + [A(t), C(t)]_+\otimes[B(t), D(t)]_+)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left([A(t), C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t), D(t)]_{*,+} + [A(t), C(t)]_{*,+}\tilde{\boxtimes}[B(t), D(t)]\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\Big([A(t)*C(t)] - [C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)] + [D(t)*B(t)]\Big) + \Big([A(t)*C(t)] + [C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)] - [D(t)*B(t)]\Big)\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\Big\{\Big([A(t)*C(t)] - [C(t)*A(t)]\ \tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\Big) + \Big([A(t)*C(t)] - [C(t)*A(t)]\ \tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\Big)\Big\} \\
&+ \Big\{\Big([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}\ [B(t)*D(t)] - [D(t)*B(t)]\Big) + \Big([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}\ [B(t)*D(t)] - [D(t)*B(t)]\Big)\Big\}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\Big([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\Big) - \Big([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\Big) \\
&\quad + \Big([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\Big) - \Big([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\Big) \\
&\quad + \Big([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\Big) - \Big([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\Big) \\
&\quad + \Big([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\Big) - \Big([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\Big)\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\Big([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\Big) - \Big([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\Big)
\end{aligned}$$

$$+\left([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\right)-\left([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\right)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\left(\left([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\right)-\left([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\right)\right)\right\}$$

$$=\left([A(t)*C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t)*D(t)]\right)-\left([C(t)*A(t)]\tilde{\boxtimes}[D(t)*B(t)]\right)$$

$$=\left(\left[A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right]*\left[C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)\right]\right)-\left(\left[C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)\right]*\left[A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)\right]\right)$$

$$=\left[A(t)\tilde{\boxtimes}B(t),C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)\right]$$

4.4 การยกกำลังคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก

บทนิยาม 4.4.1 ให้ $A:[0,b]\to M_n(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ เรานิยาม

$$A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}=\underbrace{A(t)\tilde{\boxtimes}A(t)\tilde{\boxtimes}\cdots\tilde{\boxtimes}A(t)}_{\text{k พจน์}}$$

ตัวอย่าง 4.4.2 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ \sin t & t \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A(t)^{\tilde{\boxtimes}2} &= A(t)\tilde{\boxtimes}A(t) \\
&= \begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ \sin t & t \end{bmatrix}\tilde{\boxtimes}\left[\begin{array}{cc} e^t & t^2 \\ \hline \sin t & t \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ \sin t & t \end{bmatrix}\tilde{\otimes}[e^t \quad t^2] \\ \begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ \sin t & t \end{bmatrix}\tilde{\otimes}[\sin t \quad t] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^t*[e^t \quad t^2] & t^2*[e^t \quad t^2] \\ \sin t*[e^t \quad t^2] & t*[e^t \quad t^2] \\ e^t*[\sin t \quad t] & t^2*[\sin t \quad t] \\ \sin t*[\sin t \quad t] & t*[\sin t \quad t] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t * e^t & e^t * t^2 & t^2 * e^t & t^2 * t^2 \\ \sin t * e^t & \sin t * t^2 & t * e^t & t * t^2 \\ e^t * \sin t & e^t * t & t^2 * \sin t & t^2 * t \\ \sin t * \sin t & \sin t * t & t * \sin t & t * t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} te^t & 2e^t - t^2 - 2t - 2 & 2e^t - t^2 - 2t - 2 & \dfrac{t^5}{20} \\ \dfrac{e^t - \cos t - \sin t}{2} & \cos 2t + 2t^2 - 1 & e^t - t - 1 & \dfrac{t^4}{12} \\ \dfrac{e^t - \cos t - \sin t}{2} & e^t - t - 1 & \cos 2t + 2t^2 - 1 & \dfrac{t^4}{12} \\ \dfrac{-t\cos t + t\cos t}{2} & t - \sin t & t - \sin t & \dfrac{t^3}{6} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 4.4.3 สมบัติของการยกกำลังคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก

1. $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{\tilde{\boxtimes}p} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}kp}$
2. $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{p} = A(t)^{p}{}^{\tilde{\boxtimes}k}$
3. $(A(t) * B(t))^{\tilde{\boxtimes}k} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} * B(t)^{\tilde{\boxtimes}k}$

บทพิสูจน์

1. $$\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{\tilde{\boxtimes}p} = \underbrace{A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} \tilde{\boxtimes} A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} \tilde{\boxtimes} A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} \tilde{\boxtimes} \cdots \tilde{\boxtimes} A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}}_{\text{p พจน์}}$$

$$= \underbrace{A(t) \tilde{\boxtimes} A(t) \tilde{\boxtimes} A(t) \tilde{\boxtimes} \cdots \tilde{\boxtimes} A(t)}_{\text{kp พจน์}}$$

$$= A(t)^{\tilde{\boxtimes}kp}$$

2. ให้ $P(t)$ แทน $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{p} = (A(t)^{p})^{\tilde{\boxtimes}k}$

1). จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

พิจารณา $k = 1$ จะได้ว่า $A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}$

2). จะแสดงว่า ถ้า $P(m)$ เป็นจริง แล้ว $P(m+1)$ เป็นจริงด้วย

สมมติว่า ถ้า $P(m)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{m} = (A(t)^{m})^{\tilde{\boxtimes}k}$

จะพิสูจน์ว่า $P(m+1)$ เป็นจริง กล่าวคือ

จะพิสูจน์ว่า $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{m+1} = (A(t)^{m+1})^{\tilde{\boxtimes}k}$

เนื่องจาก $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{m} = (A(t)^{m})^{\tilde{\boxtimes}k}$

จะได้ว่า $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{m} \cdot A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} = (A(t)^{m})^{\tilde{\boxtimes}k} \cdot A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}$

$$= (A(t)^{m} \cdot A(t))^{\tilde{\boxtimes}k}$$
$$= (A(t)^{m+1})^{\tilde{\boxtimes}k}$$

ดังนั้น $P(m+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก k

3. ให้ $P(k)$ แทน $(A(t)*B(t))^{\tilde{\boxtimes}k} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} * B(t)^{\tilde{\boxtimes}k}$

1). จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

พิจารณา $k=1$ จะได้ว่า $A(t)*B(t) = A(t)*B(t)$

2). จะแสดงว่า ถ้า $P(m)$ เป็นจริง แล้ว $P(m+1)$ เป็นจริงด้วย

สมมติว่า ถ้า $P(m)$ เป็นจริง

นั่นคือ $(A(t)*B(t))^{\tilde{\boxtimes}m} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}m} * B(t)^{\tilde{\boxtimes}m}$

จะพิสูจน์ว่า $P(m+1)$ เป็นจริง กล่าวคือ

จะพิสูจน์ว่า $(A(t)*B(t))^{\tilde{\boxtimes}m+1} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}m+1} * B(t)^{\tilde{\boxtimes}m+1}$

เนื่องจาก $(A(t)*B(t))^{\tilde{\boxtimes}m} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}m} * B(t)^{\tilde{\boxtimes}m}$

จะได้ว่า $(A(t)*B(t))^{\tilde{\boxtimes}m} \,\tilde{\boxtimes}(A(t)*B(t)) = \left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}m} * B(t)^{\tilde{\boxtimes}m}\right)\tilde{\boxtimes}(A(t)*B(t))$

$$= \left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}m}\,\tilde{\boxtimes}A(t)\right) * \left(B(t)^{\tilde{\boxtimes}m} * B(t)\right)$$
$$= \left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}m+1}\right) * \left(B(t)^{\tilde{\boxtimes}m+1}\right)$$

ดังนั้น $P(m+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก k

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ มีสมบัติดังนี้

- การกระจายทางขวาเหนือการบวก
- การกระจายทางซ้ายเหนือการบวก
- การคูณกับฟังก์ชันค่าจริง
- การคูณคอนโวลูชันกับฟังก์ชันค่าจริง
- การสลับเปลี่ยน
- การคูณแบบผสม

แต่โดยทั่วไปไม่มีสมบัติต่อไปนี้

- การเปลี่ยนกลุ่ม
- การกระจายทางขวาเหนือผลบวกตรง
- การกระจายทางซ้ายเหนือผลบวกตรง

ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้มีความสัมพันธ์กับตัวทำสลับที่คอนโวลูชัน ดังนี้

- $[A(t)\tilde{\boxtimes}C(t), B(t)\tilde{\boxtimes}D(t)]_* = 0$
- $[A(t)\tilde{\boxtimes}B(t), C(t)\tilde{\boxtimes}D(t)] = \frac{1}{2}\Big([A(t),C(t)]\tilde{\boxtimes}[B(t),D(t)]_{*,+} + [A(t),C(t)]_{*,+}\tilde{\boxtimes}[B(t),D(t)]\Big)$

การยกกำลังคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก มีสมบัติดังนี้

- $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{\tilde{\boxtimes}p} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}kp}$
- $\left(A(t)^{\tilde{\boxtimes}k}\right)^{p} = \left(A(t)^{p}\right)^{\tilde{\boxtimes}k}$
- $(A(t)*B(t))^{\tilde{\boxtimes}k} = A(t)^{\tilde{\boxtimes}k} * B(t)^{\tilde{\boxtimes}k}$

5.2 ข้อเสนอแนะ

ปัญหาพิเศษมีแนวทางในการพัฒนาต่อได้โดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้กับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก

เอกสารอ้างอิง

[1] Ruud H. Koning, Heinz Neudecker, and Tom Wansbeek. 1991. **Block Kronecker Products and the vecb Operator.**

[2] Zeyad Al Zhour and Adem Kilicman. 2007. **Some new connections between matrix products for partitioned and non-partitioned matrices.**

[3] Robet G. Bartle and Donald R. Sherbert. 2011. **Introduction to Real Analysis.** 4^{th} ed.

[4] Huamin Zhang and Feng Ding. 2013. **On the Kronecker Products and Their Applications.**

[5] Zeyad Al Zhour and Adem Kilicman. 2009. **On the Connection between Kronecker and Hadamard Convolution Products of Matrices and Some Applications.**