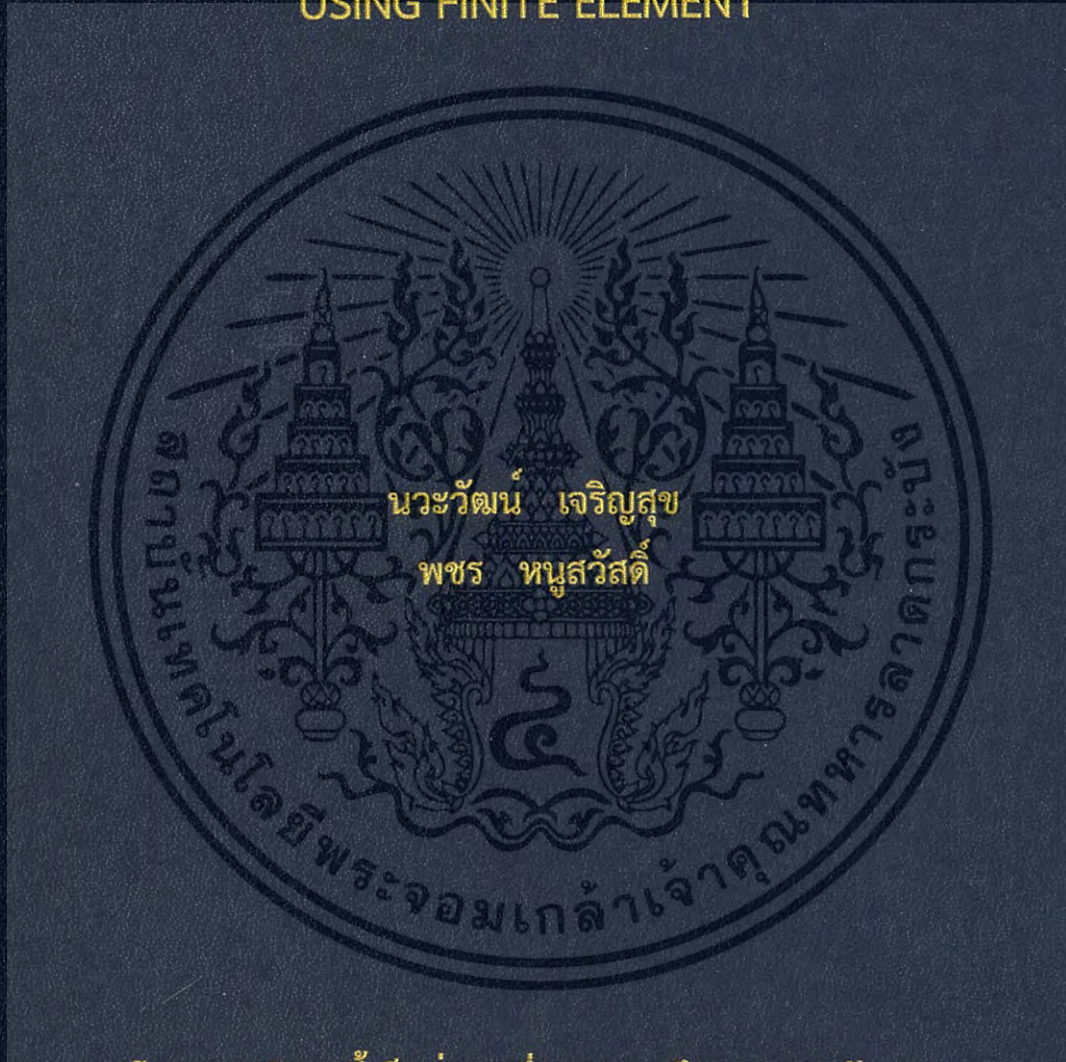


การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของไหลช่องทางกำรไหล
ขนาดเล็กโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
FLUID FLOW SIMULATION WITHIN MICROCHANNEL
USING FINITE ELEMENT



โครงการพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (ฟิสิกส์ประยุกต์)
ภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของไหลช่องทางการไหล
ขนาดเล็กโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
FLUID FLOW SIMULATION WITHIN MICROCHANNEL
USING FINITE ELEMENT



นวะวัฒน์ เจริญสุข
พร หนูสวัสดิ์



TB00164

โครงการพิเศษนี้เป็นส่วนเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (ฟิสิกส์ประยุกต์)
ภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

FLUID FLOW SIMULATION WITHIN MICROCHANNEL
USING FINITE ELEMENT



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED PHYSICS)
DEPARTMENT OF PHYSICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKARBANG
ACADEMIC OF YEAR 2015

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ

การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ ช่องทางการไหลขนาดเล็กโดย
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
Fluid Flow Simulation Within Microchannel Using
Finite Element

ชื่อนักศึกษา

นายนวะวัฒน์ เจริญสุข รหัสนักศึกษา 55051528
นายเพชร หนูสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 55051558

ปริญญา

วิทยาศาสตร์บัณฑิต (ฟิสิกส์ประยุกต์)

ภาควิชา

ฟิสิกส์

ปีการศึกษา

2558

อาจารย์ที่ปรึกษา

ดร.วรการ นียากร

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

อ.ธนภรณ์ ลีลาวัฒนานนท์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้
โครงการพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต (ฟิสิกส์ประยุกต์)
ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.กาญจปัญญา สุวรรณสุข ประธานกรรมการ	
ดร.วิฑูรย์ ยินดีสุข กรรมการ	
ผศ.ดร.ประธาน บุรณศิริ กรรมการ	
ดร.วรการ นียากร กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อ.ธนภรณ์ ลีลาวัฒนานนท์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โครงการพิเศษเรื่อง	การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ช่องทางการไหลขนาดเล็กโดย ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
นักศึกษา	นายวรวุฒิ เจริญสุข รหัสนักศึกษา 55051528 นายเพชร หนูสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 55051558
ปริญญา ภาควิชา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต(ฟิสิกส์ประยุกต์) ฟิสิกส์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง(สจล.)
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.วรการ นียากร
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อ.ธนภรณ์ ธิลาวัฒนานนท์

บทคัดย่อ

ในช่วงหลายปีที่ผ่านมาพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณได้กลายเป็นส่วนที่มีความสำคัญอย่างมากในงานทางด้านพลศาสตร์ของไหลและการจำลองชิ้นงานก็ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญมากซึ่งมีทั้งส่วนการออกแบบและส่วนวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นภายในท่อของไหลนั้นเพื่อนำผลที่ได้นำไปใช้งานหลากหลายด้าน เช่น ในงานที่เกี่ยวข้องกับการก่อตัวของสารเคมีในท่อของไหล เป็นต้น ในโครงการพิเศษนี้จึงได้นำเสนอการสร้างแบบจำลองของช่องทางการไหลแบบเปิดขนาดเล็กและนำไปโปรแกรม COMSOL มาทำการวิเคราะห์ผลลัพธ์ของความเร็วและความดันของไหลที่เกิดขึ้นภายในท่อขนาดเล็ก 3 ชนิด ดังนี้ คือท่อรูปทรงกระบอกตรง ท่อแฉกรูปตัวที และท่อแฉกรูปตัววาย วิเคราะห์ด้วยหลักการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยทำการจำลองชนิดของไหลเป็น 2 กรณี ดังนี้ กรณีที่หนึ่งเป็นน้ำบริสุทธิ์ที่ไหลด้วยความเร็วต่างกันในแต่ละรูปตัววาย และกรณีที่สองเป็นน้ำที่มีการเจือปนสารปนเปื้อนและมีการแพร่กระจายสารด้วยค่าต่างๆกัน ในท่อแฉกรูปตัวที และท่อแฉกรูปตัววาย ในกรณีหลังเพื่อทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการผสมของไหลที่เกิดขึ้นในท่อขนาดเล็กแต่ละชนิด

คำสำคัญ: พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ ท่อการไหลขนาดเล็ก ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Title	Fluid Flow Simulation Within Microchannel Using Finite Element
Students	Mr.Nawawat Charoensuk Student ID 55051528 Mr.Pachara Noosawad Student ID 55051558
Degree	Bachelor of Science(Applied Physics)
Department	Physics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2015
Advisor	Dr.Worakarn Neeyakorn
Co-advisor	Lecturer Thanaporn Leelawattananon

Abstract

Computational Fluid Dynamics (CFD) has popularly become an important method in fluid dynamics applications for years ago. Also, a simulation including parts of the sample design and parts of the analysis process is a significant step to demonstrate results of fluids flowing in pipelines. One of fluid dynamics applications was found in the formation of the chemical channel. This project presents the fluid flow simulation within an open microchannel. COMSOL program and the finite element method are used to analyze fluid velocity and fluid pressure dropped within a mixing length of 3 types of micro-channel, 1 inlet cylinder channel, 2 inlets T-junction channel and 2 inlets Y-junction channel. The types of fluid simulation are divided into 2 cases. The first is a case of pure water with varying different inlet velocity of fluid in the 2 inlets Y-shape microchannel. The second is a case of diluted water with varying different diffusion constant of fluid in the 2 inlets Y-shape microchannel and the 2 inlets H-shape microchannel. Finally, Simulation results show comparing a transport of dilute liquid between these two types of the micro-channels.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Micro-channel, The finite element method.

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ด้วยความช่วยเหลือของอาจารย์วรการ นียากร และ อาจารย์ฉนภรณ์ ลีลาวัฒนานนท์ ซึ่งอาจารย์ทั้ง2ท่านได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นรวมถึง ข้อเสนอแนะต่าง ๆ อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการทำวิจัย ที่ทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงาน สำหรับข้อแนะนำและความช่วยเหลือในทุกๆด้านของการทำงานวิจัย ที่ทำให้งานวิจัยนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบคุณคณาจารย์ทุกท่านที่เป็นคณะกรรมการ ที่คอยให้ความรู้และแนะนำข้อบกพร่องต่างๆ เพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไขให้โครงการพิเศษนี้ดีขึ้น และขอขอบคุณภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ที่ได้ให้โอกาสในการทำโครงการพิเศษนี้

ขอขอบคุณผลงานวิจัยและเอกสารอ้างอิงต่างๆที่กลุ่มข้าพเจ้าได้นำมาอ้างอิงเพื่อประกอบความน่าเชื่อถือในการทำรายงาน ซึ่งคาดหวังว่ารายงานโครงการพิเศษนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจ สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดามารดา และครอบครัว ซึ่งเปิดโอกาสให้ได้รับการศึกษาเล่าเรียน ตลอดจนคอยช่วยเหลือและให้กำลังใจเสมอมาจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

นวะวัฒน์ เจริญสุข
พร หนูสวัสดิ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญรูป	ช
สารบัญตาราง	ซ
คำย่อและสัญลักษณ์	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย/ปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	2
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	2
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	4
2.1 ความรู้ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย(set of partial differential equations)	4
2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล	5
2.1.2 ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์	5
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์มวล	8
2.3 สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม (conservation of momentum)	10
2.4 สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน	15
2.5 ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์	20
2.5.1 เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)	21
2.5.2 ลักษณะรูปร่าง (geometry)	21
2.5.3 ความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)	21
2.5.4 ความรู้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method)	22
2.5.5 ปัญหาการไหลแบบหนืด	23
2.5.6 สมการพื้นฐานของการไหล	24
2.5.7 การไหลของของไหลที่คิดความหนืด	24
2.5.8 การไหลในท่อกลม	26
2.5.9 การขนส่งของไหล	27
2.5.10 องค์ประกอบที่ทำให้เกิดการสูญเสียความดันในการไหลภายในท่อ	28
2.5.11 Newtonian Fluid	29
2.5.12 สมการความต่อเนื่อง	30
2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	31

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย	32
3.1 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อตรง	32
3.2 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อ T-junction	36
3.3 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อ Y-junctionแบบ 3D	41
3.4 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อ W-shape	46
3.5 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อ Y-shape แบบ 2D	49
3.6 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อ H-shape	53
3.7 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อ Y แบบ3D โค้ง	57
บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล	63
4.1 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์รูปทรงกระบอก	63
4.2 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์รูปตัว T-JUNCTION	68
4.3 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อรูป Y-JUNCTION แบบ 3D	71
4.4 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อรูป W-SHAPE	73
4.4.1 มีการกำหนดค่าความเร็วที่1ไม่เท่ากับค่าความเร็วที่2	75
4.4.2 โดยภายในท่อของ W-SHAPE มีการกำหนดค่าความเร็วที่1มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s และมีการปรับเปลี่ยนค่าความเร็วที่ 2 มีค่า 1 m/s , 10 m/s และ 100m/s	75
4.5 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อรูป Y-JUNCTION แบบ 2D	77
4.5.1 โดยภายในท่อของ Y-JUNCTION 2D SHAPE มีการกำหนดค่าความเร็วที่1ไม่เท่ากับค่าความเร็วที่2	78
4.5.2 โดยภายในท่อของ Y-JUNCTION 2D มีการกำหนดค่าความเร็วที่1มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s มีการปรับเปลี่ยนค่าความเร็วที่ 2 มีค่า 1 m/s , 10 m/s และ 100m/s	79
4.6 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์กับน้ำที่มีสารเจือปน ในรูปท่อ H-SHAPE	81
4.7 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์กับน้ำที่มีสารปนเปื้อนในท่อรูปY-Asymmetric	89
บทที่ 5 สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ	92
5.1 สรุปผลการทดลอง	92
5.3 ข้อเสนอแนะ	92
เอกสารอ้างอิง	
ภาคผนวก	

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ค่าคุณสมบัติต่างๆจะเปลี่ยนไปขึ้นอยู่กับตำแหน่งและเวลา	6
2.2 การไหลของมวลผ่านเข้าออกเอลิเมนต์	9
2.3 แสดงแรงต่างๆในทิศแกน x	11
2.4 แสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาตรพลิกซีในทิศแกน x	15
2.5 การไหลสภาวะปกติ	25
2.6 ชั้นขอบเขตความเร็วเมื่อมีการไหลของผิวของวัตถุ	25
2.7 การไหลในท่อกลม	27
2.8 ค่าความสัมพันธ์ของเส้นกราฟสัมพันธ์ดังกล่าว คือค่าสัมประสิทธิ์ความหนืด	30
2.9 การไหลของของไหลจากพื้นที่หน้าตัด A_2 ไปยังพื้นที่หน้าตัด A_1	30
3.1 แสดงการเข้าโปรแกรมเลือกที่ model wizard	32
3.2 ทำการคลิกเลือกที่รูปแบบทรง3D	33
3.3 ลำดับการเลือกฟังก์ชันในการเข้าโปรแกรม	33
3.4 เลือกstationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และ ความดัน	34
3.5 ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรงcylinder แบบท่อดตรง	34
3.6 ทำการใส่สสารที่เป็นน้ำเข้าไปภายในท่อทำให้เกิดการไหลของของไหลภายในท่อ	35
3.7 จากตารางทำการใส่ค่าเฉพาะของน้ำ เช่น ความหนาแน่น dynamic viscosity thermal conductivity	35
3.8 การกำหนดทางเข้าของของไหล(inlet)	36
3.9 แสดงการกำหนดทางออกของของไหล(Outlet)	36
3.10 ให้เลือกเป็น model wizard	37
3.11 เลือกเป็นระบบพิกัดแบบ 3D	37
3.12 เลือก stationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และความดัน	37
3.13 ทำการใส่ขนาดที่รัศมี0.5 μm และ ความสูงที่5 μm เพื่อสร้างท่อT-Junction	38
3.14 ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรง cylinder แบบท่อดตัว T ใน cylinder 1	38
3.15 รูปทรงตัวTที่ขึ้นรูปจาก Bulid selected แต่ยังไม่ได้ตัดท่อดส่วนเกินออกตรงกลาง	39
3.16 ใน cylinder2 มีการกำหนดค่าตาม cylinder1 แต่มีการย้ายแกนที่ไปที่ตำแหน่งในระบบพิกัดที่ $x=2$ ไมโครเมตร และ $y= 2.5$ ไมโครเมตร ที่ได้ทำการตัดท่อดตรงส่วนกลางออกแล้ว	39
3.17 จากตารางทำการใส่ค่าเฉพาะของน้ำ เช่น ความหนาแน่น dynamic viscosity thermal Conductivity	39
3.18 การกำหนดทางเข้าของของไหล(inlet1)	40
3.19 การกำหนดทางเข้าของของไหล(inlet2)	40
3.20 การเข้าโปรแกรมเลือกที่ model wizard	41
3.21 ทำการคลิกเลือกที่รูปแบบทรง3D	41
3.22 ลำดับการเลือกฟังก์ชันในการเข้าโปรแกรม	42
3.23 เลือกstationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และ ความดัน	42

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี การนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ขออนุญาตให้ถือว่าผิดกฎหมาย การนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ขออนุญาตให้ถือว่าผิดกฎหมาย การนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ขออนุญาตให้ถือว่าผิดกฎหมาย

สารบัญญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.24 ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรงcylinder แบบท่อY-junction เริ่มจากการสร้างท่อตรง	43
3.25 ทำการสร้างท่ออีกอันแล้วนำมาประกบเป็น2อันทำมุมกัน	43
3.26 จากนั้นทำการมาประกบท่อมาทำเป็นY	44
3.27ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรงcylinder แบบท่อY-junction	44
3.28 ทำการใส่สสารที่เป็นน้ำเข้าไปภายในท่อทำให้เกิดการไหลของของไหลภายในท่อ	45
3.29 จากตารางทำการใส่ค่าเฉพาะของน้ำ เช่น ความหนาแน่น dynamic viscosity thermal conductivity	45
3 30แสดงการเข้าโปรแกรมเลือกที่ model wizard	46
3.31 ทำการคลิกเลือกที่รูปแบบทรง2D	46
3.32 ลำดับการเลือกฟังก์ชันในการเข้าโปรแกรม	47
3.33 เลือกstationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และ ความดัน	47
3.34 รูปแสดงถึงการขึ้นรูปแบบW-Shapeจากท่อตรงก่อน	48
3.35 นำท่อตรงนำมาประกบกันที่มีเท่ากัน	48
3.36 รูปของW-Shape ที่หลังจากกำหนดขนาดแล้ว	49
3.37 การเข้าโปรแกรมโดยเลือกที่ model wizard	49
3.38 ทำการเลือกที่รูปทรง 2D	50
3.39 ทำการเลือก fluid flow และ เลือก Laminar flow เพื่อทำการศึกษา	50
3.40 ส่วนของStudy ทำการเลือก stationary	50
3.41 รูปของRectangle1ที่ทำการกำหนดขนาดแล้ว	51
3.42 รูปของrectangle2 ที่ทำการกำหนดขนาดและประกบท่อเข้าด้วยกันจะเป็นท่อเข้าที่1 และ ทางเข้าที่2	51
3.43 รูปของRectangle3 ที่ทำการกำหนดขนาดและประกบท่อทางเข้าด้วยกัน แล้วจะได้รูปที่ประกบกันเป็นท่อทางออก	52
3.44 เมื่อทำการใช้ฟังก์ชัน(Union1)จะทำให้รูปประกบเป็นรูปขึ้นเดียวกัน	52
3.45 การเข้าโปรแกรมโดยเลือกที่ model wizard	53
3.46 ทำการเลือกที่รูปทรง 3D	53
3.47 ทำการเลือกแบบ Laminar Flow	54
3.48 จากนั้นทำการเพิ่มฟังก์ชัน Chemical Species Transport	54
3.49 ส่วนของStudy ทำการเลือก stationary	55
3.50 ขนาดของรูปทรงในขั้นแรก	55
3.51 หลังจากนั้นนำรูปสี่เหลี่ยม2รูปมาประกบกัน	55
3.52 ทำการdifferenceเพื่อตัดรูป	56
3.53 ทำการfillet เพื่อให้ได้รูปภายในให้โค้งออก	56
3.54 หลังจากนั้นทำการfilletเป็นครั้งที่2เพื่อให้ได้รูปภายนอกโค้ง	56
เอก:3.55 จากนั้นจะได้รูปที่เป็น W-SHAPE โดยวิธี mirrorเขาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เข้าไปใช้ประโยชน์	57
ไม่3.56 การเข้าโปรแกรมเริ่มที่ model wizardค้นหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกา	57

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.57 เลือกที่รูปทรง3D	58
3.58 ขั้นตอนการเลือกฟังก์ชัน laminar flow	58
3.59 จากนั้นทำการเลือก Physics อีกครั้ง โดยเลือกที่ Chemical Species Transport	59
3.60 ทำการเลือกการศึกษาแบบ stationary	59
3.61 เริ่มจากสร้างสี่เหลี่ยมเพื่อที่จะสร้าง Y-junction2D	60
3.62 จากนั้นทำรูปสี่เหลี่ยมทับพื้นที่ส่วนโค้ง	60
3.63 จากนั้นทำสี่เหลี่ยมเพื่อทำให้ปลายโค้งเป็นท่	60
3.64 จากนั้นทำการใส่fillet เพื่อทำส่วนโค้งที่ปลายท่	61
3.65 รูปที่ได้จากการfilletครั้งที่2เพื่อทำให้ปลายท่เป็นโค้งมน	61
3.66 จากนั้นทำการใช้คำสั่ง mirror เพื่อสร้างท่อีกส่วนออกมาประกบกัน	61
3.67 ได้แบบท่Y-Asymmetric ออกมา	62
4.1 สมการที่แสดงใน fluid properties ที่อุณหภูมิ 20 ^o C	63
4.2 สมการของของไหลภายในท่ที่ผ่านผนังท่	64
4.3 กำหนดการไหลบริเวณท่ทางเข้าที่ความเร็ว 0.2m/s	64
4.4 การไหลของทางออกของของไหล(Outlet)	65
4.5 การmeshของวัตถุในแต่ละจุด	65
4.6 จำนวนของ element ที่แสดงออกมา	66
4.7 องค์กรประกอบในการcomputeตัวชิ้นงาน	66
4.8 ขนาดของความเร็วภายในท่	67
4.9 ขนาดของความดันในท่	67
4.10 เป็นการบอกถึงสมการที่ใช้ในการคำนวณที่การศึกษาแบบ stationary จะเป็นการศึกษาที่เจาะจงไปยัง ความเร็ว และ ความดัน	68
4.11 inlet 1 มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตไว้โดยการกำหนดค่าความเร็วเริ่มต้นไว้ที่ 0.2 m/s และด้าน inlet 2 ได้กำหนดค่าความเร็วเริ่มต้นไว้ที่ 0.1 m/s	68
4.12 เป็นการmesh ในระดับ element size ที่ระดับ fine เพื่อจะเป็นการคำนวณในแบบวิธี Finite element.ในแต่ละจุดของรูปทรง	69
4.13 เป็นหน้าจอแสดงคำสั่งที่โปรแกรมวิเคราะห์ออกมาโดยการcompute จากนั้นตัวโปรแกรมจะทำการหยุดในช่วงความคาดเคลื่อนน้อยที่สุด	69
4.14 แสดงถึงขนาดของความเร็วที่เกิดขึ้นภายในท่ โดยที่ความเร็วตรงกลางท่อนั้นมีค่ามาก	70
4.15 แสดงถึงขนาดความดันที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดของท่ ที่ปลายทางเข้าของท่ทั้ง2จะมีค่าที่มาก	70
4.16 การแบ่งชิ้นงาน(mesh)ของวัตถุในแต่ละจุด	71
4.17 จำนวนของelementที่นำมาmeshนั้นมีค่าเท่าไร	71
4.18 องค์กรประกอบในการcomputeตัวชิ้นงาน	72

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.19 ขนาดของความเร็วยภายในท่อ	72
4.20 แสดงถึงความดันที่เกิดขึ้นภายในท่อของแต่ละจุด ที่ทางเข้าของน้ำทั้ง2ข้างจะมีค่าความดันที่มากที่สุด	73
4.21 การ mesh ของวัตถุในแต่ละจุด	73
4.22 จำนวนของelementที่นำมาmeshนั้นว่าในแต่ละจุดมีboundaryที่11ด้วยกันทั้งคู่	74
4.23 องค์ประกอบในการcomputeตัวขึ้นงาน	74
4.24 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีการกำหนดค่าความเร็วที่ 1 มีค่า 0.1 m/s และค่าความเร็วที่ 2 มีค่าที่กำหนด 0.2 m/s	74
4.25 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีความเร็วที่ท่อทางเข้าที่ 2 มีค่า 1 m/s	75
4.26 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีความเร็วที่ท่อทางเข้าที่ 2 มีค่า 10 m/s	75
4.27 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีความเร็วที่ท่อทางเข้าที่ มีค่า 100 m/s	76
4.28 ขนาดของความดันแต่ละจุดภายในท่อรูป W-SHAPE	76
4.29 รูปทรงY-Shapeแบบ2มิติ เมื่อทำการMeshกันแล้ว	77
4.30 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการนำมาทำการMeshกัน ซึ่งจะบอกจำนวนelementของแต่ละชนิด	77
4.31 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการนำมาcompute เพื่อศึกษา ความเร็ว และ ความดัน	77
4.32 แสดงผลลัพธ์ที่เป็นในส่วนของคุณค่าความเร็ว(Velocity magnitude)ที่จะบ่งบอกขนาดของความเร็ว และ ทิศทางของความเร็ว	78
4.33 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วโดยการกำหนดความเร็วที่ 2 มีค่าความเร็ว 1 m/s	78
4.34 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วโดยการกำหนดความเร็วที่ 2 มีค่าความเร็ว 10 m/s	79
4.35 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วโดยการกำหนดความเร็วที่ 2 มีค่าความเร็ว 100 m/s	79
4.36 แสดงถึงความดันที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดภายในท่อในแต่ละจุดที่ให้ความเร็วของน้ำในท่อทางเข้าแต่ละจุดไม่เท่ากัน	80
4.37 ส่วนประกอบของ initial value	80
4.38 ส่วนประกอบของค่าความเข้มข้นที่ 1 ซึ่ง $c_0 = 1 \text{ mol} / \text{m}^3$	81
4.39 แสดงส่วนประกอบของค่าความเข้มข้นที่ $2c_0 = 0 \text{ mol} / \text{m}^3$	81
4.40 ในส่วนของ Outflow และ สมการที่ใช้ในการคำนวณ	82
4.41 โดยมีการกำหนดขนาดของMesh เพื่อให้เหมาะสมกับการ compute	83
4.42 รูปทรง H-SHAPE ที่ได้จากการทำกระบวนการ Mesh เพื่อทำการวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	83
4.43 จำนวนของ edge และ element ที่ได้จากการทำMeshของรูปทรงH-cell	84
4.44 องค์ประกอบที่ได้จากการมาทำ compute ซึ่งจะบอกค่า ของ degree of freedom	84
4.45 ขนาดของความเร็วยภายในท่อ	85
4.46 ความดันที่เกิดขึ้นภายในท่อแต่ละboundary	85

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.47 ค่า Diffusion constant ที่ $1 \times 10^{-10} m^2 / s$	86
4.48 ค่า Diffusion constant ที่ $0.5 \times 10^{-10} m^2 / s$	86
4.49 ค่า diffusion constant ที่ $0.1 \times 10^{-10} m^2 / s$	87
4.50 แสดงถึงการทำการmeshกันของรูปทรงY-Asymmetric	88
4.51 ค่า Diffusion constant ที่ $1 \times 10^{-10} m^2 / s$	88
4.52 ค่า Diffusion constant ที่ $0.5 \times 10^{-10} m^2 / s$	89
4.53 ค่า Diffusion constant ที่ $0.1 \times 10^{-10} m^2 / s$	89
4.54 ขนาดของความเร็วในท่อY-Asymmetry	90
4.55 ความดันเกิดขึ้นภายในท่อ ในแต่ละBoundary	90



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่

1.1 แผนการดำเนินงาน

หน้า

2



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำย่อและสัญลักษณ์

คำย่อ/สัญลักษณ์	ความหมาย
ρ	ค่าความหนาแน่น
μ	ค่าความหนืด
dT/dt	ค่าอนุพันธ์รวม
σ_x	ความเค้นตั้งฉาก
τ_{yx}	ความเค้นเฉือน
μ_s	ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของท่อ
Δp	ค่าความดันที่สูญเสียไป
V	ความเร็ว
T	อุณหภูมิ
D	ขนาดของท่อ
F	แรงกระทำ
M	มวล
CAD	Computer Aided Engineering
CAM	Computer Aided Manufacturing

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ในปัจจุบันพัฒนาการทางด้านวิทยาศาสตร์เติบโตอย่างรวดเร็ว ไม่ว่าจะเป็นทางอิเล็กทรอนิกส์ อุตสาหกรรมทางการแพทย์ ในอุตสาหกรรมยานยนต์ รวมทั้งทางด้านเครื่องมือวัด แม้แต่ในชีวิตประจำวันของเราก็จะลงมือวัดอัตราการไหลของของไหล จำเป็นจะต้องมีการสร้างแบบจำลอง (Simulation) ซึ่งในการสร้างแบบจำลอง (Simulation) ก่อนนั้นจะช่วยให้เห็นผลลัพธ์และทิศทางการไหลของของไหลที่เราจะกำหนดสารนั้นให้มีทิศทางการไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow) หรือ แบบ การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulence flow) และ สามารถ กำหนดว่า สารนั้นจะใช้สารชนิดอะไร มี ความหนืด (Viscosity) และ อัตราเร็ว (Velocity) ในการไหลมีค่าเท่าไร รวมทั้งความดัน (Pressure) ที่เกิดขึ้นในตัววัสดุ ซึ่งจะแสดงผลก่อนการนำไปขึ้นโครงสร้างออกแบบชิ้นงานวัสดุที่จะใช้ในการวัดอัตราการไหลของของไหล เพื่อให้มีคุณภาพ และมี ประสิทธิภาพเพิ่มมากขึ้น

การสร้างแบบจำลอง (Simulation) ในการออกแบบการไหลของของไหลนั้นซึ่งในปัจจุบัน ได้มีโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างแบบจำลอง (Simulation) ที่หลากหลาย เช่น Ansys, Solid work, AutoCAD รวมถึง Comsol Multiphysics ซึ่งในแต่ละโปรแกรมมีหลักการการทำงานที่แตกต่างกันออกไป รวมทั้งความสะดวกสบายในการใช้งาน แต่สิ่งที่แตกต่างกันออกไปก็คือ ส่วนประกอบภายในของตัวโปรแกรมในส่วนของผู้ใช้ ซึ่งมีการใช้งานแตกต่างกันไป รวมถึง ต้องคำนึงถึงความเหมาะสมในการใช้งานต่างๆ เช่น ในการออกแบบอัตราการไหลของของไหลจะต้องใช้สารหรือของเหลวชนิดใด มีความหนืด (Viscosity) ความหนาแน่น (Density) อุณหภูมิ (Temperature) และ ความดัน (Pressure) ว่าต้องการกำหนดค่าเท่าไรให้ตรงกับรูปแบบที่เราจะสร้างแบบจำลอง

ในโครงการพิเศษนี้จะทำการศึกษาเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองการไหลของไหลในท่อขนาดเล็กรูปทรงต่างๆด้วย โปรแกรม Comsol Multiphysics และการวิเคราะห์ผลการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ซึ่งจะกล่าวถึง การออกแบบการไหลของของไหลในท่อแยกรูปทรงต่างๆ เช่น Y-Junction microchannel, H-Junction microchannel และ W-Junction microchannel เป็นต้น ซึ่งมีท่อเข้า (Inlet) แบบ 2 ทิศทาง และมีท่อออก (Outlet) แบบ ทิศทางเดียว และเป็นการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) โดยโปรแกรมจะแสดงผลการวิเคราะห์ความเร็วของไหลและ ความดันของไหลภายในบริเวณ outlet ของท่อขนาดเล็กนั้น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

รายงานชิ้นนี้เป็นการนำเอาความรู้ในเรื่องของอัตราการไหลของของไหล และ คอมพิวเตอร์โปรแกรมมาประยุกต์ใช้เข้าด้วยกันเพื่อศึกษาและออกแบบการทดลองของ อัตราการไหลของไหล โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) ด้วย Comsol Multiphysics ให้สามารถจำลองทิศทางการไหลของของไหลได้อย่างถูกต้อง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อไปได้

1.3 ขอบเขตงานวิจัย

1. ศึกษาอัตราการไหลของของไหลภายในท่อขนาดเล็ก ในแต่ละรูปแบบ
2. ศึกษาการผสมกันของของไหลเจือจาง 2 ชนิด โดยใช้ฟังก์ชัน transport of diluted ในท่อรูปทรง H-Shape และ รูปทรง Y-Junction แบบโค้ง
3. ทำการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ที่เกี่ยวกับค่าคงที่การแพร่กระจายของไหล (diffusion constant) เพื่อศึกษาผลที่เกิดขึ้นในบริเวณ outlet ของท่อขนาดเล็ก

1.4 ขั้นตอนการวิจัยและวิธีการดำเนินงานวิจัย

1. ศึกษาหลักการและสมการพื้นฐานของการไหลและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method)
2. ศึกษาหลักการทำงานของโปรแกรม Comsol Multiphysics
3. ทำการออกแบบรูปร่างของท่อขนาดเล็ก
4. ผลของความเร็วของไหล และ ความดันของไหลที่เกิดขึ้นบริเวณ outlet ของท่อขนาดเล็กด้วยโปรแกรม Comsol Multiphysics
5. สรุปผลการทดลอง

ตารางที่ 1.1 แนวทางการดำเนินงาน

แผนการดำเนินงาน	ธ.ค.	ม.ค.-มี.ค.	เมษ	พ.ค.
1.เสนอ Project				
2.ศึกษาข้อมูล				
3.ออกแบบ				
4.ทดลอง บันทึกผลและสรุป				

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้นักวิเคราะห์สามารถเข้าใจในปรากฏการณ์ของการไหลได้เป็นอย่างดี
2. สามารถนำผลการวิเคราะห์ของการไหลที่เกิดขึ้นภายในบริเวณ outlet ของท่อขนาดเล็กไปใช้ประโยชน์ในงานหลากหลายด้าน เช่น ในงานที่เกี่ยวข้องกับการก่อตัวของสารเคมีในท่อของไหล เป็นต้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิเคราะห์ปัญหาการไหลเพื่อหาความเร็ว ความดัน อุณหภูมิ เป็นต้น สำหรับการใช้ในการออกแบบงานทางวิศวกรรมหรือการศึกษางานทางวิทยาศาสตร์ด้วยวิธีการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (Computational Fluid Dynamics) ได้เข้ามามีบทบาทและก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในปัจจุบัน วิธีการคำนวณพลศาสตร์ของไหลผสมผสานกับความรู้ทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) โดยคำนวณผ่านทางคอมพิวเตอร์เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่สามารถแสดงได้ด้วยกราฟิกสี ทำให้นักวิเคราะห์สามารถเข้าใจในปรากฏการณ์ของการไหลได้เป็นอย่างดี วิธีการคำนวณพลศาสตร์ของไหลได้นำมาประยุกต์เข้ากับงานทางวิศวกรรมเป็นจำนวนมาก ทั้งในระดับวิจัยและพัฒนา เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของงานในทางปฏิบัติ เช่น การศึกษาสภาวะการไหลผ่านใบพัดในปั๊มน้ำเพื่อการปรับปรุงรูปทรงของงานเพื่อให้เกิดกำลังส่งที่สูงที่สุด การทำนายสภาวะทางอากาศของกรมอุตุนิยมวิทยาบนพื้นที่กว้างหลายหมื่นกิโลเมตร ศักยภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้คำนวณพลศาสตร์ของการไหล มักทำให้ผู้วิเคราะห์เข้าใจว่าสามารถใช้โปรแกรมเหล่านี้เพื่อหาค่าผลลัพธ์ของการไหลสำหรับปัญหาใดๆ ได้โดยง่าย ในความเป็นจริงนั้น เนื่องจากโปรแกรมเหล่านี้ตั้งอยู่บนความรู้ทางคณิตศาสตร์และขั้นตอนการคำนวณค่อนข้างลึกซึ้ง ในทางทฤษฎีแล้วองค์ประกอบที่สำคัญเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพจำเป็นที่ต้องเรียนรู้ 5 ประการ ดังนี้

2.1 ความรู้ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations)

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางการคำนวณพลศาสตร์ของไหลล้วนตั้งอยู่บนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในระบบใดระบบหนึ่งที่กำหนดให้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องศึกษาว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นถูกสร้างขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาการไหลที่ครอบคลุม (Governed) ด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยประเภทใด นอกจากนี้ ความเข้าใจทางกายภาพในแต่ละพจน์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นก็มีความมากเช่นกัน ในการบ่งบอกศักยภาพ (Capability) และขอบเขตจำกัด (Limitation) ของโปรแกรมเอง พจน์ต่างๆในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนี้ยังบ่งบอกอีกว่า การแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ต้องการความลึกซึ้งของระเบียบวิธีการคำนวณมากน้อยเพียงใด และจะเป็นผลต่อเนื้อเรื่องต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณปัญหานั้นๆอย่างไร ดังนั้น ความเข้าใจในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจึงมีความสำคัญที่จำเป็นต่อทำความเข้าใจ

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล

ปัญหาในงานทางด้านวิศวกรรมต่างๆมีความลึกซึ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แตกต่างกันออกไป ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนจำเป็นต้องเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อธิบายความสมดุลของการถ่ายเทความร้อน หรือ การวิเคราะห์ปัญหาการไหลนั้นจำเป็นต้องเริ่มจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแสดงถึงการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และ พลังงานเป็นต้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ ล้วนประกอบด้วยพจน์ต่างๆที่อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ (Derivative terms) ซึ่งใช้เลขหกกลับทาง ยกตัวอย่างเช่น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล แบบหนืดภายใต้สภาวะอยู่ตัวในสองมิติ โดยไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ประกอบด้วย

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง3สมการนี้ ประกอบด้วยตัวแปรตาม (Dependent Variable) ที่ไม่รู้ค่า3ตัวแปรตามตัวแปรต้น (Independent Variable) x และ y ตัวแปรตามทั้ง3ตัวนี้ ประกอบด้วย ความเร็ว u ในแนวแกน x ; ความเร็ว v ในแนวแกน y ; และความดัน p ที่เป็นฟังก์ชันของทั้ง x และ y ส่วน ρ และ μ คือ ค่าความหนาแน่น (Density) และ ค่าความหนืด (Viscosity) ของไหลตามลำดับ

2.1.2 ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์

ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (Substantial Derivative) ความหมายของการเริ่มการทำประติษฐ์ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล เพื่ออธิบายความหมายค่านี้แสดงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลจากตำแหน่งที่1ที่เวลา t_1 ไปยังตำแหน่งที่2 t_2 บนระนาบโดยระนาบนี้กำหนดให้ \hat{i} และ \hat{j} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) ในระนาบ x และ y ตามลำดับ ซึ่งมีความเร็ว \vec{V}_1 ที่ตำแหน่ง1 และ \vec{V}_2 ที่ตำแหน่งที่2 ความเร็วเหล่านี้ต่างเป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งสามารถเขียนได้

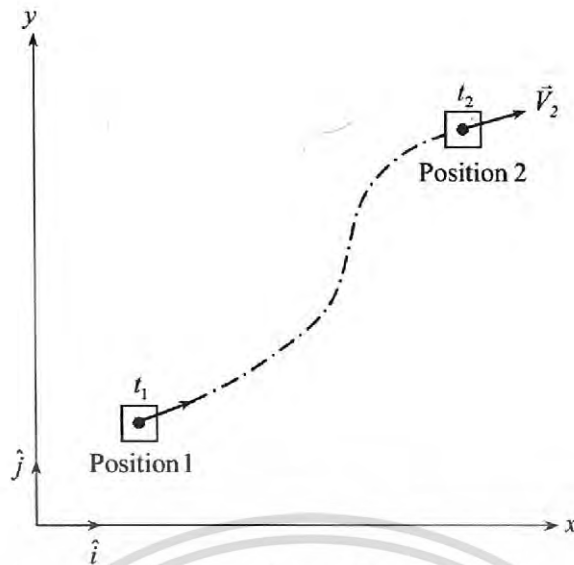
$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} \quad (2.1)$$

โดย u และ v เป็นความเร็วย่อยในทิศแกน x และ y ตามลำดับ ความเร็วย่อยนี้ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของโคออร์ดิเนต x, y และ เวลา t คือ

$$u = u(x, y, t) \quad (2.2)$$

$$v = v(x, y, t) \quad (2.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.1 ค่าคุณสมบัติต่างๆจะเปลี่ยนไปขึ้นอยู่กับตำแหน่งและเวลา [1]

ในขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ไปนั้น ค่าคุณสมบัติต่างๆจะเปลี่ยนแปลงไปขึ้นอยู่กับตำแหน่ง โคออร์ดิเนตและเวลาด้วย เช่น ค่าความหนาแน่น (Density)

$$\rho = \rho(x, y, t) \quad (2.4)$$

โดยที่ค่าความหนาแน่นของก้อนไหลที่ตำแหน่งนี้ คือ

$$\rho = \rho(x_1, y_1, t_1) \quad (2.5)$$

และมีวัตถุของไหลเคลื่อนที่ไปถึงตำแหน่งที่ 2 จะได้ค่าความหนาแน่นคือ

$$\rho_2 = \rho(x_2, y_2, t_2) \quad (2.6)$$

และเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงที่เป็นไปอย่างต่อเนื่อง (continuous) ค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่ง 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่งที่ 1 โดยใช้อนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) ดังนี้

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \Delta x + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \Delta y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 \Delta t + H.O.T \quad (2.7)$$

โดย H.O.T แทนพจน์ต่างๆที่ประกอบด้วย Δx , Δy และ Δt ที่มีอันดับสูงขึ้นไป (Higher Order terms) หากทำการย้าย ρ_1 มายังด้านซ้ายของสมการ แล้วทำการหารด้วย Δt จะได้

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 + H.O.T \quad (2.8)$$

และเมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ กล่าวคือ ตำแหน่ง 2 นั้น เคลื่อนเข้าสู่ตำแหน่ง 1 พจน์ต่างๆในสมการ (8) จะมีค่าต่อไปนี้ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} = \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.9)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = u \quad (2.10)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = v \quad (2.11)$$

และพจน์ H.O.T ซึ่งยังประกอบด้วย Δx , Δy และ Δt ต่างลู่เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นสมการที่(7)จึงกลายมาเป็น

$$\frac{D\rho}{Dt} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.12)$$

พจน์ดังกล่าวมีความหมายทางกายภาพเช่นนี้ที่อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ $\frac{D}{Dt}$ ซึ่งมีคำจำกัดความ (definition) ของการเปลี่ยนแปลงโดยสัมบูรณ์ไปตลอดการไหลผ่านตำแหน่งใดๆค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ เช่น $\frac{D\rho}{Dt}$ นี้หมายความว่าต่างไปจากค่าเชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ซึ่งเป็นพจน์สุดท้ายนั้น หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาแน่นในของไหลใดๆที่ผ่านตำแหน่งที่1ไป

ความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการ (12) สามารถประยุกต์เข้ากับค่าคุณสมบัติอื่นๆดังนั้นจึงสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\text{หรือ } \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \quad (2.14)$$

$$\text{โดย } \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \quad (2.15)$$

ซึ่งจะได้พจน์ท้ายดังสมการดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla) &= (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \\ &= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ซึ่งประกอบด้วย2พจน์ย่อยที่มีความเร็วในแต่ละแนวแกนคูณนำหน้าอยู่ ความหมายทางกายภาพจึงเกี่ยวข้องกับการพา(convective derivative) ซึ่งมีบทบาทอย่างมากในการแก้ปัญหากลศาสตร์ของไหลด้วยการคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วัตถุไหลเคลื่อนที่ไปตลอด ค่าคุณสมบัติของวัตถุนี้จะเปลี่ยนแปลงไปโดยตลอดเช่นดัน ไม่ว่าจะ เป็นค่าความหนาแน่น ρ , ความเร็ว u และ v , และอุณหภูมิ T ก่อให้เกิดค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์, $\frac{D\rho}{Dt}$, $\frac{Du}{Dt}$, $\frac{Dv}{Dt}$ และ $\frac{DT}{Dt}$ ที่สอดคล้องกันตามลำดับ ตัวอย่าง ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของอุณหภูมิ

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla T) \quad (2.17)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.18)$$

หมายถึง อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปทั้งหมด (พจน์ทางด้านซ้ายมือ) ของวัตถุที่ไหลไป สมการที่ (17) เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ กล่าวคือ อุณหภูมิของวัตถุของไหลจะ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งโคออร์ดิเนตและเวลา ดังนี้

$$T = T(x, y, t) \quad (2.19)$$

หากประยุกต์กฎลูกโซ่ (Chain rule) ลงในสมการนี้

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (2.20)$$

แต่ว่า $\frac{dx}{dt} = u$ และ $\frac{dy}{dt} = v$ ดังนั้นจะได้

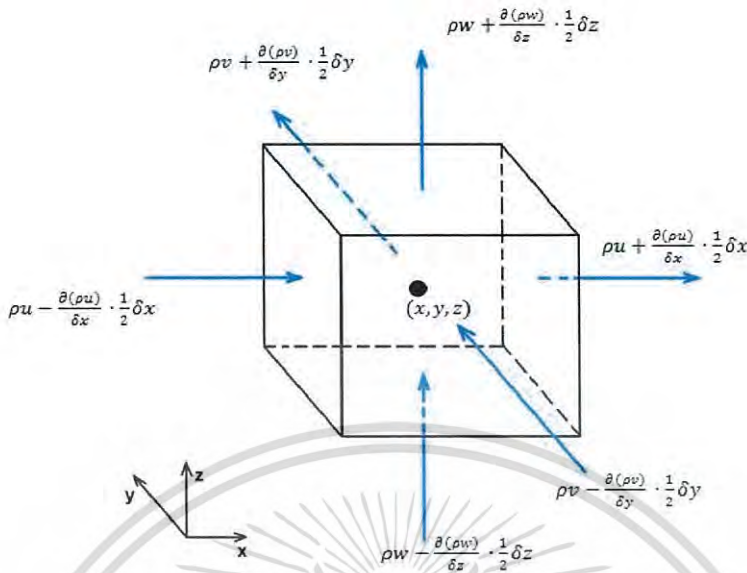
$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.21)$$

โดย $\frac{dT}{dt}$ ทางด้านซ้ายของสมการนี้เรียกว่า ค่าอนุพันธ์รวม (Total Derivative) ซึ่งมีความหมาย เช่นเดียวกันกับค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (Substantial derivative)

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์มวล

สมการต่างๆ ที่ใช้ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลต้องแสดงถึงความเป็นจริงและ ให้ความหมายทางกายภาพ ที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย สมการแรกที่ใช้ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลนี้เป็นสมการของการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) ซึ่งมีความหมาย ให้เข้าใจได้ง่าย ๆ ว่า มวลนั้นไม่สูญหายไปไหน การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์นี้สามารถทำให้เข้าใจได้ โดยง่ายหากพิจารณาการไหลผ่านการไหลของมวลสุทธิผ่านผิวควบคุมออกจากปริมาตรควบคุมซึ่งจะมีค่าเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในปริมาตรควบคุมข้อกล่าวนี้เป็นอีกหลักการหนึ่งที่น่าไปสู่กฎการอนุรักษ์มวลหรือการสมดุลของมวลภายในอีลิเมนต์ ดังนี้

อัตราการเพิ่มของมวลในอีลิเมนต์ของของไหล=อัตราของมวลสุทธิที่ไหลเข้าสู่อีลิเมนต์



รูปที่ 2.2 การไหลของมวลผ่านเข้าออกอีลิเมนต์ ณ ตำแหน่งหนึ่งในโดเมนของไหลเพื่อใช้ในการสร้างสมการเชิงอนุกรมวล(ปรัโมทย์ เดชะอำไพ)¹

พิจารณารูปที่3.2 แสดงอีลิเมนต์ของของไหลที่มีขนาด $\delta(x \delta y \delta z)$ อัตราการเพิ่มขึ้นของของไหลซึ่งเป็นเทอมทางด้านซ้ายของสมการสามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = \frac{\partial(\delta x \delta y \delta z)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} (\delta x \delta y \delta z) \quad (2.22)$$

ลำดับต่อไปพิจารณาทางด้านขวาของสมการข้อกล่าวคืออัตราการไหลของมวลสุทธิที่เข้าสู่อีลิเมนต์ การพิจารณามวลสุทธิก็คือการพิจารณาการไหลเข้าออกของมวลผ่านแต่ละด้านของอีลิเมนต์นั่นเองโดยจะกำหนดให้การไหลของมวลเข้าสู่อีลิเมนต์มีค่าเป็นบวก ส่วนมวลที่ไหลออกมีค่าเป็นลบ

จากรูปที่3.1 กำหนดให้จุดเข้มที่อยู่ตรงกลางอีลิเมนต์เป็นจุดเริ่มต้นของการพิจารณาใช้อนุกรมเทเลอร์กระจายรอบจุดกึ่งกลางเพื่อหาอัตราการไหลของมวลที่ผ่านด้านอีลิเมนต์ในทิศทาง x มีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเป็น $-\frac{1}{2} \delta x$ และ $\frac{1}{2} \delta x$

$$\text{ด้านซ้ายที่ระยะ } -\frac{1}{2} \delta x; m - \frac{\partial m}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \delta x = \left(\rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z$$

$$\text{ด้านขวาที่ระยะ } \frac{1}{2} \delta x; m + \frac{\partial m}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \delta x = \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z$$

ในทำนองเดียวกันนั้นสามารถหาอัตราการไหลของมวลที่ผ่านด้านของอีลิเมนต์ในทิศทาง y และ z

ได้ โดยใช้หลักการเดียวกัน ดังนั้นอัตราการไหลของมวลสุทธิจึงพิจารณาได้จากสมดุลของมวลที่
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์หรือการเชิงอื่นเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาดให้เนาไปใช้ประโยชน์ด้านการการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \text{ผ่านเข้าออกดังนี้ } m_{net} = m_{in} - m_{out} = & \left(\rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z + \left(\rho v - \frac{\partial \rho v}{\partial x} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial x} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left(\rho w - \frac{\partial \rho w}{\partial x} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial x} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned} \quad (2.23)$$

จากหลักการอนุรักษ์มวลที่กล่าวว่ายัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในอีลิเมนต์ (สมการ 2.13) จะเท่ากับอัตราของมวลสุทธิที่ไหลผ่านเข้าอีลิเมนต์ (สมการ 2.22) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta x \delta y \delta z) = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y} - \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.24)$$

จากนั้นทำการหารด้วย $\delta x \delta y \delta z$ จะได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.25)$$

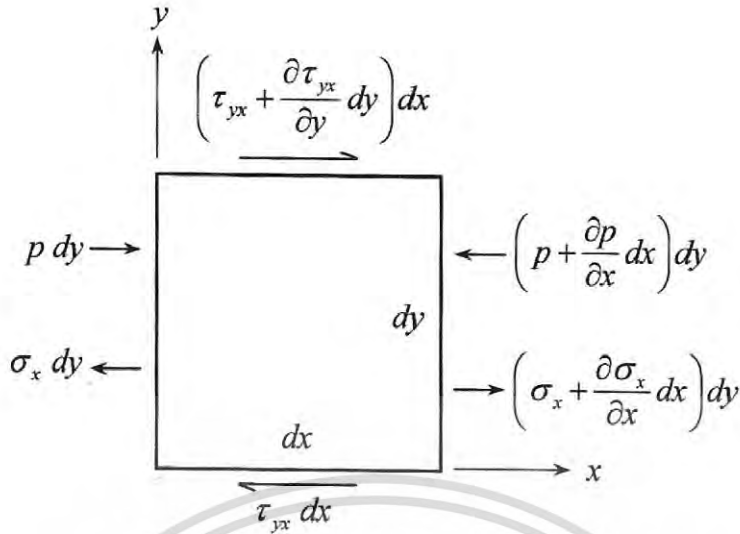
หรือเขียนอยู่ในภาพที่เวกเตอร์ได้เป็นดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.26)$$

สมการ(2.24) นี้คือสมการเชิงอนุกรมมวล ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของความเป็นจริงสมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลโดยบ่งบอกถึงว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหายไปไหนสมการดังกล่าวนี้อยู่ในรูปของพจน์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า (Unknown) ถึง 4 ค่า คือ $\rho, u, v,$ และ w ซึ่งต่างมีการเปลี่ยนแปลงได้ตลอดโดเมนของการไหล ดังนั้น สมการเชิงอนุกรมมวลนี้เพียงสมการเดียวจึงไม่สามารถใช้แก้ไขปัญหาได้ และจำเป็นต้องสร้างสมการของความ เป็นจริงอื่นๆ ในการไหลเพิ่มขึ้นอีก

2.3 สมการเชิงอนุกรมโมเมนตัม (conservation of momentum)

โมเมนตัม คือ ความสามารถในการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งมีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างมวลและความเร็วของวัตถุ ความเป็นจริงชนิดที่สองของการไหลทั่วไปที่สามารถนำมาสร้างเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ได้นั้นมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Second Law) ที่กล่าวไว้ว่า แรงเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร่ง ดังนั้น ในการใช้กฎข้อที่สองของนิวตันที่ต้องมีความสัมพันธ์กับความเร่ง เราจะพิจารณามวล ซึ่งมีขนาดกว้าง $dx,$ และ dy ซึ่งมีความลึกหนึ่งหน่วย ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูปที่ 2.3 แรงต่างๆ ในทิศทางแกน x ซึ่งกระทำไปบนก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับของไหลเพื่อใช้ในการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม(ปราโมทย์ เดชะอำไพ)⁴

เพื่อให้สอดคล้องกับความเข้าใจในการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัมรูปที่ 3.2 แสดงแรงต่างๆ ที่กระทำ ในทิศทางแกน x เท่านั้น กฎข้อที่สองของนิวตันเมื่อพิจารณาในทิศทางแกน x

$$F_x = ma_x \quad (2.27)$$

F_x คือ ผลรวมของแรงในทิศทางแกน x

m คือ มวลของก้อนของของไหล

a_x คือ ความเร่งของมวลในทิศทางแกน x

เมื่อรวมแรงในทิศทาง x จะประกอบไปด้วยแรงที่กระทำที่ผิวต่างๆ และแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง สำหรับแรงที่กระทำที่ผิวนั้นจะประกอบด้วยแรงที่มาจากความดัน p , ความเค้นตั้งฉาก σ_x และความเค้นเฉือน τ_{yx} ดังนั้นเมื่อรวมแรงที่กระทำในทิศทางแกน x ของมวลก้อนนี้คือ

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx \quad (2.28)$$

แรงที่มาจากน้ำหนักตัวเองในทิศแกน x

$$\rho f_x (dxdy) \quad (2.29)$$

ดังนั้นเมื่อรวมแรงที่กระทำในทิศทางแกน x ทั้งหมดทุกพจน์ที่สมการ (2.28) และ(2.29) คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] dx dy + \rho f_x (dx dy) \quad (2.30)$$

ส่วนมวลของของไหลก่อนนี้ คือ

$$m = \rho (dx dy) \quad (2.31)$$

ค่าความเร่ง a_x ของมวลในสมการ (2.27) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของ u ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่ต่อเวลา ดังนั้น a_x คือค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของ u กล่าวคือ

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.32)$$

แทนสมการ (2.30),(2.31) และ(2.32) ลงในกฎข้อที่สองของนิวตัน สมการที่(3.25) แล้วหารตลอดด้วย $(dx dy)$ จะได้ว่า

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.33ก)$$

ในทำนองเดียวกันกฎข้อที่สองของนิวตัน ในทิศทางแกน y ทำให้เกิดสมการอนุพันธ์ ที่สอดคล้องกัน ดังนี้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y \quad (2.33ข)$$

สมการ (2.33ก) และ (2.33ข) เรียกว่า สมการนาเวียร์-สโตก (Navier-Stokes equations) เพื่อเป็นเกียรติแก่ ชาวฝรั่งเศสชื่อ M. Navier และชาวอังกฤษชื่อ G. Stokes ซึ่งสร้างสมการนี้ได้ขึ้นมาเหมือนกัน

สมการนาเวียร์-สโตก ในสมการ (2.33ก) และ (2.33ข) ต่างก็อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ เนื่องจากมาจากการสร้างสมการโดยพิจารณาก่อนมวลของไหลที่เคลื่อนที่ไป ค่าสัมบูรณ์นี้สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาซึ่งเปรียบเสมือนว่าผู้สังเกตจับตาดำเนินอยู่ที่ตำแหน่งหนึ่งแล้วเฝ้ามองการเปลี่ยนแปลงของของไหลที่เคลื่อนที่ผ่านไปโดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.34) ประยุกต์เข้ากับความเร็ว u ดังนี้

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \quad (2.34)$$

ดังนั้น

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho \vec{V} \cdot \nabla u) \quad (2.35)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือพจน์ด้านซ้ายของสมการนาเวียร์-สโตกที่อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถแทนด้วยพจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ(2.35)ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดา และสามารถนำไปใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์มวล สมการที่(2.34) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาได้ เพราะทุกพจน์ในสมการต่างๆ ล้วนอยู่ในค่าอนุพันธ์ธรรมดาแล้ว แต่อย่างไรก็ตาม พจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ(2.26) ยังสามารถทำให้อยู่ในรูปที่ง่ายและสะดวกมากขึ้นอีก และใช้ความสัมพันธ์ของสมการดังต่อไปนี้

เนื่องจาก
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ดังนั้น
$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \quad (2.36)$$

และเนื่องจาก
$$\vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) = u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \vec{\nabla} u$$

ดังนั้น
$$\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u = -u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.37)$$

แทนสมการ(2.35) และ (2.36) ลงในสมการ (2.34) จะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) - u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V})$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) \quad (2.38)$$

ต่อเนื่องจากผลรวมของสองพจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมมีค่าเท่ากับศูนย์ ตามสมการเชิงอนุพันธ์มวลสมการ(2.26) ดังนั้นสมการ (2.38) จึงได้เป็น

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) \quad (2.39)$$

แทนสมการ (2.38) ลงใน (2.33ก) จะได้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.40ก)$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (2.33ข) สามารถเขียนได้

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.40ข)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการ(2.40ก)และ(2.41ข) นี้เรียกว่า สมการนาเวียร์-สโตกที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form)

พจน์ทางด้านขวามือของสมการนาเวียร์-สโตกนี้ ประกอบด้วย ค่าความเค้นตั้งฉากหรือความเค้นเฉือน ซึ่งจำเป็นต้องเขียนให้อยู่ในรูปของความเร็วในแกนต่างๆกัน ซึ่ง ไอแซคนิวตัน ได้เสนอไว้ว่า ค่าความเค้นเหล่านี้แปรผันตรงกับการเปลี่ยนแปลงกับความเร็ว (Velocity Gradient) ซึ่งพบว่า ข้อเสนอี้สามารถใช้ได้กับของไหลในทางปฏิบัติ ทำให้เป็นที่ยอมรับและเรียกของไหลที่มีคุณสมบัตินี้ว่า ของไหลแบบนิวโทเนียน(Newtonian Fluid) ข้อเสนอข้างต้นทำให้เกิดสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเร็ว ดังนี้

$$\sigma_x = \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.41ก)$$

$$\sigma_y = \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.41ข)$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2.41ค)$$

โดย μ คือพลศาสตร์ความหนืด (dynamics viscosity) หรือบางครั้งถูกเรียกว่า ค่าความหนืดที่หนึ่ง (First viscosity) ส่วน λ คือค่าความหนืดที่สอง(second viscosity) ซึ่งสโตกส์ตั้งสมมติฐานไว้ว่า

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.42)$$

และพบว่าสมการดังกล่าวใช้ได้ดีหากของไหลนั้นเป็นแก๊ส แต่หากของไหลนั้นเป็นของเหลว โดยมากปัญหาต่างๆไปนั้นจะไม่เกิดการอัดตัว กล่าวคือ ค่าความหนาแน่นนั้นคงที่ สมการอนุรักษ์มวลนั้นจึงลดรูปลงเป็น $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ หรือ $div \vec{V} = 0$ ทำให้ความหนืดที่สองนี้ไม่ถูกนำมาใช้ในการคำนวณและความเค้นตั้งฉากในสมการ(2.41ก),(2.41ข)และ (2.41ค)จึงมีค่าเป็นสองเท่า ของความหนืดพลศาสตร์คูณกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว ด้วยเหตุผลนี้เองทำให้การค้นคว้าหาความจริงของค่าความหนืดที่สอง จึงไม่ค่อยได้รับความสนใจให้ไม่มีความชัดเจนและยังไม่ได้รับการยืนยันแน่ชัดจนกระทั่งถึงปัจจุบัน

เมื่อแทนค่าความเค้นต่างๆ ที่อยู่ในรูปความเร็วของสมการ(2.41ก),(2.41ข) และ (2.41ค) ลงในสมการ(3.38a)และ(3.38b) ทำให้เกิดสมการนาเวียร์-สโตกที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \rho f_x \quad (2.43ก)$$

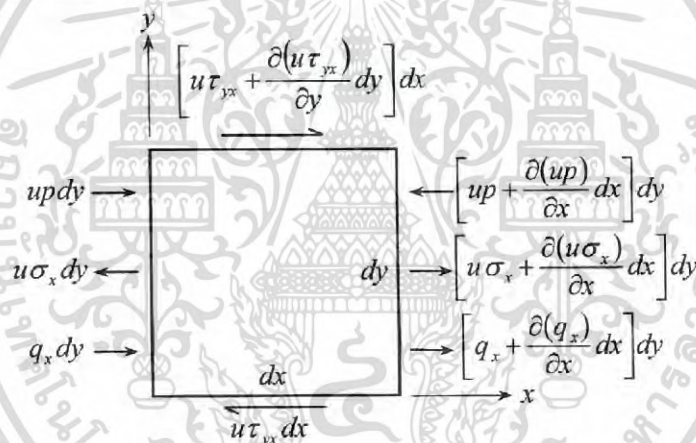
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda (\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho f_y \quad (2.43ข)$$

สมการ(2.43ก)และ(2.43ข) นี้แสดงถึงความซับซ้อนของสมการนาเวียร์-สโตกซึ่งพจน์ต่างๆ นั้นอยู่ในรูปแบบค่าของอนุพันธ์ของตัวไม่รู้ค่ายิ่งไปกว่านั้นพจน์ที่สองและสามทางด้านซ้ายมือของสมการทั้งสองนี้ต่างเป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) ซึ่งทำให้เกิดความซับซ้อนต่อเนื่องในการแก้ระบบเชิงอนุพันธ์ย่อยเช่นนี้ไม่ว่าจะด้วยวิธีเชิงตัวเลขแบบใดก็ตาม

2.4 สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน

การไหลหลายชนิด เช่นการไหลผ่านยานอวกาศที่ขับเคลื่อนด้วยความเร็วสูงหลายเท่าของเสียง หรือการไหลของอากาศร้อนใต้หลังคานั้น ความเร็วของการไหลและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปในของไหลนั้นต่างขึ้นอยู่กับกันและกัน ดังนั้น ความจริงของการไหลใดๆ คือ กฎที่ว่า พลังงานไม่สูญหายไป (conservation of energy) จากรูปแสดงมวลที่มีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูปที่ 2.4 งานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในทิศทางแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลเพื่อใช้ในการสร้างสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน(ปราโมทย์ เดชะอำไพ)⁴

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้กฎข้อที่หนึ่งทางเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆที่กระทำบนก้อนมวลนั้น

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้กฎข้อที่หนึ่งทางเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆที่กระทำบนก้อนมวลนั้น

อัตราการเปลี่ยนแปลง = ปริมาณฟลักซ์ + อัตราของงานที่เกิดขึ้น

ของพลังงานภายใน = ความร้อนที่ให้แก่มวล+เนื่องจากแรงต่างๆของก้อนมวล

หรือ

$$A=B + C \quad (2.44)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หากเริ่มต้นพิจารณาที่พจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงที่กระทำบนก้อนมวลนี้ แรงชนิดแรกคือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลเอง ซึ่งเมื่อความเร็วของการไหลในทิศทางนั้นก่อให้เกิดอัตราของงานคือ

$$\rho \vec{f} \cdot \vec{V} (dx dy)$$

อัตรางานที่เกิดขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy = -\frac{\partial(up)}{\partial x} dx dy$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นตึงฉาก σ_x ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศทาง x คือ

$$\left[u\sigma_x + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right] dx - u\tau_{yx} dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy$$

และอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศ x คือ

$$\left[u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right] dx - u\tau_{yx} dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy$$

ในทำนองเดียวกันอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนมวลในทิศแกน y ก็สามารถสร้างสมการได้เช่นเดียวกัน ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆบนก้อนมวลนี้คือ

$$C = \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \right) + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right] dx dy + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dx dy \quad (2.45)$$

สำหรับพจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลนั้นประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกคือปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนมวล เช่น ปริมาณฟลักซ์ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นได้เองภายในก้อนมวลนั้น (internal heat generation) หากกำหนดให้ \bar{Q} แทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นเองต่อมวลหนึ่งหน่วย ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ที่เกิดขึ้นเองสำหรับก้อนมวลนี้คือ

$$\rho \bar{Q} (dx dy)$$

และจากรูป ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศทางแกน x ผ่านขอบ dy ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของก้อนมวลคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน y ผ่านขอบ dx ทั้งด้านบนและด้านล่างของก้อนมวลคือ

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy$$

ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นของก้อนมวลนี้คือ

$$B = \left[\rho \bar{Q} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.46)$$

แต่จากกฎของฟูรีเยร์(Fourier's law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นแปรผันขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{และ} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.47)$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน(thermal conductivity)ของของไหล ดังนั้นพจน์ B จึงกลายเป็น

$$B = \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.48)$$

ส่วนพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลอันประกอบด้วย พลังงานภายใน (internal energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนไหวของโมเลกุลภายในของไหลนั้น และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากของไหลนั้นเกิดการไหล หาก e แทนพลังงานภายใน และ $\frac{V^2}{2}$ คือพลังงานจลน์ในก้อนมวล เนื่องจากปริมาณมวลทั้งหมดของก้อนมวลนี้คือ $e + \frac{V^2}{2}$ ซึ่งมีหน่วยต่อหนึ่งหน่วยมวล เนื่องจากปริมาณทั้งหมดของก้อนมวลนี้คือ $\rho dx dy$ ดังนั้น พจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปตามการไหลนี้คือ

$$A = \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy \quad (2.49)$$

ทำการแทนพจน์ A ซึ่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจากสมการ(2.49)นี้ และพจน์ B ซึ่งคือปริมาณ ฟลักซ์ความร้อนความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลจากสมการ(2.48)รวมทั้งพจน์ C ซึ่งคืออัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ บนก้อนมวลนั้นจากสมการ (2.45)ลงในสมการ (2.44) แล้วหารตลอดด้วย dx ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial (up)}{\partial x} + \frac{\partial (vp)}{\partial y} + \frac{\partial (u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\sigma_y)}{\partial y} \rho \vec{f} \cdot \vec{v}$$

(2.50)

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน (2.50) ที่สร้างขึ้นมานี้ อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (substantial derivative) ซึ่งจำเป็นต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดา จึงสามารถใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์มวล และสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัมได้ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในสมการการอนุพันธ์พลังงาน (2.50) นี้กระทำบนทั้งพจน์ของพลังงานภายใน e และพจน์ของพลังงานจลน์ $\frac{V^2}{2}$ ดังนั้นเพื่อให้ง่าย จึงต้องแปลงรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียวก่อน ดังนี้

$$\sigma_x = \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{ก})$$

$$\sigma_y = \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{ข})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (\text{ค})$$

เริ่มจากการทำการคูณสมการ (2.3ก) และ (2.3ข) ด้วยความเร็ว u และ v ตามลำดับจะได้

$$\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x \quad (2.51\text{ก})$$

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho v f_x \quad (2.51\text{ข})$$

นำทั้งสองสมการนี้มารวมกัน และเนื่องจาก $u^2 + v^2 = V^2$ ดังนั้นจะได้

$$\rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial x} + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \rho (u f_x + v f_y) \quad (2.52)$$

นำสมการ (2.52) ที่ได้ไปลบออกจากสมการ (2.50) โดยใช้ $\rho \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho (u f_x + v f_y)$ จะ

$$\text{ได้ } \rho \frac{De}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.53)$$

ซึ่งพจน์ทางด้านซ้ายมือประกอบด้วยค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ที่กระทำบนพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียว พจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.53) นี้ยังมีความซับซ้อนน้อยกว่าสมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน (2.50) ซึ่งพจน์เชิงอนุพันธ์ประกอบด้วยค่าความเร็วและความเค้นคูณกันอยู่ภายใน รวมทั้งมีพจน์น้ำหนักก้อนมวล (body force) รวมอยู่ด้วย สมการ (2.53) นี้ยังสามารถเขียนสั้นลงได้อีก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากในความเป็นจริง τ_{xy} นั้นจำเป็นต้องเท่ากับ τ_{yx} เพราะไม่เช่นนั้นแล้วก้อนมวลเล็กๆนี้จะเกิดการหมุนรอบตัวเองหากขนาดของก้อนมวล dx และ dy นี้เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น สมการ (2.53) จึงกลายเป็น

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yx} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.54)$$

จากนั้น แทนค่าความเค้นต่างๆ ในสมการ (2.54) นี้ในรูปแบบของความเร็วโดยใช้สมการ (a-b) จะได้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.55)$$

พจน์ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายในสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ธรรมดาได้ โดยเริ่มจากการใช้คำจำกัดความของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในสมการ (2.55) ประยุกต์เข้ากับค่าพลังงานภายใน e แล้วคูณตลอดด้วยค่าความหนาแน่น ρ จะได้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla e \quad (2.56)$$

แต่จาก

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ดังนั้น

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.57)$$

และจากความสัมพันธ์ของการประยุกต์ไดเวอร์เจนซ์ (divergence) ลงบนผลคูณของปริมาณสเกลาร์ (scalar) และเวกเตอร์ (vector)

$$\nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = e \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \nabla e$$

ดังนั้น

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla e = \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) - e \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.58)$$

แทนสมการ (2.57) และ (2.58) ลงในสมการ (2.56) แล้วจัดพจน์ จะได้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho e \vec{V})$$

และผลรวมของพจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมในสมการข้างบนนี้มีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมการเชิงอนุรักษ์มวล ดังนั้นจึงได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) \quad (2.59)$$

แทนสมการ (2.59) ลงทางซ้ายของสมการ (2.55) จะได้

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) = \rho Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.60)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานที่เขียนให้อยู่ในรูปของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียว

แต่เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานทั้งหมดภายในก้อนมวลนั้นประกอบด้วย

พลังงานภายใน e และพลังงานจลน์ $\frac{V^2}{2}$ ดังนั้น พจน์เชิงอนุพันธ์สมบูรณ์ทางด้านซ้ายของสมการ

(2.54) สามารถเขียนรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้เช่นกัน โดยทำตามขั้นตอนจากสมการ

(2.56-2.59) ด้วยการเปลี่ยนพจน์พลังงานภายใน e ไปเป็นพจน์พลังงานรวม $e + \frac{V^2}{2}$ จะได้

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] \quad (2.60)$$

แทนสมการ (2.60) ลงในสมการ (2.50) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] = \rho Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial(\rho p)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho p)}{\partial y} + \frac{\partial(u \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v \sigma_y)}{\partial y} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \quad (2.61)$$

2.5 ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์

สมการเชิงอนุพันธ์มวล โมเมนตัม และพลังงานซึ่งได้จากการสร้างสมการขึ้นจากความจริงที่ว่า มวลนั้นไม่มีสูญหาย การใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน และพลังงานนั้นไม่มีการสูญหายตามลำดับ ซึ่งจะก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์มวล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.62)$$

สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

$$\text{แกน X; } \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.63)$$

$$\text{แกน Y; } \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y \quad (2.64)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการอนุพันธ์เชิงพลังงาน

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{v} \right] - \rho Q - \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial (u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\sigma_y)}{\partial y} + \rho \vec{f}_y \cdot \vec{V} \quad (2.65)$$

จากนั้นทำการสร้างสมการที่ต่อเนื่องอันเป็นผลมาจากการประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น โดยไม่ต้องกังวลว่าสมการนั้นจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์มวล โมเมนตัม หรือพลังงาน สมการต่อเนื่องที่สร้างขึ้นจะสามารถใช้ได้กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยใดๆ ซึ่งจากสมการเชิงอนุพันธ์มวลสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัมและ สมการอนุพันธ์เชิงพลังงาน ทำให้การสร้างสมการต่างๆ นั้นมีความยุ่งยากลดลงเพิ่มความมั่นใจในความถูกต้อง อย่างไรก็ตามสมการที่กล่าวมานั้นบ่งบอกถึงความยากเป็นอย่างยิ่งที่จะแก้ด้วยการวิเคราะห์โดยวิธีทางคณิตศาสตร์แต่เพียงอย่างเดียวเพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ซึ่งความยากของสมการเหล่านี้อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equations) ซึ่งยากที่จะหาผลเฉลยแม่นยำตรงถึงแม้ว่าเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) และลักษณะรูปร่าง (geometry) ของปัญหานั้นจะง่ายเพียงไรก็ตาม สาเหตุดังกล่าวนี้เอง ทำให้การแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CFD) ได้เข้ามามีบทบาทอย่างมากในปัจจุบัน

2.5.1 เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)

สำหรับปัญหาที่ทำการศึกษา ในกระบวนการแก้ปัญหาในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นเงื่อนไขขอบเขตเป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน

2.5.2 ลักษณะรูปร่าง (geometry)

ของปัญหา รูปแบบของปัญหาด้านกลศาสตร์ของไหลโดยทั่วไปในงานวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ล้วนมีรูปร่างที่ซับซ้อนหากรูปร่างมีการเปลี่ยนแปลงไปจะทำให้การไหลที่เกิดขึ้นนั้นเปลี่ยนแปลงไปด้วยเช่นกันถึงแม้ว่าระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและเงื่อนไขขอบเขตยังเป็นเช่นเดิม หากองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งเปลี่ยนแปลงไปผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก็จะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย

2.5.3 ความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method)

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้ประกอบด้วย ความรู้ในฟังก์ชันของการประมาณภายใน (interpolation function) การดิฟเฟอเรนเชียล และ อินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical differentiations and integrations) ความรู้พื้นฐานในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (Partial differential equations) และ ที่สำคัญที่สุดคือ สมการพีชคณิต (system of algebraic equations) ซึ่งอาจอยู่ในรูปแบบของเชิงเส้นที่ประกอบด้วย n สมการ

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

โดย $\{X\}$ เป็นเวกเตอร์ (Vector or column matrix) ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ $\{B\}$ เป็นเวกเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวรู้ค่าจำนวน n ค่า ตัวอย่างที่ได้กล่าวขึ้นมาี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งสามารถนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพบน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เครื่องคอมพิวเตอร์ เนื่องจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลโดยทั่วไป ล้วนประกอบด้วย พจน์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear terms) ระบบสมการที่เกิดขึ้นจะอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นตามกันด้วย

$$[A(x)]\{x\} = \{B\}$$

ทำให้ต้องแก้ระบบสมการแบบไม่เชิงเส้นดังกล่าวหลายครั้งด้วยระบบการทำซ้ำ (iteration technique) เช่น ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration method) เป็นต้น

2.5.4 ความรู้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method)

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method, finite element analysis) หรือที่เรียกย่อๆว่า FEM คือเทคนิควิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการหาคำตอบโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพร้อมกับสมการปริพันธ์ ผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีนี้มีพื้นฐานมาจากทั้งการกำจัดสมการเชิงอนุพันธ์อย่างสมบูรณ์ (สำหรับปัญหาที่อยู่ในสภาวะคงที่) หรือการปรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ให้กลายเป็นระบบโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญซึ่งเป็นปริพันธ์ทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้เทคนิคมาตรฐานทางคณิตศาสตร์เช่น Euler method Runge-Kutta methods ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น ปัญหาพื้นฐานคือการสร้างสมการที่สามารถประมาณค่าสมการที่กำลังสนใจศึกษาแต่มีความแน่นอนทางด้านตัวเลข ซึ่งหมายความว่าความคลาดเคลื่อนในข้อมูลนำเข้า (input) และการคำนวณระหว่างกลางจะไม่ถูกรวมเข้าไป และและส่งผลให้ข้อมูลส่งออก (output) ไร้ความหมาย ซึ่งวิธีการนั้นมีหลายวิธีซึ่งแต่ละวิธีก็มีข้อดีข้อเสียที่แตกต่างกันออกไป ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นทางเลือกที่ดีในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในขอบเขตที่ซับซ้อน (complex domains) (เช่นในรอยนต์หรือท่อส่งน้ำมัน) เมื่อขอบเขตมีการเปลี่ยนแปลง (เช่นในช่วงปฏิบัติการโพลีเมอไรเซชันที่ขอบเขตมีการเคลื่อนที่ (solid state reaction with a moving boundary) หรือเมื่อผลแม่นยำตรงที่ต้องการมีการเปลี่ยนแปลงตลอดขอบเขต หรือเมื่อผลลัพธ์ไม่มีความราบเรียบแบบลักษณะการไหลที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากทฤษฎีของการไหลที่กล่าวมาข้างบนนั้น สมการเชิงอนุพันธ์เป็นพื้นฐานให้แก่การคำนวณหาลักษณะการไหลแบบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งจะนำไปประยุกต์ใช้ต่อการไหลที่มีประเภทแตกต่างกัน ซึ่งในทางวิศวกรรมแล้วได้แยกประเภทการไหลของของไหลออกเป็น ชนิดด้วยกัน ได้แก่ การไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัว หรือเรียกอย่างหนึ่งว่า เป็นการไหลแบบศักย์ (Potential Flow) ซึ่งตั้งอยู่บนสมมติฐานหลายๆอย่างอันเป็นผลให้การวิเคราะห์ทำได้โดยสะดวกนับตั้งแต่สมมติว่าเป็นการไหลแบบไร้ความหนืด (Inviscid Flow) ที่ไม่เกิดการหมุนวน (Irrotational Flow) ภายใต้อสภาวะ ซึ่งของไหลมีความหนาแน่นคงที่ (Incompressible flow) เป็นต้น เป็นการทำให้เข้าใจปรากฏการณ์พื้นฐานของการไหลคร่าว ๆ ได้สมมติฐานดังกล่าวโดยทั่วไปแล้วสามารถใช้ได้เฉพาะกับการไหลที่ค่อนข้างห่างจากผนังซึ่งมีขอบชั้น (Boundary Layer) ที่มีความเสียดทานเกิดขึ้น และในขณะเดียวกันเราจะสมมุติการไหลนี้ว่าเป็นการไหลแบบไม่เกิดการอัดตัวกล่าวคือค่าความหนาแน่น ρ นั้นคงที่. การไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัว การไหลลักษณะนี้เกิดขึ้นกับปัญหาหลายๆอย่างในปัจจุบัน ลักษณะของปัญหาครอบคลุมตั้งแต่การไหลของของเหลวภายนอก เช่นการคำนวณหาสภาวะการเปลี่ยนแปลงของอากาศผ่านเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูง ซึ่งการไหลรอบลำตัวเครื่องบินเกิดการอัดตัวได้รวมไปถึงปัญหาการไหลของของเหลวภายใน (Internal Flows) เช่นการคำนวณหาภาวะของแก๊สในเครื่องยนต์แบบกังหันที่มีความเร็วสูง เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเนื่องจากลักษณะรูปร่างขอบเขตของปัญหาดังกล่าวนั้นปกติจะซับซ้อน หนึ่งการแก้ปัญหาคำนวณแบบไม่เหน็ดแต่มีการอัดตัวนี้โดยปกติแล้วต้องการแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อและเอลิเมนต์เป็นจำนวนมากประกอบกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาเช่นนี้ประกอบด้วยสมการย่อยหลายสมการซึ่งอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะชั่วคราววิธีการแก้สมการเหล่านี้และเวลาที่จำเป็นต่อการใช้ในการคำนวณต้องถูกนำมาคำนึงเป็นอย่างมาก การไหลแบบหนืด แต่ไม่อัดตัว เป็นปัญหาการไหลอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเกิดขึ้นในงานหลายๆชนิดในทางวิศวกรรมศาสตร์เช่น ในกระบวนการหล่อโลหะหรือเซรามิก ซึ่งการไหลนั้นเป็นไปอย่างช้า ๆ เนื่องจากความหนืด การไหลชนิดนี้บางครั้งเรียกกันว่า การไหลแบบคืบคลาน (Creeping Flow) หรือการไหลแบบสโตกส์ (Stokes Flow) ซึ่งแรงของความเฉื่อย (Inertia Force) นั้นน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับแรงของความหนืด (Viscous Force) นั่นคือค่าเรย์โนลด์ (Reynolds's Number) ซึ่งแสดงอัตราส่วนระหว่างแรงสองชนิดนี้นั้นมีค่าต่าง การไหลแบบหนืด และมีการอัดตัว เป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหลที่มีความซับซ้อนมากที่สุด เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในงานการออกแบบปัญหาทางวิศวกรรมสมัยใหม่ เช่น การคำนวณหาภาวการณ์แปรปรวนของอากาศรอบตัวยานที่บินด้วยความเร็วสูงกว่าเสียงถึง 25 เท่า เป็นต้นภาวะการแปรปรวนของอากาศดังกล่าวปกติจะประกอบด้วยคลื่นช็อก (Shock Waves) ซึ่งลักษณะรูปร่าง และตำแหน่งที่ไม่สามารถทราบได้ก่อนการคำนวณทำให้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากเพื่อสามารถจับลักษณะของการกระจายของผลลัพธ์ซึ่งแสดงถึงคลื่นช็อกนั้นได้ ยิ่งไปกว่านั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลแบบหนืดและมีการอัดตัวนี้ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหลายสมการที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน และต่างอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นทำให้การคำนวณนั้นมีความซับซ้อน ประกอบกับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กๆเป็นจำนวนมากดังที่อธิบายมาการคำนวณจึงต้องใช้เวลามากและต้องการคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจำสูงตามไปด้วยจากรูปแบบการไหลของของไหลในลักษณะต่างๆกันนี้ในการศึกษาการแก้ปัญหโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยซอฟต์แวร์จะเน้นไปที่การศึกษารูปการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว เนื่องจากเป็นการไหลที่คล้ายในสภาพแวดล้อมตัวจริงมากที่สุดเช่น การไหลของอากาศในธรรมชาติ การไหลของแก๊ส ส่วนการไหลแบบอื่นนั้นจะไม่ทำการศึกษา

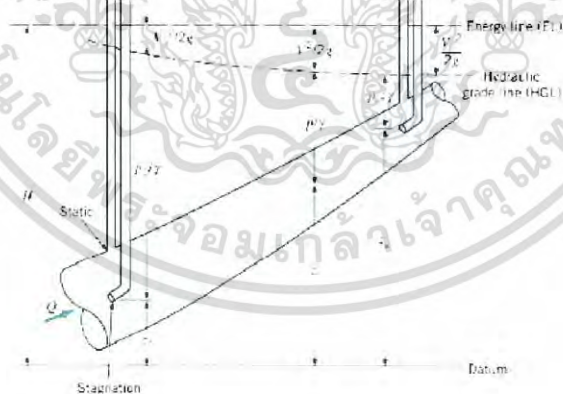
2.5.5 ปัญหาการไหลแบบหนืด

การไหลแบบหนืด (Incompressible Viscous Flow) เป็นการไหลที่เกิดขึ้นรอบตัวและพบเห็นกันอยู่ทั่วไปนับตั้งแต่กระแสลมพัดผ่านบ้าน ผ่านต้นไม้การไหลหมุนวนของอากาศเย็นในห้องแอร์หรือในอาคารสนามบินขนาดใหญ่การไหลของกระแสในแม่น้ำลำคลอง รวมไปถึงในตู้เลี้ยงปลา หากผู้ออกแบบสามารถวิเคราะห์และทราบถึงสภาวะของการไหลได้ล่วงหน้าก็สามารถปรับปรุงลักษณะของการออกแบบเพื่อให้การไหลเกิดประสิทธิภาพสูงสุดเช่น ควรจะออกแบบรูปร่างของบ้านทั้งภายใน และภายนอกเช่นไร เพื่อให้อากาศเกิดการถ่ายเทได้สะดวกโดยไม่มีมุมอับ จะออกแบบวางเครื่องปรับอากาศ ณ ตำแหน่งใดเพื่อทำให้ภายในห้องแอร์หรือในอาคารสนามบินนั้นเย็นโดยสม่ำเสมอ เป็นต้นลักษณะการไหลของของไหลผ่านรูปร่างซับซ้อนใดๆ สามารถคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บนพื้นฐานจะเริ่มจากการอธิบายสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์สโตกส์ (Navier-Stokes Equation) อันประกอบด้วยสมการของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) และสมการของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentums) ที่สามารถใช้วิเคราะห์หาสภาวะการไหลแบบหนืดได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ขึ้นอยู่กับกันและกัน (Coupled Equation) อีกทั้งยังอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equation) ทำให้การคำนวณไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำนวณนั้นมีความซับซ้อนเมื่อเปรียบเทียบกับปัญหาอื่นๆ ของการไหลประเภทอื่นระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีวิธีการคำนวณไปตามลักษณะของการไหลด้วยการหาผลลัพธ์แบบแยกส่วน (Characteristic-Base Split) ที่เรียกกันโดยย่อว่าวิธีซีบีเอส (CBS) ได้นำมาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อเนื่องจากที่สอดคล้องกัน โดยโปรแกรมที่จะนำเสนอเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์การไหลของอากาศนั้น ผู้เขียนโปรแกรมได้ฝังโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้อยู่ในโปรแกรม EasyFEM เพื่อให้มีความสะดวกในการใช้วิเคราะห์ผลลัพธ์ต่างๆที่เกิดขึ้น แสดงถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ช่วยให้ผู้วิเคราะห์เห็นปรากฏการณ์ของการไหลด้วยสื่ออย่างชัดเจน ทำให้เกิดความเข้าใจลึกซึ้งถึงสถานะของการไหลในปัญหานั้นได้มากยิ่งขึ้น และที่สำคัญที่สุดจะก่อให้เกิดความต้องการในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอื่นๆมากขึ้นไปอีก ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุที่ว่า ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมักประกอบด้วยสถานะของการไหลที่คาดเดาไม่ได้ล่วงหน้ารวมทั้งเมื่อดูผลลัพธ์แล้ว พื้นสีและเวกเตอร์ความเร็ว ทำให้เกิดความน่าสนใจเสมอ

2.5.6 สมการพื้นฐานของการไหล

ในรูปที่ 2.3 แสดงการไหลของของไหล เมื่อกำหนดพื้นที่ตัดขวาง (Cross Section Area) ให้เป็น A [m²] ความเร็วเฉลี่ยในการไหลผ่านพื้นที่ตัดขวางเป็น V [m/s] และคิดให้เป็นการไหลแบบคงตัว (Steady Flow) ตัวเลข 1 และ 2 ที่เป็นตัวห้อยจะหมายถึงพื้นที่ตัดขวางที่ตำแหน่งที่ 1 และ ตำแหน่งที่ 2

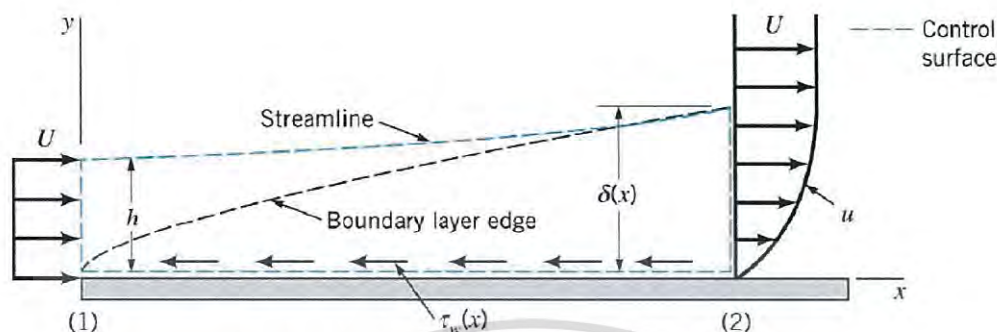


รูปที่ 2.5 การไหลในสภาวะปกติ [2]

2.5.7 การไหลของของไหลที่คิดความหนืด

การไหลแบบราบเรียบ หรือการไหลเป็นชั้นๆ (Laminar Flow) กับ การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) ดังที่ได้แสดงในรูปที่ 2.4 เมื่อของไหลซึ่งมีความหนืดไหลไปตามผิวของวัตถุ ความหนืดของของไหลจะทำให้อนุภาคเล็กๆ ของของไหลยึดติดอยู่กับผิวของวัตถุ โดยมีความเร็ว $U = 0$ เป็นเหตุให้ของไหลเมื่อยิ่งเข้าใกล้ผิววัตถุมากยิ่งขึ้นจะทำให้เกิดชั้นบางๆ ที่มีการเปลี่ยนแปลงเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่บนสื่อออนไลน์ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความเร็วของการไหลมากยิ่งขึ้น ในชั้นนี้เรียกว่า “ชั้นขอบเขตของความเร็ว (Velocity Boundary)” ส่วนการไหลที่อยู่นอกขอบเขตนี้ไปเรียกว่า “เส้นการไหลหลัก (Mainstream)” ซึ่งสามารถจะตัดทิ้งผลกระทบจากความหนืดได้



รูปที่ 2.6 ชั้นขอบเขตของความเร็วที่ถูกสร้างขึ้นมาเมื่อมีการไหลที่ผิวของวัตถุ[2]

ชั้นขอบเขตของการไหลนี้จะแบ่งออกเป็นชั้นขอบเขตการไหลแบบราบเรียบ(ไหลเป็นชั้น) (Laminar Flow) กับ ชั้นขอบเขตของการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) การไหลภายในชั้นขอบเขตการไหลเป็นชั้นนั้น จะมีเส้นของการไหลอย่างเป็นระเบียบเกิดขึ้น และเนื่องมาจากความหนืดที่มีอยู่ในโมเลกุลเล็ก ๆ ของไหลจะทำให้เกิดแรงเฉือน (Shear) τ [Pa] ขึ้นในการไหล โดย

$$\tau = \mu \cdot \frac{dU}{dy} \quad (1)$$

ในสมการนี้ค่า μ (Viscosity) [Pa*s] เป็นค่าความหนืดของของไหล เป็นค่าที่แสดงถึงการส่งถ่ายปริมาณโมเมนตัมในการไหลอันเนื่องมาจากการเคลื่อนไหวของโมเลกุลของการไหล

ขณะเดียวกันการไหลภายในชั้นของขอบเขตการไหลแบบปั่นป่วนนั้น จะไม่มีสมการตายตัว การไหลจะเป็นลักษณะที่ไม่มีระเบียบ (Disorder) แรงเฉือนที่เกิดในของไหลจะหาได้จาก

$$\tau = \rho \cdot (v + \epsilon m) \quad (2)$$

โดยค่า ν คือค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดเชิงจลนศาสตร์ (Kinematic Viscosity) μ/ρ ส่วนค่า ϵm [m²/s] เป็นค่าสัมประสิทธิ์เชิงจลนอลวน (หรืออาจจะเรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์การกระจายปริมาณโมเมนตัมอลวน ระดับความหนืดเชิงจลนศาสตร์) ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นถึงผลลัพธ์ของการขนถ่ายโมเมนตัมอันเนื่องมาจากการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างมากโดยจะขึ้นอยู่กับชนิดของการไหล และชนิดของของไหล ในการแยกการไหลว่าจะเป็นการไหลแบบเป็นชั้น (ไหลแบบราบเรียบ) หรือเป็นการไหลแบบปั่นป่วนสามารถแยกได้โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ ที่ไม่มีมิติที่เรียกว่า “ค่าเรย์โน Re (Reynolds Number)” เป็นตัวกำหนดในการแยกการไหล โดย

$$Re = (\text{ความเร็วในการไหล}) \times (\text{ความยาว}) / \text{ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดเชิงจลนศาสตร์}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

= แรงขับเคลื่อนของการไหล / ความหนืดในการไหล

$$R_e = \frac{VL}{\nu} \quad (3)$$

ค่าเรย์โนที่อยู่ในระหว่างเปลี่ยนจากการไหลแบบเป็นชั้นไปสู่การไหลแบบปั่นป่วนนั้นเรียกว่า “ค่าเรย์โนวิกฤติ (Critical Reynolds)” และสำหรับของไหลที่ประพฤติตามสมการที่ (2.10) จะเรียกว่า “ของไหลนิวโทเนียน (Newtonian Fluid)” ส่วนของไหลที่ไม่ประพฤติตามจะเรียกว่า “ของไหลที่ไม่ใช่ของไหลนิวโทเนียน (Non-Newtonian Fluid)” (ยกตัวอย่างเช่น ยาง) เนื่องจากค่าเรย์โนเป็นค่าอัตราส่วนระหว่างแรงขับเคลื่อนของการไหลต่อความหนืด ดังนั้นจะเห็นว่าถ้าค่าเรย์โนมีค่ามากก็สามารถแสดงเป็นเชิงสัมพันธ์ให้เห็นว่าผลกระทบ (Effect) ของค่าความหนืดจะมีค่าน้อย

2.5.8 การไหลในท่อกลม

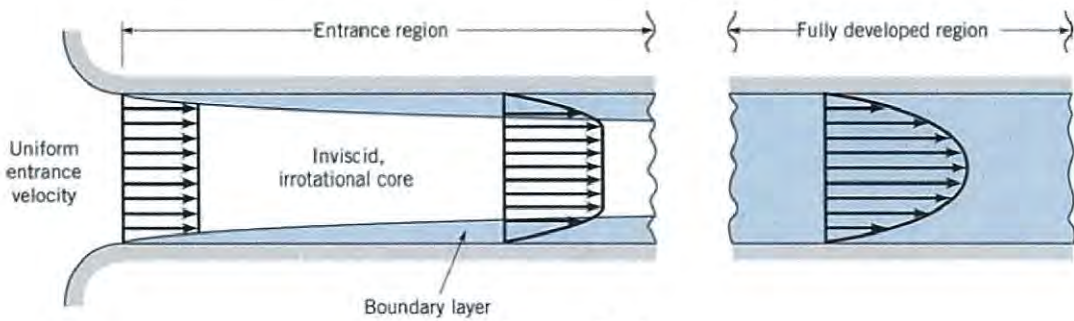
การไหลในท่อกลมที่บริเวณทางเข้าท่อที่แสดงในรูปที่ 2.5 นั้นจะเห็นว่าตั้งแต่ที่บริเวณทางเข้า ชั้นขอบเขตของความเร็วจะค่อยๆพัฒนาเพิ่มขึ้นที่ละเล็กที่ละน้อย จนถึงระยะทางค่าหนึ่ง (L_e) ชั้นของความเร็วจะซ้อนกันทั้งบน และล่าง หลังจากนั้นการกระจายความเร็วจะไม่มี การเปลี่ยนแปลง เรียกว่าการไหลได้พัฒนาได้อย่างสมบูรณ์ (Fully Developed) ค่าเรย์โน Re สำหรับการไหลภายในท่อนั้นถ้าให้ V เป็นค่าความเร็วเฉลี่ย D เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางภายในของพื้นที่ตัดขวางท่อแล้วจะได้

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{[M/(\pi D^2/4)] D}{\mu} \quad (4)$$

อนึ่งค่า ρV [$\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$] จะเป็นค่าการไหลของมวลสารต่อพื้นที่หน้าตัดในการไหล สำหรับในกรณี

ของแก๊สนั้น การเพิ่มความร้อนภายในท่อจะทำให้แก๊สขยายตัวมีความเร็ว V เพิ่มขึ้น ค่า ρV จะไม่เปลี่ยนแปลงถ้าพื้นที่หน้าตัดมีค่าคงที่ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่สะดวกในการคำนวณ นอกจากนั้นโดยปกติจะถือว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืด μ จะไม่เปลี่ยนแปลงไปกับความดันอีกด้วย ส่วนค่าความหนืดเชิงจลนศาสตร์ ν ซึ่งเท่ากับ μ/ρ ในกรณีของแก๊สจะเป็นค่าที่ผกผันกับความดันซึ่งจะต้องระมัดระวัง

ค่าเรย์โนวิกฤติ Rec ของการไหลภายในท่อที่ได้พัฒนาได้อย่างสมบูรณ์แล้ว คือค่าเรย์โน ที่การไหลเปลี่ยนจากการไหลราบเรียบไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วนจะมีค่า $Rec = 2300$ หรืออยู่ในช่วงระหว่าง $2000 - 4000$ โดยประมาณ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความปั่นป่วนในการไหล ความขรุขระภายในท่อที่ไหล หรือรูปทรง และสภาพของทางเข้า ส่วนค่าเรย์โนที่ต่ำกว่า 2000 ไม่ว่าท่อจะมีความยาวมากเพียงใด การไหลก็จะไม่เปลี่ยนแปลงไปสู่การไหลแบบปั่นป่วน จะยังคงรักษาสภาพการไหลแบบเป็นชั้น หรือราบเรียบต่อไป



รูปที่ 2.7 การไหลภายในท่อกลม [2]

การไหลแบบเป็นชั้น/การไหลแบบราบเรียบภายในท่อกลม รูปที่ 2.5 เป็นรูปที่แสดงให้เห็นว่าการกระจายความเร็วที่ได้พัฒนาอย่างสมบูรณ์แล้วจะเป็นรูปพาราโบลา ถ้าให้ V เป็นความเร็วเฉลี่ยในการไหล และให้ U_c เป็นความเร็วที่จุดศูนย์กลางของท่อเราสามารถแสดงความสัมพันธ์กันได้อันนี้

$$V = \frac{\dot{M}}{\rho(\pi D^2/4)} = \frac{U_c}{2} \quad (5)$$

ในท่อที่มีความยาวเป็น L จะมีการสูญเสียพลังงานอันเนื่องมาจากการสูญเสียความดันคือ Δp [J/kg] ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{64}{R_e} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \quad (6)$$

ในที่นี้ $\Delta p/\rho$ จะเรียกว่า “ความดันที่สูญเสียไป” การไหลแบบปั่นป่วนภายในท่อกลม ($Re > 4000$) รูปที่ 2.5 แสดงให้เห็นการกระจายความเร็วที่ได้พัฒนาได้อย่างสมบูรณ์การกระจายความเร็วจะมีความสัมพันธ์กับเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ ความเร็วเฉลี่ยหาได้จาก

$$V = 0.82 U_c \quad (7)$$

อนึ่งสำหรับการไหลภายในท่อที่ไม่ใช่ท่อกลมนั้นจะใช้ค่าเส้นผ่านศูนย์กลางเทียบเท่า (เส้นผ่านศูนย์กลางสมมูล) D_e ซึ่งหาได้จาก

$$D_e = \frac{4A}{L_p} \quad (8)$$

โดย A จะเป็นพื้นที่หน้าตัดในการไหล L_p จะเป็นความยาวเส้นรอบรูปของพื้นที่หน้าตัดของของไหลที่สัมผัสผนังของท่อ ในกรณีของท่อกลม $D_e = D$

2.5.9 การขนส่งของไหล

ความดันที่สูญเสียไปในท่อตรงการไหลในท่อตรงนั้น การสูญเสียทั้งหมดจะเกิดขึ้นมาจากแรงเสียดทานระหว่างชั้นของของไหลที่อยู่ติดกับผนังของท่อ หรือความหนืดโดยความดันที่สูญเสียไปเนื่องจากแรงเสียดทาน Δp สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\Delta p}{\rho} = f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \quad (9)$$

โดยในที่นี้ค่า f จะเรียกว่า “ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของท่อ (Friction Factor)” และค่า L เป็นค่าความยาว, ค่า D เป็นค่าของเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ, ส่วนค่า V เป็นค่าความเร็วเฉลี่ยของการไหล จากความสัมพันธ์ของค่า V และ Q ในสมการที่ (2.3) ซึ่ง $V = Q/(\pi D^2/4)$ เมื่อแทนค่านี้ลงไป ในสมการข้างบนจะได้ว่า

$$\frac{\Delta p}{\rho} = 8fL \cdot \frac{Q^2}{\pi^2 D^5} \quad (10)$$

จากสมการข้างบนจะเห็นได้ชัดเจนว่า ค่าความดันที่สูญเสียไป Δp ของท่อที่ยาว L และมีอัตราการไหล Q จะเป็นปริมาณที่ผกผันกับเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อยกกำลัง 5

กรณีการไหลแบบราบเรียบ

จากสมการที่(6)

$$f = \frac{64}{Re} \quad (11)$$

กรณีการไหลแบบปั่นป่วน

โดยทั่วไปจะเป็นสมการที่ได้จากการทดลอง

$$f = \frac{0.316}{R_e^{1/4}} \quad (12)$$

จากสมการข้างบนจะเห็นว่าค่า f ในกรณีของการไหลแบบปั่นป่วนนั้นจะเป็นฟังก์ชันที่ไม่ได้ขึ้นกับค่า Re มากนัก ในทางปฏิบัติจริงๆ สามารถใช้เป็นค่าคงที่ได้ แต่ในกรณีของการไหลแบบราบเรียบนั้นค่า f จะแปรผกผันกับค่า Re (หรือกล่าวได้ว่าแปรผกผันกับค่า V , D) ในสมการที่ (2.21) ค่า f เป็นค่าของท่อที่ผิวเรียบ สำหรับค่า f ของท่อที่มีผิวขรุขระและค่า Re มีค่ามากๆ ค่า f สามารถหาได้จากแผนภาพที่แสดงความสัมพันธ์กันระหว่างค่า f และค่า Re ซึ่งมีชื่อว่าแผนภาพมูดี้(MoodyDiagram)

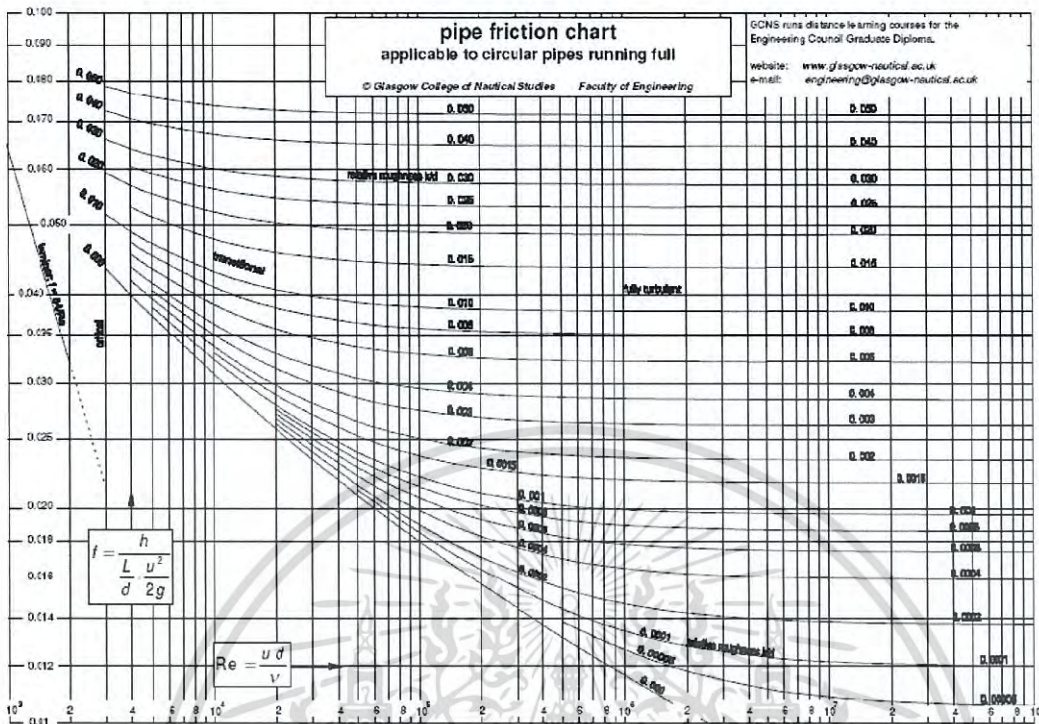
2.5.10 องค์ประกอบที่ทำให้เกิดการสูญเสียความดันในการไหลภายในท่อ

เมื่อเกิดการไหลภายในท่อ จะเห็นว่าเป็นกระบวนการที่ผันกลับไม่ได้ที่จะต้องมีการสูญเสียพลังงานจำนวนหนึ่งสูญเสียไป โดยความดันจะลดลง ความดันที่สูญเสีย Δp ไปนี้ สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$\frac{\Delta p}{\rho} = 0.5KV^2 \quad (13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยในที่นี้ ค่า K จะเป็นค่า “สัมประสิทธิ์ของการสูญเสียความดัน



รูปที่ 2.8 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า f และค่า Re [2]

โดยค่าสัมประสิทธิ์ของการสูญเสียความดันที่บริเวณทางเข้าท่อจะขึ้นอยู่กับรูปทรงและสภาพของท่อทางเข้าโดยทั่วไปจะมีค่าอยู่ในช่วงประมาณ 0.5 ส่วนที่ทางออกของท่อจะมีค่าประมาณ 1.0 ส่วนที่ 90 องศาจะมีค่าประมาณ 0.5 - 0.75 นอกจากนี้ในกรณีที่มีการสูญเสียความดัน Δp เกิดขึ้นในท่อ มักจะเขียนในรูปการสูญเสียพลังงานที่ไม่เกิดประโยชน์ต่อหน่วยของเวลา

นั่นคือ $\frac{\Delta E_{loss}}{\Delta t}$ เขียนเป็นสมการได้ดังนี้คือ

$$\frac{\Delta E_{loss}}{\Delta t} = \frac{\Delta p \cdot M}{\rho} = \Delta p \cdot Q \quad (14)$$

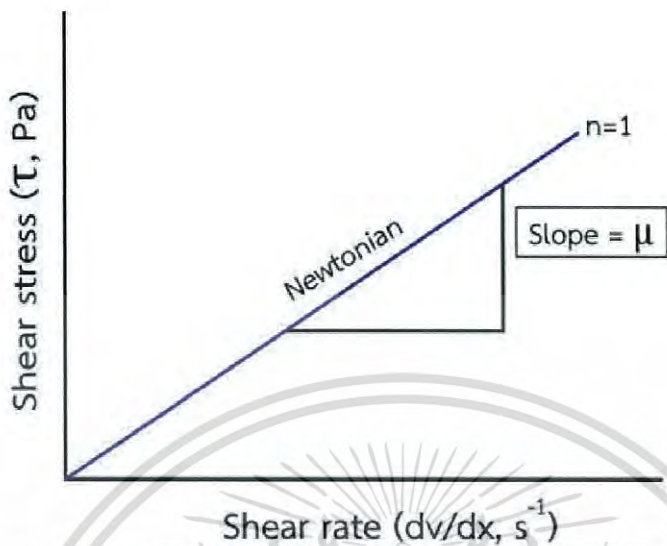
2.5.11 Newtonian Fluid

ค่าความหนืดจะคงที่ไม่ขึ้นกับอัตราเฉือนของไหลประเภทนี้เป็นของเหลวที่เป็นเนื้อเดียวไม่มีอนุภาคแขวนลอยตัวอย่างของไหลประเภทนี้ ได้แก่ น้ำ น้ำมันพืช น้ำส้มสายชู น้ำเกลือ น้ำเชื่อม นมขาดมันเนย (skim milk) เครื่องดื่ม เช่นน้ำผลไม้ชนิดใส เช่น น้ำแอปเปิ้ล เครื่องดื่มแอลกอฮอล์ เช่น เบียร์ ไวน์ เป็นต้น

ชนิดของ Newtonian fluid

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

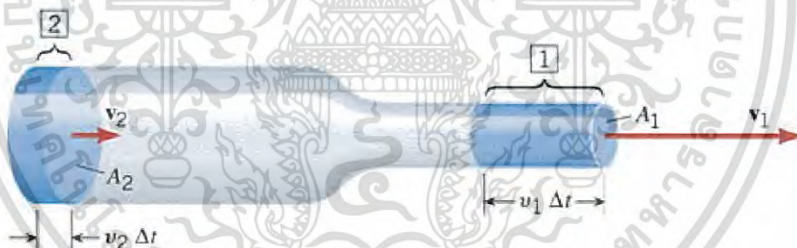
ความสัมพันธ์ระหว่างกราฟ $\tau - \dot{\gamma}$ เริ่มต้นที่จุด 0 จากนั้นเส้นกราฟ $\tau - \dot{\gamma}$ เป็นเส้นตรงและความชันของกราฟที่ได้คือ ค่าความหนืด



รูปที่ 2.8 ค่าความสัมพันธ์ของเส้นกราฟสัมพันธ์ดังกล่าว คือค่าสัมประสิทธิ์ความหนืด [3]

2.5.12 สมการความต่อเนื่อง

เป็นสมการที่ใช้ศึกษาการไหลของของไหลภายในท่อ การไหลของของไหลในท่อที่มีขนาดไม่สม่ำเสมอ ไหลจากปลาย ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด A_2 ไปยังปลายซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด A_1 ดังรูป



รูปที่ 2.9 การไหลของของไหลจากพื้นที่หน้าตัด A_2 ไปยังพื้นที่หน้าตัด A_1 [3]

เนื่องจากของไหลไม่สามารถไหลผ่านผนังท่อและไม่มีการสร้างหรือทำลายของไหลในท่อ ดังนั้นมวลของของไหลที่ผ่านแต่ละส่วนของท่อ การไหลในเวลา Δt เดียวกันจึงมีค่าเท่ากัน

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

เนื่องจากของไหลอุดมคติไม่สามารถอัดได้ ดังนั้น ความหนาแน่นจึงคงตัว

แสดงว่า

$$\rho_1 = \rho_2$$

จะได้

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

สมการดังกล่าวเรียกว่า สมการความต่อเนื่อง (The equation of continuity) สรุปใจความได้ว่า ผลคูณระหว่างพื้นที่หน้าตัดกับอัตราเร็วของของไหลอุดมคติ ไม่ว่าจะอยู่ที่ตำแหน่งใดในท่อ การไหลจะมีค่าคงตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาการไหลของอากาศภายในห้องอบโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาว่า เมื่อลดความดันภายในเตาอบสุญญากาศ นั้น จะมีผลกระทบต่ออัตราการไหลของอากาศภายในเตาอบนั้นอย่างไรบ้างซึ่งเมื่อความเร็วลมร้อนนั้นที่จ่ายและขนาดพื้นที่หน้าตัดทางออกของห้องอบนั้น นำมาเปรียบเทียบกับในลักษณะการไหล โดยใช้โปรแกรม Fluent และ Gambit ในการประมวลผลและสร้างปัญหา ทำให้พบได้ว่า การจ่ายความเร็วลมออกไปนั้น ที่พุ่งไปชนกับผนังห้อง จะทำให้เกิดการสูญเสียพลังงาน และ เมื่อ ความเร็วที่ต่ำไปการไหลยังคงเป็นการไหลแบบราบเรียบ(Laminar flow) จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของห้องอบจะได้ว่า ความเร็วเป็นตัวทำให้เกิดการไหลที่แปรป่วนภายในห้องอบนี้ ฉะนั้นจึงควรปรับปรุงความเร็วเพื่อลดการสูญเสียพลังงานของลมร้อนลง ซึ่งในอีกทางหนึ่งพบว่าค่าอุณหภูมิของอากาศและค่าความชื้นของผลิตภัณฑ์ที่ได้สอดคล้องกับทางทฤษฎีรวมทั้งแนวโน้มของอุณหภูมิมีค่าใกล้เคียงกัน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยนั้น เราได้ทำการออกแบบและจำลองรูปทรงของท่อขนาดเล็กเป็น 7 แบบด้วยกัน ดังนี้ ท่อตรง, ท่อแบบT-junction, ท่อตัวYแบบ2มิติ , ท่อตัวYแบบ3มิติ, ท่อH-shape , ท่อW-shape และ Y-junction แบบโค้ง โดยมีขั้นตอนการดำเนินการต่าง ๆ ดังนี้

- สร้างรูปทรงของท่อแต่ละชนิด
- กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆของไหลที่ต้องการทดสอบ
- กำหนดเงื่อนไขขอบเขตของท่อขนาดเล็ก
- กำหนดการแบ่งอิลิเมนต์ภายในท่อ ด้วยหลักการไฟไนอิลิเมนต์
- วิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้นในบริเวณ outlet ของท่อแต่ละชนิด
 - กรณีที่ 1 มีการเปลี่ยนค่าความเร็วเริ่มต้นของไหล (V_{inlet})
 - กรณีที่ 2 มีการเปลี่ยนค่าคงที่การแพร่กระจายของไหล (Diffusion constant)

โดยในบทนี้จะเป็นการแสดงรายละเอียดของการสร้างรูปทรงของท่อแต่ละชนิด

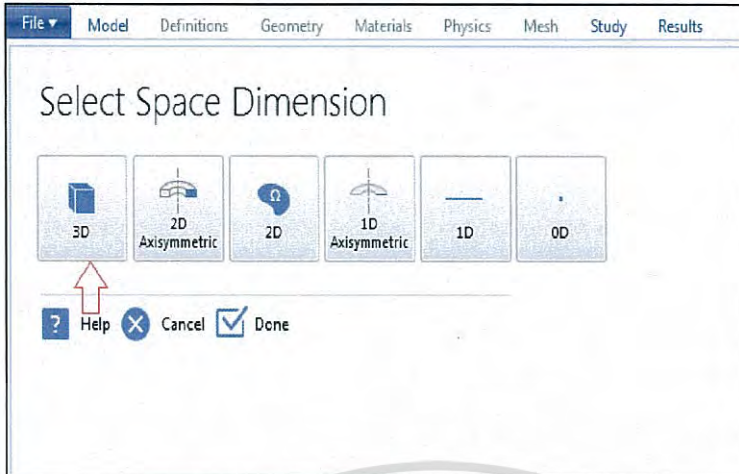
3.1 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อทรงตรง

ทำการเปิดโปรแกรมเลือกที่ Model wizard จากนั้นเลือกที่ 3D และเลือกไปที่ Laminar flow ไปที่ single phase flow และ เลือกที่ laminar flow อีกครั้ง จากนั้นคลิก done และ เลือก stationary จากนั้นคลิกDoneจะเข้าสู่ตัวโปรแกรม

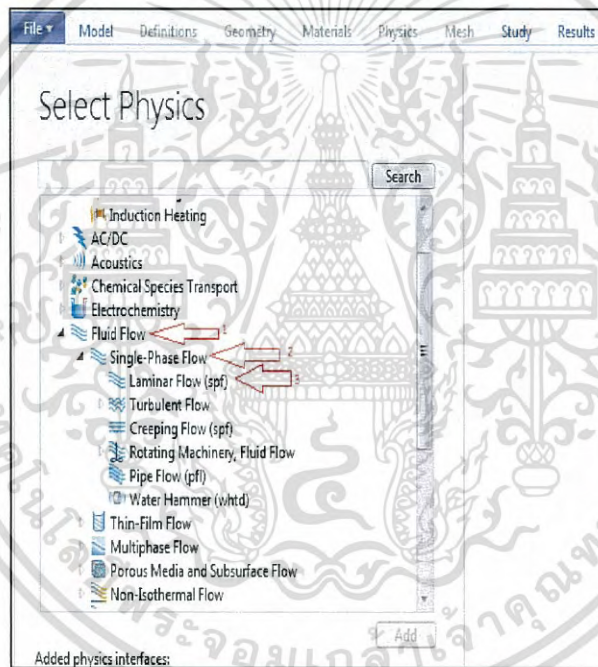


รูปที่ 3.1 แสดงการเข้าโปรแกรมเลือกที่ model wizard

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

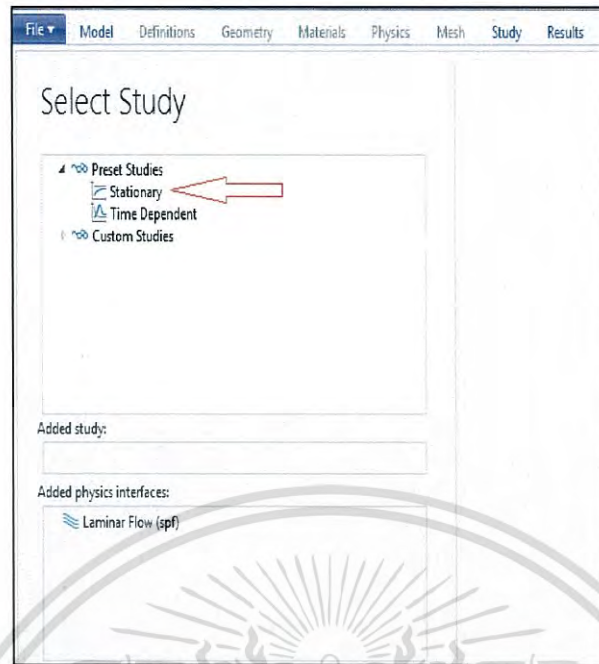


รูปที่ 3.2 ทำการคลิกเลือกที่รูปแบบทรง 3D



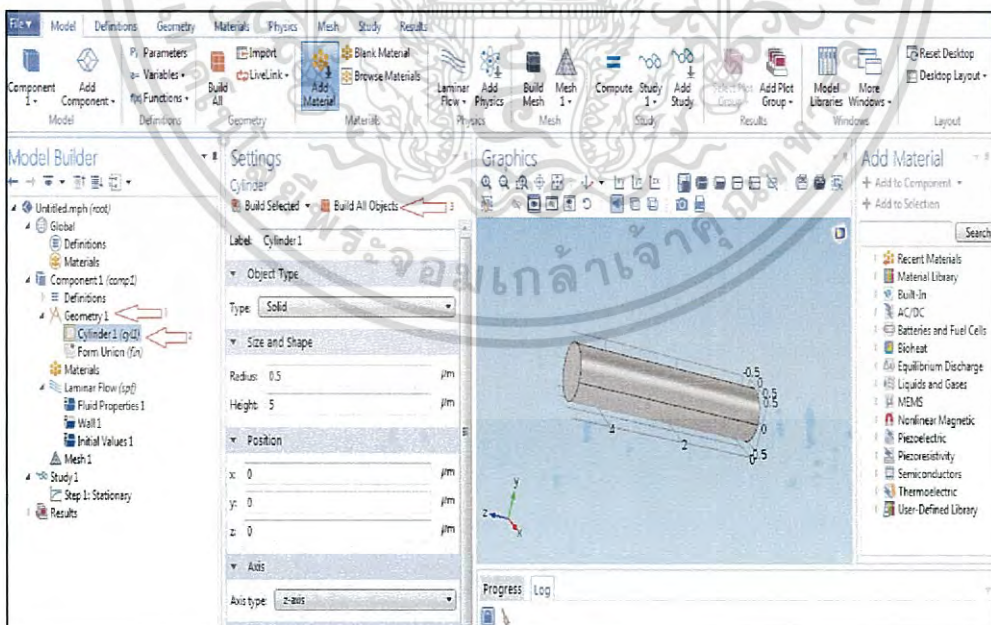
รูปที่ 3.3 ลำดับการเลือกฟังก์ชันในการเข้าโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



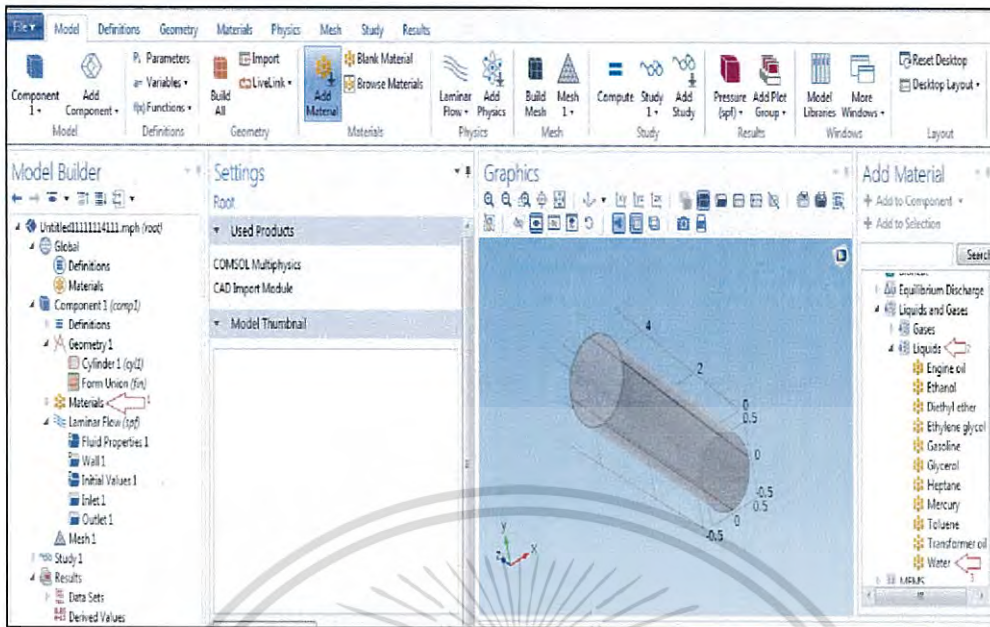
รูปที่ 3.4 เลือก stationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และ ความดัน

เมื่อเข้าสู่ตัวโปรแกรม ทำการขนาด Dimension ของท่อที่หน่วย μm จากนั้นไปที่ geometry และ เลือกที่ cylinder และ โดยมีการกำหนดรัศมีขนาด $0.5\mu\text{m}$ และความยาวของท่อนั้นมีขนาด $5\mu\text{m}$ แล้วทำการคลิกที่ Build all จะได้รูปทรง cylinder ขึ้นมา



รูปที่ 3.5 ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรง cylinder แบบท่อตรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่3.6 ทำการใส่สารที่เป็นน้ำเข้าไปภายในท่อทำให้เกิดการไหลของของไหลภายในท่อ

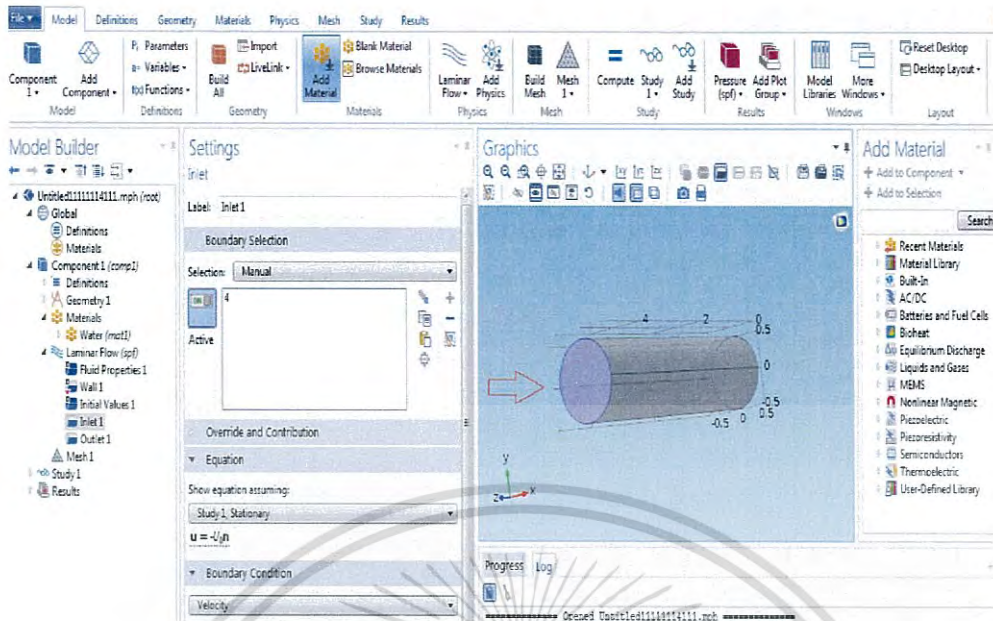
หลังจากนั้นทำการใส่สาร(Material)เป็นน้ำเพื่อเป็นตัวกลางในการไหลของของไหลภายในท่อ และทำการใส่ค่า ความหนาแน่น dynamic viscosity speed of sound

Property	Name	Value	Unit	Property group
✓ Dynamic viscosity	mu	0.894	Pa·s	Basic
✓ Density	rho	1000	kg/m ³	Basic
Ratio of specific heats	gamma	1.0	1	Basic
Electrical conductivity	sigma	5.5e-6[S/...	S/m	Basic
Heat capacity at constant pres...	Cp	4.182	J/(kg·K)	Basic
Thermal conductivity	k	0.6	W/(m·K)	Basic
Speed of sound	c	1484	m/s	Basic

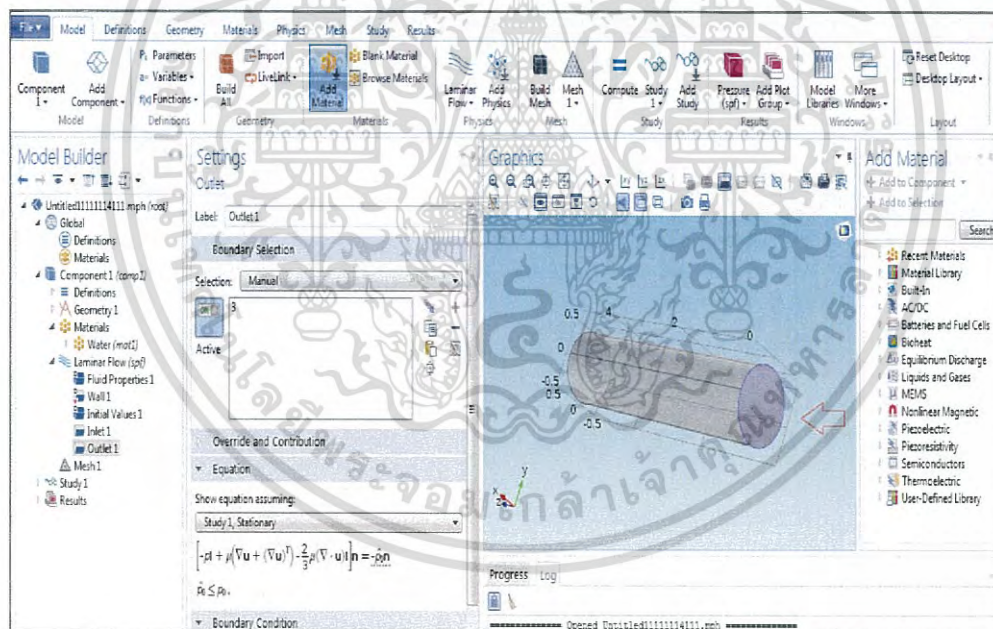
รูปที่3.7 จากตารางทำการใส่ค่าเฉพาะของน้ำ เช่น ความหนาแน่น dynamic viscosity thermal conductivity

ทำการกำหนดทางเข้าของน้ำ(Inlet) และ ทางออก(Outlet) โดยการใส่น้ำที่เป็นMaterials เข้าไปจากนั้นทำการเลือกboundaryทางขาเข้า และขาออก ของรูปทรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.8 การกำหนดทางเข้าของของไหล(inlet)

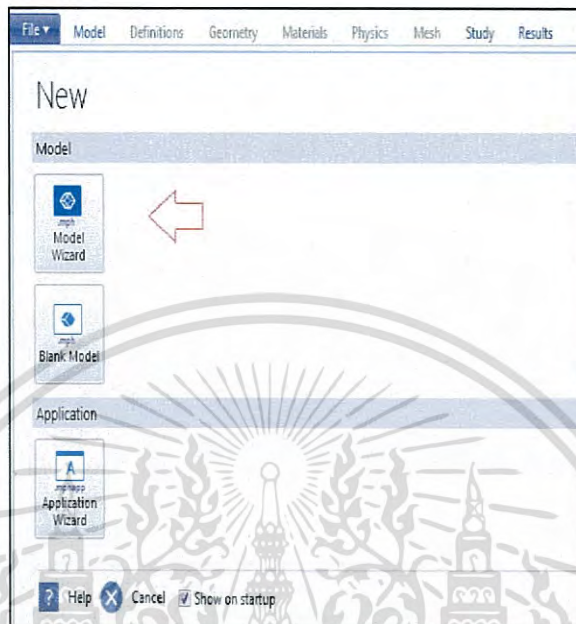


รูปที่ 3.9 แสดงการกำหนดทางออกของของไหล(Outlet)

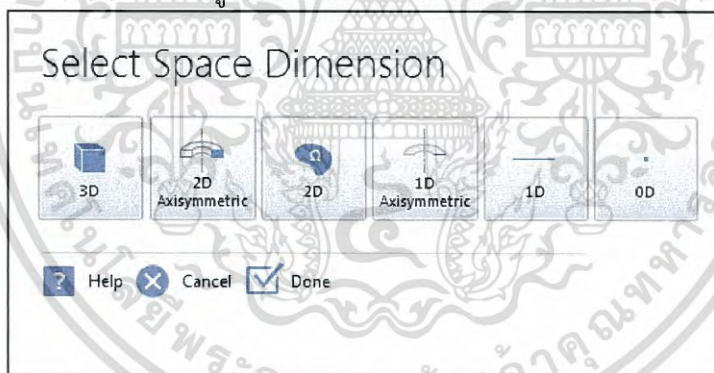
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 การสร้างรูปท่อทรงตัว T-junction

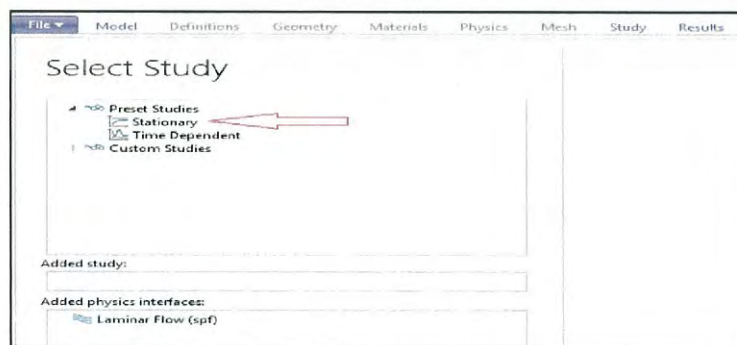
ทำการเลือก model wizard เพื่อทำการเลือกรูปทรงแบบ 3 มิติ จากนั้นเลือกที่ stationary เพื่อทำการศึกษาคุณลักษณะเฉพาะในหัวข้อที่เราศึกษา



รูป 3.10 ให้เลือกเป็น model wizard



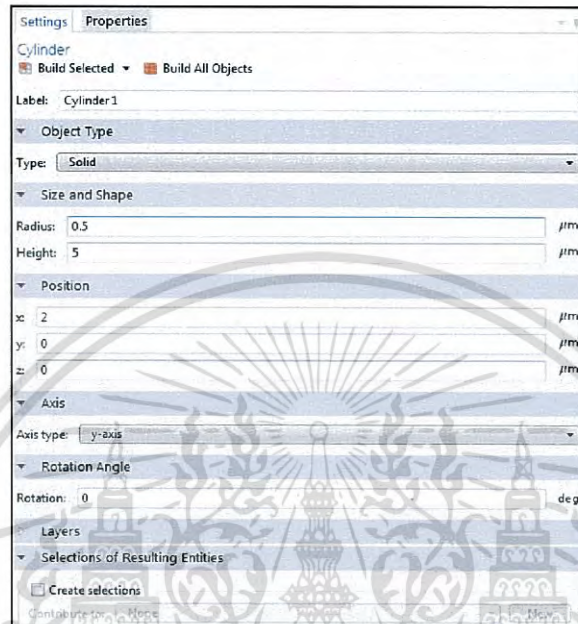
รูป 3.11 เลือกเป็นระบบพิกัดแบบ 3D



รูป 3.12 เลือก stationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และความดัน

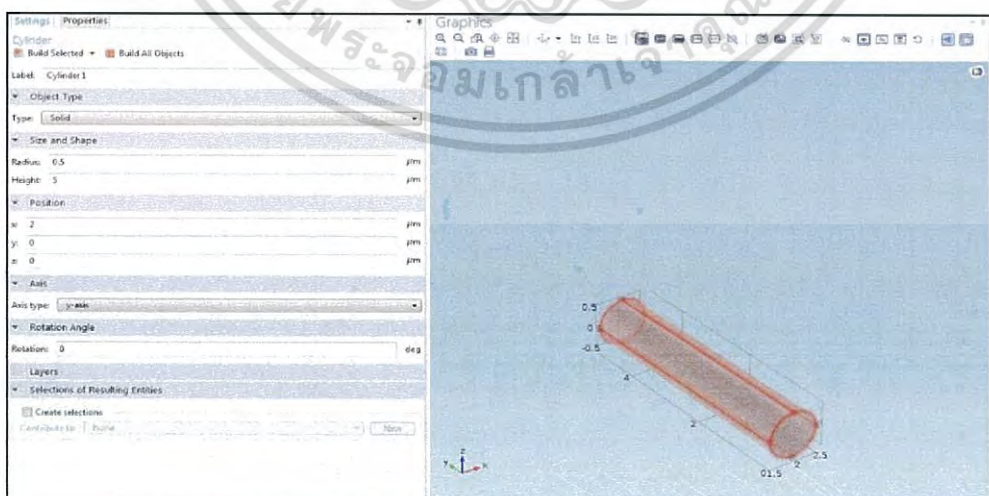
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเข้าสู่ตัวโปรแกรม ทำการขนาด Dimension ของท่อที่หน่วย ไมโครเมตร (μm) จากนั้นไปที่ geometry และ เลือกที่ cylinder และ โดยมีการกำหนดรัศมีขนาด $0.5\mu\text{m}$ และความยาวของท่อนั้นมีขนาด $5\mu\text{m}$ แล้วทำการคลิกที่ Build all จะได้รูปทรง cylinder ขึ้นมา



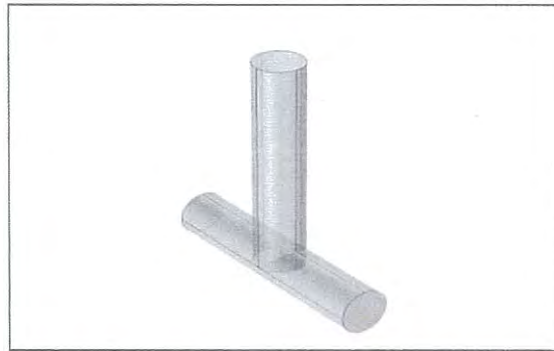
รูป 3.13 ทำการใส่ขนาดที่ รัศมี $0.5\mu\text{m}$ และ ความสูงที่ $5\mu\text{m}$ เพื่อสร้างท่อ T-Junction

จากนั้นเมื่อเข้าสู่ตัวโปรแกรม Comsol จะเริ่มทำการกำหนดขนาดของ Dimension โดยเริ่มกำหนดขนาดของรัศมีที่ $0.5\mu\text{m}$ และ ความสูงที่ $5\mu\text{m}$ จากนั้นทำการ Build selected ขึ้นมาจะได้รูปทรง T ดังปรากฏภาพ

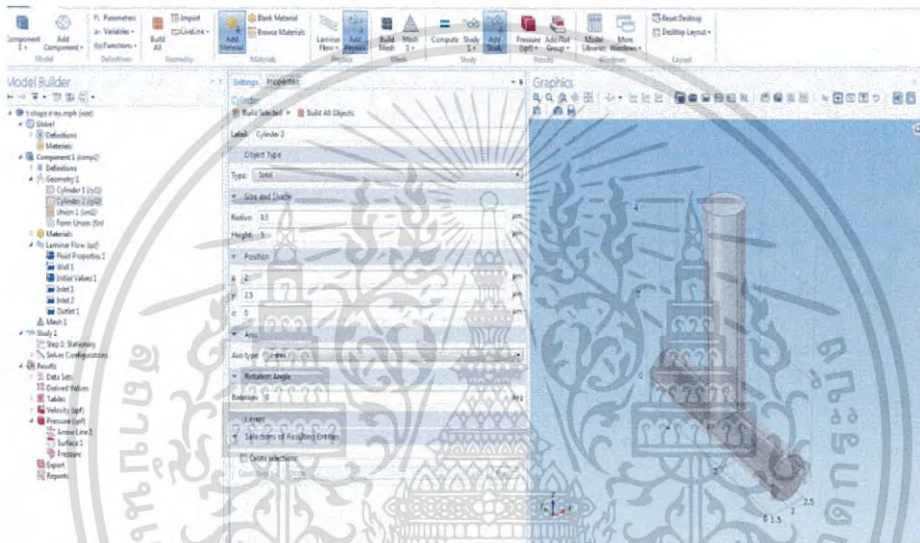


รูปที่ 3.14 ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรง cylinder แบบท่อตัว T ใน cylinder 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.15 รูปทรงตัว T ที่ขึ้นรูปจาก Bulid selected แต่ยังไม่ได้ตัดท่อนอกตรงกลาง



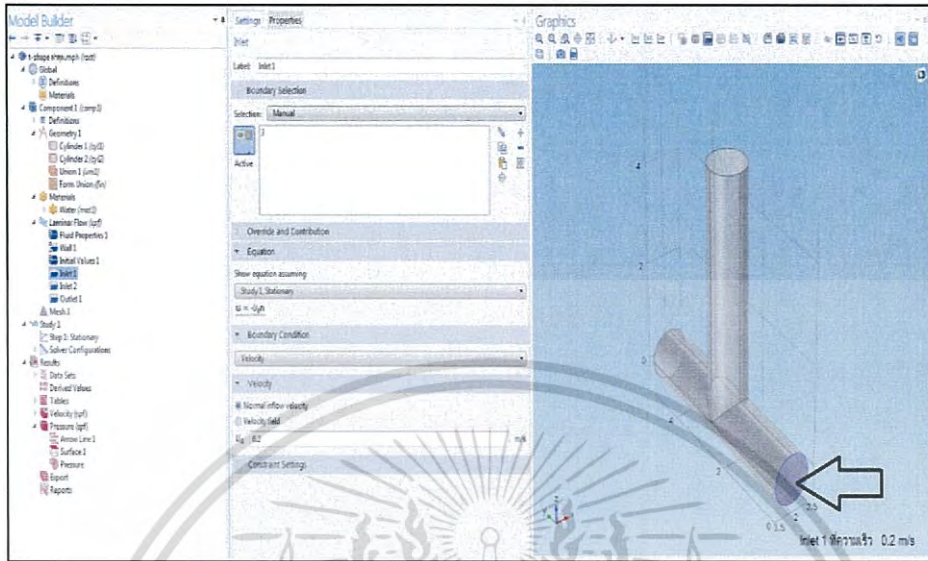
รูปที่ 3.16 ใน cylinder2 มีการกำหนดค่าตาม cylinder1 แต่มีการย้ายแกนไปที่ตำแหน่งในระบบพิกัดที่ $x=2$ ไมโครเมตร และ $y=2.5$ ไมโครเมตร ที่ได้ทำการตัดท่อนอกตรงกลางออกแล้ว

Property	Name	Value	Unit	Property group
✓ Dynamic viscosity	mu	0.894	Pa·s	Basic
✓ Density	rho	1000	kg/m ³	Basic
Ratio of specific heats	gamma	1.0	1	Basic
Electrical conductivity	sigma	5.5e-6[S/...	S/m	Basic
Heat capacity at constant pres...	Cp	4.182	J/(kg·K)	Basic
Thermal conductivity	k	0.6	W/(m·K)	Basic
Speed of sound	c	1484	m/s	Basic

รูปที่ 3.17 จากตารางทำการใส่ค่าเฉพาะของน้ำ เช่น ความหนาแน่น dynamic viscosity thermal conductivity

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการกำหนดทางเข้าของน้ำ(Inlet) และ ทางออก(Outlet) ดังรูป และ ทำการใส่ค่าความเร็วที่มีขนาดแตกต่างกัน และ น้ำเป็นตัวMaterialsเข้าไปยัง Inletทั้ง2 จะได้ดังรูป



รูปที่ 3.18 การกำหนดทางเข้าของของไหล(inlet1)

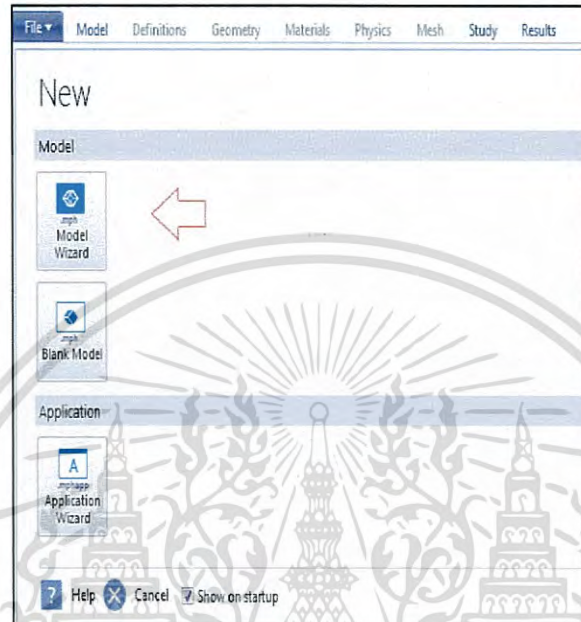


รูปที่ 3.19 การกำหนดทางเข้าของของไหล(inlet2)

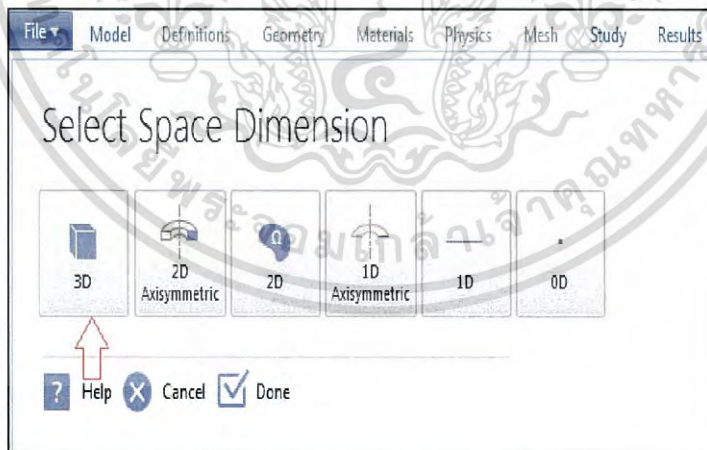
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 ขั้นตอนการสร้างรูปท่อดัว Y แบบ 3D

ทำการเปิดโปรแกรมเลือกที่ Model wizard จากนั้นเลือกที่ 3D และเลือกไปที่ Laminar flow ไปที่ single phase flow และ เลือกที่ laminar flow อีกครั้ง จากนั้นคลิก done และ เลือก stationary จากนั้นคลิกDoneจะเข้าสู่ตัวโปรแกรม

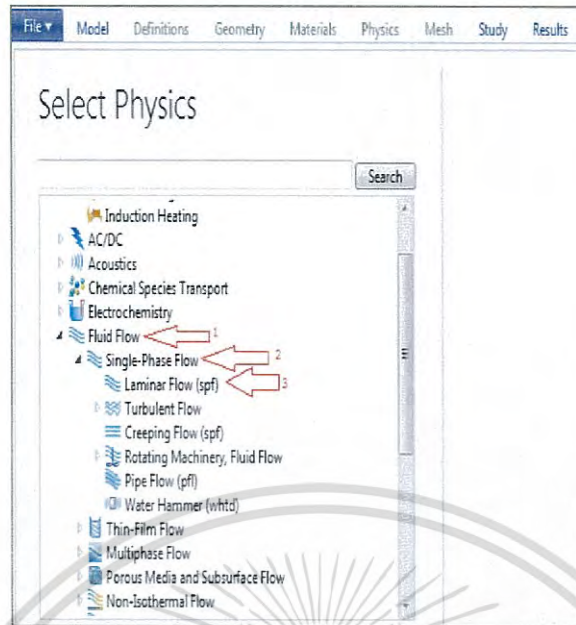


รูปที่ 3.20 การเข้าโปรแกรมเลือกที่ model wizard



รูปที่ 3.21 ทำการคลิกเลือกที่รูปแบบทรง3D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



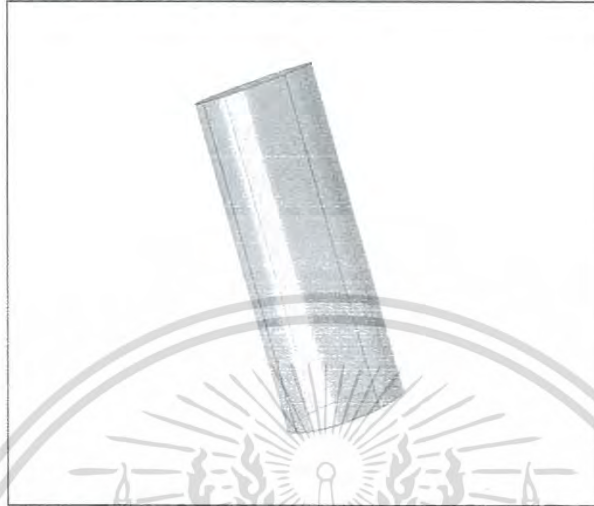
รูปที่ 3.22 ลำดับการเลือกฟังก์ชันในการเข้าโปรแกรม



รูปที่ 3.23 เลือกstationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และ ความดัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเข้าสู่ตัวโปรแกรม ทำการขนาดDimension ของท่อที่หน่วย m จากนั้นไปที่ geometry และ เลือกที่ cylinder และ โดยมีการกำหนดรัศมีขนาด 1 m และความยาวของท่อนั้นมีขนาด 5 m แล้วทำการคลิกที่ Build all จะได้รูปทรงcylinderขึ้นมา จากนั้นทำการคลิกที่ union แล้วกด keep interior ออก จะได้รูปทรงตัว Y ประกอบเป็นชิ้นเดียวกัน

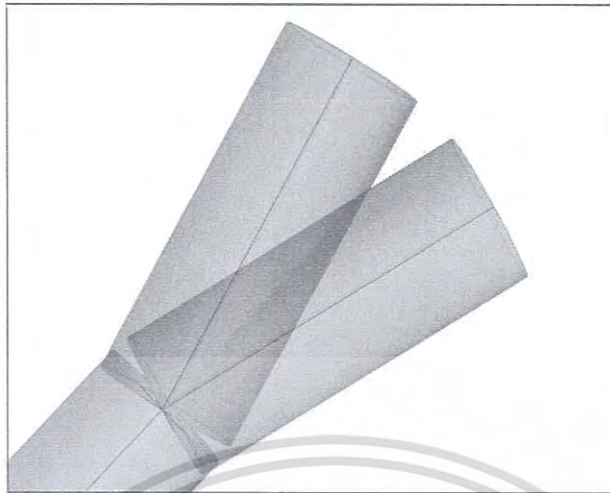


รูปที่ 3.24 ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรงcylinder แบบท่อY-junction เริ่มจากการสร้างท่อตรง

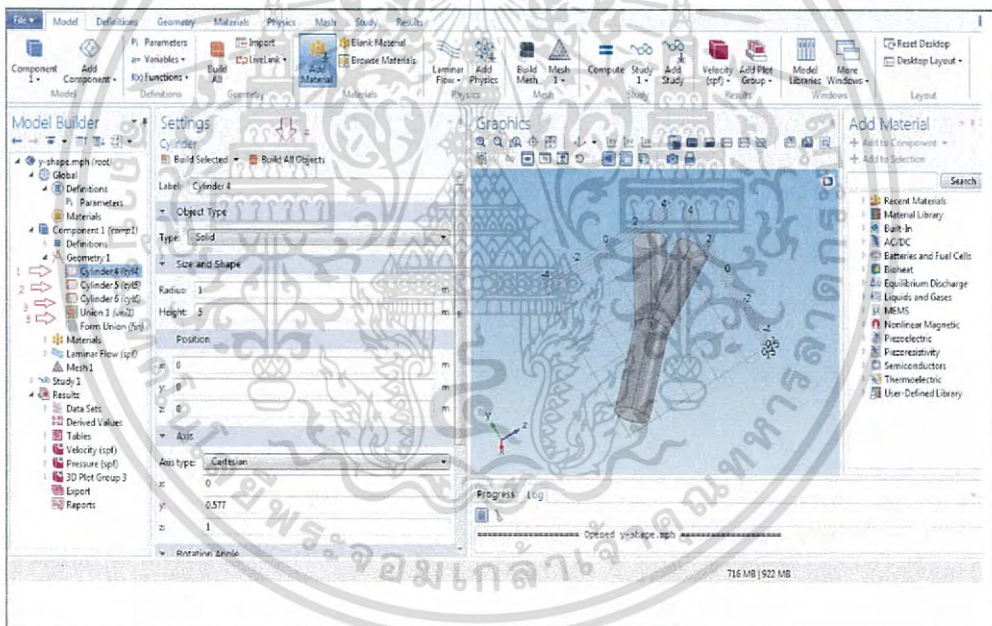


รูปที่ 3.25 ทำการสร้างท่ออีกอันแล้วนำมาประกบเป็น2อันทำมุมกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

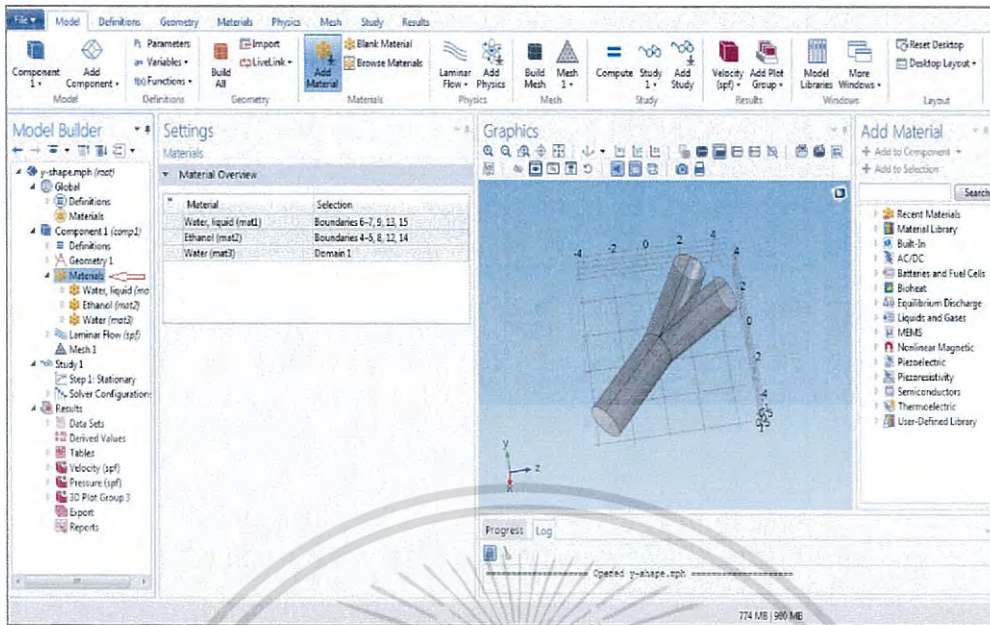


รูปที่ 3.26 จากนั้นทำการมาประกอบต่อมาทำเป็น Y



รูปที่ 3.27 ขั้นตอนการเริ่มสร้าง รูปทรงcylinder แบบท่อY-junction

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.28 ทำการใส่สารที่เป็นน้ำเข้าไปภายในท่อทำให้เกิดการไหลของของไหลภายในท่อ

Property	Name	Value	Unit	Property group
Dynamic viscosity	mu	0.894	Pa·s	Basic
Ratio of specific heats	gamma	1.0	1	Basic
Electrical conductivity	sigma	5.5e-6[S/...	S/m	Basic
Heat capacity at constant pres...	Cp	4.182	J/(kg·K)	Basic
Density	rho	1000	kg/m ³	Basic
Thermal conductivity	k	0.6	W/(m·K)	Basic
Speed of sound	c	1484	m/s	Basic

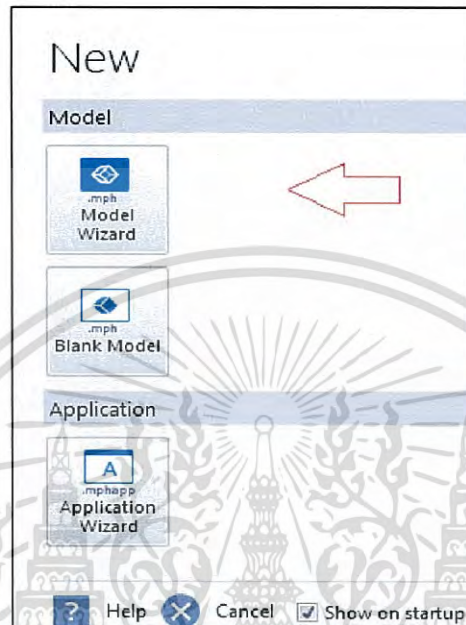
รูปที่ 3.29 จากตารางทำการใส่ค่าเฉพาะของน้ำ เช่น ความหนาแน่น dynamic viscosity



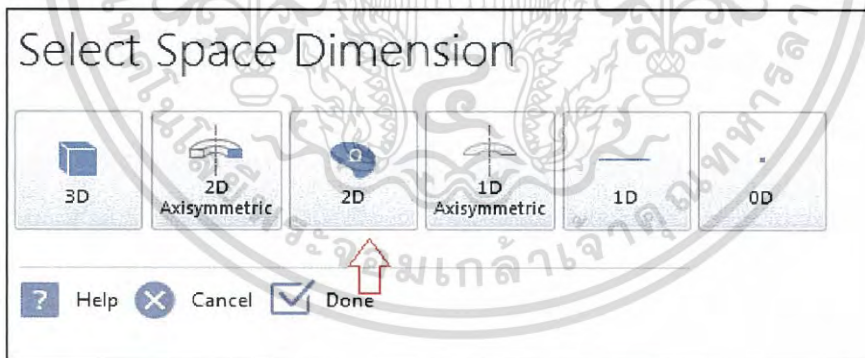
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 การสร้างรูปทรง W-Shapes

ทำการเปิดโปรแกรมเลือกที่ Model wizard จากนั้นเลือกที่ 3D และเลือกไปที่ Laminar flow ไปที่ single phase flow และ เลือกที่ laminar flow อีกครั้ง จากนั้นคลิก done และ เลือก stationary จากนั้นคลิกDoneจะเข้าสู่ตัวโปรแกรม

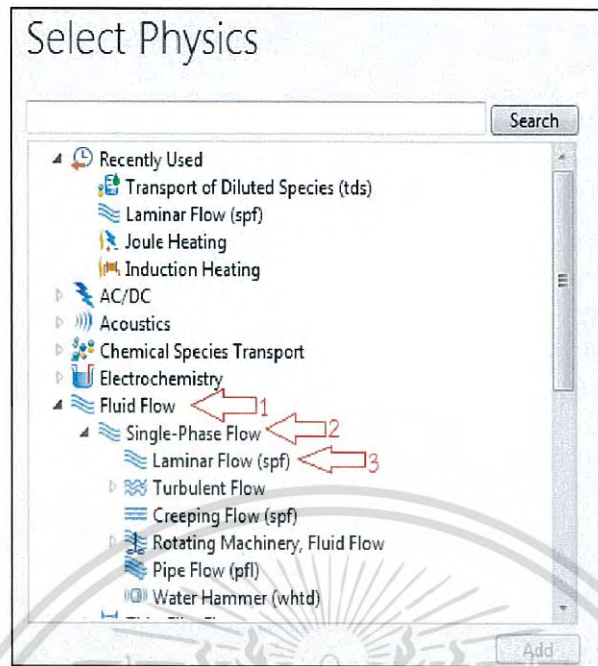


รูปที่ 3.30 แสดงการเข้าโปรแกรมเลือกที่ model wizard

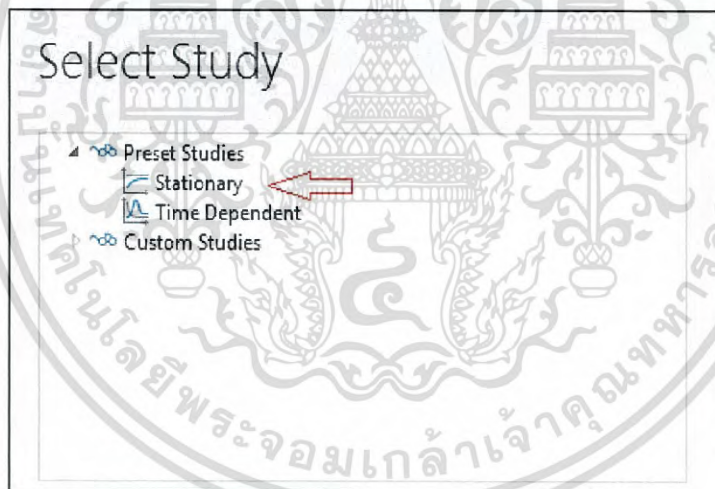


รูปที่ 3.31 ทำการคลิกเลือกที่รูปแบบทรง 2D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



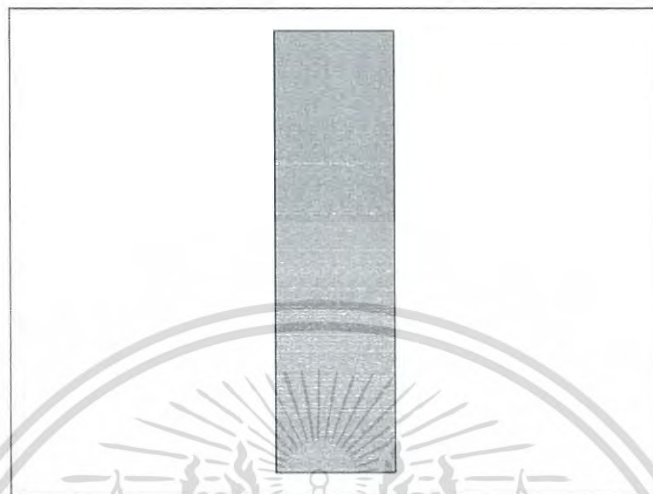
รูปที่3.32 ลำดับการเลือกฟังก์ชันในการเข้าโปรแกรม



รูปที่3.33 เลือกstationary เพื่อจะศึกษาทิศทางของความเร็ว และ ความดัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเข้าสู่ตัวโปรแกรม ทำการขนาดDimension ของท่อที่หน่วย μm จากนั้นไปที่ geometry และ เลือกที่ cylinder และ โดยมีการกำหนดความกว้างขนาด $0.5\mu\text{m}$ และความสูงของท่อนั้นมีขนาด $1.854\mu\text{m}$ แล้วทำการคลิกที่ Build all จะได้รูปทรงRectangle1-3ขึ้นมา

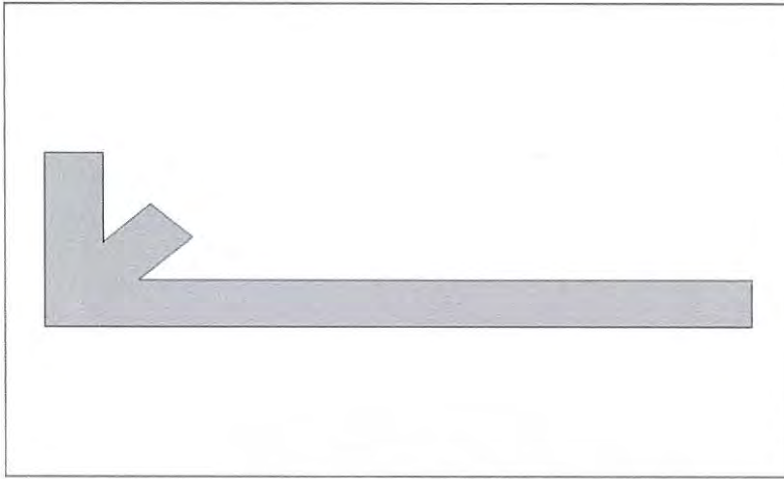


รูปที่3.34 รูปแสดงถึงการขึ้นรูปแบบW-Shapeจากท่อตรง



รูปที่3.35 นำท่อตรงนำมาประกบกันที่มีเท่ากัน

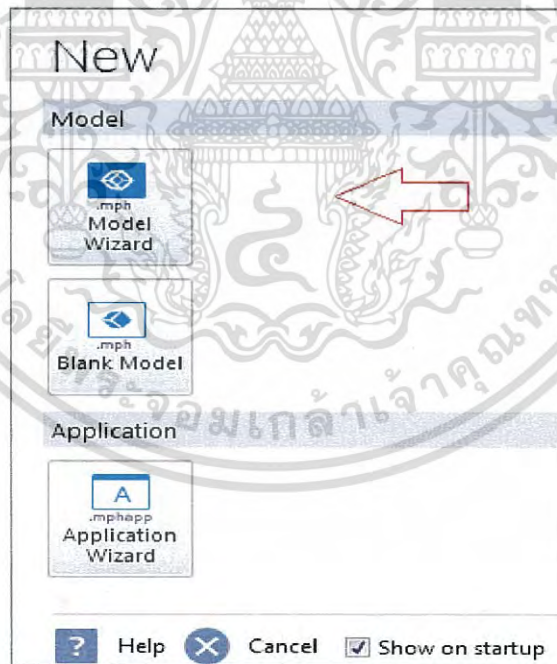
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่3.36 รูปของW-Shape ที่หลังจากกำหนดขนาดแล้ว

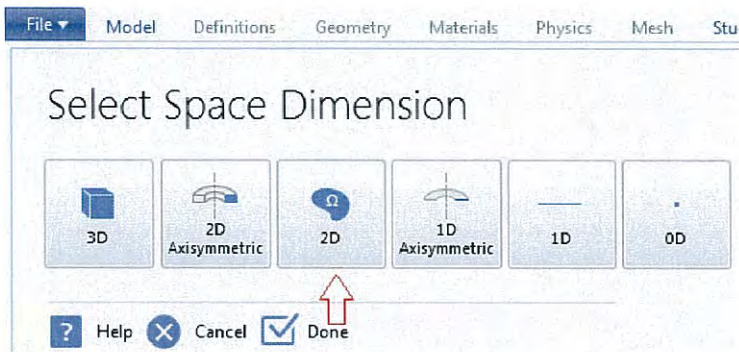
3.5 ขั้นตอนการสร้างรูปทรงY2D

ทำการเปิดโปรแกรมเลือกที่ Model wizard จากนั้นเลือกที่ 3D และเลือกไปที่ Laminar flow ไปที่ single phase flow และ เลือกที่ laminar flow อีกครั้ง จากนั้นคลิก done และ เลือก stationary จากนั้นคลิกDoneจะเข้าสู่ตัวโปรแกรม

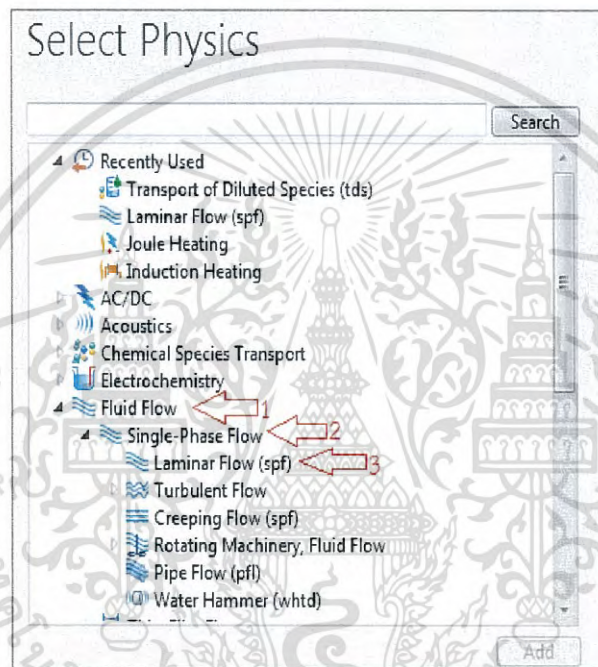


รูปที่ 3.37 การเข้าโปรแกรมโดยเลือกที่ model wizard

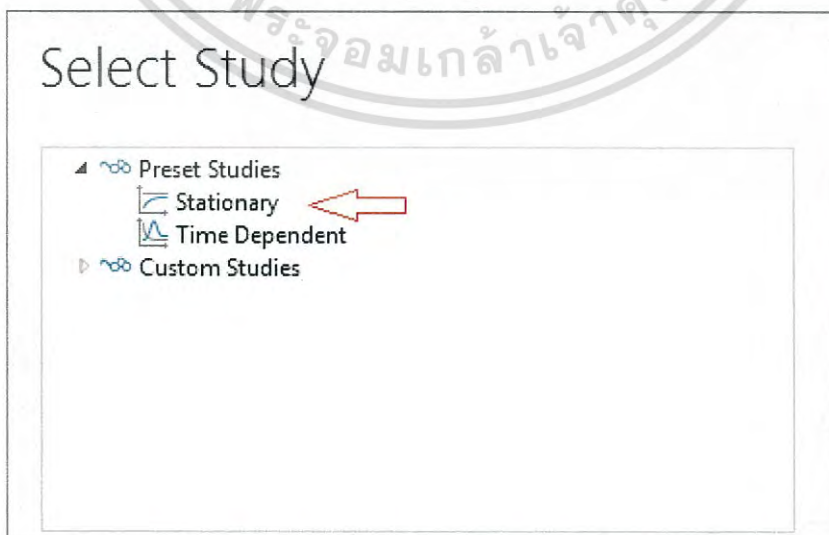
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.38 ทำการเลือกที่รูปทรง 2D



รูปที่ 3.39 ทำการเลือก fluid flow และ เลือก Laminar flow เพื่อทำการศึกษา



รูปที่ 3.40 ส่วนของ Study ทำการเลือก stationary

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นมาในส่วนของการขึ้นรูปเข้าไปที่Geometry แล้วทำการกำหนดขนาดของรูปสี่เหลี่ยม(Rectangle1)ความกว้างที่ $0.2\mu m$ และความสูงที่ $0.8\mu m$ และทำการหมุนมุม(Rotation angle)= 30° จากนั้นทำการBuild selected จะได้รูปสี่เหลี่ยมขึ้นมา



รูปที่3.41 รูปของRectangle1ที่ทำการกำหนดขนาดแล้ว

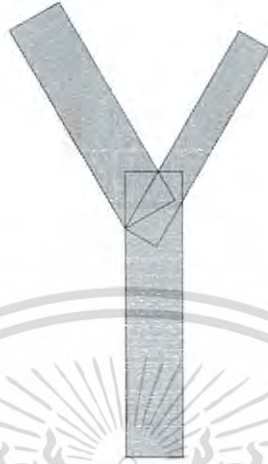
ต่อมาทำการกำหนดขนาดของ(Rectangle2) ทำการใส่ความกว้าง $0.125\mu m$ และ $0.8\mu m$ และทำการหมุนมุม(Rotation angle)=- 30° จากนั้นทำการBuild selected จะได้รูปสี่เหลี่ยมขึ้นมาประกบกันกับรูปของ(Rectangle1)



รูปที่3.42 รูปของrectangle2 ที่ทำการกำหนดขนาดและประกบต่อเข้าด้วยกันจะเป็นต่อเข้าที่1 และทางเข้าที่2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นทำการกำหนดขนาดของรูปทรงสี่เหลี่ยม(Rectangle3)ในส่วนของความกว้างที่ $0.2 \mu\text{m}$ และ ความสูงที่ $1 \mu\text{m}$ และ ทำการเคลื่อนย้ายของรูปทรงตำแหน่งไปทางแกนYไปที่ $-0.8 \mu\text{m}$ จากนั้นทำการBuild Selected จะได้รูปที่ประกอบการสร้างรูป จะได้ท่อทางออก



รูปที่3.43 รูปของRectangle3 ที่ทำการกำหนดขนาดและประกอบท่อทางเข้าด้วยกัน แล้วจะได้รูปที่ประกอบกันเป็นท่อทางออก

จากนั้นทำการใช้ฟังก์ชัน(Union1)ทำการประกอบรูปเข้าด้วยกัน จะเป็นรูปประกอบเป็นชิ้นเดียวกัน

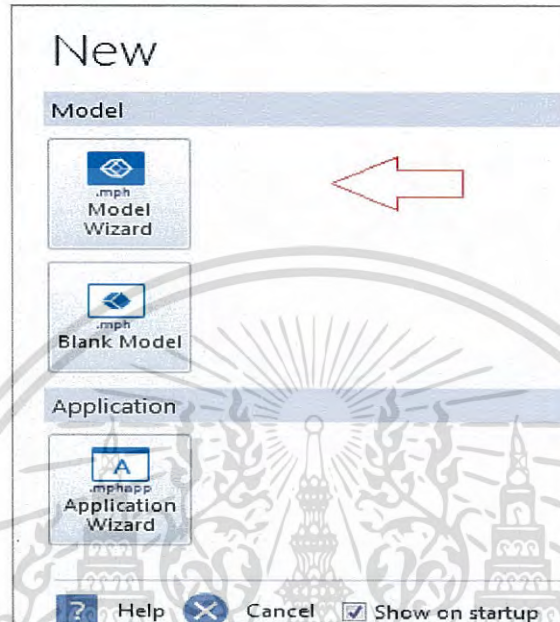


รูปที่3.44 เมื่อทำการใช้ฟังก์ชัน(Union1)จะทำให้รูปประกอบเป็นรูปชิ้นเดียวกัน

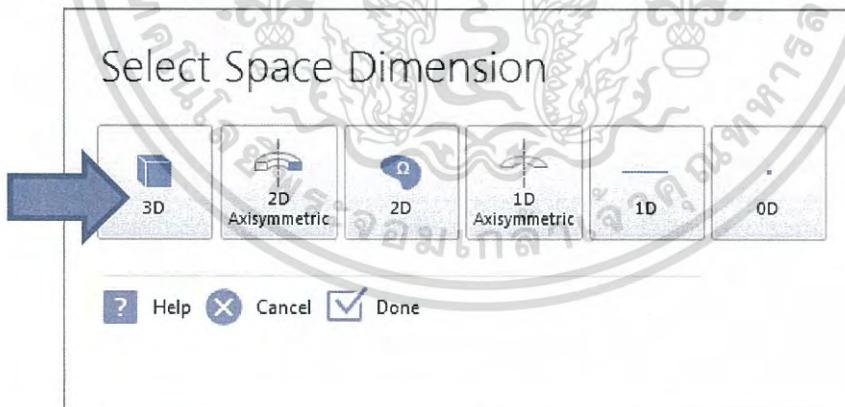
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6 ขั้นตอนการสร้างรูปทรง H-Shape

ทำการเปิดโปรแกรมเลือกที่ Model wizard จากนั้นเลือกที่ 3D และเลือกไปที่ Laminar flow ไปที่ single phase flow และ เลือกที่ laminar flow อีกครั้ง จากนั้นคลิก done และ เลือก stationary จากนั้นคลิก Done จะเข้าสู่ตัวโปรแกรม

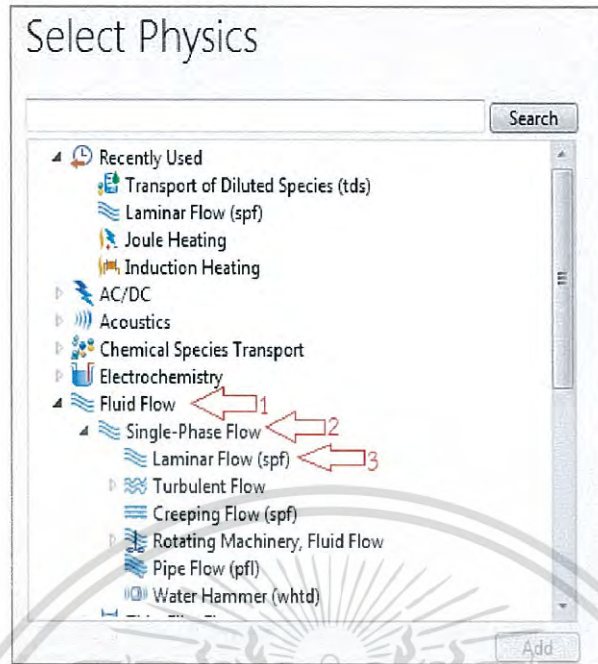


รูปที่ 3.45 การเข้าโปรแกรมโดยเลือกที่ model wizard



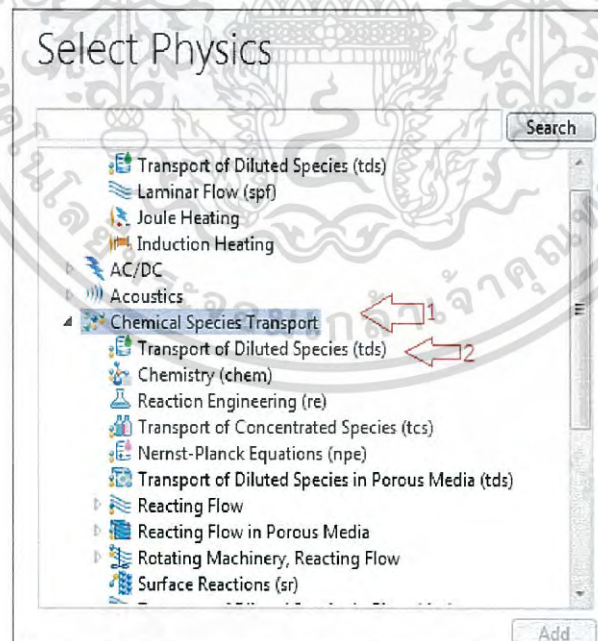
รูปที่ 3.46 ทำการเลือกที่รูปทรง 3D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



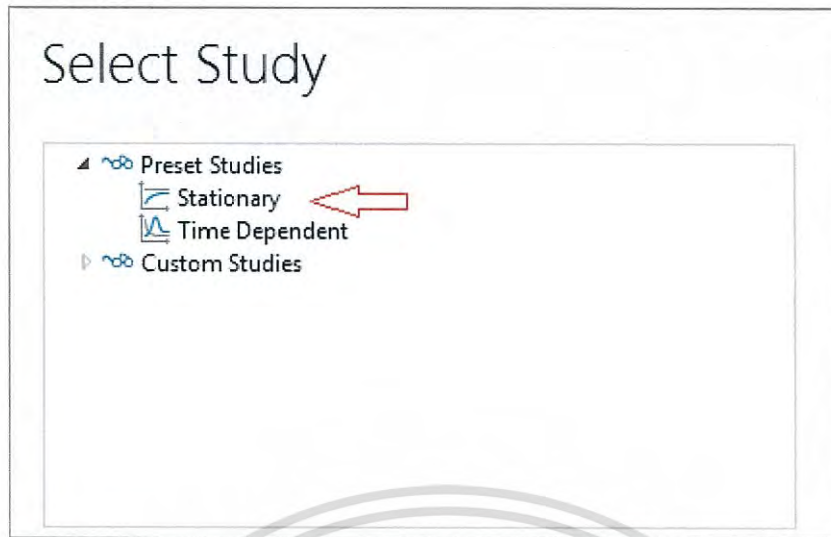
รูปที่ 3.47 ทำการเลือกแบบ Laminar Flow

จากนั้นเลือกที่ Transport of Diluted Species เพื่อศึกษาสารละลายที่เจือจาง ภายในท่อ H-Shape ที่เกิดขึ้นภายในท่อ



รูปที่ 3.48 จากนั้นทำการเพิ่มฟังก์ชัน Chemical Species Transport

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่3.49 ส่วนของStudy ทำการเลือก stationary

จากนั้นมาในส่วนของการสร้างรูปทรง Geometry และ โดยมีการกำหนดขนาดของรูปทรงของ rectangle1 เป็น กว้าง $140\mu m$ และ สูง $60\mu m$ และ rectangle2 เป็น กว้าง $130\mu m$ และ สูง $50\mu m$ และทำการเลือก difference และ filter 1 และ filter2 เพื่อทำการตัดส่วนเกินของรูปและ ขอบของรูปภาพ และ ทำการรวมรูปทรงเข้าเป็นชิ้นเดียวกันโดยใช้ union เพื่อให้รูปทรงเป็นชิ้นเดียวกัน

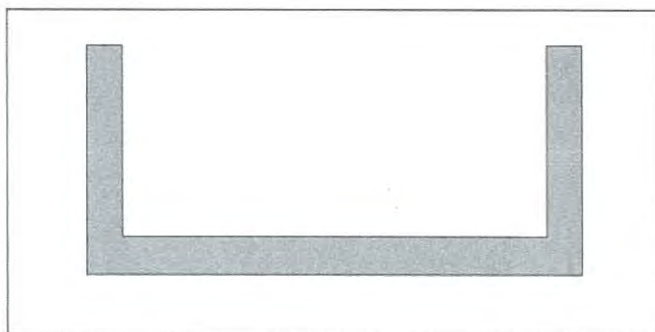


รูปที่3.50 ขนาดของรูปทรงในขั้นแรก

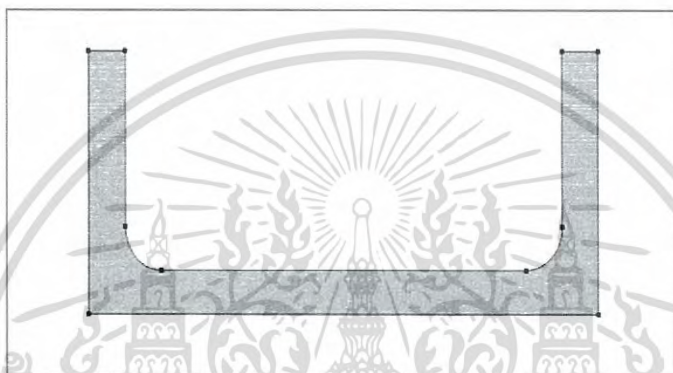


รูปที่3.51 หลังจากนั้นนำรูปสี่เหลี่ยม2รูปมาประกบกัน

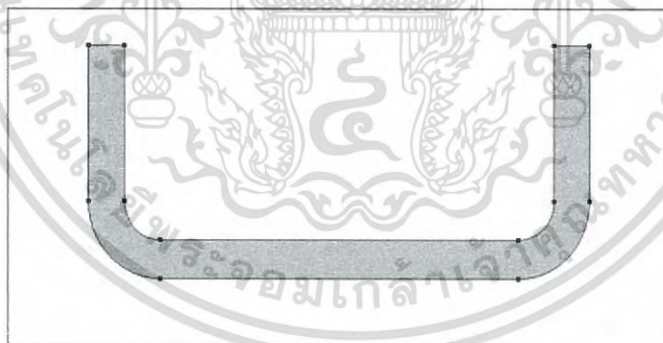
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่3.52 ทำการdifferenceเพื่อตัดรูป

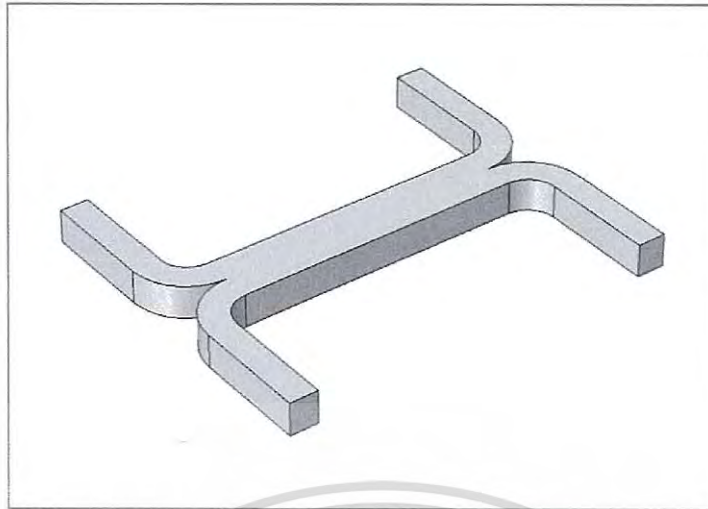


รูปที่3.53 ทำการfillet เพื่อให้ได้รูปภายในให้โค้งออก



รูปที่3.54 หลังจากนั้นทำการfilletเป็นครั้งที่2เพื่อให้ได้รูปภายนอกโค้ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่3.55 จากนั้นจะได้รูปที่เป็น W-SHAPE โดยวิธี mirror

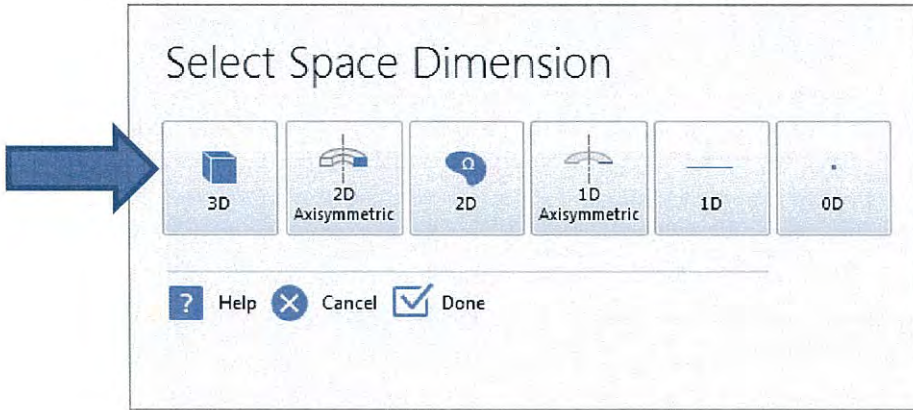
3.7 การสร้างรูปทรง Y-3Dแบบโค้ง

ทำการเปิดโปรแกรมเลือกที่ Model wizard จากนั้นเลือกที่ 3D และเลือกไปที่ Laminar flow ไปที่ single phase flow และ เลือกที่ laminar flow อีกครั้ง จากนั้นคลิก done และ เลือก stationary จากนั้นคลิกDoneจะเข้าสู่ตัวโปรแกรม

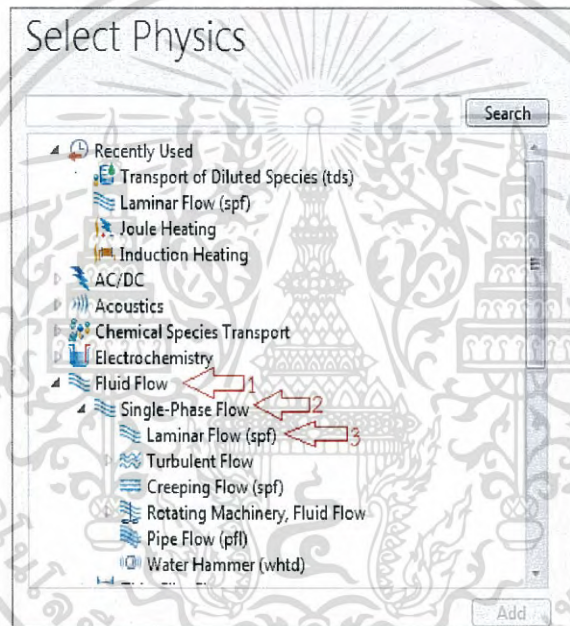


รูปที่3.56 การเข้าโปรแกรมเริ่มที่ model wizard

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



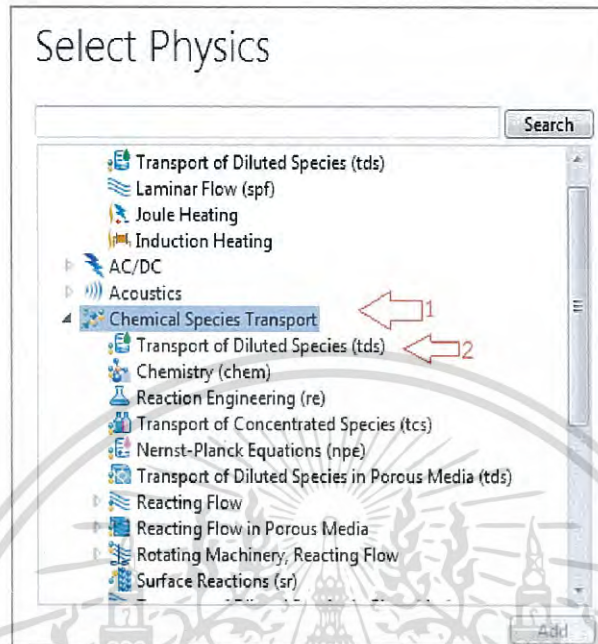
รูปที่3.57 เลือกที่รูปทรง3D



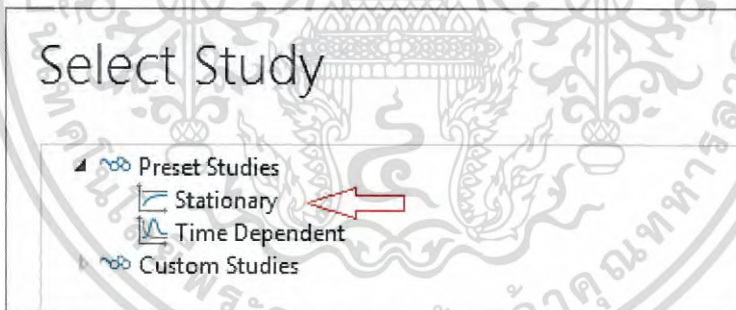
รูปที่3.58 ขั้นตอนการเลือกฟังก์ชัน laminar flow

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นเลือกที่ Transport of Diluted Species เพื่อศึกษาสารละลายที่เจือจาง ภายในท่อ Y-Asymmetric ที่เกิดขึ้นภายในท่อ



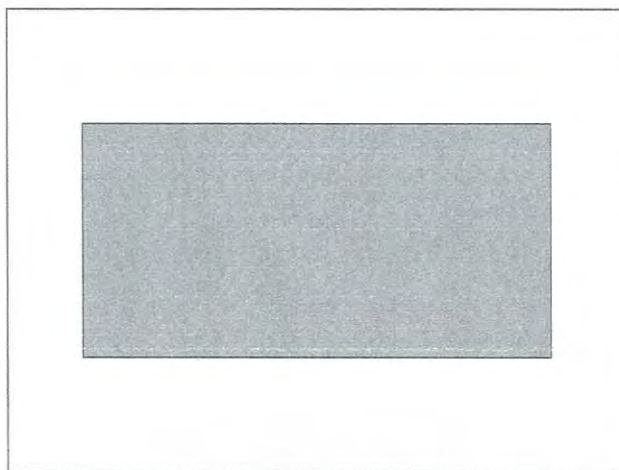
รูปที่3.59 จากนั้นทำการเลือก Physics อีกครั้ง โดยเลือกที่ Chemical Species Transport



รูปที่3.60 ทำการเลือกการศึกษาแบบ stationary

ทำการใส่ขนาดรูปทรงตามที่ได้กำหนดไว้ โดยทำการกำหนดขนาดของความกว้างที่ $20\mu m$ และ ความสูงที่ $10\mu m$ ของรูปทรงสี่เหลี่ยมก่อน จากนั้น กำหนดรัศมี $10\mu m$,มุมที่ 360 ในส่วนของวงกลมทางเข้า และ ทางออก ของน้ำภายในท่อที่มีค่าความเร็วแตกต่างกัน รวมทั้งใส่ค่าที่เป็นในส่วนของ Materials เข้าไปยังท่อ inlet ทั้ง 2 จะได้ดังรูป

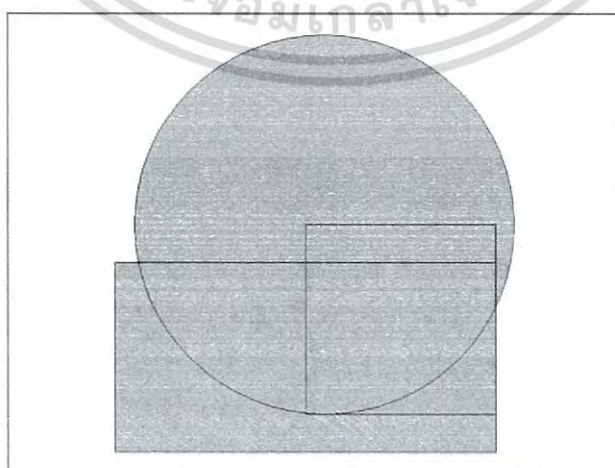
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่3.61 เริ่มจากสร้างสี่เหลี่ยมเพื่อที่จะสร้าง Y-junction2D

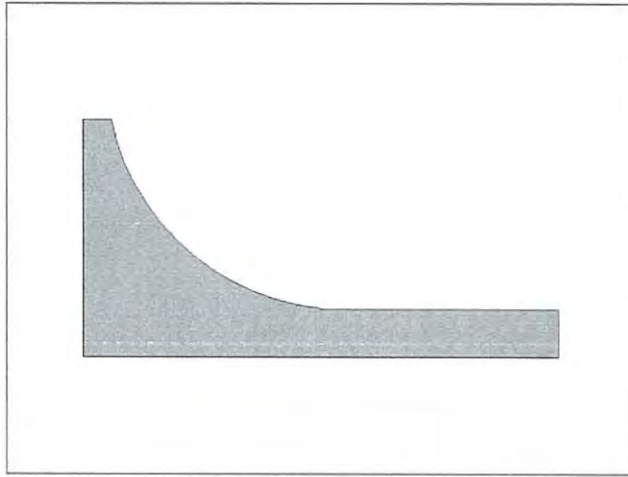


รูปที่3.62 จากนั้นทำรูปสี่เหลี่ยมทับพื้นที่ส่วนโค้ง

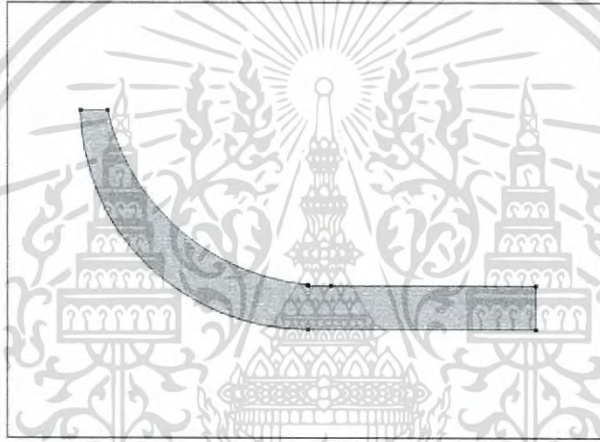


รูปที่3.63 จากนั้นทำสี่เหลี่ยมเพื่อทำให้ปลายโค้งเป็นท่อ

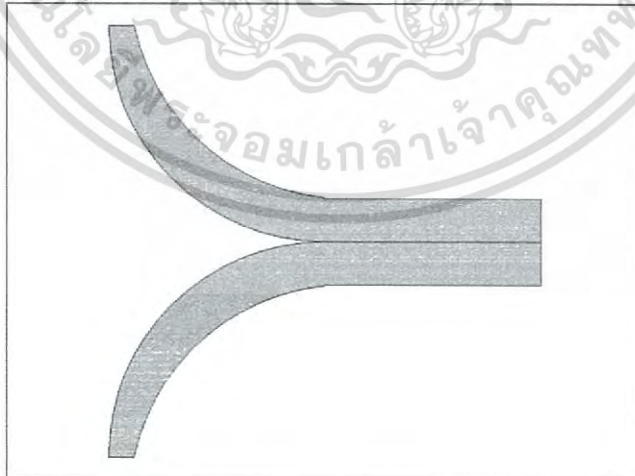
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่3.64 จากนั้นทำการใส่fillet เพื่อทำส่วนโค้งที่ปลายท่อ

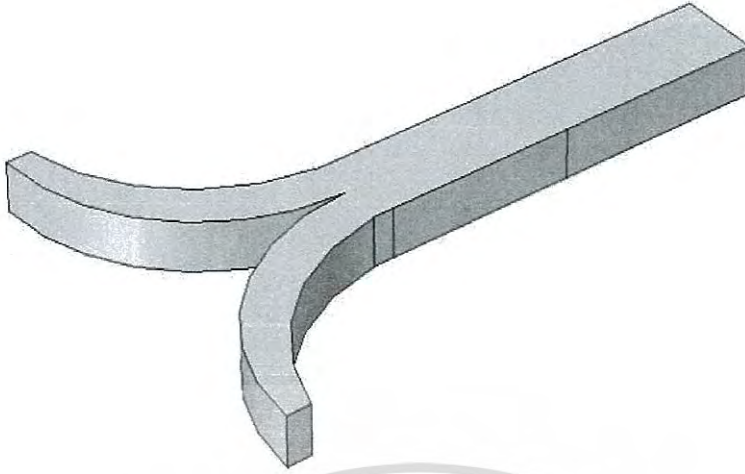


รูปที่3.65 รูปที่ได้จากการfilletครั้งที่2เพื่อให้ปลายท่อเป็นโค้งมน



รูปที่3.66 จากนั้นทำการใช้คำสั่ง mirror เพื่อสร้างท่ออีกส่วนออกมาประกบกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.67 ได้แบบท่อ Y-Asymmetric ออกมา



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการทดลองและอภิปรายผล

ในส่วนของขั้นตอนนี้จะนำรูปทรงท่อขนาดเล็กในแต่ละแบบมาทำการวิเคราะห์ผล โดยของไหลที่ไหลภายในท่อขนาดเล็กมี 2 ชนิด คือ

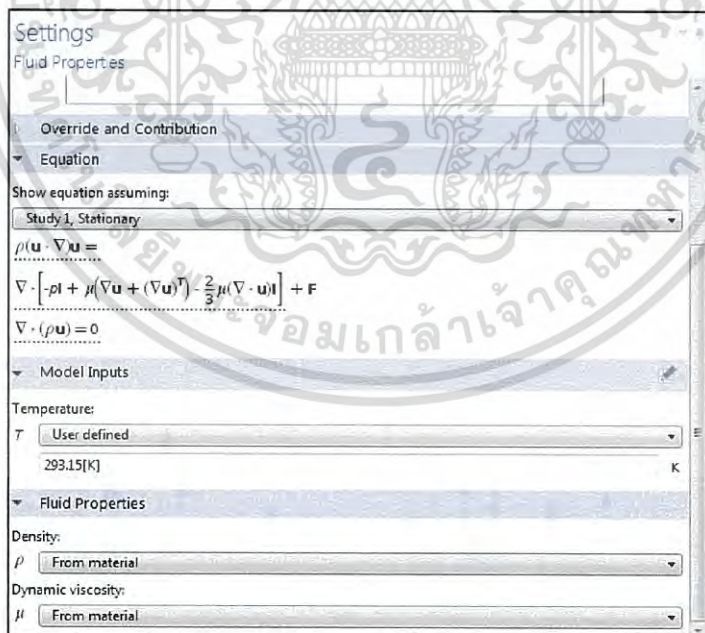
1. ของไหลในท่อ คือ น้ำบริสุทธิ์ (pure water) และมีการเปลี่ยนค่าความเร็วเริ่มต้นของไหล (v_{inlet})
2. ของไหลในท่อ คือ น้ำที่มีการเจือปนสารอื่น (diluted liquid) และมีการเปลี่ยนค่าคงที่การแพร่กระจายของไหลเฉื่อย (Difussion constant)

ในการวิเคราะห์ผล จะใช้หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิเคราะห์ค่าความเร็วของไหล (Velocity magnitude) และความดันของไหล ในบริเวณ outlet ของท่อขนาดเล็กแต่ละชนิด โดยมีรายละเอียดของการวิเคราะห์ผล ดังนี้

กรณีที่ 1

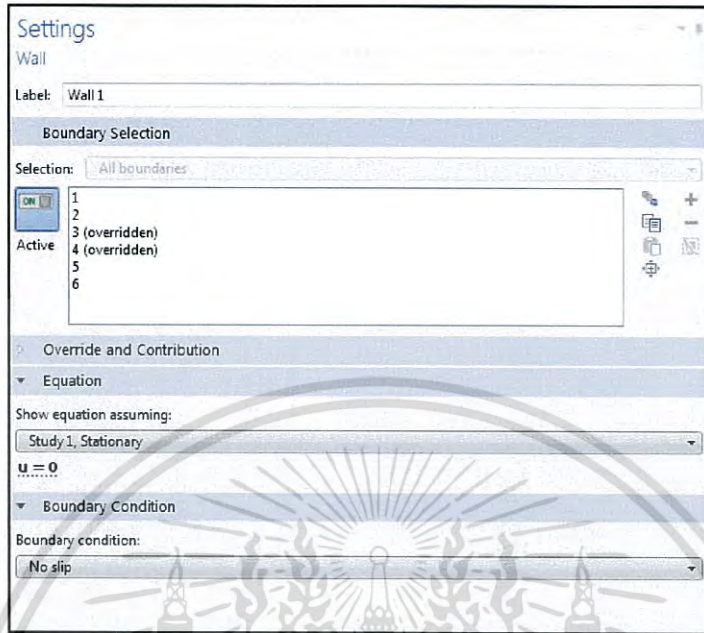
4.1 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อบรรยากาศ

มาในส่วนของการวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อบรรยากาศจะเป็นรูปแบบของสมการนาเวียร์-สโตคส์ที่ทำการวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ได้ตั้งสมการ



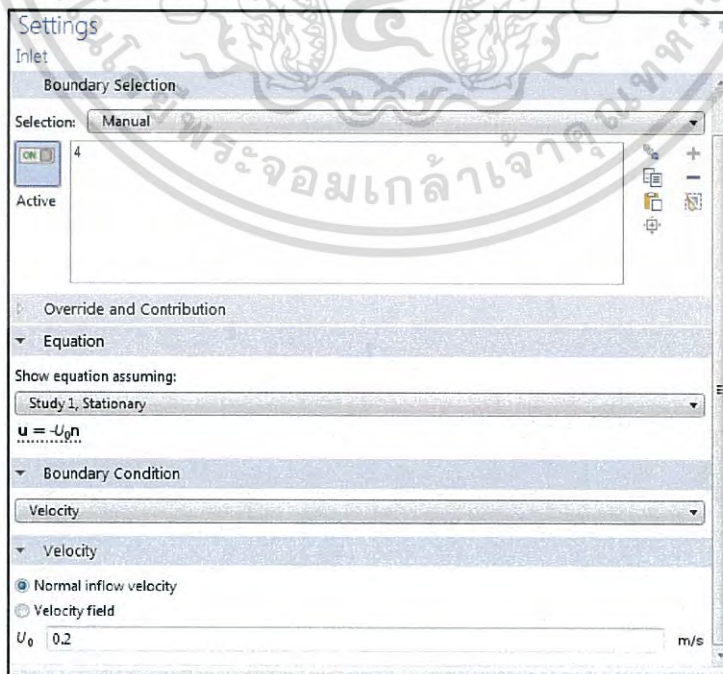
รูปที่ 4.1 สมการที่แสดงใน fluid properties ที่อุณหภูมิ 20°C

ต่อมาจะเป็นสมการที่แสดงถึงการไหลของท่อผ่านตัวผนังท่อ (Wall) โดยกำหนดให้ Boundary condition เป็นแบบ no-slip เพื่อที่จะศึกษาการไหลภายในท่อ จะได้ดังภาพ



รูปที่ 4.2 สมการของของไหลภายในท่อที่ผ่านผนังท่อ

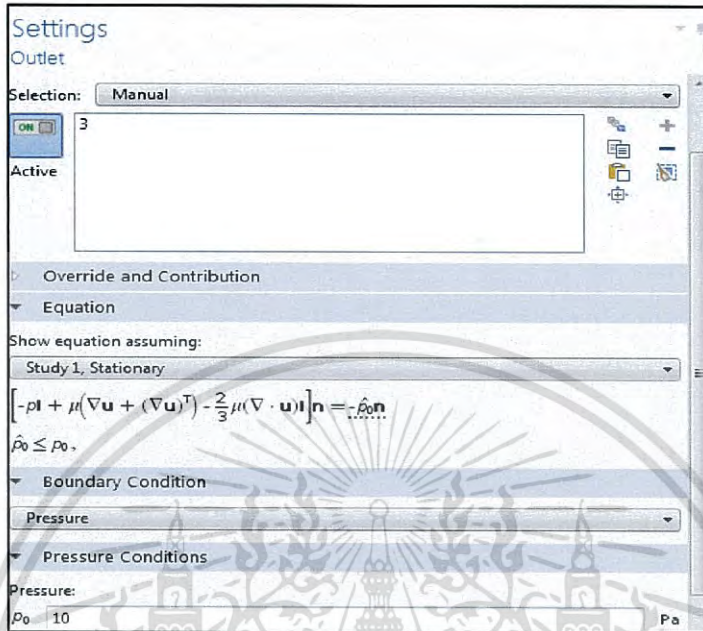
จากนั้นมาในส่วนของการเข้าการไหลของของไหล (inlet) โดยที่กำหนดให้โดเมนในส่วนที่ 4 เป็นทางเข้าของการไหลของสาร และ กำหนดให้ความเร็วในการไหล (Normal inflow velocity) หรือ $U_0=0.2\text{m/s}$ จะแสดงผลได้ดังภาพ



รูปที่ 4.3 กำหนดการไหลบริเวณท่อทางเข้าที่ความเร็ว 0.2m/s

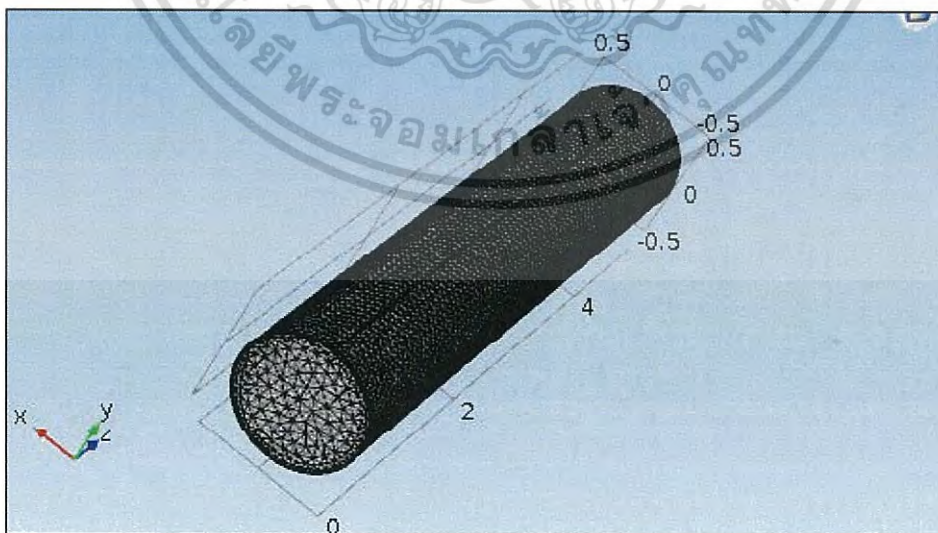
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อมาในส่วนของ ท่อทางออกของของไหล(Outlet)ทำการกำหนดค่า $P_0=10\text{Pa}$ ในส่วนของ boundary conditionที่3ของท่อตรง ที่ทางออกของน้ำจะไปแสดงค่าที่ในส่วนของ compute จะได้ดังรูป



รูปที่ 4.4 การไหลของทางออกของของไหล(Outlet)

ทำการแบ่งชิ้นงานด้วยคำสั่ง mesh ที่ต้องวิเคราะห์ด้วยหลักการ finite element จากนั้นทำการ Mesh เพื่อให้คอมพิวเตอร์นั้นทำการคำนวณทางระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีความละเอียดในแต่ละพื้นที่ของรูปทรงที่เรานำมา Mesh กันจะได้รายละเอียดดังรูป



รูปที่ 4.5 การ mesh ของวัตถุในแต่ละจุด

จากนั้นตัวโปรแกรมก็จะหยุดทำงานและจะแสดงผลค่าของการ Mesh ว่าในแต่ละ boundary นั้น จะมีการแสดงค่าออกมาทางคำสั่งของโปรแกรม

```

Progress Log
===== Opened Untitled11111114111.mph =====
Number of vertex elements: 8
Number of edge elements: 396
Number of boundary elements: 9052
Number of elements: 75101
Free meshing time: 2.80s
Minimum element quality: 0.1949

```

รูปที่ 4.6 จำนวนของ element ที่แสดงออกมา

จากนั้นนำโปรแกรมที่ผ่านการ mesh มาแล้ว มาทำการ compute เพื่อทำการคำนวณหาค่าขนาดความเร็วภายในท่อ รวมทั้ง จะปรากฏค่าว่ามี element รวมทั้ง free meshing นั้นด้วย รวมทั้งบอกองค์ประกอบในส่วนต่างๆที่นำมา compute กับตัวชิ้นงานนี้

```

Progress Log
===== Opened Untitled11111114111.mph =====
Number of vertex elements: 8
Number of edge elements: 200
Number of boundary elements: 2406
Number of elements: 9324
Free meshing time: 0.71s
Minimum element quality: 0.143
Stationary Solver 1 in Solution 1 started at 29-Mar-2559 11:33:39.
Nonlinear solver
Number of degrees of freedom solved for: 94032.
Nonsymmetric matrix found.
Scales for dependent variables:
Pressure (compl.p): 1
Velocity field (compl.u): 1.8e-007
Orthonormal null-space function used.
Iter   SolEst   ResEst   Damping   StepSize #Res #Jac #Sol LinIt   LinErr   LinRes
  1      63     1.2e+008 0.0100000    64   2   1   2   1   0.013   0.0037
  2      5.7     1.1e+008 0.1000000    6.4   3   2   5   3   6.4e-007 1.5e-007
  3     1.7e-006     31   1.0000000    0.68   4   3   8   4   0.11   0.014
  4     1.6e-012     2.7e-005 1.0000000    2.7e-006   5   4   11  8   0.0012 7.7e-005
Stationary Solver 1 in Solution 1: Solution time: 48 s
Physical memory: 1.29 GB
Virtual memory: 1.47 GB

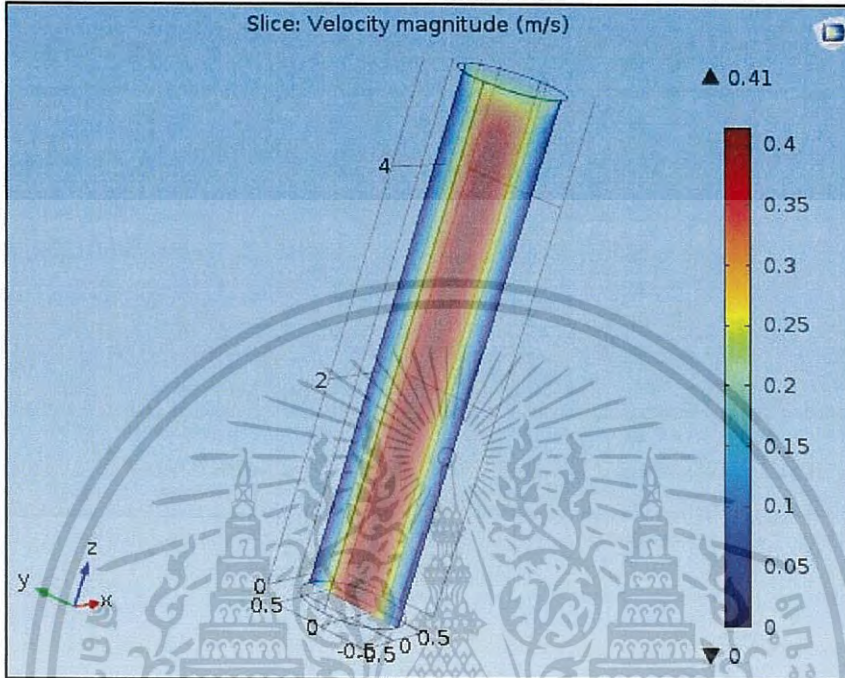
```

รูปที่ 4.7 องค์ประกอบในการ compute ตัวชิ้นงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลการวิเคราะห์ความเร็วภายในท่อ

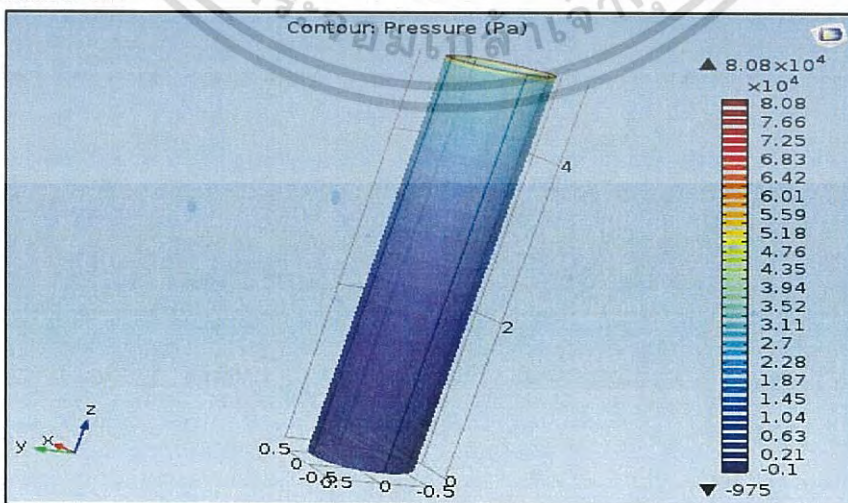
ต่อมาจากจะเป็นในส่วนของผลลัพธ์(result) ในส่วนนี้จะเป็นการแสดงรูปบ่งบอกถึงขนาดของความเร็ว(Velocity magnitude) ที่เกิดขึ้นภายในท่อตรง ที่ความเร็วตรงกลางท่อนั้นมีความเร็วมาก



รูปที่ 4.8 ขนาดของความเร็วภายในท่อ

ผลการวิเคราะห์ความดันภายในท่อ

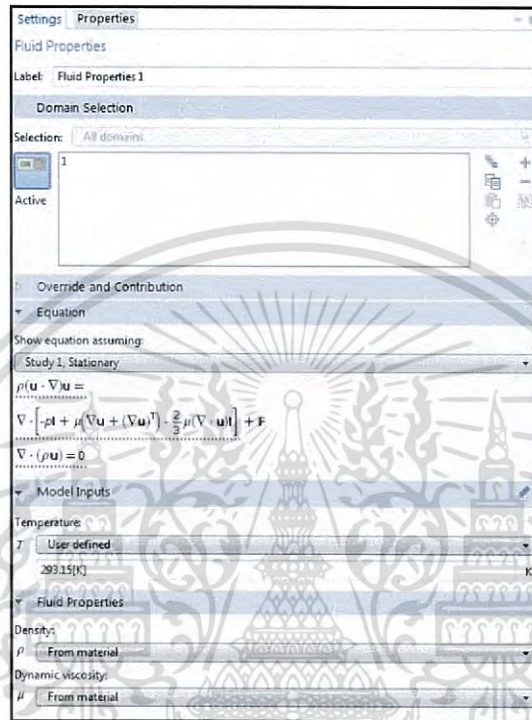
ในส่วนของ pressure นั้นจะเป็นแบบfilledเพื่อบ่งบอกความดันที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดว่ามี ความดันเท่าไรที่เกิดขึ้นภายในท่อ จากปากทางเข้าของท่อ จะมีความดันมาก จนกระทั่งลดลงเรื่อยๆ ของท่อทางออกของน้ำ



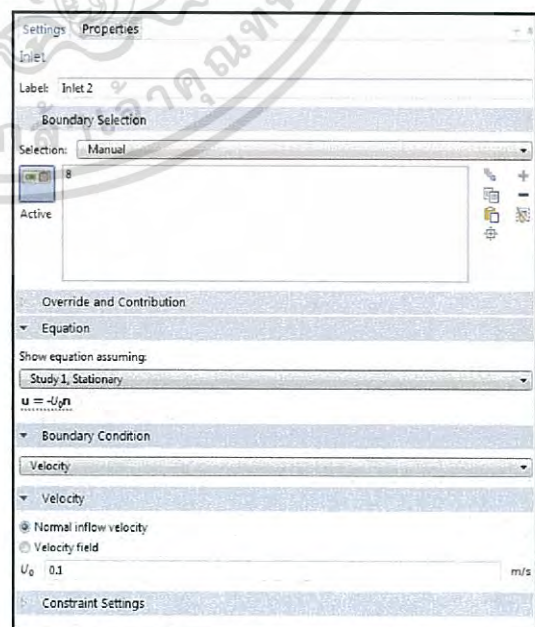
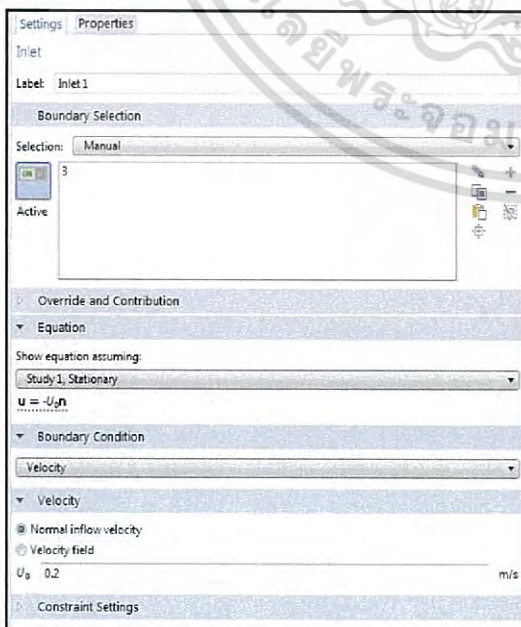
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับรูปที่ 4.9 ขนาดของความดันในท่อ
ใช้เฉพาะในวงประชุมเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อรูปตัว T โดยมีการกำหนดค่าความเร็วที่ 1 มีค่าไม่เท่ากับค่าความเร็วที่ 2

ในส่วนของ Fluid properties สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์การไหลของไหลภายในท่อว่ามีลักษณะเป็นแบบLaminar flow รวมทั้งการไหลนั้นเป็น การไหลในสภาวะที่คงที่ภายในท่อ ดังปรากฏดังภาพ



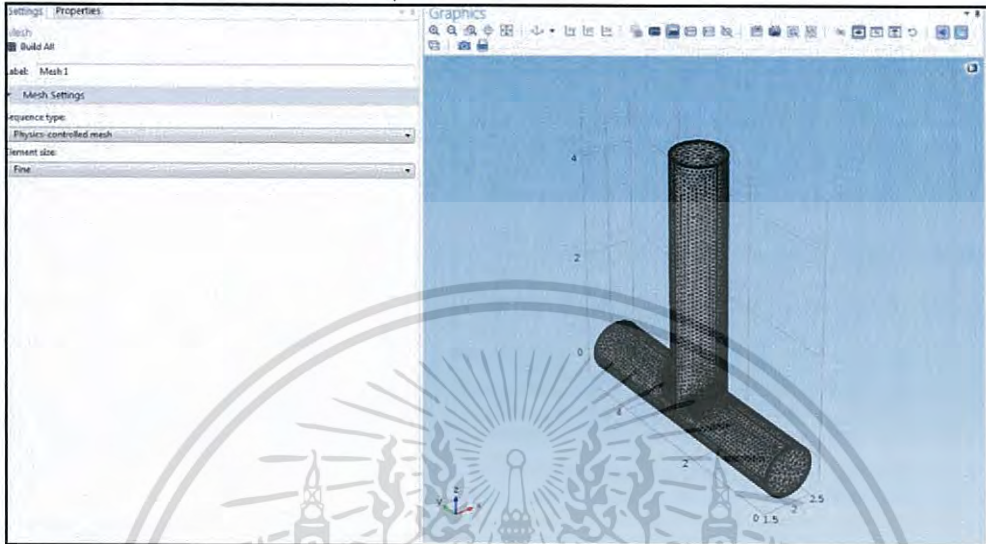
รูปที่ 4.10 เป็นการบอกถึงสมการที่ใช้ในการคำนวณที่การศึกษาแบบ stationary จะเป็นการศึกษาที่เจาะจงไปยัง ความเร็ว และ ความดัน



รูปที่ 4.11 inlet 1 มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตไว้โดยการกำหนดค่าความเร็วเริ่มต้นไว้ที่ 0.2 m/s เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่บนการใดๆ ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการแบ่งชิ้นงานด้วยคำสั่ง mesh ที่ต้องวิเคราะห์ด้วยหลักการ finite element

จากนั้นนำรูปทรงที่ได้จากการขึ้นรูป มาทำการ Mesh กัน เพื่อวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทางคณิตศาสตร์ เพื่อวิเคราะห์จุดทุกจุดในรูปทรงของท่อตัว T จากนั้นตัวโปรแกรมจะหยุดทำงานที่ค่าๆหนึ่งที่มีความคลาดเคลื่อนในการวิเคราะห์ที่น้อยที่สุดจาก นั้นจะแสดงผลของความเร็วและความดันของท่อตัว T ขึ้นมาในแต่ละจุด



รูปที่ 4.12 เป็นการ mesh ในระดับ element size ที่ระดับ fine เพื่อจะเป็นการคำนวณในแบบวิธี Finite element. ในแต่ละจุดของรูปทรง

```

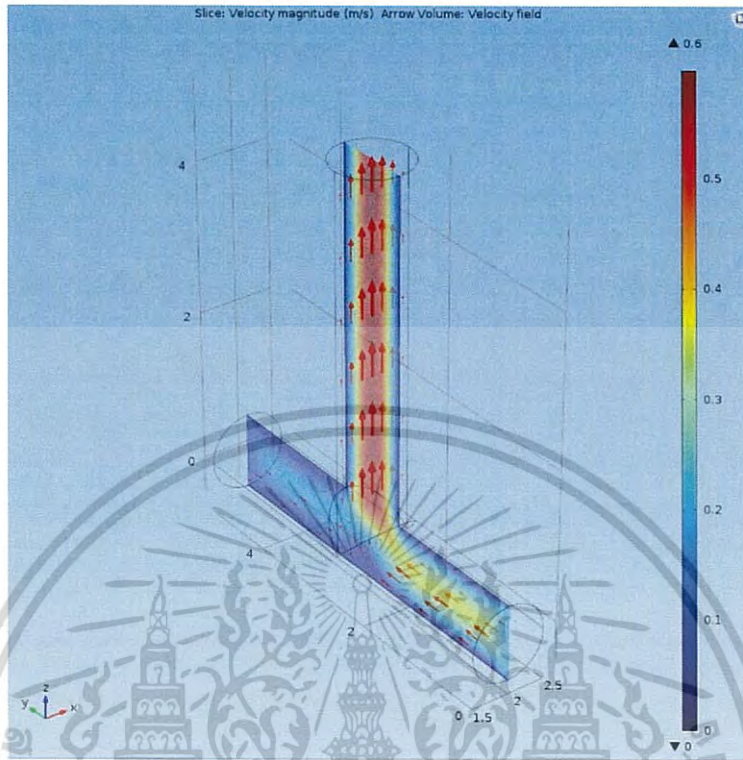
===== Opened t-shape ล่าท. msh =====
Number of vertex elements: 16
Number of edge elements: 351
Number of boundary elements: 3566
Number of elements: 19165
Free meshing time: 0.55s
Minimum element quality: 0.2695
Stationary Solver 1 in Solution 1 started at 29-四月-2016 12:09:50.
Nonlinear solver
Number of degrees of freedom solved for: 171448.
Nonsymmetric matrix found.
Scales for dependent variables:
Pressure (compl.p): 1
Velocity field (compl.u): 0.00017
Orthonormal null-space function used.
Iter   SolEst   ResEst   Damping   Stepsize #Res #Jac #Sol LinIt   LinErr   LinRes
  1     66     9.8e+004  0.0100000  67     2     1     2     1     0.0055  0.004
  2     5.8     8.9e+004  0.1000000  6.4     3     2     5     2     0.0002  2.9e-005
  3     0.0017  2.9e+004  1.0000000  0.7     4     3     8     4     0.068   0.038
  4     2.6e-007  0.98  1.0000000  0.0066  5     4     11    7     0.096   0.012
Stationary Solver 1 in Solution 1: Solution time: 41 s
Physical memory: 1.68 GB
Virtual memory: 1.87 GB

```

รูปที่ 4.13 เป็นหน้าจอแสดงคำสั่งที่โปรแกรมวิเคราะห์ออกมาโดยการ compute จากนั้นตัวโปรแกรม จะทำการหยุดในช่วงความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

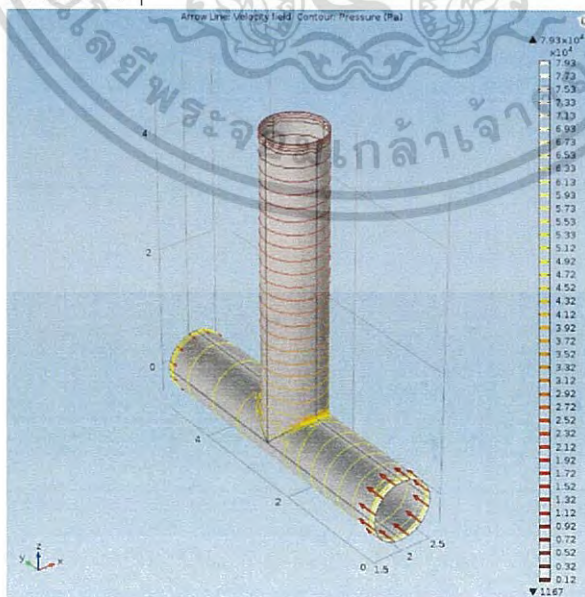
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า จากนั้นส่วนของผลลัพธ์ที่ได้จากการ compute จะแสดงผลในส่วนของคุณค่าความเร็ว และความดันที่เกิดขึ้นภายในท่อ จากนั้นความเร็วที่เกิดขึ้นตรงกลางท่อนั้นจะมีค่าที่หลายๆ ซึ่งแตกต่างจากท่อทางเข้า

ที่มีความเร็วของไหลที่แตกต่างกัน เพราะ ได้ทำการใส่ความเร็วของน้ำในแต่ละส่วนของท่อทางเข้ามีค่าไม่เท่ากัน



รูปที่4.14 แสดงถึงขนาดของความเร็วที่เกิดขึ้นภายในท่อ โดยที่ความเร็วตรงกลางท่อนั้นมีค่ามาก

จากนั้นในส่วนของความดันที่เกิดขึ้นภายในท่อ จะสังเกตเห็นได้ว่า ที่ทางเข้าทั้ง2ของปลายท่อทั้ง2นั้นจะมีค่าไม่เท่ากันเนื่องจาก ได้ทำการใส่ความเร็วไปที่ท่อทั้ง2ที่มีค่าไม่เท่ากัน จนกระทั่งของไหลไปยังท่อทางออกน้ำที่มีค่าลดลงเรื่อยๆ

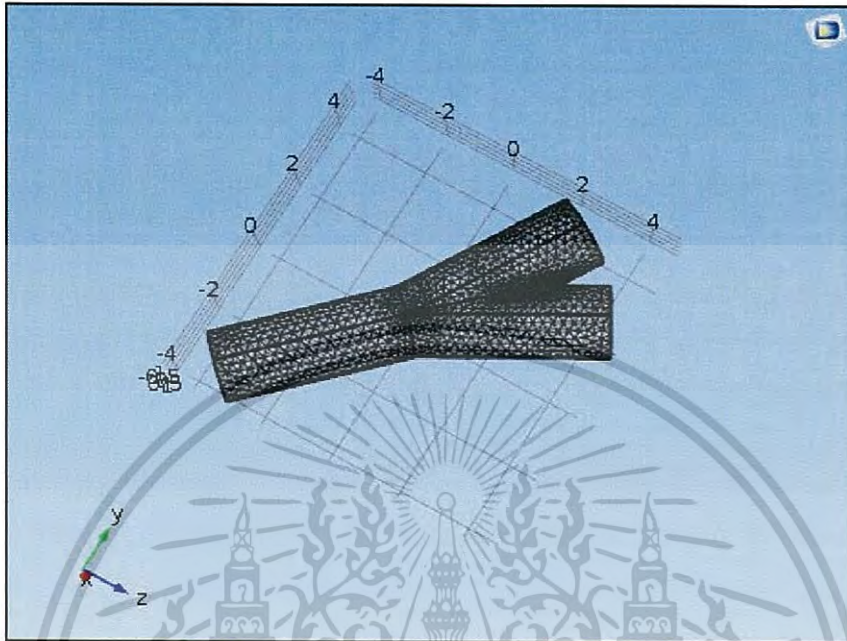


รูปที่4.15 แสดงถึงขนาดความดันที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดของท่อ ที่ปลายทางเข้าของท่อทั้ง2จะมีค่าที่มาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

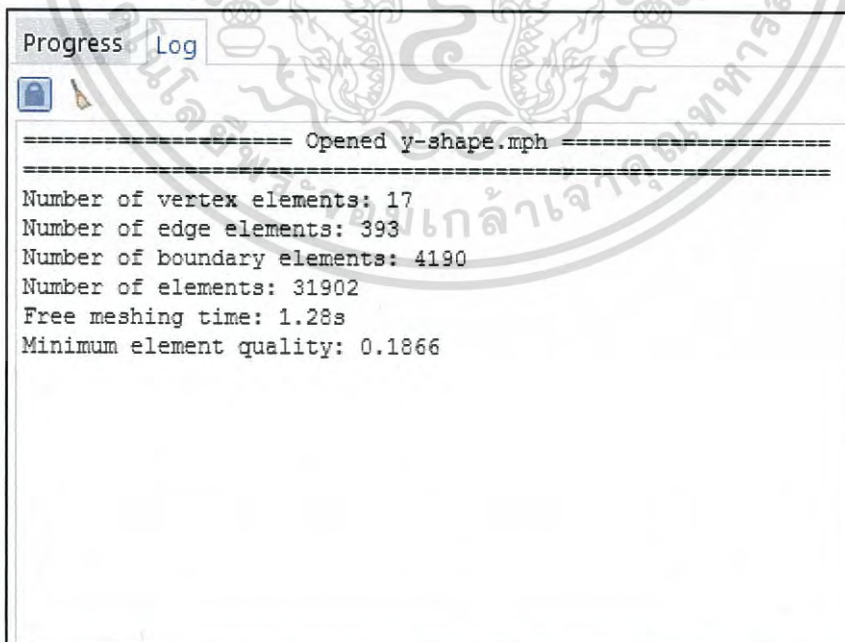
4.3 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อรูป Y-JUNCTION แบบ 3D

ทำการMesh เพื่อให้คอมพิวเตอร์นั้นทำการคำนวณทางระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีความละเอียดในแต่ละพื้นที่ของรูปทรงที่เรานำมาMeshกันจะได้รายละเอียดดังรูป



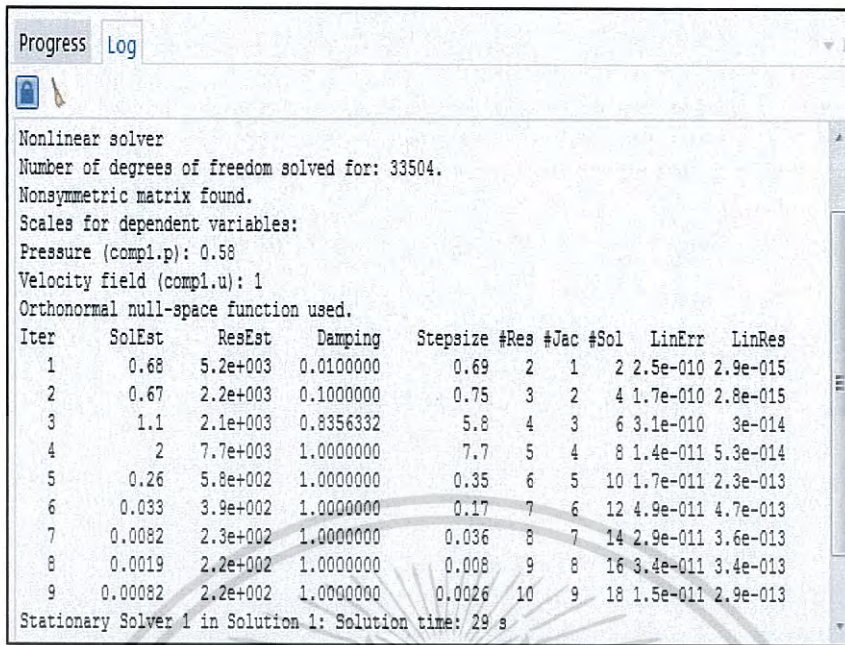
รูปที่ 4.16 การแบ่งชิ้นงาน(mesh)ของวัตถุในแต่ละจุด

จากนั้นค่าจากการmeshของวัตถุนั้นจะมีค่าบ่งบอกถึงจำนวน element ในแต่ละอัน



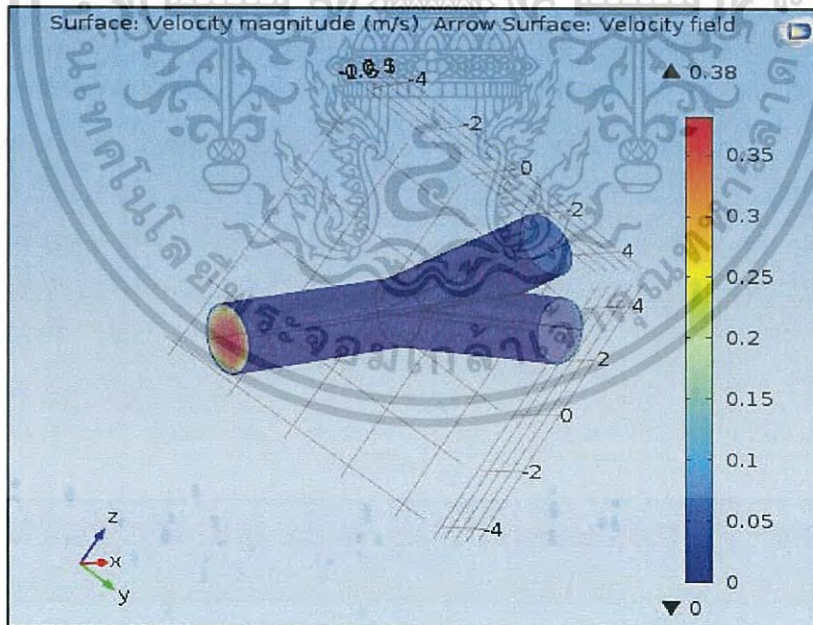
รูปที่ 4.17 จำนวนของelementที่นำมาmeshนั้นมีค่าเท่าไร

จากนั้นนำโปรแกรมที่ผ่านการmeshมาแล้ว มาทำการcompute เพื่อทำการคำนวณหาค่าขนาดความเร็วภายในท่อ รวมทั้ง จะปรากฏค่าว่ามีelement รวมทั้ง free meshing นั้นด้วย รวมทั้งไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ออกทางหน้าจอแสดงผลเป็นกราฟและเสียงอย่างดังถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปบอกองค์ประกอบในส่วนต่างๆที่นำมา computeกับตัวซิงงานนี้



รูปที่ 4.18 องค์ประกอบในการcomputeตัวขึ้นงาน

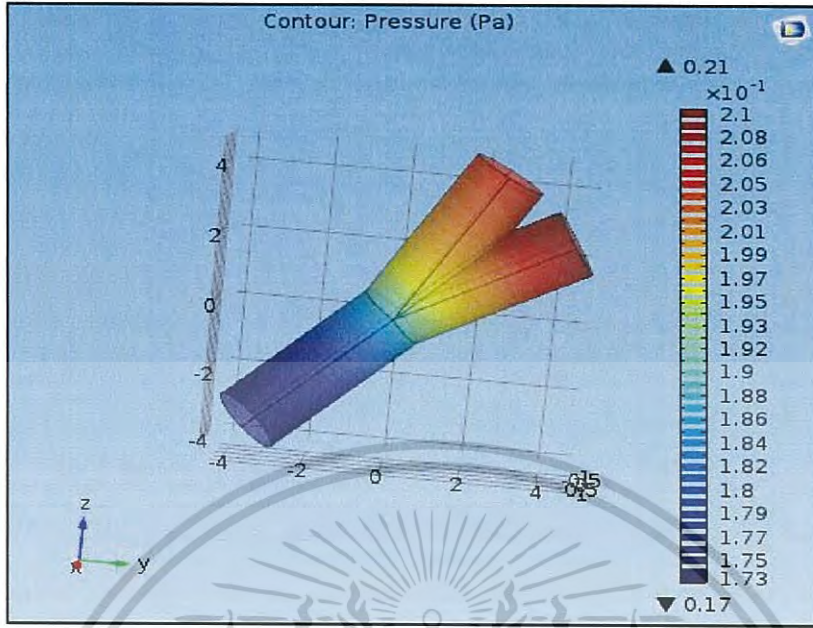
ต่อมาจากจะเป็นในส่วนของผลลัพธ์(result) ในส่วนนี้จะเป็นการแสดงรูปบ่งบอกถึงขนาดของความเร็ว(Velocity magnitude) ที่แสดงผลลัพธ์ของค่าความเร็วออกมาให้เห็น



รูปที่ 4.19 ขนาดของความเร็วภายในท่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

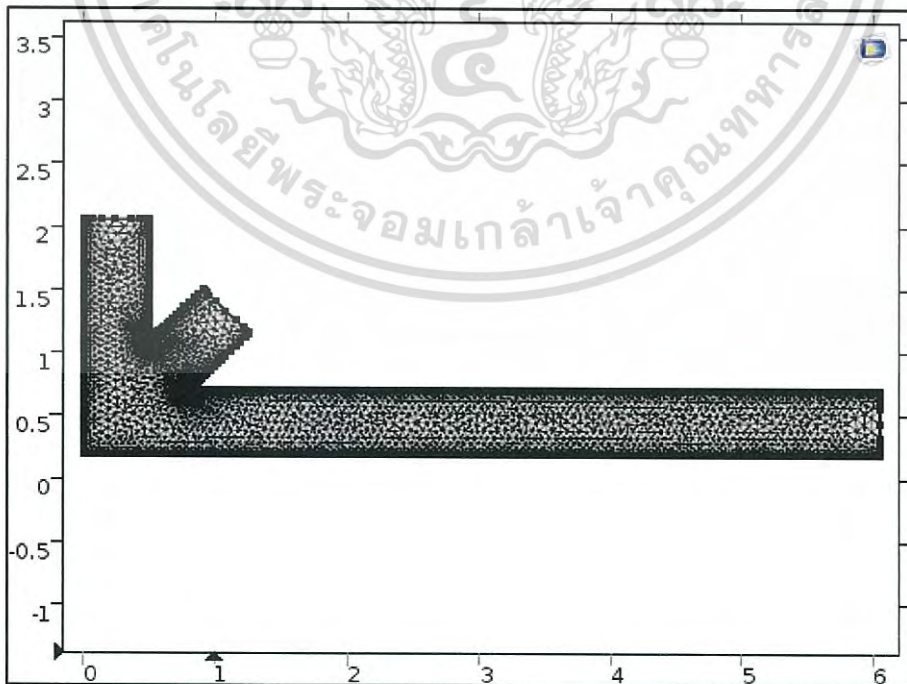
ในส่วนต่อมาภาพของค่าความดัน (pressure) นั้นจะแสดงผลออกมา



รูปที่ 4.20 แสดงถึงความดันที่เกิดขึ้นภายในท่อของแต่ละจุด ที่ทางเข้าของน้ำทั้ง 2 ข้างจะมีค่าความดันที่มากที่สุด

4.4 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อรูป W-SHAPE

จากนั้นทำการ Mesh เพื่อให้คอมพิวเตอร์นั้นทำการคำนวณทางระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีความละเอียดในแต่ละพื้นที่ของรูปทรงที่เรานำมา Mesh กันจะได้รายละเอียดดังรูป



รูปที่ 4.21 การ mesh ของวัตถุในแต่ละจุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

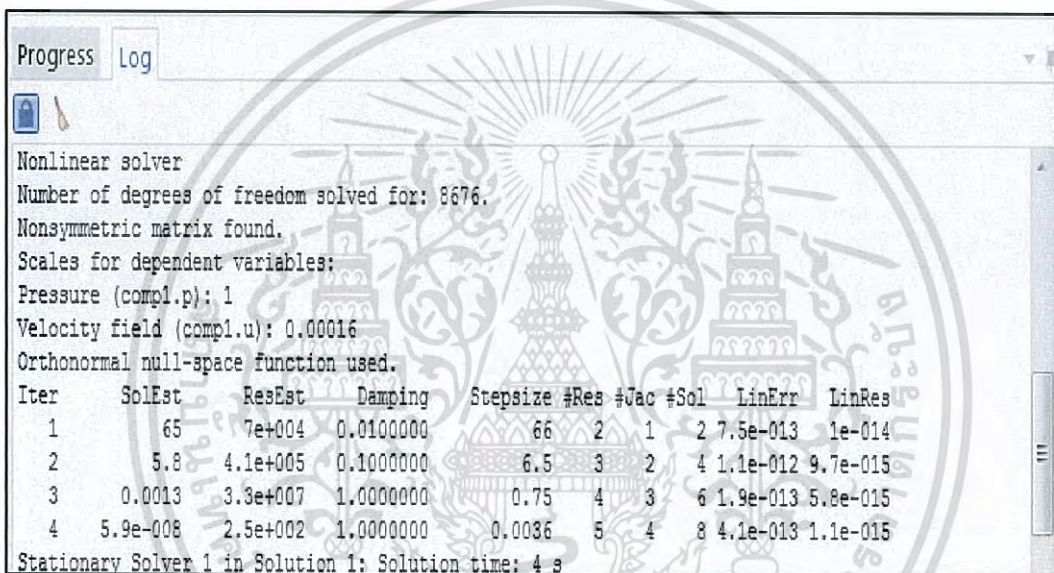
```

Number of vertex elements: 11
Number of boundary elements: 347
Number of elements: 4139
Minimum element quality: 0.8019

```

รูปที่ 4.22 จำนวนของelementที่นำมาmeshนั้นว่าในแต่ละจุดมีboundaryที่11ด้วยกันทั้งคู่

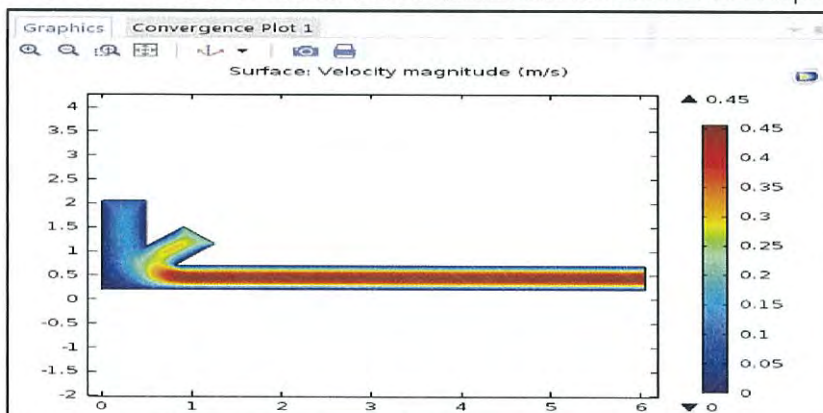
จากนั้นนำโปรแกรมที่ผ่านการmeshมาแล้ว มาทำการcompute เพื่อทำการคำนวณหาค่าขนาดความเร็วภายในท่อ รวมทั้ง จะปรากฏค่าว่ามีelement รวมทั้ง free meshing นั้นด้วย รวมทั้ง บอกองค์ประกอบในส่วนต่างๆที่นำมา computeกับตัวชิ้นงานนี้



รูปที่ 4.23 องค์ประกอบในการcomputeตัวชิ้นงาน

4.4.1 โดยภายในท่อของ W-SHAPE มีการกำหนดค่าความเร็วที่1ไม่เท่ากับค่าความเร็วที่2

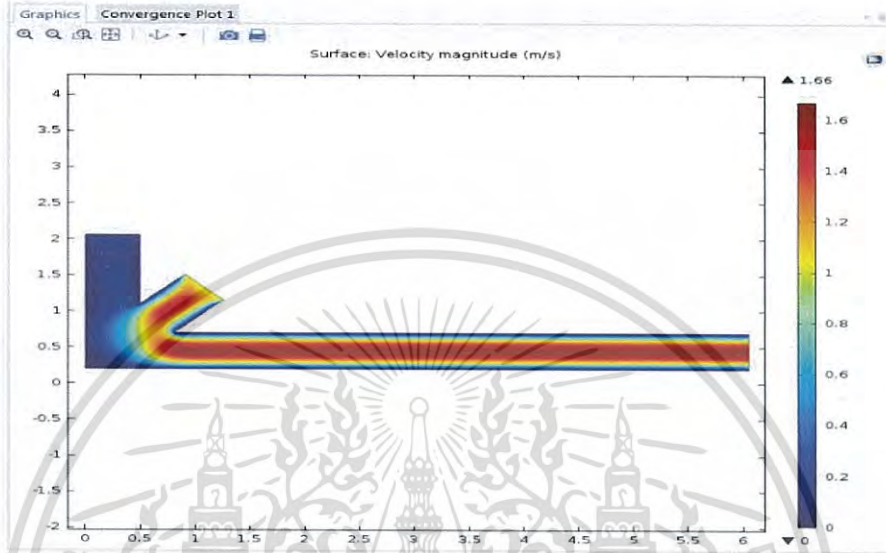
ต่อมาจะเป็นในส่วนของผลลัพธ์ของรูปทรง W-Shape ซึ่งเป็นผลจากการ compute จะได้ค่าความเร็วทิศทางการไหล รวมถึง ความดัน(Pressure)ที่เกิดขึ้นภายในท่อของ W-Shape นั้นด้วย



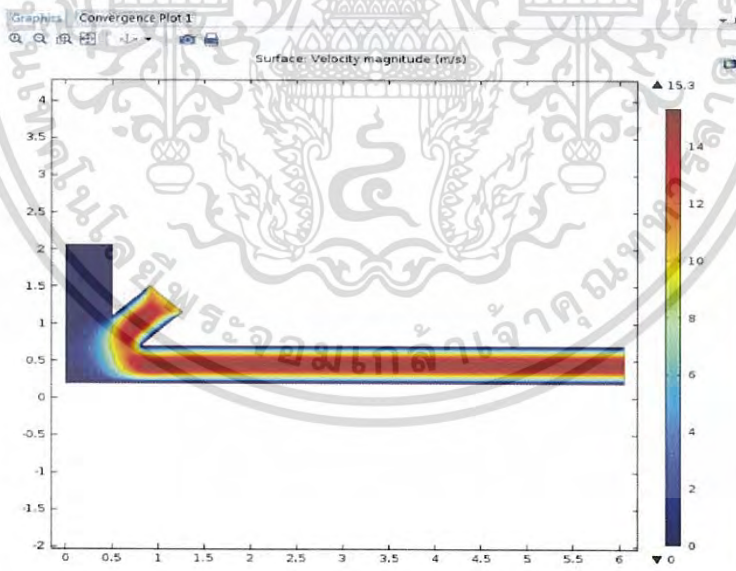
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใ้ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รูปที่ 4.24 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีการกำหนดค่าความเร็วที่ 1 มีค่า 0.1 m/s และค่าความเร็ว
ไม่วากรณ์ใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
ที่ 2 มีค่าที่กำหนด 0.2 m/s

4.4.2 โดยภายในท่อของ W-SHAPE มีการกำหนดค่าความเร็วที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s และมีการปรับเปลี่ยนค่าความเร็วที่ 2 มีค่า 1 m/s , 10 m/s และ 100m/s

หลังจากนั้นการกำหนดค่าที่ท่อทางเข้าที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s และมีการปรับเปลี่ยนค่าที่ท่อทางเข้าที่ 2 โดยที่ท่อทางเข้าที่ 2 จะมีขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อทั้งสองด้านมีเส้นผ่านศูนย์กลางมีค่าเท่ากัน

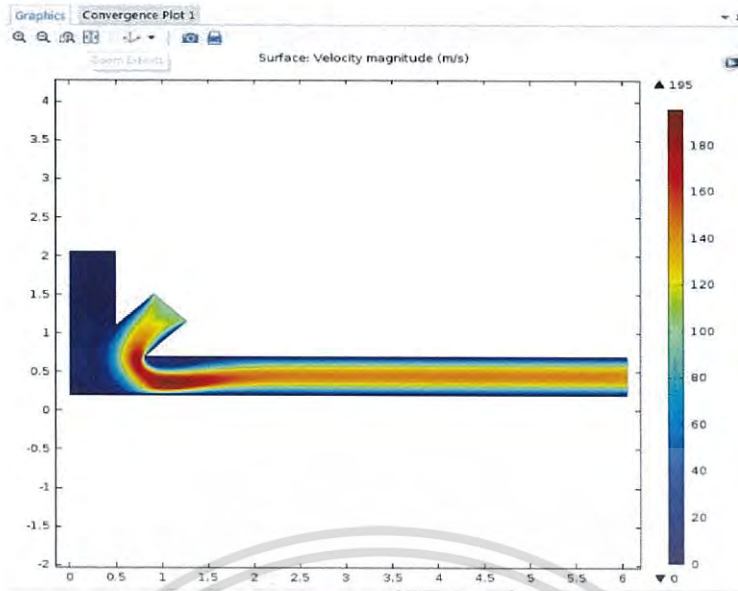


รูปที่ 4.25 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีความเร็วที่ท่อทางเข้าที่ 2 มีค่า 1 m/s



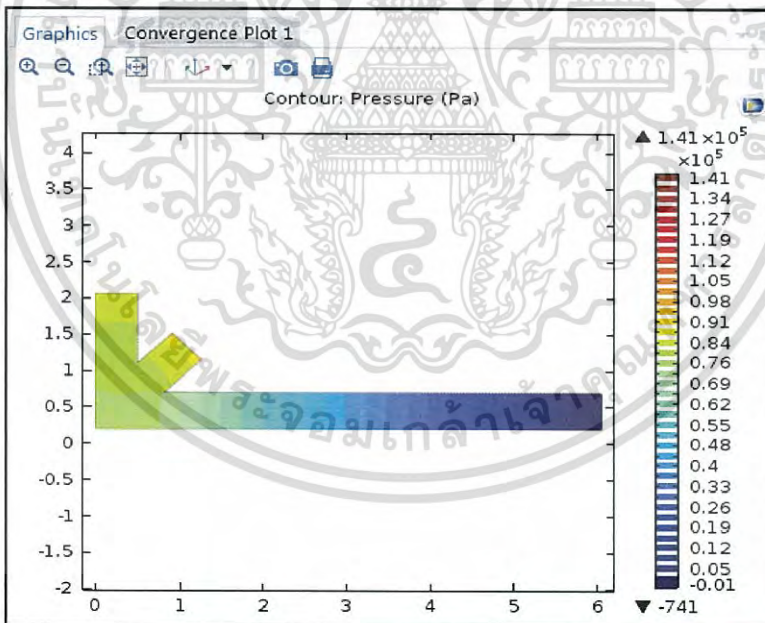
รูปที่ 4.26 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีความเร็วที่ท่อทางเข้าที่ 2 มีค่า 10 m/s

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.27 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วที่มีความเร็วที่ท่อทางเข้าที่ มีค่า 100 m/s

ต่อมาในส่วนของ pressure นั้นจะแสดงผลถึงว่า ในท่อของ W-Shape ซึ่งภายในท่อนั้นจะมี ความดันในแต่ละส่วนที่ไม่เท่ากัน ขึ้นอยู่กับหลายปัจจัยที่ได้กำหนดไว้

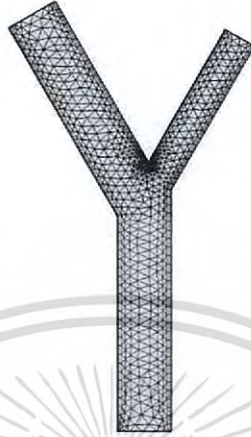


รูปที่ 4.28 ขนาดของความดันแต่ละจุดภายในท่อรูป W-SHAPE

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์ในท่อรูป Y-JUNCTION แบบ 2D

จะเป็นส่วนของการแสดงผลที่นำรูปทรงไปขึ้นรูป แล้วนำไปทำการMeshกัน เพื่อทำการวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในทุกๆจุดของรูปทรงจากนั้น จะแสดงผลลัพธ์ของการนำไปทำการMeshกัน ดังนี้



รูปที่4.29 รูปทรงY-Shapeแบบ2มิติ เมื่อทำการMeshกันแล้ว

```
Progress Log
===== Opened y-shape-2D (1).mph =====
Number of vertex elements: 9
Number of boundary elements: 9
Number of elements: 7
Minimum element quality: 0.3055
```

รูปที่4.30 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการนำมาทำการMeshกัน ซึ่งจะบอกจำนวนelementของแต่ละชนิด

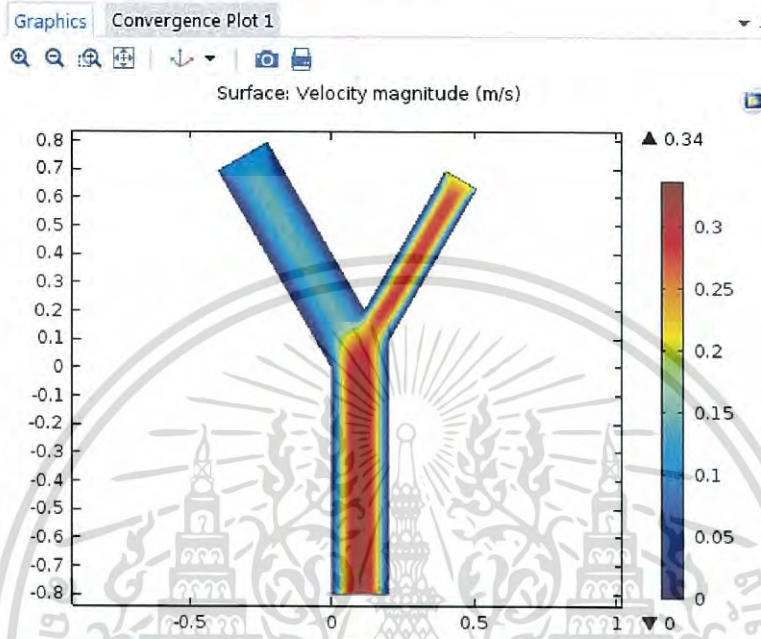
จากนั้นนำรูปทรงที่ได้จากการวิเคราะห์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว มาทำการ compute เพื่อทำการวิเคราะห์ในส่วนของความเร็ว และ ความดัน ที่ได้กำหนดไว้ จากนั้นตัวโปรแกรมจะทำการหยุดรันจะได้อีกต่อไปนี้

```
Progress Log
=====
Nonlinear solver
Number of degrees of freedom solved for: 2877.
Nonsymmetric matrix found.
Scales for dependent variables:
Pressure (compl.p): 1
Velocity field (compl.u): 8.3e-005
Orthonormal null-space function used.
Iter      SolEst      ResEst      Damping      Stepsize #Res #Jac #Sol  LinErr  LinRes
  1         65        2e+005     0.01000000     66      2   1   2  1.3e-012  4.8e-015
  2         5.8       3.7e+005     0.10000000     6.4     3   2   4  5.1e-013  5.3e-015
  3      0.00039    2.6e+007     1.00000000     0.75    4   3   6  4.3e-013  3.5e-015
  4      7.2e-009     10     1.00000000     0.00042  5   4   8  3.3e-013  6.2e-016
Stationary Solver 1 in Solution 1: Solution time: 3 s
```

รูปที่4.31 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการนำมาcompute เพื่อศึกษา ความเร็ว และ ความดัน

4.5.1 โดยภายในท่อของ Y-JUNCTION 2D SHAPE มีการกำหนดค่าความเร็วที่ 1 ไม่เท่ากับค่าความเร็วที่ 2

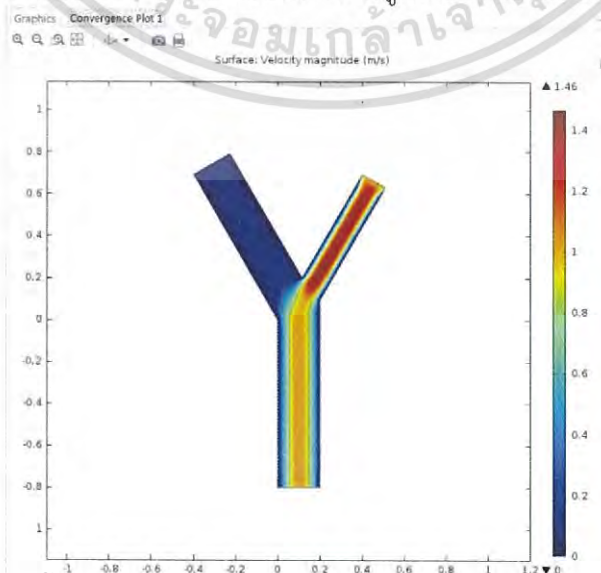
ต่อมาจะเป็นในส่วนของคุณภาพของความเร็วที่ได้จากการทำการcomputeเสร็จแล้ว จะแสดงค่าของความเร็วดังปรากฏใน แถบสีของค่าความเร็ว (color bar) ดังนี้โดยมีการกำหนดค่าความเร็วที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s และค่าความเร็วที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.2 m/s



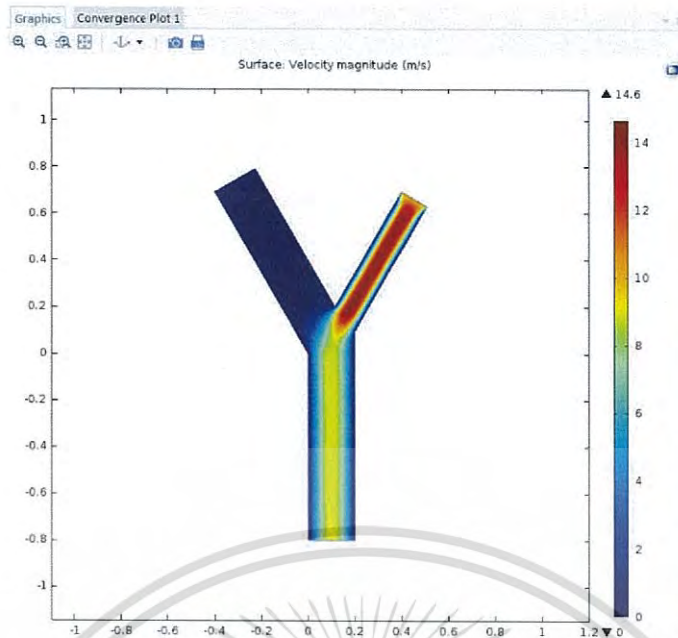
รูปที่ 4.32 แสดงผลลัพธ์ที่เป็นในส่วนของคุณภาพความเร็ว (Velocity magnitude) ที่จะบ่งบอกขนาดของความเร็ว และ ทิศทางของความเร็ว

4.5.2 โดยภายในท่อของ Y-JUNCTION 2D มีการกำหนดค่าความเร็วที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s และมีการปรับเปลี่ยนค่าความเร็วที่ 2 มีค่า 1 m/s , 10 m/s และ 100 m/s

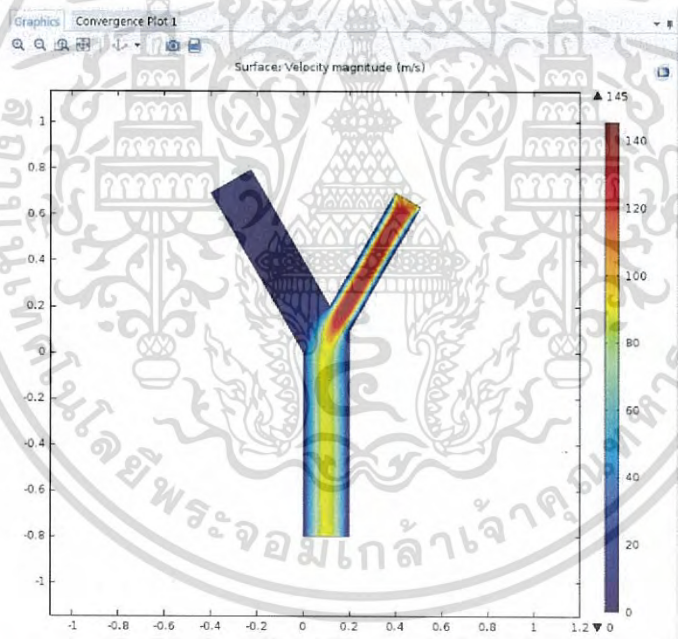
หลังจากนั้นการกำหนดค่าที่ท่อทางเข้าที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s และมีการปรับเปลี่ยนค่าที่ท่อทางเข้าที่ 2 โดยที่ท่อทางเข้าที่ 2 จะมีขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อน้อยกว่าท่อทางเข้าที่ 1



รูปที่ 4.33 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วโดยการกำหนดค่าความเร็วที่ 2 มีค่าความเร็ว 1 m/s ไม่ว่าการณ์ใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



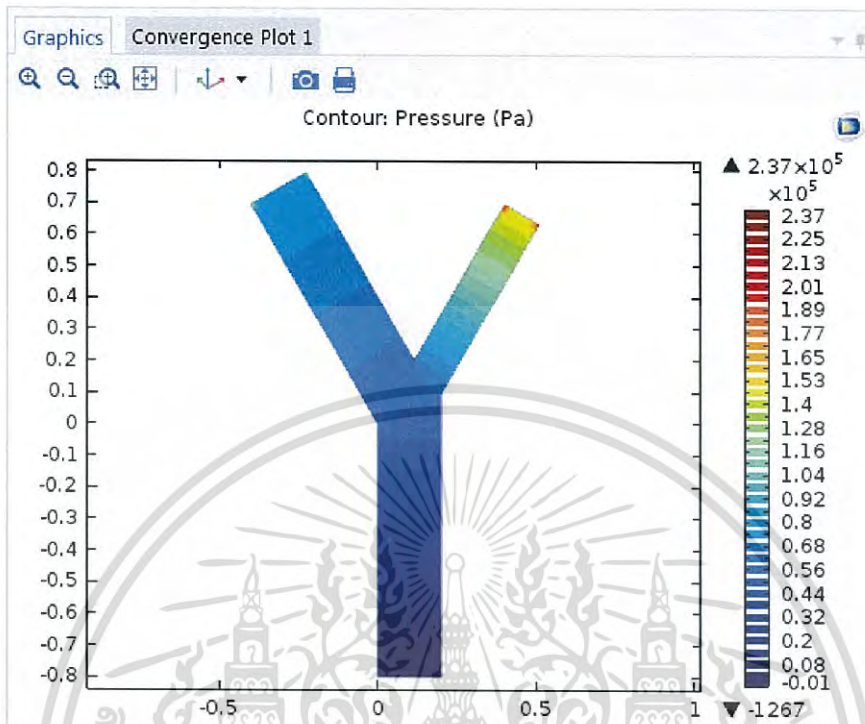
รูปที่ 4.34 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วโดยการกำหนดความเร็วที่ 2 มีค่าความเร็ว 10 m/s



รูปที่ 4.35 ผลการวิเคราะห์ค่าความเร็วโดยการกำหนดความเร็วที่ 2 มีค่าความเร็ว 100 m/s

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในส่วนนี้จะเป็นในส่วนค่าที่ได้จากการCompute ซึ่งเป็นPressure หรือ ความดันที่เกิดขึ้นภายในท่อแบบ filled ในแต่ละจุดของท่อ ว่ามีความดันเท่าไร

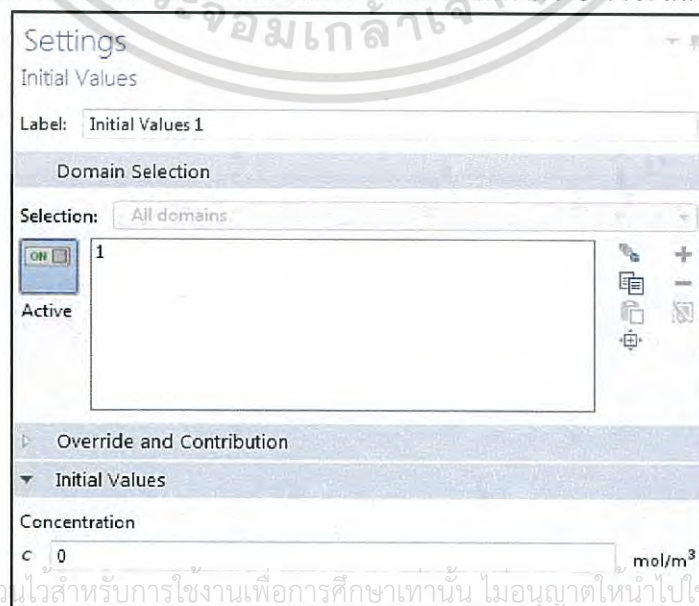


รูปที่ 4.36 แสดงถึงความดันที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดภายในท่อในแต่ละจุดที่ให้ความเร็วของน้ำในท่อทางเข้าแต่ละจุดไม่เท่ากัน

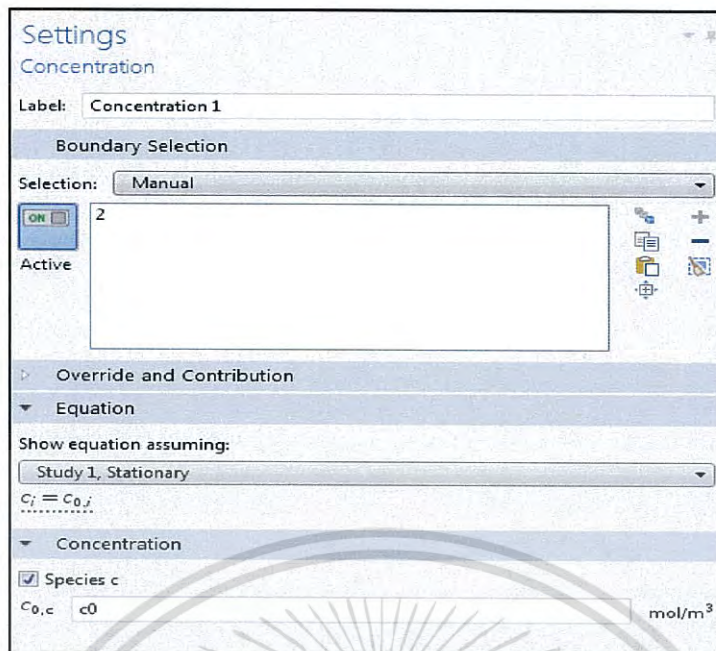
กรณีที่ 2

4.6 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์กับน้ำที่มีสารเจือปน ในรูปท่อ H-SHAPE

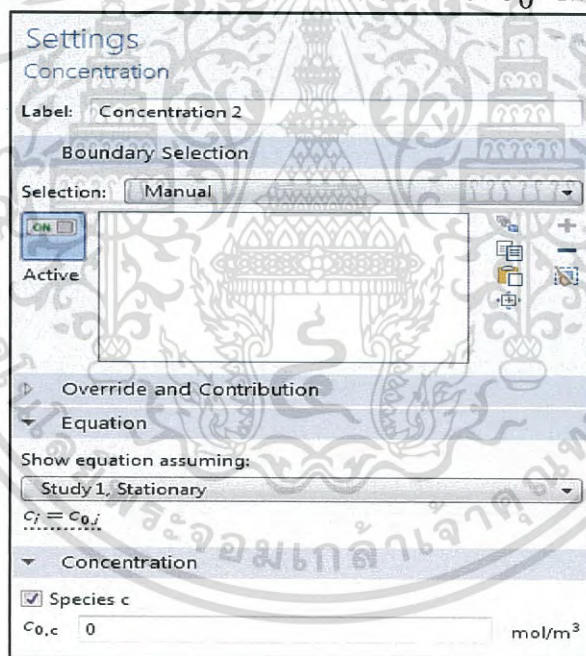
ต่อมาในส่วนของ initial value และค่าความเข้มข้นที่ 1 และ ค่าความเข้มข้นที่ 2 ที่ได้มา กำหนดขอบเขตและสัดส่วนของความเข้มข้นของสารละลาย ในแต่ละขอบเขต รวมทั้ง กำหนดให้ค่าความเข้มข้น หรือ Concentration ในส่วนของ initial value มีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งจะได้ดังภาพ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งหารูปที่ 4.37 ส่วนประกอบของ initial value ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



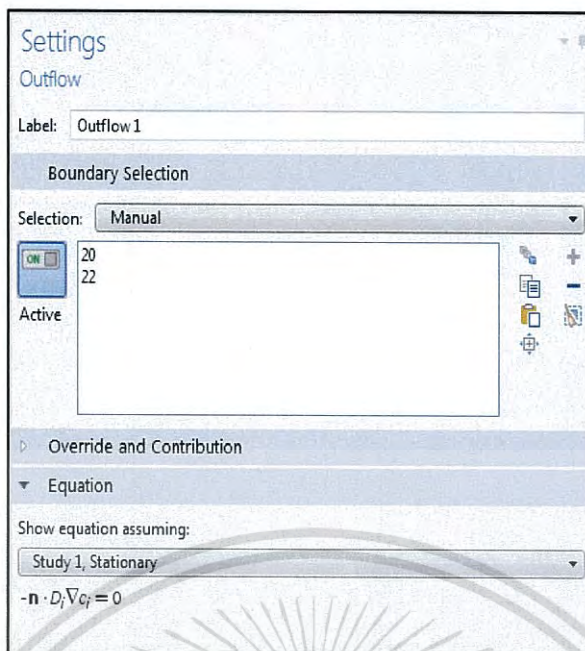
รูปที่ 4.38 ส่วนประกอบของค่าความเข้มข้นที่ 1 ซึ่ง $C_0=1\text{mol}/\text{m}^3$



รูปที่ 4.39 แสดงส่วนประกอบของค่าความเข้มข้นที่ 2 $C_0=0\text{ mol}/\text{m}^3$

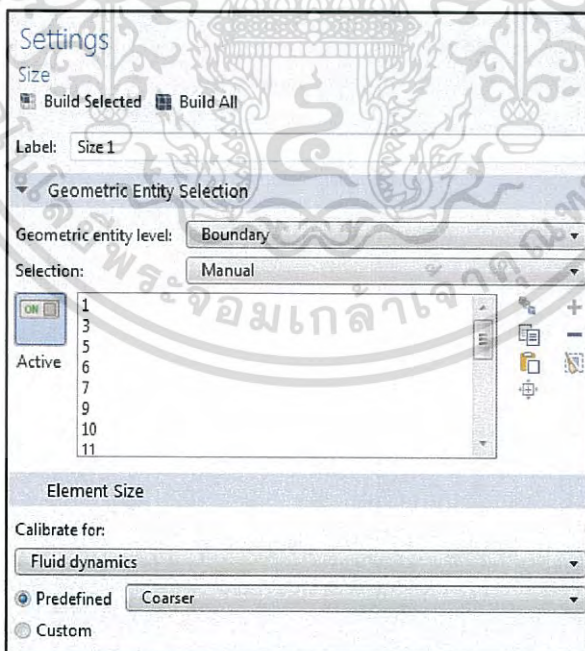
ต่อมาในส่วนของ outflow จะบังคับขอบเขตและส่วนประกอบต่างๆของสมการที่ใช้ในการวิเคราะห์การไหลที่เกิดขึ้นทางออกของๆไหล ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.40 ในส่วนของ Outflow และ สมการที่ใช้ในการคำนวณ

ต่อมาในส่วนของ Mesh นั้น จะทำการกำหนดค่าของ mesh เริ่มต้นที่ size โดยการกำหนดค่า calibrate เป็น fluid dynamics และ predefine เป็น coarser และ ในส่วนของ size1 และ size2 ซึ่งจะเป็นการเลือกรูปทรงของ boundary ในแต่ละด้านจะได้ลักษณะดังรูป

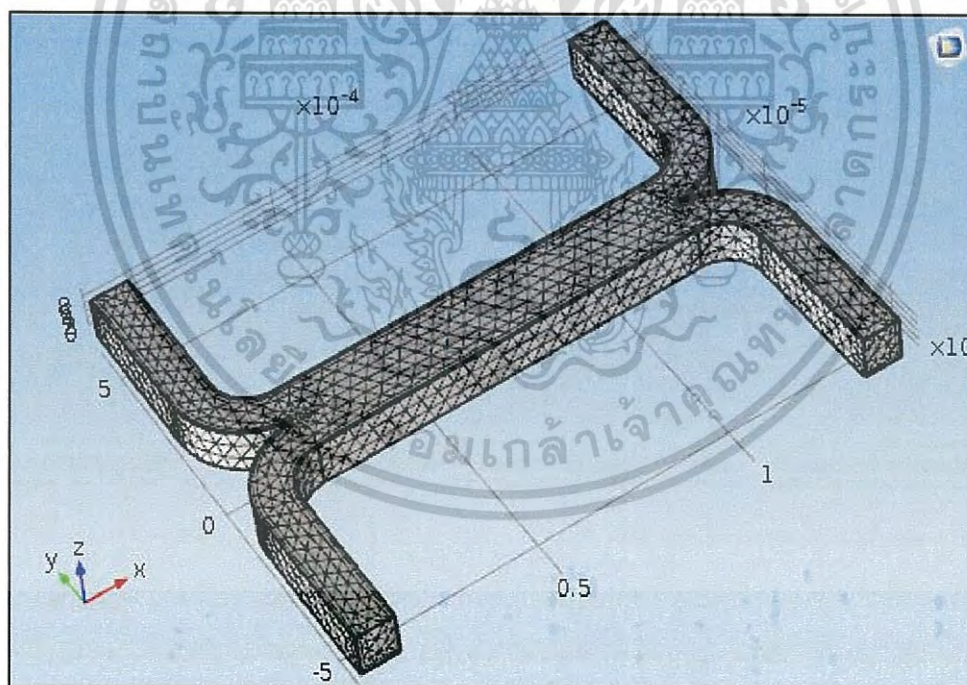


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Element Size Parameters	
Maximum element size:	4.5E-6 m
Minimum element size:	1.39E-6 m
Maximum element growth rate:	1.25
Curvature factor:	0.8
Resolution of narrow regions:	0.5

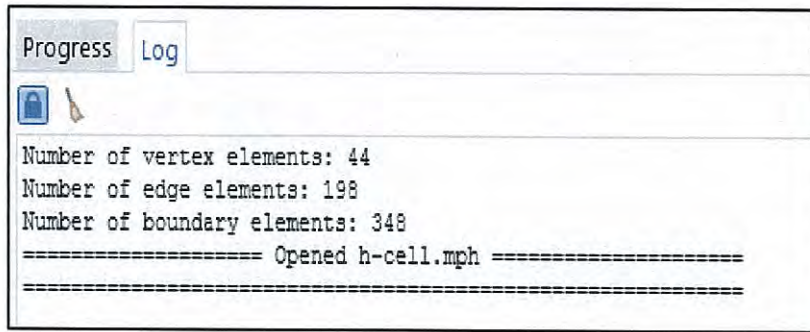
รูปที่ 4.41 โดยมีการกำหนดขนาดของMesh เพื่อให้เหมาะสมกับการ compute

จากนั้นทำการMesh เพื่อให้คอมพิวเตอร์นั้นทำการคำนวณทางระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีความละเอียดในแต่ละพื้นที่ของรูปทรงที่เรานำมาMeshกันจะได้รายละเอียดดังรูป



รูปที่ 4.42 รูปทรง H-SHAPE ที่ได้จากการทำกระบวนการ Mesh เพื่อทำการวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.43 จำนวนของ edge และ element ที่ได้จากการทำ Mesh ของรูปทรง H-cell

จากนั้นนำโปรแกรมที่ผ่านการ mesh มาแล้ว มาทำการ compute เพื่อทำการคำนวณหาค่าขนาดความเร็วภายในท่อ รวมทั้ง จะปรากฏค่าว่ามี element รวมทั้ง free meshing นั้นด้วย รวมทั้งบอกองค์ประกอบในส่วนต่างๆ ที่นำมา compute กับตัวชิ้นงานนี้

```

Progress Log
Nonlinear solver
Number of degrees of freedom solved for: 115432.
Nonsymmetric matrix found.
Scales for dependent variables:
Pressure (compl.p): 1
Velocity field (compl.u): 0.00027
Orthonormal null-space function used.
Iter SolEst ResEst Damping Stepsize #Res #Jac #Sol LinIt LinErr LinRes
1 7.9 2.6e+004 0.0100000 8 2 1 2 2 0.027 0.073
2 5 1.9e+004 0.1000000 5.5 3 2 5 9 3.4e-005 0.00012
3 6.5e-006 2.2e+002 1.0000000 0.62 4 3 8 17 0.053 0.003
4 9.7e-011 0.0012 1.0000000 2.7e-005 5 4 11 34 0.086 0.0034
Stationary Solver 1 in Solution 1: Solution time: 143 s (2 minutes, 23 seconds)
Physical memory: 1.66 GB
Virtual memory: 1.82 GB
Stationary Solver 2 in Solution 1 started at 21-พ.ค.-2559 16:15:00.
Continuation solver
Nonlinear solver
Number of degrees of freedom solved for: 36752 (plus 8948 internal DOFs).
Continuation parameter D = 1e-010.
Nonsymmetric matrix found.
Scales for dependent variables:
Concentration (compl.c): 1
Orthonormal null-space function used.
Iter SolEst ResEst Damping Stepsize #Res #Jac #Sol LinIt LinErr LinRes
1 5.9 92 0.0100000 5.9 2 1 2 2 0.025 0.0076
2 5.1 1.6e+004 0.1000000 5.7 3 2 5 5 9.7e-006 3.9e-006
3 9e-007 2.3e+003 1.0000000 0.82 4 3 8 8 0.017 0.0002
4 1.8e-008 62 1.0000000 1.2e-006 5 4 11 13 0.086 0.001

Continuation parameter D = 5e-011.
Iter SolEst ResEst Damping Stepsize #Res #Jac #Sol LinIt LinErr LinRes
1 0.00085 1.5e+002 1.0000000 0.073 8 5 15 19 0.041 0.0024

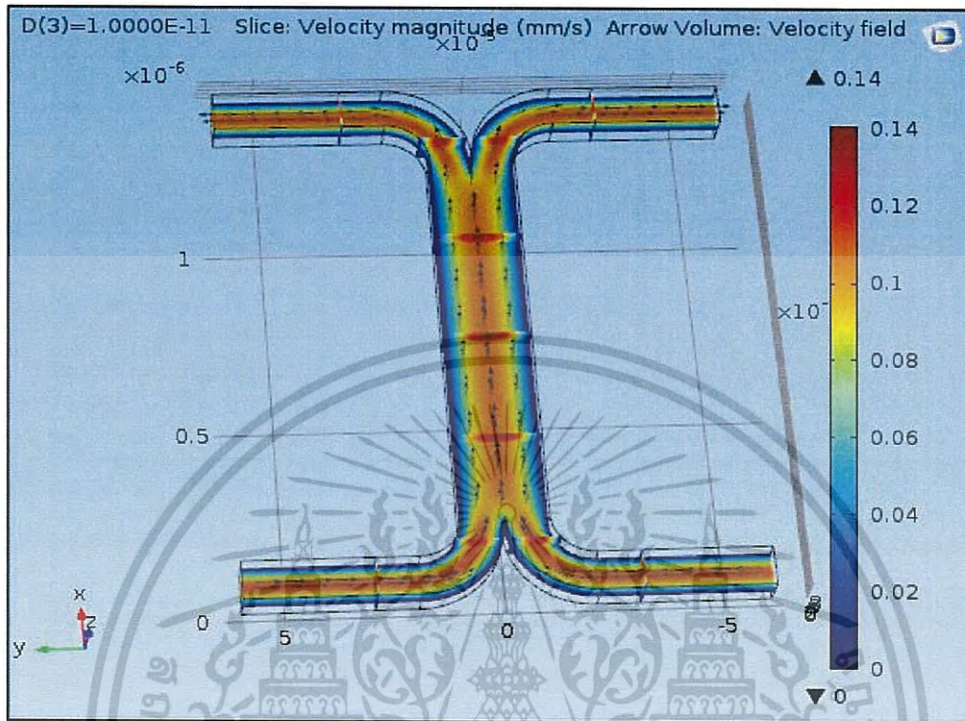
Continuation parameter D = 1e-011.
Iter SolEst ResEst Damping Stepsize #Res #Jac #Sol LinIt LinErr LinRes
1 0.081 73 1.0000000 5.1 11 6 19 27 0.1 0.0046
2 0.026 45 1.0000000 0.11 12 7 22 36 0.088 0.004
3 0.007 19 1.0000000 0.028 13 8 25 45 0.046 0.0014
4 0.0022 6.6 1.0000000 0.0073 14 9 28 54 0.046 0.0015
5 0.00072 2.7 1.0000000 0.0024 15 10 31 63 0.066 0.0014

```

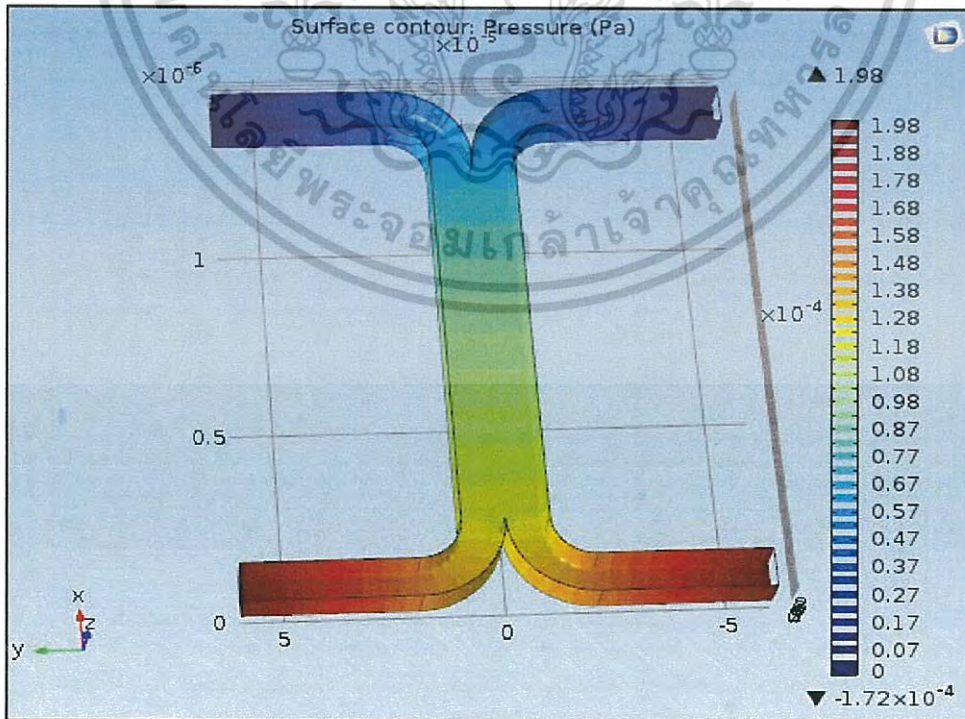
รูปที่ 4.44 องค์ประกอบที่ได้จากการมาทำ compute ซึ่งจะบอกค่า ของ degree of freedom

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นจะเป็นในส่วนของresult ที่ได้จากการทำ compute เพื่อที่จะศึกษาในส่วนของขนาดของความเร็ว(Velocity Magnitude)และ ความดันที่เกิดขึ้น รวมทั้งdiffusion constant ที่ทำการ variesค่าเข้าไป3ค่าด้วยกัน

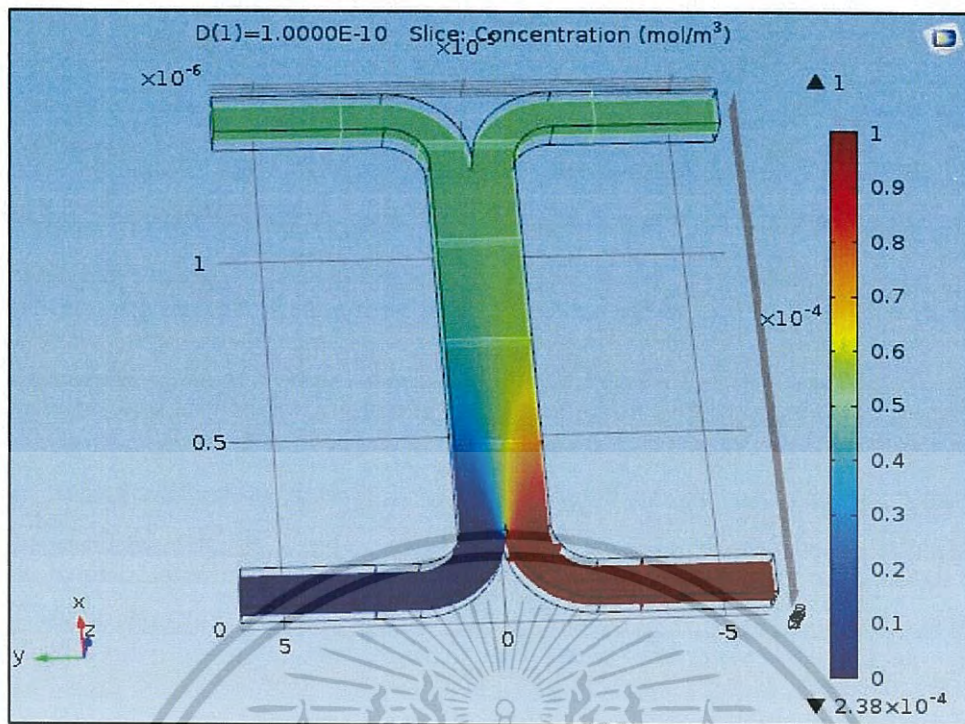


รูปที่ 4.45 ขนาดของความเร็วภายในท่อ

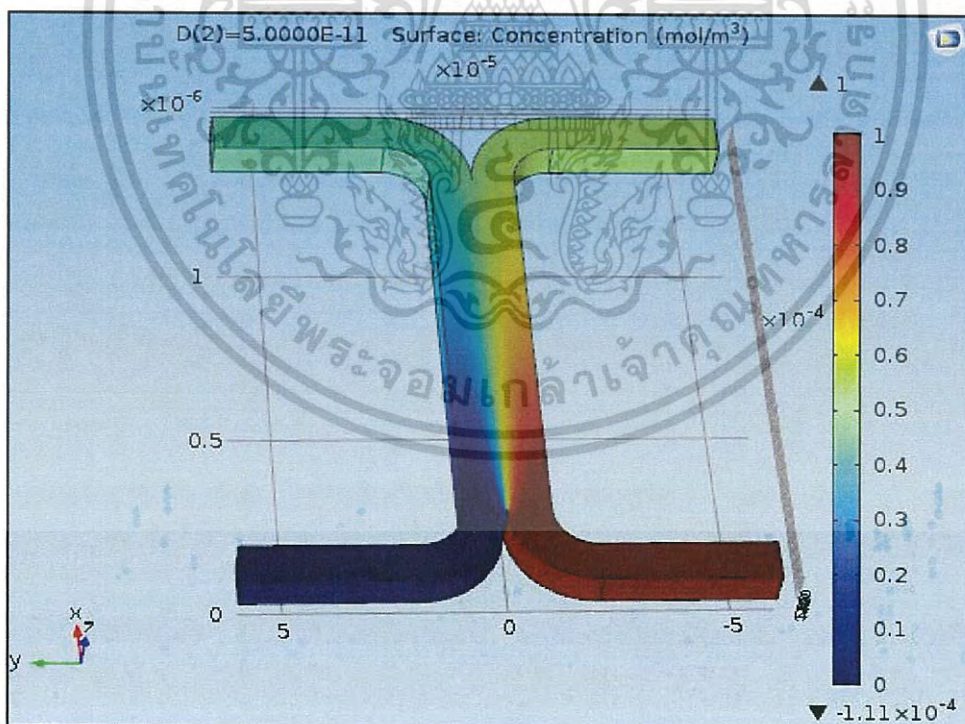


รูปที่ 4.46 ความดันที่เกิดขึ้นภายในท่อแต่ละboundary

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

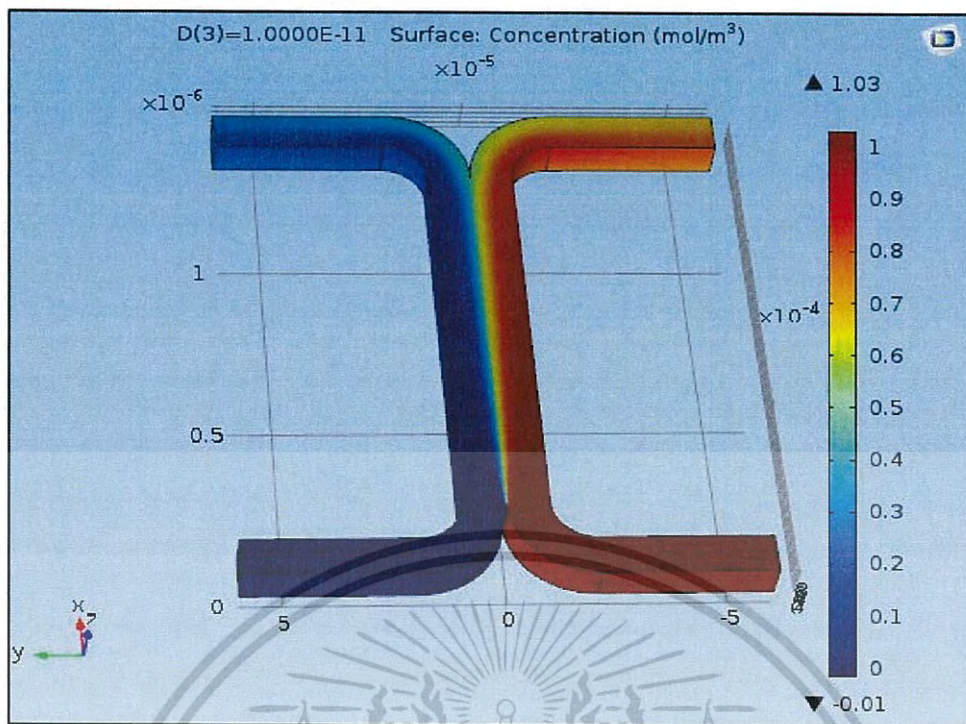


รูปที่ 4.47 ค่า Diffusion constant ที่ $1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$



รูปที่ 4.48 ค่า Diffusion constant ที่ $0.5 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

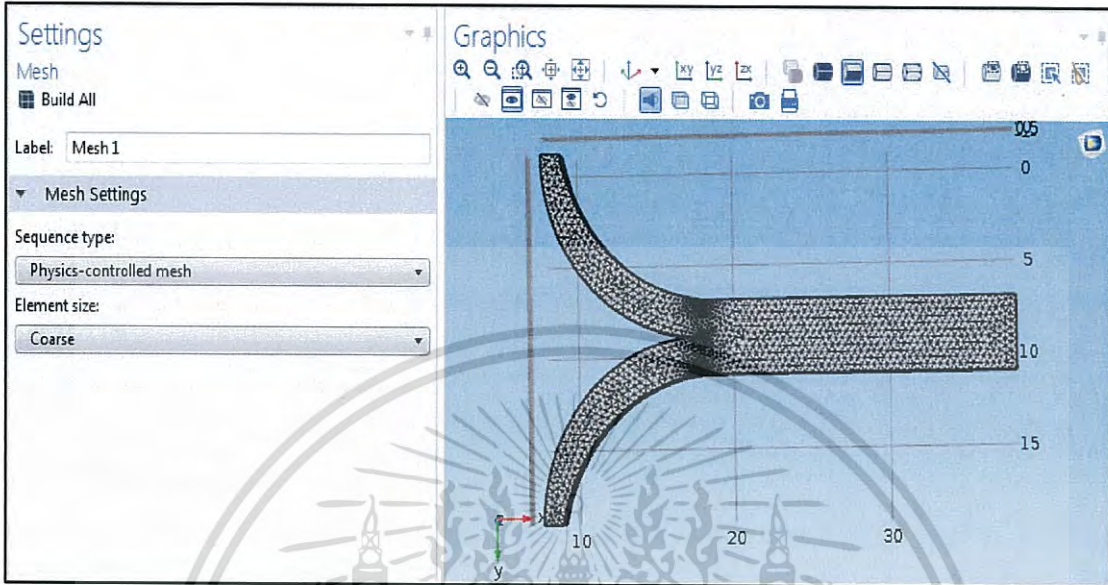


รูปที่ 4.49 ค่า diffusion constant ที่ $0.1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

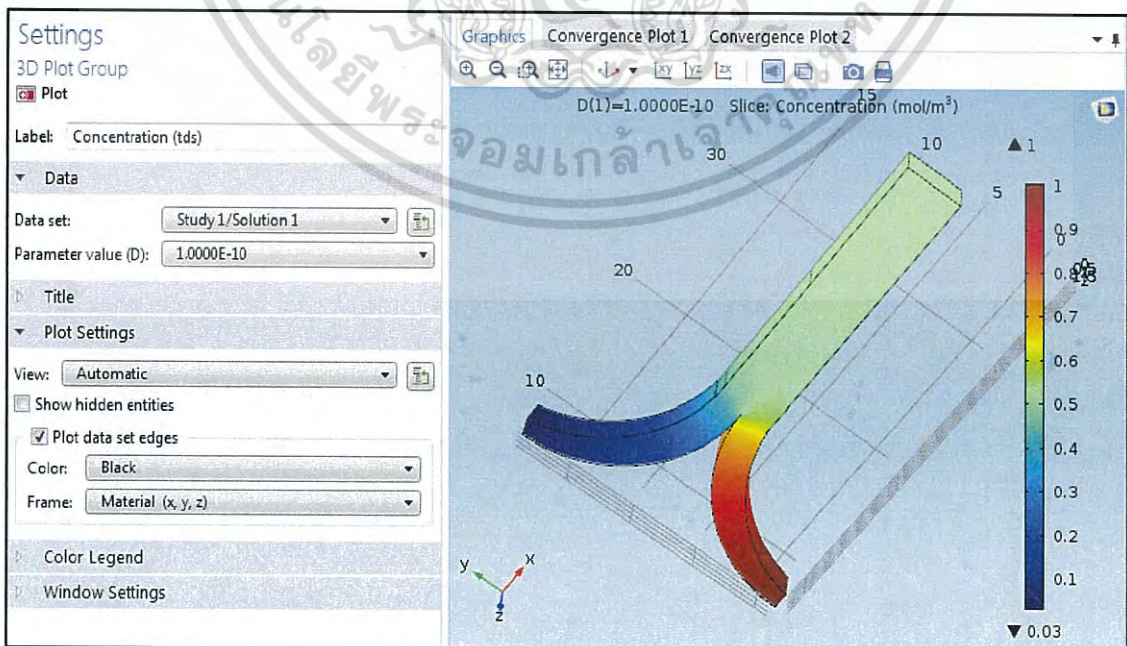
4.7 การวิเคราะห์การไหลของน้ำบริสุทธิ์กับน้ำที่มีสารปนเปื้อนในท่อรูปY-Asymmetric

ในส่วนของการMesh เพื่อทำการคำนวณในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทางคณิตศาสตร์โดย ใช้ความละเอียดในการMeshแบบcoarseโดยทำการวิเคราะห์ในแต่ละจุดของรูปทรง จะได้ดังรูป

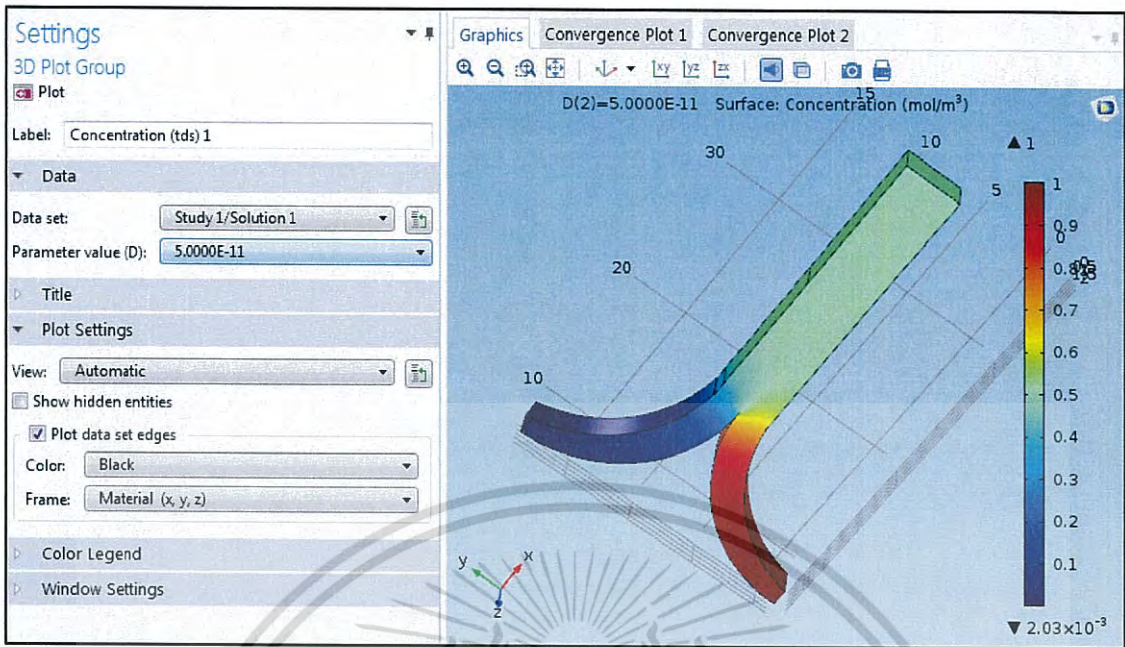


รูปที่4.50แสดงถึงการทำการmeshกันของรูปทรงY-Asymmetric

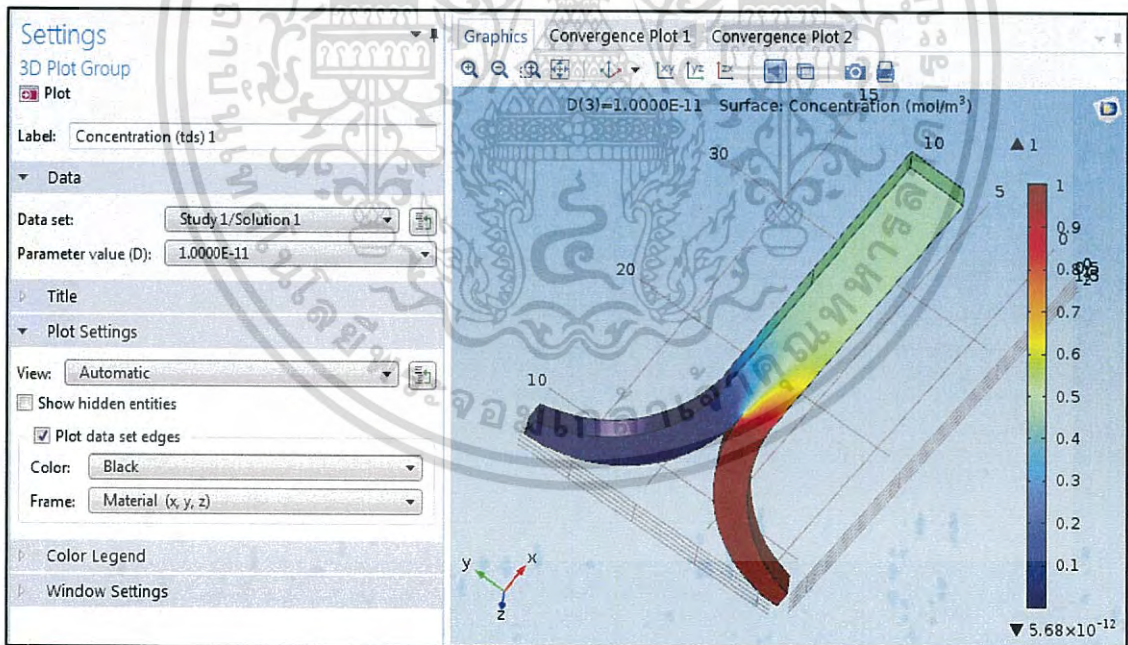
จากนั้นนำรูปที่ได้จากการ mesh กัน นำไปcompute เพื่อทำการวิเคราะห์จำนวน element และ จากนั้นจะได้ส่วนของ result จะได้ส่วนของ concentration ในแต่ละค่ารวมทั้ง velocity และ pressureซึ่งจะมีค่ามากในท่อทางเข้าทั้ง2จนลดลงเรื่อยๆในช่วงทางขาออกของน้ำ จะได้ดังรูป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ว่าห้ามจรรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่ไปโดยไม่ขออนุญาตจากเจ้าของเอกสาร
รูปที่ 4.51 ค่า Diffusion constant ที่ $1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

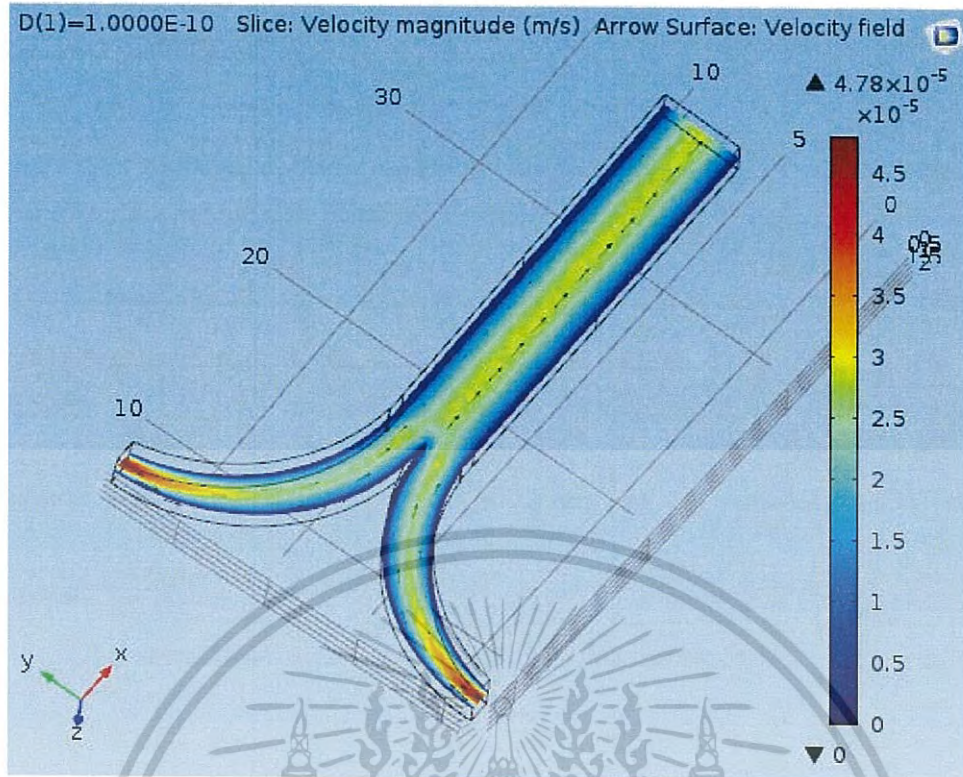


รูปที่ 4.52 ค่า Diffusion constant ที่ $0.5 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

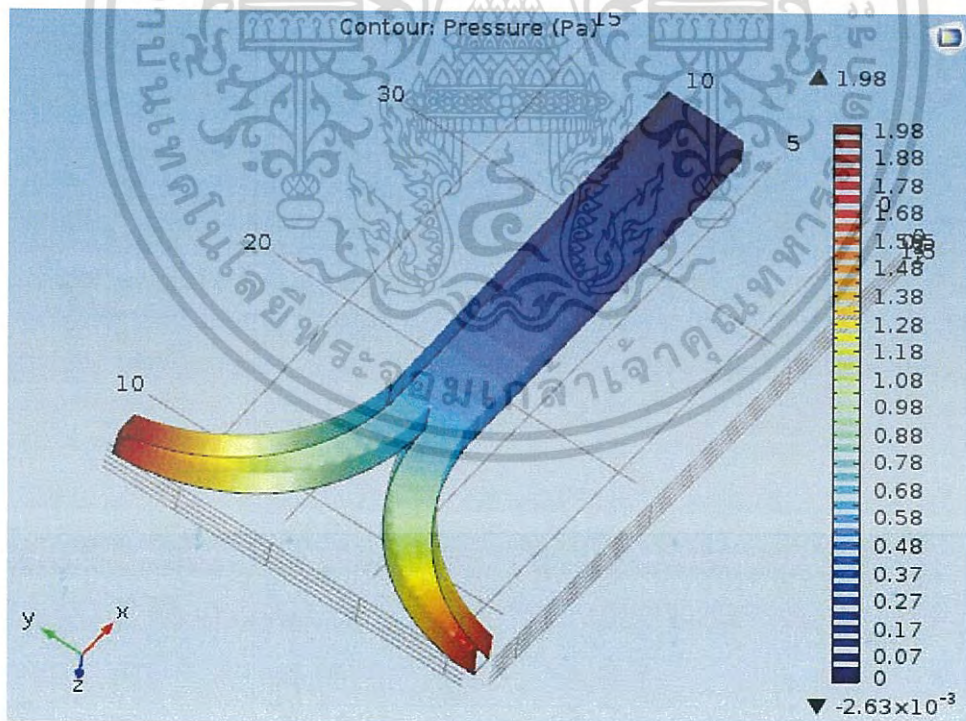


รูปที่ 4.53 ค่า Diffusion constant ที่ $0.1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.54 ขนาดของความเร็วในท่อ Y-Asymmetry



รูปที่ 4.55 ความดันเกิดขึ้นภายในท่อ ในแต่ละBoundary

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการทดลองเมื่อศึกษาการ Simulation ของไหลภายในท่อ และได้ทำการออกแบบรูปร่างของท่อขนาดเล็กทั้งหมด 7 ชนิดด้วยกันได้แก่ท่อตรง, T-Junction, Y-junction 3D, Y-junction 2D, W-shape, H-shape และ Y-junction แบบโค้ง สามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

5.1.1 กรณีที่ 1 ของไหลในท่อ คือ น้ำบริสุทธิ์ และมีการปรับเปลี่ยนค่าความเร็ว (v_{inlet}) ให้มีค่าแตกต่างกันในท่อทางเข้าชนิด Y-Junction 2D ที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อทางเข้าไม่เท่ากัน โดยท่อทางเข้า 1 มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อมากกว่าท่อทางเข้า 2

- กำหนดความเร็วของไหลของที่ท่อทางเข้าที่ 1 ($v_{inlet,1}$) มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s
- ทำการปรับเปลี่ยนค่าความเร็วของไหล ที่ท่อทางเข้าที่ 2 ต่างๆกัน ดังนี้คือ
 - ครั้งที่ 1 ($v_{inlet,2}$) เท่ากับ 1 m/s
 - ครั้งที่ 2 ($v_{inlet,2}$) เท่ากับ 10 m/s
 - ครั้งที่ 3 ($v_{inlet,2}$) เท่ากับ 100 m/s

ถ้าเพิ่มความเร็วของไหล ($v_{inlet,2}$) ในท่อทางเข้าที่ 2 ซึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเล็กกว่าท่อทางเข้า 1 จากผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม COMSOL Multiphysics พบว่าความเร็วของไหลที่ออกมาในบริเวณ outlet ของท่อจะมีค่ามากขึ้น

5.1.2 กรณีที่ 2 ของไหลในท่อ คือ น้ำที่มีการเจือปนสารอื่น (diluted liquid) เราจะกำหนดค่าความเข้มข้นของของเหลวเจือจางให้แตกต่างกันทั้งสองด้านของท่อทางเข้า ดังนี้

- ของเหลวในท่อทางเข้า 1 ไม่มีการเจือปนสารอื่น ดังนั้นความเข้มข้นของของเหลวเจือจางที่ท่อทางเข้า 1 กำหนดค่าเท่ากับ $0 \text{ mol}/m^3$
- ของเหลวในท่อทางเข้า 2 มีการเจือปนสารอื่นเล็กน้อย ดังนั้นความเข้มข้นของของเหลวเจือจางที่ท่อทางเข้า 2 กำหนดค่าเท่ากับ $1 \text{ mol}/m^3$

จากนั้นทำการวิเคราะห์ผลโดยมีการเปลี่ยนแปลงค่าคงที่การแพร่กระจายของไหลเจือจาง (Diffusion constant) เป็นค่าต่างๆดังนี้

- ครั้งที่ 1 ค่า Diffusion constant = $1 \times 10^{-10} m^2 / s$
- ครั้งที่ 2 ค่า Diffusion constant = $0.5 \times 10^{-10} m^2 / s$
- ครั้งที่ 3 ค่า Diffusion constant = $0.1 \times 10^{-10} m^2 / s$

จากผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม COMSOL Multiphysics พบว่าการผสมกันระหว่างของเหลวบริสุทธิ์กับของเหลวเจือจางสารอื่น จะมีการผสมกันเร็วขึ้นที่บริเวณ outlet เมื่อค่าการแพร่กระจายของเหลว (Diffusion constant) มากขึ้น ตามลำดับ โดยดูได้จากผลภาพการวิเคราะห์ความเร็วของไหล การแพร่กระจายที่เร็วที่สุดคือค่า $1 \times 10^{-10} m^2 / s$ และค่าที่มีการแพร่กระจายช้าที่สุดคือ $0.1 \times 10^{-10} m^2 / s$

5.2 ข้อเสนอแนะ

มีการปรับเปลี่ยนและพัฒนาชิ้นงานให้มีความหลากหลายมากขึ้นและสามารถพัฒนาให้เหมาะสมกับงานที่ใช้พร้อมทั้งประสิทธิภาพที่เพิ่มมากขึ้น ทั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานของ Microfluidic chip and nanotechnology เพื่อที่จะตรวจสอบสารละลายให้มีความหลากหลายมากขึ้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

1. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล ผู้แต่ง: ปราโมทย์ เดชะอำไพ กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.
- 2.<http://www.atom.rmutphysics.com/charud/oldnews/0/286/15/9/Fluid/fluiddynamic.htm>
- 3.http://www2.dede.go.th/bhrd/old/Download/file_handbook/Pre_Heat/pre_heat_2.pdf.
- 4.ปราโมทย์ เดชะอำไพ . ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพมหานคร สถาบันไทยศึกษาจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2542
5. FINITE ELEMENT METHODS FOR FLUIDS O. Pironneau (University Pierre et Marie Curie & INRIA) (To appear in 1988 (Wiley)) เข้าถึงได้จาก <http://www.ann.jussieu.fr/pironneau/publi/publications/OPfemInFluids.pdf>
- 6.เดช พุทธเจริญทอง การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพมหานคร ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ 2548
- 7.[online]<http://www.atom.rmutphysics.com/charud/oldnews/0/286/15/9/Fluid/fluiddynamic.htm>
- 8.[online] <http://fe.rmutl.ac.th/2012/wp-content/uploads/Property-Fluid-Flow>
9. The Motion of a Viscous Fluid Dr.Yodchai Tiaple http://www.imc.src.ku.ac.th/personnel/file_subject/2011732124311.pdf

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

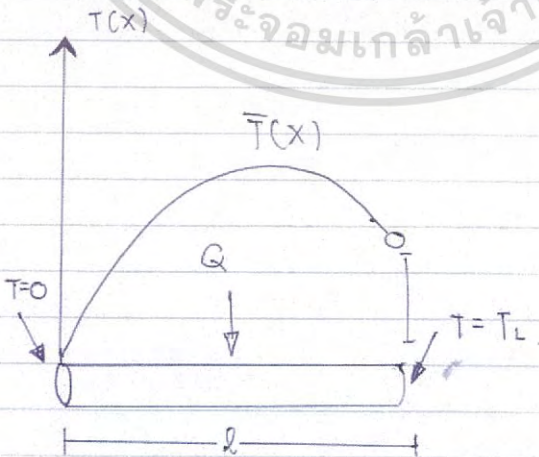
ตัวอย่างปัญหา แบบ หนึ่งมิติ

เป็นการยกตัวอย่างการคำนวณแบบวิธี finite element method. เพื่อจะเป็นความรู้ในการศึกษาวิธีเฉพาะนี้ทางไฟไนต์เอลิเมนต์

อ้างอิงมาจากตัวอย่างของ "หนังสือไฟไนต์เอลิเมนต์ ภาควิชาการช่าง" ผู้แต่ง ศ.ดร. ปรีชา ทรัพย์ เดชะอภัย พิมพ์ครั้งที่ 5 ฉบับปรับปรุงแก้ไข. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ย. 4.2

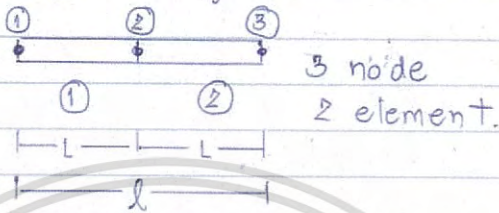
เหล็กท่อนยาว L มีอุณหภูมิปลายทั้งสองด้าน สามารถผลิตความร้อนได้ (internal heat generation) ต่อหน่วยความยาวภายในเหล็กท่อนที่สม่ำเสมอคือ q หรือ $q \text{ W/m}^2$ เอลิเมนต์คือพหุคูณกำลังที่ประกอบด้วยเหล็กท่อนที่มีจุดตั้งปลายเหล็กท่อนที่ $T_L = 0$ เมื่อ $T_L = 0$ ผลลัพธ์ที่คำนวณมาที่ q หรือ $q \text{ W/m}^2$ เอลิเมนต์ หรือคือพหุคูณกำลังที่ประกอบด้วยเหล็กท่อนที่ $T_L = 0$.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ก) 9.99 มี 2 เอลิเมนต์ ที่ต่อหน้ากันมีที่จุดกึ่งกลางของเหล็ก ก้อน ($x = L/2$)

Step 1. แบ่งรูปทรงของปัญหา เป็น 2 element.

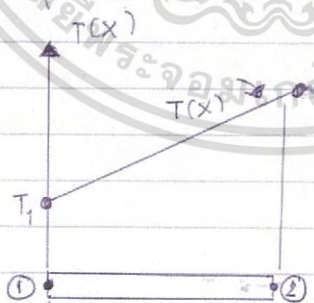


โดยนำสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหานี้

$$KA \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = -Q_A \quad \text{--- ①}$$

โดย K = คัมพริสสิทีตีโมดูลัส
 A = พื้นที่หน้าตัด
 \bar{T} = เทมเพอเรเจอร์
 Q = ปริมาณความร้อนที่ผลิตได้ต่อ

Step 2.



$$T = T(x) = \sum_{i=1}^2 N_i T_i = N_1 T_1 + N_2 T_2$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{1 \times 2} \quad \text{โดย } N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{และ} \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad \text{--- ③}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Step 3 สร้างสมการไพล์ที่มีเอเลเมนต์ โดยหาปริมาณ
ที่ทำงานหนัก เวกเมนต์ ทดลอง

$$KA \frac{d^2 T}{dx^2} + QA = R \quad \text{--- (4)}$$

จากนั้น ค่าที่ทดลง เวกเมนต์ ทดลอง R ด้วยฟังก์ชันที่หนัก
W. กำหนดผลลัพธ์ ได้เท่ากับศูนย์.

$$\int_0^L W_i R dx = 0 \quad \text{--- (5)}$$

เนื่องจากเราเลือกฟังก์ชันที่ไม่ใช่ค่าปริมาณที่ทดลงที่จุดที่ทดลง
แทน R จากสมการ (4) คือ (5).

$$\int_0^L W_i \left(KA \frac{d^2 T}{dx^2} + QA \right) dx = 0$$

$$\int_0^L W_i KA \frac{d^2 T}{dx^2} + \int_0^L W_i QA dx = 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{--- (6)}$$

Step (4) คือ (6) มาขึ้นกับหลักการที่กล่าว.

บทวน (Integration by Parts)

$$\text{จากอนุพันธ์} \quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\text{สมมติอินทิเกรตทั้งข้าง} \quad \int d(uv) = \int u dv + v du$$

$$\int \phi(uv) = \int u dv + \int v du.$$

$$uv = \int u dv + \int v du.$$

วิธีที่ 1.

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

ม.ย. 1) อินทิกรัลแบบแบ่งทีละส่วน.

$$\int x e^x dx$$

ให้ $u = x$ แล้ว $du = dx$
 $dv = e^x dx$ แล้ว $v = \int e^x dx$

$$v = e^x + C_1.$$

จาก $\int u dv = uv - \int v du$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1) dx \\ &= x e^x + x C_1 - (e^x + x C_1) + C \\ &= x e^x - e^x + C \quad \text{--- Ans} \end{aligned}$$

ม.ย. 2) อินทิกรัลแบบแบ่งทีละส่วน.

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

ให้ $u = x^2$ แล้ว $du = 2x dx$
 $dv = e^{2x} dx$ แล้ว $\int dv = \int e^{2x} d\left(\frac{2x}{2}\right)$

$$v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\therefore \int x^2 e^{2x} dx = uv - \int v du.$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 2x dx$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx \quad \text{--- ①}$$

จากสมการ ①

$$\text{ให้ } u = x \quad \text{แล้ว } du = dx$$

$$dv = e^{2x} dx \quad \text{แล้ว } \int dv = \int e^{2x} d(2x) / 2$$

$$v = \frac{e^{2x}}{2}$$

แทนในสมการ ①

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - [uv - \int v du]$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[\frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right]$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x)$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + C \quad \text{--- Ans}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Step 4.

$$\int_0^L W_i \frac{KA d^2 T}{dx^2} dx = W_i k \quad \text{--- (7)}$$

ถ้า $u = W_i$ แล้ว $du = \frac{dW_i}{dx} dx$

$dV = (KA) \frac{dT}{dx^2} dx$ แล้ว

$$V = KA \frac{dT}{dx}$$

$$\int_0^L W_i \frac{KA d^2 T}{dx^2} dx = W_i \left[KA \frac{dT}{dx} \right]_0^L - \int_0^L KA \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dW_i}{dx} dx \quad \text{--- (8)}$$

$$\int_0^L KA \frac{dW_i}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} dx = W_i \left[KA \frac{dT}{dx} \right]_0^L + \int_0^L W_i Q A dx$$

พหุคูณคูณด้วย 2

$$\frac{dT}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad \text{--- (9)}$$

สมการของ 2 เส้นพหุคูณคูณด้วย 2 ถ้า $i = 1, 2$

$$i=1; \int_0^L KA \frac{dW_1}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx =$$

$$W_1 \left[KA \frac{dT}{dx} \right]_0^L + \int_0^L W_1 Q A dx$$

$$i=2; \int_0^L KA \frac{dW_2}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx =$$

$$W_2 \left[KA \frac{dT}{dx} \right]_0^L + \int_0^L W_2 Q A dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีการแบบฉบับไฟน์ - การลดมิติ องค์ประกอบทาง

$$\int_0^L \underbrace{KA \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{Bmatrix}}_{[k_c]} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix}}_{\{T\}} dx \underbrace{\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}}_{\{Q_c\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}}_{\{Q_q\}} KA \frac{dT}{dx} \Big|_0^L$$

$$+ \int_0^L \underbrace{\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}}_{\{Q_q\}} QA dx$$

คือ

$$[k_c] \{T\} = \{Q_c\} + \{Q_q\} - 10$$

เป็นสมการที่ลดรูปแล้วมาให้ออกกับตัวหา 9 ตัวของบนี้.

- $[k_c]$ คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของทรงหน้าตาจริง
- $\{T\}$ คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของตัวแปรตอบกลับอุณหภูมิ.
- $\{Q_c\}$ คือ โหลดภายนอกเนื่องจากการนำความร้อน
- $\{Q_q\}$ คือ โหลดภายในเนื่องมาจากการผลิตความร้อน.

เมทริกซ์ความแข็ง

$$[K_e] = \int_0^L KA \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} dx$$

$$= \int_0^L KA \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = \int_0^L \frac{KA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

K = ค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทาน
A = พื้นที่หน้าตัด

$$\therefore [K_e] = \frac{KA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- 11}$$

โหนดที่ 1 มาจากอัตราความยาวและพื้นที่หน้าตัด

$$\{Q_e\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} QA dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-x \\ x \end{Bmatrix} QA dx$$

$$\{Q_e\} = QA L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad \text{--- 12}$$

หาค่าของโมเมนต์ตามข้อ.

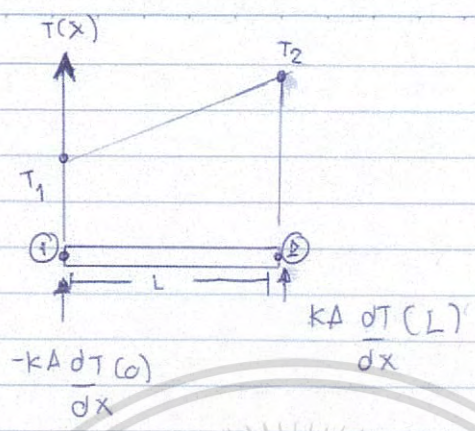
$$\{Q_c\} = \left(\begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right) KA \frac{dT}{dx} \Big|_0^L = \left(\begin{matrix} (N_1 KA \frac{dT}{dx}) \Big|_0^L \\ (N_2 KA \frac{dT}{dx}) \Big|_0^L \end{matrix} \right)$$

$$= \left(\begin{matrix} N_1(L) KA \frac{dT}{dx}(L) - N_1(0) KA \frac{dT}{dx}(0) \\ N_2(L) KA \frac{dT}{dx}(L) - N_2(0) KA \frac{dT}{dx}(0) \end{matrix} \right)$$

ทรา $N_1(0) = 1, N_1(L) = 0, N_2(0) = 0, N_2(L) = 1$

$$\{Q_c\} = \left(\begin{matrix} 0 KA \frac{dT}{dx}(L) - 1 KA \frac{dT}{dx}(0) \\ 1 KA \frac{dT}{dx}(L) - 0 KA \frac{dT}{dx}(0) \end{matrix} \right)$$

$$\{Q_c\} = \left(\begin{matrix} -KA \frac{dT}{dx}(0) \\ KA \frac{dT}{dx}(L) \end{matrix} \right) = B$$

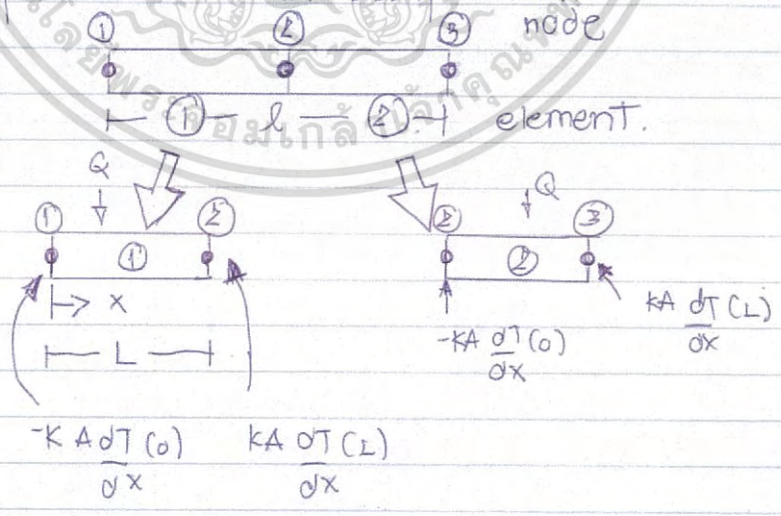


การหาปริมาณที่กระทำต่อ element.

ซึ่งจะสมมติว่า element เป็น...

$$\frac{KA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -KA \frac{dT(0)}{dx} \\ KA \frac{dT(L)}{dx} \end{Bmatrix} + QAL \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} - K$$

Step 5. การหาปริมาณที่กระทำต่อ node



สมการ T, U, T, A, ค. อ.

$$\frac{KA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (-KA \frac{dT}{dx}(0)) \\ (KA \frac{dT}{dx}(L)) + (-KA \frac{dT}{dx}(0)) \\ (-KA \frac{dT}{dx}(L)) \end{Bmatrix}$$

$$+ QAL \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = 15$$

เนื่องจากปริมาณตามข้อนี้ ไม่ครบทุกข้อ element จึงเป็นข้อที่ต่อเนื่อง คือ

$$\left(KA \frac{dT}{dx}(L) \right) + \left(-KA \frac{dT}{dx}(0) \right) = 0$$

โดยกำหนดตามข้อนี้ที่ ค. 1 ค. 3 ค. 4. เป็น ค. 4. และ T₂.

$$\frac{KA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 = 0 \\ T_2 = ? \\ T_3 = T_1 \end{Bmatrix} =$$

⊛

$$\begin{Bmatrix} (-KA \frac{dT}{dx}(0)) \\ (KA \frac{dT}{dx}(L)) \end{Bmatrix} + QAL \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = 16$$

หาความดันที่จุดหน้าท่อ T_2 ที่จุดซึ่งความดันเป็น 0.

$$\frac{KA(0 + 2T_2 - T_1)}{L} = C + QAL$$

$$\frac{2KAT_2}{L} - \frac{KAT_1}{L} = QAL$$

$$2KAT_2 - KAT_1 = QAL$$

จึงทำว่า

$$\frac{KA(2T_2 - T_1)}{L} = QAL$$

$$KA(2T_2 - T_1) = QAL^2$$

$$2T_2 - T_1 = \frac{QAL^2}{KA}$$

$$2T_2 = \frac{QAL^2}{K} + T_1$$

$$T_2 = \frac{QAL^2}{2K} + \frac{T_1}{2} \quad \text{--- 17}$$

จุดที่ความดันเป็น 0 หน้าท่อหน้าท่อ T_2 คือ $\frac{QAL^2}{2K} + \frac{T_1}{2}$ Ans