การพัฒนาซอฟท์แวร์เพื่อคำนวณการดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนโดยสมาชิกคงเป็นจำนวนเต็ม

SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ROW OPERATION TO OBTAIN UPPER TRIANGULAR MATRIX WITH RETAIN INTEGER ELEMENT

แก้วใส กสิโอฬาร

นันทิยาย์ เนตรวงศ์

ระฟ้า โชตินพรัตน์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

การพัฒนาซอฟท์แวร์เพื่อคำนวณการดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนโดยสมาชิกคงเป็นจำนวนเต็ม

SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ROW OPERATION TO OBTAIN UPPER TRIANGULAR MATRIX WITH RETAIN INTEGER ELEMENT

แก้วใส กสิโอฬาร
นันทิยาย์ เนตรวงศ์
ระฟ้า โชตินพรัตน์

00265645
TB00161

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ROW OPERATION TO OBTAIN UPPER TRIANGULAR MATRIX WITH RETAIN INTEGER ELEMENT

KEAWSAI KASIOLARN
NANTHIYA NATEWONG
RAPHA CHOTINOPPARAT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ การพัฒนาซอฟท์แวร์เพื่อคำนวณการดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนโดยสมาชิกคงเป็นจำนวนเต็ม
SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ROW OPERATION TO OBTAIN UPPER TRIANGULAR MATRIX WITH RETAIN INTEGER ELEMENT

ชื่อนักศึกษา นางสาวแก้วใส กสิโอฬาร รหัสนักศึกษา 56050011
นางสาวนันทิยาย์ เนตรวงศ์ รหัสนักศึกษา 56050071
นายระฟ้า โชตินพรัตน์ รหัสนักศึกษา 56050111

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2559
อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง(สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.กัมปนาท นามงาม ประธานกรรมการ	
ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร กรรมการ	
รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ การพัฒนาซอฟท์แวร์เพื่อคำนวณการดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนโดยสมาชิกคงเป็นจำนวนเต็ม
SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ROW OPERATION TO OBTAIN UPPER TRIANGULAR MATRIX WITH RETAIN INTEGER ELEMENT

ชื่อนักศึกษา นางสาวแก้วใส กสิโอพาร รหัสนักศึกษา 56050011
นางสาวนันทิยาย์ เนตรวงศ์ รหัสนักศึกษา 56050071
นายระฟ้า โชตินพรัตน์ รหัสนักศึกษา 56050111

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2559

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอขั้นตอนวิธีสำหรับดำเนินการตามแนวนอน กับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มให้ได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนที่ยังคงมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม ขั้นตอนวิธีประยุกต์ใช้ทฤษฎีจำนวนเรื่องขั้นตอนวิธีการหาร และขั้นตอนวิธีแบบยุคลิดในการหาตัวหารร่วมมาก และได้ออกแบบขั้นตอนวิธีใหม่สำหรับดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน นอกจากนี้ยังพัฒนาโปรแกรมด้วยขั้นตอนวิธีที่ออกแบบ บนเครื่องแท็บเล็ต ซึ่งสามารถแสดงผลลัพธ์และขั้นตอนการดำเนินการ ให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน การคำนวณค่าลำดับชั้น ค่าตัวกำหนด การประยุกต์ใช้หาผลเฉลย และหาเมทริกซ์ผกผัน

คำสำคัญ : การดำเนินการตามแนวนอน ขั้นตอนวิธีการหาร ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด
เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ROW OPERATION TO OBTAIN UPPER TRIANGULAR MATRIX WITH RETAIN INTEGER ELEMENT
Students	Ms. Keawsai Kasiolarn Student ID 56050011
	Ms. Nanthiya Natewong Student ID 56050071
	Mr. Rapha Chottinopparat Student ID 56050111
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Assoc.Prof.Praiboon Pantaragphong

Abstract

This research is presented new algorithm for row operation on integer matrix to obtain upper triangular matrix with retaining integer element. The new algorithm was applied theory on Number Theory in Division Algorithm and Euclidean Algorithm for finding greatest common divisor. The research was also develop program with new algorithm on Tablet. The program can show only result and the detail of operations including row operation for upper triangular matrix, rank computation, determinant computation, finding the solutions of system of equations and finding the inverse matrix.

Keywords : Row operation, Division algorithm, Euclidean algorithm, Upper triangular matrix

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำปัญหาพิเศษเรื่องการพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อคำนวณการดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนโดยสมาชิกคงเป็นจำนวนเต็ม(Software Development For Row Operation To Obtain Upper Triangular Matrix With Retain Integer Element) คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ ผู้ที่เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา สำหรับการเสียสละเวลาในการให้คำปรึกษา คำแนะนำ ไม่ว่าจะเป็นการจัดทำรูปเล่ม รายละเอียดเกี่ยวกับเนื้อหา แหล่งสืบค้นข้อมูลต่าง ๆ การเขียนโค้ดโปรแกรม Android Studio การเลือกขั้นตอนวิธีที่เหมาะสม และอื่น ๆ และขอขอบพระคุณประธานและคณะกรรมการในการ การสอบทั้ง 3 ท่าน ซึ่งได้แก่ ดร.กัมปนาท นามงาม ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร และ รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำชี้จุดบกพร่องแก้ไขข้อผิดพลาดที่คณะผู้จัดทำมองข้ามไปหลายจุด ซึ่งทำให้ปัญหาพิเศษเล่มนี้มีคุณภาพและมีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้และให้คำแนะนำที่ดีโดยตลอด จนสามารถทำให้ปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำซาบซึ้งเป็นอย่างยิ่ง กราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

สิ่งสำคัญที่ขาดไม่ได้เลยนั้นก็คือคุณพ่อ คุณแม่ และทุกคนในครอบครัวที่คอยเป็นกำลังใจที่ดีโดยตลอด และขอบคุณผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับความสำเร็จในการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้ ซึ่งไม่ได้กล่าวนามไว้ทุกท่าน

แก้วใส กสิโอฬาร
นันทิยาย์ เนตรวงศ์
ระฟ้า โชตินพรัตน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข
กิตติกรรมประกาศ ..... ค
สารบัญ ..... ง
สารบัญตาราง ..... ช
สารบัญรูป ..... ช
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา 1
1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ 1
1.3 ขอบเขตของปัญหา 1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน 2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 4
2.1 การดำเนินการมูลฐาน 4
2.2 การกำจัดเกาส์เซียน 6
2.3 ค่าลำดับชั้น 11
2.4 เมทริกซ์ผกผัน 12
2.5 ตัวกำหนด 15
2.6 เมทริกซ์สามเหลี่ยม 18
2.7 สัจพจน์ 18
2.8 ขั้นตอนวิธีการหาร 19
2.9 ตัวหารร่วมมาก 20
2.10 ฟังก์ชันพื้นและฟังก์ชันเพดาน 21
2.11 เครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาแอพลิเคชั่น 22

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 3 ขั้นตอนวิธีการดำเนินการตามแถวให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน 24
3.1 การดำเนินตามแนวนอนเทียบกับขั้นตอนวิธีการหาร 24
3.2 ขั้นตอนวิธียุคลิดกับการดำเนินการตามแนวนอน 25
3.3 ขั้นตอนวิธีการดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน 26
3.4 การวิเคราะห์การทำงานของอัลกอรึทึม 35
3.5 การประยุกต์ใช้ 35
3.5.1 การหาผลเฉลยของระบบสมการ 35
3.5.2 การหาค่าตัวกำหนด 39
3.5.3 การหาเมทริกซ์ผกผัน 42
3.5.4 การหาค่าลำดับชั้น 47
บทที่ 4 การพัฒนาโปรแกรม 50
4.1 เครื่องมือที่ใช้พัฒนา 50
4.2 ส่วนประกอบของจอภาพ 50
4.2.1 หน้าแรก 50
4.2.2 หน้าต่าง Start Up 51
4.2.3 หน้าต่าง Operation 51
4.2.4 ส่วนรับข้อมูล 52
4.2.5 ส่วนแสดงผลลัพธ์ 53
4.3 ผลลัพธ์ของการดำเนินการ 54
4.3.1 การทำเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน 54
4.3.2 การหาค่าตัวกำหนด 55
4.3.3 การหาค่าลำดับชั้น 56
4.3.4 การหาเมทริกซ์ผกผัน 57
4.3.5 การหาผลเฉลย 58
4.4 หน้าต่าง How to use 60
4.5 Production team 62

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ 63
5.1 สรุปผลการดำเนินงาน 63
5.2 ข้อจำกัด 64
5.3 ข้อเสนอแนะ 64
เอกสารอ้างอิง 65
ภาคผนวก 66
ภาคผนวก ก ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรมสำหรับใช้งาน 67
ภาคผนวก ข ขั้นตอนวิธีสำหรับการดำเนินการต่างๆ 87

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

1.1 ตารางแสดงระยะเวลาขั้นตอนการดำเนินงาน 3
3.5.2 ตารางแสดงจำนวนขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึม 35
5.1 ตารางแสดงค่าเฉลี่ยนักศึกษาที่ทดลองใช้โปรแกรม 63

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
2.1	หน้าดาวน์โหลด Android Studio	22
2.2	Lenovo A3300	23
4.1	หน้าแรก	50
4.2	หน้าต่าง Start Up	51
4.3	หน้าต่างแรกของการดำเนินการ	51
4.4	หน้าต่างแสดงการเลือก Operation	52
4.5	แสดงส่วนรับข้อมูล	52
4.6	แสดงส่วนแสดงเฉพาะผลสรุป	53
4.7	แสดงขั้นตอนของการดำเนินการ	53
4.8	แสดงส่วนก่อนและหลังกดปุ่มClear Data	54
4.9	แสดงเฉพาะผลสรุปของการทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน	54
4.10	แสดงขั้นตอนการทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน	55
4.11	แสดงเฉพาะผลสรุปของค่าตัวกำหนด	55
4.12	แสดงขั้นตอนของการหาค่าตัวกำหนด	56
4.13	แสดงเฉพาะผลลัพธ์สุดท้ายของค่าลำดับชั้น	56
4.14	แสดงขั้นตอนของการหาค่าลำดับชั้น	57
4.15	แสดงเฉพาะผลสรุปของเมทริกซ์ผกผัน	57
4.16	แสดงขั้นตอนของการหาเมทริกซ์ผกผัน	58
4.17	แสดงเฉพาะผลสรุปของการหาผลเฉลย	58
4.18	แสดงขั้นตอนของการหาผลเฉลย	58
4.19	แสดงวิธีหน้าต่าง	60
4.20	แสดงวิธีเลือก Operation	60
4.21	แสดงวิธีการเลือกดูผลลัพธ์	61
4.22	แสดงผลลัพธ์ที่เลือก	61
4.23	แสดงผู้พัฒนา	62

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
ก1.1	ปุ่ม download Java SE	67
ก1.2	เลือก download ตามรุ่นของอุปกรณ์ที่ใช้	67
ก1.3	แสดงรูป file JDK ที่ download เสร็จแล้ว	67
ก1.4	หน้าต่างแรกของการติดตั้ง JDK	68
ก1.5	การกำหนด path ให้กับ JDK	68
ก1.6	เลือก EnvironmentVariables	68
ก1.7	การเพิ่ม JAVA_HOME	69
ก1.8	การแก้ไข path	69
ก2.1	ปุ่ม Download Andriod Studio	70
ก2.2	แสดงรูป file Andriod Studio ที่ download เสร็จแล้ว	70
ก2.3	เริ่มการติดตั้ง Andriod Studio	70
ก2.4	หน้าต่างแรกของการติดตั้ง Andriod Studio	71
ก2.5	ข้อกำหนดของการใช้งาน	71
ก2.6	ตั้งค่าที่อยู่ของไฟล์ Andriod Studio	71
ก2.7	ติดตั้ง Andriod Studio	72
ก2.8	เริ่มต้นใช้งาน Andriod Studio	72
ก2.9	การสร้างโปรเจค	72
ก2.10	เลือกรูปแบบ App ที่จะสร้าง	73
ก2.11	หน้า XML เริ่มต้น	73
ก3.1	ปุ่มดาวน์โหลด SDK	74
ก3.2	เลือก download ตามรุ่นของอุปกรณ์ที่ใช้	74
ก3.3	แสดงรูป file SDK ที่ download เสร็จแล้ว	74
ก3.4	Extract File ไปไว้ที่ยังตำแหน่งที่ต้องการเก็บ Android SDK	75
ก3.5	แสดงตัวติดตั้ง eclipse	75
ก3.6	เลือกที่ติดตั้ง file	75
ก3.7	วิธีการใช้งานโปรแกรม	76
ก3.8	หน้าแรกของ App	76

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
ก4.1	หน้าแรกของเว็บไซต์ที่ใช้ download Genymotion	77
ก4.2	การลงทะเบียนกับเว็บไซต์	77
ก4.3	หน้ากรอกข้อมูลที่ใช้ลงทะเบียน	78
ก4.4	หน้าเว็บหลังจากเข้าสู่ระบบ	78
ก4.5	เลือก Download ตามอุปกรณ์ที่ใช้	79
ก4.6	หน้าติดตั้งโปรแกรม	79
ก4.7	หน้าแรกของการติดตั้ง Visual Box	80
ก4.8	หน้าแรกของการ Plug in	80
ก4.9	ติดตั้ง Genymotion ลงใน SDK	81
ก4.10	หลังจากติดตั้ง Genymorion เสร็จ	81
ก5.1	ขั้นตอนแรกของการสร้างไฟล์ APK	82
ก5.2	เลือก Build APK	82
ก5.3	หลังจาก Build APK เสร็จ	83
ก5.4	ไฟล์ SDK ที่สร้างเสร็จแล้ว	83
ก5.5	เรียกดูไฟล์	84
ก5.6	เลือก APK	84
ก5.7	เลือกไฟล์ APK ที่ต้องการติดตั้ง	85
ก5.8	ติดตั้ง APK	85
ก5.9	หลังจากติดตั้งเสร็จ	86

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ในการเรียนการสอนเกี่ยวกับเมทริกซ์ (Matrix) มีในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และในระดับอุดมศึกษา มีการประยุกต์ใช้เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ หาเมทริกซ์ผกผัน หาค่าตัวกำหนด และอื่นๆ ซึ่งในการเรียนการสอนจะนิยมใช้การดำเนินการตามแนวนอน (Row Operation) มาเป็นเครื่องมือในการคำนวณค่าเหล่านี้ จะศึกษาทฤษฎีบทในหลายสาขาวิชา ซึ่งในการเรียนการสอน อาจารย์ผู้สอนจะยกตัวอย่างโจทย์ที่เป็นจำนวนเต็มและทำการดำเนินการตามแนวนอนได้ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปจำนวนเต็ม แต่พอนักศึกษาได้ลงมือทำแบบฝึกหัดด้วยตนเองแล้ว คำตอบที่ได้ไม่อยู่ในรูปจำนวนเต็มและไม่ทราบวิธีที่ทำให้คำตอบเป็นจำนวนเต็มเหมือนที่อาจารย์ผู้สอนได้ยกตัวอย่างให้ดู และไม่ทราบว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้องหรือไม่ นักศึกษาเลยไปใช้ซอฟต์แวร์ ที่สามารถหาคำตอบจากการดำเนินการตามแนวนอนได้ เช่น MATLAB Mathematica ปรากฏว่าคำตอบที่ได้เป็นได้ทั้งจำนวนเต็ม เศษส่วน และทศนิยม แต่ไม่สามารถบอกขั้นตอนการดำเนินการตามแนวนอนในแต่ละขั้นได้

แท็บเล็ตเป็นยังอุปกรณ์ที่ใช้กันแพร่หลายในปัจจุบัน คณะผู้พัฒนาจึงสนใจพัฒนาซอฟแวร์บนแท็บเล็ตเพื่อเป็นเครื่องมือช่วยในการคำนวณเพื่อให้คำตอบที่ได้อยู่ในรูปของจำนวนเต็ม และสามารถบอกขั้นตอนการดำเนินการตามแนวนอนในแต่ละขั้นได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

1) ศึกษาวิธีการดำเนินการตามแนวนอน ให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนหรือขั้นบันได โดยสมาชิกของเมทริกซ์เริ่มต้นเป็นจำนวนเต็มและผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม

2) พัฒนาซอฟต์แวร์บนแท็บเล็ต ช่วยในการคำนวณและแสดงลำดับขั้นตอน ของการดำเนินการตามแนวนอน

1.3 ขอบเขตของปัญหา

พัฒนาโปรแกรมบนแท็บเล็ต โดยใช้ตัวเลขไม่เกิน 4 Digit และเมทริกซ์ขนาดไม่เกิน 6x6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สำหรับผู้พัฒนา

1) ได้ทบทวนเนื้อหาการดำเนินการตามแนวนอน
2) ได้เรียนรู้กระบวนการคิดและพัฒนาการเขียนโปรแกรม

สำหรับผู้ใช้งาน

1) สามารถใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการคำนวณ ทบทวนเนื้อหาเกี่ยวกับการดำเนินการตามแนวนอน ซึ่งจะช่วยให้ศึกษาและเรียนรู้ วิธีการดำเนินการตามแนวนอน แล้วได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม รวมถึงการแสดงขั้นตอนวิธีการดำเนินการตามแนวนอน และใช้ตรวจทานคำตอบในการฝึกทำโจทย์หรือการบ้าน

2) ช่วยให้ผู้ใช้ประหยัดค่าใช้จ่ายในการซื้อโปรแกรมช่วยคำนวณ

3) สามารถใช้เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1) ศึกษาข้อมูลและเตรียมการทำปัญหาพิเศษ
2) ศึกษาขั้นตอนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3) ศึกษาออกแบบขั้นตอนวิธี
4) รวบรวมข้อมูลจากหลายๆแหล่งเพื่อลงมือทำ
5) ดำเนินการพัฒนาโปรแกรม
6) เตรียมการนำเสนอและจัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ
7) นำเสนอปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงระยะเวลาขั้นตอนการดำเนินงาน

การดำเนินการ	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2559					ปี 2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1) ศึกษาข้อมูลและเตรียมการทำปัญหาพิเศษ										
2) ศึกษาขั้นตอนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง										
3) ศึกษาออกแบบขั้นตอนวิธี										
4) รวบรวมข้อมูลจากหลายๆ แหล่งเพื่อลงมือทำ										
5) ดำเนินการพัฒนาโปรแกรม										
6) เตรียมการนำเสนอและจัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ										
7) นำเสนอปัญหาพิเศษ										

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 การดำเนินการมูลฐาน (Elementary Operations)

บทนิยาม 2.1.1 การดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน มี 3 แบบ

1) สลับที่ระหว่าง 2 แนวนอน

2) คูณแนวนอนหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

3) คูณแนวนอนหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์แล้วบวกกับอีกแนวนอนหนึ่ง โดยที่แนวนอนแรกไม่เปลี่ยนแปลง

ในการอธิบายประกอบในตัวอย่าง เกี่ยวกับการดำเนินการทั้ง 3 แบบจะใช้ R_1 ,R_2 ,R_3 แทนแนวนอนที่ 1,2 และ3 ตามลำดับ พร้อมกับใช้สัญลักษณ์ $\leftrightarrow$ และ $\leftarrow$ ดังนี้

$\leftrightarrow$ แทนการสลับที่ระหว่างแนวนอน เช่น $R_1 \leftrightarrow R_2$ แทนการดำเนินการสลับที่ระหว่างแนวนอนที่ 1 กับ แนวนอนที่ 2

$\leftarrow$ แทนผลลัพธ์การดำเนินการที่ได้ในแนวนอนที่อยู่หัวลูกศร เช่น

$R_1 \leftarrow 3R_1$ แทนการดำเนินการคูณแนวนอนที่1 ด้วย 3

$R_1 \leftarrow R_1+2R_2$ แทนการดำเนินการคูณแนวนอนที่2 ด้วย2 แล้วบวกเข้าแนวนอนที่1

ตัวอย่าง 2.1.1 การหาผลเฉลยของสมการเริ่มต้น $x-5y=4, 3x+2y=3$ โดยแสดงเมทริกซ์แต่งเติมที่สมนัยกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} x-5y&=4 \\ 3x+2y&=3 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

ผลเฉลย ขั้นตอนที่ 1 สมการที่2 ลบด้วย 3เท่าของสมการที่1 (หรือแทนด้วย $R_2 \leftarrow R_2+3R_1$)ได้

$$\begin{aligned} x-5y&=4 \\ 17y&=-9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 17 & -9 \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งจะได้ว่าระบบสมการนี้สมมูลกับระบบสมการแรก ในขั้นตอนต่อไป คูณสมการที่ 2ด้วย $\frac{1}{17}$

(หรือแทนด้วย $R_2 \leftarrow \frac{1}{17}R_2$) ได้ $y = -\frac{9}{17}$

$$x - 5y = 4 \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{17} \end{array}\right]$$

$$y = -\frac{9}{17}$$

ขั้นตอนสุดท้าย สมการที่ 1 บวกด้วย 5เท่า ของสมการที่ 2 (หรือแทนด้วย $R_1 \leftarrow R_1 + 5R_2$) ได้

$$x = \frac{23}{17} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{23}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-9}{17} \end{array}\right]$$

$$y = -\frac{9}{17}$$ #

บทนิยาม 2.1.2 เมทริกซ์ (แต่งเติม) D มีแนวนอนสมมูล (equivalent) กับเมทริกซ์ C ก็ต่อเมื่อ D ได้มาจาก C โดยการดำเนินการมูลฐานกับแนวนอนของ C เป็นจำนวนจำกัดครั้ง

ทฤษฎีบท 2.1.3 ถ้าดำเนินการมูลฐานกับระบบสมการเชิงเส้นแล้วได้ระบบสมการที่มีเซตของผลเฉลยเหมือนกับระบบสมการเริ่มต้น และระบบสมการทั้งสองสมมูลกัน

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 5y + 3z &= 0 \\ x + 8z &= 0 \end{aligned}$$

ผลเฉลย

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่กำหนดให้ คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ และ $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \end{array}\right]$

$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$R_3 \leftarrow -1R_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3$ และ $R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

ดังนั้น x = -40 , y = 13 และ z = 5 #

2.2 การกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian Elimination)

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามารถหาได้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian elimination) ซึ่งวิธีการกำจัดเกาส์เซียนเป็นวิธีที่รวดเร็ว ด้วยการหาเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแนวนอนที่สมมูล

บทนิยาม 2.2.1 เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแนวนอน (row – echelon form) เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ 3 เงื่อนไขต่อไปนี้

1) แนวนอนที่สมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมด ต้องอยู่ในแนวล่างสุดของเมทริกซ์

2) สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ในแต่ละแนวนอนต้องเป็น 1 และเรียกว่า 1 ตัวแรกของแนวนอน

3) สมาชิกที่เป็น 1 ตัวแรกของแนวนอน ต้องอยู่ทางขวามือของ 1 ตัวแรกในแนวนอนก่อนหน้า

บทนิยาม 2.2.2 เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแนวนอน (reduced row-echelon matrix) เป็นเมทริกซ์สอดคล้องกับเงื่อนไขของนิยามข้างต้น และ 1 ตัวแรกในแต่ละแนวนอนเมื่ออยู่ในแนวตั้งใดแล้วสมาชิกอื่นๆที่อยู่ในแนวตั้งนั้นเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 2.2.1 เมทริกซ์ต่อไปนี้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันได

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สำหรับเมทริกซ์ต่อไปนี้อยู่ในรูป เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \#$$

ทฤษฎีบท 2.2.3 ทุกๆเมทริกซ์สามารถทำให้เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได (หรือขั้นบันไดลดรูป) ได้โดยการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

ตัวอย่าง 2.2.2 ในแต่ละกรณีที่กำหนดให้สมมติว่าเป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งทำให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดและเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป โดยการดำเนินการตามแนวนอน จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ผลเฉลย

a) เมทริกซ์ที่กำหนดให้สอดคล้องกับระบบสมการ และผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$$

b) จากแนวนอนที่ 3 จะได้สมการสุดท้ายที่สอดคล้องกับระบบสมการคือ

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

ซึ่งไม่มีค่า x_1, x_2, x_3, x_4 ที่สอดคล้องกับสมการนี้ จะได้ว่าระบบสมการนี้ไม่มีผลเฉลย

c) จากเมทริกซ์ที่กำหนดให้มีสมการที่สอดคล้อง คือ

$$x_1 - x_2 + 5x_5 = 6$$
$$x_3 - x_5 = 7$$
$$x_4 + 2x_5 = 8$$

จะได้ x_1, x_3, x_4 ในเทอมของตัวแปรอื่นคือ

$$x_1 = 6 + x_2 - 5x_5$$
$$x_3 = 7 + x_5$$
$$x_4 = 8 - 2x_5$$

ให้ $x_2 = s$ และ $x_5 = t$ เมื่อ s, t เป็นพารามิเตอร์ ดังนั้น

$$x_1 = 6 + s - 5t, x_2 = 7 + x_5, x_4 = 8 - 2t \quad \#$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 5y + 2z &= -1 \\ 5x + 12y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

ผลเฉลย

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่กำหนดให้คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & 12 & 3 & 0 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ และ $R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 8 & -10 \end{array}\right]$

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ดังนั้น ระบบสมการที่สอดคล้องกัน คือ

$$\begin{aligned} x - 9z &= 12 \\ y + 4z &= -5 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

ถ้าให้ $z = t$ เมื่อ t เป็นพารามิเตอร์ใดๆ แล้วผลเฉลยคือ

$x = 9t + 12$, $y = -4t - 5$ และ $z = t$ #

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 3a + 6b - 3c &= -2 \\ -2b + 3c &= -1 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลย เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่กำหนดให้คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right]$

$R_1 \leftarrow \frac{1}{3}R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right]$

$R_3 \leftarrow R_3 - 6R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{array}\right]$

$R_3 \leftarrow R_3 + 6R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$

ดังนั้น ระบบสมการที่สอดคล้องกันคือ

A + 2b – c = -2/3

B - (3/2) c = 1/2

0a + 0b + 0c = 12

จะเห็นว่า ไม่มีค่า a , b , c ที่สอดคล้องกับสมการที่ 3

ดังนั้น ระบบสมการไม่มีผลเฉลย #

ขั้นตอนวิธีแบบเกาส์ (Gaussian Algorithm)

ขั้นที่ 1 ถ้าเมทริกซ์มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ หยุดสิ้นสุดการทำขั้นบันไดตามแนวนอน

ขั้นที่ 2 ถ้าไม่เป็นไปตามขั้นที่ 1 หา แนวตั้งแรกจากซ้ายมือที่ประกอบด้วยสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า a แล้วสลับที่แนวนอนที่มี a นั้นไปอยู่ในแนวนอนที่ 1

ขั้นที่ 3 คูณแนวนอนนี้ด้วย $\frac{1}{a}$ จะได้ 1 ตัวแรก

ขั้นที่ 4 ทำให้จำนวนที่อยู่ด้านล่างของ 1 ตัวแรกให้เป็นศูนย์โดยการดำเนินการมูลฐาน

ขั้นที่ 5 ทำซ้ำจากขั้นที่ 1- 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.7 จงใช้ขั้นตอนวิธีแบบเกาส์ทำเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแนวนอน

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 10 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 แนวตั้งแรกที่ไม่เป็นศูนย์คือแนวตั้งที่ 1 เลือก a=3 ในแนวนอนที่ 1

ขั้นที่ 3 $R_1 \leftarrow \frac{1}{3}R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 10 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 4 $R_2 \leftarrow R_2 - 10R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{41}{3} & -\frac{59}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 5 $R_2 \leftarrow -\frac{3}{41}R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{59}{41} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 - \left(-\frac{4}{3}\right)R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{59}{41} \\ 0 & 0 & \frac{24}{41} \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow \frac{41}{24}R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{59}{41} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.5 จงใช้ขั้นตอนวิธีแบบเกาส์ทำเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปของขั้นบันไดตามแนวนอน

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 แนวตั้งแรกที่ไม่เป็นศูนย์คือแนวตั้งที่ 2 เลือก a = -2 ในแนวนอนที่ 2 (หรืออาจจะใช้ a = 2 ใน แนวนอนที่ 3 หรือ a = 3 ในแนวนอนที่ 4 ก็ได้)

ดำเนินการ $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 $R_1 \leftarrow -\frac{1}{2}R_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 4 $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$ และ $R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 5 $R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2$ และ $R_3 \leftarrow -\frac{1}{2}R_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งอยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันได #

2.3 ค่าลำดับชั้น (Rank)

บทนิยาม 2.3.1 ถ้าเมทริกซ์ A เปลี่ยนเป็นเมทริกซ์ R ซึ่งอยู่ในรูปขั้นบันไดตามแนวนอน โดยการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน แล้วจำนวนของ 1 ตัวแรกใน R เรียกว่าค่าลำดับชั้นของ A เขียนแทนด้วย rank A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาค่าลำดับชั้นของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 7 & 17 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

ผลเฉลย ลดรูปเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแนวนอน

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 7 & 17 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ขั้นบันไดแนวนอน มี 1 ตัวแรก อยู่ 2 จำนวน ดังนั้น rank A = 2 #

2.4 เมทริกซ์ผกผัน

บทนิยาม 2.4.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส เมทริกซ์ B เรียกว่าเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A ก็ต่อเมื่อ AB = I และ

BA = I เมทริกซ์ A ซึ่งมีเมทริกซ์ผกผัน เรียกว่าหาเมทริกซ์ผกผันได้

ตัวอย่าง 2.4.1 จงแสดงว่า $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ผลเฉลย หา AB และ BA

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก AB = BA = I ดังนั้น B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A #

ทฤษฎีบท 2.4.2 ถ้า B และ C ต่างเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A แล้ว B= C

ตัวอย่าง 2.4.2 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A^3 = I$ และหา A^{-1}

ผลเฉลย $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

และ $A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้น $A^3 = I$

หา $AA^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

จะเห็นว่า $A^2 A = I = AA^2$

ดังนั้น A^2 เป็นผกผันของ A นั่นคือ $A^{-1} = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ #

ทฤษฎีบท 2.4.3 สมมติระบบสมการมี n สมการ n ตัวแปรเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ ถ้า A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด $n \times n$ และเป็นเมทริกซ์ที่หาเมทริกซ์ผกผันได้แล้ว ระบบสมการมีผลเฉลยเดียว คือ $X = A^{-1}B$

ตัวอย่าง 2.4.3 จงใช้เมทริกซ์ผกผันหาผลเฉลยของสมการ

$$x + y = 2$$
$$x - y = 4$$

ผลเฉลย จากสมการจะได้ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

หาผกผันได้เป็น $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

และจาก $X = A^{-1}B$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 3$, $y = -1$ #

ขั้นตอนวิธีหาผกผันของเมทริกซ์ (Matrix Inversion Algorithm)

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ (จัตุรัส) ที่หาเมทริกซ์ผกผันได้ จะมีลำดับของการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

ซึ่งทำให้ A เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาดเดียวกัน เขียนแทนด้วย $A \rightarrow I$ และลำดับของการดำเนินการตามแนวนอนเดียวกันนี้ จะทำให้ I เปลี่ยนเป็น A^{-1} นั่นคือ $I \rightarrow A^{-1}$ ขั้นตอนวิธีสามารถรวมกันได้เป็น

$$\left[A \middle| I\right] \rightarrow \left[I \middle| A^{-1}\right]$$

โดยที่การดำเนินการมูลฐานตามแนวนอนที่กระทำบน A และ I ต้องทำพร้อมกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.4.4 จงใช้ขั้นตอนวิธีหาผกผันหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

$$\left[A \middle| I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

เพื่อทำให้ A เป็น I โดยขั้นแรก สลับที่ระหว่างแนวนอนที่ 1 และ 2 (แทนด้วย $R_1 \leftrightarrow R_2$)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

แนวนอนที่ 3 ลบด้วย 4 เท่าของแนวนอนที่ 1 (แทนด้วย $R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1$)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

แนวนอนที่ 3 บวกด้วย 3 เท่าของแนวนอนที่ 2 (แทนด้วย $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

แนวนอนที่ 3 คูณด้วย $\frac{1}{2}$ (แทนด้วย $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

แนวนอนที่ 1 ลบด้วย 3 เท่าของแนวนอนที่ 3 (แทนด้วย $R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3$) และ

แนวนอนที่ 2 ลบด้วย 2 เท่าของแนวนอนที่ 3 (แทนด้วย $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3$)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ดังนั้น $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.4.4 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด n×n โดยใช้การดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน ถ้า A สามารถลดรูปเป็น I ได้ จะทำให้ได้ A^{-1} ถ้า A ไม่สามารถลดรูปเป็น I ได้ จะไม่มี A^{-1}

2.5 ตัวกำหนด (Determinants)

2.5.1 บทนิยามตัวกำหนด

พิจารณาผลคูณของสมาชิกเมทริกซ์จัตุรัส โดยที่ผลคูณนั้นประกอบด้วยสมาชิกจากทุกแนวนอนที่ไม่ซ้ำกันและจากทุกแนวตั้งที่ไม่ซ้ำกัน เช่น

เมทริกซ์ A ขนาด 2×2 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

แล้วผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้ คือ $a_{11}a_{22}$ และ $a_{12}a_{21}$

เมทริกซ์ A ขนาด 3×3 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

แล้วผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้ คือ $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ และ $a_{13}a_{22}a_{31}$

บทนิยาม 2.5.1.1 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) ของเซตของจำนวนนับ { 1,2,...,n } เป็นการจัดจำนวนให้อยู่ในลำดับต่างๆ โดยไม่มีการเว้นหรือซ้ำจำนวนเหล่านั้น

บทนิยาม 2.5.1.2 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ตัวกำหนดของ A แทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$ โดยที่ $\det(A) = \sum(\pm)a_{1j_1}, a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหา det(A) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ผลเฉลย det (A) $= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

$= 1(4) - 2(3) = 4 - 6 = -2$ #

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหา det(A) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลย det (A) = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

= 1(1)(2) + (-1)(1)(1) + 2(2)(3) - 2(1)(1) - 1(1)(3) - (-1)(2)(2)

= 2 -1 +12 -2 -3 +4 = 12 #

2.5.2 คุณสมบัติตัวกำหนด

ทฤษฎีบท 2.5.2.1 ถ้า B ได้มาจาก A โดยการสลับที่ 2 แนวนอน (หรือแนวตั้ง) แล้ว

$$\det(B) = -\det(A)$$

ตัวอย่าง 2.5.3 $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

ผลเฉลย จาก $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ จะได้ $A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

(การสลับที่แนวนอนและการสลับเปลี่ยนเมทริกซ์)

det(B) = - det(A) = -2 #

ทฤษฎีบท 2.5.2.2 ถ้า A มี 2 แนวนอน (หรือแนวตั้ง) เท่ากันแล้ว det(A) = 0

ตัวอย่าง 2.5.4 $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

ผลเฉลย (เนื่องจาก แนวนอนที่ 1 และแนวนอนที่ 3 เหมือนกัน)

det (A) = 0 #

ทฤษฎีบท 2.5.2.3 ถ้า แนวนอน (หรือแนวตั้ง) ของ A ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นศูนย์ แล้ว det(A) = 0

ตัวอย่าง 2.5.5 $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

ผลเฉลย จากทฤษฎีบท 2.5.2.3 จะได้ว่า det (A) = 0 #

ทฤษฎีบท 2.5.2.4 ถ้า B ได้มาจาก A โดยรคูณแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ของ A ด้วยค่าคงตัว c แล้ว det(B) = c det (A)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.5.6 B = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix}$

ผลเฉลย det(B) = c det (A)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(0) = 0 \qquad \#$$

(โดยมีการดึงตัวร่วม 4 ออกจากแนวนอนที่ 3 แล้วมีแนวนอนที่ 1และแนวนอนที่ 3 เหมือนกัน โดยทฤษฎีบท)

ทฤษฎีบท 2.5.2.5 ถ้า B = $\left[b_{ij} \right]$ ได้มาจาก A = $\left[a_{ij} \right]$ โดยการบวกแต่ละสมาชิกของแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ที่ r ของ A ด้วย c เท่าของสมาชิกที่สมนัยกันในแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ที่ s $\left(r \neq s \right)$ แล้ว det(B) = det (A)

ทฤษฎีบท 2.5.2.6 ถ้า A = $\left[a_{ij} \right]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (ล่าง) แล้ว $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ นั่นคือตัวกำหนดของเมทริกซ์สามเหลี่ยมคือผลคูณของสมาชิกบนแนวทแยงหลัก

ตัวอย่าง 2.5.7 จงหา det (A) เมื่อ A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

ผลเฉลย $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \qquad R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \text{ และ } R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} \qquad R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2$$

$$= 12 \qquad \#$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6 เมทริกซ์สามเหลี่ยม

เหมือนเมทริกซ์จัตุรัส เมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ เรียกว่าสามเหลี่ยมบน (upper triangular) ถ้าแต่ละสมาชิกที่อยู่ล่างและซ้ายของแนวทแยงหลักเป็นศูนย์ เช่น ทุกๆ เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแนวนอนต่อไปนี้ เป็น

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

2.7 สัจพจน์

บทนิยาม2.7.1 สัจพจน์ของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ พร้อมกับ เซตย่อยที่ไม่ว่าง $P \subset \mathbb{Z}$ ซึ่งเรียกว่า จำนวนเต็มบวก และการดำเนินการทวิภาคการบวกและการคูณ แสดงด้วย $+$ และ $\bullet$ ตามลำดับ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

สมบัติปิดสำหรับ P : ถ้า a,b เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a+b$ และ $a \cdot b$ เป็นจำนวนเต็มบวก

สมบัติการสลับที่ : สำหรับทุกจำนวนเต็ม a,b จะได้ว่า $a+b=b+a$ และ $a \cdot b = b \cdot a$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ : สำหรับทุกจำนวนเต็ม a,b และ c จะได้ว่า

$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ และ } a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$$

สมบัติการแจกแจง : สำหรับทุกจำนวนเต็ม a,b และ c จะได้ว่า $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

การมีเอกลักษณ์ : สำหรับทุกจำนวนเต็ม a มีจำนวนเต็ม 0 และ 1 ที่ซึ่ง $a+0=a$ และ $a \cdot 1 = a$

มีผกผันของการบวก : สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ มีจำนวนเต็ม $-a$ ที่ซึ่ง $a+(-a)=0$

สมบัติไตรวิภาค : สำหรับทุกจำนวนเต็ม a เป็นไปได้อย่างใดอย่างหนึ่งของสามอย่างนี้เท่านั้น คือ a เป็นจำนวนเต็มบวก หรือ $a=0$ หรือ $-a$ เป็นจำนวนเต็มบวก

สมบัติการเรียงลำดับที่ดี : สำหรับทุกเซตย่อยใดๆที่ไม่ว่างของจำนวนเต็มบวกจะมีสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8 ขั้นตอนวิธีการหาร(Division Algorithm)

ทฤษฎีบท2.8.1 สำหรับ จำนวนเต็ม a,b ใดๆ โดยที่ b>0 จะมีจำนวนเต็ม q และ r อย่างละหนึ่งจำนวนที่สอดคล้องกับ

$$a = qb + r, \qquad 0 \le r < b$$

q เรียกว่า ผลหาร (quotient) r เรียกว่า เศษเหลือ (remainder) ในการหาร a ด้วย b

บทแทรก2.8.2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r อย่างละหนึ่งจำนวนซึ่ง

$$a = qb + r \quad ; 0 \le r < |b|$$

พิสูจน์ เพราะว่า $b \neq 0$ จะได้ว่า $|b| > 0$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท2.6.1 จะมีจำนวนเต็ม q' และ r อย่างละหนึ่งจำนวนที่

$$a = |b|q' + r \quad ; \quad 0 \le r < |b|$$

ถ้า $b > 0$ จะได้ $a = bq' + r \quad ; \quad 0 \le r < |b|$

ถ้า $b < 0$ จะได้ $a = -bq' + r$

$$= b(-q') + r \quad ; \quad 0 \le r < |b|$$

ให้ $q = -q'$ จะได้ $a = bq + r$ #

ตัวอย่าง 2.8.1 (1)ให้ a =-17, b = 3 จะมี q =-6 และ r= 1

ซึ่ง -17 = (-6)(3) + 1

(2) ให้ a = 17, b = -3 จะมี q =-5 และ r= 2

ซึ่ง 17 = (-5)(-3) + 2 #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9 ตัวหารร่วมมาก

บทนิยาม2.9.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์ ตัวหารร่วมมากของ a และ b แทนด้วย $\gcd(a, b)$ เป็นจำนวนเต็มบวก d เป็นตัวหารร่วมซึ่งสอดคล้องกับ

1) $d \mid a$ และ $d \mid b$

2) ถ้า $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \leq d$

ขั้นตอนวิธีการหาตัวหารร่วมมากแบบยุคลิด

ตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม 2 จำนวน สามารถหาได้โดย การหาตัวหารที่เป็นจำนวนบวกทุกจำนวนแล้วเลือกตัวหารร่วมมากที่มากที่สุดสำหรับจำนวนที่มีขนาดใหญ่ จึงต้องมีวิธีที่มีประสิทธิภาพมากกว่า ซึ่งต้องทำซ้ำในขั้นตอนการหาร หรือการหาเศษเหลือในการหารซ้ำๆ นั่นคือ

ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มสองจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เนื่องจาก $\gcd(|a|, |b|)$ และให้ $a \geq b > 0$

เริ่มต้นจะมี q_1 และ r_1 ที่ทำให้

$$a = q_1 b + r_1 \quad , \quad 0 \leq r_1 < b$$

ถ้า $r_1 = 0$ แล้ว $b \mid a$ และ $\gcd(a, b) = b$

ถ้า $r_1 \neq 0$ จะหาร b ด้วย r_1 จึงมี q_2 และ r_2 ที่สอดคล้องกับ

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad , \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

ถ้า $r_2 = 0$ หยุด หรือถ้าไม่เป็นเช่นนั้น จะได้

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad , \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

การหารมีกระบวนการต่อเนื่องจนกระทั่งเหลือเศษเหลือที่ได้เป็นศูนย์ซึ่งมี $(n + 1)$ ขั้น เมื่อ r_{n-1} หารลงตัวด้วย r_n (เศษเหลือเป็นศูนย์) หรือค่อยๆ ลดลงเป็นลำดับ $b > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$ ผลที่ได้เป็นระบบสมการดังนี้

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 && , \quad 0 < r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2 && , \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 && , \quad 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n && , \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\gcd(a, b) = \gcd(b, r_1) = \gcd(r_1, r_2) = \ldots = \gcd(r_{n-2}, r_{n-1}) = r_n$ ซึ่ง r_n เป็นเศษเหลือสุดท้ายที่ไม่เป็นศูนย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.9.1 จงใช้ขั้นตอนยุคลิดหา gcd (1485 , 1745)

ผลเฉลย

1745 = 1·1485 + 260

1485 = 5·260 + 185

260 = 1·185 + 75

185 = 2·75 + 35

75 = 2·35 + 5

35 = 7·5 + 0

ดังนั้น gcd (1485 , 1745) = 5 #

บทตั้ง2.9.2 ถ้า $a = qb + r$ แล้ว $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$

พิสูจน์ จาก $a = qb + r$

ถ้า $d = \gcd(a,b)$ แล้ว $d|a$ และ $d|b$

จะได้ $d|(a-bq)$ หรือ $d|r$

ดังนั้น d เป็นตัวหารร่วมมากทั้งของ b และ r

ในอีกทางหนึ่ง ถ้า c เป็นตัวหารร่วมมากของ b และ r แล้ว $c|(qb+r)$ **ดังนั้น** $c|a$ ซึ่งจะทำให้ c เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b จะได้ $c \le d$

โดยนิยามของ $\gcd(b,r)$ จะได้ $d = \gcd(b,r)$ #

2.10 ฟังก์ชันพื้นและฟังก์ชันเพดาน

บทนิยาม 2.10.1 ฟังก์ชันพื้น กำหนดให้จำนวนจริง x จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$

ฟังก์ชันเพดาน กำหนดให้จำนวนจริง x จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x เขียนแทนด้วย $\lceil x \rceil$

ตัวอย่าง 2.23

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0 \quad , \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 0.5 \rceil = 1 \quad , \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor -0.5 \rfloor = -1 \quad , \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = \lceil -0.5 \rceil = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

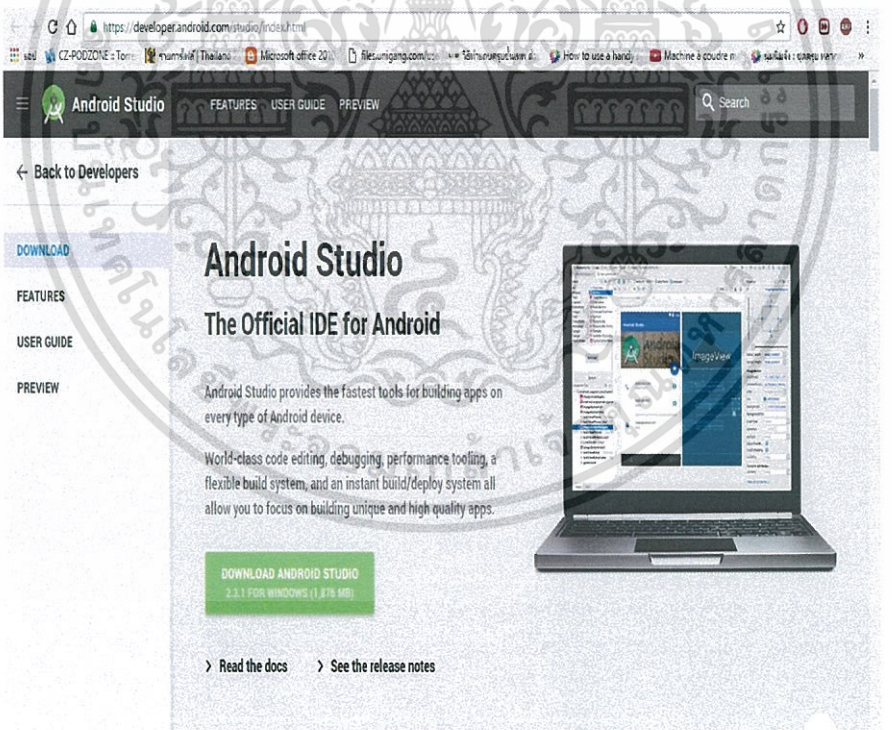
2.11 เครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาแอพลิเคชั่น

2.11.1 เครื่องมือที่ใช้ในการสร้างแอป

Android Studio

เป็นเครื่องมือที่ พัฒนามาจากแนวคิดพื้นฐานของ InteliJ IDEA คล้าย ๆ กับการทำงานของ Eclipse และ Android ADT Plugin โดยวัตถุประสงค์ของ Android Studio คือต้องการพัฒนาเครื่องมือ IDE ที่สามารถพัฒนา App บน Android ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น ทั้งด้านการออกแบบ GUI ที่ช่วยให้สามารถ Preview ตัว App มุมมองที่แตกต่างกันบน Smart Phone แต่ละรุ่น สามารถแสดงผลบางอย่างได้ทันทีโดนไม่ต้องทำการรัน App บน Emulator รวมทั้งยังแก้ไขปรับปรุงในเรื่องของความเร็วของ Emulator ที่ยังเจอปัญหากันอยู่ในปัจจุบัน

ที่มาของโปรแกรม



รูปที่ 2.1 หน้าดาวน์โหลด Android Studio

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข้อดีของ Android Studio

1) สนับสนุนการติดตั้งหลากหลายระบบปฏิบัติการ (Platform) Windows, Mac OS X และ Linux

2) เครื่องมือช่วยพัฒนาการออกแบบส่วนติดต่อกับผู้ใช้ และสามารถจะพรีวิวให้ดูแบบหลายๆขนาด หน้าจอได้พร้อม เป็นแบบ Live Preview

3) ระบบการคาดเดาการพิมพ์โค้ดที่ชาญฉลาด

4) มี Feature ที่หลากหลายให้เลือกใช้

5) ใช้ภาษา Java ในการพัฒนาจึง ทำให้ง่ายในการเขียน สำหรับผู้ที่มีพื้นฐานภาษา Java

6) เป็นเครื่องมือที่ใช้ ฟรี

7) สามารถพัฒนาอุปกรณ์ทุกรุ่นที่รองรับระบบ Android ได้

ข้อเสียของ Android Studio

1) หากมีหลายๆ module ใน 1 โปรเจค จะใช้เวลา build นานมาก

2) มีฟังก์ชันการทำงานเยอะมากๆ ทำให้เสียเวลาในการทำความเข้าใจ

2.11.2 อุปกรณ์ที่ใช้สำหรับทดสอบแอปที่พัฒนา

รูปที่ 2.2 Lenovo A3300

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
ขั้นตอนวิธีการดำเนินการ
ตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

3.1 การดำเนินการตามแนวนอนเทียบกับขั้นตอนวิธีการหาร

จากขั้นตอนวิธีการหาร $a = qb + r$ เริ่มจากมีจำนวนเต็ม a และ b แล้วหาจำนวนต็ม q และ r โดยเริ่มจากหาค่า q แล้วหาค่า r จาก $r = a - qb$

จากการดำเนินการมูลฐานตามข้อ 3) $R_i \leftarrow R_i + mR_j$ จะเริ่มจากมี R_i และ R_j แล้วหาค่า m ที่เป็นจำนวนเต็ม และเมื่อเทียบกับขั้นตอนวิธีการหาร

R_i ผลลัพธ์คือ r ของขั้นตอนการหาร

R_i เดิม คือ a ของขั้นตอนการหาร

R_j คือ b ของขั้นตอนการหาร

m คือ q ของขั้นตอนการหาร เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

ในการดำเนินการตามแนวนอน ถ้ามีจำนวนเต็มในแถว R_i แถว R_j และมี m เป็นจำนวนเต็มแล้ว R_i ผลลัพธ์ที่ได้ จะเป็นจำนวนเต็มเสมอตามสัจพจน์

ในการหาค่า q ของขั้นตอนวิธีการหารให้เป็นจำนวนเต็มสามารถหาได้ดังนี้

$$q = int\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor ; & b > 0 \\ \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil ; & b < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.1.1 (1) ให้ $a = -17, b = 3$

จะมี $q = \text{int}(\frac{-17}{3}) = \lfloor -5.67 \rfloor = -6$ และ $r = 1$

ซึ่ง $-17 = (-6)(3) + 1$

(2) ให้ $a = 17, b = -3$

จะมี $q = \text{int}(\frac{17}{-3}) = \lceil -5.67 \rceil = -5$ และ $r = 2$

ซึ่ง $17 = (-5)(-3) + 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ขั้นตอนวิธียุคลิดกับการดำเนินการตามแนวนอน

ในการหาตัวหารร่วมมากของขั้นตอนวิธียุคลิด จะใช้ขั้นตอนวิธีการหารซ้ำๆ ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ b≠0

1) จาก a=qb+r

คำนวณค่า q ตามหัวข้อที่กล่าวไว้ก่อนหน้า

คำนวณค่า r จาก r=a-qb

เตรียมค่าสำหรับการทำซ้ำรอบต่อไป ให้ a=b และ b=r

2) ทำซ้ำตามข้อ 1) จนกระทั้ง b=0 นั่นคือ เศษเหลือ r=0 ในขั้นตอนสุดท้าย แล้วให้ b จำค่า r ไว้และ a ที่จำค่า b ไว้ ซึ่งเป็นเศษเหลือจากขั้นตอนการหารของลำดับก่อนหน้า และจะได้ a เป็นค่า ห.ร.ม. ของ a และ b

เริ่มจากมีจำนวนเต็ม a และ b ผลจากการทำตามขั้นตอนวิธียุคลิดและสองขั้นตอนสุดท้าย จะได้ว่า a เป็นค่า ห.ร.ม. และ b เป็นศูนย์

การใช้ขั้นตอนวิธียุคลิดกับการดำเนินการตามแนวนอน

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\ 0 & a_{i,c} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{j,c} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

สมมติ พิจารณาแถวที่ R_i และแถวที่ R_j จะเป็นการหา $a_{i,c}$ และ $a_{j,c}$ (c หมายถึงหลัก) โดยดำเนินการซ้ำๆ ระหว่างแถว R_i กับ R_j สลับกันขึ้นกับค่า $a_{i,c}$ และ $a_{j,c}$ ดังนี้

ถ้า $a_{i,c} > a_{j,c}$ ให้ดำเนินการ $R_i \leftarrow R_i - mR_j$ (แถวที่ i เป็นตัวตั้ง และแถวที่ j เป็นตัวลบ)

โดย $m = \left\lfloor \frac{a_{i,c}}{a_{j,c}} \right\rfloor$ เมื่อ $a_{j,c} > 0$ หรือ $m = \left\lceil \frac{a_{i,c}}{a_{j,c}} \right\rceil$ เมื่อ $a_{j,c} < 0$

ถ้า $a_{j,c} > a_{i,c}$ ให้ดำเนินการ $R_j \leftarrow R_j - mR_i$ (แถวที่ j เป็นตัวตั้ง และแถวที่ i เป็นตัวลบ)

โดย $m = \left\lfloor \frac{a_{j,c}}{a_{i,c}} \right\rfloor$ เมื่อ $a_{i,c} > 0$ หรือ $m = \left\lceil \frac{a_{j,c}}{a_{i,c}} \right\rceil$ เมื่อ $a_{i,c} < 0$

จะเห็นว่า เมื่อทำซ้ำสลับกันไปมาแล้ว สุดท้ายค่าในตำแหน่ง $a_{i,c}$ จะเป็นค่า ห.ร.ม. และค่าในตำแหน่ง $a_{j,c}$ จะเป็นศูนย์ หรือกลับกัน ถ้ากลับกันจะใช้การสลับแถวอีกครั้ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.2.1 การพิจารณาค่า m

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\ 0 & -17 & * & \cdots & * \\ 0 & 3 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$m = \left\lfloor \frac{-17}{3} \right\rfloor = -6$ และใช้การดำเนินการ $R_i \leftarrow R_i - (-6)R_j$

3.3 ขั้นตอนวิธีการดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

ขั้นที่ 1 ถ้าเป็นเมทริกซ์ศูนย์ จบการทำงาน

ขั้นที่ 2 ลูปพิจารณาในแถวที่ i ตั้งแต่ 1 ถึง แถวที่ n-1 (จากหลักที่ 1 จนถึง n สมมติว่าเป็น c)

2.1 ถ้า $a_{i,c}$ เป็นศูนย์ให้หาสมาชิกในหลักเดียวกันที่ไม่เป็นศูนย์จาก $a_{i+1,c}$ ถึง $a_{n,c}$ แล้วสลับแนวนอนที่มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์นั้น กับแนวนอนที่ I (จะได้ $a_{i,c}$ ไม่เป็นศูนย์)

2.2 ลูปพิจารณาแถวที่ j ตั้งแต่ i+1 ถึงแถวที่ n

2.2.1 ดำเนินการตามขั้นตอนวิธียุคลิดแถวที่ i กับ แถวที่ j สำหรับ $a_{i,c}$ และ $a_{j,c}$ (ไม่เป็นศูนย์)

(เป็นการทำ สลับกันไปมาระหว่างแถวที่ i กับ แถวที่ j จนได้ $a_{i,c}$ ใหม่เป็นค่า หรม. ของ $a_{i,c}$ และ $a_{j,c}$ และ $a_{j,c}$ ใหม่เป็นศูนย์)

1) ถ้า $|a_{i,c}|$ มากกว่า $|a_{j,c}|$

คำนวณ m โดย $m = \left\lfloor \frac{a_{i,c}}{a_{j,c}} \right\rfloor$ เมื่อ $a_{j,c} > 0$ หรือ $m = \left\lceil \frac{a_{i,c}}{a_{j,c}} \right\rceil$

เมื่อ $a_{j,c} < 0$

ดำเนินการตามแนวนอน $R_i \leftarrow R_i - mR_j$

2) ถ้า $|a_{j,c}|$ มากกว่า $|a_{i,c}|$

คำนวณ m โดย $m = \left\lfloor \frac{a_{j,c}}{a_{i,c}} \right\rfloor$ เมื่อ $a_{i,c} > 0$ หรือ $m = \left\lceil \frac{a_{j,c}}{a_{i,c}} \right\rceil$

เมื่อ $a_{i,c} < 0$

ดำเนินการตามแนวนอน $R_j \leftarrow R_j - mR_i$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2 สลับสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์มาอยู่ที่ $a_{i,c}$

2.3 เปลี่ยนเป็นแนวตั้งถัดไป เพื่อทำซ้ำขั้นที่ 2

ขั้นตอนวิธี สามารถแสดงในรูปเมทริกซ์ ได้ดังนี้

สำหรับแนวตั้งแรก เริ่มจาก พิจารณาคู่ (a_{11},a_{21}) ได้ $(\mathrm{d}_1,0)$ ตามด้วย พิจารณา $(\mathrm{d}_1,\mathrm{a}_{31})$ ได้ $(\mathrm{d}_2,0)$ ตามด้วย พิจารณา $(\mathrm{d}_2,\mathrm{a}_{41})$ ได้ $(\mathrm{d}_3,0)$

สำหรับแนวตั้งถัดไป พิจารณาทำนองเดียวกันโดยเริ่มจากแนวนอนในลำดับเพิ่มขึ้น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} d_1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}_1 = \gcd(\mathrm{a}_{11},\mathrm{a}_{21})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} d_2 & a''_{12} & a''_{13} & a''_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} d_3 & a'''_{12} & a'''_{13} & a'''_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}_2 = \gcd(\mathrm{d}_1,\mathrm{a}_{31}) \qquad \mathrm{d}_3 = \gcd(\mathrm{d}_2,\mathrm{a}_{41})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนวิธีข้างต้น สามารถเขียนเป็นคำสั่งเทียม ได้ดังนี้

```
1. if  a is zero matrix then stop
2. cl=1   //column
3. loop  row i=1 to n-1
        3.1  if a[i][cl]=0   find  other row from row n to row i+1 that a[*][cl] != 0
                          and interchange row(i) and row(*)
        3.2  loop  row j=i+1 to n
             //ทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน
              while (a[i][cl]!=0 && a[j][cl]!=0) {
               if  (abs(a[i][cl])> abs(a[j][cl]))
                     m = a[i][cl]/ a[j][cl];
                     if(m>0)
                                 if(a[j][cl]>0){}
                                 else if(a[j][cl]<0)
                                             {m=m-1;}

                     else
                                 if(a[j][cl]>0)
                                             {m=m-1;}
                                 else if(a[j][cl]<0){}
                     row(i) ← row(i) – m row(j)
               else
                     m = a[j][cl]/ a[i][cl];
                     if(m>0)
                                 if(a[i][cl]>0){}
                                 else if(a[i][cl]<0)
                                             {m=m-1;}

                     else
                                 if(a[i][cl]>0)
                                             {m=m-1;}
                                 else if(a[i][cl]<0){}
                     row(j) ← row(j) – m row(i)
              }
        3.3 if a[i][cl]=0  interchange row(i) and row(j)
4. cl=cl+1
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.3.1 จงทำเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแนวนอน

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 10 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น เริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 พิจารณาสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1

สำหรับ $a_{1,1}$ และ $a_{2,1}$ ที่ไม่เป็นศูนย์

$|a_{2,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & -12 & -17 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$|a_{1,1}|$ มากกว่า $|a_{2,1}|$ และ $a_{2,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{1,1}}{a_{2,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 41 & 59 \\ 1 & -12 & -17 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

สลับแถว 1 กับแถว 2 เนื่องจาก $a_{1,1}$ มีค่าเป็น 0

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 41 & 59 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor = 2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 41 & 59 \\ 0 & 26 & 38 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 3 ทำซ้ำขั้นที่ 2 ในแนวตั้งถัดไป

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{41}{26} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 15 & 21 \\ 0 & 26 & 38 \end{bmatrix}$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{26}{15} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 15 & 21 \\ 0 & 11 & 17 \end{bmatrix}$

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{15}{11} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 11 & 17 \end{bmatrix}$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$

ทำในคอลัมน์ที่ 3

$R_3 \leftarrow \frac{1}{24} R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ #

ตัวอย่าง 3.3.2 จงทำเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแนวนอน

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & 3 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น เริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 พิจารณาสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1

สำหรับ $a_{1,1}$ และ $a_{2,1}$ ที่ไม่เป็นศูนย์

$|a_{2,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor = 5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 9 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$|a_{4,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$|a_{1,1}|$ มากกว่า $|a_{4,1}|$ และ $a_{4,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{1,1}}{a_{4,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_4 \qquad \begin{bmatrix} 0 & -7 & -1 & -14 & 10 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

สลับแถว 1 กับแถว 4 เนื่องจาก $a_{1,1}$ มีค่าเป็น 0

$$R_1 \leftrightarrow R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -9 \\ 0 & -7 & -1 & -14 & 10 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่ 3 ทำซ้ำขั้นที่2 ในแนวตั้งถัดไป

$|a_{2,2}|$ เท่ากับ $|a_{4,2}|$ และ $a_{4,2} < 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lceil \frac{a_{2,2}}{a_{4,2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{-7}{-7} \right\rceil = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 21 & -14 & 28 \end{bmatrix}$$

ทำในคอลัมน์ที่ 3

$|a_{4,3}|$ มากกว่า $|a_{3,3}|$ และ $a_{3,3} < 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lceil \frac{a_{4,3}}{a_{3,3}} \right\rceil = \left\lceil \frac{21}{-11} \right\rceil = -1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - (-1)R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 10 & -15 & 19 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,3}|$ มากกว่า $|a_{4,3}|$ และ $a_{4,3} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,3}}{a_{4,3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-11}{10} \right\rfloor = -2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - (-2)R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -31 & 29 \\ 0 & 0 & 10 & -15 & 19 \end{bmatrix}$$

$|a_{4,3}|$ มากกว่า $|a_{3,3}|$ และ $a_{3,3} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,3}}{a_{4,3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{1} \right\rfloor = 9$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -31 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -10 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,3}|$ มากกว่า $|a_{4,3}|$ และ $a_{4,3} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{4,3}}{a_{3,3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - 9R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -175 & 119 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -10 \end{bmatrix}$$

สลับแถว 3 กับแถว 4 เนื่องจาก $a_{3,3}$ มีค่าเป็น 0

$$R_3 \leftrightarrow R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -175 & 119 \end{bmatrix}$$

#

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 การวิเคราะห์การทำงานของอัลกอรึทึม

ในการจับคู่การทำงานเพื่อให้ได้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน มีการทำงานดังนี้

ตาราง 3.4.1 แสดงจำนวนขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึม

ลูบนอก	ลูบใน	จำนวนการทำงาน (ครั้ง)
แถวที่ 1	จับคู่กับ แถวที่ 2 แถวที่ 3 แถวที่ 4 ⋮ แถวที่ n	n-1
แถวที่ 2	จับคู่กับ แถวที่ 3 แถวที่ 4 ⋮ แถวที่ n	n-2
แถวที่ 3	จับคู่กับ แถวที่ 4 ⋮ แถวที่ n	n-3
⋮	⋮	⋮
แถวที่ n-1	จับคู่กับ แถวที่ n	1
รวม		$\frac{n(\mathrm{n}-1)}{2}$

ในแต่ละคู่ $a_{i,j}, a_{i+1,j}$ ในการวนลูบคูณและลบกลับไปกลับมานั้น คู่แรกอาจทำงานเยอะ แต่ในคู่ถัดๆ ไปจะทำงานน้อยลงเนื่องจากค่า d โดยที่ $|d| = \gcd(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ นั้นได้ลดลง และจะทำงานน้อยที่สุดถ้าคู่แรกลดสู่ (1,0) ทำให้คู่ต่อๆ ไปทำงานเพียงแค่ครั้งเดียว และทำงานมากสุดเมื่อคู่ $a_{i,j}, a_{i+1,j}$ เป็นลำดับฟีโบนักชี

สมมติให้แต่ละคู่ทำงานเฉลี่ย 3 ครั้ง จะได้การทำงาน คือ $\frac{3n(\mathrm{n}-1)}{2}$ จะได้การทำงานของอัลกอรึทึม

เป็น $\frac{n(\mathrm{n}-1)}{2} + \frac{3n(\mathrm{n}-1)}{2} = 2n(\mathrm{n}-1)$ ครั้ง มีการเติบโตเป็น $O(n^2)$

3.5 การประยุกต์ใช้

3.5.1 วิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการ

จะกล่าวถึง *วิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการ* ที่ทำเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป (Reduced row-echelon matrix) โดยการดำเนินการตามแนวนอน ซึ่งสามารถทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.5.1 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 5$$
$$10x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 9$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 นำระบบสมการมาเขียนเป็นเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 8 & 5 \\ 10 & 3 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

ขั้นที่ 2 ทำการดำเนินการตามแถวโดยขั้นตอนวิธีการที่ทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน(forward)

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 พิจารณาสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1

สำหรับ $a_{1,1}$ และ $a_{2,1}$ ที่ไม่เป็นศูนย์

$|a_{2,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & -12 & -17 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$|a_{1,1}|$ มากกว่า $|a_{2,1}|$ และ $a_{2,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{1,1}}{a_{2,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 41 & 59 & 23 \\ 1 & -12 & -17 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

สลับแถว 1 กับแถว 2 เนื่องจาก $a_{1,1}$ มีค่าเป็น 0

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 41 & 59 & 23 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$|a_{3,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor = 2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 41 & 59 & 23 \\ 0 & 26 & 38 & 14 \end{array}\right]$$

ทำในคอลัมน์ที่ 2

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{41}{26} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 15 & 21 & 9 \\ 0 & 26 & 38 & 14 \end{array}\right]$$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{26}{15} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 15 & 21 & 9 \\ 0 & 11 & 17 & 5 \end{array}\right]$$

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{15}{11} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 11 & 17 & 5 \end{array}\right]$$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \end{array}\right]$$

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \end{array}\right]$$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 24 & -24 \end{array}\right]$$

ทำในคอลัมน์ที่ 3

$R_3 \leftarrow \frac{1}{24} R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

(backward)

$R_2 \leftarrow R_2 - (-5)R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -17 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - (-17)R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - (-12)R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

จะได้ผลเฉลย $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.2 การหาค่าตัวกำหนด

ขั้นที่ 1 ตรวจสอบขนาดของเมทริกซ์ ว่าเป็นเมทริกซ์จัตุรัสหรือไม่ ถ้าไม่จะไม่สามารถหา Determinants ได้ ถ้าหากเป็นเมทริกซ์จัตุรัสแล้ว เมทริกซ์นั้นต้องประกอบไปด้วยสมาชิกจากแนวนอนที่ไม่ซ้ำกันและ สมาชิกจากทุกแนวตั้งต้องไม่ซ้ำกัน

ขั้นที่ 2 ตรวจสอบแถวและหลักของเมทริกซ์ว่ามีแถวหรือหลักใด เป็นศูนย์ทั้งหมด ถ้าหากมีแสดงว่า Determinants ของเมทริกซ์นั้นจะเท่ากับ ศูนย์

ขั้นที่ 3 เริ่มดำเนินการตามแถวโดย ใช้ขั้นตอนวิธีการที่ทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน โดยหากมีการสลับแถวหนึ่งครั้งให้คูณ -1 ไปด้วยใน Determinants

ขั้นที่ 4 Determinants ได้จากผลคูณในแนวทแยงของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนและเงื่อนไขในขั้นที่3

ตัวอย่างที่ 3.5.2 จงหาตัวกำหนดของ

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

ขั้นที่ 2 ไม่มีแถวหรือหลักใด เป็นศูนย์ทั้งหมด

ขั้นที่ 3 เริ่มดำเนินการตามแถวโดย ใช้ขั้นตอนวิธีการที่ทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 พิจารณาสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1

สำหรับ $a_{1,1}$ และ $a_{2,1}$ ที่ไม่เป็นศูนย์

$|a_{2,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1}>0$

จะได้จำนวนเต็ม $m=\left\lfloor \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor=5$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_2 \leftarrow R_2-5R_1 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 9 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1}>0$

จะได้จำนวนเต็ม $m=\left\lfloor \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor=3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$|a_{4,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$|a_{1,1}|$ มากกว่า $|a_{4,1}|$ และ $a_{4,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{1,1}}{a_{4,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_4 \qquad \begin{bmatrix} 0 & -7 & -1 & -14 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

สลับแถว 1 กับแถว 4 เนื่องจาก $a_{1,1}$ มีค่าเป็น 0

$$R_1 \leftrightarrow R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & -14 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 ทำซ้ำขั้นที่2 ในแนวตั้งถัดไป

$|a_{2,2}|$ เท่ากับ $|a_{4,2}|$ และ $a_{4,2} < 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{4,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-7}{-7} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 21 & -14 \end{bmatrix}$$

ทำในคอลัมน์ที่ 3

$|a_{4,3}|$ มากกว่า $|a_{3,3}|$ และ $a_{3,3} < 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lceil \frac{a_{4,3}}{a_{3,3}} \right\rceil = \left\lceil \frac{21}{-11} \right\rceil = -1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - (-1)R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 10 & 19 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,3}|$ มากกว่า $|a_{4,3}|$ และ $a_{4,3} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,3}}{a_{4,3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-11}{10} \right\rfloor = -2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - (-2)R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

$|a_{4,3}|$ มากกว่า $|a_{3,3}|$ และ $a_{3,3} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,3}}{a_{4,3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{1} \right\rfloor = 9$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,3}|$ มากกว่า $|a_{4,3}|$ และ $a_{4,3} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{4,3}}{a_{3,3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$R_3 \leftarrow R_3 - 9R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -175 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

สลับแถว 3 กับแถว 4 เนื่องจาก $a_{3,3}$ มีค่าเป็น 0

$$R_3 \leftrightarrow R_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -175 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 4 ได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน det (A) = (1)(-7)(1)(-175) = 1225

แต่เนื่องจากมีการสลับแถว 2 ครั้ง จึงต้องคูณด้วย -1 ใน det (A)

จึงได้ว่า det (A) = (-1)(-1)(1225) = 1225 #

3.5.3 การหาเมทริกซ์ผกผัน

ขั้นที่ 1 ตรวจสอบขนาดของเมทริกซ์ ว่าเป็นเมทริกซ์จัตุรัสหรือไม่ หาตัวกำหนดของเมทริกซ์หาก ตัวกำหนดไม่เท่ากับศูนย์จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้

ขั้นที่ 2 เขียนเมทริกแต่งเติมระหว่างเมทริกที่ต้องการหาเมทริกซ์ผกผันกับเมทริกซ์เอกลักษณ์

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแถวโดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่ทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน แล้วดำเนินการแทนค่า ย้อนกลับจนได้เมทริกซ์เอกลักษณ์ในฝั่งซ้ายและเมทริกซ์ผกผันในฝั่งขวา

ตัวอย่าง 3.5.3 จงหาเมทริกซ์ผกผันของ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 จากตัวอย่างที่แล้วจะเห็นว่า det (A) = 1225 ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

ขั้นที่ 2 เขียนเมทริกซ์แต่งเติม $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแถวโดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่ทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 พิจารณาสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับ $a_{1,1}$ และ $a_{2,1}$ ที่ไม่เป็นศูนย์

$|a_{2,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor = 5$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$|a_{3,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$|a_{4,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$|a_{1,1}|$ มากกว่า $|a_{4,1}|$ และ $a_{4,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{1,1}}{a_{4,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_4 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -7 & -1 & -14 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สลับแถว 1 กับแถว 4 เนื่องจาก $a_{1,1}$ มีค่าเป็น 0

$$R_1 \leftrightarrow R_4 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -14 & 4 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

ขั้นที่ 3 ทำซ้ำขั้นที่2 ในแนวตั้งถัดไป

$|a_{2,2}|$ เท่ากับ $|a_{4,2}|$ และ $a_{4,2} < 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lceil \frac{a_{2,2}}{a_{4,2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{-7}{-7} \right\rceil = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -14 & 9 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

ทำในคอลัมน์ที่ 3

$|a_{4,3}|$ มากกว่า $|a_{3,3}|$ และ $a_{3,3} < 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lceil \frac{a_{4,3}}{a_{3,3}} \right\rceil = \left\lceil \frac{21}{-11} \right\rceil = -1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_4 \leftarrow R_4 - (-1)R_3 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 19 & 6 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$|a_{3,3}|$ มากกว่า $|a_{4,3}|$ และ $a_{4,3} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,3}}{a_{4,3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-11}{10} \right\rfloor = -2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - (-2)R_4 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -31 & 9 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 10 & -15 & 6 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$|a_{4,3}|$ มากกว่า $|a_{3,3}|$ และ $a_{3,3}>0$

จะได้จำนวนเต็ม $m=\left\lfloor\frac{a_{3,3}}{a_{4,3}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{9}{1}\right\rfloor=9$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_4 \leftarrow R_4 - R_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -31 & 9 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$|a_{3,3}|$ มากกว่า $|a_{4,3}|$ และ $a_{4,3}>0$

จะได้จำนวนเต็ม $m=\left\lfloor\frac{a_{4,3}}{a_{3,3}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{10}{9}\right\rfloor=1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - 9R_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -175 & 36 & -11 & 21 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

สลับแถว 3 กับแถว 4 เนื่องจาก $a_{3,3}$ มีค่าเป็น 0

$R_3 \leftrightarrow R_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -22 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -175 & 36 & -11 & 21 & -33 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow -R_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 22 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -175 & 36 & -11 & 21 & -33 \end{array}\right]$$

$R_4 \leftarrow -\frac{1}{175}R_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 22 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{175} & \frac{11}{175} & -\frac{3}{25} & \frac{33}{175} \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(backward)

$$R_3 \leftarrow R_3 - 16R_4 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 22 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{51}{175} & \frac{-1}{175} & \frac{-2}{25} & \frac{-3}{175} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{175} & \frac{11}{175} & -\frac{3}{25} & \frac{33}{175} \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 5R_4 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & \frac{1}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{3}{5} & \frac{2}{35} \\ 0 & 7 & 22 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{51}{175} & \frac{-1}{175} & \frac{-2}{25} & \frac{-3}{175} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{175} & \frac{11}{175} & -\frac{3}{25} & \frac{33}{175} \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - (22)R_3 \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & \frac{1}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{3}{5} & \frac{2}{35} \\ 0 & 7 & 0 & 0 & \frac{-247}{175} & \frac{-153}{175} & \frac{44}{25} & \frac{66}{175} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{51}{175} & \frac{-1}{175} & \frac{-2}{25} & \frac{-3}{175} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{175} & \frac{11}{175} & -\frac{3}{25} & \frac{33}{175} \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & -\frac{97}{175} & -\frac{53}{175} & \frac{19}{25} & \frac{16}{175} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{247}{175} & -\frac{153}{175} & \frac{44}{25} & \frac{66}{175} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{51}{175} & -\frac{1}{175} & -\frac{14}{175} & -\frac{3}{175} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{175} & \frac{11}{175} & -\frac{21}{175} & \frac{33}{175} \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{62}{1225} & \frac{88}{1225} & \frac{7}{1225} & -\frac{86}{1225} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{247}{1225} & -\frac{153}{1225} & \frac{308}{1225} & \frac{66}{1225} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{51}{175} & -\frac{1}{175} & -\frac{14}{175} & -\frac{3}{175} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{175} & \frac{11}{175} & -\frac{21}{175} & \frac{33}{175} \end{array}\right]$$

จะได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{62}{1225} & \frac{88}{1225} & \frac{7}{1225} & -\frac{86}{1225} \\ -\frac{247}{1225} & -\frac{153}{1225} & \frac{308}{1225} & \frac{66}{1225} \\ \frac{51}{175} & -\frac{1}{175} & -\frac{14}{175} & -\frac{3}{175} \\ -\frac{36}{175} & \frac{11}{175} & -\frac{21}{175} & \frac{33}{175} \end{bmatrix}$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.4 การหาค่าลำดับชั้น

ทำได้โดย ดำเนินการตามแถวโดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่ทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน แล้วจะได้จำนวนแถวที่สมาชิกไม่เป็นศูนย์ทั้งหมดเป็นค่าลำดับชั้น

ตัวอย่าง 3.5.4 จงหาค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 10 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เมทริกซ์มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น เริ่มขั้นที่ 2 ต่อไป

ขั้นที่ 2 พิจารณาสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1

สำหรับ $a_{1,1}$ และ $a_{2,1}$ ที่ไม่เป็นศูนย์

$|a_{2,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & -12 & -17 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$|a_{1,1}|$ มากกว่า $|a_{2,1}|$ และ $a_{2,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{1,1}}{a_{2,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 41 & 59 \\ 1 & -12 & -17 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

สลับแถว 1 กับแถว 2 เนื่องจาก $a_{1,1}$ มีค่าเป็น 0

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 41 & 59 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,1}|$ มากกว่า $|a_{1,1}|$ และ $a_{1,1} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor = 2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 41 & 59 \\ 0 & 26 & 38 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 ทำซ้ำขั้นที่ 2 ในแนวตั้งถัดไป

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{41}{26} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 15 & 21 \\ 0 & 26 & 38 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{26}{15} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 15 & 21 \\ 0 & 11 & 17 \end{bmatrix}$$

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{15}{11} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 11 & 17 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$|a_{2,2}|$ มากกว่า $|a_{3,2}|$ และ $a_{3,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{2,2}}{a_{3,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$|a_{3,2}|$ มากกว่า $|a_{2,2}|$ และ $a_{2,2} > 0$

จะได้จำนวนเต็ม $m = \left\lfloor \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$

แล้วทำการดำเนินการตามแนวนอน

$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -12 & -17 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ค่าลำดับชั้นเท่ากับ 3 #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
การพัฒนาโปรแกรม

4.1 เครื่องมือที่ใช้พัฒนา

การพัฒนาโปรแกรมตามขั้นตอนวิธีการดำเนินการที่กล่าวในบทที่ 3 เพื่อให้ได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน สำหรับใช้งานบนแท็บเล็ตรุ่น Lenovo A7-30 A3300

4.2 ส่วนประกอบของจอภาพ

ในหัวข้อนี้จะอธิบายรายละเอียดของตัวโปรแกรมที่ผู้จัดทำได้พัฒนาขึ้น จะอธิบายรายละเอียด
การเข้าใช้งาน หน้าต่างทุกหน้าต่างที่เกิดขึ้น และหน้าจอแสดงผลต่างๆ ดังต่อไปนี้

4.2.1 หน้าแรก

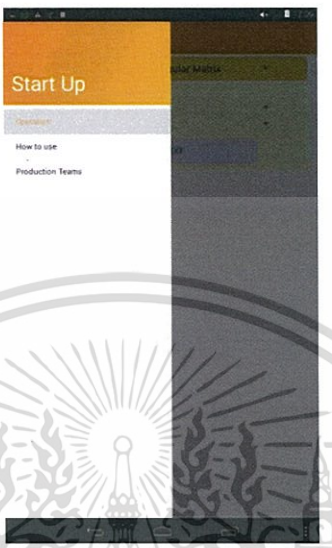
เมื่อเข้าสู่โปรแกรม จะแสดงดังรูป 4.1 ซึ่งประกอบไปด้วยชื่อของโปรแกรม คือ Row Operation
on Integer คณะผู้จัดทำ และมีปุ่ม Next เพื่อเข้าสู่หน้าต่างถัดไป

รูปที่ 4.1 หน้าแรก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2 หน้าต่าง Start Up

เมื่อกดปุ่ม มุมบนซ้ายแสดงดังรูป 4.3 ซึ่งประกอบไปด้วย Operation, How to use และ Production team



รูปที่ 4.2 หน้าต่าง Start Up

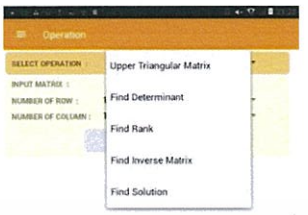
4.2.3 หน้าต่าง Operation

ในหน้าต่างประกอบไปด้วย 3 ส่วนคือ 1) ส่วน Slide Menu 2) ส่วนเลือกดำเนินการต่างๆ 3) ส่วนรับข้อมูลที่จะดำเนินการ มีการรับค่าจำนวนแถว (Row) และ จำนวนหลัก (Column) และมีปุ่ม Next

รูปที่ 4.3 หน้าต่างแรกของการดำเนินการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับส่วนเลือกดำเนินการต่างๆ เมื่อกด ▼ จะมีแถบให้เลือกการดำเนินการ ประกอบด้วย Upper Triangular Matrix (เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน) Find Determinant (ตัวกำหนด) Find Rank (ค่าลำดับชั้น) Find Inverse Matrix (เมทริกซ์ผกผัน) Find Solution (การหาผลเฉลย)



รูปที่ 4.4 หน้าต่างแสดงการเลือก Operation

4.2.4 ส่วนรับข้อมูล

ในการทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน การหาค่าตัวกำหนด การหาค่าลำดับชั้น และการหาเมทริกซ์ผกผัน จะมีการรับค่าจำนวนแถว (Row) จำนวนหลัก(Column) และสมาชิกของเมทริกซ์เริ่มต้นส่วนการหาผลเฉลยจะมีการรับค่าสมาชิกของเมทริกซ์ค่าคงตัวด้วย

รูปที่ 4.5 ก) แสดงส่วนรับข้อมูลของเมทริกซ์สัมประสิทธ์ ข) แสดงส่วนรับข้อมูลของเมทริกซ์ค่าคงตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

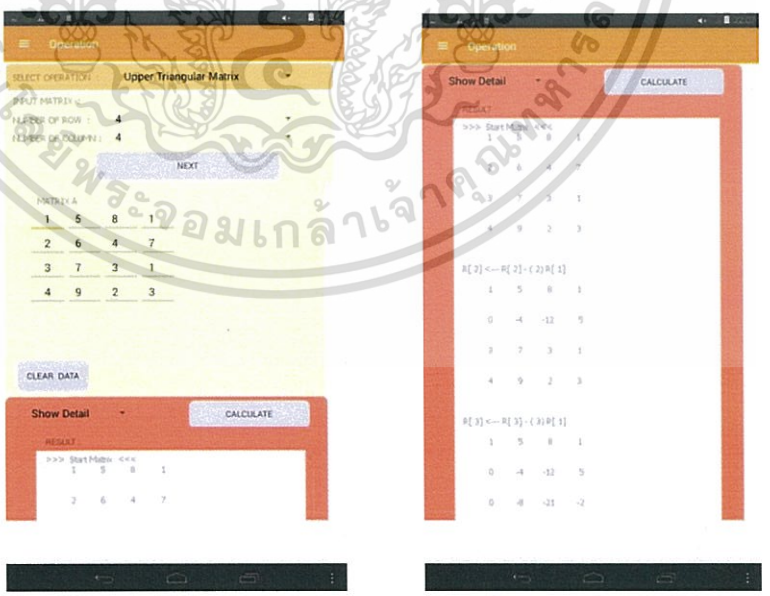
4.2.5 ส่วนแสดงผลลัพธ์

ประกอบไปด้วย ปุ่มเลือกแสดงเฉพาะผลลัพธ์ (Show Result) หรือแสดงขั้นตอนดำเนินการ (Show Details) ปุ่มเริ่มคำนวณ (Calculate) ปุ่มเคลียร์ข้อมูล (Clear data)

1) แสดงเฉพาะผลสรุป (Show Result)

รูปที่ 4.6 แสดงส่วนแสดงเฉพาะผลสรุป

2) แสดงขั้นตอนดำเนินการ (Show Details)



รูปที่ 4.7 แสดงขั้นตอนของการดำเนินการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) เคลียร์ข้อมูล (Clear data) เป็นการเตรียมกล่องรับข้อมูลให้ว่าง

รูปที่ 4.8 ก) ก่อนกดปุ่ม Clear Data ของการดำเนินการ ข) หลังกดปุ่ม Clear Data ของการดำเนินการ

4.3 ผลลัพธ์ของการดำเนินการ

เมื่อมีการรับค่าในส่วนรับข้อมูลมาแล้วโปรแกรมจะจำค่าที่ได้รับมาไว้ ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนการดำเนินการเป็นการดำเนินการอื่นโดยไม่ต้องเปลี่ยนค่าสมาชิกในเมทริกซ์ และแสดงผลลัพธ์ได้ดังนี้

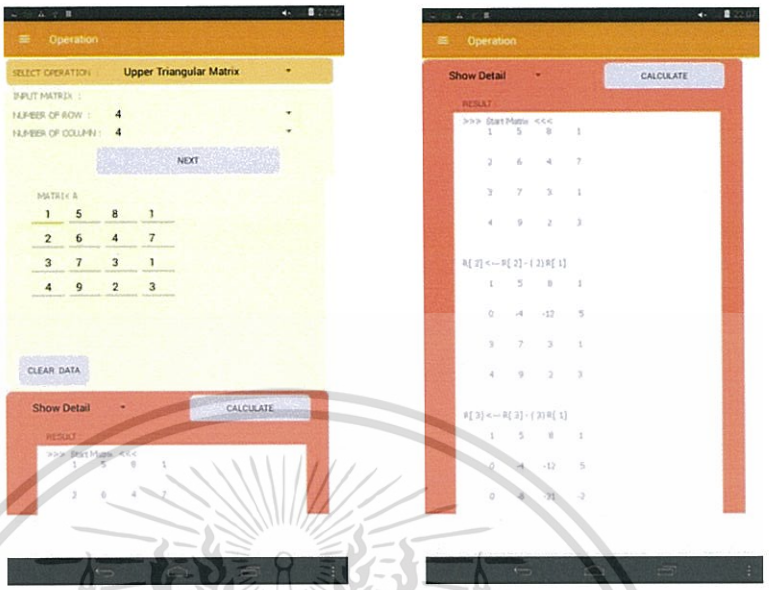
4.3.1 การทำเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix)

1) แสดงเฉพาะผลสรุป (Show Result)

รูปที่ 4.9 แสดงเฉพาะผลสรุปของการทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

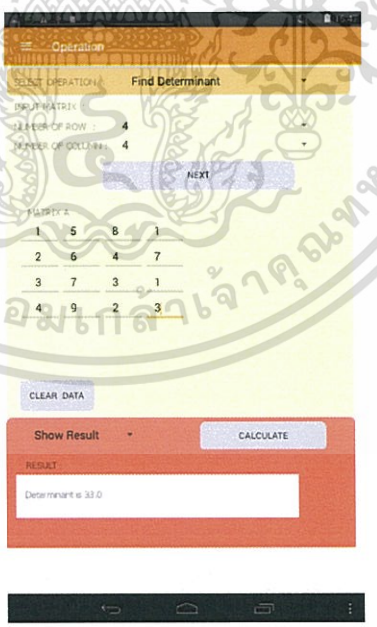
2) แสดงขั้นตอนดำเนินการ (Show Details)



รูปที่ 4.10 แสดงขั้นตอนของการทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

4.3.2 การหาค่าตัวกำหนด (Find Determinant)

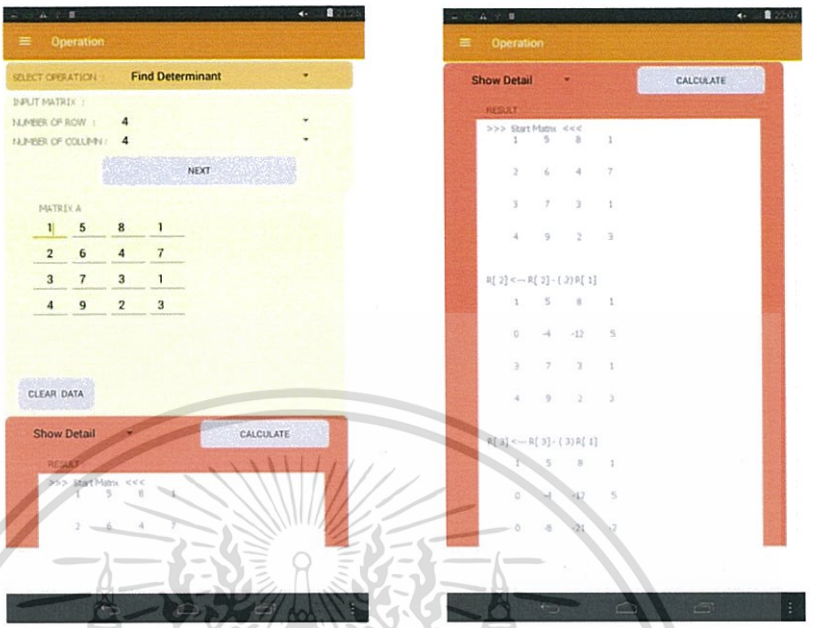
1) แสดงเฉพาะผลสรุป (Show Result)



รูปที่ 4.11 แสดงส่วนแสดงผลสรุปของค่าตัวกำหนด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

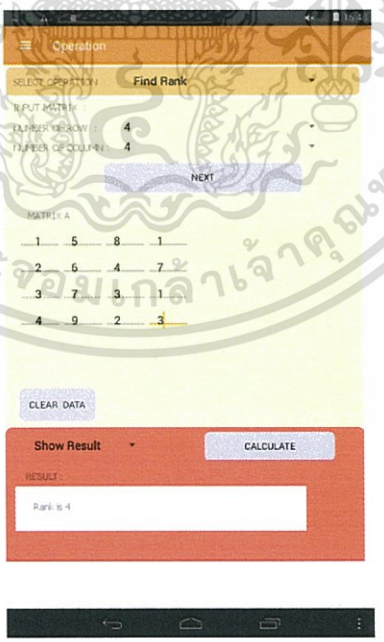
2) แสดงขั้นตอนดำเนินการ (Show Details)



รูปที่ 4.12 แสดงขั้นตอนของการหาค่าตัวกำหนด

4.3.3 การหาค่าลำดับชั้น (Find Rank)

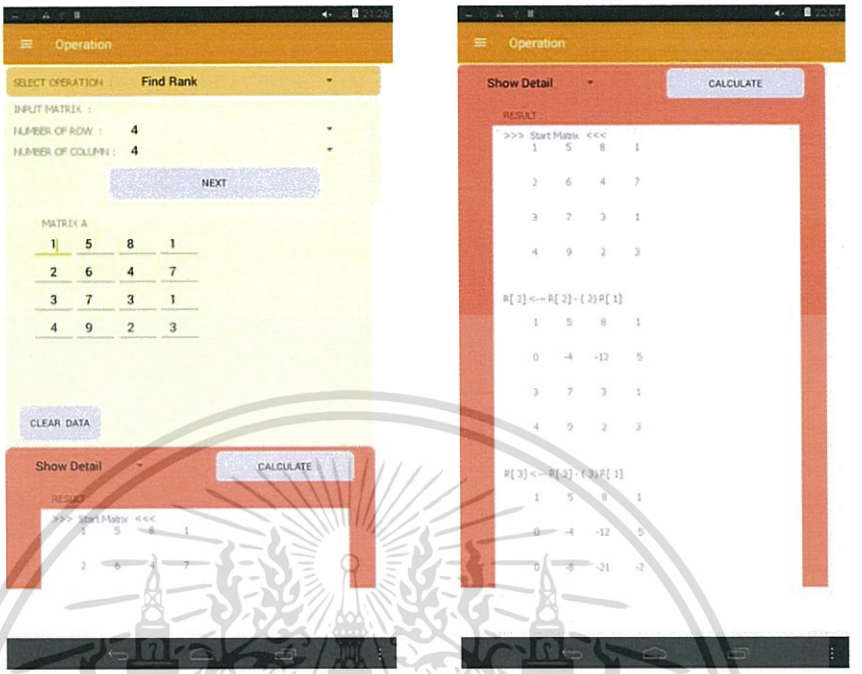
1) แสดงเฉพาะผลสรุป (Show Result)



รูปที่ 4.13 แสดงส่วนแสดงผลสรุปของค่าลำดับชั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

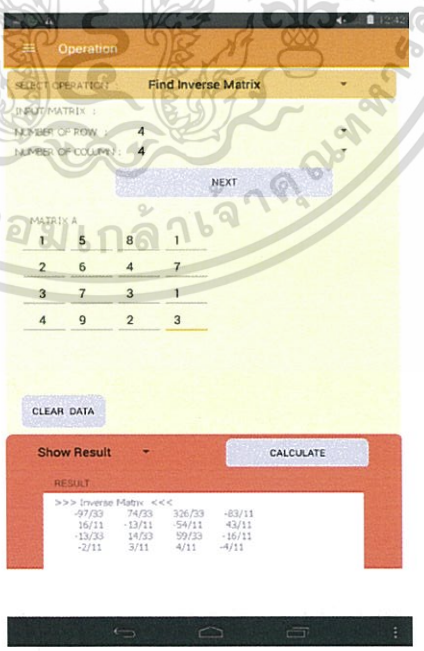
2) แสดงขั้นตอนดำเนินการ (Show Details)



รูปที่ 4.14 แสดงขั้นตอนของการหาค่าลำดับชั้น

4.3.4 การหาเมทริกซ์ผกผัน (Find Inverse Matrix)

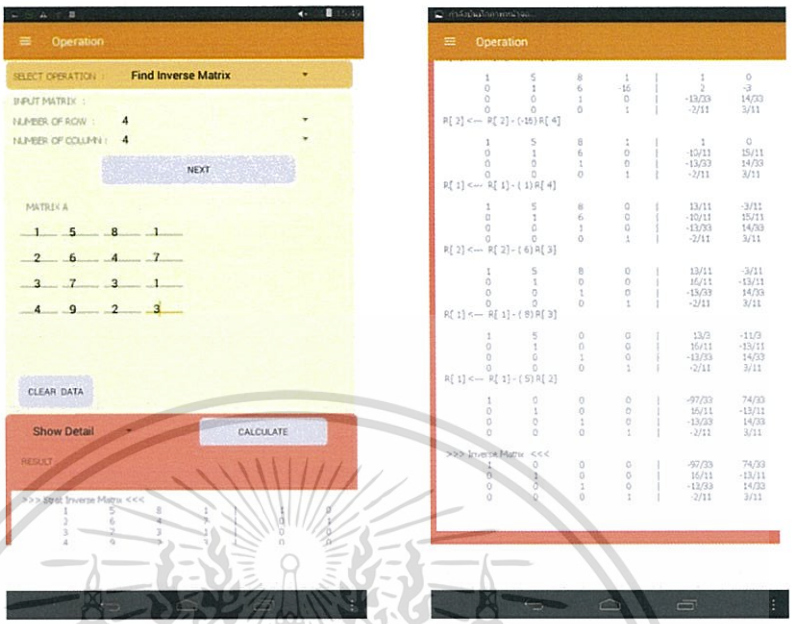
1) แสดงเฉพาะผลสรุป (Show Result)



รูปที่ 4.15 แสดงส่วนแสดงผลสรุปของเมทริกซ์ผกผัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

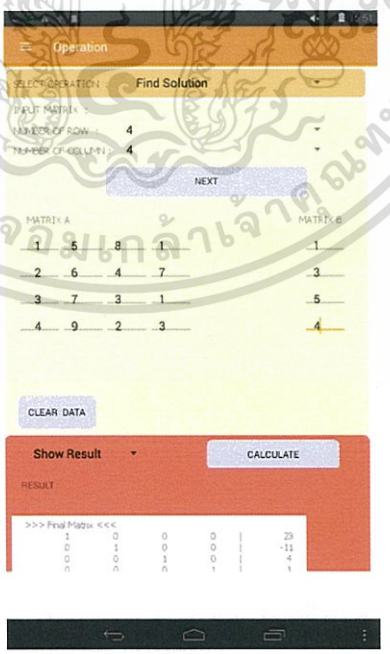
2) แสดงขั้นตอนดำเนินการ (Show Details)



รูปที่ 4.16 แสดงขั้นตอนของการหาเมทริกซ์ผกผัน

4.3.5 การหาผลเฉลย (Find Solution)

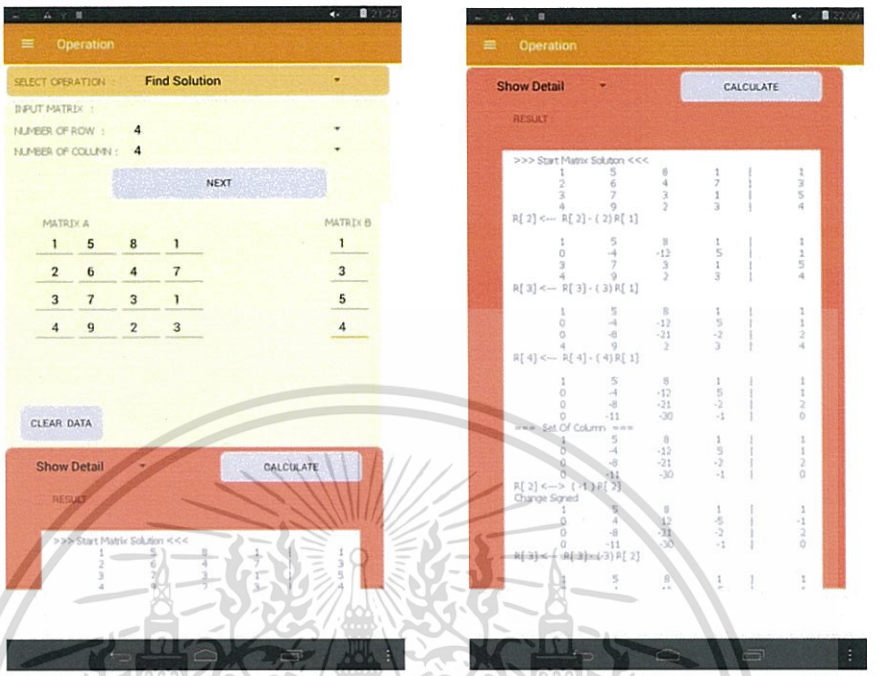
1) แสดงเฉพาะผลสรุป (Show Result)



รูปที่ 4.17 แสดงส่วนแสดงผลสรุปของการหาผลเฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) แสดงขั้นตอนดำเนินการ (Show Details)



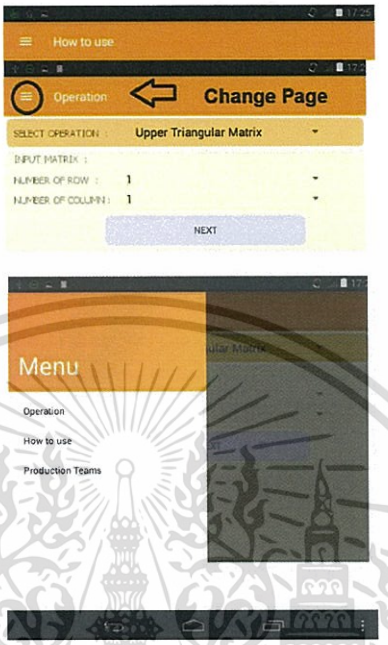
รูปที่ 4.18 แสดงขั้นตอนของการหาผลเฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4 หน้าต่าง How to use

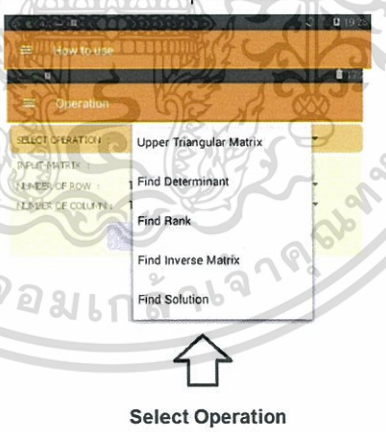
หน้าต่าง How to use เป็นส่วนที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำผู้ใช้ในการใช้แอพลิเคชั่นนี้

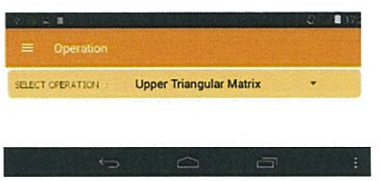
1) เมื่อต้องการเปลี่ยนหน้าต่างใช้งานให้ผู้ใช้กดที่ปุ่มที่วงกลมไว้ ดังภาพ



รูปที่ 4.19 แสดงวิธีเปลี่ยนหน้าต่าง

2) เมื่อต้องการเปลี่ยนการดำเนินการ ให้คลิกที่ Select Operation

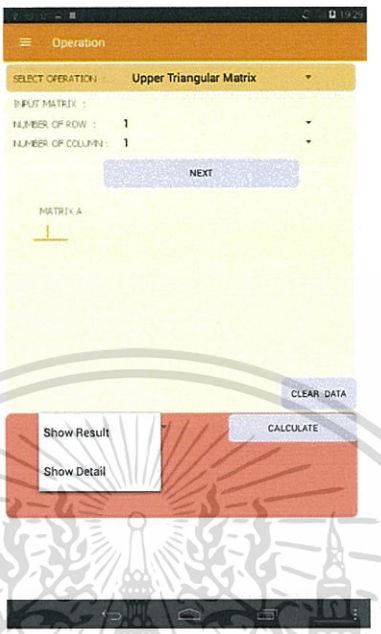




รูปที่ 4.20 แสดงวิธีเลือก Operation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) เมื่อเลือกการดำเนินการแล้ว ให้ใส่ตัวเลขเป็นจำนวนเต็มใน Matrix A หลังจากนั้นเลือกการแสดงผลลัพธ์แล้วกด Calculate



รูปที่ 4.21 แสดงวิธีการเลือกดูผลลัพธ์

4) จะได้ผลสุดท้าย ดังภาพ 4.22

รูปที่ 4.22 แสดงผลลัพธ์ที่เลือก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5 Production team

รูปที่ 4.23 แสดงผู้พัฒนา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

เมทริกซ์ใดๆ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม สามารถดำเนินการให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มได้เสมอ และหาค่าตัวกำหนด และค่าลำดับชั้นได้

ในการหาเมทริกซ์ผกผัน และผลเฉลยจะมีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นเศษส่วนในขั้นตอนการทำย้อนกลับให้เป็นขั้นบันไดลดรูป (Row Reduce Echelon Form)

1) ความสามารถของโปรแกรม

- การคำนวณของโปรแกรมประกอบด้วย การดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน การหาผลเฉลย การหาค่าตัวกำหนด การหาเมทริกซ์ผกผัน และการหาค่าลำดับชั้น
- แสดงขั้นตอนวิธีการในการดำเนินการตามแนวนอน
- สามารถใช้งานบน Tablet ขนาด 7.0 นิ้ว บนระบบปฏิบัติการแอนดรอยด์

2) การทดลองใช้โปรแกรม

จากการให้นักศึกษาภาควิชาคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 2-4 จำนวน 10 คนทดลองใช้โปรแกรม ได้ผลลัพธ์ออกมาดังนี้

ตารางที่ 5.1 แสดงค่าเฉลี่ยนักศึกษาที่ทดลองใช้โปรแกรม

	คะแนนเฉลี่ย (คะแนนเต็ม 5)
1. โปรแกรมใช้ง่าย	4.0
2. ผลลัพธ์ที่ได้เข้าใจง่าย	4.2
3. ขนาดของเมทริกซ์มีความเหมาะสม	4.4
4. ได้คำตอบตรงตามที่ต้องการ	4.9

3) นำเสนอในงานวิชาการ

- ผู้พัฒนาได้นำโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเสนอในที่ประชุมวิชาการระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ (UAMC) ครั้งที่6 ในวันที่ 29 เมษายน พ.ศ.2560 ในหัวข้อเรื่อง ขั้นตอนวิธีใหม่ดำเนินการตามแนวนอนให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนโดยสมาชิกยังคงเป็นจำนวนเต็ม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 ข้อจำกัด

1.โปรแกรมนี้สามารถใช้โดยใช้ตัวเลขไม่เกิน 4 Digit และ เมทริกซ์ขนาดไม่เกิน 6x6

2.โปรแกรมนี้สามารถใช้ได้กับแท็บเล็ตที่มีขนาดหน้าจอ 7 นิ้ว

3.สามารถใช้ได้เฉพาะระบบปฏิบัติการแอนดรอยด์

5.3 ข้อเสนอแนะ

ควรพัฒนาแอพลิเคชั่นให้สามารถใช้งานได้กับหน้าจอแท็บเล็ตขนาดเล็กหรือสมาร์ทโฟนที่พกพาได้สะดวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ และ พัชรินทร์ เหมโชติ. **ทฤษฎีจำนวน** 1. พิมพ์ครั้งที่ 3.กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง,2556

[2] ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ และ พัชรินทร์ เหมโชติ. **พีชคณิตเชิงเส้น** 1. พิมพ์ครั้งที่ 6.กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง,2555

[3] AXIOMS FOR THE INTEGERS. [Online]. Available: https://www.math.ucdavis.edu/~osserman/classes/115A-F14/notes/A-axioms.pdf. เข้าถึงเมื่อวันที่ 15 พ.ค. 60.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก
ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรมสำหรับใช้งาน Android Studio

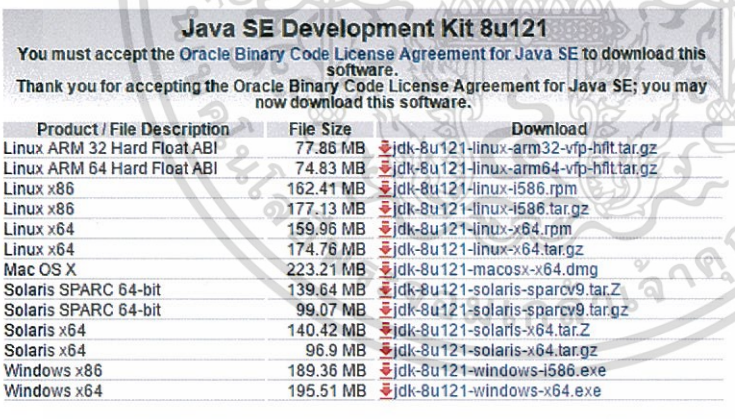
ขั้นตอนการติดตั้ง JDK

ดาวน์โหลด JDK ได้จาก

http://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/index-jsp-138363.html

1. เลือก Java SE Downloads

รูปที่ ก1.1 ปุ่ม download Java SE



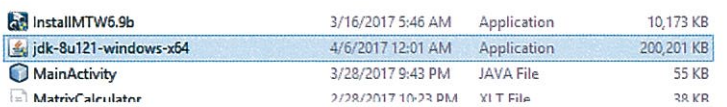
Java SE Development Kit 8u121

You must accept the Oracle Binary Code License Agreement for Java SE to download this software.
Thank you for accepting the Oracle Binary Code License Agreement for Java SE; you may now download this software.

Product / File Description	File Size	Download
Linux ARM 32 Hard Float ABI	77.86 MB	jdk-8u121-linux-arm32-vfp-hflt.tar.gz
Linux ARM 64 Hard Float ABI	74.83 MB	jdk-8u121-linux-arm64-vfp-hflt.tar.gz
Linux x86	162.41 MB	jdk-8u121-linux-i586.rpm
Linux x86	177.13 MB	jdk-8u121-linux-i586.tar.gz
Linux x64	159.96 MB	jdk-8u121-linux-x64.rpm
Linux x64	174.76 MB	jdk-8u121-linux-x64.tar.gz
Mac OS X	223.21 MB	jdk-8u121-macosx-x64.dmg
Solaris SPARC 64-bit	139.64 MB	jdk-8u121-solaris-sparcv9.tar.Z
Solaris SPARC 64-bit	99.07 MB	jdk-8u121-solaris-sparcv9.tar.gz
Solaris x64	140.42 MB	jdk-8u121-solaris-x64.tar.Z
Solaris x64	96.9 MB	jdk-8u121-solaris-x64.tar.gz
Windows x86	189.36 MB	jdk-8u121-windows-i586.exe
Windows x64	195.51 MB	jdk-8u121-windows-x64.exe

2. กด Accept แล้วเลือกรุ่นคอมพิวเตอร์ จากนั้นดาวน์โหลด

รูปที่ ก1.2 เลือก download ตามรุ่นของอุปกรณ์ที่ใช้

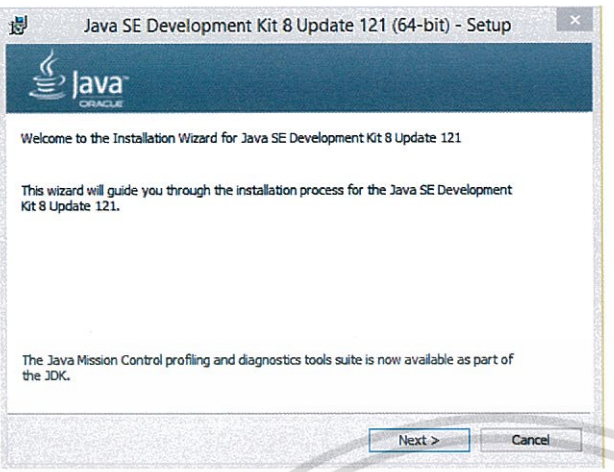


InstallMTW6.9b	3/16/2017 5:46 AM	Application	10,173 KB
jdk-8u121-windows-x64	4/6/2017 12:01 AM	Application	200,201 KB
MainActivity	3/28/2017 9:43 PM	JAVA File	55 KB
MatrixCalculator	2/28/2017 10:23 PM	XLT File	38 KB

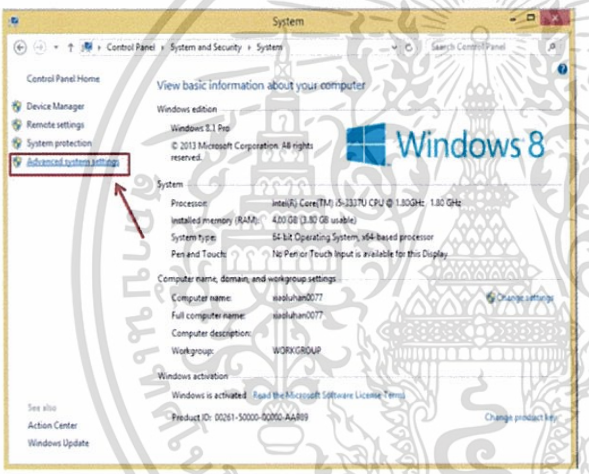
3. ดับเบิลคลิกไฟล์ที่ดาวน์โหลดแล้ว Next ไปเรื่อยๆ จนจบ

รูปที่ ก1.3 แสดงรูป file JDK ที่ download เสร็จแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



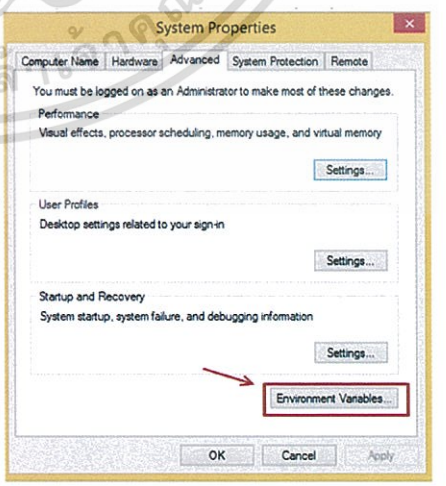
รูปที่ ก1.4 หน้าต่างแรกของการติดตั้ง JDK



รูปที่ ก1.5 การกำหนด path ให้กับ JDK

4. กำหนด path ให้กับ JDK เพื่อเราจะติดตั้ง Andriod Studio ต่อไป ให้ไปที่ Control Panel > System and Security > Advanced system settings

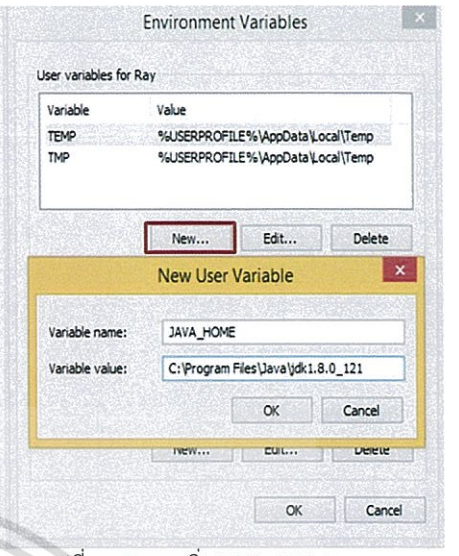
5. เลือก Environment Variables



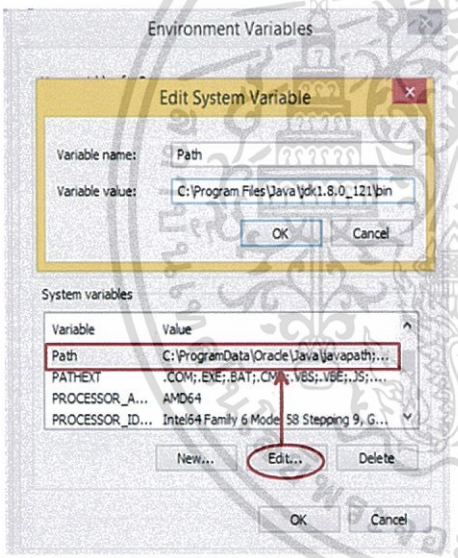
รูปที่ ก1.6 เลือก EnvironmentVariables

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. เมื่อปรากฏหน้าจอ Environment Variables ให้ดูในส่วนของรายการ System variables เลือก Variable Path แล้วกดปุ่ม Edit... หากไม่มี Variable Path ให้สร้างขึ้นใหม่ โดยกดปุ่ม New... จากนั้นในช่อง Variable value ให้เพิ่ม Path ที่ทำการ Install JDK ไว้



รูปที่ ก1.7 การเพิ่มJAVA_HOME



รูปที่ ก1.8 การแก้ไข path

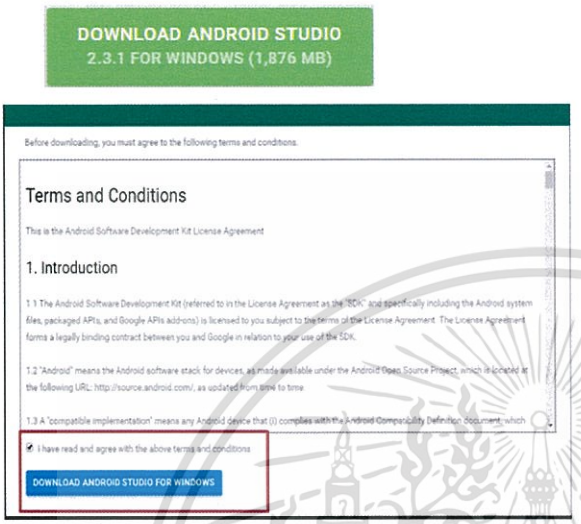
6. ในส่วนของ User variables เลือก Variable JAVA_HOME แล้วกดปุ่ม Edit... หากไม่มี Variable JAVA_HOME ให้สร้างขึ้นใหม่โดยกดปุ่ม New... จากนั้นในช่อง Variable value ให้เพิ่ม Path ที่ทำการ Install JDK ไว้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนการติดตั้ง Andriod Studio

ดาวน์โหลด Andriod Studio ได้จาก

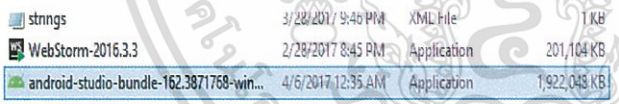
https://developer.android.com/studio/index.html



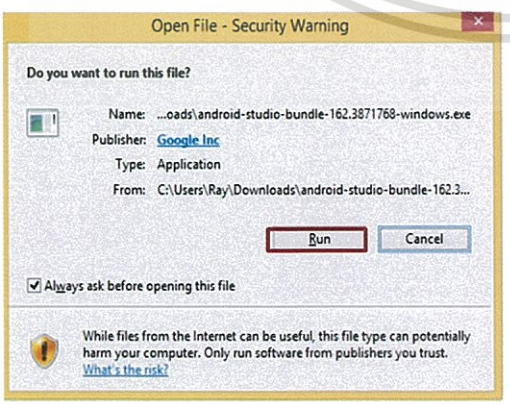
1. คลิกที่ปุ่ม Download > I have read and agree with the above terms and conditions > Download android studio for windows

รูปที่ ก2.1 ปุ่ม Download Andriod Studio

2. ดับเบิลคลิกไฟล์ที่ดาวน์โหลดไว้แล้วกดปุ่ม Run



รูปที่ ก2.2 แสดงรูป file Andriod Studio ที่ download เสร็จแล้ว

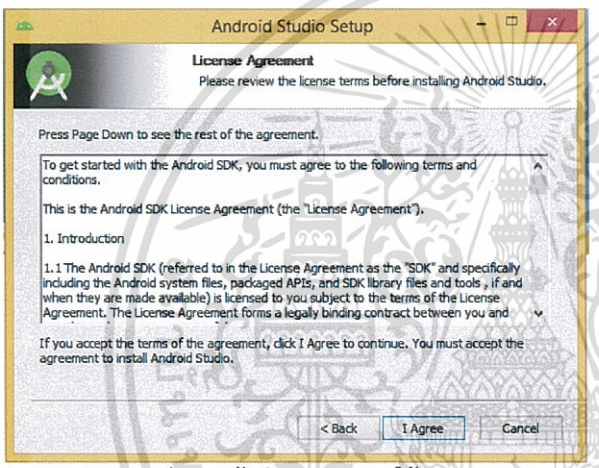


รูปที่ ก2.3 เริ่มการติดตั้ง Andriod Studio

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

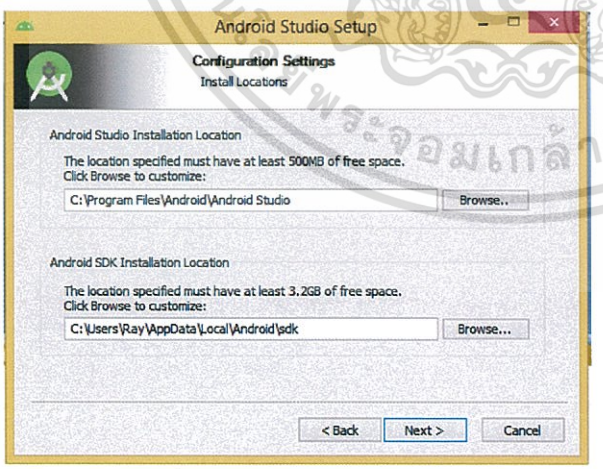
3. คลิกที่ปุ่ม Next

รูปที่ ก2.4 หน้าต่างแรกของการติดตั้ง Andriod Studio



4. คลิกที่ปุ่ม I agree

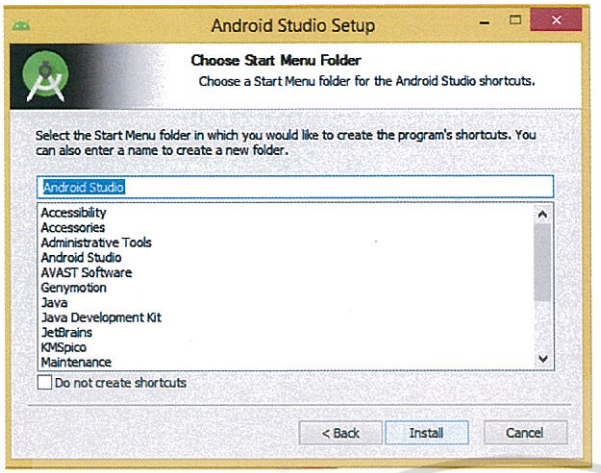
รูปที่ ก2.5 ข้อกำหนดของการใช้งาน



5. ตั้งค่าที่อยู่ของไฟล์ Andriod Studio

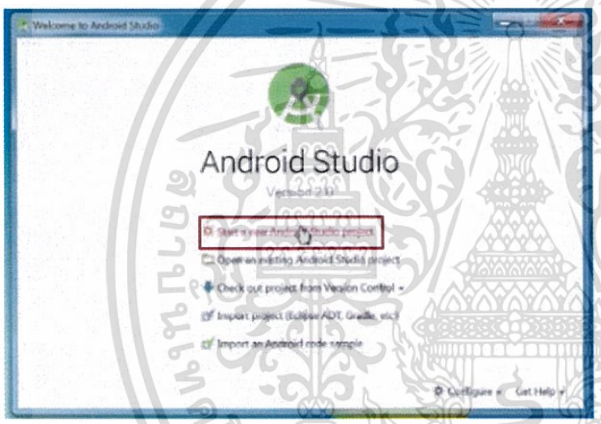
รูปที่ ก2.6 ตั้งค่าที่อยู่ของไฟล์ Andriod Studio

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



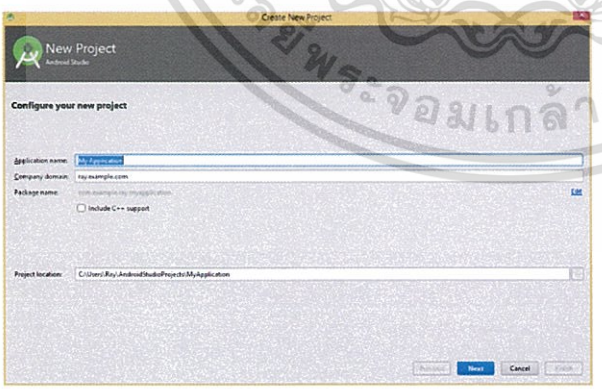
6. กด Install

รูปที่ ก2.7 ติดตั้ง Andriod Studio



7. การเริ่มสร้างโปรเจค

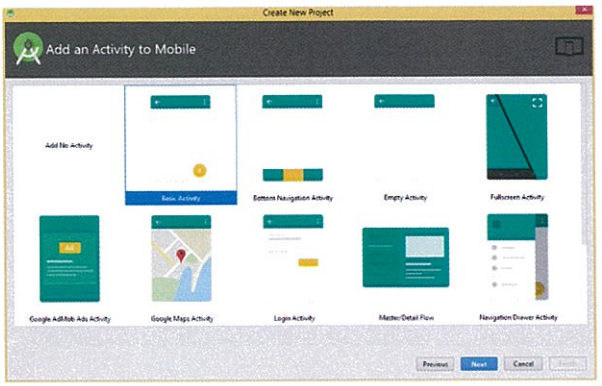
รูปที่ ก2.8 เริ่มต้นใช้งาน Andriod Studio



8. ตั้งชื่อโปรเจคแล้วกด Next ไปเรื่อยๆ

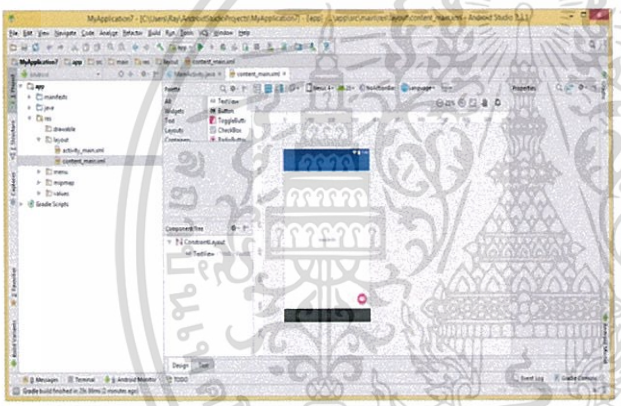
รูปที่ ก2.9 การสร้างโปรเจค

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ก2.10 เลือกรูปแบบ App ที่จะสร้าง

9. เลือก Basic Activity แล้วกด Next จากนั้นกด Finish



รูปที่ ก2.11 หน้า XML เริ่มต้น

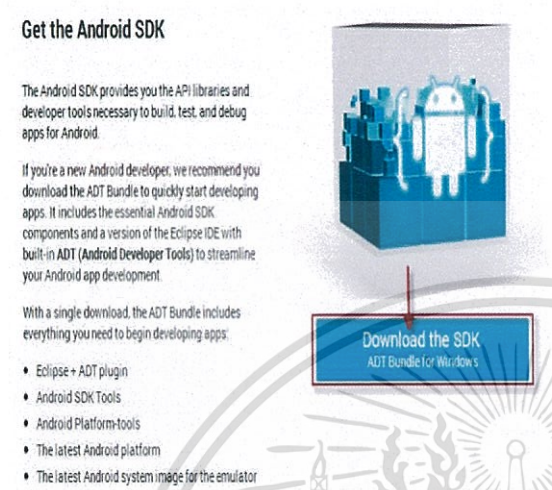
10. ได้หน้าจอที่ใช้สำหรับสร้างโปรเจค

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนการติดตั้ง SDK

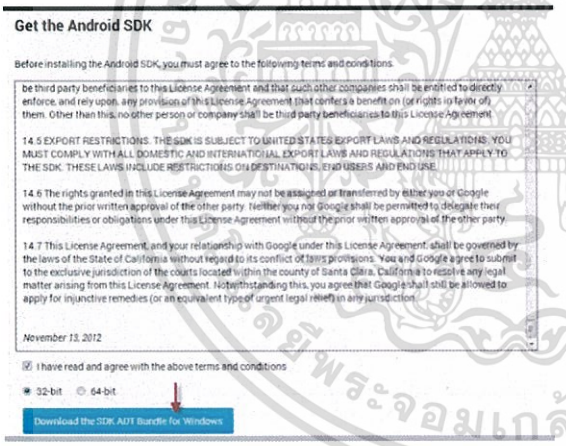
Download : Android SDK ได้จาก

http://developer.android.com/sdk/index.html



รูปที่ ก3.1 ปุ่มดาวน์โหลด SDK

1. เมื่อเข้าไปแล้วจะพบปุ่มสำหรับกดเพื่อ Download Android SDK ดังรูป จากนั้นกดปุ่ม Download the SDK ADT Buddle for Windows



รูปที่ ก3.2 เลือก download ตามรุ่นของอุปกรณ์ที่ใช้

2. ต่อมาเลือกรุ่น 32-bit หรือ 64-bit ที่ต้องการ กดปุ่ม Download the SDK ADT Buddle for Windows อีกครั้ง

รูปที่ ก3.3 แสดงรูป file SDK ที่ download เสร็จแล้ว

3. จะทำการ Download Android SDK เข้ามาเก็บภายในเครื่องของเรา ในรูปแบบ Zip File โดยถ้าเป็นรุ่น 32-bit จะมีชื่อตามรูปด้านล่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ ก3.4 Extract File ไปไว้ที่ยังตำแหน่งที่ต้องการเก็บ Android SDK

4. ต่อมาให้ทำการ Extract File ไปไว้ที่ยังตำแหน่งที่ต้องการเก็บ Android SDK เพื่อใช้เขียนโปรแกรมบนมือถือ Androidโดยภายใน Zip File จะประกอบไปด้วย Eclipse , SDK, SDK Manager ดังรูป

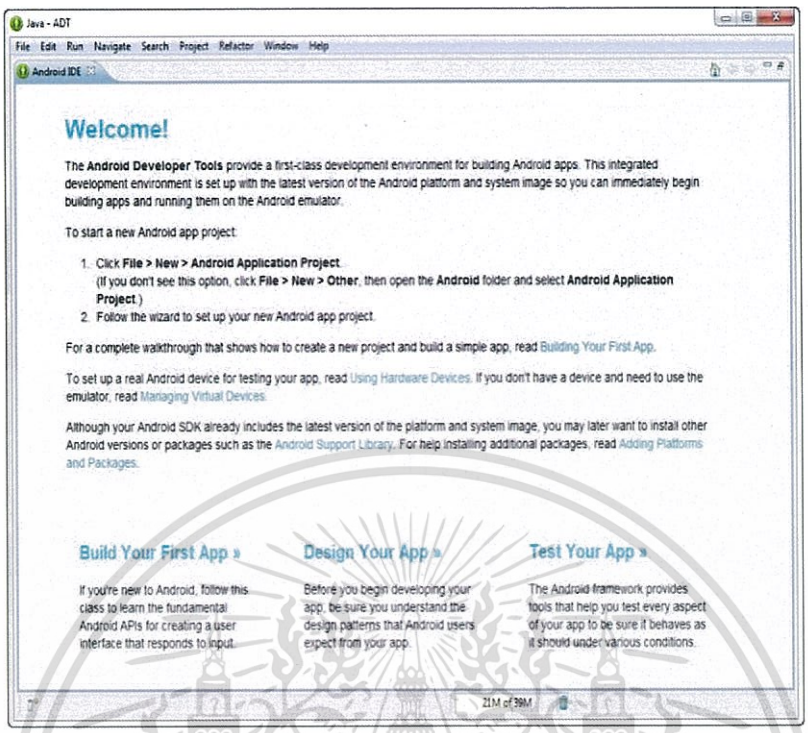
รูปที่ ก3.5 แสดงตัวติดตั้ง eclipse

5. เข้า Folder : eclipse ต่อมาดับเบิ้ลคลิ๊กที่ eclipse.exe ดังรูป

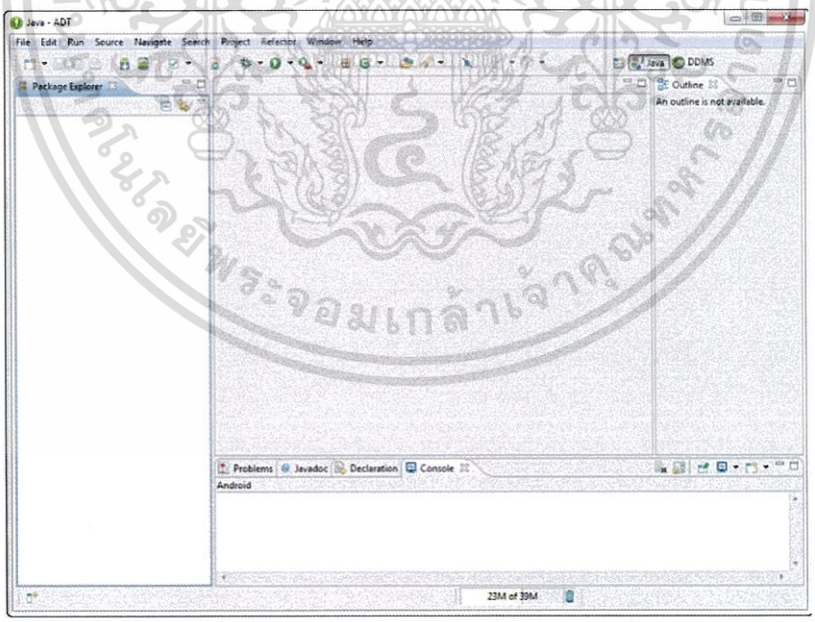
รูปที่ ก3.6 เลือกที่ติดตั้ง file

6. เลือก Workspace เก็บ Project สำหรับพัฒนาโปรแกรมบนมือถือ Android กด OK จะเข้าสู่หน้าจอสำหรับพัฒนาโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ก3.7 วิธีการใช้งานโปรแกรม

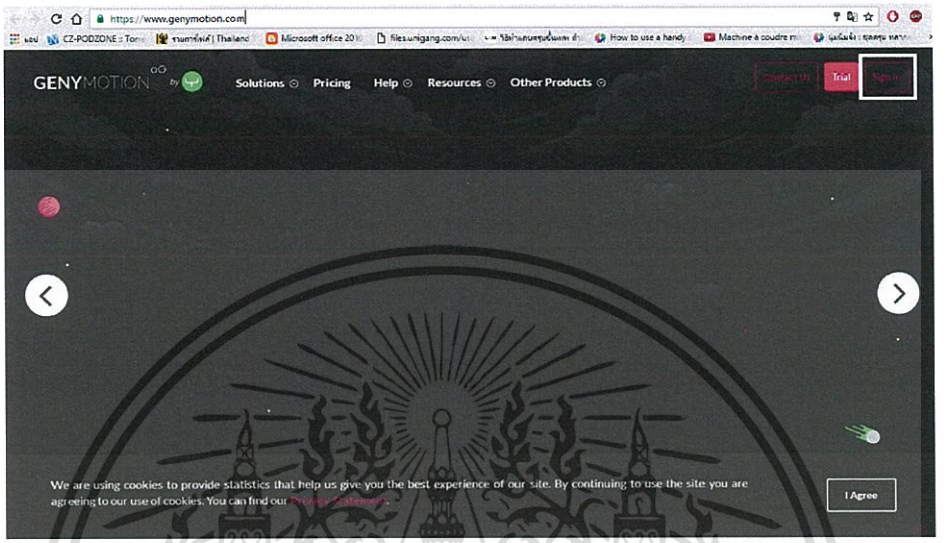


รูปที่ ก3.8 หน้าแรกของ App

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

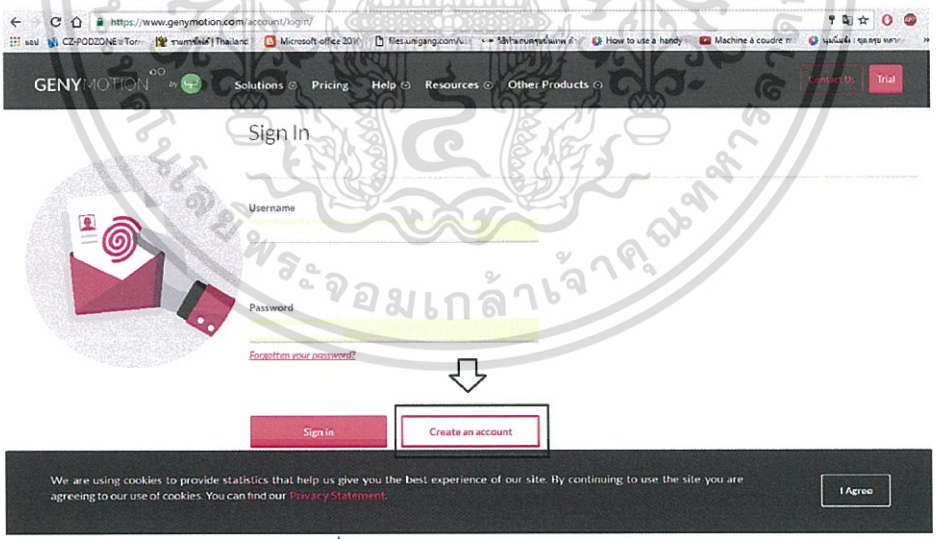
ขั้นตอนการติดตั้ง Genymotion

1. ไปที่ https://www.genymotion.com เลือก sign in



รูปที่ ก4.1 หน้าแรกของเว็บไซต์ที่ใช้ download Genymotion

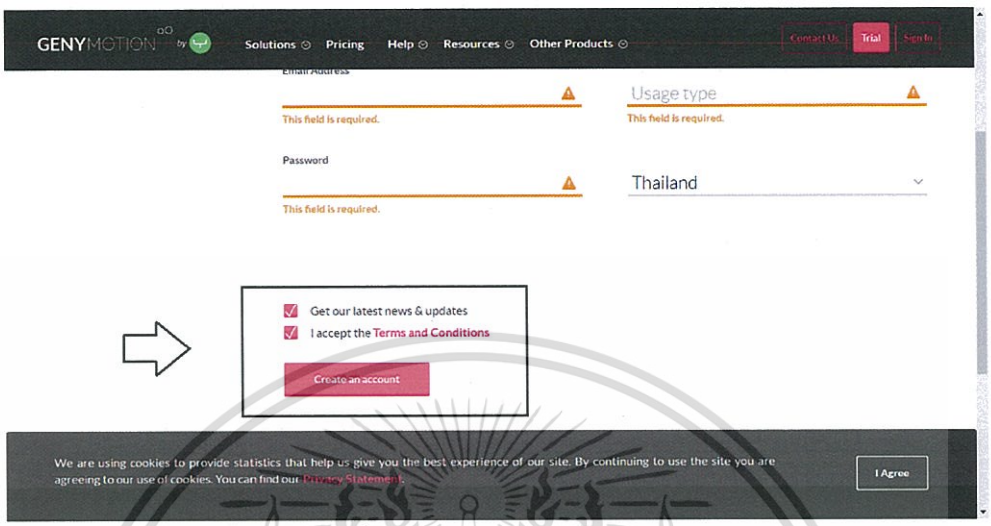
2. เลือก Create an account



รูปที่ ก4.2 การลงทะเบียนกับเว็บไซต์

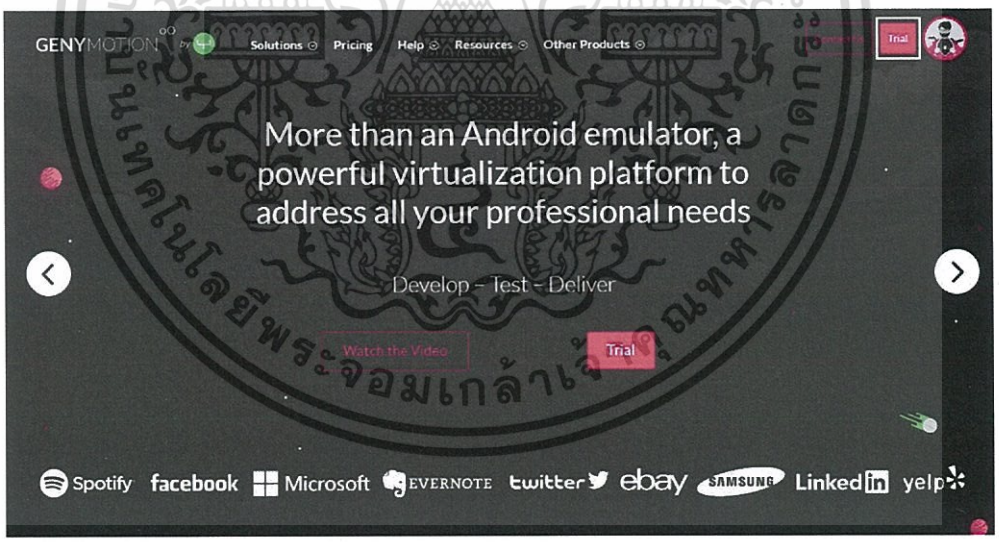
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. กรอกข้อมูลให้ครบทุกช่อง แล้วกด Create an account



รูปที่ ก4.3 หน้ากรอกข้อมูลที่ใช้ลงทะเบียน

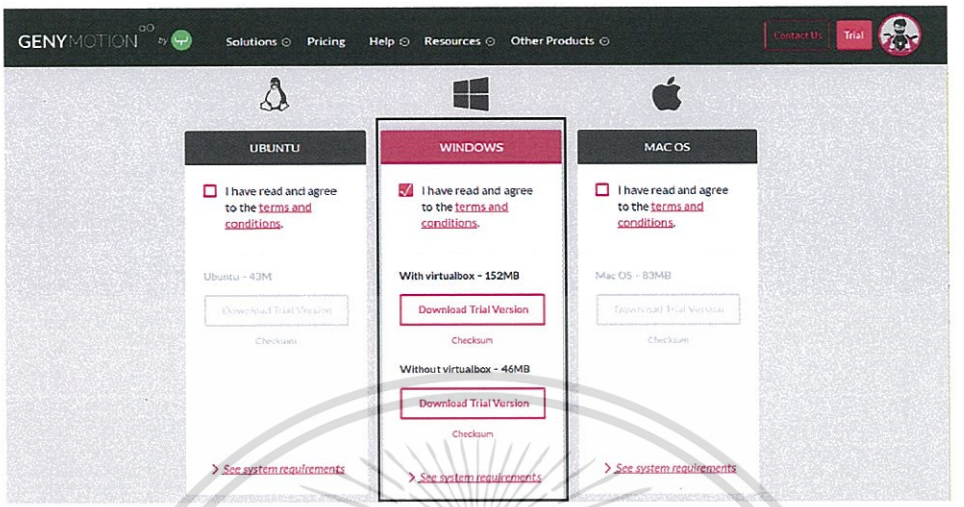
4. Login เข้าสู่ระบบ เลือก Trial



รูปที่ ก4.4 หน้าเว็บหลังจากเข้าสู่ระบบ

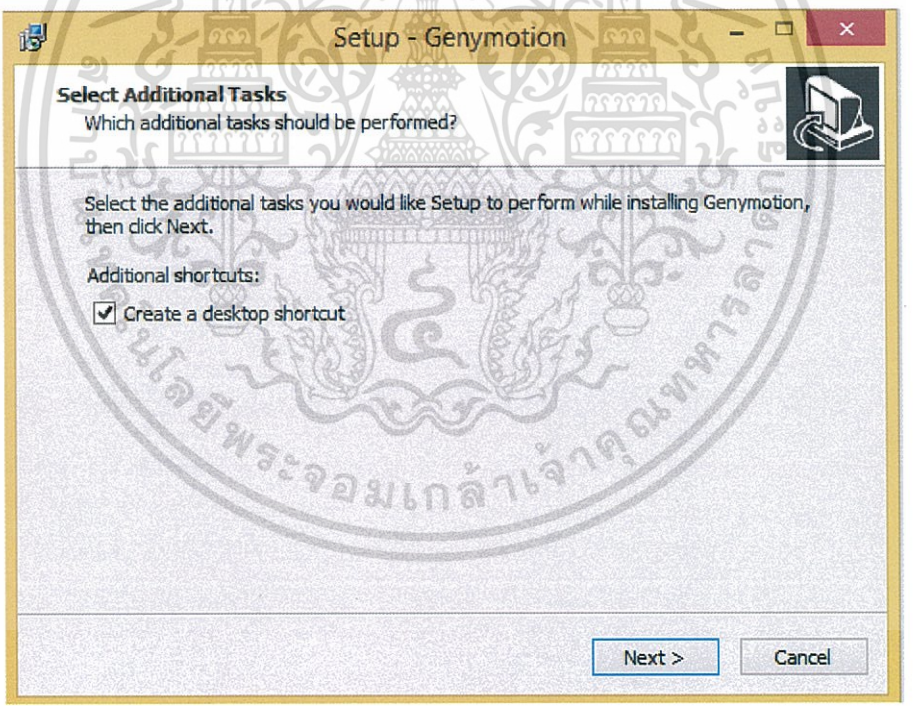
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. เลือก I have read and.... จากนั้นกดดาวน์โหลด



รูปที่ ก4.5 เลือก Download ตามอุปกรณ์ที่ใช้

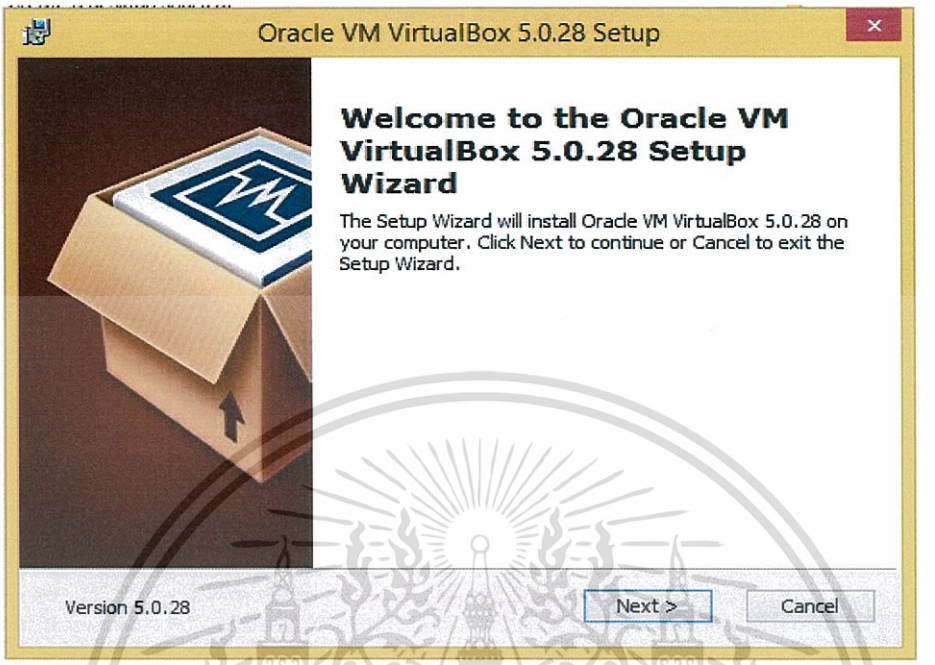
6. กด Next จากนั้น กด Install



รูปที่ ก4.6 หน้าติดตั้งโปรแกรม

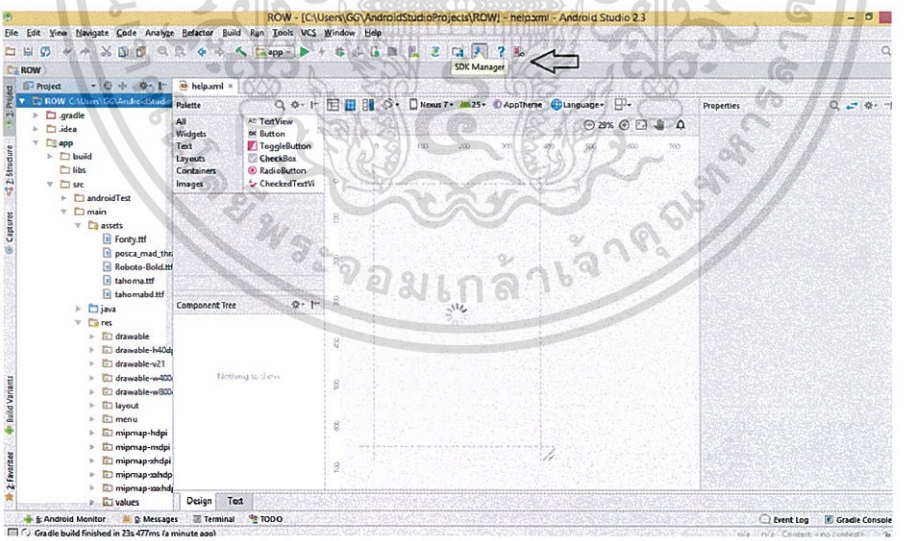
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7. หลังจากติดตั้งเสร็จจะขึ้นหน้าจอดังรูป กด Next ต่อไปเรื่อยๆ และ Install



รูปที่ ก4.7 หน้าแรกของการติดตั้ง Visual Box

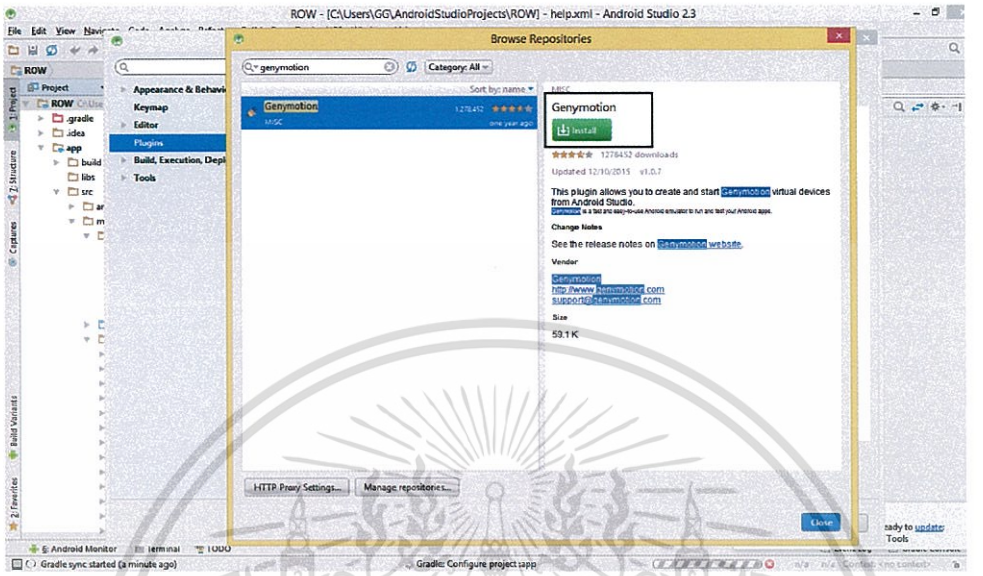
8. หลังจากติดตั้งเสร็จให้ไปที่ Android Studio เลือก SDK Manager



รูปที่ ก4.8 หน้าแรกของการ Plug in

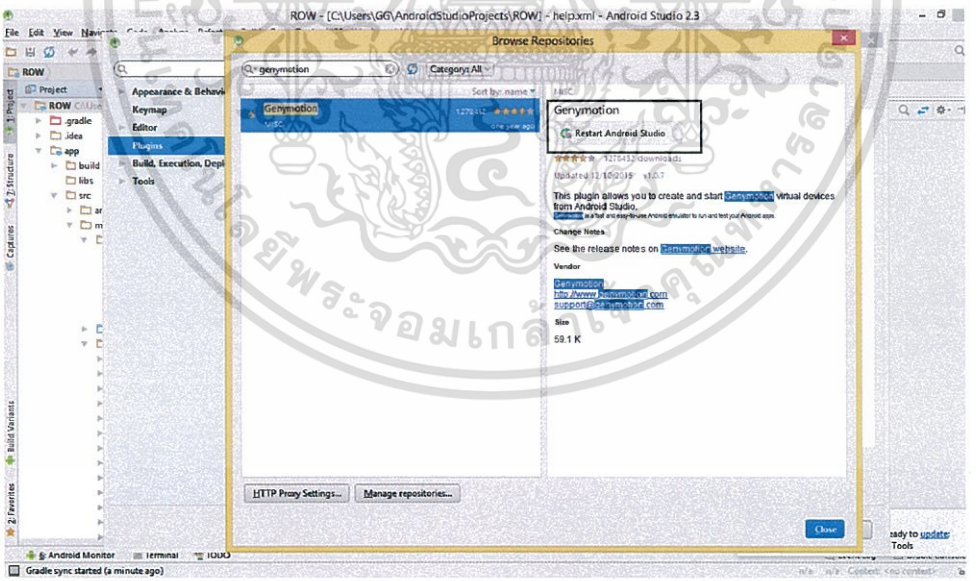
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

9. เลือก Plugins ค้นหา Genymotion จากนั้น Install



รูปที่ ก4.9 ติดตั้ง Genymotion ลงใน SDK

10. หลังจาก install เสร็จ ให้ restart Android studio 1 รอบ

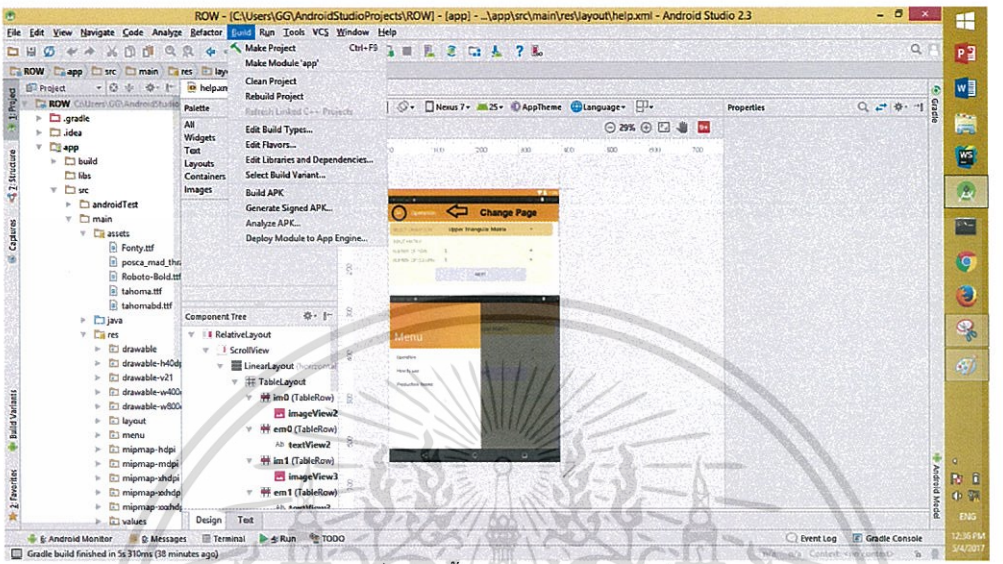


รูปที่ ก4.10 หลังจากติดตั้ง Genymorion เสร็จ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

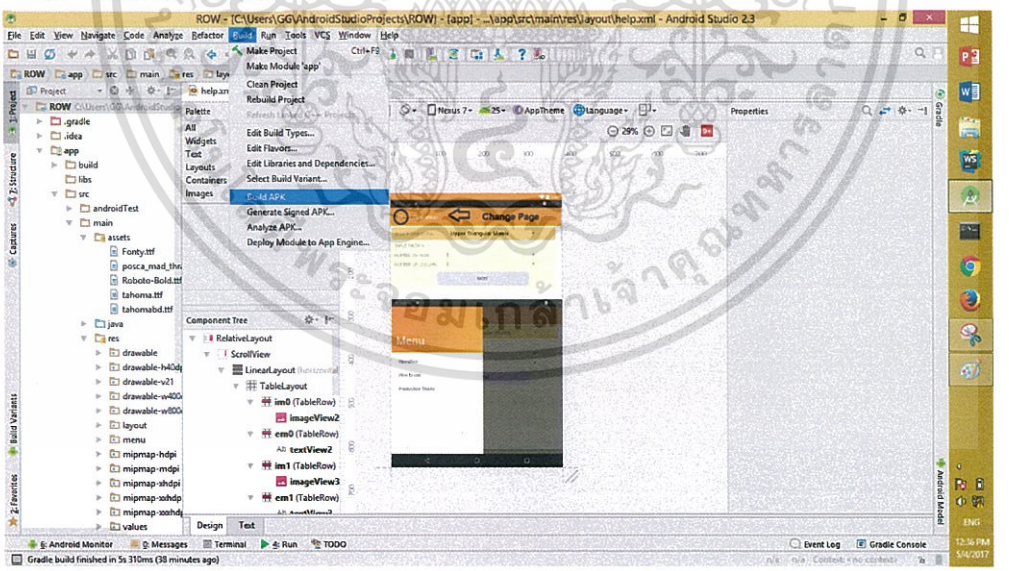
การสร้างไฟล์ APK เพื่อทำไปลงบนอุปกรณ์ Android

1. ไปที่ Build



รูปที่ ก5.1 ขั้นตอนแรกของการสร้างไฟล์ APK

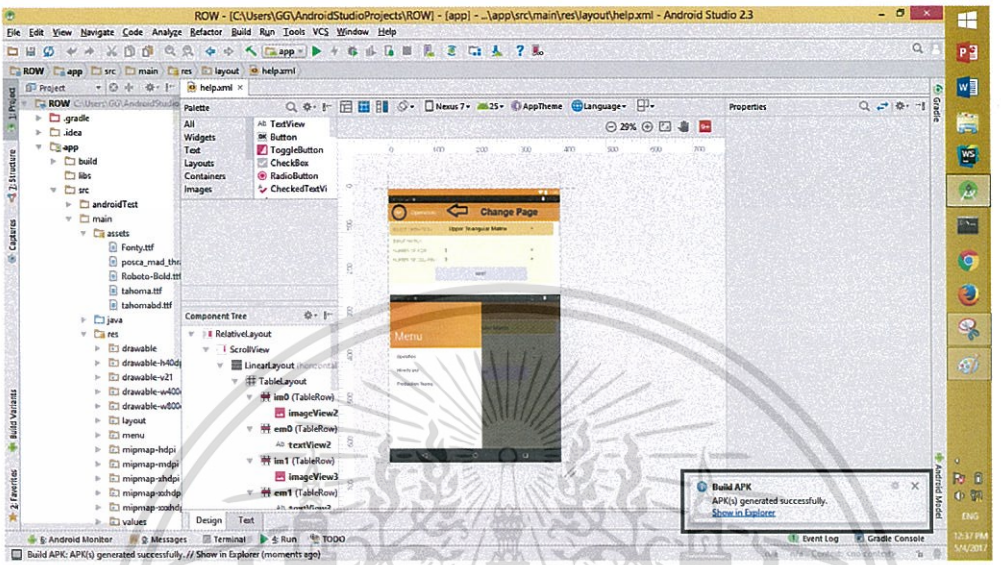
2. เลือก Build APK



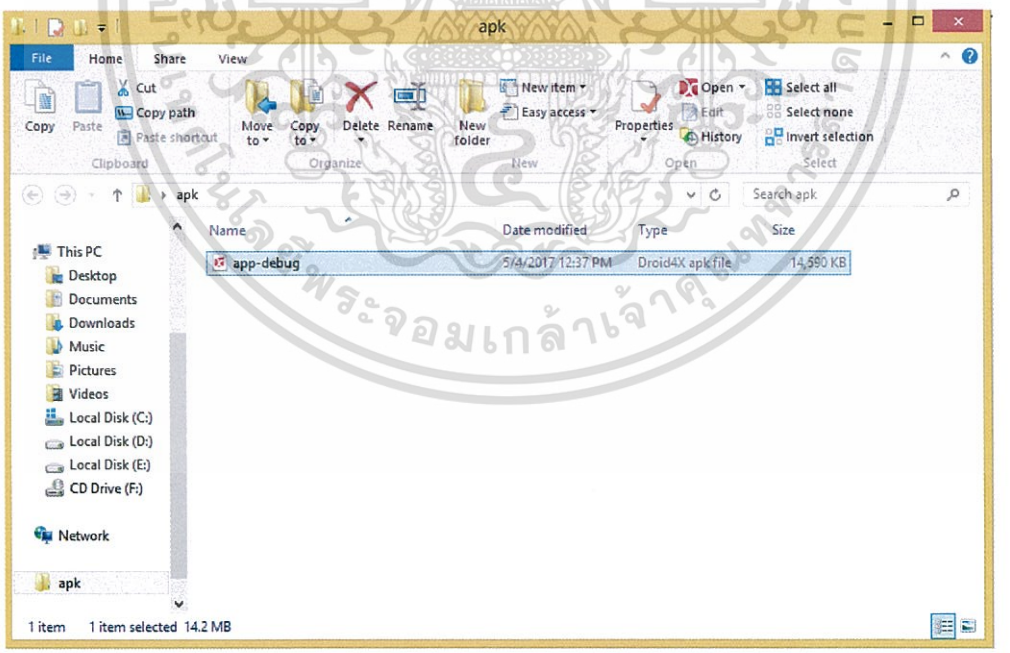
รูปที่ ก5.2 เลือก Build APK

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. หลังจาก Build APK เสร็จแล้วจะปรากฏข้อความดังภาพคลิกที่ Show in Explorer จะปรากฏไฟล์ APK ดังภาพ ก5.3 นำไฟล์ดังกล่าวไปลงที่อุปกรณ์ Android



รูปที่ ก5.3 หลังจาก Build APK เสร็จ



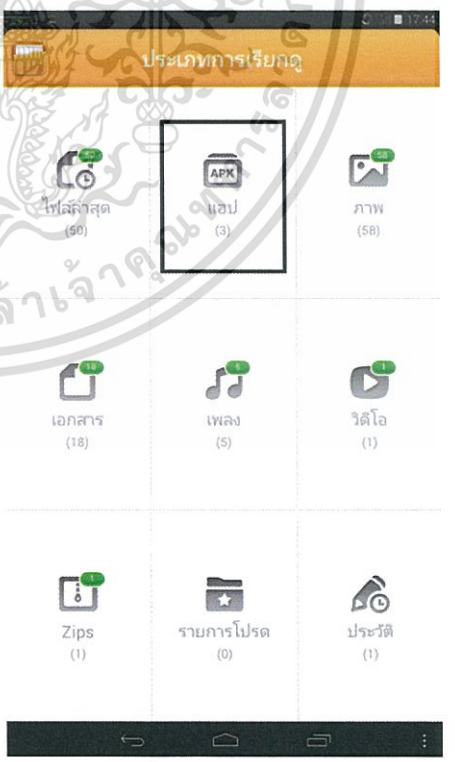
รูปที่ ก5.4 ไฟล์ SDK ที่สร้างเสร็จแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. ที่อุปกรณ์ Android ไปที่ เรียกดูไฟล์

รูปที่ ก5.5 เรียกดูไฟล์

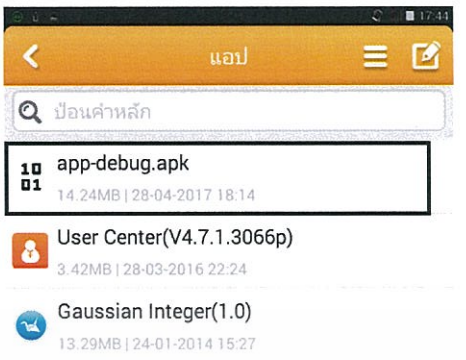
5. เลือก APK



รูปที่ ก5.6 เลือก APK

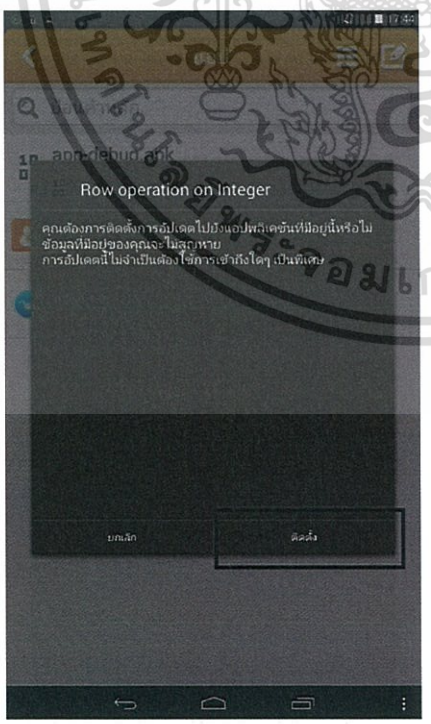
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. เลือกไฟล์ APK ที่นำมาลง



รูปที่ ก5.7 เลือกไฟล์ APK ที่ต้องการติดตั้ง

7. เลือกติดตั้ง



รูปที่ ก5.8 ติดตั้ง APK

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. หลังจากติดตั้งเสร็จแล้วจะได้ดังภาพ

รูปที่ ก5.9 หลังจากติดตั้งเสร็จ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข
ขั้นตอนวิธีสำหรับการดำเนินการต่างๆ

1. Row Operation (การดำเนินการตามแนวนอน)

```
cl=0;
for( i=0;  i<Nrow-1 ;   i++){
    if (cl==Ncol) break;
         iw=Nrow-1;
        while (iw>i ){
            if (matA[iw][cl]!=0) {
                for(int k=cl; k<Ncol; k++){
                    tmp         = matA[i][k];
                    matA[i][k] = matA[iw][k];
                    matA[iw][k]= tmp;
                }
                break;
            }
            iw--;
        }
        if  (iw==i) {
            cl=cl+1;
            if (cl<Ncol)   continue;
            else           break;
        }
    }
    for(int j=i+1; j<Nrow;   j++) {
        if (matA[j][cl]==0) {
        continue;
        }
            while (matA[i][cl]!=0 && matA[j][cl]!=0) {
            if  (Math.abs(matA[i][cl])> Math.abs(matA[j][cl])){
                tmp = matA[i][cl]/ matA[j][cl];
                if(tmp>0){
                    if(matA[j][cl]>0){
                    }else if(matA[j][cl]<0){
                            tmp=tmp-1;
                    }
                }else{
                    if(matA[j][cl]>0){
                            tmp=tmp-1;
                    }else if(matA[j][cl]<0){

                    }
                }

                for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                   matA[i][k]=matA[i][k]- tmp*matA[j][k];

            }
             else{
                tmp = matA[j][cl]/ matA[i][cl];
                if(tmp>0){
                    if(matA[i][cl]>0){
                    }else if(matA[i][cl]<0){
                            tmp=tmp-1;
                    }
                }else{
                    if(matA[i][cl]>0){
                            tmp=tmp-1;
                    }else if(matA[i][cl]<0){
                    }
            }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
                    for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                        matA[j][k]=matA[j][k]- tmp*matA[i][k];
                    }
                }
            if (matA[i][cl]==0  && matA[j][cl]!=0 ) {
                for(int k=cl; k<Ncol; k++){
                        tmp    =  matA[i][k];
                    matA[i][k] =  matA[j][k];
                    matA[j][k] =  tmp;
                }
            }
        }
    cl=cl+1;
}
```


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. การหาค่า Determinant (ตัวกำหนด)

```
cl=0;
for( i=0;  i<Nrow-1 ;   i++){
    if (cl==Ncol) break;
    if (matA[i][cl]==0) {
        iw=Nrow-1;
        while (iw>i ){
            if (matA[iw][cl]!=0) {
                for(int k=cl; k<Ncol; k++){
                    tmp        = matA[i][k];
                    matA[i][k] = matA[iw][k];
                    matA[iw][k]= tmp;
                }
                determinant= -1*determinant;
                break;
            }
            iw--;
        }
        if  (iw==i) {
            cl=cl+1;
        }
            determinant= g*determinant;
        for(int j=i+1; j<Nrow;   j++) {
        if (matA[j][cl]==0) {
            continue;
        }
        while (matA[i][cl]!=0 && matA[j][cl]!=0) {
            if  (Math.abs(matA[i][cl])> Math.abs(matA[j][cl])){
              tmp = matA[i][cl]/ matA[j][cl];
             if(tmp>0){
               if(matA[j][cl]>0){
               }else if(matA[j][cl]<0){
                        tmp=tmp-1;
               }
             }else{
               if(matA[j][cl]>0){
                        tmp=tmp-1;
               }else if(matA[j][cl]<0){

               }
             }
             for(int k=cl; k< Ncol; k++)
              matA[i][k]=matA[i][k]- tmp*matA[j][k];
          }
           else{
             tmp = matA[j][cl]/ matA[i][cl];
             if(tmp>0){
               if(matA[i][cl]>0){
               }else if(matA[i][cl]<0){
                        tmp=tmp-1;
               }
             }else{
               if(matA[i][cl]>0){
                        tmp=tmp-1;
               }else if(matA[i][cl]<0){
               }
          }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
                for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                    matA[j][k]=matA[j][k]- tmp*matA[i][k];
            }
        }
        if (matA[i][cl]==0  && matA[j][cl]!=0 ) {
                for(int k=cl; k<Ncol; k++){
                        tmp        =  matA[i][k];
                        matA[i][k] =  matA[j][k];
                        matA[j][k] =  tmp;
                }
                determinant= -1*determinant;
        }
    }
    cl=cl+1;
}
for (i=0; i<Nrow ; i++ )
    determinant= determinant * matA[i][i];
```


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. การหาค่า Rank (ค่าลำดับชั้น)

```
cl=0;
for( i=0;  i<Nrow-1 ;   i++){
    if (cl==Ncol) break;
    if (matA[i][cl]==0) {
        iw=Nrow-1;
        while (iw>i ){
            if (matA[iw][cl]!=0) {
                for(int k=cl; k<Ncol; k++){
                    tmp        = matA[i][k];
                    matA[i][k] = matA[iw][k];
                    matA[iw][k]= tmp;
                }
                break;
            }
            iw--;
        }
        if  (iw==i) {
            cl=cl+1;
        }
        for(int j=i+1; j<Nrow;   j++) {
        if (matA[j][cl]==0) {
           continue;
        }
        while (matA[i][cl]!=0 && matA[j][cl]!=0) {
              if  (Math.abs(matA[i][cl])> Math.abs(matA[j][cl])){
                tmp = matA[i][cl]/ matA[j][cl];
               if(tmp>0){
                 if(matA[j][cl]>0){
                 }else if(matA[j][cl]<0){
                          tmp=tmp-1;
                 }
               }else{
                 if(matA[j][cl]>0){
                          tmp=tmp-1;
                 }else if(matA[j][cl]<0){

                 }
               }
               for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                 matA[i][k]=matA[i][k]- tmp*matA[j][k];
             }
              else{
                tmp = matA[j][cl]/ matA[i][cl];
                if(tmp>0){
                  if(matA[i][cl]>0){
                  }else if(matA[i][cl]<0){
                          tmp=tmp-1;
                  }
                }else{
                   if(matA[i][cl]>0){
                          tmp=tmp-1;
                   }else if(matA[i][cl]<0){
                   }
             }
                for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                   matA[j][k]=matA[j][k]- tmp*matA[i][k];
            }
        }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
            if (matA[i][cl]==0  && matA[j][cl]!=0 ) {
                for(int k=cl; k<Ncol; k++){
                        tmp        =  matA[i][k];
                        matA[i][k] =  matA[j][k];
                        matA[j][k] =  tmp;
                }
            }
        }
       cl=cl+1;
    }
    rank=0;
    for (i=0; i<Nrow ; i++ ) {
        for (int c=0; c<Ncol ; c++ )
            if (matA[i][c]!=0) {
                rank=rank+1; break;
            }
    }
    cl=Ncol-1;
    for (i=Nrow-1; i>0 ; i--, cl--) {
        if (matA[i][cl]==0) continue;
        g           = matA[i][cl];
        matA[i][cl] = matA[i][cl]/g;
        for(int j=i-1; j>=0;   j--) {
            if (matA[j][cl]==0) {
                continue;
            }
            tmp          = matA[j][cl];
            matA[j][cl]  = matA[j][cl]- tmp*matA[i][cl];
        }
    }
    if (i==0 && cl==0){
        g           = matA[i][cl];
        matA[i][cl] = matA[i][cl]/g;
    }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. การหา Inverse Matrix (เมทริกซ์ผกผัน)

```
for (i=0; i<Nrow ; i++ ) {
    for (int c=0; c<Ncol ; c++ ) {
        matINum[i][c]=0;   matIDeNum[i][c]=1;
    }
    matINum[i][i]=1;
}
cl=0;
for( i=0;  i<Nrow-1 ;   i++){
    if (cl==Ncol) break;
    if (matA[i][cl]==0) {
        iw=Nrow-1;
        while (iw>i ){
            if (matA[iw][cl]!=0) {
                for(int k=0; k<Ncol; k++){
                    tmp          = matA[i][k];
                    matA[i][k]   = matA[iw][k];
                    matA[iw][k]  = tmp;
                    tmp              = matINum[i][k];
                    matINum[i][k]    = matINum[iw][k];
                    matINum[iw][k]   = tmp;
                    tmp              = matIDeNum[i][k];
                    matIDeNum[i][k]  = matIDeNum[iw][k];
                    matIDeNum[iw][k]= tmp;
                }
                determinant= -1*determinant;
                break;
            }
            iw--;
        }
        if  (iw==i) {
            cl=cl+1;
        }
    for(int j=i+1; j<Nrow;   j++) {
        if (matA[j][cl]==0) {
            continue;
        while (matA[i][cl]!=0 && matA[j][cl]!=0) {
            if  (Math.abs(matA[i][cl])> Math.abs(matA[j][cl])){
                tmp = matA[i][cl]/ matA[j][cl];
                if(tmp>0){
                    if(matA[j][cl]>0){
                    }else if(matA[j][cl]<0){
                            tmp=tmp-1;
                    }
                }else{
                    if(matA[j][cl]>0){
                            tmp=tmp-1;
                    }else if(matA[j][cl]<0){

                    }
                }
                for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                    matA[i][k]=matA[i][k]- tmp*matA[j][k];
            }
            else{
                    tmp = matA[j][cl]/ matA[i][cl];
                    if(tmp>0){
                        if(matA[i][cl]>0){
                        }else if(matA[i][cl]<0){
                            tmp=tmp-1;
                        }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
                    else{
                       tmp = matA[j][cl]/ matA[i][cl];
                       if(tmp>0){
                          if(matA[i][cl]>0){
                          }else if(matA[i][cl]<0){
                               tmp=tmp-1;
                          }
                        }else{
                          if(matA[i][cl]>0){
                               tmp=tmp-1;
                          }else if(matA[i][cl]<0){
                          }
                        }
                       for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                          matA[j][k]=matA[j][k]- tmp*matA[i][k];
                }
            }
            if (matA[i][cl]==0  && matA[j][cl]!=0 ) {
                for(int k=0; k<Ncol; k++){
                    tmp             = matA[i][k];
                    matA[i][k]      = matA[j][k];
                    matA[j][k]      = tmp;
                    tmp             = matINum[i][k];
                    matINum[i][k]   = matINum[j][k];
                    matINum[j][k]   = tmp;
                    tmp             = matIDeNum[i][k];
                    matIDeNum[i][k]= matIDeNum[j][k];
                    matIDeNum[j][k]= tmp;
                }
                determinant= -1*determinant;
            }
        }
        cl=cl+1;
    }
    for (i=0; i<Nrow ; i++ )
        determinant= determinant * matA[i][i];
    if (determinant==0) {
        showDetails+=">>>  No Inverse Matrix  <<<";
        return;
    }
            cl=Ncol-1;
            for (i=Nrow-1; i>0 ; i--, cl--) {
                if(cl<0)
                    break;
                if (matA[i][cl]==0) continue;
                int cl2=Ncol-1;
                if(matA[i][i]!=0){
                    g=matA[i][i];
                    if(g==1)break;
                    for(int k=0; k<Ncol; k++) {
                        matIDeNum[i][k]= matIDeNum[i][k]*g;
                    }
                    while (cl2>-1){
                        matADeNum[i][cl2]=matADeNum[i][cl2]*g;
                        cl2--;
                    }
                }else{
                    g=matA[i][cl2];
                    if(g==1)break;

    }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
                for(int k=0; k<Ncol; k++) {
                     matIDeNum[i][k]= matIDeNum[i][k]*g;
                }
                while (cl2>-1){
                    matADeNum[i][cl2]=matADeNum[i][cl2]*g;
                   cl2--;
                }
          }
      }
}
if (i==0 && cl==0){
      g            = matA[i][cl];
      matA[i][cl] = matA[i][cl]/g;
      for(int k=0; k<Ncol; k++) {
           matIDeNum[i][k]= matIDeNum[i][k]*g;
      }
}
```


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. การหา Solution (ผลเฉลย)

```
cl=0;
for( i=0;  i<Nrow-1 ;   i++){
    if (cl==Ncol) break;
    if (matA[i][cl]==0) {
        iw=Nrow-1;
        while (iw>i ){
            if (matA[iw][cl]!=0) {
                for(int k=0; k<Ncol; k++){
                    tmp          = matA[i][k];
                    matA[i][k]   = matA[iw][k];
                    matA[iw][k]  = tmp;
                }
                tmp             = matSNum[i][0];
                matSNum[i][0]   = matSNum[iw][0];
                matSNum[iw][0]  = tmp;
                tmp             = matSDeNum[i][0];
                matSDeNum[i][0] = matSDeNum[iw][0];
                matSDeNum[iw][0]= tmp;
                break;
            }
            iw--;
        }
        if  (iw==i) {
            cl=cl+1;
            if (cl<Ncol)   continue;
            else           break;
        }
    }
    for(int j=i+1; j<Nrow;   j++) {
        if (matA[j][cl]==0) {
            continue;
        }
            while (matA[i][cl]!=0 && matA[j][cl]!=0) {
        if  (Math.abs(matA[i][cl])> Math.abs(matA[j][cl])){
            tmp = matA[i][cl]/ matA[j][cl];
            if(tmp>0){
                if(matA[j][cl]>0){
                }else if(matA[j][cl]<0){
                        tmp=tmp-1;
                }
            }else{
                if(matA[j][cl]>0){
                        tmp=tmp-1;
                }else if(matA[j][cl]<0){
                }
            }
            for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                matA[i][k]=matA[i][k]- tmp*matA[j][k];
        }
        else{
            tmp = matA[j][cl]/ matA[i][cl];
            if(tmp>0){
                if(matA[i][cl]>0){
                }else if(matA[i][cl]<0){
                        tmp=tmp-1;
                }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
            }else{
                        if(matA[i][cl]>0){
                                tmp=tmp-1;
                          }else if(matA[i][cl]<0){
                        }
                    }
                        for(int k=cl; k< Ncol; k++)
                           matA[j][k]=matA[j][k]- tmp*matA[i][k];
                }
              }
            if (matA[i][cl]==0  && matA[j][cl]!=0 ) {
                    for(int k=0; k<Ncol; k++){
                        tmp          = matA[i][k];
                        matA[i][k]   = matA[j][k];
                        matA[j][k]   = tmp;
                    }

                        tmp             = matSNum[i][0];
                        matSNum[i][0]   = matSNum[j][0];
                        matSNum[j][0]   = tmp;
                        tmp             = matSDeNum[i][0];
                        matSDeNum[i][0] = matSDeNum[j][0];
                        matSDeNum[j][0] = tmp;
            }
        }
         cl=cl+1;
    }
         cl=Ncol-1;
         for (i=Nrow-1; i>0 ; i--, cl--) {
             if(cl<0)
              break;
             if (matA[i][cl]==0) continue;
             int cl2=Ncol-1;
             if(matA[i][i]!=0){
              g=matA[i][i];
              matSDeNum[i][0]= matSDeNum[i][0]*g;
               while (cl2>-1){
                 matADeNum[i][cl2]=matADeNum[i][cl2]*g;
                 cl2--;
               }
             }else{
              g=matA[i][cl2];
              matSDeNum[i][0]= matSDeNum[i][0]*g;
              while (cl2>-1){
                 matADeNum[i][cl2]=matADeNum[i][cl2]*g;
                 cl2--;
              }
             }
              for(int j=i-1; j>=0;  j--) {
                 //showDetail
                 if (matA[j][cl]==0) {
                     //showMore
                      continue;
                 }
                 tmp = matA[j][cl];
                 matA[j][cl]    = matA[j][cl]*matADeNum[i][cl]-
                                  tmp*matA[i][cl]*matADeNum[j][cl];
                matADeNum[j][cl] =
matADeNum[j][cl]*matADeNum[i][cl];
                 matSNum[j][0]  = matSNum[j][0]*matSDeNum[i][0]
                                  tmp*matSNum[i][0]*matSDeNum[j][0];
                 matSDeNum[j][0]=
matSDeNum[j][0]*matSDeNum[i][0];
    }
}
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
if (i==0 && cl==0){
            g       = matA[i][cl];
    matA[i][cl]     = matA[i][cl]/g;
    matSDeNum[i][0]= matSDeNum[i][0]*g;
}
```


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้