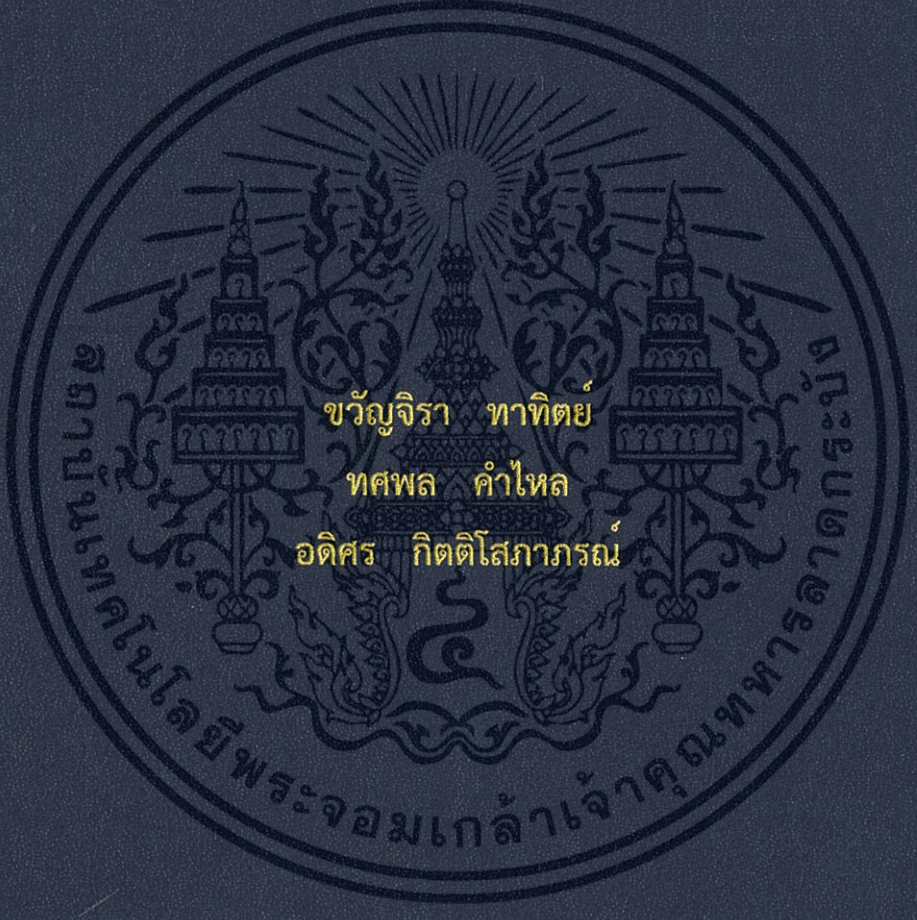
ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

BOX CONVOLUTION PRODUCT OF RIEMANN INTEGRABLE MATRIX-VALUED FUNCTIONS



ขวัญจิรา ทาทิตย์

ทศพล คำไหล

อดิศร กิตติโสภาภรณ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

BOX CONVOLUTION PRODUCT OF RIEMANN INTEGRABLE MATRIX-VALUED FUNCTIONS

KWANJIRA TATIT
TOTSAPHOL KHAMLAI
ADISORN KITTISOPAPORN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ Box Convolution Product of Riemann Integrable Matrix-Valued Functions
ชื่อนักศึกษา	นางสาวขวัญจิรา ทาทิตย์ รหัสนักศึกษา 56050013 นายทศพล คำไหล รหัสนักศึกษา 56050051 นายอดิศร กิตติโสภาภรณ์ รหัสนักศึกษา 56050168
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ประธานกรรมการ	
ดร.ภัมปนาท นามงาม กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้
ชื่อนักศึกษา	นางสาวขวัญจิรา ทาทิตย์ รหัสนักศึกษา 56050013
	นายทศพล คำไหล รหัสนักศึกษา 56050051
	นายอดิศร กิตติโสภาภรณ์ รหัสนักศึกษา 56050168
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษนี้ เราแนะนำผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ ซึ่งขยายแนวคิดของผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชันปรกติ เราแสดงให้เห็นว่าผลคูณดังกล่าวมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และเข้ากันได้กับการดำเนินการเชิงพีชคณิต ได้แก่ การบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การสลับเปลี่ยน และผลบวกตรง ต่อมาเรานิยามตัวทำสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชัน ตัวทำปฏิสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และพัฒนาสมบัติเชิงพีชคณิตของการดำเนินการดังกล่าว ยิ่งไปกว่านั้นเราแสดงให้เห็นถึงการแปลงผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันไปสู่ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

คำสำคัญ : ผลคูณบ็อคซ์, ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน, ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์, ตัวทำ(ปฏิ)สลับที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Box Convolution Product of Riemann Integrable Matrix-Valued Functions			
Students	Miss Kwanjira	Tatit	Student ID	56050013
	Mr. Totsaphol	Khamlai	Student ID	56050051
	Mr. Adisorn	Kittisopaporn	Student ID	56050168
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)			
Department	Mathematics			
Faculty	Science			
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)			
Academic Year	2016			
Advisor	Asst.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam			

Abstract

In this special problem, we introduce the box convolution product of matrix-valued functions that generalizes the idea of usual matrix convolution product. We show that the product is associative and compatible with certain algebraic operations, namely, the addition, the scalar multiplication, the transposition, and the direct sum. Then we define box convolution (anti)commutators of matrix-valued functions and establish their algebraic properties. Furthermore, we demonstrate how the box convolution product transforms into the matrix convolution product.

Keywords : Box Product, Matrix Convolution Product, Matrix-valued Functions, (Anti)Commutator

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เนื่องด้วยได้รับความกรุณาเป็นอย่างสูงจาก ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ซึ่งได้กรุณาให้วิชาความรู้ คำปรึกษา คำแนะนำ ตลอดจนตรวจสอบปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง คณะผู้จัดทำตระหนักถึงความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์เสมอมา และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย และอาจารย์ ดร.กัมปนาท นามงาม ประธานและกรรมการสอบปัญหาพิเศษ ตลอดจนคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ให้วิชาความรู้ต่างๆ แก่คณะผู้จัดทำเสมอมา รวมถึงขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่คอยช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ ตลอดจนรุ่นพี่นักศึกษาปริญญาโททุกท่านที่ให้ข้อมูลต่างๆ ที่เอื้อต่อการทำปัญหาพิเศษเล่มนี้ จนทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

อนึ่ง คณะผู้จัดทำหวังว่าปัญหาพิเศษเล่มนี้จะมีประโยชน์อยู่ไม่น้อย จึงขอมอบส่วนดีทั้งหมดนี้ ให้แก่เหล่าคณาจารย์ ที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาจนทำให้ผลงานปัญหาพิเศษนี้เป็นประโยชน์ต่อผู้ที่เกี่ยวข้อง และขอมอบความกตัญญูกตเวทิตาคุณ แด่บิดามารดา และผู้มีพระคุณทุกท่าน สำหรับข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นนั้น คณะผู้จัดทำขอน้อมรับผิดแต่เพียงผู้เดียว และยินดีที่จะรับฟังคำชี้แนะจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา เพื่อเป็นประโยชน์แก่การปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาให้ดียิ่งขึ้นต่อไป

ทศพล คำไหล
ขวัญจิรา ทาทิตย์
อดิศร กิตติโสภาภรณ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข
กิตติกรรมประกาศ ..... ค
สารบัญ ..... ง
สารบัญตาราง ..... ฉ
สารบัญรูป ..... ช
คำย่อ / สัญลักษณ์ ..... ซ
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ 2
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ 2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน 3
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานในคณิตวิเคราะห์ 5
2.1 ปริพันธ์รีมันน์ 5
2.2 คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าจริง 11
บทที่ 3 ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์ 18
3.1 พีชคณิตของเมทริกซ์ 18
3.2 ผลคูณฮาดามาร์ด 22
3.3 ผลคูณบ็อคซ์ 23
บทที่ 4 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน 25
4.1 พีชคณิตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ 25
4.2 ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน 32
4.3 ผลคูณฮาดามาร์ดคอนโวลูชัน 37
บทที่ 5 ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ 40
5.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน 40
5.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และการสลับที่ของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน 41
5.3 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ ... 42
5.4 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับการสลับเปลี่ยน 45
5.5 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับตัวทำสลับที่ 46
5.6 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับเมทริกซ์ย่อย 51

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.7 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับผลบวกตรง 52
บทที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน 54
6.1 การแปลงผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน เป็นผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชันสำหรับฟังก์ชันค่า-เมทริกซ์ในรูปแบบบล็อคทแยงมุม 54
6.2 การแปลงจอห์นสัน-ไนเลนสำหรับฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ 56
เอกสารอ้างอิง 59

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

1.1 ตารางแสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน 4

2.1 ตารางแสดงตัวอย่างค่าคอนโวลูชันของฟังก์ชัน 14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$	5
2.2 ผลแบ่งกั้นติดป้ายของ $[a,b]$	6
2.3 ผลรวมรีมันน์	6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำย่อ/สัญลักษณ์

คำย่อ/สัญลักษณ์	คำอธิบาย
$M_{m,n}(\mathbb{R})$	เซตของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด m x n
$M_n(\mathbb{R})$	เซตของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด n x n
$M_{m,n}$	เซตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ขนาด mxn
M_n	เซตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ขนาด nxn
$M_{m,n}^C$	เซตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่ต่อเนื่องบน $[0,b]$ ที่มีขนาด mxn
M_n^C	เซตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่ต่อเนื่องบน $[0,b]$ ที่มีขนาด nxn
$M_{m,n}^I$	เซตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,b]$ ที่มีขนาด mxn
M_n^I	เซตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,b]$ ที่มีขนาด nxn

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในทางคณิตศาสตร์ เมทริกซ์เป็นสิ่งที่มีบทบาทสำคัญอย่างมาก โดยเฉพาะการดำเนินการการคูณเมทริกซ์ ที่เป็นสิ่งที่เราสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในหลากหลายด้าน เช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการ เป็นต้น นอกจากการคูณเมทริกซ์แบบปรกติที่เรารู้จักกันดีแล้ว ยังมีการคูณเมทริกซ์ในรูปแบบอื่นๆอีกมากมาย เช่น การคูณแบบโครเนคเคอร์ การคูณแบบฮาดามาร์ด เป็นต้น ซึ่งแต่ละแบบก็มีการนำมาประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขาเช่น ทฤษฎีระบบ สถิติ ฟิสิกส์ เศรษฐศาสตร์ รวมไปถึงในคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์

นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์ยังให้ความสนใจกับผลคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ คอนโวลูชันเป็นสิ่งที่มีประโยชน์อย่างมากในวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ และได้นำมาประยุกต์ใช้กับเมทริกซ์ ซึ่งทำให้เกิด สมการเมทริกซ์ อสมการเมทริกซ์ และสมการเชิงอนุพันธ์ของเมทริกซ์ เป็นต้น ในปัจจุบันมีผู้ที่ศึกษาผลคูณคอนโวลูชัน ผลคูณโครเนคเคอร์คอนโวลูชัน และผลคูณฮาดามาร์ดคอน-โวลูชัน ของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์เป็นจำนวนมาก และมีการประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่นอีกมากมาย

ในปีค.ศ.1991 นักคณิตศาสตร์ชื่อ Charles R. Johnson และ Peter Nylen ได้ขยายแนวคิดของการคูณเมทริกซ์แบบปรกติไปสู่ผลคูณแบบบ็อคซ์ โดยผลคูณดังกล่าวนิยามสำหรับเมทริกซ์จริง A และ B ซึ่งอยู่ในรูปแบบบล็อก $A=[A_{ij}]$ และ $B=[B_{ij}]$ ซึ่งมีขนาดเป็น mp x nq และ mq x nr ตามลำดับ เมื่อ A_{ij} มีขนาดเป็น p x q และ B_{ij} มีขนาดเป็น q x r ผลคูณบ็อคซ์ของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A\Diamond B$ นิยามโดย

$$A\Diamond B=\left[A_{ij}B_{ij}\right]$$

ในกรณีที่ A และ B มีเพียงบล็อกเดียวจะได้ $A\Diamond B=AB$ การคูณแบบบ็อคซ์ดังกล่าวได้ถูกนำเสนอครั้งแรกใน [9]

ในปัญหาพิเศษนี้ เราจะนิยามผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดของผลคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์แบบปรกติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาสมบัติต่างๆของผลคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

2. เพื่อพัฒนาองค์ความรู้ผลคูณของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ในรูปแบบผลคูณบ็อคซ์และผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

นิยามผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ พิสูจน์สมบัติพื้นฐานทางพีชคณิตของผลคูณดังกล่าว รวมทั้งนิยามตัวทำสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชัน ตัวทำปฏิสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และศึกษาการแปลงผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันไปสู่ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สำหรับผู้จัดทำ

1. ได้เพิ่มพูนความรู้และความเข้าใจในสมบัติของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

2. ได้เพิ่มพูนทักษะกระบวนการคิดและวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์

3. ได้ทบทวนและเสริมสร้างความรู้พื้นฐานในการศึกษาต่อในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ หรือสาขาอื่นที่เกี่ยวข้อง

สำหรับผู้ใช้งาน

1. ได้เอกสารทางวิชาการที่รวบรวมสมบัติของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

2. ได้ใช้เป็นแนวทางในการศึกษา และพัฒนาต่อยอดการประยุกต์ใช้ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ในคณิตศาสตร์สาขาอื่น หรือสาขาวิชาอื่นที่เกี่ยวข้อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานในคณิตวิเคราะห์

2. ศึกษาความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์

3. ศึกษาฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และสมบัติของผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

4. ศึกษา และคิดค้นนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆของผลคูณบ็อคซ์ และผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน

5. ศึกษาและค้นหาแนวทางการนำผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันไปประยุกต์ใช้ในทฤษฎีเมทริกซ์

6. จัดทำเอกสาร

7. นำเสนอปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

ขั้นตอนในการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน										
	ปี 2559						ปี 2560				
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานในคณิตวิเคราะห์											
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์											
3. ศึกษาฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และสมบัติของผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน											
4. ศึกษา และคิดค้นนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆ ของผลคูณบ็อคซ์ และผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน											
5. ศึกษา และค้นหาแนวทางการนำผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันไปประยุกต์ใช้ในทฤษฎีเมทริกซ์											
6. จัดทำเอกสาร											
7. นำเสนอปัญหาพิเศษ											

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานในคณิตวิเคราะห์

ในบทนี้จะกล่าวถึง ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์คอนโวลูชันในเชิงคณิตวิเคราะห์ ซึ่งได้แก่ ปริพันธ์รีมันน์ และ คอนโวลูชัน

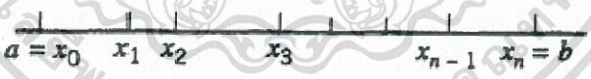
2.1 ปริพันธ์รีมันน์ (The Riemann Integral)

ผลแบ่งกั้น และ ผลแบ่งกั้นติดป้าย (Partitions and Tagged Partitions)

ถ้า $I := [a,b]$ เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขตใน $\mathbb{R}$ แล้ว ผลแบ่งกั้นของ I คือเซตอันดับจำกัด $P := (x_0, x_1, ...x_{n-1}, x_n)$ ของจุดใน I โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

จุดของเซต P ถูกใช้เพื่อการแบ่งเซต $I = [a,b]$ ออกเป็นเซตย่อยที่ไม่ซ้อนทับกันดังรูป 2.1



รูปที่ 2.1 ผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ จากเอกสารอ้างอิง [7]

เราใช้สัญลักษณ์แทนผลแบ่งกั้น P คือ $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$ เรานิยามนอร์ม (norm) ของ P โดย

$$\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$$

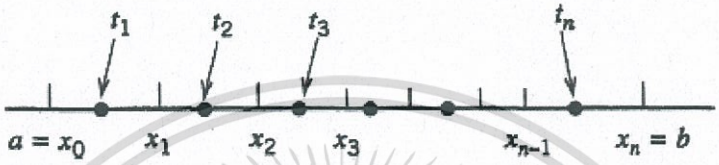
จะเห็นว่านอร์มของผลแบ่งกั้นคือ ความยาวของช่วงย่อยที่ใหญ่ที่สุดนั่นเอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าจุด t_i เป็นจุดที่ถูกเลือกจากแต่ละช่วงย่อย $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ สำหรับ $i = 1,2,...,n$ แล้ว จุด t_i จะเรียกว่า ป้าย (tag) ของช่วงย่อย I_i และจะได้ว่า เซตของคู่อันดับ

$$\dot{P} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$$

ของช่วงย่อย และป้ายที่สอดคล้องกับช่วงย่อยนั้น เรียกว่า ผลแบ่งกั้นติดป้ายของ I ดังรูป 2.2



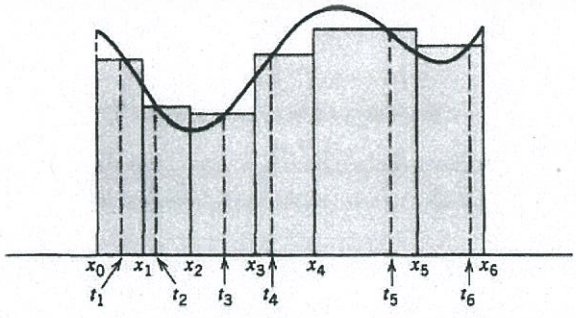
รูปที่ 2.2 ผลแบ่งกั้นติดป้ายของ $[a,b]$ จากเอกสารอ้างอิง [7]

จะเห็นว่า ป้าย t_i ของแต่ละช่วงย่อยสามารถถูกเลือกได้อย่างอิสระ นั่นคือ เราสามารถเลือกให้ป้ายเป็นจุดที่อยู่ขอบซ้ายสุด หรือ ขอบขวาสุด หรือตรงกลางของช่วงย่อยก็ได้ จะสังเกตว่า จุดขอบของช่วงย่อยสามารถเป็น ป้าย ให้กับช่วงย่อยได้ทั้งสองช่วง

ถ้า $\dot{P}$ เป็น ผลแบ่งกั้นติดป้ายดังที่กล่าวข้างต้น แล้ว เรานิยาม ผลรวมรีมันน์ ของฟังก์ชัน $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับ $\dot{P}$ โดย

$$S\left(f;\dot{P}\right) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

เราสามารถสังเกตได้ว่า ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าเป็นบวกบนช่วง $[a,b]$ แล้วผลรวมรีมันน์คือ ผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจำนวน n รูป ที่มีความยาวฐานเป็นความยาวของช่วงย่อย $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ และความสูงคือ $f(t_i)$ ดังรูป 2.3



รูปที่ 2.3 ผลรวมรีมันน์ จากเอกสารอ้างอิง [7]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.1.1 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a,b]$ ถ้า มีจำนวน $L\in\mathbb{R}$ ที่ทำให้ สำหรับทุกๆ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta_\varepsilon>0$ ที่ทำให้ ถ้า $\dot{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นติดป้ายใดๆของ $[a,b]$ ด้วย $\|\dot{P}\|<\delta_\varepsilon$ แล้ว

$$\left|S\left(f;\dot{P}\right)-L\right|<\varepsilon$$

ทฤษฎีบท 2.1.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ แล้ว ค่า L ในบทนิยาม 2.1.1 จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น โดยเรียกจำนวน L นี้ว่า ปริพันธ์รีมันน์ของ f บน $[a,b]$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$L=\int_a^b f \quad \text{หรือ} \quad \int_a^b f(x)dx$$

ทฤษฎีบท 2.1.3 สมมติให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ แล้ว

1. ถ้า $k\in\mathbb{R}$ แล้ว ฟังก์ชัน kf จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้โดย

$$\int_a^b kf=k\int_a^b f$$

2. ฟังก์ชัน $f+g$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้โดย

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$$

ทฤษฎีบท 2.1.4 ถ้า $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.1.5 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ และให้ $c\in(a,b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,c]$ และ $[c,b]$ ยิ่งกว่านั้น

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.1.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ และถ้า α,β,γ คือจำนวนใดๆที่อยู่ใน $[a,b]$ แล้ว

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{\beta} f$$

ทฤษฎีบท 2.1.7 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส (The First Fundamental Theorem of Calculus)

สมมติว่ามีเซตจำกัด E ใน $[a,b]$ และฟังก์ชัน $f,F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ที่ทำให้

1. F ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$
2. $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุกๆ $x\in[a,b]\setminus E$
3. f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$

แล้วจะได้ว่า

$$\int_{a}^{b} f = F(b)-F(a)$$

ทฤษฎีบท 2.1.8 ทฤษฎีบทการเปลี่ยนตัวแปร (Substitution Theorem)

ให้ $J:=[\alpha,\beta]$ และ ให้ $\varphi:J\to\mathbb{R}$ มีอนุพันธ์ต่อเนื่องบน J

ถ้า $f:I\to\mathbb{R}$ ต่อเนื่องบนช่วง I ที่บรรจุ $\varphi(J)$ แล้ว

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

ทฤษฎีบท 2.1.9 การหาปริพันธ์ทีละส่วน (Integration by Parts)

ให้ F และ G สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และให้ $f:=F'$ และ $g:=G'$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_{a}^{b} fG = FG\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} Fg$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.1.10 ทฤษฎีบทผลคูณ (The Product Theorem)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$
แล้ว fg จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

ทฤษฎีบท 2.1.11 ทฤษฎีบทความมีขอบเขต (Boundedness Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$

บทนิยาม 2.1.12 ให้ $f: I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $I=[a,b]$
และให้ $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I
และสำหรับ $k=1,2,...,n$ ให้ $m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\}$,
$M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\}$
ผลบวกล่าง (Lower Sum) ของ f ที่สอดคล้องกับผลแบ่งกั้น P นิยามโดย

$$L(f;P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

และผลบวกบน (Upper Sum) ของ f ที่สอดคล้องกับผลแบ่งกั้น P นิยามโดย

$$U(f;P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$$

ทฤษฎีบท 2.1.13 เกณฑ์ของรีมันน์ (Riemann's Criterion)

ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต และจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$

(ii) สำหรับทุกๆ $\varepsilon>0$ จะมีผลแบ่งกั้น P บน $[a,b]$ ที่ทำให้

$$U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon$$

ทฤษฎีบท 2.1.14 ให้ $t>0$ และ $f,g:[0,t]\to\mathbb{R}$

ถ้า f,g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,t]$ แล้ว $H:[0,t]\to\mathbb{R}$
โดยที่ $H(\tau)=f(\tau)g(t-\tau)$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,t]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทพิสูจน์

จะพิสูจน์ว่า $h(\tau)=g(t-\tau)$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ โดยใช้เกณฑ์ของรีมันน์

เนื่องจาก $g:[0,t]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[0,t]$ และจะได้ว่า $h(\tau)=g(t-\tau)$ มีขอบเขตบนช่วง $[0,t]$ ด้วย

ให้ $\varepsilon>0$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,t]$

ดังนั้น จะมีผลแบ่งกั้น Q บน $[0,t]$ ซึ่ง $U(g;Q)-L(g;Q)<\varepsilon$

ให้ $M_i=\sup\{g(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$ และ $m_i=\inf\{g(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$.

เรานิยามผลบวกบน $U(g;Q)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$

และผลบวกล่าง $L(g;Q)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$

สร้าง $U(h;P)=\sum_{i=1}^{n}M_i'(x_i-x_{i-1})$ โดย $M_i'=M_{n+1-i}$

$L(h;P)=\sum_{i=1}^{n}m_i'(x_i-x_{i-1})$ โดย $m_i'=m_{n+1-i}$

ดังนั้น $U(h;P)=U(g;Q)$ และ $L(h;P)=L(g;Q)$

$U(h;P)-L(h;P)=U(g;Q)-L(g;Q)<\varepsilon$

ทำให้ได้ว่า h เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

เนื่องจาก f,h เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ และ โดยทฤษฎีบทที่ 2.1.10

จะได้ว่า $H=fh$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

ความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับปริพันธ์รีมันน์ และบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทต่างๆ สามารถหาได้จากตำรา คณิตวิเคราะห์ เช่น [7]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าจริง (Convolution of Real-valued functions)

บทนิยาม 2.2.1 คอนโวลูชัน (Convolution)

ให้ $b>0$ และ $f,g:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

คอนโวลูชันของ f และ g เป็นฟังก์ชันใหม่ เขียนแทนโดย $f*g$ ซึ่งนิยามโดย

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \forall t\in[0,b]$$

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ $f(t)=t^n$ และ $g(t)=t^m$, $t\in[0,b]$, $b>0$ เมื่อ n,m เป็นจำนวนนับ

$$\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_0^t \tau^n(t-\tau)^m d\tau \\
&= \int_0^t \tau^n\left[\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}t^{m-i}\tau^i\right]d\tau \\
&= \int_0^t\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}t^{m-i}\tau^{i+n}d\tau \\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}t^{m-i}\int_0^t\tau^{i+n}d\tau \\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}t^{m-i}\frac{t^{i+n+1}}{i+n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{t^{m+n+1}}{i+n+1}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.3 ให้ $f(t)=\cos mt$ และ $g(t)=\sin nt$, $t\in[0,b]$, $b>0$

เมื่อ m,n เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0

กรณี $n\neq m$

$$(f*g)(t) = \int_0^t \cos m\tau \sin n(t-\tau)d\tau$$ ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน

$$= \frac{\cos mt}{n} - \frac{\cos nt}{n} + \frac{m^2}{n^2}\int_0^t \cos m\tau \sin n(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{n(\cos mt - \cos nt)}{n^2 - m^2}$$

$$= \frac{n(\cos mt - \cos nt)}{(n-m)(n+m)}$$

กรณี $n=m$

$$(f*g)(t) = \int_0^t \cos m\tau \sin m(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(m(t-2\tau)) + \sin mt d\tau$$ จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$= \frac{1}{2}\sin mt\int_0^t 1d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(m(t-2\tau))d\tau$$

$$= \frac{1}{2}t\sin mt + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(m(t-2\tau))d\tau$$

ให้ $u=t-2\tau$ และ $du=-2d\tau$ $$= \frac{1}{2}t\sin mt - \frac{1}{4}\int_t^{-t}\sin(mu)du$$

ให้ $s=au$ และ $ds=adu$ $$= \frac{1}{2}t\sin mt - \frac{1}{4a}\int_{at}^{-at}\sin(s)ds$$

$$= \frac{1}{2}t\sin mt + \frac{\cos s}{4a}\Big|_{at}^{-at}$$

$$= \frac{1}{2}t\sin mt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ $f(t)=e^{nt}$ และ $g(t)=e^{mt}$, $t\in[0,b]$, $b>0$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0

กรณี $n\neq m$

$$(f*g)(t) = \int_0^t e^{n\tau}\bullet e^{m(t-\tau)}d\tau$$

$$= e^{mt}\int_0^t e^{n\tau-m\tau}d\tau$$

$$= e^{mt}\int_0^t e^{(n-m)\tau}d\tau$$

$$= e^{mt}\left(\frac{e^{(n-m)\tau}}{(n-m)}\Big|_0^t\right)$$

$$= \frac{e^{mt}}{(n-m)}\left(e^{(n-m)t}-e^{(n-m)0}\right)$$

$$= \frac{e^{mt}}{(n-m)}\left(e^{(n-m)t}-1\right)$$

$$= \frac{e^{mt}-e^{nt}}{m-n}$$

กรณี $n=m$

$$(f*g)(t) = \int_0^t e^{m\tau}\bullet e^{m(t-\tau)}d\tau$$

$$= \int_0^t e^{mt}d\tau$$

$$= e^{mt}\int_0^t d\tau$$

$$= e^{mt}\left(\tau\Big|_0^t\right)$$

$$= e^{mt}t$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข้อสังเกต ในการหาค่าของคอนโวลูชันนั้นจำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐานหลายอย่าง และเทคนิคของปริพันธ์โดยเฉพาะการหาปริพันธ์ทีละส่วน ซึ่งทำให้เกิดความล่าช้าในการคำนวณ เพื่อให้เกิดความสะดวกแก่ท่านผู้อ่าน ทางคณะผู้จัดทำได้คำนวณค่าคอนโวลูชันของฟังก์ชันพื้นฐานเอาไว้บางส่วน ท่านผู้อ่านสามารถใช้สูตรดังตารางต่อไปนี้แล้วใช้วิธีปรับค่าคงที่ได้

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงตัวอย่างค่าคอนโวลูชันของฟังก์ชัน

$f(t)$	$g(t)$	$(f*g)(t)$
t^n	t^m	$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{t^{m+n+1}}{i+n+1}$ เมื่อ n,m เป็นจำนวนนับ
$\sin nt$	$\sin mt$	$\frac{-n\sin mt+m\sin nt}{m^2-n^2}$ $n\neq m$ $\frac{-mt\cos mt+\sin mt}{2m}$ $n=m\neq 0$
$\sin nt$	$\cos mt$	$\frac{n(\cos mt-\cos nt)}{(n-m)(n+m)}$ $n\neq m$ $\frac{1}{2}t\sin mt$ $n=m\neq 0$
$\sin nt$	e^{mt}	$\frac{e^{mt}n-n\cos nt-m\sin nt}{m^2+n^2}$ $m^2+n^2\neq 0$
$\cos nt$	$\cos mt$	$\frac{m\sin mt-n\sin nt}{m^2-n^2}$ $n\neq m$ $\frac{mt\cos mt+\sin mt}{2m}$ $n=m\neq 0$
$\cos nt$	e^{mt}	$\frac{e^{mt}m-m\cos nt+n\sin nt}{m^2+n^2}$ $m^2+n^2\neq 0$
e^{nt}	e^{mt}	$\frac{e^{mt}-e^{nt}}{m-n}$ $n\neq m$ $e^{mt}t$ $n=m$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติของคอนโวลูชัน (The properties of Convolution)

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ $f,g,h:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

1. $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$ (สมบัติการแจกแจง)
2. $(f+g)*h=(f*h)+(g*h)$ (สมบัติการแจกแจง)
3. $a(f*g)=(af)*g$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มกับสเกลาร์)

บทพิสูจน์

1. สมบัติการแจกแจง $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

โดยทฤษฎีบท 2.1.3 จะได้ $\left[f*(g+h)\right](t)=\int_0^t f(\tau)\left[g(t-\tau)+h(t-\tau)\right]d\tau$

$$=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau+\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=(f*g)(t)+(f*h)(t)$$

2. สมบัติการแจกแจง $(f+g)*h=(f*h)+(g*h)$

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

โดยทฤษฎีบท 2.1.3 จะได้ $\left[(f+g)*h\right](t)=\int_0^t\left[f(\tau)+g(\tau)\right]h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=(f*h)(t)+(g*h)(t)$$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มกับสเกลาร์ $a(f*g)=(af)*g$

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยทฤษฎีบท 2.1.3 จะได้ $[a(f*g)](t) = a\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

$$= \int_0^t (af(\tau))g(t-\tau)d\tau$$

$$= [(af)*g](t)$$

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ $f,g,h:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

1. $f*g = g*f$ (สมบัติการสลับที่)
2. $f*(g*h) = (f*g)*h$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)

บทพิสูจน์

1. สมบัติการสลับที่ $f*g = g*f$

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

ให้ $\lambda = t-\tau$ จะได้ว่า $\tau = t-\lambda$ และ $d\tau = -d\lambda$ โดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ว่า

$$f(t)*g(t) = -\int_t^0 f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_0^t g(\lambda)f(t-\lambda)d\lambda$$

$$= g(t)*f(t)$$

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม $f*(g*h) = (f*g)*h$

โดยนิยามของคอนโวลูชัน $f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

เราได้ว่า $[(f*g)*h](t) = \left[\int_0^t f(\tau_{fg})g(t-\tau_{fg})d\tau_{fg}\right]*h$

$$= \int_0^t \left[\int_0^t f(\tau_{fg})g(\tau_{gh}-\tau_{fg})\,\mathrm{d}\,\tau_{fg}\right] h\left(t-\tau_{gh}\right)d\tau_{gh}$$

$$= \int_0^t\int_0^t f(\tau_{fg})g(\tau_{gh}-\tau_{fg})h\left(t-\tau_{gh}\right)\mathrm{d}\,\tau_{fg}d\tau_{gh}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \int_0^t f(\tau_{fg}) \int_0^t g(\tau_{gh} - \tau_{fg}) h\left(t - \tau_{gh}\right) d\tau_{gh}\, \mathrm{d}\tau_{fg}$$

ให้ $\tau_{gh} = \tau_{gh} + \tau_{fg}$ จะได้ $d(\tau_{gh} + \tau_{fg}) = d\tau_{gh}$ โดยทฤษฎีบท 2.1.8 จะได้ว่า

$$[(f * g) * h](t) = \int_0^t f(\tau_{fg}) \int_0^t g((\tau_{gh} + \tau_{fg}) - \tau_{fg}) z\left(t - (\tau_{gh} + \tau_{fg})\right) d\tau_{gh}\, \mathrm{d}\tau_{fg}$$

$$= \int_0^t f(\tau_{fg}) \int_0^t g(\tau_{gh}) z\left((t - \tau_{fg}) - \tau_{gh}\right) d\tau_{gh}\, \mathrm{d}\tau_{fg}$$

$$= \int_0^t f(\tau_{fg})(g * h)(t - \tau_{fg})\, \mathrm{d}\tau_{fg}$$

$$= [f * (g * h)](t)$$

ความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับคอนโวลูชัน สามารถหาได้จากตำราสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น [2],[6]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์

ในบทนี้จะกล่าวถึง ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์คอนโวลูชันในเชิงทฤษฎีเมทริกซ์ ซึ่งได้แก่ พีชคณิตของเมทริกซ์ ผลคูณฮาดามาร์ด และ ผลคูณบ็อคซ์

3.1 พีชคณิตของเมทริกซ์ (Matrix Algebra)

บทนิยาม 3.1.1 การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ (Addition and Scalar multiplication)

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $k \in \mathbb{R}$ เรานิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ของเมทริกซ์ดังนี้

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$k \cdot A=\left[ka_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

เพื่อความสะดวกเราสามารถเขียนแทน $k \cdot A$ ด้วย kA

เมทริกซ์ $-A$ มีความหมายเดียวกับเมทริกซ์ $(-1)A$ ดังนั้น $A-B$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $A+(-1)B$

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$A+B=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2B=2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A-2B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$

แต่ $A+C$ ไม่สามารถนิยามได้ เนื่องจาก A และ C มีขนาดไม่เท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $A-2B$ ไม่จำเป็นต้องคำนวนแบบ $A+(-1)2B$ เนื่องจากเราสามารถประยุกต์ใช้วิธีการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ของจำนวนจริงกับเมทริกซ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.3 คุณสมบัติของการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์

ให้ A,B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน และให้ r,s เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $A+B=B+A$ (สมบัติการสลับที่การบวก)
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก)
3. $A+0=A$ เมื่อ 0 คือ เมทริกซ์ศูนย์ (สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก)
4. $r(A+B)=rA+rB$ (สมบัติการแจกแจง)
5. $(r+s)A=rA+sA$ (สมบัติการแจกแจง)
6. $r(sA)=(rs)A$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณด้วยสเกลาร์)

บทนิยาม 3.1.4 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{n,p}(\mathbb{R})$ เรานิยามการคูณของ A กับ B ดังนี้

$$AB=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]\in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

ในกรณีทั่วไป $AB\neq BA$

ตัวอย่าง 3.1.5 ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$ แล้ว

$$AB=\begin{bmatrix}2\cdot1+0\cdot3 & 2\cdot1+0\cdot5 & 2\cdot1+0\cdot7\\ -3\cdot1+1\cdot3 & -3\cdot1+1\cdot5 & -3\cdot1+1\cdot7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

แต่ BA ไม่สามารถนิยามได้ เนื่องจาก B มีขนาดเป็น 2 x 3 แต่ A มีขนาดเป็น 2 x 2 จะเห็นว่า จำนวนคอลัมน์ของเมทริกซ์ตัวตั้ง B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ ตัวคูณ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.1.6 สำหรับทุกเมทริกซ์ A, B และ C ที่ทำให้การดำเนินการของเมทริกซ์ในแต่ละข้อนิยามดีแล้วจะได้ว่า

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $AI = A = IA$ เมื่อ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์
3. $A(B+C) = AB + AC$
4. $(A+B)C = AC + BC$
5. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{R}$
6. $A0 = 0 = 0A$

บทนิยาม 3.1.7 การสลับเปลี่ยน (Transpose)

เรานิยามการสลับเปลี่ยน (Transpose) ของ $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ดังนี้

$$A^T = \left[a_{ji}\right] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

นั่นคือ สมาชิกตำแหน่งที่ i, j ของ A^T คือสมาชิกตำแหน่งที่ j, i ของ A

ตัวอย่าง 3.1.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.1.9 สำหรับทุกเมทริกซ์ A, B ที่ทำให้การดำเนินการของเมทริกซ์ในแต่ละข้อนิยามดีแล้วจะได้ว่า

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{R}$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 3.1.10 เมทริกซ์ผกผัน (Inverse matrix)

เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{R})$ จะกล่าวว่าหาผกผันได้ (invertible) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ $B \in M_n(\mathbb{R})$ ที่ทำให้ $AB = I = BA$ เรียก B นี้ว่า เมทริกซ์ผกผันของ A เขียนแทนด้วย A^{-1}

ตัวอย่าง 3.1.11 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $C = A^{-1}$

ทฤษฎีบท 3.1.12 ถ้าเมทริกซ์ A หาผกผันได้ แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A มีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.1.13 ให้ $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $AB = I = BA$
2. $AB = I$
3. $BA = I$

ทฤษฎีบท 3.1.14 ถ้าเมทริกซ์ A หาผกผันได้ แล้วเมทริกซ์ A^{-1}, kA, A^T หาผกผันได้ โดยที่

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{R} - \{0\}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

ทฤษฎีบท 3.1.15 ถ้า $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ หาผกผันได้ แล้ว AB หาผกผันได้โดยที่ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทในหัวข้อนี้ สามารถหาได้จากตำราพีชคณิตเชิงเส้นหรือทฤษฎีเมทริกซ์ เช่น [1] [4]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ผลคูณฮาดามาร์ด (Hadamard Product)

บทนิยาม 3.2.1 ผลคูณฮาดามาร์ดของ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ เขียนแทนด้วย $A\circ B$ นิยามดังนี้

$$A\circ B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$A\circ B=\begin{bmatrix} 2\cdot(-5) & 1\cdot 0 & 5\cdot 3 & 0\cdot 1 \\ -4\cdot(-6) & -2\cdot(-1) & 6\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ -3\cdot 0 & 2\cdot 7 & -1\cdot(-2) & 4\cdot 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 & 0 \\ 24 & 2 & 12 & 9 \\ 0 & 14 & 2 & 32 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า ผลคูณฮาดามาร์ด คือ การนำสมาชิกของตำแหน่งเดียวกันมาคูณกันนั่นเอง เพราะฉะนั้นเมทริกซ์ A และ B จึงจำเป็นต้องมีขนาดที่เท่ากัน แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัส และด้วยวิธีการนั้น ผลคูณฮาดามาร์ด จึงมีคุณสมบัติคล้ายกับการดำเนินการคูณใน $\mathbb{R}$ ดังจะเห็นได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ A, B และ $C\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ แล้ว

1. $A\circ B=B\circ A$
2. $C\circ(A+B)=C\circ A+C\circ B$
3. $\alpha(A\circ B)=(\alpha A)\circ B=A\circ(\alpha B)$ สำหรับทุก $\alpha\in\mathbb{R}$

บทพิสูจน์

สามารถหาได้จากเอกสารอ้างอิง [3]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 ผลคูณบ็อคซ์ (Box Product)

บทนิยาม 3.3.1 ให้ $A=\left[A_{ij}\right]\in M_{mp,nq}$ และ $B=\left[B_{ij}\right]\in M_{mq,nr}$ เป็นเมทริกซ์ที่ถูกแบ่งเป็นเมทริกซ์ย่อย A_{ij} และ B_{ij} โดยมีขนาดเป็น p x q และ q x r ตามลำดับ จะได้ว่าผลคูณบ็อคซ์ของเมทริกซ์ A และ B แทนด้วยสัญลักษณ์ $A\Diamond B$ นิยามโดย

$$A\Diamond B=\left[A_{ij}B_{ij}\right]\in M_{mp,nr}$$

เมื่อ $A_{ij}B_{ij}$ คือ เมทริกซ์ย่อยที่ ij โดยมีขนาดเป็น p x r

ตัวอย่าง 3.3.2 ให้ $A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\1&2&5\\2&-3&2\\4&4&-7\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}4&2&-5&-2&2&0&1&3&5\\-1&1&2&-7&3&5&-2&0&4\end{bmatrix}$

เลือกแบ่ง A และ B ให้แต่ละเมทริกซ์ย่อยมีขนาด 2x1 และ 1x3 ตามลำดับ นั่นคือ

$$A=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2\\-7\end{bmatrix}\end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&-5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-2&2&0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&3&5\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}-1&1&2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-7&3&5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-2&0&4\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$A\Diamond B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&-5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2&0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&5\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3&5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2\\-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&4\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}12&6&-15\\4&2&-5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2&-2&0\\-4&4&0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}0&0&0\\5&15&25\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}-2&2&4\\-4&4&8\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}21&-9&-15\\-28&12&20\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-4&0&8\\14&0&-28\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.3.3 ให้ $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & 9\end{bmatrix}$

เลือกแบ่ง A และ B ให้แต่ละเมทริกซ์ย่อยของทั้งสองเมทริกซ์มีขนาด 1x1 นั่นคือ

$$A=\begin{bmatrix}[3] & [-1]\\ [0] & [5]\end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix}[2] & [-4]\\ [3] & [9]\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A\Diamond B=\begin{bmatrix}[3][2] & [-1][-4]\\ [0][3] & [5][9]\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}[6] & [4]\\ [0] & [45]\end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า หากเราเลือกให้เมทริกซ์ย่อยของทั้ง A และ B มีขนาด 1x1 แล้ว ผลคูณบ็อคซ์สามารถลดรูปเป็นผลคูณฮาดามาร์ดได้

เลือกแบ่ง A และ B ให้แต่ละเมทริกซ์ย่อยให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ A หรือ B (2x2) นั่นคือ $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & 9\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A\Diamond B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & 9\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3 & -21\\ 15 & 45\end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า หากเราเลือกให้เมทริกซ์ย่อยของทั้ง A และ B มีขนาดเท่าเดิม นั่นคือ เท่ากับเมทริกซ์ A หรือ B โดยที่ A และ B ต้องมีขนาดที่สามารถดำเนินการคูณปรกติได้ แล้วผลคูณบ็อคซ์สามารถลดรูปเป็นผลคูณปรกติได้

และจากการแบ่งเมทริกซ์ในขนาดที่ต่างกันของตัวอย่างที่ 3.3.3 นี้ จะเห็นว่า $A\Diamond B$ มีคำตอบไม่เท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

ในบทนี้จะกล่าวถึง เมทริกซ์ในรูปแบบของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และความรู้เบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน เช่น พีชคณิตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ผกผัน รวมไปถึงการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่นำการคูณคอนโวลูชันมาประยุกต์ ได้แก่ ผลคูณคอนโวลูชัน และผลคูณฮาดามาร์ดคอนโวลูชัน

4.1 พีชคณิตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ (Algebra of Matrix-valued Functions)

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$ เราเรียก $A: X \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ ว่าฟังก์ชันค่าเมทริกซ์บน X โดยสำหรับแต่ละ $t \in X$ เราสามารถเขียน $A(t)$ ในรูป

$$A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

โดยที่ $a_{ij} : X \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.1.2 ตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ โดยกำหนดให้ $t \in [1,2]$

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & t+1 & t^2 \\ \sin t & e^t & \log t \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 1/t \\ t^2 - 7t \\ \cos^2 t \\ t \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} t & 2t-5 & t^2 \\ e^t & \log t & \sin t \\ 1/t & \cos t & \log t \end{bmatrix} \qquad D(t) = \begin{bmatrix} t & t-5 \\ t^2 & \sin t \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 4.1.3 การบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A,B:X\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดย $A(t)=[a_{ij}(t)]$ และ $B(t)=[b_{ij}(t)]$
สำหรับแต่ละ $t\in X$ เรานิยาม $A+B:X\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดย

$$(A+B)(t)=A(t)+B(t) \quad ,t\in X$$

ตัวอย่าง 4.1.4 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t & t+1 & t^2 \\ \sin t & e^t & \log t \end{bmatrix}$ และ $B(t)=\begin{bmatrix} 2t+5 & t^3 & -6t^2 \\ \cos t & 7 & -5t \end{bmatrix}$
เมื่อ $t\in(0,\infty)$

$$\begin{aligned} A(t)+B(t) &= \begin{bmatrix} t+(2t+5) & t+1+(t^3) & t^2+(-6t^2) \\ \sin t+(\cos t) & e^t+(7) & \log t+(-5t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3t+5 & t^3+t+1 & -5t^2 \\ \sin t+\cos t & e^t+7 & \log t-5t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

บทนิยาม 4.1.5 การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A:X\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดย $A(t)=[a_{ij}(t)]$ และ $f:X\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน
สำหรับแต่ละ $t\in X$ เรานิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน
$fA:X\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดย

$$(fA)(t)=f(t)A(t)$$

ตัวอย่าง 4.1.6 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t & t+1 & t^2 \\ \sin t & e^t & \log t \end{bmatrix}$ และ $f(t)=t$ เมื่อ $t>0$

$$\begin{aligned} f(t)A(t) &= \begin{bmatrix} t(t) & t(t+1) & t(t^2) \\ t(\sin t) & t(e^t) & t(\log t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t^2 & t^2+t & t^3 \\ t\sin t & te^t & t\log t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.1.7 สมบัติของการบวกและการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A,B,C:X\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $r,s:X\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. $A(t)+B(t)=B(t)+A(t)$
2. $(A(t)+B(t))+C(t)=A(t)+(B(t)+C(t))$
3. $A(t)+0=A(t)$ เมื่อ 0 เป็นเมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกมีค่าเป็น 0
4. $r(t)(A(t)+B(t))=r(t)A(t)+r(t)B(t)$
5. $(r(t)+s(t))A(t)=r(t)A(t)+s(t)A(t)$
6. $r(t)(s(t)A(t))=(r(t)s(t))A(t)$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]$

1. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}A(t)+B(t) &= \left[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right]\\ &= \left[b_{ij}(t)+a_{ij}(t)\right]\\ &= B(t)+A(t)\end{aligned}$$

2. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}(A(t)+B(t))+C(t) &= \left[(a_{ij}(t)+b_{ij}(t))+c_{ij}(t)\right]\\ &= \left[a_{ij}(t)+(b_{ij}(t)+c_{ij}(t))\right]\\ &= A(t)+(B(t)+C(t))\end{aligned}$$

3. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$A(t)+0=\left[a_{ij}(t)+0\right]=\left[a_{ij}(t)\right]=A(t)$$

4. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}r(t)(A(t)+B(t)) &= r(t)\left[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right]\\ &= \left[r(t)a_{ij}(t)+r(t)b_{ij}(t)\right]\\ &= r(t)A(t)+r(t)B(t)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}(r(t)+s(t))A(t) &= (r(t)+s(t))\left[a_{ij}(t)\right] \\ &= \left[r(t)a_{ij}(t)+s(t)a_{ij}(t)\right] \\ &= r(t)A(t)+s(t)A(t)\end{aligned}$$

6. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}r(t)(s(t)A(t)) &= r(t)\left[s(t)a_{ij}(t)\right] \\ &= \left[r(t)(s(t)a_{ij}(t))\right] \\ &= \left[(r(t)s(t))a_{ij}(t)\right] \\ &= (r(t)s(t))\left[a_{ij}(t)\right] \\ &= (r(t)s(t))A(t)\end{aligned}$$

บทนิยาม 4.1.8 การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A: X \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B: X \to M_{n,r}(\mathbb{R})$ โดย $A(t)=[a_{ij}(t)]$ และ $B(t)=[b_{ij}(t)]$ สำหรับแต่ละ $t \in X$ เรานิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ $AB: X \to M_{m,r}(\mathbb{R})$ โดย

$$(AB)(t) = A(t)B(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right]$$

ตัวอย่าง 4.1.9 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t & t-5 \\ t^2 & \sin t \end{bmatrix}$, $B(t)=\begin{bmatrix} 2t+5 & t^3 & -6t^2 \\ \cos t & 7 & -5t \end{bmatrix}$ เมื่อ $t \in [0,\infty)$

$$A(t)B(t) = \begin{bmatrix} t(2t+5)+(t-5)\cos t & t(t^3)+(t-5)7 & t(-6t^2)+(t-5)(-5t) \\ t^2(2t+5)+\sin t(\cos t) & t^2(t^3)+\sin t(7) & t^2(-6t^2)+\sin t(-5t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2t^2+5t+t\cos t-5\cos t & t^4+7t-35 & -6t^3-5t^2+25t \\ 2t^3+5t^2+\sin t\cos t & t^5+7\sin t & -6t^4-5t\sin t \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.1.10 สมบัติของการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ A,B,C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่นิยามบนเซต X
ให้ $t \in X$ สมมติว่า $A(t),B(t),C(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

1. $A(t)\left[B(t)C(t)\right]=\left[A(t)B(t)\right]C(t)$
2. $A(t)\left(B(t)+C(t)\right)=\left[A(t)B(t)\right]+\left[A(t)C(t)\right]$
3. $\left[B(t)+C(t)\right]A(t)=\left[B(t)A(t)\right]+\left[C(t)A(t)\right]$
4. $r(t)(A(t)B(t))=(r(t)A(t))B(t)=A(t)(r(t)B(t))$ เมื่อ $r:X\to\mathbb{R}$
5. $I_m A(t)=A(t)=A(t)I_n$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M_{n,p}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]\in M_{p,q}$

โดยนิยามการคูณของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}
A(t)\left[B(t)C(t)\right] &= A(t)\left[\sum_{k=1}^{p} b_{ik}(t)c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{iq}(t)b_{qk}(t)c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)b_{qk}(t)c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)b_{qk}(t)\right]C(t) \\
&= \left[A(t)B(t)\right]C(t)
\end{aligned}$$

2. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M_{n,p}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]\in M_{n,p}$

โดยนิยามการคูณและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}
A(t)\left(B(t)+C(t)\right) &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)(b_{kj}(t)+c_{kj}(t))\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t)+a_{ik}(t)c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t)+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[A(t)B(t)\right]+\left[A(t)C(t)\right]
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{n,p}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$ โดยนิยามการคูณและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}\left[B(t)+C(t)\right]A(t) &= \left[\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}(t)+c_{ik}(t))a_{kj}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(t)a_{kj}(t)+c_{ik}(t)a_{kj}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(t)a_{kj}(t)+\sum_{k=1}^{n}c_{ik}(t)a_{kj}(t)\right]\\ &= \left[B(t)A(t)\right]+\left[C(t)A(t)\right]\end{aligned}$$

4. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M_{n,p}$ และ $r(t)$ คือฟังก์ชันใดๆ โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}r(A(t)B(t)) &= r(t)\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}(r(t)a_{ik}(t))b_{kj}(t)\right]\\ &= (rA(t))B(t)\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)(r(t)b_{kj}(t))\right]\\ &= A(t)(rB(t))\end{aligned}$$

5. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$ และ $I_m=\left[i_{ij}\right]\in M_m$ เมื่อ i_{ij} มีค่าเป็น 0 เมื่อ $i\neq j$ และมีค่าเป็น 1 เมื่อ $i=j$ และโดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$I_mA(t)=\left[\sum_{k=1}^{n}i_{ik}a_{kj}(t)\right]=\left[a_{ij}(t)\right]=A(t)$$

$$A(t)I_n=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)i_{kj}\right]=\left[a_{ij}(t)\right]=A(t)$$

ดังนั้น $I_mA(t)=A(t)=A(t)I_n$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 4.1.11 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

ให้ $A: X \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดย $A(t) = [a_{ij}(t)]$ ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน ของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^T สำหรับแต่ละ $t \in X$ เรานิยาม $A^T : X \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ โดย

$$A^T(t) = \left[a_{ji}(t)\right]$$

ตัวอย่าง 4.1.12 ให้ $A(t) = \begin{bmatrix} 2t+5 & t^3 & -6t^2 \\ \cos t & 7 & -5t \end{bmatrix}$ เมื่อ $t \in [1,2]$

$$A^T(t) = \begin{bmatrix} 2t+5 & \cos t \\ t^3 & 7 \\ -6t^2 & -5t \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 4.1.13 สมบัติของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

ให้ A, B เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่นิยามบนเซต X ให้ $t \in X$ สมมติว่า $A(t), B(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

1. $(A^T(t))^T = A(t)$
2. $\left(A(t) + B(t)\right)^T = A^T(t) + B^T(t)$
3. $\left(r(t)A(t)\right)^T = r(t)A^T(t)$ เมื่อ $r: X \to \mathbb{R}$
4. $\left(A(t)B(t)\right)^T = B^T(t)A^T(t)$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right] \in M_{m,n}$ โดยนิยามของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\left(A^T(t)\right)^T = \left(\left[a_{ji}(t)\right]\right)^T = \left[a_{ij}(t)\right] = A(t)$$

2. ให้ $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right] \in M_{m,n}$ และ $B(t) = \left[b_{ij}(t)\right] \in M_{m,n}$

โดยนิยามการบวกและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\left(A(t) + B(t)\right)^T = \left[a_{ij}(t) + b_{ij}(t)\right]^T = \left[a_{ji}(t) + b_{ji}(t)\right] = A^T(t) + B^T(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$ และ $r(t)$ คือฟังก์ชันใดๆ

โดยนิยามการคูณและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\left(r(t)A(t)\right)^T=\left[r(t)a_{ij}(t)\right]^T=\left[r(t)a_{ji}(t)\right]=r(t)A^T(t)$$

4. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}$ และ $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M_{n,p}$

โดยนิยามการคูณและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\begin{aligned}\left(A(t)B(t)\right)^T &= \left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right]^T\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(t)b_{jk}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}b_{jk}(t)a_{ki}(t)\right]\\ &= B^T(t)A^T(t)\end{aligned}$$

4.2 ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน (Matrix Convolution Product)

บทนิยาม 4.2.1 การคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A\in M^{I}_{m,n}$ และ $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

เรานิยาม $f*A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดย

$$\left(f*A\right)(t)=\left[f(t)*a_{ij}(t)\right]=\left[\int_0^t f(\tau)a_{ij}(t-\tau)d\tau\right]$$

เราอาจเขียนแทน $\left(f*A\right)(t)$ ด้วย $f(t)*A(t)$

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix}t & t+1 & t^2\\ \sin t & e^t & \cos t\end{bmatrix}$ และ $f(t)=t$ เมื่อ $t\in[0,1]$

$$\begin{aligned}f(t)*A(t) &= \begin{bmatrix}t*(t) & t*(t+1) & t*(t^2)\\ t*(\sin t) & t*(e^t) & t*(\cos t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} & \frac{t^4}{12}\\ t-\sin t & e^t-1-t & 1-\cos t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติของการบวกและการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ $A,B \in M_{m,n}^{I}$ และ $r,s:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ จะได้ว่า

1. $r(t)*(A(t)+B(t)) = r(t)*A(t)+r(t)*B(t)$
2. $(r(t)+s(t))*A(t) = r(t)*A(t)+s(t)*A(t)$

บทพิสูจน์

1. โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน และคุณสมบัติการแจกแจงของคอนโวลูชัน

$$\begin{aligned} r(t)*(A(t)+B(t)) &= r(t)*\left[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right] \\ &= \left[r(t)*a_{ij}(t)+r(t)*b_{ij}(t)\right] \\ &= r(t)*A(t)+r(t)*B(t) \end{aligned}$$

2. โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน และคุณสมบัติการแจกแจงของคอนโวลูชัน

$$\begin{aligned} (r(t)+s(t))*A(t) &= (r(t)+s(t))*\left[a_{ij}(\mathrm{t})\right] \\ &= \left[r(t)*a_{ij}(\mathrm{t})+s(t)*a_{ij}(\mathrm{t})\right] \\ &= r(t)*A(t)+s(t)*A(t) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.2.4 ให้ $A\in M_{m,n}^{C}$ และให้ $r,s:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[0,b]$ สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ จะได้ว่า

$$r(t)*(s(t)*A(t)) = (r(t)*s(t))*A(t)$$

บทพิสูจน์

โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน และคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของคอนโวลูชัน

$$\begin{aligned} r(t)*(s(t)*A(t)) &= r(t)*\left[s(t)*a_{ij}(\mathrm{t})\right] \\ &= \left[r(t)*(s(t)*a_{ij}(\mathrm{t}))\right] \\ &= \left[(r(t)*s(t))*a_{ij}(\mathrm{t})\right] \\ &= (r(t)*s(t))*\left[a_{ij}(\mathrm{t})\right] \\ &= (r(t)*s(t))*A(t) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 4.2.5 การคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A \in M^I_{m,n}$ และ $B \in M^I_{n,r}$ เรานิยามผลคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ $A*B \in M^I_{m,r}$ โดย

$$(A*B)(t) = A(t)*B(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)\right] = \left[\sum_{k=1}^{n}\int_0^t a_{ik}(\tau)b_{kj}(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right]$$

ตัวอย่าง 4.2.6 ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 \\ t \\ \sin t \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e^t & t+1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} t^2 \\ \cos t \\ t^3 - t \end{bmatrix}$ แล้ว

$$A(t)*B(t) = \begin{bmatrix} (5)*(e^t) & (5)*(t+1) \\ (t)*(e^t) & (t)*(t+1) \\ (\sin t)*(e^t) & (\sin t)*(t+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5e^t - 5 & 5\dfrac{t^2}{2} + 5t \\ e^t - t - 1 & \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} \\ \dfrac{e^t - \cos t - \sin t}{2} & t - \cos t - \sin t + 1 \end{bmatrix}$$

แต่ $A(t)*C(t)$ ไม่สามารถนิยามได้เนื่องจากจำนวนคอลัมน์ของ $A(t)$ ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ $C(t)$

สมบัติของการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 4.2.7 ให้ A, B, C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[0,b]$

ให้ $t \in [0,b]$ สมมติว่า $A(t), B(t), C(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

1. $A(t)*\big(B(t)+C(t)\big) = \big[A(t)*B(t)\big] + \big[A(t)*C(t)\big]$
2. $\big[B(t)+C(t)\big]*A(t) = \big[B(t)*A(t)\big] + \big[C(t)*A(t)\big]$
3. $r(t)*(A(t)*B(t)) = (r(t)*A(t))*B(t) = A(t)*(r(t)*B(t))$

เมื่อ $r:[0,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{n,p}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{n,p}$

โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}A(t)*\big(B(t)+C(t)\big) &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*(b_{kj}(t)+c_{kj}(t))\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)+a_{ik}(t)*c_{kj}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*c_{kj}(t)\right]\\ &= \left[A(t)*B(t)\right]+\left[A(t)*C(t)\right]\end{aligned}$$

2. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{n,p}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{m,n}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{m,n}$

โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}\left[B(t)+C(t)\right]*A(t) &= \left[\sum_{k=1}^{n} (b_{ik}(t)+c_{ik}(t))*a_{kj}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)*a_{kj}(t)+c_{ik}(t)*a_{kj}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)*a_{kj}(t)+\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(t)*a_{kj}(t)\right]\\ &= \left[B(t)*A(t)\right]+\left[C(t)*A(t)\right]\end{aligned}$$

3. ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{n,p}$ และ $r(t)$ คือฟังก์ชันใดๆที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[0,b]$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}r(t)*(A(t)*B(t)) &= r(t)*\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*b_{kj}(t)\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} (r(t)*a_{ik}(t))*b_{kj}(t)\right]\\ &= (r(t)*A(t))*B(t)\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)*(r(t)*b_{kj}(t))\right]\\ &= A(t)*(r(t)*B(t))\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.2.8 ให้ A,B,C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่ต่อเนื่องบนช่วง $[0,b]$

ให้ $t \in [0,b]$ สมมติว่า $A(t),B(t),C(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

$$A(t)*\left[B(t)*C(t)\right]=\left[A(t)*B(t)\right]*C(t)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M^{C}_{m,n}$, $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M^{C}_{n,p}$ และ $C(t)=\left[c_{ij}(t)\right]\in M^{C}_{p,q}$

โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}
A(t)*\left[B(t)*C(t)\right] &= A(t)*\left[\sum_{k=1}^{p} b_{ik}(t)*c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{iq}(t)*b_{qk}(t)*c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)*b_{qk}(t)*c_{kj}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{q=1}^{n} a_{iq}(t)*b_{qk}(t)\right]*C(t) \\
&= \left[A(t)*B(t)\right]*C(t)
\end{aligned}$$

สมบัติของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนกับการคูณคอนโวลูชัน

ทฤษฎีบท 4.2.9 ให้ $A\in M^{I}_{m,n}$ และ $r:[0,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ จะได้ว่า

$$\left(r(t)*A(t)\right)^{T}=r(t)*A^{T}(t)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{m,n}$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\begin{aligned}
\left(r(t)*A(t)\right)^{T} &= \left[r(t)*a_{ij}(t)\right]^{T} \\
&= \left[r(t)*a_{ji}(t)\right] \\
&= r(t)*A^{T}(t)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.2.10 ให้ $A \in M_{m,n}^{C}$ และ $B \in M_{n,r}^{C}$ สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ จะได้ว่า

$$\big(A(t) * B(t)\big)^{T} = B^{T}(t) * A^{T}(t)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t) = \big[a_{ij}(t)\big] \in M_{m,n}^{C}$ และ $B(t) = \big[b_{ij}(t)\big] \in M_{n,r}^{C}$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\begin{aligned}
\big(A(t) * B(t)\big)^{T} &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) * b_{kj}(t)\right]^{T} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ki}(t) * b_{jk}(t)\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} b_{jk}(t) * a_{ki}(t)\right] \\
&= B^{T}(t) * A^{T}(t)
\end{aligned}$$

4.3 ผลคูณฮาดามาร์ดคอนโวลูชัน (Hadamard Convolution Product)

บทนิยาม 4.3.1 ให้ $A, B \in M_{m,n}^{I}$ โดย $A(t) = \big[a_{ij}(t)\big]$ และ $B(t) = \big[b_{ij}(t)\big]$ สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ เรานิยามผลคูณฮาดามาร์ดคอนโวลูชัน $A \bullet B : [0,b] \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดย

$$\big(A \bullet B\big)(t) = A(t) \bullet B(t) = \big[a_{ij}(t) * b_{ij}(t)\big]$$

เราอาจเขียนแทน $\big(A \bullet B\big)(t)$ ด้วย $A(t) \bullet B(t)$

ตัวอย่าง 4.3.2 ให้ $A(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ t \\ \sin t \end{bmatrix}$ และ $B(t) = \begin{bmatrix} t^{2} \\ \cos t \\ t^{3} - t \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A(\mathrm{t}) \bullet B(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} (5) * (t^{2}) \\ (t) * (\cos t) \\ (\sin t) * (t^{3} - t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\dfrac{t^{3}}{3} \\ 1 - \cos t \\ t^{3} - 7t + 7\sin t \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.3.3 ให้ $A, B \in M_{m,n}^{C}$ สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ จะได้ว่า

$$A(t) \bullet B(t) = B(t) \bullet A(t)$$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned} A(t) \bullet B(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) * b_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) * b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) * b_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) * b_{mn}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) * a_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) * a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(t) * a_{m1}(t) & \cdots & b_{mn}(t) * a_{mn}(t) \end{bmatrix} \\ &= B(t) \bullet A(t) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.3.4 ให้ $A, B, C \in M_{m,n}^{I}$ และ $r : [0,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ จะได้ว่า

1. $C(t) \bullet (A(t) + B(t)) = C(t) \bullet A(t) + C(t) \bullet B(t)$
2. $r(t) * (A(t) \bullet B(t)) = (r(t) * A(t)) \bullet B(t) = A(t) \bullet (r(t) * B(t))$

บทพิสูจน์

1. $C(t) \bullet (A(t) + B(t))$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) * \left(a_{11}(t) + b_{11}(t)\right) & \cdots & c_{1n}(t) * \left(a_{1n}(t) + b_{1n}(t)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) * \left(a_{m1}(t) + b_{m1}(t)\right) & \cdots & c_{mn}(t) * \left(a_{mn}(t) + b_{mn}(t)\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) * a_{11}(t) + c_{11}(t) * b_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) * a_{1n}(t) + c_{1n}(t) * b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) * a_{m1}(t) + c_{m1}(t) * b_{m1}(t) & \cdots & c_{mn}(t) * a_{mn}(t) + c_{mn}(t) * b_{mn}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) * a_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) * a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) * a_{m1}(t) & \cdots & c_{mn}(t) * a_{mn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(t) * b_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) * b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) * b_{m1}(t) & \cdots & c_{mn}(t) * b_{mn}(t) \end{bmatrix} \\ &= C(t) \bullet A(t) + C(t) \bullet B(t) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. $r(t)*(A(t)\bullet B(t))$

$$=\begin{bmatrix} r(t)*\left(a_{11}(t)*b_{11}(t)\right) & \cdots & r(t)*\left(a_{1n}(t)*b_{1n}(t)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r(t)*\left(a_{m1}(t)*b_{m1}(t)\right) & \cdots & r(t)*\left(a_{mn}(t)*b_{mn}(t)\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(r(t)*a_{11}(t)\right)*b_{11}(t) & \cdots & \left(r(t)*a_{1n}(t)\right)*b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(r(t)*a_{m1}(t)\right)*b_{m1}(t) & \cdots & \left(r(t)*a_{mn}(t)\right)*b_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

$$=(r(t)*A(t))\bullet B(t)$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}(t)*\left(r(t)*b_{11}(t)\right) & \cdots & a_{1n}(t)*\left(r(t)*b_{1n}(t)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t)*\left(r(t)*b_{m1}(t)\right) & \cdots & a_{mn}(t)*\left(r(t)*b_{mn}(t)\right) \end{bmatrix}$$

$$=A(t)\bullet(r(t)*B(t))$$

ความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับผลคูณคอนโวลูชัน และผลคูณฮาดามาร์ดคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ สามารถหาได้จาก [5]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ในบทนี้จะกล่าวถึง ผลคูณของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์รูปแบบใหม่ซึ่งเป็นการผสมผสานระหว่างผลคูณบ็อคซ์ และผลคูณคอนโวลูชัน ซึ่งในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาถึงนิยาม ตัวอย่าง และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาและนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

5.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน (Definition and Examples of Box Convolution Product)

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $A=\left[A_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{mp,nq}$ และ $B=\left[B_{ij}(t)\right]\in M^{I}_{mq,nr}$ เป็นเมทริกซ์ถูกแบ่งเป็นเมทริกซ์ย่อย A_{ij} และ B_{ij} โดยมีขนาดเป็น p x q และ q x r ตามลำดับ จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันของเมทริกซ์ A และ B แทนด้วยสัญลักษณ์ $A\blacklozenge B$ นิยามโดย $A\blacklozenge B:[0,b]\to M_{mp,nr}$ โดยที่

$$(A\blacklozenge B)(t) \quad =\left[A_{ij}(t)*B_{ij}(t)\right]\in M_{mp,nr}$$

เมื่อ $A_{ij}(t)*B_{ij}(t)$ คือ เมทริกซ์ย่อยที่ ij โดยมีขนาดเป็น p x r

ข้อสังเกต หากเลือกให้เมทริกซ์ย่อยของทั้ง A และ B มีบล็อกย่อยเดียว และ A และ B สามารถดำเนินการคูณปรกติได้ แล้ว ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันสามารถลดรูปเป็นผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชันได้

หากเลือกให้เมทริกซ์ย่อยของทั้ง A และ B มีขนาด 1x1 แล้ว ผลคูณบ็อคซ์-คอนโวลูชันสามารถลดรูปเป็นผลคูณฮาดามาร์ดคอนโวลูชันได้

ตัวอย่าง 5.1.2 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} 2 & t \\ \sin t & \sin 2t \\ e^{t} & \cos t \\ t^{2} & t-1 \end{bmatrix}$ และ $B(t)=\begin{bmatrix} t & 5 & t-1 & \sin t & \cos t & t^{2} \\ t^{3} & e^{t} & e^{2t} & 3t & \sin 3t & 3t^{2} \end{bmatrix}$

เลือกแบ่ง A และ B ให้แต่ละเมทริกซ์ย่อยมีขนาด 2x1 และ 1x3 ตามลำดับ นั่นคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(t)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ \sin t\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}t\\ \sin 2t\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}e^t\\ t^2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\cos t\\ t-1\end{bmatrix}\end{bmatrix} \text{ และ } B(t)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}t & 5 & t-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sin t & \cos t & t^2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}t^3 & e^t & e^{2t}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3t & \sin 3t & 3t^2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$(A \diamondsuit B)(t) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ \sin t\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}t & 5 & t-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}t\\ \sin 2t\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\sin t & \cos t & t^2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}e^t\\ t^2\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}t^3 & e^t & e^{2t}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\cos t\\ t-1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}3t & \sin 3t & 3t^2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2 & 10t & t^2-2t\\ t-\sin t & 5-5\cos t & \cos t-\sin t+t-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}t-\sin t & 1-\cos t & \frac{t^4}{12}\\ -\frac{2}{3}(\cos t-1)\sin t & \frac{2}{3}(\cos t-\cos 2t) & \frac{1}{4}(\cos 2t+2t^2-1)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}6e^t-t^3-3t^2-6t-6 & e^t t & e^t(e^t-1)\\ \frac{t^6}{60} & 2e^t-t^2-2t-2 & \frac{1}{4}(e^{2t}-2t^2-2t-1)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3-3\cos t & \frac{3}{2}\cos t\sin^2 t & 6(t-\sin t)\\ \frac{t^3}{2}-\frac{3t^2}{2} & \frac{1}{9}(3\cos 3t-\sin 3t+3t-3) & \frac{t^4}{4}-t^3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

5.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และการสลับที่ของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน (The associative and commutative properties of Box Convolution Product)

ทฤษฎีบท 5.2.1 ให้ $A \in M^C_{mp,nq}$, $B \in M^C_{mq,nr}$ และ $C \in M^C_{mr,ns}$ จะได้ว่า

$$(A \diamondsuit B) \diamondsuit C = A \diamondsuit (B \diamondsuit C)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[A_{hk}(t)\right] \in M^C_{mp,nq}$, $B(t)=\left[B_{hk}(t)\right] \in M^C_{mq,nr}$, $C(t)=\left[C_{hk}(t)\right] \in M^C_{mr,ns}$

โดยที่ $A_{hk}(t)=\left[f_{ij}(t)\right]$, $B_{hk}(t)=\left[g_{ij}(t)\right]$, $C_{hk}(t)=\left[s_{ij}(t)\right]$

สมมติ $A_{hk} \in M^C_{p,q}$, $B_{hk} \in M^C_{q,r}$ และ $C_{hk} \in M^C_{r,s}$

สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ โดยนิยามของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน

จะได้ว่า $(A \diamondsuit B) \diamondsuit C=\left[\left(A_{hk} * B_{hk}\right) * C_{hk}\right]$

พิจารณาตำแหน่งที่ i, j ของ $\left[\left(A_{hk} * B_{hk}\right) * C_{hk}\right]$ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left[\sum_{\theta=1}^{q}(f_{i\theta} * g_{\theta j})\right] * C_{hk} = \left[\sum_{\phi=1}^{r}\sum_{\theta=1}^{q}(f_{i\theta} * g_{\theta\phi}) * s_{\phi j}\right]$$

$$= \left[\sum_{\phi=1}^{r}\sum_{\theta=1}^{q} f_{i\theta} * \left(g_{\theta\phi} * s_{\phi j}\right)\right] \quad \text{โดยทฤษฎีบท 2.2.6}$$

$$= A_{hk} * \left[\sum_{\phi=1}^{r}\left(g_{i\phi} * s_{\phi j}\right)\right]$$

เนื่องจากผลบวกทางด้านขวาของสมการคือสมาชิกตำแหน่งที่ i, j ของ $\left[A_{hk} * \left(B_{hk} * C_{hk}\right)\right]$

ดังนั้น $(A \diamondsuit B) \diamondsuit C = A \diamondsuit (B \diamondsuit C)$

ทฤษฎีบท 5.2.2 ให้ $A \in M^{C}_{mp,nq}$ และ $B \in M^{C}_{mq,nr}$ ถ้า $p = q = r = 1$ แล้ว

$$A \diamondsuit B = B \diamondsuit A$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t) = [f_{ij}(t)] \in M^{C}_{m,n}$ และ $B(t) = [g_{ij}(t)] \in M^{C}_{m,n}$

พิจารณาตำแหน่งที่ i, j ของ $A \diamondsuit B$ คือ

$$\left[f_{ij}(t) * g_{ij}(t)\right] = \left[g_{ij}(t) * f_{ij}(t)\right] \quad \text{โดยทฤษฎีบท 2.2.6}$$

ดังนั้น $A \diamondsuit B = B \diamondsuit A$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 5.2.2 นี้เลือกแบ่งบล็อคของเมทริกซ์ย่อยให้มีขนาด 1x1 ดังนั้น ผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันข้างต้นนั้นก็คือผลคูณฮาดามาร์ดคอนโวลูชันนั่นเอง

5.3 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ (The Connection between Box Convolution Product and Addition and Scalar Multiplication)

ทฤษฎีบท 5.3.1 ให้ $A, B \in M^{I}_{mp,nq}$ และ $C \in M^{I}_{mq,nr}$ จะได้ว่าสำหรับฟังก์ชัน α, β ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[0, b]$

$$(\alpha A + \beta B) \diamondsuit C = \alpha(A \diamondsuit C) + \beta(B \diamondsuit C)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[A_{hk}(t)\right]\in M^{I}_{mp,nq}, B(t)=\left[B_{hk}(t)\right]\in M^{I}_{mp,nq}, C(t)=\left[C_{hk}(t)\right]\in M^{I}_{mq,nr}$

โดยที่ $A_{hk}(t)=\left[f_{ij}(t)\right]$, $B_{hk}(t)=\left[g_{ij}(t)\right]$, $C_{hk}(t)=\left[s_{ij}(t)\right]$

สมมติ $A_{hk},B_{hk}\in M^{I}_{p,q}$ และ $C_{hk}\in M^{I}_{q,r}$

สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ โดยนิยามของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน

จะได้ว่า $\left(\alpha(t)A(t)+\beta(t)B(t)\right)\diamondsuit C(t)=\left[\left(\alpha(t)A_{hk}(t)+\beta(t)B_{hk}(t)\right)*C_{hk}(t)\right]$

พิจารณาสมาชิกในตำแหน่งที่ i,j ของ $\left(\left(\alpha A_{hk}+\beta B_{hk}\right)*C_{hk}\right)(t)$

จะได้ว่า โดยทฤษฎีบท 2.2.5

$$\left[\sum_{\theta=1}^{q}\left(\alpha(t)f_{i\theta}(t)+\beta(t)g_{i\theta}(t)\right)*s_{\theta j}(t)\right]=\left[\alpha(t)\sum_{\theta=1}^{q}\left(f_{i\theta}(t)*s_{\theta j}(t)\right)\right]+\left[\beta(t)\sum_{\theta=1}^{q}\left(g_{i\theta}(t)*s_{\theta j}(t)\right)\right]$$

เนื่องจากผลบวกทางด้านขวาของสมการคือสมาชิกในตำแหน่งที่ i,j ของ

$\left(\alpha\left(A_{hk}*C_{hk}\right)\right)(t)$ และ $\left(\beta\left(B_{hk}*C_{hk}\right)\right)(t)$ ตามลำดับ

ดังนั้น $\left(\left(\alpha A_{hk}+\beta B_{hk}\right)*C_{hk}\right)(t)=\left(\alpha\left(A_{hk}*C_{hk}\right)+\beta\left(B_{hk}*C_{hk}\right)\right)(t)$

เพราะฉะนั้น $\left(\alpha A+\beta B\right)\diamondsuit C=\alpha(A\diamondsuit C)+\beta(B\diamondsuit C)$

ทฤษฎีบท 5.3.2 ให้ $A\in M^{I}_{mp,nq}$ และ $B,C\in M^{I}_{mq,nr}$ จะได้ว่าสำหรับฟังก์ชัน α,β ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,b]$

$$A\diamondsuit\left(\alpha B+\beta C\right)=\alpha(A\diamondsuit B)+\beta(A\diamondsuit C)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[A_{hk}(t)\right]\in M^{I}_{mp,nq}, B(t)=\left[B_{hk}(t)\right]\in M^{I}_{mq,nr}, C(t)=\left[C_{hk}(t)\right]\in M^{I}_{mq,nr}$

โดยที่ $A_{hk}(t)=\left[f_{ij}(t)\right]$, $B_{hk}(t)=\left[g_{ij}(t)\right]$, $C_{hk}(t)=\left[s_{ij}(t)\right]$

สมมติ $A_{hk}\in M^{I}_{p,q}$ และ $B_{hk},C_{hk}\in M^{I}_{q,r}$

สำหรับแต่ละ $t\in[0,b]$ โดยนิยามของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน

จะได้ว่า $A(t)\diamondsuit\left(\alpha(t)B(t)+\beta(t)C(t)\right)=\left[A_{hk}(t)*\left(\alpha(t)B_{hk}(t)+\beta(t)C_{hk}(t)\right)\right]$

พิจารณาสมาชิกในตำแหน่งที่ i,j ของ $\left(A_{hk}*\left(\alpha B_{hk}+\beta C_{hk}\right)\right)(t)$

จะได้ว่า โดยทฤษฎีบท 2.2.5

$$\left[\sum_{\theta=1}^{q}f_{i\theta}(t)*\left(\alpha(t)g_{\theta j}(t)+\beta(t)s_{\theta j}(t)\right)\right]=\left[\alpha(t)\sum_{\theta=1}^{q}\left(f_{i\theta}(t)*g_{\theta j}(t)\right)\right]+\left[\beta(t)\sum_{\theta=1}^{q}\left(f_{i\theta}(t)*s_{\theta j}(t)\right)\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากผลบวกทางด้านขวาของสมการคือสมาชิกในตำแหน่งที่ i, j ของ $\left(\alpha\left(A_{hk} * B_{hk}\right)\right)(t)$ และ $\left(\beta\left(A_{hk} * C_{hk}\right)\right)(t)$ ตามลำดับ

ดังนั้น $\left(A_{hk} * \left(\alpha B_{hk} + \beta C_{hk}\right)\right)(t) = \left(\alpha\left(A_{hk} * B_{hk}\right) + \beta\left(A_{hk} * C_{hk}\right)\right)(t)$

เพราะฉะนั้น $A \diamondsuit \left(\alpha B + \beta C\right) = \alpha(A \diamondsuit B) + \beta(A \diamondsuit C)$

ทฤษฎีบท 5.3.3 ให้ $A \in M^{C}_{mp,nq}$ และ $B \in M^{C}_{mq,nr}$ จะได้ว่าสำหรับฟังก์ชัน α ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[0,b]$

$$\alpha * (A \diamondsuit B) = (\alpha * A) \diamondsuit B = A \diamondsuit (\alpha * B)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t) = \left[A_{hk}(t)\right] \in M^{C}_{mp,nq}$ และ $B(t) = \left[B_{hk}(t)\right] \in M^{C}_{mq,nr}$

โดยที่ $A_{hk}(t) = \left[f_{ij}(t)\right]$ และ $B_{hk}(t) = \left[g_{ij}(t)\right]$

สมมติ $A_{hk} \in M^{C}_{p,q}$ และ $B_{hk} \in M^{C}_{q,r}$

สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ โดยนิยามของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน

จะได้ว่า $\alpha(t) * (A(t) \diamondsuit B(t)) = \alpha(t) * \left[A_{hk}(t) * B_{hk}(t)\right]$

พิจารณาตำแหน่งที่ i, j ของ $\left(\alpha * \left[A_{hk} * B_{hk}\right]\right)(t)$ คือ

$$\begin{aligned}
\alpha(t) * \left[\sum_{\theta=1}^{q} f_{i\theta}(t) * g_{\theta j}(t)\right] &= \left[\sum_{\theta=1}^{q} \alpha(t) * \left(f_{i\theta}(t) * g_{\theta j}(t)\right)\right] \\
&= \left[\sum_{\theta=1}^{q} \left(\alpha(t) * f_{i\theta}(t)\right) * g_{\theta j}(t)\right] \quad \text{โดยทฤษฎีบท 2.2.6} \\
&= \left[\sum_{\theta=1}^{q} f_{i\theta}(t) * \left(\alpha(t) * g_{\theta j}(t)\right)\right]
\end{aligned}$$

เนื่องจากผลบวกทางด้านขวาของสมการในบรรทัดที่ 2 และ 3 คือสมาชิกในตำแหน่งที่ i, j ของ $\left(\left(\alpha * A_{hk}\right) * B_{hk}\right)(t)$ และ $\left(A_{hk} * \left(\alpha * B_{hk}\right)\right)(t)$ ตามลำดับ

ดังนั้น $\left(\alpha * \left(A_{hk} * B_{hk}\right)\right)(t) = \left(\left(\alpha * A_{hk}\right) * B_{hk}\right)(t) = \left(A_{hk} * \left(\alpha * B_{hk}\right)\right)(t)$

เพราะฉะนั้น $\alpha * (A \diamondsuit B) = (\alpha * A) \diamondsuit B = A \diamondsuit (\alpha * B)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.4 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับการสลับเปลี่ยน (The Connection between Box Convolution Product and Transpose)

ทฤษฎีบท 5.4.1 ให้ $A,B \in M^{C}_{mp,np}$ จะได้ว่า

$$(A \diamondsuit B)^{T} = B^{T} \diamondsuit A^{T}$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[A_{hk}(t)\right] \in M^{C}_{mp,np}$ และ $B(t)=\left[B_{hk}(t)\right] \in M^{C}_{mp,np}$

โดยที่ $A_{hk}(t)=\left[f_{ij}(t)\right]$ และ $B_{hk}(t)=\left[g_{ij}(t)\right]$

สมมติ $A_{hk},B_{hk} \in M^{C}_{p}$

จะได้ว่า $A^{T}(t)=\left[A^{T}{}_{hk}(t)\right]$ และ $B^{T}(t)=\left[B^{T}{}_{hk}(t)\right]$

โดยที่ $A^{T}_{hk}(t)=\left[\hat{f}_{ij}(t)\right]$ และ $B^{T}_{hk}(t)=\left[\hat{g}_{ij}(t)\right]$

เมื่อ $\hat{f}_{ij}(t)=f_{ji}(t)$ และ $\hat{g}_{ij}(t)=g_{ji}(t)$

สำหรับแต่ละ $t \in [0,b]$ โดยนิยามของผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน

จะได้ว่า $B^{T}(t) \diamondsuit A^{T}(t)=\left[B^{T}{}_{hk}(t) * A^{T}{}_{hk}(t)\right]$

พิจารณาสมาชิกในตำแหน่งที่ i,j ของ $\left(B^{T}{}_{hk} * A^{T}{}_{hk}\right)(t)$ จะได้ว่า

$$\left[\sum_{\theta=1}^{p}\left(\hat{g}_{i\theta}(t) * \hat{f}_{\theta j}(t)\right)\right] = \left[\sum_{\theta=1}^{p}\left(\hat{f}_{\theta j}(t) * \hat{g}_{i\theta}(t)\right)\right] \quad \text{โดยทฤษฎีบท 2.2.6}$$

$$= \left[\sum_{\theta=1}^{p}\left(f_{j\theta}(t) * g_{\theta i}(t)\right)\right]$$

เนื่องจากผลบวกทางด้านขวาของสมการคือสมาชิกตำแหน่งที่ j,i ของ $\left(A_{hk} * B_{hk}\right)(t)$

นั่นคือสมาชิกตำแหน่งที่ i,j ของ $\left(A_{hk} * B_{hk}\right)^{T}(t)$

ดังนั้น $\left(B^{T}{}_{hk} * A^{T}{}_{hk}\right)(t)=\left(A_{hk} * B_{hk}\right)^{T}(t)$

เพราะฉะนั้น $(A \diamondsuit B)^{T} = B^{T} \diamondsuit A^{T}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.5 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับตัวทำสลับที่ (The Connection between Box Convolution Product and Commutators)

บทนิยาม 5.5.1 ตัวทำสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชัน (Box Convolution Commutator)

ให้ $A,B \in M^{I}_{mp,np}$ ตัวทำสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชันของ A และ B เขียนแทนด้วย $\langle A;B \rangle$ นิยามโดย

$$\langle A;B \rangle = A \diamondsuit B - B \diamondsuit A$$

ตัวอย่าง 5.5.2 ให้ $A(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & e^t \\ 3t & \sin t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 & \cos t \\ t+1 & 2t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

และ $B(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t+1 & t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-2 & 3t \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

พิจารณา

$$(A \diamondsuit B)(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & e^t \\ 3t & \sin t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 & \cos t \\ t+1 & 2t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \diamondsuit \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t+1 & t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-2 & 3t \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}-t+2e^t-2 & \frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+2e^t-2t-2 \\ 3t^2+t-\cos t-\sin t+1 & \frac{t^3}{2}+t^2+2\cos t-2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t\sin t & \frac{t^4}{12}+\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t) \\ 2t-2\sin t & (\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})-2\cos t+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{5t^2}{2} & \frac{-7t^2}{2} \\ 16t-\frac{3}{2}t^2 & -(\frac{9}{2}t^2+14t) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(B \diamondsuit A)(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t+1 & t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-2 & 3t \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \diamondsuit \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & e^t \\ 3t & \sin t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 & \cos t \\ t+1 & 2t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2} & e^t+t-\sin t-1 \\ \frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & t^2+2e^t-2\cos t-4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \\ t^2+\cos t+\sin t-1 & \frac{1}{2}t\sin t-2\cos t+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{-9t^2}{2} & \frac{t^3}{6}-t^2 \\ 21t & -14t+5\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\langle A;B\rangle(t)$$

$$=\left[\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}-t+2e^t-2 & \frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+2e^t-2t-2 \\ 3t^2+t-\cos t-\sin t+1 & \frac{t^3}{2}+t^2+2\cos t-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t\sin t & \frac{t^4}{12}+\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t) \\ 2t-2\sin t & (\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})-2\cos t+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5t^2}{2} & \frac{-7t^2}{2} \\ 16t-\frac{3}{2}t^2 & -(\frac{9}{2}t^2+14t) \end{bmatrix}\right]$$

$$-\left[\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2} & e^t+t-\sin t-1 \\ \frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & t^2+2e^t-2\cos t-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \\ t^2+\cos t+\sin t-1 & \frac{1}{2}t\sin t-2\cos t+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-9t^2}{2} & \frac{t^3}{6}-t^2 \\ 21t & -14t+5\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{bmatrix} 2e^t-\frac{t^3}{2}-t-2 & \frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}-3t+\sin t+e^t-1 \\ -\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{6}-\frac{5t^2}{2}+t-\cos t-\sin t+1 & \frac{t^3}{2}-2e^t+4\cos t+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t\sin t-\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2} & \frac{t^4}{12}+\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)-\frac{t^3}{3} \\ -t^2+2t-\cos t-3\sin t+1 & \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}-\frac{1}{2}t\sin t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7t^2 & \frac{-5t^2}{2}-\frac{t^3}{6} \\ -\frac{3}{2}t^2-5t & -7t^2 \end{bmatrix}\right]$$

ทฤษฎีบท 5.5.3 สมบัติของตัวทำสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชัน (The Properties of Box Convolution Commutator)

ให้ A,B และ $C\in M^I_{mp,np}$ สำหรับแต่ละ ϕ ที่เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,b]$ จะได้ว่า

1. $\langle A+B;C\rangle=\langle A;C\rangle+\langle B;C\rangle$
2. $\langle \phi A;B\rangle=\phi\langle A;B\rangle$
3. $-\langle A;B\rangle=\langle B;A\rangle$
4. $\langle A;A\rangle=0$
5. $\langle A;\langle B;C\rangle\rangle+\langle B;\langle C;A\rangle\rangle+\langle C;\langle A;B\rangle\rangle=0$ (เอกลักษณ์จาโคบี)

บทพิสูจน์

1. $\langle A+B;C\rangle=\langle A;C\rangle+\langle B;C\rangle$

โดยทฤษฎีบท 5.3.1 และ 5.3.2 จะได้

$$\begin{aligned}\langle A+B;C\rangle &= (A+B)\diamondsuit C-C\diamondsuit(A+B)\\ &= A\diamondsuit C+B\diamondsuit C-C\diamondsuit A-C\diamondsuit B\\ &=[\,A\diamondsuit C-C\diamondsuit A\,]+[\,B\diamondsuit C-C\diamondsuit B\,]\\ &=\langle A;C\rangle+\langle B;C\rangle\end{aligned}$$

2. $\langle \phi A;B\rangle=\phi\langle A;B\rangle$

โดยทฤษฎีบท 5.3.1 และ 5.3.2 จะได้

$$\begin{aligned}\langle \phi A;B\rangle &= \phi A\diamondsuit B-B\diamondsuit \phi A\\ &= \phi(A\diamondsuit B)-\phi(B\diamondsuit A)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \phi(A \diamondsuit B - B \diamondsuit A)$$
$$= \phi\langle A;B\rangle$$

3. $-\langle A;B\rangle = \langle B;A\rangle$

พิจารณา $-\langle A;B\rangle = -(A \diamondsuit B - B \diamondsuit A)$
$$= B \diamondsuit A - A \diamondsuit B$$
$$= \langle B;A\rangle$$

4. $\langle A;A\rangle = 0$

พิจารณา $\langle A;A\rangle = A \diamondsuit A - A \diamondsuit A$
$$= 0$$

5. เอกลักษณ์จาโคบี $\langle A;\langle B;C\rangle\rangle + \langle B;\langle C;A\rangle\rangle + \langle C;\langle A;B\rangle\rangle = 0$

โดยทฤษฎีบท 5.2.1 5.3.1 และ 5.3.2 จะได้

$$\langle A;\langle B;C\rangle\rangle + \langle B;\langle C;A\rangle\rangle + \langle C;\langle A;B\rangle\rangle$$
$$= A \diamondsuit (B \diamondsuit C - C \diamondsuit B) - (B \diamondsuit C - C \diamondsuit B) \diamondsuit A + B \diamondsuit (C \diamondsuit A - A \diamondsuit C)$$
$$-(C \diamondsuit A - A \diamondsuit C) \diamondsuit B + C \diamondsuit (A \diamondsuit B - B \diamondsuit A) - (A \diamondsuit B - B \diamondsuit A) \diamondsuit C$$
$$= A \diamondsuit B \diamondsuit C - A \diamondsuit C \diamondsuit B - B \diamondsuit C \diamondsuit A + C \diamondsuit B \diamondsuit A + B \diamondsuit C \diamondsuit A - B \diamondsuit A \diamondsuit C$$
$$-C \diamondsuit A \diamondsuit B + A \diamondsuit C \diamondsuit B + C \diamondsuit A \diamondsuit B - C \diamondsuit B \diamondsuit A - A \diamondsuit B \diamondsuit C$$
$$+B \diamondsuit A \diamondsuit C$$
$$= 0$$

บทนิยาม 5.5.4 ตัวทำปฏิสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชัน (Box Convolution Anticommutator)

ให้ $A, B \in M^I_{mp,np}$ ตัวทำปฏิสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชันของ A และ B เขียนแทนด้วย $\langle A;B\rangle_+$ นิยามโดย

$$\langle A;B\rangle_+ = A \diamondsuit B + B \diamondsuit A$$

ตัวอย่าง 5.5.5 ให้ $A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & e^t \\ 3t & \sin t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 & \cos t \\ t+1 & 2t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \ln t \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t+1 & t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \ln t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-2 & 3t \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

พิจารณา

$$(A \diamondsuit B)(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & e^t \\ 3t & \sin t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 & \cos t \\ t+1 & 2t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \diamondsuit \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t+1 & t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-2 & 3t \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\left[\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}-t+2e^t-2 & \frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+2e^t-2t-2 \\ 3t^2+t-\cos t-\sin t+1 & \frac{t^3}{2}+t^2+2\cos t-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t\sin t & \frac{t^4}{12}+\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t) \\ 2t-2\sin t & (\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})-2\cos t+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5t^2}{2} & \frac{-7t^2}{2} \\ 16t-\frac{3}{2}t^2 & -(\frac{9}{2}t^2+14t) \end{bmatrix}\right]$$

$$(B \diamondsuit A)(t) = \left[\begin{bmatrix} 1 & t \\ t+1 & t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t-2 & 3t \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\right] \diamondsuit \left[\begin{bmatrix} t & e^t \\ 3t & \sin t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 & \cos t \\ t+1 & 2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & t \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2} & e^t+t-\sin t-1 \\ \frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & t^2+2e^t-2\cos t-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \\ t^2+\cos t+\sin t-1 & \frac{1}{2}t\sin t-2\cos t+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-9t^2}{2} & \frac{t^3}{6}-t^2 \\ 21t & -14t+5\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right]$$

จะได้ว่า

$\langle A;B\rangle_+(t)$

$$=\left[\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}-t+2e^t-2 & \frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+2e^t-2t-2 \\ 3t^2+t-\cos t-\sin t+1 & \frac{t^3}{2}+t^2+2\cos t-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t\sin t & \frac{t^4}{12}+\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t) \\ 2t-2\sin t & (\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})-2\cos t+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5t^2}{2} & \frac{-7t^2}{2} \\ 16t-\frac{3}{2}t^2 & -(\frac{9}{2}t^2+14t) \end{bmatrix}\right]$$

$$+\left[\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2} & e^t+t-\sin t-1 \\ \frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & t^2+2e^t-2\cos t-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \\ t^2+\cos t+\sin t-1 & \frac{1}{2}t\sin t-2\cos t+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-9t^2}{2} & \frac{t^3}{6}-t^2 \\ 21t & -14t+5\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{bmatrix} 2e^t+\frac{t^3}{2}+t^2-t-2 & \frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}-t-\sin t+3e^t-3 \\ \frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{6}+\frac{7t^2}{2}+t-\cos t-\sin t+1 & \frac{t^3}{2}+2e^t+2t^2-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t\sin t+\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & \frac{t^4}{12}+\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)+\frac{t^3}{3} \\ t^2+2t-\cos t-\sin t-1 & \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}-\frac{1}{2}t\sin t-4\cos t+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2t^2 & \frac{-9t^2}{2}+\frac{t^3}{6} \\ -\frac{3}{2}t^2+37t & -2t^2-28t \end{bmatrix}\right]$$

ทฤษฎีบท 5.5.6 สมบัติของตัวทำปฏิสลับที่บ็อคซ์คอนโวลูชัน (The Properties of Box Convolution Anticommutator)

ให้ A,B และ $C \in M^I_{mp,np}$ สำหรับแต่ละ ϕ ที่เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,b]$ จะได้ว่า

1. $\langle A+B;C\rangle_+ = \langle A;C\rangle_+ + \langle B;C\rangle_+$
2. $\langle \phi A;B\rangle_+ = \phi\langle A;B\rangle_+$
3. $\langle A;B\rangle_+ = \langle B;A\rangle_+$
4. $\langle A;A\rangle_+ = 2(A \diamondsuit A)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทพิสูจน์

1. $\langle A+B;C\rangle_+ = \langle A;C\rangle_+ + \langle B;C\rangle_+$

โดยทฤษฎีบท 5.3.1 และ 5.3.2 จะได้

$$\begin{aligned}\langle A+B;C\rangle_+ &= (A+B)\diamondsuit C + C\diamondsuit(A+B)\\ &= A\diamondsuit C + B\diamondsuit C + C\diamondsuit A + C\diamondsuit B\\ &= (A\diamondsuit C + C\diamondsuit A) + (B\diamondsuit C + C\diamondsuit B)\\ &= \langle A;C\rangle_+ + \langle B;C\rangle_+\end{aligned}$$

2. $\langle \phi A;B\rangle_+ = \phi\langle A;B\rangle_+$

โดยทฤษฎีบท 5.3.1 และ 5.3.2 จะได้

$$\begin{aligned}\langle \phi A;B\rangle_+ &= \phi A\diamondsuit B + B\diamondsuit \phi A\\ &= \phi(A\diamondsuit B + B\diamondsuit A)\\ &= \phi\langle A;B\rangle_+\end{aligned}$$

3. $\langle A;B\rangle_+ = \langle B;A\rangle_+$

พิจารณา $\begin{aligned}\langle A;B\rangle_+ &= A\diamondsuit B + B\diamondsuit A\\ &= B\diamondsuit A + A\diamondsuit B\\ &= \langle B;A\rangle_+\end{aligned}$

4. $\langle A;A\rangle_+ = 2(A\diamondsuit A)$

พิจารณา $\begin{aligned}\langle A;A\rangle_+ &= A\diamondsuit A + A\diamondsuit A\\ &= 2(A\diamondsuit A)\end{aligned}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.6 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับเมทริกซ์ย่อย (The Connection between Box Convolution Product and Submatrices)

ทฤษฎีบท 5.6.1 ให้ $A=\left[A_{ij}\right]\in M^{I}_{(2m)p,(2m)q}$ และ $B=\left[B_{ij}\right]\in M^{I}_{(2m)q,(2m)r}$ ให้ $\hat{A}\in M^{I}_{mp,mq}$ และ $\hat{B}\in M^{I}_{mq,mr}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการรวมเข้าด้วยกันของเมทริกซ์ย่อยใน A และ B ตามลำดับ จะได้ว่า $A=\left[\hat{A}_{hk}\right]$ และ $B=\left[\hat{B}_{hk}\right]$ เมื่อ $1\le h,k\le 2$ และ

$$A \diamondsuit B=\left[\hat{A}_{hk}\diamondsuit\hat{B}_{hk}\right]$$

บทพิสูจน์

ให้ $A=\left[A_{ij}\right]\in M^{I}_{(2m)p,(2m)q}$ และ $B=\left[B_{ij}\right]\in M^{I}_{(2m)q,(2m)r}$

เขียน $A=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m1} & \cdots & A_{mm}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}A_{1(m+1)} & \cdots & A_{1(2m)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m(m+1)} & \cdots & A_{m(2m)}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}A_{(m+1)1} & \cdots & A_{(m+1)m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{(m)1} & \cdots & A_{(2m)m}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}A_{(m+1)(m+1)} & \cdots & A_{(m+1)(2m)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{(2m)(m+1)} & \cdots & A_{(2m)(2m)}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

และ $B=\begin{bmatrix}\hat{B}_{11} & \hat{B}_{12}\\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{m1} & \cdots & B_{mm}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}B_{1(m+1)} & \cdots & B_{1(2m)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{m(m+1)} & \cdots & B_{m(2m)}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}B_{(m+1)1} & \cdots & B_{(m+1)m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{(2m)1} & \cdots & B_{(2m)m}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}B_{(m+1)(m+1)} & \cdots & B_{(m+1)(2m)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{(2m)(m+1)} & \cdots & B_{(2m)(2m)}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

พิจารณา

$$A\diamondsuit B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}B_{11} & \cdots & A_{1m}B_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m1}B_{m1} & \cdots & A_{mm}B_{mm}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}A_{1(m+1)}B_{1(m+1)} & \cdots & A_{1(2m)}B_{1(2m)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m(m+1)}B_{m(m+1)} & \cdots & A_{m(2m)}B_{m(2m)}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}A_{(m+1)1}B_{(m+1)1} & \cdots & A_{(m+1)m}B_{(m+1)m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{(2m)1}B_{(2m)1} & \cdots & A_{(2m)m}B_{(2m)m}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}A_{(m+1)(m+1)}B_{(m+1)(m+1)} & \cdots & A_{(m+1)(2m)}B_{(m+1)(2m)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{(2m)(m+1)}B_{(2m)(m+1)} & \cdots & A_{(2m)(2m)}B_{(2m)(2m)}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11}\diamondsuit\hat{B}_{11} & \hat{A}_{12}\diamondsuit\hat{B}_{12}\\ \hat{A}_{21}\diamondsuit\hat{B}_{21} & \hat{A}_{22}\diamondsuit\hat{B}_{22}\end{bmatrix}=\left[\hat{A}_{hk}\diamondsuit\hat{B}_{hk}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.7 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับผลบวกตรง (The Connection between Box Convolution Product and Direct Sum)

บทนิยาม 5.7.1 ผลบวกตรง (Direct Sum)

ให้ $A \in M_{m,n}$ และ $B \in M_{p,q}$ ผลบวกตรงของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \oplus B$ นิยามโดย

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in M_{m+p,n+q}$$

ตัวอย่าง 5.7.2 ให้ $A(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$ และ $B(t) = \begin{bmatrix} t-1 & e^t \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $(A \oplus B)(t)$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-1 & e^t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & e^t \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 5.7.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} \in M_{mp}$ จะได้ว่า เมทริกซ์บล็อคทแยงมุม (The block diagonal matrix) ของ A นิยามโดย

$$\text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{mm}) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{mm} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.7.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & e^t \\ 3t & \sin t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t^2 & \cos t \\ t+1 & 2t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \ln t \\ -3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-1 & e^t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}) = \begin{bmatrix} t & e^t & 0 & 0 \\ 3t & \sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & e^t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 5.7.5 ให้ $A \in M_{2p}^{I}$ และ $B, C \in M_{p,q}^{I}$ จะได้ว่า

$$A \diamondsuit (B \oplus C) = \text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}) * (B \oplus C)$$

บทพิสูจน์

พิจารณา $\big(A \diamondsuit (B \oplus C)\big)(t)$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} \diamondsuit \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}(t) * B(t) & 0 \\ 0 & A_{22}(t) * C(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}(t) & 0 \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{bmatrix}$$

$$= \big(\text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}) * (B \oplus C)\big)(t)$$

ทฤษฎีบท 5.7.6 ให้ $A, B \in M_{p,q}^{I}$ และ $C \in M_{2q}^{I}$ จะได้ว่า

$$(A \oplus B) \diamondsuit C = \big(A \oplus B\big) * \text{blockdiag}(C_{11}, C_{22})$$

บทพิสูจน์

พิจารณา $\big((A \oplus B) \diamondsuit C\big)(t)$

$$= \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B(t) \end{bmatrix} \diamondsuit \begin{bmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A(t) * C_{11}(t) & 0 \\ 0 & B(t) * C_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_{11}(t) & 0 \\ 0 & C_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \big(\big(A \oplus B\big) * \text{blockdiag}(C_{11}, C_{22})\big)(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน กับผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันกับผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน ซึ่งเน้นในเรื่องการแปลงผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันให้อยู่ในรูปผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน ประกอบไปด้วย การแปลงของเมทริกซ์บล็อคทแยงมุม และการแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

6.1 การแปลงผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชัน เป็นผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชันสำหรับฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ในรูปแบบบล็อคทแยงมุม (The transformation of Box Convolution Product into Matrix Convolution Product for Block Diagonal Matrix-Valued functions)

ทฤษฎีบท 6.1.1 ให้ $A \in M_{mp}^{I}$ และ $X \in M_{mp}^{I}$

ถ้า X เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบบล็อคทแยงมุม แล้ว

1. $A \diamondsuit X = \text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{mm}) * X$
2. $X \diamondsuit A = X * \text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}, \cdots A_{mm})$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทพิสูจน์

ให้ $A(t)=\left[A_{ij}(t)\right]\in M_{mp}^{I}$ โดยที่ $A_{ij}(t)\in M_{p}^{I}, \forall i,j=1,2,...,m$

และ $X(t)=\left[X_{ij}(t)\right]\in M_{mp}^{I}$ โดยที่ $X_{ij}(t)\in M_{p}^{I}, \forall i,j=1,2,...,m$

เขียน $A(t)=\begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & \cdots & A_{mm}(t) \end{bmatrix}$ และ $X(t)=\begin{bmatrix} X_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{mm}(t) \end{bmatrix}$

1. พิจารณา $A(t)\diamondsuit X(t)$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & \cdots & A_{mm}(t) \end{bmatrix}\diamondsuit\begin{bmatrix} X_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}(t)*X_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{mm}(t)*X_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{mm}(t) \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} X_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\text{blockdiag}(A_{11}(t),A_{22}(t),\cdots,A_{mm}(t))*X(t)$$

2. พิจารณา $X(t)\diamondsuit A(t)$

$$=\begin{bmatrix} X_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{mm}(t) \end{bmatrix}\diamondsuit\begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & \cdots & A_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} X_{11}(t)*A_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{mm}(t)*A_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} X_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{mm}(t) \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$=X(t)*\text{blockdiag}(A_{11}(t),A_{22}(t),\cdots A_{mm}(t))$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.2 การแปลงจอห์นสัน-ไนเลนสำหรับฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ (Johnson-Nylen Transformation for Matrix-valued functions)

ในหัวข้อนี้เรานำเสนอฟังก์ชัน F และ G ซึ่งถูกคิดค้นโดย Charles R. Johnson และ Peter Nylen และพิสูจน์ว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง พร้อมทั้งแสดงให้เห็นถึงการนำฟังก์ชัน F และ G ไปใช้ในการแปลงผลคูณบ็อคซ์คอนโวลูชันไปสู่ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

บทนิยาม 6.2.1 ให้ $F : M^I_{mp,nq} \to M^I_{mp,mnq}$ นิยามโดย

$$F(A) = \begin{bmatrix} D(A_1) & D(A_2) & \cdots & D(A_n) \end{bmatrix}$$

เมื่อ $D(A_n)$ คือเมทริกซ์ในรูปแบบบล็อคทแยงมุมของบล็อคคอลัมน์ที่ n ของ A

ตัวอย่าง 6.2.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-1 \\ t+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2t \\ 5t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2^t \\ 4^t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $F(A) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-1 \\ t+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2t \\ 5t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2^t \\ 4^t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 6.2.3 F เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทพิสูจน์

ให้ $X, Y \in M^I_{mp,nq}$

สมมติ $F(X) = F(Y)$

$$\begin{bmatrix} D(X_1) & D(X_2) & \cdots & D(X_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(Y_1) & D(Y_2) & \cdots & D(Y_n) \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $D(X_i) = D(Y_i)$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, ..., n$

ดังนั้น $X = Y$

จึงสรุปได้ว่า F เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 6.2.4 ให้ $G: M^I_{mq,nr} \to M^I_{mnq,nr}$ นิยามโดย

$$G(A) = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

เมื่อ $A_i \oplus A_j$ คือ ผลบวกตรงของบล็อคคอลัมน์ที่ i และ j ของ A ตามลำดับ

ตัวอย่าง 6.2.5 ให้ $A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-2 & t+2 & t-3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin t & \cos t & t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2^t & 3^t & 5^t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t & 2t & 3t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $G(A)$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-2 & t+2 & t-3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2^t & 3^t & 5^t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin t & \cos t & t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t & 2t & 3t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 6.2.6 G เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทพิสูจน์

ให้ $X, Y \in M^I_{mq,nr}$

สมมติ $G(X) = G(Y)$

$$X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_n$$

จะได้ว่า $X_i = Y_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, ..., n$

ดังนั้น $X = Y$

จึงสรุปได้ว่า G เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 6.2.7 การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน (Johnson-Nylen Transformation)

ให้ $A \in M^I_{mp,nq}$ และ $B \in M^I_{mq,nr}$ ถ้า F และ G เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดยบทนิยามที่ 6.2.1 และ 6.2.4 ตามลำดับ แล้ว

$$A \diamondsuit B = F(A) * G(B)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(t) = \left[A_{ij}(t) \right] \in M_{mp,nq}$ และ $B(t) = \left[B_{ij}(t) \right] \in M_{mq,nr}$

จะได้ว่า $F(A(t)) = \left[D(A_1(t)) \quad D(A_2(t)) \quad \cdots \quad D(A_n(t)) \right]$

และ $G(B(t)) = B_1(t) \oplus B_2(t) \oplus \cdots \oplus B_n(t)$

พิจารณา

$$F(A(t)) * G(B(t))$$

$$= \left[D(A_1(t)) \quad D(A_2(t)) \quad \cdots \quad D(A_n(t)) \right] * \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_n(t) \end{bmatrix}$$

$$= \left[D(A_1(t)) * B_1(t) \quad D(A_2(t)) * B_2(t) \quad \cdots \quad D(A_n(t)) * B_n(t) \right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} A_{11}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{21}(t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m1}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{11}(t) \\ B_{21}(t) \\ \vdots \\ B_{m1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}(t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m2}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{12}(t) \\ B_{22}(t) \\ \vdots \\ B_{m2}(t) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_{1n}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2n}(t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mn}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{1n}(t) \\ B_{2n}(t) \\ \vdots \\ B_{mn}(t) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}(t) * B_{11}(t) & A_{12}(t) * B_{12}(t) & \cdots & A_{1n}(t) * B_{1n}(t) \\ A_{21}(t) * B_{21}(t) & A_{22}(t) * B_{22}(t) & \cdots & A_{2n}(t) * B_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) * B_{m1}(t) & A_{m2}(t) * B_{m2}(t) & \cdots & A_{mn}(t) * B_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

$$= A(t) \diamondsuit B(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] พัชรินทร์ เหมโชติ, และ ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์. (2555). **พีชคณิตเชิงเส้น 1.** กรุงเทพฯ : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

[2] พัชรินทร์ เหมโชติ. (2555). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** กรุงเทพฯ : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

[3] Million, E. (2007). **The Hadamard Product.** USA : Creative Commons

[4] Lay, D. C. (2012). **Linear Algebra and Its Applications** (4th ed.). USA : Pearson

[5] Kilicman, A. and Zhour, Z. A. (2009). **On the Connection between Kronecker and Hadamard Convolution Products of Matrices and some Applications.** Malaysia : Hindawi Publishing Corporation

[6] Kreyszig, E. (2011). **Advanced Engineering Mathematics** (10th ed.). USA : Wiley

[7] Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2011). **Introduction to Real Analysis** (4th ed.). USA : John Wiley & Sons, Inc.

[8] Zhour, Z. A. and Kilicman, A. (2006). **Some new connections between products for partitioned and non-partitioned matrices.** Malaysia : Elsevier Ltd.

[9] Johnson, C. R. and Nylen, P. (1991). **Largest Singular Value Submultiplicativity.** USA : SIAM J. Matrix Anal, Appl.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้