

ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม

POINT SPECTRUM MAPPING THEOREM FOR BINOMIAL



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม

POINT SPECTRUM MAPPING THEOREM FOR BINOMIAL



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

POINT SPECTRUM MAPPING THEOREM FOR BINOMIAL



SARUNYA CHOKSUWAN
SIRANARONG PILA
SUPHANSA CHANSUKPLANG

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม
Point Spectrum Mapping Theorem for Binomial

ชื่อนักศึกษา นางสาวศรัณญา จอกสุวรรณ รหัสนักศึกษา 56050139
นายสิรินรงค์ พิลลา รหัสนักศึกษา 56050149
นางสาวสุพรรณษา จันทร์สุกปลั่ง รหัสนักศึกษา 56050160

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2559
อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.พุทธพร วานิชกร

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้
ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์
ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.อาทิตย์ แฉ่งธัญการ ประธานกรรมการ	
อ.จินดา ไชยช่วย กรรมการ	
ดร.พุทธพร วานิชกร กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม Point Spectrum Mapping Theorem for Binomial
ชื่อนักศึกษา	นางสาวศรัญญา จอกสุวรรณ รหัสนักศึกษา 56050139 นายสิรณรงค์ พิลา รหัสนักศึกษา 56050149 นางสาวสุพรรณษา จันทร์สุกปลั่ง รหัสนักศึกษา 56050160
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.พุทธร วาณิชกร

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเกี่ยวกับการส่งของสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันทวินามโดยใช้ความรู้พื้นฐานที่ประกอบด้วย ปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการเชิงเส้น ค่าลักษณะเฉพาะ และสเปกตรัมจุด ผลจากการศึกษาคือ สเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้นจะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น โดยทวินาม

คำสำคัญ : การส่ง ตัวดำเนินการเชิงเส้น ทวินาม ภาพของสเปกตรัมจุด สเปกตรัมจุด

Title	Point Spectrum Mapping Theorem for Binomial	
Students	Miss Sarunya Choksuwan	56050139
	Mr. Siranarong Pila	56050149
	Miss Suphansa Chansukplang	56050160
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Academic Year	2016	
Advisor	Dr.Buddhaporn Vanishkorn	

Abstract

This special problem has an objective to study about the point spectrum mapping for binomial function by using fundamental knowledge including Hilbert space, linear operator, eigenvalue and point spectrum. The special problem result is the point spectrum of binomial of a linear operator equal to the image of point spectrum of a linear operator by binomial.

Keyword : mapping , linear operator , binomial , the image of point spectrum , point spectrum

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาอย่างสูงทั้งให้คำปรึกษาและดูแลอย่างใกล้ชิดมาตลอดจาก ดร.พุทธพร วานิชกร อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษที่กรุณาให้คำแนะนำและให้ความช่วยเหลือตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่ง คณะผู้จัดทำตระหนักถึงความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์

ขอขอบพระคุณกรรมการสอบปัญหาพิเศษ ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ และอาจารย์จินดา ไชยช่วย ที่ให้ข้อคิดเห็น และคำแนะนำในการทำปัญหาพิเศษลุล่วงไปได้ด้วยดี และขอกราบขอบคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ คุณอุตร บุญธรรม พนักงานประจำสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ (สจล.) เป็นผู้ทรงคุณวุฒิที่ให้ความอนุเคราะห์ในการพิมพ์เอกสารทุกอย่างที่เกี่ยวกับปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอมอบความกตัญญูตเวทีตาคณ แด่บิดา มารดา และผู้มีพระคุณทุกท่าน ซึ่งเปิดโอกาสให้ได้รับการศึกษาเล่าเรียน ตลอดจนคอยช่วยเหลือ ให้กำลังใจคณะผู้จัดทำเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา รวมถึงเพื่อนๆในกลุ่มที่เป็นกำลังใจ และให้ความช่วยเหลือในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้

สุดท้ายนี้คณะผู้จัดทำหวังว่า ปัญหาพิเศษฉบับนี้จะมีประโยชน์อยู่ไม่น้อย จึงขอมอบส่วนดีทั้งหมดนี้ ให้แก่เหล่าคณาจารย์ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา จนทำให้ผลงานปัญหาพิเศษเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่เกี่ยวข้อง สำหรับข้อบกพร่องต่างๆที่อาจจะเกิดขึ้นนั้น คณะผู้จัดทำขอน้อมรับผิดเพียงผู้เดียว และยินดีที่จะรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา เพื่อเป็นประโยชน์ในการพัฒนาปัญหาพิเศษต่อไป

ศรัณญา จอกสุวรรณ

สิรินรงค์ พิลา

สุพรรณษา จันทร์สุกปลั่ง

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
คำย่อ/สัญลักษณ์	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหา	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	1
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน	1
1.6 ระยะเวลาดำเนินงาน	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 ฟิวด์ (Field)	3
2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)	3
2.3 ปริภูมิเมตริก (Metric space)	4
2.4 ปริภูมินอร์ม (Norm space) และปริภูมิปาก (Banach space)	6
2.5 ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner product space) และปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space)	7
2.6 ตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear operator)	9
2.7 ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue)	11
2.8 สเปกตรัมจุด (Point spectrum)	11
2.9 ฟังก์ชันทวินาม (Binomial function)	12
2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	13
ทฤษฎีบท 2.10.1	13
ทฤษฎีบท 2.10.2	13
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย	15
ทฤษฎีบท 3.1	15
ตัวอย่างทฤษฎีบท 3.1	17

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล.....	18
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	19
5.1 สรุปผลการวิจัย	19
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	19
เอกสารอ้างอิง.....	20



คำย่อ/สัญลักษณ์

คำย่อ/สัญลักษณ์	คำอธิบาย
$\bar{0}$	เวกเตอร์ศูนย์
$B(X, X)$	เซตของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตทั้งหมดจาก X ไป X
$b(T)$	ทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\hat{b}(\sigma_0(T))$	ภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยทวินาม $\hat{b}$ โดย $\hat{b}(\sigma_0(T)) = \{\hat{b}(\lambda_0) \in \mathbb{C} \mid Tx = \lambda_0 x, \lambda_0 \in \mathbb{C}\}$ เมื่อ λ_0 คือค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\mathbb{C}$	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$D(T)$	โดเมนของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
F	ฟิลด์
$p(T)$	พหุนามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\hat{p}(\sigma_0(T))$	ภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยพหุนาม p โดย $\hat{p}(\sigma_0(T)) = \{\hat{p}(\lambda_0) \in \mathbb{C} \mid Tx = \lambda_0 x, \lambda_0 \in \mathbb{C}\}$ เมื่อ λ_0 คือค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$R(T)$	เรนจ์ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
T	ตัวดำเนินการเชิงเส้น
T^{-1}	ผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น
$\sigma_0(T)$	สเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดย $\sigma_0(T) = \{\lambda_0 \in \mathbb{C} \mid Tx = \lambda_0 x\}$ เมื่อ λ_0 คือค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\sigma_0(b(T))$	สเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดย $\sigma_0(b(T)) = \{\hat{b}(\lambda_0) \in \mathbb{C} \mid b(T)x = \hat{b}(\lambda_0)x\}$ เมื่อ $\hat{b}(\lambda_0)$ คือค่าลักษณะเฉพาะของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\sigma_0(p(T))$	สเปกตรัมจุดของพหุนามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดย $\sigma_0(p(T)) = \{\hat{p}(\lambda_0) \in \mathbb{C} \mid p(T)x = \hat{p}(\lambda_0)x\}$ เมื่อ $\hat{p}(\lambda_0)$ คือค่าลักษณะเฉพาะของพหุนามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\sigma_c(T)$	สเปกตรัมต่อเนื่องของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
$\sigma_r(T)$	สเปกตรัมเรซิดูวส์ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในหลายสาขาของคณิตศาสตร์การส่งเชิงเส้น และค่าลักษณะเฉพาะมักจะถูกนำไปใช้แก้ปัญหาต่างๆ ทั้งในเชิงวิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์อย่างแพร่หลาย ปัญหาพิเศษนี้จะใช้ความรู้ในเรื่องของตัวดำเนินการเชิงเส้น และค่าลักษณะเฉพาะ เพื่อศึกษาการส่งสเปกตรัมจุดบนปริภูมิฮิลเบิร์ตสำหรับฟังก์ชันทวินาม

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหา

- 1) เพื่อศึกษาเกี่ยวกับนิยามของปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการเชิงเส้น และค่าลักษณะเฉพาะ
- 2) เพื่อศึกษาถึงขั้นตอนกระบวนการซึ่งนำไปสู่การหาสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันทวินาม
- 3) เพื่อศึกษาการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม

1.3 ขอบเขตของปัญหา

- 1) ศึกษาการหาค่าลักษณะเฉพาะสำหรับฟังก์ชันทวินามบนปริภูมิฮิลเบิร์ต
- 2) ศึกษาการส่งสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้นสำหรับฟังก์ชันทวินามบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้ความรู้เกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ต ปริภูมิบานาค และค่าลักษณะเฉพาะ
- 2) ได้ความรู้เกี่ยวกับการส่งสเปกตรัมจุด และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับสเปกตรัมจุดไปศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้นสำหรับฟังก์ชันทวินาม
- 3) สามารถนำความรู้ที่ได้ไปศึกษาต่อยอดเกี่ยวกับสเปกตรัมได้

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

- 1) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาค
- 2) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงเส้น
- 3) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าลักษณะเฉพาะสำหรับเวกเตอร์ที่มีมิติอนันต์
- 4) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสเปกตรัมจุด
- 5) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันทวินาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 6) พิสูจน์ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม
- 7) ตรวจสอบและแก้ไขการพิสูจน์
- 8) ประเมินและสรุปผล
- 9) จัดทำเล่มปัญหาพิเศษ พร้อมนำเสนอ

1.6 ระยะเวลาดำเนินงาน

การดำเนินการ	ระยะเวลา									
	2559					2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาค	←	→								
2) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงเส้น	←	→								
3) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับค่าลักษณะเฉพาะสำหรับเวกเตอร์ที่มีมิติอนันต์		←	→							
4) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสเปกตรัมจุด		←	→							
5) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันทวินาม			←	→						
6) พิสูจน์ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม				←	→					
7) ตรวจสอบและแก้ไขการพิสูจน์							←	→		
8) ประเมินและสรุปผล								←	→	
9) จัดทำเล่มปัญหาพิเศษพร้อมนำเสนอ		←	→						←	→

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาพิเศษฉบับนี้กล่าวถึงทฤษฎีการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันทวินาม โดยใช้คุณสมบัติของทฤษฎีตัวดำเนินการเชิงเส้น ค่าลักษณะเฉพาะสำหรับเวกเตอร์ที่มีมิติอนันต์ สเปกตรัมจุดบนปริภูมิฮิลเบิร์ต และฟังก์ชันทวินาม บทประยุกต์ที่น่าสนใจของปัญหาพิเศษนี้คือ ผลที่ได้จากการส่งสเปกตรัมจุดของฟังก์ชันทวินาม

2.1 ฟิลด์ (Field)

บทนิยาม 2.1.1 ฟิลด์ (Field) คือ เซต F ประกอบกับการดำเนินการสองชนิดระหว่างสมาชิกในเซตนั้น โดยการดำเนินการชนิดแรกเปรียบเทียบกับ “การบวก” การดำเนินการอย่างที่สองเปรียบเทียบกับ “การคูณ” และมีสมบัติต่อไปนี้

1. เซต F ประกอบกับการบวกเป็นอาบีเลียนกรุป
2. เซต F (ไม่รวมเอกลักษณ์การบวก) ประกอบกับการคูณเป็นอาบีเลียนกรุป
3. การบวกและการคูณเกี่ยวข้องกันโดยกฎการแจกแจง กล่าวคือ สำหรับสมาชิก a, b และ c ใดๆใน F จะได้ว่า $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ เมื่อ $*$ แทนเครื่องหมายคูณ และ $+$ แทนเครื่องหมายบวก (สุเทพ สอนใต้, 2548, น. 2)

2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)

บทนิยาม 2.2.1 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space) เหนือฟิลด์ C คือ โครงสร้างทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยเซต V กับการดำเนินการสองอย่างดังนี้

1. การบวก $+: V \times V \rightarrow V$ นั่นคือ การบวกเป็นฟังก์ชัน $V \times V$ ไปยัง V ซึ่งทำให้สำหรับแต่ละ $x, y \in V$ จะได้ว่ามี $x + y \in V$ เพียงหนึ่งเดียว การบวกต้องสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

2.1 การเปลี่ยนกลุ่ม :

สำหรับแต่ละ $x, y, z \in V$ จะได้ว่า $(x + y) + z = x + (y + z)$

2.2 การมีเอกลักษณ์ :

มี $s \in V$ ที่ทำให้ $x + s = x = s + x$ สำหรับทุก $x \in V$ เรียก s ว่าเอกลักษณ์การบวกใน V และใช้สัญลักษณ์ $\bar{0}$ แทน s

2.3 การมีตัวผกผัน :

สำหรับแต่ละ $x \in V$ จะมี $t \in V$ ที่ทำให้ $x + t = \bar{0} = t + x$ เรียก t ว่าตัวผกผันการบวกของ x และใช้สัญลักษณ์ $-x$ แทน t

1.4 การสลับที่ :

สำหรับแต่ละ $x, y \in V$ จะได้ว่า $x + y = y + x$

2. การคูณด้วยสเกลาร์ $\cdot : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ นั่นคือ การคูณด้วยสเกลาร์เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{C} \times V$ ไปยัง V ซึ่งทำให้สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$ จะได้ว่ามี $k \cdot x \in V$ เพียงหนึ่งเดียว ซึ่งการคูณด้วยสเกลาร์ต้องสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

2.1 สำหรับแต่ละ $x \in V$ จะได้ว่า $1 \cdot x = x$

2.2 สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$ จะได้ว่า $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

3. การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์มีความสัมพันธ์กันดังนี้

3.1 สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$ จะได้ว่า $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$

3.2 สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathbb{C}$ และ $x, y \in V$ จะได้ว่า $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $k \cdot x$ ด้วย kx สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{C}$ และ $x \in V$

(ภทราวุธ จันทรเสียม, 2558, น. 3)

ปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของ $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของ $\mathbb{R}$ จะเรียก V ว่าปริภูมิเวกเตอร์จริง (real vector space) และถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของ $\mathbb{C}$ จะเรียก V ว่า ปริภูมิเวกเตอร์เชิงซ้อน (complex vector space) (สุเทพ สอนใต้, 2548, น. 3)

2.3 ปริภูมิเมตริก (Metric space)

บทนิยาม 2.3.1 ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง เรียกฟังก์ชัน d ว่า ฟังก์ชันระยะทาง (distance function) หรือ เมตริก (metric) บน X ถ้าสำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (คุณสมบัติการสมมาตร)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (อสมการสามเหลี่ยม)

เรียกคู่อันดับ (X, d) ว่า ปริภูมิเมตริก และเรียก $d(x, y)$ ว่า ระยะทางระหว่าง x และ y ในบางครั้งเราจะเขียนแทนปริภูมิเมตริก (X, d) อย่างง่ายด้วย X ถ้าไม่ทำให้เกิดความสับสน และเป็นที่เข้าใจว่ามีเมตริก d บน X ซึ่งเป็นที่เข้าใจตรงกันแล้ว (สุเทพ สอนใต้, 2548, น. 8)

ตัวอย่าง 2.3.2 ปริภูมิยูคลิด (Euclidean space $\mathbb{R}^n$) เป็นปริภูมิเมตริกภายใต้เมตริกยูคลิด (Euclidean metric) ซึ่งนิยามโดย

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.3.3 ลำดับ (x_n) ในปริภูมิเมตริก (X, d) จะถูกกล่าวว่าเป็นลำดับที่ลู่เข้า (convergent sequence) ถ้ามี $x \in X$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ จะเรียก x ว่าเป็น “ลิมิต” ของ (x_n) และกล่าวว่า ลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ x (converges to x) และเขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ถ้าลำดับ (x_n) ไม่เป็นลำดับลู่เข้า จะเรียกลำดับ (x_n) ว่าลำดับลู่ออก (divergent sequence) (สุเทพ สนวนใต้, 2548, น. 22)

บทนิยาม 2.3.4 ลำดับ (x_n) ในปริภูมิเมตริก (X, d) จะถูกกล่าวว่าเป็นลำดับโคซี (Cauchy sequence) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนนับ N_ε ซึ่ง $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $m, n \geq N_\varepsilon$ จะเรียกว่าปริภูมิเมตริก X ว่าปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric space) ถ้าทุกๆลำดับโคซี ใน X เป็นลำดับลู่เข้า (นั่นคือ มีลิมิตซึ่งเป็นสมาชิกของ X) (สุเทพ สนวนใต้, 2548, น. 22)

ตัวอย่าง 2.3.5 ปริภูมิ $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

พิสูจน์ ให้ (x^m) เมื่อ $x^m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ เป็นลำดับโคซีใน $\mathbb{R}^n$

ต้องการแสดงว่า (x^m) เป็นลำดับลู่เข้าใน $\mathbb{R}^n$

เนื่องจาก (x^m) เป็นลำดับโคซี จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ $N(\varepsilon)$

$$\text{ซึ่ง} \quad d(x^m, x^r) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^{(m)} - x_k^{(r)})^2} < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุกๆ } m, r \geq N(\varepsilon) \quad \text{-----} (*)$$

โดยการยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่าสำหรับ $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$(x_k^{(m)} - x_k^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \quad \text{สำหรับทุกๆ } m, r \geq N(\varepsilon)$$

ดังนั้นจะได้ว่า สำหรับ $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$|x_k^{(m)} - x_k^{(r)}| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุกๆ } m, r \geq N(\varepsilon)$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า ลำดับ $(x_k^{(m)})_{m=1}^\infty$ เป็นลำดับโคซีใน $\mathbb{R}$ สำหรับทุก $k = 1, 2, 3, \dots, n$

เนื่องจาก $\mathbb{R}$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

ดังนั้นแต่ละ $k = 1, 2, 3, \dots, n$ จะมี $x_k \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = x_k$

ให้ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

ต่อไปเราจะแสดงว่า (x^m) ลู่เข้าสู่ x โดยการให้ $r \rightarrow \infty$ ใน (*)

$$\text{จะได้ว่า} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^{(m)} - x_k^{(r)})^2} < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุกๆ } m, r \geq N(\varepsilon)$$

นั่นคือ $d(x^m, x) \leq \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $m \geq N(\varepsilon)$

เพราะฉะนั้น (x^m) เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ x

ดังนั้น $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

2.4 ปริภูมินอร์ม (Norm space) และปริภูมิบานาค (Banach space)

บทนิยาม 2.4.1 ปริภูมินอร์ม X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งกำหนดนอร์มบนปริภูมิบานาคเป็นปริภูมินอร์มบริบูรณ์ (กำหนดโดยนอร์มบริบูรณ์ในเมตริก) ที่นอร์มบน ($\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$) ปริภูมิเวกเตอร์ X คือฟังก์ชันค่าจริงบน X ที่มี $x \in X$ กำหนดโดย $\|x\|$ (เรียกว่า นอร์มของ x) และมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (อสมการสามเหลี่ยม)

เมื่อ $x, y \in X$ และ $\alpha \in \mathbb{C}$

นอร์มบน X กำหนดเมตริก d บน X ซึ่งกำหนดโดย

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{เมื่อ } x, y \in X$$

และเราเรียกเมตริก d ว่าเป็นเมตริกที่เกิดจากนอร์ม (metric induced by the norm) ปริภูมินอร์มจะกำหนดสัญลักษณ์โดย $(X, \|\cdot\|)$ หรือเขียนได้อีกแบบคือ X (Kreyszig, 1978., p. 58-59)

บทนิยาม 2.4.2 จะเรียกปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ ว่าปริภูมิบานาค (Banach space) ถ้า X เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ภายใต้เมตริกที่เกิดจากนอร์ม (สุเทพ สอนใต้, 2548, น. 47)

ตัวอย่าง 2.4.3 $\mathbb{R}^n$ และ $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมินอร์ม ที่นิยามโดย

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

จะได้เมตริก d ที่เกิดจากนอร์มที่นิยามข้างบนเป็น

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

เมื่อ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

เราจะทราบคืออยู่แล้วว่า $\mathbb{R}^n$ และ $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์

ดังนั้น $\mathbb{R}^n$ และ $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิบานาค

2.5 ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner product space) และปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space)

บทนิยาม 2.5.1 ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน ผลคูณภายในบน X (Inner product on X) คือฟังก์ชันจาก $X \times X$ ไปยัง $\mathbb{C}$ นั่นคือ สำหรับแต่ละคู่ของ x และ y เราเขียนแทนด้วย $\langle x, y \rangle$ และจะเรียกมันว่าผลคูณภายในของ X และ Y โดยที่ฟังก์ชันดังกล่าวมีสมบัติต่อไปนี้

สำหรับแต่ละเวกเตอร์ x, y, z ใน X และสเกลาร์ α

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ และ $\langle x, x \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \bar{0}$

เราจะเรียก X ว่าเป็น ปริภูมิผลคูณภายใน ถ้ามีผลคูณภายในนิยามบน X (สุเทพ สนวนใต้, 2548, น. 118)

ตัวอย่าง 2.5.2

1. ปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในโดยมีผลคูณภายในนิยามดังนี้

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

จะเห็นว่า $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

2. ปริภูมิยูนิแทรี (Unitary space) $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่ผลคูณภายในนิยามโดย

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

(เมื่อ $\bar{y}$ คือสังยุคของ y)

ทฤษฎีบท 2.5.3 ถ้า X เป็นปริภูมิผลคูณภายใน จะได้ว่าฟังก์ชัน $\|\cdot\|$ ที่นิยาม $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

เป็นนอร์มบน X หรือ นอร์มที่เกิดจากผลคูณภายใน (the norm induced by the inner product) (สุเทพ สนวนใต้, 2548, น. 119)

ตัวอย่าง 2.5.4

1. ปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในโดยมีนอร์มที่เกิดจากผลคูณภายในนิยามดังนี้

$$\text{โดย } \|x\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle} = \sqrt{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}$$

จะเห็นว่า $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

2. ปริภูมิยูนิแทรี (Unitary space) $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่ผลคูณภายในนิยามโดย

$$\|x\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle} = \sqrt{x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n}$$

(เมื่อ $\bar{y}$ คือสังยุคของ y)

บทนิยาม 2.5.5 ปริภูมิผลคูณภายใน X จะเรียกว่าเป็น ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคได้นอร์มที่เกิดจากผลคูณภายใน (สุเทพ สนวนใต้, 2548, น. 122)

ตัวอย่าง 2.5.6

1. ปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในโดยมีผลคูณภายในนิยามดังนี้

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

จะเห็นว่า $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

2. ปริภูมิยูนิแทรี (Unitary space) $\mathbb{C}^n$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่ผลคูณภายในนิยามโดย

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

(เมื่อ $\bar{y}$ คือสังยุคของ y)

สำหรับ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ เราจะได้ว่า

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

เขียนในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

และเราทราบว่า $\mathbb{C}^n$ และ $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิบานาคภายในได้นอร์มข้างต้น

ดังนั้น $\mathbb{C}^n$ และ $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต

2.6 ตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear operator)

บทนิยาม 2.6.1 ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ $\mathbb{C}$ และ $T:V \rightarrow W$ จะเรียกว่า การส่งเชิงเส้น (linear operation) เมื่อ

$$1. T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in V \text{ และ}$$

$$2. T(kx) = kT(x) \text{ สำหรับทุก } x \in V \text{ และ } k \in \mathbb{C}$$

เราสามารถแสดงได้ว่าเงื่อนไข 1. และ 2. ในนิยามนี้สมมูลกับเงื่อนไขที่ว่า

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in V \text{ และ } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

นั่นคือ T คงสภาพผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ (ภัทรารุช จันทรเสียม, 2558, น. 5)

การคอมโพสิทของตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear operator composition)

บทนิยาม 2.6.2 ให้ $T:U \rightarrow V$ และ $S:V \rightarrow W$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ซึ่งการคอมโพสิท (composition) ของ S และ T คือฟังก์ชัน $S \circ T:U \rightarrow W$ จะนิยามโดย

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)) \text{ สำหรับทุก } u \in U$$

เนื่องจาก S และ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะเห็นได้ชัดเจนว่า $S \circ T$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (Robert A., 2012, p.432)

บทนิยาม 2.6.3 ให้ $T:U \rightarrow V$ และ $S:V \rightarrow W$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ที่ซึ่งผลรวมของ $T+S$ และการคูณสเกลาร์ αT นิยามโดย

$$1. (T+S)(x) = Tx + Sx \text{ เมื่อ } x \in D(T) \cap D(S)$$

$$2. (\alpha T)(x) = \alpha(Tx)$$

เนื่องจาก T และ S เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะเห็นได้ชัดเจนว่า $T+S$ และ αT เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (Kôsaku Yosida, 1980, p. 43)

ทฤษฎีบท 2.6.4 ให้ $T:V \rightarrow W$ เป็นการส่งเชิงเส้น (linear operation) แล้ว $T(\vec{0}) = \vec{0}$

พิสูจน์ ให้ ทุกๆ u เป็นเวกเตอร์ใน V

$$\text{จะได้ว่า } T(\vec{0}) = T(0\vec{0}u) = 0T(\vec{0}u) = \vec{0}$$

ดังนั้น $T(\vec{0}) = \vec{0}$ (พัชรินทร์ เหมโชติและไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์, 2555, น. 273)

ตัวอย่าง 2.6.5

1. ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ (identity operator) บนปริภูมิเวกเตอร์ X คือ $I: X \rightarrow X$

ซึ่งนิยามโดย
$$Ix = x$$

สำหรับทุกๆ $x \in X$ เห็นได้ว่า I เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

2. ตัวดำเนินการศูนย์ (zero operator) คือตัวดำเนินการเชิงเส้น $T: X \rightarrow Y$

ซึ่งนิยามโดย
$$Tx = \bar{0}$$

สำหรับทุกๆ $x \in X$ จะเขียนแทนตัวดำเนินการเชิงเส้น T ด้วย $\bar{0}$ เห็นได้ชัดว่าตัวดำเนินการศูนย์เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

บทนิยาม 2.6.6 ให้ X และ Y เป็นปริภูมิโนร์ม และ $T: X \rightarrow Y$ ว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น จะกล่าวว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น T มีขอบเขต (bounded) ถ้ามีค่าคงที่ $c > 0$ ซึ่ง

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

สำหรับทุกๆ $x \in X$ ถ้า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นและมีขอบเขต เราจะกล่าวว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต (bounded linear operator) (สุเทพ สอนใต้, 2548, น. 75)

ตัวอย่าง 2.6.7 ให้ตัวดำเนินการเชิงเส้น $A \in B(X, X)$ และตัวดำเนินการเชิงเส้น $B \in B(X, X)$ จงแสดงว่า $(A+B) \in B(X, X)$

พิสูจน์ ให้ $A \in B(X, X)$ และ $B \in B(X, X)$

$$\begin{aligned} (A+B)x &= Ax + Bx \\ \|(A+B)x\| &= \|Ax + Bx\| \\ &\leq \|Ax\| + \|Bx\| \end{aligned}$$

จาก บทนิยาม 2.5.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|Ax\| + \|Bx\| &\leq c_1\|x\| + c_2\|x\| \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| = (c_1 + c_2)\|x\| \end{aligned}$$

ดังนั้น $(A+B) \in B(X, X)$

บทนิยาม 2.6.8 ตัวดำเนินการเชิงเส้น T บนปริภูมิฮิลเบิร์ต H จะเรียกว่า มีตัวดำเนินการผกผัน ถ้ามีตัวดำเนินการเชิงเส้น S ที่ทำให้ $ST = TS = I$ เมื่อ I เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์ นั่นคือ $Ix = x$ สำหรับทุก $x \in H$ เขียนในรูปแบบของ $S = T^{-1}$ และเรียก T^{-1} ว่าตัวผกผันของตัวดำเนินการเชิงเส้น T (Takayuki Furuta, 2002, p. 79)

ทฤษฎีบท 2.6.9 กำหนดให้ $T: A \rightarrow B$ เรากล่าวว่าตัวดำเนินการเชิงเส้น T มีตัวผกผันได้ ซึ่งเขียนแทนด้วย T^{-1} ก็ต่อเมื่อตัวดำเนินการเชิงเส้น T เป็นการส่งแบบ 1-1 (พัฒน์ อุดมกะวานิช, 2555, น. 139)

2.7 ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue)

บทนิยาม 2.7.1 ให้ $T: V \rightarrow V$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ V บนฟิลด์ $\mathbb{C}$ จำนวนเชิงซ้อน $\lambda \in \mathbb{C}$ จะกล่าวว่าเป็นค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T ก็ต่อเมื่อ มีแต่ละเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $v \in V$ ที่ทำให้

$$Tv = \lambda v$$

ในกรณีนี้ เราเรียกเวกเตอร์ v ว่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับ λ (Weisstein, n.d., para. 1)

2.8 สเปกตรัมจุด (Point spectrum)

ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิอินเนอร์เชิงซ้อน และ $T: D(T) \rightarrow X$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น โดย $D(T) \subset X$ ซึ่งตัวดำเนินการเชิงเส้น T สอดคล้องกับตัวดำเนินการเชิงเส้น

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

ซึ่ง λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ I เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์บน $D(T)$ ถ้าตัวดำเนินการเชิงเส้น T_λ มีตัวผกผัน นิยามโดย $R_\lambda(T)$ นั่นคือ

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$$

และเรียกว่า รีโซแวนท์ของตัวดำเนินการ T

บทนิยาม 2.8.1 (ค่าปกติ, เซตรีโซแวนท์, สเปกตรัม) ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิอินเนอร์เชิงซ้อน และ $T: D(T) \rightarrow X$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น โดย $D(T) \subset X$ ค่าปกติ λ ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T คือ จำนวนเชิงซ้อนที่ซึ่ง

$$(R1) \text{ ไม่มี } (T - \lambda I)^{-1}$$

$$(R2) \text{ } (T - \lambda I)^{-1} \text{ มีขอบเขต}$$

$$(R3) \text{ } (T - \lambda I)^{-1} \text{ นิยามบนเซตที่ซึ่งหนาแน่นใน } X$$

เซตรีโซเวนท์ $\rho(T)$ ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T เป็นเซตของค่าปกติทั้งหมดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T มีคอมพลีเมนต์คือ $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ ในระนาบเชิงเส้น $\mathbb{C}$ เรียกว่าสเปกตรัมของตัวดำเนินการเชิงเส้น T และ $\lambda \in \sigma(T)$ เรียกว่า ค่าสเปกตรัมของตัวดำเนินการเชิงเส้น T นอกจากนี้ สเปกตรัม $\sigma(T)$ แบ่งออกเป็น 3 เซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนี้

1. สเปกตรัมจุดหรือสเปกตรัมไม่ต่อเนื่อง (Point spectrum) $\sigma_0(T)$ คือ เซตที่ซึ่งไม่มี $(T - \lambda I)^{-1}$ และ $\lambda \in \sigma_0(T)$ เรียกว่า ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T
2. สเปกตรัมต่อเนื่อง (Continuous spectrum) $\sigma_c(T)$ คือ เซตที่ซึ่ง $(T - \lambda I)^{-1}$ หาได้ และสอดคล้องกับ (R3) แต่ไม่สอดคล้องกับ (R2) นั่นคือ $(T - \lambda I)^{-1}$ ไม่มีขอบเขต
3. สเปกตรัมเรซิดิวซ์ (Residual spectrum) $\sigma_r(T)$ คือ เซตที่ซึ่งไม่มี $(T - \lambda I)^{-1}$ (อาจมีหรือไม่มีขอบเขต) แต่ไม่สอดคล้องกับ (R3) ที่ซึ่งโดเมนของ $(T - \lambda I)^{-1}$ ไม่หนาแน่นใน X

โดยการแบ่งของสเปกตรัมเป็นไปตามตารางดังนี้

สอดคล้องกับ	ไม่สอดคล้องกับ	λ เป็นสมาชิกของ
(R1), (R2), (R3)	-	$\rho(T)$
(R1) (R3)	(R1)	$\sigma_0(T)$
(R1) (R3)	(R2)	$\sigma_c(T)$
(R1)	(R3)	$\sigma_r(T)$

(Kreyszig, n.d., p. 371)

ถ้า λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T แล้ว ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T_\lambda = T - \lambda I$ จะไม่เป็นการส่งแบบ 1-1 ดังนั้นจะไม่มีตัวผกผัน (Inverse) อย่างไรก็ตาม แม้บทกลับของข้อความข้างต้นไม่เป็นจริง สเปกตรัมของตัวดำเนินการจะบรรจุค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ทั้งหมดอย่างไม่จำกัดเสมอ (Hazewinkel & Michiel, 2001, para. 2)

2.9 ฟังก์ชันทวินาม (Binomial function)

$\hat{b}(\theta) = (\theta + a)^n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a

ทฤษฎีบท 2.9.1 (ทฤษฎีบททวินาม)

ถ้า α, β เป็นจำนวนจริง และ n, r เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และ $n > r > 0$ แล้ว

$$(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + \alpha C_{n,1} \beta^{n-1} + \alpha^2 C_{n,2} \beta^{n-2} + \dots + \alpha^r C_{n,r} \beta^{n-r} + \dots + \alpha^{n-1} C_{n,n-1} \beta + \beta^n$$

และเรียก $C_{n,r}$ ว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม

2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบท 2.10.1 ให้ X เป็นปริภูมิบานาคเชิงซ้อน และตัวดำเนินการเชิงเส้น $T \in B(X, X)$

เมื่อ $\lambda \in \sigma_0(T)$ ก็ต่อเมื่อ $T - \lambda I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1-1

พิสูจน์

($\Rightarrow$) ให้ $\lambda \in \sigma_0(T)$ เมื่อมีเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $x_0 \in X$

$$\text{ซึ่ง } Tx_0 = \lambda x_0 \text{ หรือ } (T - \lambda I)x_0 = \vec{0} = (T - \lambda I)\vec{0}$$

ดังนั้น $T - \lambda I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1-1

($\Leftarrow$) ให้ $T - \lambda I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1-1 เมื่อมี $x_1, x_2 \in X$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

$$\text{จะได้ว่า } (T - \lambda I)x_1 = (T - \lambda I)x_2$$

$$Tx_1 - \lambda x_1 = Tx_2 - \lambda x_2$$

$$Tx_1 - Tx_2 = \lambda x_1 - \lambda x_2$$

$$T(x_1 - x_2) = \lambda(x_1 - x_2)$$

ดังนั้น $\lambda \in \sigma_0(T)$ (พุทธพร วานิชกร, 2547, น. 8)

ทฤษฎีบท 2.10.2 ให้ $X \neq \{\vec{0}\}$ เป็นปริภูมิบานาคเชิงซ้อน และตัวดำเนินการเชิงเส้น $T \in B(X, X)$

ให้ $\hat{p}(\theta) = a_n \theta^n + \dots + a_1 \theta + a_0$ ซึ่ง $a_0, \dots, a_n$ เป็นค่าคงที่ และ $a_n \neq 0$

นิยามโดย $p(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I$ แล้ว $\sigma_0(p(T)) = \hat{p}(\sigma_0(T))$

พิสูจน์

($\Rightarrow$) ให้ $\mu_0 \in \sigma_0(p(T))$

จากทฤษฎีบท 2.10.1 จะได้ว่า $p(T) - \mu_0 I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1-1

$$\text{ให้ } q(\theta) = \hat{p}(\theta) - \mu_0$$

$$= a_n \theta^n + \dots + a_1 \theta + a_0 - \mu_0$$

$$= a_n (\theta - \lambda_1)^{k_1} \dots (\theta - \lambda_s)^{k_s}$$

โดยที่ λ_i เป็นรากของ q , $i \in \{1, \dots, s\}$ และ $k_1 + \dots + k_s = n$

$$\begin{aligned}
 \text{จะเขียนได้ว่า } q(T) &= p(T) - \mu_0 I \\
 &= a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I - \mu_0 I \\
 &= a_n (T - \lambda_1 I)^{k_1} \dots (T - \lambda_s I)^{k_s}
 \end{aligned}$$

เมื่อ $p(T) - \mu_0 I$ ไม่เป็นการสลับแบบ 1-1

ดังนั้น $T - \lambda_i I$ ไม่เป็นการสลับแบบ 1-1 สำหรับบาง $i \in \{1, \dots, s\}$

นั่นหมายความว่า $\lambda_i \in \sigma_0(T)$ แต่ λ_i เป็นรากของ q

ดังนั้น $q(\lambda_i) = \hat{p}(\lambda_i) - \mu_0 = 0$ และ $\mu_0 = \hat{p}(\lambda_i)$

เราได้ว่า $\mu_0 \in \hat{p}(\sigma_0(T))$

นั่นหมายความว่า $\sigma_0(p(T)) \subseteq \hat{p}(\sigma_0(T))$

($\Leftarrow$) ให้ $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$ เมื่อ $\hat{p}(\lambda_0) \in \hat{p}(\sigma_0(T))$ และมี $Tx = \lambda_0 x$ โดยที่ $x \neq 0$

ดังนั้น $T^n x = \lambda_0^n x$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } p(T)x &= (a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I)x \\
 &= (a_n \lambda_0^n + \dots + a_1 \lambda_0 + a_0)x \\
 &= \hat{p}(\lambda_0)x
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\hat{p}(\lambda_0) \in \sigma_0(p(T))$

นั่นหมายความว่า $\hat{p}(\sigma_0(T)) \subseteq \sigma_0(p(T))$

ดังนั้น $\sigma_0(p(T)) = \hat{p}(\sigma_0(T))$ (พุทธพร วานิชกร, 2547, น. 1)

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อนและตัวดำเนินการเชิงเส้น $T \in B(X, X)$

ให้ $\hat{b}(\theta) = (\theta + a)^n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a กำหนด $b(T) = (T + aI)^n$ แล้ว

$$\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$$

พิสูจน์

ให้ μ_0 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

ต้องการแสดงว่า $\sigma_0(b(T)) \subseteq \hat{b}(\sigma_0(T))$ และ $\hat{b}(\sigma_0(T)) \subseteq \sigma_0(b(T))$

($\Rightarrow$) ให้ $\mu_0 \in \sigma_0(b(T))$

โดยนิยามของสเปกตรัมจุด จะได้ว่า $b(T)x = \mu_0 x$ เมื่อ μ_0 คือค่าลักษณะเฉพาะของ $b(T)$

จากทฤษฎีบท 2.10.1 จะได้ว่า $b(T) - \mu_0 I$ ไม่เป็นการสลับแบบ 1-1

เนื่องจาก

$$\hat{b}(\theta) = (\theta + a)^n = \theta^n + aC_{n,1}\theta^{n-1} + a^2C_{n,2}\theta^{n-2} + \dots + a^rC_{n,r}\theta^{n-r} + \dots + a^{n-1}C_{n,n-1}\theta + a^n$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a

$$\text{ให้ } q(\theta) = \hat{b}(\theta) - \mu_0$$

$$= \theta^n + aC_{n,1}\theta^{n-1} + a^2C_{n,2}\theta^{n-2} + \dots + a^rC_{n,r}\theta^{n-r} + \dots + a^{n-1}C_{n,n-1}\theta + a^n - \mu_0$$

$$= (\theta - \lambda_1)^{k_1} (\theta - \lambda_2)^{k_2} \dots (\theta - \lambda_s)^{k_s}$$

โดยที่ λ_i เป็นรากของ q , $i \in \{1, \dots, s\}$ และ $k_1 + \dots + k_s = n$

จะเขียนได้ว่า

$$q(T) = b(T) - \mu_0 I$$

$$= T^n + aC_{n,1}T^{n-1} + a^2C_{n,2}T^{n-2} + \dots + a^rC_{n,r}T^{n-r} + \dots + a^{n-1}C_{n,n-1}T + a^n I - \mu_0 I$$

$$= (T - \lambda_1 I)^{k_1} (T - \lambda_2 I)^{k_2} \dots (T - \lambda_s I)^{k_s}$$

เนื่องจาก $b(T) - \mu_0 I$ ไม่เป็นการสลับแบบ 1-1

ดังนั้น $T - \lambda_i I$ ไม่เป็นการสลับแบบ 1-1 สำหรับบาง $i \in \{1, \dots, s\}$

นั่นหมายความว่า $\lambda_i \in \sigma_0(T)$ แต่ λ_i เป็นรากของ q

ดังนั้น $q(\lambda_i) = \hat{b}(\lambda_i) - \mu_0 = 0$ นั่นคือ $\mu_0 = \hat{b}(\lambda_i)$

จะได้ว่า $\hat{b}(\lambda_i) \in \hat{b}(\sigma_0(T))$

นั่นหมายความว่า $\mu_0 \in \hat{b}(\sigma_0(T))$

ดังนั้น $\sigma_0(b(T)) \subseteq \hat{b}(\sigma_0(T))$

($\Leftarrow$) ให้ $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$ เมื่อ $\hat{b}(\lambda_0) \in \hat{b}(\sigma_0(T))$

โดยนิยามของสเปกตรัมจุด จะได้ว่า $Tx = \lambda_0 x$

เมื่อ λ_0 คือค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยที่ $x \neq 0$

เนื่องจาก $Tx = \lambda_0 x$

$$T^2x = T(Tx) = T(\lambda_0 x) = \lambda_0 T(x) = \lambda_0 \cdot \lambda_0 x = \lambda_0^2 x$$

$$T^3x = T(T(Tx)) = T(\lambda_0^2 x) = \lambda_0^2 T(x) = \lambda_0^2 \cdot \lambda_0 x = \lambda_0^3 x$$

.

.

.

$$T^n x = T(\lambda_0^{n-1} x) = \lambda_0^{n-1} T(x) = \lambda_0^{n-1} \cdot \lambda_0 x = \lambda_0^n x$$

เนื่องจาก

$$b(T) = (T + aI)^n$$

$$= T^n + aC_{n,1}T^{n-1} + a^2C_{n,2}T^{n-2} + \dots + a^rC_{n,r}T^{n-r} + \dots + a^{n-1}C_{n,n-1}T + a^nI$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a โดยที่ $b(T) \in B(X, X)$

จาก

$$b(T)x = (T^n + aC_{n,1}T^{n-1} + a^2C_{n,2}T^{n-2} + \dots + a^rC_{n,r}T^{n-r} + \dots + a^{n-1}C_{n,n-1}T + a^nI)x$$

$$= T^n x + aC_{n,1}T^{n-1}x + a^2C_{n,2}T^{n-2}x + \dots + a^rC_{n,r}T^{n-r}x + \dots$$

$$+ a^{n-1}C_{n,n-1}Tx + a^nIx$$

$$= \lambda_0^n x + aC_{n,1}\lambda_0^{n-1}x + a^2C_{n,2}\lambda_0^{n-2}x + \dots + a^rC_{n,r}\lambda_0^{n-r}x + \dots$$

$$+ a^{n-1}C_{n,n-1}\lambda_0 x + a^n x$$

$$= (\lambda_0^n + aC_{n,1}\lambda_0^{n-1} + a^2C_{n,2}\lambda_0^{n-2} + \dots + a^rC_{n,r}\lambda_0^{n-r} + \dots + a^{n-1}C_{n,n-1}\lambda_0 + a^n)x$$

$$= \hat{b}(\lambda_0)x$$

จะได้ว่า $\hat{b}(\lambda_0) \in \sigma_0(b(T))$

ดังนั้น $\hat{b}(\sigma_0(T)) \subseteq \sigma_0(b(T))$

สรุป $\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$

ตัวอย่างทฤษฎีบท 3.1

ให้ $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \{0\}$ และ $T \in B(X, X)$ ให้ $\hat{b}(\theta) = (\theta + 2)^2$

นิยามโดย $b(T) = (T + 2I)^2$ จงแสดงว่า $\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$

วิธีทำ

-หา $\sigma_0(b(T))$

พิจารณา $\sigma_0(T)$ นั่นคือ จะมี $x \in X$ ซึ่ง $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$ ที่ทำให้ $Tx = \lambda_0 x$

และ $T^2 x = \lambda_0^2 x$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } b(T)x &= (T + 2I)^2 x \\ &= (T^2 + 4T + 4I)x \\ &= T^2 x + 4Tx + 4Ix \\ &= \lambda_0^2 x + 4\lambda_0 x + 4x \\ &= (\lambda_0^2 + 4\lambda_0 + 4)x \\ &= (\lambda_0 + 2)^2 x \\ &= \hat{b}(\lambda_0)x \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\hat{b}(\lambda_0) \in \sigma_0(b(T))$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sigma_0(b(T)) &= \{\hat{b}(\lambda_0) \in \mathbb{R} \mid b(T)x = \hat{b}(\lambda_0)x\} \\ &= \{\mu_0 \in \mathbb{R} \mid \mu_0 = \hat{b}(\lambda_0) = (\lambda_0 + 2)^2\} \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

-หา $\hat{b}(\sigma_0(T))$

เนื่องจาก $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$ ทำให้ได้ว่า จะมี $x \in X$ ที่ทำให้ $Tx = \lambda_0 x$

จะได้ว่า $\hat{b}(\lambda_0) \in \hat{b}(\sigma_0(T))$

นั่นคือ $(\lambda_0 + 2)^2 \in \hat{b}(\sigma_0(T))$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \hat{b}(\sigma_0(T)) &= \{\hat{b}(\lambda_0) \in \mathbb{R} \mid Tx = \lambda_0 x, \lambda_0 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mu_0 \in \mathbb{R} \mid \mu_0 = \hat{b}(\lambda_0) = (\lambda_0 + 2)^2\} \dots\dots\dots (**) \end{aligned}$$

จาก (*) และ (**)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \sigma_0(b(T)) &= \{\hat{b}(\lambda_0) \in \mathbb{R} \mid b(T)x = \hat{b}(\lambda_0)x\} \\ &= \{\mu_0 \in \mathbb{R} \mid \mu_0 = \hat{b}(\lambda_0) = (\lambda_0 + 2)^2\} \\ &= \{\hat{b}(\lambda_0) \in \mathbb{R} \mid Tx = \lambda_0 x, \lambda_0 \in \mathbb{R}\} \\ &= \hat{b}(\sigma_0(T)) \end{aligned}$$

สรุป $\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปราย

ในส่วนผลการวิจัยของปัญหาพิเศษฉบับนี้ ทางคณะผู้จัดทำได้ศึกษารวมทั้งเข้าใจถึงงานวิจัยที่เกี่ยวกับการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับพหุนามในปริภูมิบานาค ซึ่งทำให้คณะผู้จัดทำได้เล็งเห็นถึงการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินามที่มีพจน์คล้ายคลึงกับพหุนาม โดยจะศึกษาเกี่ยวกับฟิลด์(Field) ปริภูมิเวกเตอร์(Vector space) ปริภูมิเมตริก(Metric space) ปริภูมินอร์ม(Norm space) ปริภูมิบานาค(Banach space) ปริภูมิผลคูณภายใน(Inner product space) ปริภูมิฮิลเบิร์ต(Hilbert space) ตัวดำเนินการเชิงเส้น(Linear operator) ค่าลักษณะเฉพาะ(Eigenvalue) สเปกตรัมจุด(Point spectrum) และฟังก์ชันทวินาม(Binomial function) ที่จะต้องนำมาใช้ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ รวมทั้งงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง อันได้แก่ ทฤษฎีบท 2.10.1 และ 2.10.2 โดยจะนำทั้งสองทฤษฎีบทนี้มาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งจะใช้ทฤษฎีบท 2.10.1 นั่นคือ $\lambda \in \sigma_0(T)$ ก็ต่อเมื่อ $T - \lambda I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1-1 มาประยุกต์ใช้ ทำให้ได้ว่า $b(T) - \mu_0 I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1-1 จึงสามารถจัดรูปเป็นพหุนามได้ จากนั้นจะใช้ทฤษฎีบท 2.10.2 นั่นคือ ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิบานาคเชิงซ้อนและ $T \in B(X, X)$ ให้ $\hat{p}(\theta) = a_n \theta^n + \dots + a_1 \theta + a_0$ ซึ่ง $a_0, \dots, a_n$ เป็นค่าคงที่ และ $a_n \neq 0$ นิยามโดย $p(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I$ จะได้ว่า $\sigma_0(p(T)) = \hat{p}(\sigma_0(T))$ (ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับพหุนาม) ซึ่งจะนำมาเป็นแนวทางในการพิสูจน์ของปัญหาพิเศษนี้ (ทฤษฎีบท 3.1)

และผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.1 คือ สเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T จะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยทวินาม $\hat{b}$ ซึ่งจะใช้การพิสูจน์แบบตรง (Direct proof) ซึ่งการเป็นเซตย่อยซึ่งกันและกันของสเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T และ ภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยทวินาม $\hat{b}$ โดยสังเกตได้ว่ารูปแบบของทวินามจะคล้ายคลึงกับพหุนาม ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบเพื่อหาค่ารากได้ จึงทำให้สามารถพิสูจน์คล้ายกับทฤษฎีบท 2.10.2 ได้ ทำให้ได้ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม นั้นหมายความว่า ให้ $X \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อนและ $T \in B(X, X)$ โดย $\hat{b}(\theta) = (\theta + a)^n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a กำหนด $b(T) = (T + aI)^n$ แล้ว $\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$ นั่นเอง

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม โดยนำเรื่องปริภูมิฮิลเบิร์ต(Hilbert space) ตัวดำเนินการเชิงเส้น(Linear operator) และค่าลักษณะเฉพาะ(Eigenvalue) เข้ามาเกี่ยวข้อง จากทฤษฎีบท 3.1 ผลที่น่าสนใจคือ สเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T จะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยทวินาม b และปัญหาที่เกิดจากการศึกษาปัญหาพิเศษนี้คือ เนื้อหาทฤษฎีบทเกี่ยวกับสเปกตรัมจุดนั้น ไม่มีอยู่ในระดับปริญญาตรี จึงทำให้ค่อนข้างยากและเสียเวลาในการศึกษาค้นคว้า

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. นอกจากจะพิจารณาที่การส่งเชิงเส้นแล้ว ควรศึกษาถึงการส่งแบบอื่นๆเพื่อเป็นการต่อยอดองค์ความรู้
2. ควรนำความรู้ที่ได้ไปพัฒนา เพื่อใช้กับฟังก์ชันอื่นๆ นอกจากฟังก์ชันทวินาม
3. ควรนำทฤษฎีบทที่สร้างขึ้นใหม่ในปัญหาพิเศษเล่มนี้ ไปประยุกต์ใช้งานต่างๆที่สอดคล้องกัน

เอกสารอ้างอิง

- พัชรินทร์ เหมโชติและไพบูลย์ พันธรัักษ์พงษ์. (2555). พีชคณิตเชิงเส้น1. กรุงเทพมหานคร:
ห้างหุ้นส่วนจำกัด มินเซอร์วิส ซัพพลาย.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2555). ทฤษฎีปริภูมิบานาค. เชียงใหม่: จรัสธุรกิจการพิมพ์.
- พุทธพร วานิชกร. (2547). ทฤษฎีการส่งเชิงสเปกตรัมสำหรับพหุนามและฟังก์ชันอินวางฟังก์ชัน.
วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.
- ภัทรารุณ จันทรเสียม. (2558). ทฤษฎีเมทริกซ์. เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีเมทริกซ์.
(อัดสำเนา).
- สุเทพ สอนใต้. (2548). หลักคณิตศาสตร์. บริษัท วี.พรินท์ (1991) จำกัด: สำนักพิมพ์แห่ง-
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Hazewinkel & Michiel. (2001). Spectrum (functional analysis). Retrieved
January 24, 2017, from [https://en.wikipedia.org/wiki/Spectrum_\(functional_](https://en.wikipedia.org/wiki/Spectrum_(functional_analysis))
[analysis\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Spectrum_(functional_analysis)).
- Kôsaku Yosida. (1980). Functional Analysis. Berlin Heidelberg New York: Springer-
Verlag.
- Kreyszig, E. (1978). Introductory functional analysis with applications. United
States of America: n.p.
- Robert, A. (2012). Linear operator composition. Retrieved March 2, 2017, from
<http://linear.ups.edu/html/section-LT.html>
- Takayuki, F. (2002). Invitation to linear operators : from matrices to bounded
linear operators on a Hilbert space. London: Taylor & Francis.
- Weisstein, E.W. (n.d.). Eigenvalue. Retrieved November 9, 2016, from
<http://mathworld.wolfram.com/Eigenvalue.html>.