ผลเฉลยสมการการนำความร้อนในรูปแบบฟังก์ชันทีตา
THETA FUNCTIONS AS SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION

วรุณสิริ คะตะโต
สุรเชษฐ์ ฟ้ามงคลชัย
เสาวลักษณ์ บุญเกียน

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ผลเฉลยสมการการนำความร้อนในรูปแบบฟังก์ชันทีตา
THETA FUNCTIONS AS SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION

วรุณสิริ คะตะโต

สุรเชษฐ์ ฟ้ามงคลชัย

เสาวลักษณ์ บุญเกียน

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2559

THETA FUNCTIONS AS SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION

WARUNSIRI KATATO

SURACHET FAMONGKONCHAI

SAOWALAK BUNKIAN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIRMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ ผลเฉลยสมการการนำความร้อนในรูปแบบฟังก์ชันทีตา
Theta Functions as Solution of the Heat Conduction Equation

ชื่อนักศึกษา นางสาววรุณสิริ คะตะโต รหัสนักศึกษา56050127
นายสุรเชษฐ์ ฟ้ามงคลชัย รหัสนักศึกษา 56050164
นางสาวเสาวลักษณ์ บุญเกียน รหัสนักศึกษา 56050165

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2559
อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ผศ.ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร. ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ประธานกรรมการ	
ดร. บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ กรรมการ	
รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ผศ.ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลเฉลยสมการการนำความร้อนในรูปแบบฟังก์ชันทีตา Theta Functions as Solution of the Heat Conduction Equation
ชื่อนักศึกษา	นางสาววรุณสิริ คะตะโต รหัสนักศึกษา56050127 นายสุรเชษฐ์ ฟ้ามงคลชัย รหัสนักศึกษา 56050164 นางสาวเสาวลักษณ์ บุญเกียน รหัสนักศึกษา 56050165
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร. ภัคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผศ.ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ์

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษนี้ นำเสนอสมบัติบางประการของฟังก์ชันทีตา ซึ่งได้ขยายแนวคิดมาจากการหาผลเฉลยของสมการการนำความร้อน แสดงอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆและเวลาที่ผ่านไปของวัตถุ แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันทีตามีสมบัติการคูณ และ การหาอนุพันธ์ รวมถึงสามารถนิยามฟังก์ชันเชิงวงรีจากอัตราส่วนของฟังก์ชันทีตาได้ ซึ่งสมบัติบางประการของฟังก์ชันเชิงวงรีที่ได้ศึกษา ได้แก่ การพิสูจน์เอกลักษณ์เชิงวงรี การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงวงรี และ การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นจากฟังก์ชันเชิงวงรี

คำสำคัญ : สมการความร้อน ฟังก์ชันทีตา ฟังก์ชันเชิงวงรี

Title	Theta Functions as Solution of the Heat Conduction Equation
Students	Miss. Warunsiri Katato Student ID 56050127
	Mr. Surachet Famongkonchai Student ID 56050164
	Miss. Saowalak Bunkian Student ID 56050165
Degree	Bachelor of Science Applied Mathematics
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul
Co-advisor	Asst.Prof.Dr.Jaipong Kasemsuwan

Abstract

This special problem is talking about some properties of theta function that is extended concept from the solution of heat equation as the function of position and time. We show the properties of multiplication of theta function and the properties of differential. Moreover, we study the elliptic function that define from ratio of theta function. We study some elliptic properties which consist of the proof elliptic identity, derivatives of elliptic function and finding of Jacobi' s elliptic function as solutions of nonlinear ordinary differential equation.

Keywords : Heat Equation, Theta Functions, Jacobi' s Elliptic Functions

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง "ผลเฉลยสมการการนำความร้อนในรูปแบบฟังก์ชันทีตา" ได้ประสบกับปัญหาและอุปสรรคต่างๆมากมาย และการแก้ไขปัญหาเหล่านี้ไม่สามารถแก้ไขปัญหาและอุปสรรคดังกล่าวได้หากขาดบุคคลเหล่านี้ รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล และ ผศ.ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้และได้ให้ความรู้คำแนะนำและแนวทางในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้อีกทั้งยังเป็นกำลังใจในการทำงาน

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณผศ.ดร. ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ประธานกรรมการสอบ และ ดร. บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนในการทำปัญหาพิเศษและเป็นกำลังใจให้มาโดยตลอด เพื่อนๆสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่คอยแลกเปลี่ยนความคิดเห็น และให้กำลังใจในการทำงานครั้งนี้ เจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่อำนวยความสะดวกในการทำงานต่างๆ

นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์ในด้านต่างๆจากผู้ที่เกี่ยวข้องที่ไม่สามารถกล่าวนามได้หมดในที่นี้ ผู้จัดทำขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

วรุณสิริ คะตะโต

สุรเชษฐ์ ฟ้ามงคลชัย

เสาวลักษณ์ บุญเกียน

สารบัญ

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ

การหาผลเฉลยของสมการการนำความร้อนนั้น สามารถหาได้โดยระเบียบวิธีการแยกตัวแปร ถ้าวัตถุมีขนาดจำกัด และ สามารถหาได้โดยการแปลงปริพันธ์ถ้าวัตถุนั้นมีความยาวมากๆ อุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆของวัตถุ สามารถนิยามเป็นฟังก์ชันทีตา ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาสมบัติบางประการของฟังก์ชันทีตา ในกรณีที่เป็นผลเฉลยของสมการการนำความร้อน และนิยามฟังก์ชันเชิงวงรีจากอัตราส่วนของฟังก์ชันทีตา

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1) ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการการนำความร้อนในแท่งโลหะ

2) ศึกษาสมบัติบางประการของฟังก์ชันทีตา ในกรณีที่เป็นผลเฉลยของสมการการนำความร้อน

3) ศึกษาสมบัติบางประการของฟังก์ชันเชิงวงรี ซึ่งนิยามจากอัตราส่วนของฟังก์ชันทีตา

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1) ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการการนำความร้อนในแท่งโลหะที่มีความยาวจำกัด

2) ศึกษาผลคูณของฟังก์ชันทีตา

3) ศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทีตา

4) ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันเชิงวงรี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) จากฟังก์ชันทีตาที่เป็นผลเฉลยของสมการการนำความร้อน สามารถนิยามฟังก์ชันเชิงวงรีจากอัตราส่วนของฟังก์ชันทีตา โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงวงรีผกผัน จะนำไปสู่การหาปริพันธ์เชิงวงรี

2) ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงวงรีสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการหาปริพันธ์เชิงวงรี ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าความยาวของเส้นรอบรูปวงรี และเป็นความรู้พื้นฐานในการศึกษาเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และเรขาคณิตแบบฟินซเลอร์ต่อไป

1.5 แผนการดำเนินงาน

	เดือน											
	ส.ค. 59	ก.ย. 59	ต.ค. 59	พ.ย. 59	ธ.ค. 59	ม.ค. 60	ก.พ. 60	มี.ค. 60	เม.ย. 60	พ.ค. 60	มิ.ย. 60	ก.ค. 60
หาอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ปรึกษาเรื่องที่สนใจ												
ค้นคว้าและศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจ												
วางแผนการวิจัย												
บทที่ 1 บทนำ												
บทที่ 2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการความร้อน												
บทที่ 3 เอกลักษณ์ที่เกี่ยวกับฟังก์ชันทีตา												
บทที่ 4 การประยุกต์ของฟังก์ชันทีตา												
บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ												
จัดทำรูปเล่ม												
ตรวจสอบและนำเสนอ												

บทที่ 2

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการความร้อน

ในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับความรู้เบื้องต้นของฟังก์ชันคู่ – ฟังก์ชันคี่ อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ – อนุกรมฟูริเยร์ไซน์ สมการความร้อน Unit Impulse Function และ Dirac Delta Function ซึ่งเป็นความรู้เบื้องต้นที่จะนำไปใช้ในการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการความร้อนต่อไป

2.1 ฟังก์ชันคู่ – ฟังชันก์คี่ (Even and Odd Functions)

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรที่เป็นจำนวนจริง $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันคู่ ถ้าสมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุกค่า x

$$f(-x)=f(x)$$

ตัวอย่างที่ 2.1 เนื่องจาก $\cos(-x)=\cos x$ ดังนั้น $f(x)=\cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรที่เป็นจำนวนจริง $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันคี่ ถ้าสมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุกค่า x

$$f(-x)=-f(x)$$

ตัวอย่างที่ 2.2 เนื่องจาก $\sin(-x)=-\sin x$ ดังนั้น $f(x)=-\sin x$ เป็นฟังก์ชันคี่

2.2 อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ – อนุกรมฟูริเยร์ไซน์ (Fourier Cosine and Sine Series)

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ ของ $f(x)$ คือ $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi x}{L}$

โดยที่ $$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

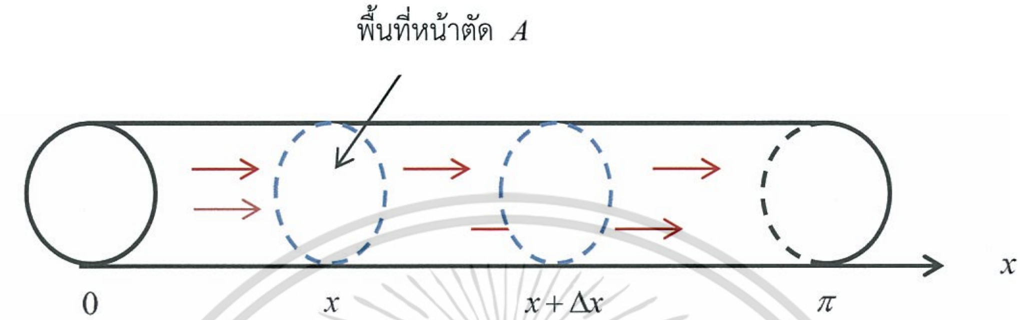
และ $$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ n=1,2,3,\ldots$$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ อนุกรมฟูริเยร์ไซน์ ของ $f(x)$ คือ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{L}$

โดยที่ $$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ n=1,2,3,\ldots$$

2.3 สมการความร้อน (Heat Equation)

ต้องการหาสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการไหลของความร้อนในแท่งโลหะผอมๆยาวๆหรือในเส้นลวด โดยในแท่งโลหะยาว π หน่วย มีพื้นที่หน้าตัด A ตารางหน่วย ให้ S ตารางหน่วยเป็นพื้นที่พื้นผิวด้านข้างของแท่งโลหะ วางแท่งโลหะในแนวแกน x ให้ปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้น $0 \le x \le \pi$ ดังรูป (2.1)



รูปที่ (2.1) การวางแท่งโลหะในแนวแกน x ให้ปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะอยู่ที่จุดกำเนิด

กำหนดสมมติฐานเกี่ยวกับความร้อนดังนี้

1. การไหลของความร้อนในแท่งโลหะจะไหลไปในทิศทางเดียว คือ ตามแนวแกน x

2. ด้านข้างของแท่งโลหะถูกพันด้วยฉนวน เพื่อความร้อนจะไม่สูญหายไปตามพื้นผิวด้านข้างนี้ได้

3. ไม่มีความร้อนเกิดขึ้นเองภายในแท่งโลหะ

4. แท่งโลหะเป็นสารเนื้อเดียวโดยความหนาแน่น หรือ มวลต่อหน่วยปริมาตร ρ มีค่าคงที่มากกว่าศูนย์

5. ค่าความร้อนจำเพาะ (specific heat) γ และค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) κ ของเนื้อสารของโลหะมีค่าคงที่มากกว่าศูนย์

เนื่องจากอุณหภูมิ θ มีการเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง x และเวลา t ดังนั้น อุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง และ เวลา หรือ $\theta = \theta(x,t)$ โดยอุณหภูมิเป็นไปตามกฎการนำความร้อน ดังนี้

1. ปริมาณความร้อน Q ในแต่ละหน่วยมวล m คือ

$$Q = \gamma m \theta \qquad (2.3.1)$$

เมื่อ θ เป็นอุณหภูมิของแต่ละหน่วยมวล m

γ เป็นความร้อนจำเพาะ

2. การไหลของความร้อนในหนึ่งมิติ จะพิจารณาเป็นสภาวการณ์ไหลสม่ำเสมอของอุณหภูมิ θ ซึ่งขึ้นอยู่กับแกน x เพียงอย่างเดียว ณ เวลาใดๆ ดังนั้น สามารถหา θ_x ได้

ให้ A เป็นพื้นที่หน้าตัดของพื้นผิว S ของแท่งโลหะ (ในกรณีนี้ พื้นผิว S อยู่ในแนวแกน x พื้นที่หน้าตัด A ตั้งฉากกับแกน x)

ให้ θ_x เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ณ ตำแหน่ง x ใดๆ อัตราความร้อน Q_t ที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด A ของพื้นที่พื้นผิว S เป็นสัดส่วนกับ A และ θ_x

โดย $$Q_t \propto A\theta_x$$

$$Q_t = -\kappa A\theta_x \; ; \; \kappa > 0 \qquad (2.3.2)$$

κ เป็นค่าการนำความร้อนของแท่งโลหะ เครื่องหมาย $-$ แสดงว่าอุณหภูมิลดลง

ตัดแท่งโลหะตามขวางออกเป็นแผ่นบางๆ ระหว่าง x และ $x+\Delta x$ แล้ว $u(x,t)$ เป็นค่าประมาณอุณหภูมิ ณ แต่ละจุดในช่วงนี้ โดยมวลของแผ่นโลหะกลมบางนี้คือ $m=\rho(A\Delta x)$ ดังนั้นจาก $(2.3.1)$ ปริมาณความร้อน คือ

$$Q = \gamma\rho A(\Delta x)\theta$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของความร้อน ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_t = \gamma\rho A(\Delta x)\theta_t \qquad (2.3.3)$$

ความร้อนไหลไปตามแกนบวก x ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงของความร้อนจาก $(2.3.2)$ คือ

$$Q_t = -\kappa A\theta_x(x,t) - \left(-\kappa A\theta_x(x+\Delta x,t)\right)$$

$$= -\kappa A\theta_x(x,t) + \kappa A\theta_x(x+\Delta x,t)$$

$$Q_t = \kappa A\left[\theta_x(x+\Delta x,t) - \theta_x(x,t)\right] \qquad (2.3.4)$$

จาก (2.3.3) และ (2.3.4) จะได้

$$\kappa A\left[\theta_x\left(x+\Delta x,t\right)-\theta_x\left(x,t\right)\right]=\gamma\rho A\left(\Delta x\right)\theta_t$$

$$\frac{\kappa A}{\gamma\rho A}\left[\frac{\theta_x\left(x+\Delta x,t\right)-\theta_x\left(x,t\right)}{\Delta x}\right]=\theta_t$$

$$\frac{\kappa}{\gamma\rho}\left[\frac{\theta_x\left(x+\Delta x,t\right)-\theta_x\left(x,t\right)}{\Delta x}\right]=\theta_t$$

พิจารณาลิมิตเมื่อ $\Delta x \to 0$ ได้ $\qquad \dfrac{\kappa}{\gamma\rho}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\theta_t$

ให้ $\dfrac{\kappa}{\gamma\rho}=k>0$

เรียก k ว่า thermal diffusivity

แล้ว $k\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$ หรือ $k\theta_{xx}=\theta_t$

ถ้ากำหนดว่า เมื่อเริ่มต้นอุณหภูมิของแต่ละตำแหน่งมีค่า $f\left(x\right)$ จะได้ว่า

$$\theta\left(x,0\right)=f\left(x\right);0<x<\pi$$

เรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

ถ้ากำหนดว่า ที่ปลายข้างหนึ่งมีอุณหภูมิ t_1 และปลายอีกข้างหนึ่งมีอุณหภูมิ t_2 จะได้ว่า

$$\theta\left(0,0\right)=t_1,\theta\left(\pi,0\right)=t_2;t>0$$

เรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition)

ดังนั้นปัญหาความร้อนในแท่งโลหะที่มีความยาวจำกัดในรูปแบบปัญหาค่าขอบเขต คือ

จงหาผลเฉลยของ $\qquad k\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\theta}{\partial t};0\le x\le\pi,t\ge 0$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $\qquad \theta\left(0,t\right)=A,\theta\left(\pi,t\right)=B;t>0$

$$\theta\left(x,0\right)=f\left(x\right);0<x<\pi$$

นอกเหนือจากเงื่อนไขดังกล่าวนี้ ในบางครั้งเงื่อนไขอาจอยู่ในรูปแบบอนุพันธ์ ดังนี้

ถ้าปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะเป็นฉนวน ไม่มีความร้อนไหลออกจากแท่งโลหะ หรือไหลเข้าแท่งโลหะ แล้ว $\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ หรือ $\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=\pi}=0$

ถ้าปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะแตะกับตัวกลาง เช่น อากาศ หรือน้ำ ความร้อนจากแท่งโลหะอาจไหลไปยังตัวกลางแล้วอุณหภูมิของแท่งโลหะลดลง หรือความร้อนจากตัวกลางไหลไปยังแท่งโลหะแล้วอุณหภูมิของแท่งโลหะเพิ่มขึ้น

จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน “อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุ $\theta(0,t)$ กับ อุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม θ_0” จะได้

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0}\propto\theta(0,t)-\theta_0$$

แล้ว
$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0}=\kappa\left(\theta(0,t)-\theta_0\right)$$

คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของแท่งโลหะเมื่อมีตัวกลางมาแตะที่จุดกำเนิดของแท่งโลหะ

หรือ
$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=\pi}=\kappa\left(\theta(\pi,t)-\theta_0\right)$$

คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของแท่งโลหะเมื่อมีตัวกลางมาแตะที่จุดปลายของแท่งโลหะ

เมื่อ κ เป็นค่าการนำความร้อนของแท่งโลหะ

ถ้าความร้อนสามารถกระจายไปทางพื้นผิวด้านข้างของแท่งโลหะไปยังตัวกลางที่อยู่รอบๆ แท่งโลหะซึ่งอุณหภูมิ θ_0 แล้วสมการความร้อน คือ

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-k\left(\theta-\theta_0\right)=\frac{\partial\theta}{\partial t};0\le x\le\pi,t\ge0$$

ตัวอย่างที่ 2.3 การหาผลเฉลยของสมการความร้อน ในกรณีที่มีเงื่อนไขขอบเขตเท่ากัน

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t}\ ;\ 0\le \mathrm{x}\le\pi\ ,\ \mathrm{t}\ge 0$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $\theta(0,t)=0\,,\theta(\pi,t)=0;\ t>0$

$$\theta(x,0)=f(x)\ ;\ 0<x<\pi$$

วิธีทำ ให้ $\theta(x,t)=X(x)T(t)$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น $k\,X''(x)T(t)=X(x)T'(t)$

หารทั้งสองข้างด้วย $X(x)T(t)$ จะได้

$$\frac{k\,X''(x)T(t)}{X(x)T(t)}=\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)}\quad\text{หรือ}\quad\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}$$

เนื่องจากทางซ้ายของสมการมีเฉพาะตัวแปร x และทางขวาของสมการมีเฉพาะตัวแปร t แสดงว่าทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น และทางขวาเป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น และทางซ้ายเท่ากับทางขวา ดังนั้น แต่ละข้างต้องเป็นค่าคงที่ ให้ค่าคงที่เป็น λ^2

แล้วมี 3 กรณี ที่จะพิจารณาคือ $\lambda^2>0$, $\lambda^2=0$ และ $-\lambda^2<0$ นั่นคือ

<u>กรณี I</u> $\lambda^2>0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=\lambda^2$$

แล้ว $X''(x)=\lambda^2X(x)$ และ $T'(t)=k\,\lambda^2T(t)$

จะได้ $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$ และ $T'(t)-k\,\lambda^2T(t)=0$

จาก $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2-\lambda^2=0$

$$r=\pm\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_1\cosh\lambda\mathrm{x}+c_2\sinh\lambda\mathrm{x}$

จาก $T'(t)-k\lambda^2T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r-\lambda^2=0$

$$r=\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลย $T(t)=c_3e^{k\lambda^2t}$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=(c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x)c_3e^{k\lambda^2t}$$

$$=(A_1\cosh\lambda x+B_1\sinh\lambda x)e^{k\lambda^2t}$$

จากเงื่อนไข กรณีนี้ตัดทิ้งได้ทันทีเพราะ ฟังก์ชันชี้กำลังที่เป็นเลขจำนวนบวก แสดงว่าอุณหภูมิเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต เมื่อ t มีค่ามากๆ ไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(0,t)=0,\theta(\pi,t)=0;\ t>0$

<u>กรณี II</u> $\lambda^2=0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=0$$

แล้ว $X''(x)=0$ และ $T'(t)=0$

จาก $X''(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2=0$

$$r=0,0$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_4e^{0x}+c_5e^{0x}x$

หรือ $X(x)=c_4+c_5x$

จาก $T'(t)=0$

สมการช่วย คือ $r=0$

จะได้ผลเฉลย คือ $T(t)=c_6e^{0t}=c_6$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=(c_4+c_5x)c_6$$

$$=A_2+B_2x$$

จากเงื่อนไข $\theta(0,t)=0$

จะได้ $0=\theta(0,t)=A_2+B_2(0)$

ดังนั้น $A_2=0$ นั่นคือ $\theta(x,t)=B_2x$

จากเงื่อนไข $\theta(\pi,t)=0$

จะได้ $0=\theta(\pi,t)=B_2(\pi)$

เนื่องจาก $\pi\neq 0$ ดังนั้น $B_2=0$ นั่นคือ $\theta(x,t)=0$

กรณีนี้ ตัดทิ้งได้ เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0)=f(x)$

<u>กรณี III</u> $-\lambda^2<0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=-\lambda^2$$

แล้ว $X''(x)=-\lambda^2X(x)$ และ $T'(t)=-k\lambda^2T(t)$

จะได้ $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$ และ $T'(t)+k\lambda^2T(t)=0$

จาก $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2+\lambda^2=0$

$$r=\pm i\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_7\cos\lambda x+c_8\sin\lambda x$

จาก $T'(t)+k\lambda^2 T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r+\lambda^2=0$

$$r=-\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลยคือ $T(t)=c_9 e^{-k\lambda^2 t}$

แล้วผลเฉลยของสมการคือ

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=\left(c_7\cos^2\lambda x+c_8\sin^2\lambda x\right)c_9 e^{-k\lambda^2 t}$$

จากเงื่อนไข $\theta(0,t)=0$ จะได้ $X(0)T(t)=0$

$\theta(\pi,t)=0$ จะได้ $X(\pi)T(t)=0$

มีกรณีที่เป็นไปได้คือ $T(t)=0$ หรือ $X(0)=X(\pi)=0$

ถ้า $T(t)=0$ แล้ว $\theta(x,t)=X(x)T(t)=0$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0)=f(x)$

ดังนั้นถ้า $X(0)=0$ และ $X(\pi)=0$

จาก $X(x)=c_7\cos\lambda x+c_8\sin\lambda \mathrm{x}$

จะได้ $X(0)=c_7\cos\lambda(0)+c_8\sin\lambda(0)=0$

เนื่องจาก $\cos 0 \neq 0$ ดังนั้น $c_7 = 0$

เนื่องจาก $\sin 0 = 0$ ดังนั้น $c_8 \neq 0$

แล้ว $X(x) = c_8 \sin \lambda x$

จาก $X(x) = c_8 \sin \lambda \pi$ และ $X(\pi) = 0$

จะได้ $X(\pi) = c_8 \sin \lambda \pi = 0$

มีกรณีที่เป็นไปได้คือ $c_8 = 0$ หรือ $\sin \lambda \pi = 0$

ถ้า $c_8 = 0$ แล้ว $X(x) = 0$ จะได้ $\theta(x,t) = X(x)T(t) = 0$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0) = f(x)$

ดังนั้น ถ้า $\sin \lambda \pi = 0$ และ $\sin n\pi = 0$

ดังนั้น $\lambda \pi = n\pi$ หรือ $\lambda = \dfrac{n\pi}{\pi}$

แล้ว $X(x) = c_8 \sin \dfrac{n\pi}{\pi} x$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

เรียก λ ว่า ค่าเจาะจง (eigenvalue) และเรียก $X(x)$ ว่า ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction)

จาก $T(t) = c_9 e^{-k\lambda^2 t}$

จะได้ $T(t) = c_9 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}$

ดังนั้น $\theta(x,t) = X(x)T(t)$

$$= \left(c_8 \sin \frac{n\pi}{\pi} x\right)\left(c_9 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}\right)$$

$$= A e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\pi} x \quad , A = c_8 c_9$$

$$= A e^{-n^2 kt} \sin nx$$

จาก superposition principle

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-n^2kt}\sin nx$$

จากเงื่อนไข $\theta(x,0)=f(x)$

ดังนั้น $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-n^2k(0)}\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx$$

ถ้า $A_n=b_n;n=1,2,3,\ldots$ ในนิยามอนุกรมฟูริเยร์ไซน์

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

แล้ว ผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตนี้ คืออนุกรมอนันต์

$$\theta(x,\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right)e^{-n^2kt}\sin nx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right)e^{-n^2kt}\sin nx$$ #

ตัวอย่างที่ 2.4 การหาผลเฉลยของสมการความร้อน ในกรณีที่มีเงื่อนไขขอบเขตไม่เท่ากัน

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+r=\frac{\partial\theta}{\partial t};0\le x\le 1,t\ge 0$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $\theta(0,t)=0,\theta(1,t)=\theta_0;t>0$

$$\theta(x,0)=f(x);0<x<1$$

วิธีทำ สมการนี้เป็นสมการแบบไม่เอกพันธ์และปลายทั้งสองข้างมีอุณหภูมิไม่เท่ากัน ดังนั้นให้

$$\theta(x,t)=v(x,t)+\varphi(x)$$

โดยการหาอนุพันธ์ได้

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\quad\text{และ}\quad\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}$$

แทนในสมการที่โจทย์ให้มา จะได้ $k\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)+r=\dfrac{\partial v}{\partial t}$

จัดสมการใหม่จะได้ $k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial v}{\partial t}=-k\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-r$

ลดรูปสมการให้เป็นสมการเอกพันธ์โดยได้

$$-k\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-r=0 \text{ หรือ } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=\frac{-r}{k}$$

โดยการหาปริพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x สองครั้งจะได้

$$\varphi'=\frac{-r}{k}x+c_1 \text{ และ } \varphi=\frac{-r}{k}\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่

จากเงื่อนไข $\theta(0,t)=0$ จะได้ $\theta(0,t)=v(0,t)+\varphi(0)=0$

$\theta(1,t)=\theta_0$ จะได้ $\theta(1,t)=v(1,t)+\varphi(1)=\theta_0$

ให้ $v(0,t)=0$ และ $v(1,t)=0$ เมื่อลดรูปให้เป็นกรณีที่มีเงื่อนไขขอบเขตเท่ากัน
แล้ว $\varphi(0)=0$ และ $\varphi(1)=\theta_0$

จาก $\varphi(0)=0$ จะได้ $0=-r(0)+c_1(0)+c_2$

เนื่องจาก $c_1\neq 0$ ดังนั้น $c_2=0$

ดังนั้น $\varphi(x)=\dfrac{-r}{k}\dfrac{x^2}{2}+c_1x$

จาก $\varphi(x)=\dfrac{-r}{k}\dfrac{x^2}{2}+c_1x$ และ $\varphi(1)=\theta_0$

จะได้ $\theta_0=\varphi(1)=\dfrac{-r}{k}\dfrac{(1)^2}{2}+c_1(1)$ หรือ $c_1=\theta_0+\dfrac{r}{2k}$

นั่นคือ $\varphi(x)=\dfrac{-r}{2k}x^2+\left(\theta_0+\dfrac{r}{2k}\right)x$

จากเงื่อนไขสุดท้าย $\theta(x,0)=f(x)$ แล้ว $\theta(x,0)=v(x,0)+\varphi(x)$

หรือ $v(x,0)=\theta(x,0)-\varphi(x)$

$$=f(x)-\varphi(x)$$

$$=f(x)+\frac{r}{2k}x^2-\left(\theta_0+\frac{r}{2k}\right)x$$

ดังนั้นจะได้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตปัญหาใหม่ในรูปของ $v(x,t)$ คือ

จงหาผลเฉลย $$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t};0\le x\le 1,t\ge 0$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $v(0,t)=0,v(1,t)=0;t>0$

$$v(x,0)=f(x)+\frac{r}{2k}x^2-\left(\theta_0+\frac{r}{2k}\right)x$$

ให้ $v(x,t)=X(x)T(t)$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น $k\,X''(x)T(t)=X(x)T'(t)$

หารทั้งสองข้างด้วย $kX(x)T(t)$ จะได้

$$\frac{k\,X''(x)T(t)}{kX(x)T(t)}=\frac{X(x)T'(t)}{kX(x)T(t)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}$$

เนื่องจากทางซ้ายของสมการมีเฉพาะตัวแปร x และทางขวาของสมการมีเฉพาะตัวแปร t แสดงว่าทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น และทางขวาเป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น และทางซ้ายเท่ากับทางขวา ดังนั้น แต่ละข้างต้องเป็นค่าคงที่ ให้ค่าคงที่เป็น λ^2

แล้วมี 3 กรณี ที่จะพิจารณาคือ $\lambda^2>0$, $\lambda^2=0$ และ $-\lambda^2<0$ นั่นคือ

<u>กรณี I</u> $\lambda^2>0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=\lambda^2$$

แล้ว $X''(x)=\lambda^2X(x)$ และ $T'(t)=k\,\lambda^2T(t)$

จะได้ $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$ และ $T'(t)-k\,\lambda^2T(t)=0$

จาก $X''(x)-\lambda^2 X(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2-\lambda^2=0$

$$r=\pm\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_1\cosh\lambda\mathrm{x}+c_2\sinh\lambda\mathrm{x}$

จาก $T'(t)-k\lambda^2 T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r-\lambda^2=0$

$$r=\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลย $T(t)=c_3 e^{k\lambda^2 t}$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\begin{aligned} v(x,t) &= X(x)T(t) \\ &= (c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x)c_3 e^{k\lambda^2 t} \\ &= (A_1\cosh\lambda x+B_1\sinh\lambda x)e^{k\lambda^2 t} \end{aligned}$$

จากเงื่อนไข กรณีนี้ตัดทิ้งได้ทันทีเพราะ ฟังก์ชันชี้กำลังที่เป็นเลขจำนวนบวก แสดงว่าอุณหภูมิเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต เมื่อ t มีค่ามากๆ ไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด

<u>กรณี II</u> $\lambda^2=0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=0$$

แล้ว $X''(x)=0$ และ $T'(t)=0$

จาก $X''(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2=0$

$$r=0,0$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_4 e^{0x}+c_5 e^{0x}$

หรือ $X(x) = c_4 + c_5 x$

จาก $T'(t) = 0$

สมการช่วย คือ $r = 0$

จะได้ผลเฉลย คือ $T(t) = c_6 e^{0t} = c_6$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$= (c_4 + c_5 x)c_6$$

$$= A_2 + B_2 x$$

จากเงื่อนไข $v(0,t) = 0$

จะได้ $0 = v(0,t) = A_2 + B_2(0)$

ดังนั้น $A_2 = 0$ นั่นคือ $v(x,t) = B_2 x$

จากเงื่อนไข $v(1,t) = 0$

จะได้ $0 = v(1,t) = B_2(1)$

ดังนั้น $B_2 = 0$ นั่นคือ $v(x,t) = 0$

กรณีนี้ ตัดทิ้งได้ เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $v(x,0) = f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\theta_0 + \frac{r}{2k}\right)x$

<u>**กรณี III**</u> $-\lambda^2 < 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda^2$$

แล้ว $X''(x) = -\lambda^2 X(x)$ และ $T'(t) = -k\lambda^2 T(t)$

จะได้ $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ และ $T'(t) + k\lambda^2 T(t) = 0$

จาก $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2+\lambda^2=0$

$$r=\pm i\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_7\cos\lambda x+c_8\sin\lambda x$

จาก $T'(t)+k\lambda^2 T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r+\lambda^2=0$

$$r=-\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลยคือ $T(t)=c_9 e^{-k\lambda^2 t}$

แล้วผลเฉลยของสมการคือ

$$v(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=\left(c_7\cos^2\lambda x+c_8\sin^2\lambda x\right)c_9 e^{-k\lambda^2 t}$$

จากเงื่อนไข $v(0,t)=0$ จะได้ $X(0)T(t)=0$

$v(1,t)=0$ จะได้ $X(1)T(t)=0$

มีกรณีที่เป็นไปได้คือ $T(t)=0$ หรือ $X(0)=X(\pi)=0$

ถ้า $T(t)=0$ แล้ว $\theta(x,t)=X(x)T(t)=0$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0)=f(x)$

ให้ $X(0)=0$ และ $X(1)=0$

จาก $X(x)=c_7\cos\lambda x+c_8\sin\lambda \mathrm{x}$

จะได้ $X(0)=c_7\cos\lambda(0)+c_8\sin\lambda(0)=0$

เนื่องจาก $\cos 0\neq 0$ ดังนั้น $c_7=0$

เนื่องจาก $\sin 0=0$ ดังนั้น $c_8\neq 0$

ดังนั้น $X(x)=c_8\sin\lambda x$

จาก $X(x)=c_8\sin\lambda x$ และ $X(1)=0$

จะได้ $X(1)=c_8\sin\lambda(1)=0$

เนื่องจาก $c_8=0$ ทำให้ $X(x)=0$ แล้ว $v(x,t)=0$ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ไม่ต้องการ

ดังนั้น $c_8\neq 0$ และ $\sin\lambda=0$

เนื่องจาก $\sin n\pi=0\ ;n=1,2,3,\ldots$

ดังนั้น $\sin n\pi=\sin\lambda\ ;n=1,2,3,\ldots$

เรียก λ ว่า ค่าเจาะจง (eigenvalue) และเรียก $X(x)$ ว่า ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction)

จะได้ $\lambda=n\pi\ ;n=1,2,3,\ldots$

นั่นคือ $X(x)=c_8\sin n\pi x\ ;n=1,2,3,\ldots$

ดังนั้น $v_n(x,t)=A_n e^{-k(n\pi)^2 t}\sin n\pi x$

จากเงื่อนไข $v_n(x,0)=f(x)+\dfrac{r}{2k}x^2-\left(\theta_0+\dfrac{r}{2k}\right)x$

จะได้
$$v(x,0)=f(x)+\frac{r}{2k}x^2-\left(\frac{r}{2k}+\theta_0\right)x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\pi x$$

ถ้า $A_n=b_n;n=1,2,3,\ldots$ ในนิยามอนุกรมฟูริเยร์ไซน์

$$A_n=2\int_0^1\left[f(x)+\frac{r}{2k}\mathrm{x}^2-\left(\frac{r}{2k}+\theta_0\right)\mathrm{x}\right]\sin n\pi x\,dx$$

แล้วผลเฉลยของปัญหาที่โจทย์ให้มาคือ นำ $\varphi(x)$ มาบวกกับ $v(x,t)$ ได้

$$\theta(x,t)=\frac{-r}{2k}x^2+\left(\frac{r}{2k}+\theta_0\right)x+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-kn^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

$$=\frac{-r}{2k}x^2+\left(\frac{r}{2k}+\theta_0\right)x+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[f(x)+\frac{r}{2k}x^2-\left(\frac{r}{2k}+\theta_0\right)x\sin n\pi x\,dx\right]\sin n\pi x$$

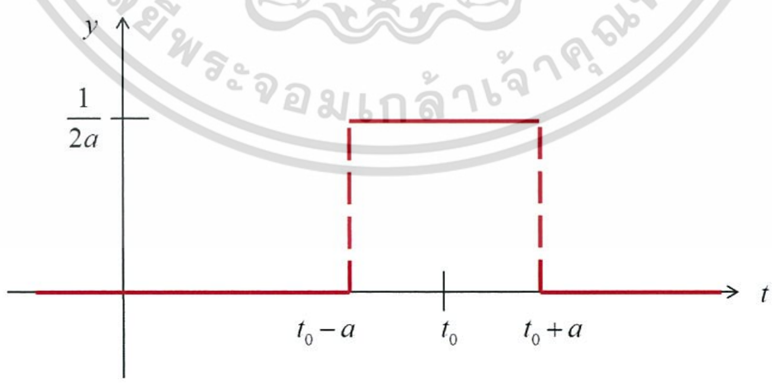
จากตัวอย่างนี้ พบว่า $\theta(x,t)\to\varphi(x)$ เมื่อ $t\to\infty$ เรียก $\varphi(x)$ ว่าผลเฉลยสภาวะคงตัว (steady-state solution) โดย $v(x,t)\to 0$ เมื่อ $t\to\infty$ เรียก $v(x,t)$ ว่า transient solution และสามารถใช้วิธีนี้ในการหาผลเฉลยปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยม หรือ แผ่นกลม #

2.4 Unit Impulse Function และ Dirac Delta Function

ในระบบกลไกต่างๆ ในบางครั้ง จะมีแรงขนาดมากๆกระทำในช่วงเวลาสั้นๆ (ในระบบไฟฟ้า แรง คือ แรงเคลื่อนไฟฟ้า) เช่น การสั่นของปีกเครื่องบินขณะถูกฟ้าผ่า , ลูกกอล์ฟขณะที่ถูกตีออกไป (ในระบบไฟฟ้า คือ กรณีที่เรียกว่า ไฟฟ้ากระชาก) แรงขนาดมากๆ ในช่วงเวลาสั้นๆ a นี้เรียกว่า **unit impulse function** โดย

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0\ , & t\le t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}\ , & t_0-a<t<t_0+a\\ 0\ , & t\ge t_0+a\end{cases}\quad \text{, เมื่อ } a \text{ มีค่าน้อยๆ}$$

จะแสดงได้ดังรูป (2.2)



รูปที่ (2.2) Unit Impulse Function

และมีลักษณะสมบัติ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a\left(t-t_0\right) dt = 1$$

พิสูจน์ $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a\left(t-t_0\right) dt = \int_{-\infty}^{t_0-a} (0)\, dt + \int_{t_0-a}^{t_0+a} \left(\frac{1}{2a}\right) dt + \int_{t_0+a}^{\infty} (0)\, dt$$

$$= \frac{1}{2a}\left(t \Big|_{t_0-a}^{t_0+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\left(t_0+a\right)-\left(t_0-a\right)\right]$$

$$= 1$$

นิยาม 2.1 ให้ $a \in \mathbb{R}$ แล้วสามารถนิยาม **Dirac delta function** ได้โดยการให้ความรู้เกี่ยวกับ measure บน $\mathbb{R}$

โดย $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\delta_a(x) = f(a)$$

สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง f ซึ่งมีสมบัติ compact แล้วสามารถเขียนแทน $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx$

ด้วย $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\delta_a(x)$

ดังนั้น $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

ตัวอย่างที่ 2.5 การหาผลเฉลยของสมการความร้อน ในกรณีที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันอิมพัลซ์ (impulse)

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad ;0\le \mathrm{x}\le\pi \text{ , } t\ge 0 \tag{1}$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบ $\theta(0,t)=0\, ,\theta(\pi,t)=0 \quad ;t>0$ (2)

และเงื่อนไขเริ่มต้น $\theta(x,0)=\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right) \quad ;0<x<\pi$ (3)

เมื่อ $\delta(x)$ คือ Dirac's unit impulse function

วิธีทำ ให้ $\theta(x,t)=X(x)T(t)$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น $k\,X''(x)T(t)=X(x)T'(t)$

หารทั้งสองข้างด้วย $X(x)T(t)$ จะได้

$$\frac{k\,X''(x)T(t)}{X(x)T(t)}=\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}$$

เนื่องจากทางซ้ายของสมการมีเฉพาะตัวแปร x และทางขวาของสมการมีเฉพาะตัวแปร t แสดงว่าทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น และทางขวาเป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น และทางซ้ายเท่ากับทางขวา ดังนั้น แต่ละข้างต้องเป็นค่าคงที่ ให้ค่าคงที่เป็น λ^2

แล้วมี 3 กรณี ที่จะพิจารณาคือ $\lambda^2>0$, $\lambda^2=0$ และ $-\lambda^2<0$ นั่นคือ

<u>กรณี I</u> $\lambda^2>0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=\lambda^2$$

แล้ว $X''(x)=\lambda^2X(x)$ และ $T'(t)=k\,\lambda^2T(t)$

จะได้ $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$ และ $T'(t)-k\,\lambda^2T(t)=0$

จาก $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2-\lambda^2=0$

$$r=\pm\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_1\cosh\lambda\mathrm{x}+c_2\sinh\lambda\mathrm{x}$

จาก $T'(t)-k\lambda^2T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r-\lambda^2=0$

$$r=\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลย $T(t)=c_3e^{k\lambda^2t}$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=(c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x)c_3e^{k\lambda^2t}$$

$$=(A_1\cosh\lambda x+B_1\sinh\lambda x)e^{k\lambda^2t}$$

จากเงื่อนไข กรณีตัดทิ้งได้ทันทีเพราะ ฟังก์ชันชี้กำลังที่เป็นเลขจำนวนบวก แสดงว่าอุณหภูมิเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต เมื่อ t มีค่ามากๆ ไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(0,t)=0$, $\theta(\pi,t)=0$; $t>0$

<u>กรณี II</u> $\lambda^2=0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=0$$

แล้ว $X''(x)=0$ และ $T'(t)=0$

จาก $X''(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2=0$

$$r=0,0$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_4e^{0x}+c_5e^{0x}$

หรือ $X(x)=c_4+c_5x$

จาก $T'(t)=0$

สมการช่วย คือ $r=0$

จะได้ผลเฉลย คือ $T(t) = c_6 e^{0t} = c_6$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$= (c_4 + c_5 x)c_6$$

$$= A_2 + B_2 x$$

จากเงื่อนไข $\theta(0,t) = 0$

จะได้ $0 = \theta(0,t) = A_2 + B_2(0)$

ดังนั้น $A_2 = 0$ นั่นคือ $\theta(x,t) = B_2 x$

จากเงื่อนไข $\theta(\pi,t) = 0$

จะได้ $0 = \theta(\pi,t) = B_2(\pi)$

เนื่องจาก $\pi \neq 0$ ดังนั้น $B_2 = 0$ นั่นคือ $\theta(x,t) = 0$

กรณีนี้ ตัดทิ้งได้ เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0) = \pi\delta\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

<u>กรณี III</u> $-\lambda^2 < 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda^2$$

แล้ว $X''(x) = -\lambda^2 X(x)$ และ $T'(t) = -k\lambda^2 T(t)$

จะได้ $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ และ $T'(t) + k\lambda^2 T(t) = 0$

จาก $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$

สมการช่วย คือ $r^2 + \lambda^2 = 0$

$$r = \pm i\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x) = c_7 \cos\lambda x + c_8 \sin\lambda x$

จาก $T'(t)+k\lambda^2T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r+\lambda^2=0$

$$r=-\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลยคือ $T(t)=c_9e^{-k\lambda^2t}$

แล้วผลเฉลยของสมการคือ

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=\left(c_7\cos^2\lambda x+c_8\sin^2\lambda x\right)c_9e^{-k\lambda^2t}$$

จากเงื่อนไข $\theta(0,t)=0$ จะได้ $X(0)T(t)=0$

$\theta(\pi,t)=0$ จะได้ $X(\pi)T(t)=0$

มีกรณีที่เป็นไปได้คือ $T(t)=0$ หรือ $X(0)=X(\pi)=0$

ถ้า $T(t)=0$ แล้ว $\theta(x,t)=X(x)T(t)=0$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0)=\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)$

ดังนั้นถ้า $X(0)=0$ และ $X(\pi)=0$

จาก $X(x)=c_7\cos\lambda x+c_8\sin\lambda\mathrm{x}$

จะได้ $X(0)=c_7\cos\lambda(0)+c_8\sin\lambda(0)=0$

เนื่องจาก $\cos 0\neq 0$ ดังนั้น $c_7=0$

เนื่องจาก $\sin 0=0$ ดังนั้น $c_8\neq 0$

แล้ว $X(x)=c_8\sin\lambda x$

จาก $X(x)=c_8\sin\lambda\pi$ และ $X(\pi)=0$

จะได้ $X(\pi)=c_8\sin\lambda\pi=0$

มีกรณีที่เป็นไปได้คือ $c_8 = 0$ หรือ $\sin \lambda\pi = 0$

ถ้า $c_8 = 0$ แล้ว $X(x) = 0$ จะได้ $\theta(x,t) = X(x)T(t) = 0$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0) = \pi\delta\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

ดังนั้น ถ้า $\sin \lambda\pi = 0$ และ $\sin n\pi = 0$

นั่นคือ $\lambda\pi = n\pi$ หรือ $\lambda = \frac{n\pi}{\pi}$

แล้ว $X(x) = c_8 \sin \frac{n\pi}{\pi} x$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

เรียก λ ว่า ค่าเจาะจง (eigenvalue) และเรียก $X(x)$ ว่า ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction)

จาก $T(t) = c_9 e^{-k\lambda^2 t}$

จะได้ $T(t) = c_9 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\theta(x,t) &= X(x)T(t) \\
&= \left(c_8 \sin \frac{n\pi}{\pi} x\right)\left(c_9 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}\right) \\
&= b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\pi} x \\
&= b_n e^{-n^2 kt} \sin nx
\end{aligned}
$$

จาก superposition principle

$$
\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 kt} \sin nx \tag{4}
$$

จากเงื่อนไข $\theta(x,0) = \pi\delta\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

ดังนั้น $$\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-n^2k(0)}\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

เมื่อ b_n เป็นสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูริเยร์ไซน์ ที่เป็นไปตามสมการ

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\sin nx\,dx$$

จาก unit impulse function และนิยามของ dirac delta function

$$\delta_{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)=\begin{cases}0 & ,x\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0\\ \frac{1}{2a} & ,0<x<\pi,a=\frac{\pi}{2}\\ 0 & ,x\ge\pi\end{cases}$$

จะได้ $$\int_0^{\pi}\delta_{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\sin nx\,dx=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}(0)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2a}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}^{\pi}(0)\,dx\right)\sin na$$

$$=\left(\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\frac{\pi}{2}}\right)dx\right)\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2\frac{\pi}{2}}\left(x\,\Big|_0^{\pi}\right)\right)\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2\frac{\pi}{2}}[\pi-0]\right)\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$=(1)\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2\pi}{\pi}\left[(1)\sin n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right) \tag{5}$$

แล้วผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตนี้ คือ

$$\theta(x,\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sin\frac{1}{2}n\pi\right)e^{-n^2kt}\sin nx \tag{6}$$

หรือ
$$\theta(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)^2 kt}\sin(2n+1)x \tag{7}$$

โดย $\theta(x,t)$ จะเป็นค่าที่วัดออกไปจากแกน x เมื่อ t มีค่าเพิ่มมากขึ้น นั่นคือ ความร้อนจะกระจายออกไปจากจุดกึ่งกลางของแท่งโลหะไปยังขอบของแท่งโลหะ และจะลดลงเป็นศูนย์ ที่ขอบซ้ายและขวาของแท่งโละ

ให้ $q = e^{-4kt}$ แล้วจัดสมการ (7) ใหม่ จะได้

$$\theta_1(x,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x \tag{8}$$

หรือ
$$\theta_1(x,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\frac{i}{i}\sin(2n+1)x$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x\right)$$

$$= \frac{i}{i^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2n+1)x}$$

$$= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2n+1)x}$$

เรียก $\theta_1(x,q)$ ว่ารูปแบบที่หนึ่งของฟังก์ชันทีตา

ตัวอย่างที่ 2.6 การหาผลเฉลยของสมการความร้อน ในกรณีที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันอิมพัลซ์ (impulse) แล้วขอบซ้ายและขอบขวาของแท่งโลหะเป็นฉนวน นั่นคือไม่มีความร้อนสูญหายไปจากปลายทั้งสองข้าง

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad ;0\le \mathrm{x}\le\pi\ ,\ \mathrm{t}\ge 0 \tag{1}$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบ $$\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{(0,t)}=0,\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{(\pi,t)}=0 \tag{9}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $$\theta(x,0)=\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right) \quad ;0<x<\pi \tag{3}$$

เมื่อ $\delta(x)$ คือ Dirac's unit impulse function

วิธีทำ ให้ $\theta(x,t)=X(x)T(t)$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น $kX''(x)T(t)=X(x)T'(t)$

หารทั้งสองข้างด้วย $X(x)T(t)$ จะได้

$$\frac{kX''(x)T(t)}{X(x)T(t)}=\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}$$

เนื่องจากทางซ้ายของสมการมีเฉพาะตัวแปร x และทางขวาของสมการมีเฉพาะตัวแปร t แสดงว่าทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น และทางขวาเป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น และทางซ้ายเท่ากับทางขวา ดังนั้น แต่ละข้างต้องเป็นค่าคงที่ ให้ค่าคงที่เป็น λ^2

แล้วมี 3 กรณี ที่จะพิจารณาคือ $\lambda^2>0$, $\lambda^2=0$ และ $-\lambda^2<0$ นั่นคือ

<u>**กรณี I**</u> $\lambda^2>0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=\lambda^2$$

แล้ว $X''(x)=\lambda^2X(x)$ และ $T'(t)=k\lambda^2T(t)$

จะได้ $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$ และ $T'(t)-k\lambda^2T(t)=0$

จาก $X''(x)-\lambda^2 X(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2-\lambda^2=0$

$$r=\pm\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_1\cosh\lambda \mathrm{x}+c_2\sinh\lambda \mathrm{x}$

จาก $T'(t)-k\lambda^2 T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r-\lambda^2=0$

$$r=\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลย $T(t)=c_3 e^{k\lambda^2 t}$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=(c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x)c_3 e^{k\lambda^2 t}$$

$$\theta(x,t)=(A_1\cosh\lambda x+B_1\sinh\lambda x)e^{k\lambda^2 t}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t)=(A_1\cosh\lambda x+B_1\sinh\lambda x)(k\lambda^2 t)e^{k\lambda^2 t}$$

$$+e^{k\lambda^2 t}(A_1\sinh(\lambda)+\cosh\lambda x(0)+B_1\cosh\lambda+\sinh\lambda x(0))$$

$$=(A_1\cosh\lambda x+B_1\sinh\lambda x)(k\lambda^2 t)e^{k\lambda^2 t}+e^{k\lambda^2 t}(A_1\sinh\lambda+B_1\cosh\lambda)$$

จากเงื่อนไข กรณีนี้ตัดทิ้งได้ทันทีเพราะ ฟังก์ชันชี้กำลังที่เป็นเลขจำนวนบวก แสดงว่าอุณหภูมิเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต เมื่อ t มีค่ามากๆ ไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{(0,t)}=0$, $\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{(\pi,t)}=0$

<u>กรณี II</u> $\lambda^2 = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = 0$$

แล้ว $X''(x) = 0$ และ $T'(t) = 0$

จาก $X''(x) = 0$

สมการช่วย คือ $r^2 = 0$

$$r = 0, 0$$

จะได้ผลเฉลย $X(x) = c_4 e^{0x} + c_5 e^{0x}$

หรือ $X(x) = c_4 + c_5 x$

จาก $T'(t) = 0$

สมการช่วย คือ $r = 0$

จะได้ผลเฉลย คือ $T(t) = c_6 e^{0t} = c_6$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$= (c_4 + c_5 x)c_6$$

$$= A_2 + B_2 x$$

จากเงื่อนไข $\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{(0,t)} = 0$

จะได้ $0 = \frac{\partial\theta}{\partial x} = x'(0)T(t)$

พบว่า $T(t) \neq 0$ เนื่องจากถ้า $T(t) = 0$ แล้ว $\theta(x,t) = X(x)T(t) = 0$ และ $\theta(x,0) = 0$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0) = \pi\delta\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

จาก $X(x)=c_4+c_5x$ โดยการหาอนุพันธ์จะได้ $X'(x)=c_5$

ดังนั้น $X'(0)=0$ นั่นคือ $c_5=0 \Rightarrow X(x)=c_4$

ดังนั้น $\theta(x,t)=X(x)T(t)=c_4c_6=c$

เมื่อ $c=c_4c_6$ เป็นค่าคงที่

ทำให้ $\theta(x,0)=c$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0)=\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)$

<u>กรณี III</u> $-\lambda^2<0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=-\lambda^2$$

แล้ว $X''(x)=-\lambda^2X(x)$ และ $T'(t)=-k\lambda^2T(t)$

จะได้ $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$ และ $T'(t)+k\lambda^2T(t)=0$

จาก $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$

สมการช่วย คือ $r^2+\lambda^2=0$

$$r=\pm i\lambda$$

จะได้ผลเฉลย $X(x)=c_7\cos\lambda x+c_8\sin\lambda x$

จาก $T'(t)+k\lambda^2T(t)=0$

สมการช่วย คือ $r+\lambda^2=0$

$$r=-\lambda^2$$

จะได้ผลเฉลยคือ $T(t)=c_9e^{-k\lambda^2t}$

แล้วผลเฉลยของสมการคือ

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$= \left(c_7 \cos^2 \lambda x + c_8 \sin^2 \lambda x\right) c_9 e^{-k\lambda^2 t}$$

จากเงื่อนไข $\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{(0,t)} = 0$ จะได้ $\frac{\partial \theta}{\partial x} = X'(0)T(t) = 0$

$\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{(\pi,t)} = 0$ จะได้ $\frac{\partial \theta}{\partial x} = X'(\pi)T(t) = 0$

มีกรณีที่เป็นไปได้ คือ $T(t) = 0$ หรือ $X'(0) = X'(\pi) = 0$

ถ้า $T(t) = 0$ แล้ว $\theta(x,t) = X(x)T(t) = 0$ และ $\theta(x,0) = 0$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0) = \pi\delta\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

ดังนั้นถ้า $X'(0) = 0$ และ $X'(\pi) = 0$

จาก $X(x) = c_7 \cos \lambda x + c_8 \sin \lambda x$

และ $X'(x) = \left[(c_7)(-\sin \lambda x)(\lambda) + (\cos \lambda x)(0)\right] + \left[(c_8)(\cos \lambda x)(\lambda) + (\sin \lambda x)(0)\right]$

$$= (-\lambda c_7)\sin \lambda x + (\lambda c_8)\cos \lambda x$$

จะได้ $X'(0) = (-\lambda c_7)\sin \lambda(0) + (\lambda c_8)\cos \lambda(0) = 0$

เนื่องจาก $\sin 0 = 0$ ดังนั้น $c_7 \neq 0$

เนื่องจาก $\cos 0 \neq 0$ ดังนั้น $c_8 = 0$

แล้ว $X'(x) = (-\lambda c_7)\sin \lambda x$

จาก $X'(x) = (-\lambda c_7)\sin \lambda x$ และ $X'(\pi) = 0$

จะได้ $X'(\pi) = (-\lambda c_7)\sin \lambda \pi = 0$

มีกรณีที่เป็นไปได้คือ $c_7 = 0$ หรือ $\sin\lambda\pi = 0$

ถ้า $c_7 = 0$ แล้ว $X'(x) = 0$ จะได้ $X(x) = c_{10}$

แล้ว $\theta(x,t) = X(x)T(t) = (c_{10})\left(c_9 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}\right) = A_3 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}$

กรณีนี้ตัดทิ้งได้เพราะไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด $\theta(x,0) = \pi\delta\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

ดังนั้น ถ้า $\sin\lambda\pi = 0$ และ $\sin n\pi = 0$

ดังนั้น $\lambda\pi = n\pi$ หรือ $\lambda = \frac{n\pi}{\pi}$

แล้ว $X'(x) = (-\lambda c_7)\sin nx$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$

จะได้ $X(x) = c_7\cos nx + c_{11}$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$ และเลือก $c_n = 0$

เรียก λ ว่า ค่าเจาะจง (eigenvalue) และเรียก $X(x)$ ว่า ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction)

จาก $T(t) = c_9 e^{-k\lambda^2 t}$

จะได้ $T(t) = c_9 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}$

ดังนั้น
$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$
$$= (c_7\cos nx)\left(c_9 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}\right)$$
$$= a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t}\cos nx$$

จาก superposition principle

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 kt}\cos nx$$

จากเงื่อนไข $\theta(x,0) = \pi\delta\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

ดังนั้น $$\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-n^2k(0)}\cos nx$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

เมื่อ a_0 และ a_n เป็นสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ ที่เป็นไปตามสมการ

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)dx$$

$$=\frac{2\pi}{\pi}(1)$$

$$=2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\delta\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\cos nxdx$$

จาก unit impulse function และนิยามของ dirac delta function

$$\delta_{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)=\begin{cases}0 & ,x\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0\\ \frac{1}{2a} & ,0<x<\pi,a=\frac{\pi}{2}\\ 0 & ,x\ge\pi\end{cases}$$

จะได้ $$\int_0^{\pi}\delta_{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\cos nx\,dx=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}(0)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2a}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}^{\pi}(0)\,dx\right)\cos na$$

$$=\left(\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\frac{\pi}{2}}\right)dx\right)\cos n\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2\frac{\pi}{2}}\left(x\,\big|_0^{\pi}\right)\right)\cos n\frac{\pi}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\frac{\pi}{2}} \left[\pi - 0 \right] \right) \cos n \frac{\pi}{2}$$

$$= (1) \cos n \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2\pi}{\pi} \left[(1) \cos n \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= 2 \cos \left(\frac{1}{2} n\pi \right)$$

แล้วผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตนี้ คือ

$$\theta(x, \mathrm{t}) = \frac{1}{2}(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cos \frac{1}{2} n\pi \right) e^{-n^2 kt} \cos nx$$

หรือ $$\theta(x, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n)^2 kt} \cos 2nx \tag{10}$$

โดย $\theta(x,t)$ จะเป็นค่าที่วัดออกไปจากแกน x เมื่อ t มีค่าเพิ่มมากขึ้น นั่นคือ ความร้อนจะกระจายออกไปจากจุดกึ่งกลางของแท่งโลหะไปยังขอบของแท่งโลหะ โดยที่เมื่อเวลา t เปลี่ยนไป ความร้อน ณ จุดกึ่งกลางจะลดลงและกระจายอย่างต่อเนื่องไปยังขอบของแท่งโลหะ

ให้ $q = e^{-4kt}$ แล้วจัดสมการ (10) ใหม่ จะได้

$$\theta_4(x, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2\mathrm{n}x \tag{11}$$

หรือ $$\theta_4(x, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (\cos 2nx + i \sin 2nx)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2inx}$$

เรียก $\theta_4(x,q)$ ว่ารูปแบบที่สี่ของฟังก์ชันทีตา

เมื่อ $q = e^{-4kt}$ แล้วนิยาม $\theta_2(x,q)$ จาก $\theta_1(x,q)$ โดย

$$\theta_2(x,q) = \theta_1\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin\left\{(2n+1)x + \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)x \tag{12}$$

หรือ
$$\theta_2(x,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \left(\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)x}$$

เรียก $\theta_2(x,q)$ ว่ารูปแบบที่สองของฟังก์ชันทีตา

และนิยาม $\theta_3(x,q)$ จาก $\theta_4(x,q)$ โดย

$$\theta_3(x,q) = \theta_4(x+\pi)$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} \cos\{2nx + (n+1)\pi\}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nx \tag{13}$$

หรือ
$$\theta_3(x,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} (\cos 2nx + i\sin 2nx)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inx}$$

เรียก $\theta_3(x,q)$ ว่ารูปแบบที่สามของฟังก์ชันทีตา

ดังนั้น ฟังก์ชันทีตา ทั้ง 4 แบบ คือ

$$\theta_1(x,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)x}$$

$$\theta_2(x,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)x}$$

$$\theta_3(x,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inx}$$

$$\theta_4(x,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n)^2}\cos 2nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inx}$$

จะพบว่า θ_1 และ θ_2 เป็นฟังก์ชันคาบด้วยคาบเป็น 2π ในขณะที่ θ_3 และ θ_4 เป็นฟังก์ชันคาบด้วยคาบเป็น π

บทที่ 3

เอกลักษณ์ที่เกี่ยวกับฟังก์ชันทีตา

ในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับเอกลักษณ์สำคัญที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันทีตา ที่ได้จากการคูณกันของอนุกรม 2 อนุกรม ซึ่งเป็นความรู้เบื้องต้นที่จะนำไปใช้ในการศึกษาฟังก์ชันเชิงวงรี ต่อไป

3.1 เอกลักษณ์ผลคูณของฟังก์ชันทีตา

<u>รูปแบบที่ 1</u> $\theta_1(x,q)\theta_1(y,q)$

จาก $$\theta_1(z,q)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2n+1)z}$$

จะได้ $$\theta_1(x,q)=-i\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2m+1)x}$$

$$\theta_1(y,q)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2n+1)y}$$

แล้ว $$\theta_1(x,q)\,\theta_1(y,q)=-\sum_{m}\sum_{n}(-1)^{m+n} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2m+1)x+i(2n+1)y} \tag{3.1.1}$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็ม ใดๆ โดย $m\neq n$

เปลี่ยนจำนวน m และ n ให้อยู่ในรูปของ r และ s โดยให้

$$m+n=r,m-n=s \tag{3.1.2}$$

ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มคู่หรือจำนวนเต็มคี่ทั้ง 2 จำนวน แล้ว r และ s จะเป็นจำนวนเต็มคู่ทั้ง 2 จำนวน

ถ้า m และ n จำนวนใดจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนเต็มคู่ และอีกจำนวนเป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว r และ s จะเป็นจำนวนเต็มคี่ทั้ง 2 จำนวน

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า r และ s จะอยู่ในช่วงของจำนวนเต็มคู่ทั้งสองจำนวน หรือ จำนวนเต็มคี่ทั้งสองจำนวน เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็ม ใดๆ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน หรือ $m\neq n$ นั่นเอง

จาก $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ ในสมการที่ (3.1.1)

จะได้ว่า $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = m^2+2m\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+n^2+2n\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$= m^2+n^2+m+n+2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= m^2+n^2+m+n+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}m^2+mn+\frac{1}{2}n^2+m+n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m^2-mn+\frac{1}{2}n^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2+2mn+n^2\right)+m+n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m^2-mn+\frac{1}{2}n^2$$

$$= \frac{1}{2}(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m^2-mn+\frac{1}{2}n^2$$

$$= \frac{1}{2}\left((m+n)^2+2(m+n)+1\right)+\frac{1}{2}\left(m^2-2mn+n^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(m+n+1)^2+\frac{1}{2}(m-n)^2$$

$$= \frac{1}{2}r^2+r+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(r^2+2r+1\right)+\frac{1}{2}s^2$$

$$= \frac{1}{2}(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2$$

ดังนั้น $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2$ (3.1.3)

จาก $(2m+1)x+(2n+1)y$ ในสมการที่ $(3.1.1)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(2m+1)x+(2n+1)y &= 2mx+x+2ny+y \\
&= mx+nx+my+ny+x+y+mx-my-nx+ny \\
&= (m+n)(x)+(m+n)(y)+x+y+mx-my-nx+ny \\
&= (m+n+1)(x+y)+(m-n)(x-y) \\
&= (r+1)(x+y)+s(x-y)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(2m+1)x+(2n+1)y=(r+1)(x+y)+s(x-y)$ $\qquad (3.1.4)$

แทนสมการ $(3.1.3)$ และ $(3.1.4)$ ในสมการ $(3.1.1)$

จะได้
$$\theta_1(x,q)\,\theta_1(y,q)=-\sum_s\sum_r(-1)^r q^{(\frac{1}{2})(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2} e^{i(r+1)(x+y)+i(s)(x-y)} \qquad (3.1.5)$$

จากผลคูณ ในสมการที่ $(3.1.5)$ มีกรณีที่เป็นไปได้ คือ r และ s เป็นจำนวนเต็มคู่ทั้ง 2 จำนวน และ r และ s เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้ง 2 จำนวน

กรณี r และ s เป็นจำนวนเต็มคู่ทั้ง 2 จำนวน

ให้ $\qquad r=2u \;,\quad s=2v$

จาก $\left(\frac{1}{2}\right)(r+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)s^2$ ในสมการที่ $(3.1.3)$

จะได้
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)(r+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)s^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)(2u+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)(2v)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(4u^2+4u+1\right)+\frac{1}{2}\left(4v^2\right) \\
&= 2u^2+2u+\frac{1}{2}+2v^2 \\
&= 2\left(u^2+u+\frac{1}{4}\right)+2v^2 \\
&= 2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+2v^2 \qquad (3.1.6)
\end{aligned}
$$

จาก $(r+1)(x+y)+s(x-y)$ ในสมการที่ (3.1.4)

จะได้ $$(r+1)(x+y)+s(x-y)=(2u+1)(x+y)+2v(x-y) \tag{3.1.7}$$

กรณี r และ s เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้ง 2 จำนวน

ให้ $$r=2u-1\ ,\quad s=2v+1$$

จาก $\left(\frac{1}{2}\right)(r+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)s^2$ ในสมการที่ (3.1.3)

จะได้
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)(r+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)s^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)\left((2u-1)+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)(2v+1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left((2u-1)^2+2(2u-1)+1\right)+\frac{1}{2}\left(4v^2+4v+1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4u^2-4u+1+4u-2+1\right)+2v^2+2v+\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(4u^2\right)+2\left(v^2+2v+\frac{1}{4}\right) \\ &= 2u^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (3.1.8)\end{aligned}$$

จาก $(r+1)(x+y)+s(x-y)$ ในสมการที่ (3.1.4)

จะได้
$$\begin{aligned}(r+1)(x+y)+s(x-y) &= (2u-1+1)(x+y)+(2v+1)(x-y) \\ &= 2u(x+y)+(2v+1)(x-y) \qquad (3.1.9)\end{aligned}$$

นั่นคือ $$\theta_1(x,q)\theta_1(y,q) = -\sum_u\sum_v q^{2(u+\frac{1}{2})^2+2v^2} e^{i(2u+1)(x+y)+2i(v)(x-y)}$$

$$+\sum_u\sum_v q^{2u^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2iu(x+y)+i(2v+1)(x-y)}$$

$$= -\sum_u q^{2(u+\frac{1}{2})^2} e^{i(2u+1)(x+y)} \sum_v q^{2v^2} e^{2i(v)(x-y)}$$

$$+\sum_u q^{2u^2} e^{2iu(x+y)} \sum_v q^{2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2v+1)(x-y)}$$

ดังนั้น $\theta_1(x,q)\theta_1(y,q) = \theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2) - \theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)$

<u>รูปแบบที่ 2</u> $\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)$

จาก $$\theta_1(z,q) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)z}$$

$$\theta_2(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)z}$$

จะได้ $$\theta_1(x,q) = -i\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2m+1)x}$$

$$\theta_2(y,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)y}$$

แล้ว $$\theta_1(x,q)\theta_2(y,q) = -i\sum_m\sum_n(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2m+1)x+i(2n+1)y} \qquad (3.1.10)$$

จากสมการ (3.1.3) และ (3.1.4) แทนในสมการที่ (3.1.10)

จะได้ $$\theta_1(x,q)\theta_2(y,q) = -i\sum_s\sum_r(-1)^{\frac{r+s}{2}} q^{\frac{1}{2}(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2} e^{i(r+1)(x+y)+is(x-y)} \qquad (3.1.11)$$

จากสมการ $(3.1.6),(3.1.7),(3.1.8),(3.1.9)$ แทนในสมการที่ $(3.1.11)$

นั่นคือ $$\theta_1(x,q)\theta_2(y,q) = -i\sum_u\sum_v q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+2v^2} e^{i(2u+1)(x+y)+2iv(x-y)}$$

$$+\,i\sum_u\sum_v q^{2u^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2iu(x+y)+i(2v+1)(x-y)}$$

$$= -i\sum_u q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2u+1)(x+y)}\sum_v q^{2v^2}e^{2iv(x-y)}$$

$$+\,i\sum_u q^{2u^2}e^{2iu(x+y)}\sum_v q^{2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2v+1)(x-y)}$$

ดังนั้น $\theta_1(x,q)\theta_2(y,q) = \theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)$

<u>รูปแบบที่ 3</u> $\theta_2(x,q)\theta_2(y,q)$

จาก $$\theta_2(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)z}$$

จะได้ $$\theta_2(x,q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2m+1)x}$$

$$\theta_2(y,q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)y}$$

แล้ว $$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q) = \sum_m\sum_n q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2m+1)x+i(2n+1)y} \quad (3.1.12)$$

จากสมการ $(3.1.3)$, $(3.1.4)$ แทนในสมการที่ $(3.1.12)$

จะได้ $$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q) = \sum_s\sum_r q^{\frac{1}{2}(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2} e^{i(r+1)(x+y)+is(x-y)} \quad (3.1.13)$$

จากสมการ $(3.1.6),(3.1.7),(3.1.8),(3.1.9)$ แทนในสมการ $(3.1.13)$

นั่นคือ $$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q)=\sum_u\sum_v q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+2v^2}e^{i(2u+1)(x+y)+2iv(x-y)}$$

$$+\sum_u\sum_v q^{2u^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{2iu(x+y)+i(2v+1)(x-y)}$$

$$=\sum_u q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2u+1)(x+y)}\sum_v q^{2v^2}e^{2iv(x-y)}$$

$$+\sum_u q^{2u^2}e^{2iu(x+y)}\sum_v q^{2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2v+1)(x-y)}$$

ดังนั้น $\theta_2(x,q)\theta_2(y,q)=\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)+\theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)$

<u>รูปแบบที่ 4</u> $\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)$

จาก $$\theta_3(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2inz}$$

จะได้ $$\theta_3(x,q)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{m^2}e^{2imx}$$

$$\theta_3(y,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2iny}$$

แล้ว $$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)=\sum_m\sum_n q^{m^2+n^2}e^{2imx+2iny} \qquad (3.1.14)$$

จากสมการ $(3.1.2)$; $m+n=r, m-n=s$

ให้ $$m+n=r \qquad (I)$$

$$m-n=s \qquad (II)$$

$(I)+(II)$; $2m=r+s$

$$m=\frac{r+s}{2}$$

แทนค่า m ในสมการ (I); $\frac{r+s}{2}+n=r$

$$n=\frac{r-s}{2}$$

จาก m^2+n^2 ในสมการที่ $(3.1.14)$

จะได้ $$m^2+n^2=\left(\frac{r+s}{2}\right)^2+\left(\frac{r-s}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(r+s)^2}{4}+\frac{(r-s)^2}{4}$$

$$=\frac{r^2+2rs+s^2+r^2-2rs+s^2}{4}$$

$$=\frac{2r^2+2s^2}{4}$$

$$=\frac{r^2+s^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}s^2 \qquad (3.1.15)$$

จาก $2mx+2ny$ ในสมการ $(3.1.14)$

จะได้ $$2mx+2ny=2\left(\frac{r+s}{2}\right)x+2\left(\frac{r-s}{2}\right)y$$

$$=rx+sx+ry-sy$$

$$=r(x+y)+s(x-y) \qquad (3.1.16)$$

จากสมการ $(3.1.15),(3.1.16)$ แทนในสมการที่ $(3.1.14)$

จะได้ $$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)=\sum_s\sum_r q^{\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}s^2}e^{ir(x+y)+is(x-y)} \qquad (3.1.17)$$

พิจารณา กรณี r และ s เป็นจำนวนเต็มคู่ทั้ง 2 จำนวน

ให้ $$r = 2u \quad , \quad s = 2v$$

จาก $\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2$ ในสมการที่ (3.1.17)

จะได้
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2 &= \frac{1}{2}(2u)^2 + \frac{1}{2}(2v)^2 \\ &= \frac{1}{2}(4u^2) + \frac{1}{2}(4v^2) \\ &= 2u^2 + 2v^2 \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

จาก $r(x+y)+s(x-y)$ ในสมการที่ (3.1.17)

จะได้ $$r(x+y)+s(x-y) = 2u(x+y)+2v(x-y) \tag{3.1.19}$$

กรณี r และ s เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้ง 2 จำนวน

ให้ $$r = 2u+1 \quad , \quad s = 2v+1$$

จาก $\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2$ ในสมการที่ (3.1.17)

จะได้
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2 &= \frac{1}{2}(2u+1)^2 + \frac{1}{2}(2v+1)^2 \\ &= \frac{1}{2}(4u^2+4u+1) + \frac{1}{2}(4v^2+4v+1) \\ &= 2u^2 + 2u + \frac{1}{2} + 2v^2 + 2v + \frac{1}{2} \\ &= 2\left(u^2+u+\frac{1}{4}\right) + 2\left(v^2+v+\frac{1}{4}\right) \\ &= 2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

จาก $r(x+y)+s(x-y)$ ในสมการที่ (3.1.17)

จะได้ $$r(x+y)+s(x-y) = (2u+1)(x+y)+(2v+1)(x-y) \tag{3.1.21}$$

นั่นคือ $$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)=\sum_u\sum_v q^{2u^2+2v^2}e^{2iu(x+y)+2iv(x-y)}$$

$$+\sum_u\sum_v q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2u+1)(x+y)+i(2v+1)(x-y)}$$

$$=\sum_u q^{2u^2}e^{2iu(x+y)}\sum_v q^{2v^2}e^{2iv(x-y)}$$

$$+\sum_u q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2u+1)(x+y)}\sum_v q^{2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2v+1)(x-y)}$$

ดังนั้น $\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)=\theta_3\left(x+y,q^2\right)\theta_3\left(x-y,q^2\right)+\theta_2\left(x+y,q^2\right)\theta_2\left(x-y,q^2\right)$

<u>รูปแบบที่ 5</u> $\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)$

จาก $$\theta_3(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2inz}$$

$$\theta_4(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2inz}$$

จะได้ $$\theta_3(x,q)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{m^2}e^{2imx}$$

$$\theta_4(y,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2iny}$$

แล้ว $$\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)=\sum_m\sum_n(-1)^n q^{m^2+n^2}e^{2imx+2iny} \qquad (3.1.22)$$

จากสมการ $(3.1.15),(3.1.16)$ แทนในสมการที่ $(3.1.22)$

จะได้ $$\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)=\sum_s\sum_r(-1)^{\frac{r-s}{2}}q^{\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}s^2}e^{ir(x+y)+is(x-y)} \qquad (3.1.23)$$

จากสมการ $(3.1.18),(3.1.19),(3.1.20),(3.1.21)$ แทนในสมการที่ $(3.1.23)$

นั่นคือ $$\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)=\sum_u\sum_v q^{2u^2+2v^2}e^{2iu(x+y)+2iv(x-y)}$$

$$-\sum_u\sum_v q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2u+1)(x+y)+i(2v+1)(x-y)}$$

$$=\sum_u q^{2u^2}e^{2iu(x+y)}\sum_v q^{2v^2}e^{2iv(x-y)}$$

$$-\sum_u q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2u+1)(x+y)}\sum_v q^{2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2v+1)(x+y)}$$

ดังนั้น $\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)=\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)$

<u>รูปแบบที่ 6</u> $\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)$

จาก $$\theta_4(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2inz}$$

จะได้ $$\theta_4(x,q)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m^2}e^{2imx}$$

$$\theta_4(y,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2iny}$$

แล้ว $$\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)=\sum_m\sum_n(-1)^{m+n}q^{m^2+n^2}e^{2imx+2iny} \qquad (3.1.24)$$

จากสมการ $(3.1.15),(3.1.16)$ แทนในสมการที่ $(3.1.24)$

จะได้ $$\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)=\sum_s\sum_r(-1)^r q^{\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}s^2}e^{ir(x+y)+is(x-y)} \qquad (3.1.25)$$

จากสมการ $(3.1.18),(3.1.19),(3.1.20),(3.1.21)$ แทนในสมการที่ $(3.1.25)$

นั่นคือ $$\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)=\sum_u\sum_v q^{2u^2+2v^2}e^{2iu(x+y)+2iv(x-y)}$$

$$-\sum_u\sum_v q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2u+1)(x+y)+i(2v+1)(x-y)}$$

$$=\sum_u q^{2u^2}e^{2iu(x+y)}\sum_v q^{2v^2}e^{2iv(x-y)}$$

$$-\sum_u q^{2\left(u+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2u+1)(x+y)}\sum_v q^{2\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2v+1)(x-y)}$$

ดังนั้น $\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)=\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)$

สรุปได้ว่า เอกลักษณ์การคูณของฟังก์ชันทีตา มีดังต่อไปนี้

$$\theta_1(x,q)\theta_1(y,q)=\theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2) \qquad (3.1.26)$$

$$\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)=\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2) \qquad (3.1.27)$$

$$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q)=\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)+\theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2) \qquad (3.1.28)$$

$$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)=\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)+\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2) \qquad (3.1.29)$$

$$\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)=\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2) \qquad (3.1.30)$$

$$\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)=\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2) \qquad (3.1.31)$$

รูปแบบต่อไปนี้ แสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับการยกกำลังสอง และการหาผลบวกและผลต่าง

แทน $y=0$ ในสมการที่ $(3.1.31)$ จะได้

$$\theta_3^2\left(x,q^2\right)-\theta_2^2\left(x,q^2\right)=\theta_4\left(x,q\right)\theta_4\left(0,q\right) \tag{3.1.32}$$

<u>รูปแบบที่ 7</u>

$$\theta_1\left(x+y\right)\theta_1\left(x-y\right)\theta_4^2\left(0\right)=\theta_3^2\left(x\right)\theta_2^2\left(y\right)-\theta_2^2\left(x\right)\theta_3^2\left(y\right)=\theta_1^2\left(x\right)\theta_4^2\left(y\right)-\theta_4^2\left(x\right)\theta_1^2\left(y\right) \tag{3.1.33}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1\left(x+y\right)\theta_1\left(x-y\right)\theta_4^2\left(0\right)$$

$$=\left[\theta_3\left(x+y+x-y\right)\theta_2\left(x+y-x+y\right)-\theta_2\left(x+y+x-y\right)\theta_3\left(x+y-x+y\right)\right]\theta_4^2\left(0\right)$$

$$=\left[\theta_3\left(2x\right)\theta_2\left(2y\right)-\theta_2\left(2x\right)\theta_3\left(2y\right)\right]\theta_4^2\left(0\right)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3^2\left(x\right)\theta_2^2\left(y\right)-\theta_2^2\left(x\right)\theta_3^2\left(y\right)$$

$$=\left[\theta_3\left(2x\right)\theta_3\left(0\right)-\theta_2\left(2x\right)\theta_2\left(0\right)\right]\left[\theta_2\left(2y\right)\theta_3\left(0\right)+\theta_3\left(2y\right)\theta_2\left(0\right)\right]$$

$$-\left[\theta_2\left(2x\right)\theta_3\left(0\right)+\theta_3\left(2x\right)\theta_2\left(0\right)\right]\left[\theta_3\left(2y\right)\theta_3\left(0\right)+\theta_2\left(2y\right)\theta_2\left(0\right)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3\left(2x\right)\theta_2\left(2y\right)\theta_3^2\left(0\right)+\theta_3\left(2x\right)\theta_3\left(2y\right)\theta_3\left(0\right)\theta_2\left(0\right)\\+\theta_2\left(2x\right)\theta_2\left(2y\right)\theta_2\left(0\right)\theta_3\left(0\right)+\theta_2\left(2x\right)\theta_3\left(2y\right)\theta_2^2\left(0\right)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_2\left(2x\right)\theta_3\left(2y\right)\theta_3^2\left(0\right)-\theta_3\left(2x\right)\theta_3\left(2y\right)\theta_3\left(0\right)\theta_2\left(0\right)\\-\theta_2\left(2x\right)\theta_2\left(2y\right)\theta_2\left(0\right)\theta_3\left(0\right)+\theta_3\left(2x\right)\theta_2\left(2y\right)\theta_2^2\left(0\right)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2\left(0\right)-\theta_2^2\left(0\right)\right]\left[\theta_3\left(2x\right)\theta_2\left(2y\right)-\theta_2\left(2x\right)\theta_3\left(2y\right)\right]$$

$$=\left[\theta_4^2\left(0\right)\right]\left[\theta_3\left(2x\right)\theta_2\left(2y\right)-\theta_2\left(2x\right)\theta_3\left(2y\right)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$\theta_1^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_4^2(x)\theta_1^2(y)$

$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$

$-\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$

$$=\begin{bmatrix}-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$=\left[\theta_3^2(0)-\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$

$=\left[\theta_4^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$

<u>รูปแบบที่ 8</u>

$$\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_4^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_3^2(y)=\theta_2^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_3^2(x)\theta_1^2(y) \tag{3.1.34}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_4^2(0)$

$=\left[\theta_2(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)+\theta_3(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_4^2(0)$

$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_4^2(0)$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$\theta_4^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_3^2(y)$

$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$

$-\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\\+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)-\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_4^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_3^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\\+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)-\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_4^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>รูปแบบที่ 9</u>

$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_4^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_2^2(y)=\theta_3^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_1^2(y) \tag{3.1.35}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_4^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)+\theta_2(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_4^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_4^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_2^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)-\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_4^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)-\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_4^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>รูปแบบที่ 10</u>

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_4^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(y)=\theta_4^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_1^2(y) \tag{3.1.36}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_4^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)-\theta_2(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_4^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_4^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\left[\begin{array}{l}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{array}\right]$$

$$-\left[\begin{array}{l}\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\end{array}\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)-\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_4^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\ -\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\\ -\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)-\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_4^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

แทน $y=0$ ในสมการที่ (3.1.29) จะได้

$$\theta_3^2\left(x,q^2\right)+\theta_2^2\left(x,q^2\right)=\theta_3(x,q)\theta_3(0,q) \tag{3.1.37}$$

<u>รูปแบบที่ 11</u>

$$\theta_1(x+y)\theta_1(x-y)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_3^2(x)\theta_1^2(y)=\theta_4^2(x)\theta_4^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_4^2(y) \tag{3.1.38}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1(x+y)\theta_1(x-y)\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)-\theta_2(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)\right]\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]\theta_3^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_3^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\\ -\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\ +\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\ -\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\ +\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>**รูปแบบที่ 12**</u>

$$\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_3^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_4^2(x)\theta_2^2(y)=\theta_3^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_4^2(y) \tag{3.1.39}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_2(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)+\theta_3(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_3^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_4^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\\-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>รูปแบบที่ 13</u>

$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_3^2(x)\theta_3^2(y)=\theta_2^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) \tag{3.1.40}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)+\theta_2(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_3^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1^2(x)\theta_1^2(y)+\theta_3^2(x)\theta_3^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\\ -\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\ +\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_4^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$
$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>รูปแบบที่ 14</u>

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_3^2(x)\theta_4^2(y)=\theta_2^2(x)\theta_1^2(y)+\theta_4^2(x)\theta_3^2(y) \qquad (3.1.41)$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)-\theta_2(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_3^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_3^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_3^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2^2(x)\theta_1^2(y)+\theta_4^2(x)\theta_3^2(y)$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\\ +\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\\ -\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3^2(0)+\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

ผลต่างระหว่าง (3.1.28) และ (3.1.26)

จะได้ $\theta_2^2(x,q)\theta_2^2(y,q)-\theta_1^2(x,q)\theta_1^2(y,q)$

$$\begin{aligned}
&=\left[\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)+\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\right]\left[\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)+\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\right]\\
&-\left[\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)-\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\right]\left[\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)-\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\right]\\
&=\left[\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\right]^2+\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\\
&+\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)+\left[\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\right]^2\\
&-\left[\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\right]^2+\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\\
&+\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)-\left[\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\right]^2\\
&=4\theta_2(x+y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_3(x-y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\theta_2^2(x,q)\theta_2^2(y,q)-\theta_1^2(x,q)\theta_1^2(y,q)=4\theta_2(x+y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_3(x-y)$

(3.1.42)

แทน $y=0$ ในสมการที่ (3.1.28) จะได้

$$2\theta_2(x,q^2)\theta_3(x,q^2)=\theta_2(x,q)\theta_2(0,q) \tag{3.1.43}$$

<u>รูปแบบที่ 15</u>

$$\theta_1(x+y)\theta_1(x-y)\theta_2^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_1^2(y)=\theta_4^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_3^2(x)\theta_4^2(y) \tag{3.1.44}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1(x+y)\theta_1(x-y)\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)-\theta_2(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)\right]\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]\theta_2^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_2^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)\right]\left[\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$-\left[\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)-\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\left\{\begin{aligned}&\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\\&-\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\end{aligned}\right\}$$

$$-\left\{\begin{aligned}&\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\\&+\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\end{aligned}\right\}$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]-2\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]$$

$$=\left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_3^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$-\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)-\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\-\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\+\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$-\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]-2\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\theta_2(0)\theta_3(0)\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>รูปแบบที่ 16</u>

$$\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_1^2(y)=\theta_3^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) \tag{3.1.45}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_2(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)+\theta_3(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_2^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2^2(x)\theta_2^2(y)-\theta_1^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$-\left[\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)-\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\+\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\\-\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$-\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]+2\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\theta_2(0)\theta_3(0)\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)+\theta_3(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(y)-\theta_4^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$-\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)-\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$-\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\+\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\-\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$-\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]+2\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\theta_2(0)\theta_3(0)\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)+\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>รูปแบบที่ 17</u>

$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_4^2(x)\theta_1^2(y)=\theta_2^2(x)\theta_3^2(y)+\theta_1^2(x)\theta_4^2(y) \tag{3.1.46}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)+\theta_2(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_2^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_3^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_4^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$-\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)-\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\+\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\\-\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\right]\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]+2\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\theta_2(0)\theta_3(0)\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_2^2(x)\theta_3^2(y)+\theta_1^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$+\left[\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)-\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\+\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\\-\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]+2\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$= 2\theta_2(0)\theta_3(0)\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\right]$$

$$= \left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

<u>รูปแบบที่ 18</u>

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_3^2(x)\theta_1^2(y)=\theta_1^2(x)\theta_3^2(y)+\theta_2^2(x)\theta_4^2(y) \tag{3.1.47}$$

พจน์ที่ 1 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y+x-y)\theta_3(x+y-x+y)-\theta_2(x+y+x-y)\theta_2(x+y-x+y)\right]\theta_2^2(0)$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]\theta_2^2(0)$$

พจน์ที่ 2 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(y)+\theta_3^2(x)\theta_1^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$+\left[\theta_3(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_2(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_2(y-y)-\theta_2(y+y)\theta_3(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_2(2y)\theta_3(0)+\theta_3(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(0)+\theta_2(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_2(0)-\theta_2(2y)\theta_3(0)\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\ -\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_3^2(0)\right]\\ +\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_2^2(0)\right]\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$+\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]-2\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\theta_2(0)\theta_3(0)\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

พจน์ที่ 3 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\theta_1^2(x)\theta_3^2(y)+\theta_2^2(x)\theta_4^2(y)$$

$$=\left[\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)-\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$+\left[\theta_2(x+x)\theta_3(x-x)+\theta_3(x+x)\theta_2(x-x)\right]\left[\theta_3(y+y)\theta_3(y-y)+\theta_2(y+y)\theta_2(y-y)\right]$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_2(0)-\theta_2(2x)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)+\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$+\left[\theta_2(2x)\theta_3(0)+\theta_3(2x)\theta_2(0)\right]\left[\theta_3(2y)\theta_3(0)-\theta_2(2y)\theta_2(0)\right]$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\\ -\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\left[\theta_2(2x)\theta_3(2y)\theta_3^2(0)\right]\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]\\ +\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]\left[-\theta_3(2x)\theta_2(2y)\theta_2^2(0)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]$$

$$+\left[-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)+\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]$$

$$=2\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)\theta_2(0)\theta_3(0)\right]-2\left[\theta_2(2x)\theta_2(2y)\theta_3(0)\theta_2(0)\right]$$

$$=2\theta_2(0)\theta_3(0)\left[\theta_3(2x)\theta_3(2y)-\theta_2(2x)\theta_2(2y)\right]$$

$$=\left[\theta_2^2(0)\right]\left[\theta_3(2x)\theta_2(2y)-\theta_2(2x)\theta_3(2y)\right]$$

เนื่องจาก $\theta_4(x,q)$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น
$$\theta_4(x-y)=\theta_4(-(x-y))$$
$$=\theta_4(y-x)$$

เนื่องจาก $\theta_1(x,q)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น
$$\theta_1(x-y)=-\theta_1(-(x-y))$$
$$=-\theta_1(y-x)$$

ถ้าสลับ x,y ในเอกลักษณ์ใดๆของฟังก์ชันทีตา รูปแบบของเอกลักษณ์จะมีการเปลี่ยนเครื่องหมาย ดังนี้

จาก $\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)=\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)$

สลับ x และ y ใน $\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)$

จะได้ $\theta_3(y,q)\theta_4(x,q)=\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)$

ดังนั้น ผลลัพธ์ของผลคูณระหว่างเอกลักษณ์ก็จะเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งของ x และ y

$$\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q)$$
$$=\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]$$
$$\times\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right] \qquad (3.1.48)$$

$$\theta_1(y,q)\theta_2(x,q)\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)$$
$$=\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]$$
$$\times\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right] \qquad (3.1.49)$$

ดังนั้น $(3.1.48)+(3.1.49)$ จะได้

$$\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q)+\theta_1(y,q)\theta_2(x,q)\theta_3(x,q)\theta_4(y,q)$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\\ \times\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\\ \times\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\right]\\ +\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\\ +\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\right]\\ +\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\right]\\ -\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\\ -\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\right]\\ +\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\right]\\ &+\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\\ &+\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\right]\\ &+\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=2\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)\right]\\ &+2\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]\\ &=2\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\theta_4^2(x-y,q^2)\right]+2\left[\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\theta_1^2(x-y,q^2)\right]\\ &=2\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\left[\theta_4^2(x-y,q^2)+\theta_1^2(x-y,q^2)\right]\end{aligned}\tag{3.1.50}$$

แทน $y=0$ ใน $(3.1.27)$ และ $x=0$ ใน $(3.1.30)$ จะได้

$$\theta_1(x,q)\theta_2(0,q)=\theta_1(x,q^2)\theta_4(x,q^2)+\theta_4(x,q^2)\theta_1(x,q^2)$$

$$=2\theta_1(x,q^2)\theta_4(x,q^2) \tag{3.1.51}$$

$$\theta_4(y,q)\theta_3(0,q)=\theta_4(y,q^2)\theta_4(y,q^2)+\theta_1(y,q^2)\theta_1(y,q^2)$$

$$=\theta_4^2(y,q^2)+\theta_1^2(y,q^2) \tag{3.1.52}$$

จาก $(3.1.50)$ จะได้ว่า

$$\theta_1(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0)$$

$$=\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)+\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\right]$$

$$\times\left[\theta_4(x-y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)+\theta_1(x-y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]$$

$$=2\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\left[\theta_4^2(x+y,q^2)+\theta_1^2(x+y,q^2)\right]$$

$$=\theta_1(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_3(y)+\theta_2(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_4(y)$$

ดังนั้น

$$\theta_1(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0)=\theta_1(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_3(y)+\theta_2(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_4(y) \tag{3.1.53}$$

$$\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0)$$

$$=\left[\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x+y,q^2)+\theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x+y,q^2)\right]$$

$$\times\left[\theta_3(x-y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)+\theta_2(x-y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)\right]$$

$$=2\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x+y,q^2)\left[\theta_3^2(x-y,q^2)+\theta_2^2(x-y,q^2)\right]$$

$$=\theta_2(x)\theta_3(x)\theta_2(y)\theta_3(y)-\theta_1(x)\theta_4(x)\theta_1(y)\theta_4(y)$$

ดังนั้น

$$\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0)=\theta_2(x)\theta_3(x)\theta_2(y)\theta_3(y)-\theta_1(x)\theta_4(x)\theta_1(y)\theta_4(y) \tag{3.1.54}$$

$$\theta_1(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0)$$

$$=\left[\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)+\theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x+y,q^2)\right]$$
$$\times\left[\theta_4(x-y,q^2)\theta_4(x-y,q^2)-\theta_1(x-y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)\right]$$

$$=2\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)\left[\theta_4^2(x-y,q^2)-\theta_1^2(x-y,q^2)\right]$$

$$=\theta_1(x)\theta_3(x)\theta_2(y)\theta_4(y)+\theta_2(x)\theta_4(x)\theta_1(y)\theta_3(y)$$

ดังนั้น

$$\theta_1(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0)=\theta_1(x)\theta_3(x)\theta_2(y)\theta_4(y)+\theta_2(x)\theta_4(x)\theta_1(y)\theta_3(y) \tag{3.1.55}$$

$$\theta_2(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0)$$

$$=\left[\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x+y,q^2)+\theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x+y,q^2)\right]$$
$$\times\left[\theta_3(x-y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)-\theta_2(x-y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)\right]$$

$$=2\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x+y,q^2)\left[\theta_3^2(x-y,q^2)-\theta_2^2(x-y,q^2)\right]$$

$$=\theta_2(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_4(y)-\theta_1(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_3(y)$$

ดังนั้น

$$\theta_2(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0)=\theta_2(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_4(y)-\theta_1(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_3(y) \tag{3.1.56}$$

ผลคูณระหว่าง (3.1.29) และ (3.1.31) จะได้

$$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)$$

$$=\left[\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)+\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)\right]$$

$$\times\left[\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)\right]$$

$$= \theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)$$

$$-\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)$$

$$+\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)$$

$$-\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)$$

$$= \theta_3^2(x+y,q^2)\theta_3^2(x-y,q^2) - \theta_2^2(x+y,q^2)\theta_2^2(x-y,q^2)$$

ดังนั้น

$$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q)\theta_4(y,q) = \theta_3^2(x+y,q^2)\theta_3^2(x-y,q^2) - \theta_2^2(x+y,q^2)\theta_2^2(x-y,q^2) \tag{3.1.57}$$

ผลบวกระหว่าง (3.1.29) และ (3.1.31) เมื่อแทน $y=0$ จะได้

$$\theta_3(x,q)\theta_3(0,q) + \theta_4(x,q)\theta_4(0,q)$$

$$= \left[\theta_3(x,q^2)\theta_3(x,q^2) + \theta_2(x,q^2)\theta_2(x,q^2)\right] + \left[\theta_3(x,q^2)\theta_3(x,q^2) - \theta_2(x,q^2)\theta_2(x,q^2)\right]$$

$$= \theta_3^2(x,q^2) + \theta_2^2(x,q^2) + \theta_3^2(x,q^2) - \theta_2^2(x,q^2)$$

$$= 2\theta_3^2(x,q^2)$$

ดังนั้น $\theta_3(x,q)\theta_3(0,q) + \theta_4(x,q)\theta_4(0,q) = 2\theta_3^2(x,q^2)$ (3.1.58)

ผลต่างระหว่าง (3.1.29) และ (3.1.31) เมื่อแทน $y=0$ จะได้

$$\theta_3(x,q)\theta_3(0,q) - \theta_4(x,q)\theta_4(0,q)$$

$$= \left[\theta_3(x,q^2)\theta_3(x,q^2) + \theta_2(x,q^2)\theta_2(x,q^2)\right] - \left[\theta_3(x,q^2)\theta_3(x,q^2) - \theta_2(x,q^2)\theta_2(x,q^2)\right]$$

$$= \theta_3^2(x,q^2) + \theta_2^2(x,q^2) - \theta_3^2(x,q^2) + \theta_2^2(x,q^2)$$

$$= 2\theta_2^2(x,q^2)$$

ดังนั้น $\theta_3(x,q)\theta_3(0,q) - \theta_4(x,q)\theta_4(0,q) = 2\theta_2^2(x,q^2)$ (3.1.59)

จาก $(3.1.57)$ จะได้ว่า

$$\left[\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)+\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)\right]\theta_3(0)\theta_4(0)$$

$$=\left[\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0)\right]+\left[\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0)\right]$$

$$=\left[\left[\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)+\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\right]\left[\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)-\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)\right]\right]$$
$$+\left[\left[\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\right]\left[\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)+\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)\right]\right]$$
$$=\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)-\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$+\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$+\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)+\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$=\theta_3^2(x+y)\theta_3^2(x-y)-\theta_2^2(x+y)\theta_2^2(x-y)+\theta_3^2(x+y)\theta_3^2(x-y)-\theta_2^2(x+y)\theta_2^2(x-y)$$

$$=2\left[\theta_3^2(x+y)\theta_3^2(x-y)-\theta_2^2(x+y)\theta_2^2(x-y)\right]$$

$$=2\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)$$

ดังนั้น $2\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)=\left[\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)+\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)\right]\theta_3(0)\theta_4(0)$

$$(3.1.60)$$

ผลคูณระหว่าง $(3.1.28)$ และ $(3.1.26)$ จะได้

$$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q)\theta_1(x,q)\theta_1(y,q)$$

$$=\left[\theta_2\left(x+y,q^2\right)\theta_3\left(x-y,q^2\right)+\theta_3\left(x+y,q^2\right)\theta_2\left(x-y,q^2\right)\right]$$

$$\times\left[\theta_3\left(x+y,q^2\right)\theta_2\left(x-y,q^2\right)-\theta_2\left(x+y,q^2\right)\theta_3\left(x-y,q^2\right)\right]$$

$$=\theta_2\left(x+y,q^2\right)\theta_3\left(x-y,q^2\right)\theta_3\left(x+y,q^2\right)\theta_2\left(x-y,q^2\right)$$

$$-\theta_2\left(x+y,q^2\right)\theta_3\left(x-y,q^2\right)\theta_2\left(x+y,q^2\right)\theta_3\left(x-y,q^2\right)$$

$$+\theta_3\left(x+y,q^2\right)\theta_2\left(x-y,q^2\right)\theta_3\left(x+y,q^2\right)\theta_2\left(x-y,q^2\right)$$

$$-\theta_3\left(x+y,q^2\right)\theta_2\left(x-y,q^2\right)\theta_2\left(x+y,q^2\right)\theta_3\left(x-y,q^2\right)$$
$$=\theta_3^2\left(x+y,q^2\right)\theta_2^2\left(x-y,q^2\right)-\theta_2^2\left(x+y,q^2\right)\theta_3^2\left(x-y,q^2\right)$$

ดังนั้น

$$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q)\theta_1(x,q)\theta_1(y,q)=\theta_3^2\left(x+y,q^2\right)\theta_2^2\left(x-y,q^2\right)-\theta_2^2\left(x+y,q^2\right)\theta_3^2\left(x-y,q^2\right) \tag{3.1.61}$$

จาก (3.1.61) จะได้ว่า

$$\left[\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)-\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\right]\theta_3(0)\theta_4(0)$$

$$=\left[\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0)\right]-\left[\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0)\right]$$

$$=\left[\left[\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\right]\left[\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)+\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)\right]\right]$$
$$-\left[\left[\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)+\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\right]\left[\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)-\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)\right]\right]$$
$$=\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)+\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$-\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)+\theta_3(x+y)\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$-\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(x-y)+\theta_2(x+y)\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2(x-y)$$

$$=\theta_3^2(x+y)\theta_2^2(x-y)-\theta_2^2(x+y)\theta_3^2(x-y)+\theta_3^2(x+y)\theta_2^2(x-y)-\theta_2^2(x+y)\theta_3^2(x-y)$$

$$=2\left[\theta_3^2(x+y)\theta_2^2(x-y)-\theta_2^2(x+y)\theta_3^2(x-y)\right]$$

$$=2\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)$$

ดังนั้น $2\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)=\left[\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)-\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\right]\theta_3(0)\theta_4(0)$

$$\tag{3.1.62}$$

นำ $(3.1.60)-(3.1.62)$ จะได้ว่า

$$2\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)-2\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)$$

$$=\left[\left[\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)+\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)\right]\theta_3(0)\theta_4(0)\right]$$

$$-\left[\left[\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)-\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\right]\theta_3(0)\theta_4(0)\right]$$

$$2\left[\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)-\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)\right]$$
$$=\theta_3(0)\theta_4(0)\left[\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)+\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)-\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)+\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\right]$$

$$2\left[\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)-\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)\right]$$
$$=\theta_3(0)\theta_4(0)\left[2\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\right]$$

$$2\left[\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)-\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)\right]=2\theta_3(0)\theta_4(0)\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)$$

$$\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)-\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)=\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0)$$

ดังนั้น

$$\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y)-\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y)=\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0) \tag{3.1.63}$$

แทน $y=0$ ใน $(3.1.33)-(3.1.36),(3.1.38)-(3.1.41)$ และ $(3.1.44)-(3.1.47)$ จะได้

$$\theta_1(x)\theta_1(x)\theta_4^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_2^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_4^2(0)-\theta_4^2(x)\theta_1^2(0)$$

$$\theta_2(x)\theta_2(x)\theta_4^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)-\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)-\theta_3^2(x)\theta_1^2(0)$$

$$\theta_3(x)\theta_3(x)\theta_4^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_1^2(0)$$

$$\theta_4(x)\theta_4(x)\theta_4^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_4^2(0)-\theta_1^2(x)\theta_1^2(0)$$

$$\theta_1(x)\theta_1(x)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_3^2(x)\theta_1^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\theta_2(x)\theta_2(x)\theta_3^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_4^2(x)\theta_1^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_2^2(0)-\theta_1^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\theta_3(x)\theta_3(x)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_1^2(0)+\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)+\theta_4^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\theta_4(x)\theta_4(x)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)+\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_1^2(0)+\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)$$

$$\theta_1(x)\theta_1(x)\theta_2^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_1^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\theta_2(x)\theta_2(x)\theta_2^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)-\theta_1^2(x)\theta_1^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_4^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\theta_3(x)\theta_3(x)\theta_2^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_2^2(0)+\theta_4^2(x)\theta_1^2(0)=\theta_2^2(x)\theta_3^2(0)+\theta_1^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\theta_4(x)\theta_4(x)\theta_2^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)+\theta_3^2(x)\theta_1^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)+\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า การยกกำลังสองของฟังก์ชันทีตาใดๆ สามารถแสดงให้อยู่ในเทอมของ 2 ฟังก์ชันอื่นๆได้ โดยมีรูปแบบที่แตกต่างกัน ดังนี้

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_4^2(0)+\theta_2^2(x)\theta_2^2(0) \tag{3.1.64}$$

$$\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)+\theta_3^2(x)\theta_4^2(0) \tag{3.1.65}$$

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)+\theta_2^2(x)\theta_4^2(0) \tag{3.1.66}$$

$$\theta_3^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_4^2(0)+\theta_2^2(x)\theta_3^2(0) \tag{3.1.67}$$

แทน $x=0$ ใน $(3.1.64)$ จะได้

$$\theta_3^2(0)\theta_3^2(0)=\theta_4^2(0)\theta_4^2(0)+\theta_2^2(0)\theta_2^2(0)$$

$$\theta_3^4(0)=\theta_4^4(0)+\theta_2^4(0) \tag{3.1.68}$$

หรือ $\dfrac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}+\dfrac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}=1$

ถ้าให้ $k=\dfrac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}$ และ $k'=\dfrac{\theta_4^2(0)}{\theta_3^2(0)}$

แล้ว $k^2+k'^2=1$

จากสมการ $(3.1.66)$ จะได้

$$\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)+\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)$$

สามารถจัดสมการใหม่ได้ ดังนี้

$$\frac{\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)}+\frac{\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)}=1 \qquad (3.1.69)$$

จากสมการ $(3.1.65)$ จะได้

$$\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)+\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)$$

สามารถจัดสมการใหม่ได้ ดังนี้

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}+\frac{\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}=1$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}+\frac{\theta_2^2(0)\theta_3^2(0)}{\theta_3^2(0)\theta_2^2(0)}\frac{\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}=1$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}+\frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}\frac{\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)}=1$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}+k^2\frac{\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)}=1 \qquad (3.1.70)$$

จากสมการ $(3.1.64)$ จะได้

$$\theta_4^2(x)\theta_4^2(0)+\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)$$

สามารถจัดสมการใหม่ได้ ดังนี้

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_4^2(0)\theta_4^2(x)$$

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)=\frac{\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(0)}\theta_4^2(0)\theta_4^2(x)$$

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)=\frac{\theta_4^4(0)\theta_4^2(x)}{\theta_4^2(0)}$$

$$\theta_4^2(0)\left[\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)\right]=\theta_4^4(0)\theta_4^2(x)$$

$$\theta_4^2(0)\left[\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)\right]=\frac{\theta_3^4(0)}{\theta_3^4(0)}\theta_4^2(x)\theta_4^4(0)$$

$$\theta_4^2(0)\left[\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)\right]=\frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}\theta_4^2(x)\theta_3^4(0)$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)\theta_3^2(0)-\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^4(0)}=\frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^4(0)}-\frac{\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^4(0)}=\frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}-\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_2^2(0)}\frac{\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^4(0)}=\frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}-\frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}\frac{\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)}=\frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}$$

$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)}-k^2\frac{\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)}=k'^2 \tag{3.1.71}$$

3.2 เอกลักษณ์ $\theta_1'(0,q)=\theta_2(0,q)\theta_3(0,q)\theta_4(0,q)$

จาก $\theta_1(x,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2n+1)x}$

$$\theta_2(x,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{i(2n+1)x}$$

$$\theta_3(x,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2inx}$$

$$\theta_4(x,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n)^2}\cos 2nx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2inx}$$

นั่นคือ $\theta_1(x,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n+\frac{1}{4}}\sin(2n+1)x$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\,\mathrm{q}^{\frac{1}{4}}\sin(2n+1)x$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\sin(2n+1)x$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}\sin x-2q^{\frac{1}{4}}q^2\sin 3x+2q^{\frac{1}{4}}q^6\sin 5x+\ldots$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}\sin x-2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x+2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x+\ldots$$

จะได้ว่า $\theta_1(0,q)=2q^{\frac{1}{4}}\sin 0-2q^{\frac{9}{4}}\sin 0+2q^{\frac{25}{4}}\sin 0+\ldots$

$$=0$$

จาก $\theta_2(x,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2+n+\frac{1}{4}}\cos(2n+1)x$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\,\mathrm{q}^{\frac{1}{4}}\cos(2n+1)x$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\cos(2n+1)x$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}\cos x+2q^{\frac{1}{4}}q^2\cos 3x+2q^{\frac{1}{4}}q^6\cos 5x+\ldots$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}\cos x+2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+\ldots$$

จะได้ว่า $\theta_2(0,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos 0 + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 0 + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 0 + \ldots$

$$= q^{\frac{1}{4}}\left(2 + 2q^2 + 2q^6 + 2q^{12} + 2q^{20} + 2q^{30} + \ldots\right)$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\theta_2(0,q) = 2q^{\frac{1}{4}} + O\left(q^{\frac{1}{4}}\right)$$

จาก $\theta_3(x,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2\mathrm{n}x$

$$= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots$$

จะได้ว่า $\theta_3(0,q) = 1 + 2q\cos 0 + 2q^4\cos 0 + 2q^9\cos 0 + \ldots$

$$= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \ldots$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$$

$$\theta_3(0,q) = 1 + O(q)$$

จาก $\theta_4(x,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n)^2}\cos 2\mathrm{n}x$

$$= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots$$

จะได้ว่า $\theta_4(0,q) = 1 - 2q\cos 0 + 2q^4\cos 0 - 2q^9\cos 0 + \ldots$

$$= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \ldots$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}$$

$$\theta_4(0,q) = 1 + O(q)$$

จาก $\theta_1(0)=0$

$$\theta_2(0,q)=2q^{\frac{1}{4}}+O\left(q^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\theta_3(0,q)=1+O(q)$$

$$\theta_4(0,q)=1+O(q)$$

ถ้า $q\to 0$ แล้ว

$$\theta_1(0)=0$$

$$q^{-\frac{1}{4}}\theta_2(0)=2$$

$$\theta_3(0)=1$$

$$\theta_4(0)=1$$

ดังนั้น $$\frac{\partial}{\partial x}\theta_1(x,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(2n+1)\cos(2n+1)x$$

$$\theta_1'(0,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}-(2\times 3)q^{\frac{9}{4}}+(2\times 5)q^{\frac{25}{4}}+\ldots$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}-6q^{\frac{9}{4}}+10q^{\frac{25}{4}}+\ldots$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=2q^{\frac{1}{4}}+O\left(q^{\frac{9}{4}}\right)$$

ถ้า $q \to 0$ แล้ว

$$q^{-\frac{1}{4}}\theta_1'(0) = 2$$

จาก $$q^{-\frac{1}{4}}\theta_2(0)\cdot\theta_3(0)\cdot\theta_4(0) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

จะได้ว่า $$q^{-\frac{1}{4}}\theta_1'(0) = q^{-\frac{1}{4}}\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$$

$$\theta_1'(0) = \theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$$

บทที่ 4

การประยุกต์ของฟังก์ชันทีตา

ในบทนี้จะนำความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับฟังก์ชันทีตา ไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาฟังก์ชันเชิงวงรีต่อไป

จาก $$\theta_1(x,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)x}$$

$$\theta_2(x,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)x}$$

$$\theta_3(x,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inx}$$

$$\theta_4(x,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n)^2}\cos 2nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inx}$$

สามารถนิยามฟังก์ชันเชิงวงรีจากอัตราส่วนของฟังก์ชันทีตา ได้ดังนี้

$$sn(u) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}$$

$$cn(u) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}$$

$$dn(u) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}\frac{\theta_3(x)}{\theta_4(x)}$$

ซึ่งเอกลักษณ์เชิงวงรีกับฟังก์ชันทีตามีความสัมพันธ์กันดังนี้

จากสมการที่ $(3.1.69)$ จะสัมพันธ์กับเอกลักษณ์ $sn^2(u)+cn^2(u)=1$

จากสมการที่ $(3.1.70)$ จะสัมพันธ์กับเอกลักษณ์ $dn^2(u)+k^2sn^2(u)=1$

จากสมการที่ $(3.1.71)$ จะสัมพันธ์กับเอกลักษณ์ $dn^2(u)-k^2cn^2(u)=k'^2$

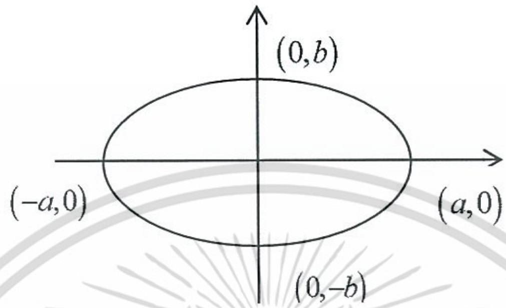
เมื่อ $k=\dfrac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}$ และ $k'=\dfrac{\theta_4^2(0)}{\theta_3^2(0)}$

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข $k^2+k'^2=1$

ในเชิงเรขาคณิตจะนิยามฟังก์ชันเชิงวงรี จากทางเดินของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดๆ นั้นไปยังจุดคงที่ใดๆ เป็นค่าคงตัว เรียกทางเดินนั้นว่า วงรี

และสมการทั่วไปของวงรี คือ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



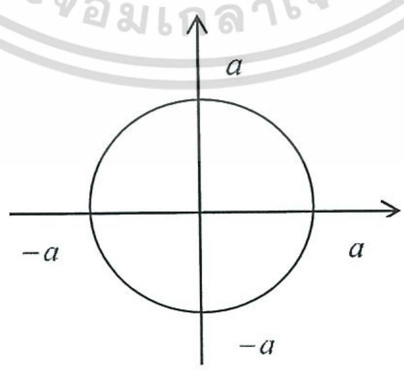
รูปที่ (4.1) วงรี

เมื่อ $(a,0)$ และ $(-a,0)$ เป็นจุดที่วงรีตัดกับแกน x และ $(0,b)$ และ $(0,-b)$ เป็นจุดที่วงรีตัดกับแกน y ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี (Eccentricity) เป็นตัวแปรที่กำหนดในภาคตัดกรวยแต่ละชนิด มีความหมายถึงความเบี่ยงเบนไปจากวงกลมของรูปนั้น หาได้จากสมการ

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2} \quad ; \; b<a$$

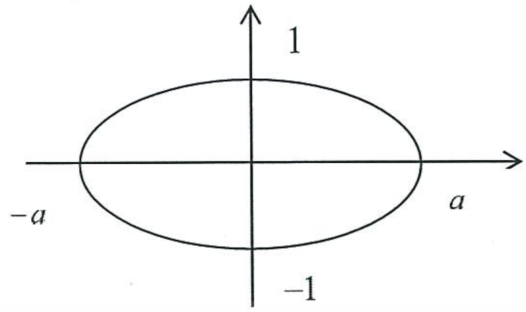
ถ้า $b=a$ แล้ว $e=0$ วงรีมีค่าความรีน้อย จะได้ทางเดินเป็นวงกลม

$$x^2+y^2=a^2 \tag{4.1}$$



รูปที่ (4.2) วงกลม

ถ้า $b=1$ แล้ว $e=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}=k$ วงรีมีค่าความรีมาก จะได้ทางเดินเป็นวงรี



รูปที่ (4.3) วงรี

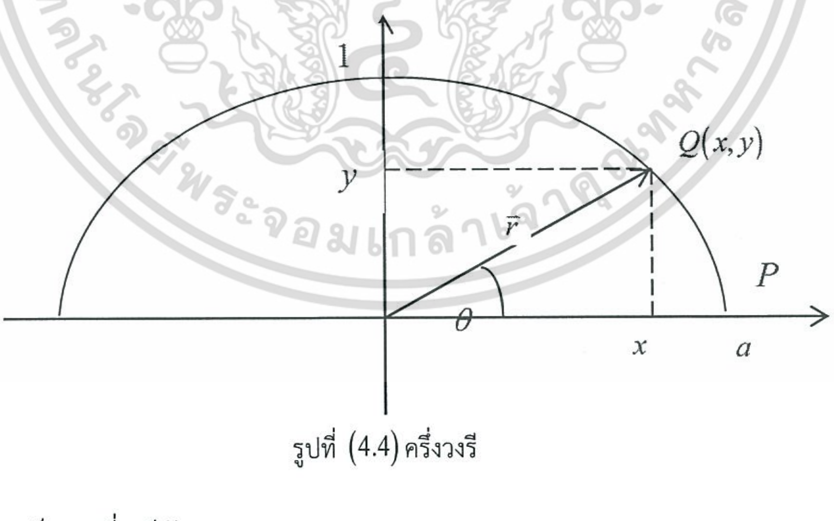
เรียก k ว่า โมดูลัสของวงรี โดย $0 \le k \le 1$ และ ให้ k' เป็นโมดูลัสเติมเต็มของ k ที่เป็นไปตามเงื่อนไข

$$k^2 + k'^2 = 1 \tag{4.2}$$

4.1 ฟังก์ชันเชิงวงรี

สมการเชิงวงรีที่จะศึกษา คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \tag{4.1.1}$$



รูปที่ (4.4) ครึ่งวงรี

ให้ $P(a,o)$ เป็นจุดที่วงรีตัดแกน x

ให้ $Q(x,y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวงของวงรี

ให้ $\bar{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งที่ลากจากจุดกึ่งกลางของวงรีไปยังจุดใดๆ บนเส้นรอบวงของวงรี

โดยให้ $\bar{r}$ ทำมุม θ กับแกน x ดังนั้น

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.1.2}$$

โดยการหาอนุพันธ์

$$d\theta = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right)$$

$$= \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

จาก $\bar{r} = (x, y)$ จะได้ $r = \|\bar{r}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

ดังนั้น

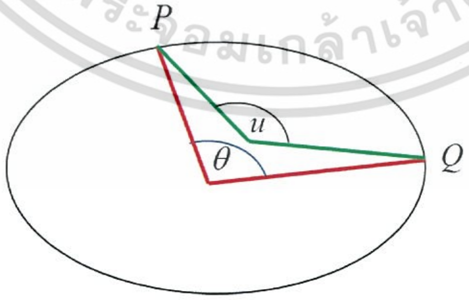
$$d\theta = \frac{1}{r^2}(xdy - ydx) \tag{4.1.3}$$

ให้ u เป็น อาร์กิวเมนต์ของวงรี ที่นิยามโดย

$$du = rd\theta \tag{4.1.4}$$

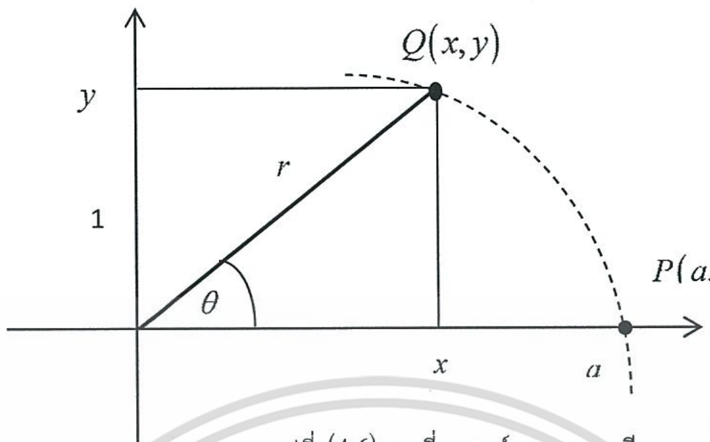
เมื่อ P และ Q เป็นส่วนของเส้นรอบวงที่รองรับมุม θ แล้ว

$$u = \int_P^Q rd\theta$$



รูปที่ (4.5) θ เป็นมุมที่ศูนย์กลางของวงรี

จะเห็นว่าอาร์กิวเมนต์ u ไม่ใช่มุมที่ศูนย์กลางของวงรี มุมที่จุดศูนย์กลางของวงรีแทนด้วย θ และ u ไม่ใช่พื้นที่ของส่วนวงรี



รูปที่ (4.6) มุมที่จุดศูนย์กลางของวงรี

จาก อาร์กิวเมนต์ u และโมดูลัส k จะนิยามฟังก์ชันเชิงวงรี ได้ดังนี้

$$sn(u,k) = y \tag{4.1.5}$$

$$cn(u,k) = \frac{x}{a} \tag{4.1.6}$$

$$dn(u,k) = \frac{r}{a} \tag{4.1.7}$$

เรียก sn ว่า แซน

cn ว่า แคน

และ dn ว่า แดน

จะพบว่า ในการพิจารณาฟังก์ชันเชิงวงรี ต้องพิจารณาจากความเยื้องศูนย์กลางของวงรี e ซึ่งจะมีค่าคงที่เสมอสำหรับแต่ละวงรี ดังนั้น จึงอาจจะละ k ได้ นั่นคือ

$$sn(u,k) = sn(u)$$

$$cn(u,k) = cn(u)$$

$$dn(u,k) = dn(u)$$

ในตำราบางเล่ม อาจใช้สัญลักษณ์ ดังนี้

$$sn(u,k) = sn(u/k)$$

จากการศึกษาพบว่า สามารถนิยาม ฟังก์ชันเชิงวงรีได้ทั้งหมด 12 แบบ ดังนี้

1. $sn(u)=y$ 2. $cn(u)=\dfrac{x}{a}$ 3. $dn(u)=\dfrac{r}{a}$

ส่วนกลับของฟังก์ชัน คือ

4. $ns(u)=\dfrac{1}{sn(u)}$ 5. $nc(u)=\dfrac{1}{cn(u)}$ 6. $nd(u)=\dfrac{1}{dn(u)}$

และเศษส่วนของฟังก์ชัน อีก 6 แบบ คือ

7. $sc(u)=\dfrac{sn(u)}{cn(u)}$ 8. $sd(u)=\dfrac{sn(u)}{dn(u)}$ 9. $dc(u)=\dfrac{dn(u)}{cn(u)}$

10. $ds(u)=\dfrac{dn(u)}{sn(u)}$ 11. $cs(u)=\dfrac{cn(u)}{sn(u)}$ 12. $cd(u)=\dfrac{cn(u)}{dn(u)}$

4.2 การพิสูจน์เอกลักษณ์เชิงวงรี

ในหัวข้อนี้จะแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์เชิงวงรี 3 รูปแบบต่อไปนี้

$$sn^2(u)+cn^2(u)=1 \tag{4.2.1}$$

$$dn^2(u)+k^2sn^2(u)=1 \tag{4.2.2}$$

$$dn^2(u)-k^2cn^2(u)=k'^2 \tag{4.2.3}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 จงพิสูจน์ $sn^2(u)+cn^2(u)=1$ $(4.2.1)$

วิธีทำ จาก $(4.1.5)$ $sn(u)=y$

จาก $(4.1.6)$ $cn(u)=\dfrac{x}{a}$

จาก $(4.1.1)$ $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$

จะได้เอกลักษณ์ $sn^2(u)+cn^2(u)=1$ #

ตัวอย่างที่ 4.2 จงพิสูจน์ $dn^2(u)+k^2sn^2(u)=1$ $\quad (4.2.2)$

วิธีทำ จาก $(4.1.7)$ $\quad dn(u)=\dfrac{r}{a}$

จาก (4.1) $\quad x^2+y^2=r^2$

จะได้

คูณ $\dfrac{1}{a^2}$ ทั้ง 2 ข้าง $\quad \dfrac{r^2}{a^2}=\dfrac{x^2+y^2}{a^2}$

$$dn^2(u)=\frac{x^2+y^2}{a^2}$$

$$=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$$

$$=cn^2(u)+\frac{1}{a^2}sn^2(u)$$

$$=1-sn^2(u)+\frac{1}{a^2}sn^2(u)$$

$$dn^2(u)+\left(1-\frac{1}{a^2}\right)sn^2(u)=1 \quad ; \; k=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$$

ดังนั้น $\quad dn^2(u)+k^2sn^2(u)=1$ #

ตัวอย่างที่ 4.3 จงพิสูจน์ $dn^2(u)-k^2cn^2(u)=k'^2$ $(4.2.3)$

วิธีทำ จาก (4.2) $k^2+k'^2=1$

จาก $(4.2.2)$ $dn^2(u)+k^2sn^2(u)=1$

จะได้เอกลักษณ์ $dn^2(u)+k^2sn^2(u)=k^2+k'^2$

$$dn^2(u)+k^2sn^2(u)-k^2=k'^2$$

$$dn^2(u)+\left(1-\frac{1}{a^2}\right)sn^2(u)-\left(1-\frac{1}{a^2}\right)=k'^2 \qquad ;\ k=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$$

$$dn^2(u)+\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(sn^2(u)-1\right)=k'^2$$

จาก $(4.2.1)$ $sn^2(u)+cn^2(u)=1$

ดังนั้น $dn^2(u)-k^2cn^2(u)=k'^2$ #

4.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงวงรี

จากสมการเชิงวงรีที่ได้กล่าวมาข้างต้น สามารถแสดงการหาอนุพันธ์ของ $sn(u)$,$cn(u)$ และ $dn(u)$ ได้ดังนี้

จาก $(4.1.1)$ $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$

โดยการหาอนุพันธ์

$$\frac{1}{a^2}2xdx+2ydy=0$$

$$\frac{xdx}{a^2}+ydy=0$$

ดังนั้น $dy=\frac{-x}{a^2y}dx$ $(4.3.1)$

หรือ $dx=\frac{-a^2y}{x}dy$ $(4.3.2)$

จาก $(4.1.2)$ $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

จาก $(4.1.3)$ $$du = r\frac{1}{r^2}(xdy - ydx)$$

จาก $(4.1.4)$ $$du = rd\theta$$

แทนสมการ $(4.1.2)$ และสมการ $(4.1.3)$ ในสมการ $(4.1.4)$

จะได้ว่า $$du = r\frac{1}{r^2}(xdy - ydx)$$

$$du = \frac{1}{r}(xdy - ydx) \tag{4.3.3}$$

จาก $(4.3.1)$ $$dy = \frac{-x}{a^2y}dx$$

จาก $(4.3.3)$ $$du = \frac{1}{r}(xdy - ydx)$$

แทนสมการ $(4.3.1)$ ในสมการ $(4.3.3)$

จะได้ $$du = \frac{1}{r}\left(x\left(-\frac{x}{a^2y}dx\right) - ydx\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(-\frac{x^2}{a^2y}dx - ydx\right)$$

$$du = \frac{1}{r}\left(-\frac{x^2}{a^2y} - y\right)dx \tag{4.3.4}$$

จาก $(4.3.2)$ $$dx = \frac{-a^2y}{x}dy$$

จาก $(4.3.3)$ $$du = \frac{1}{r}(xdy - ydx)$$

แทนสมการ $(4.3.2)$ ในสมการ $(4.3.3)$

จะได้
$$du=\frac{1}{r}\left(xdy-y\left(-\frac{a^2y}{x}dy\right)\right)$$

$$=\frac{1}{r}\left(xdy+\frac{a^2y^2}{x}dy\right)$$

$$du=\frac{1}{r}\left(x+\frac{a^2y^2}{x}\right)dy \qquad (4.3.5)$$

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นในหัวข้อนี้ สามารถพิสูจน์ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.4 จงพิสูจน์ว่า $d\,sn(u)=cn(u)dn(u)$

วิธีทำ จาก $(4.1.5)$ $sn(u,k)=y$

จาก $(4.3.1)$ $dy=\frac{-x}{a^2y}dx$

จาก $(4.3.4)$ $du=\frac{1}{r}\left(-\frac{x^2}{a^2y}-y\right)dx$

จะได้
$$\frac{dy}{du}=\frac{-\frac{x}{a^2y}dx}{\frac{1}{r}\left(-\frac{x^2}{a^2y}-y\right)dx}$$

$$=\frac{-\left(\frac{rx}{a^2y}\right)}{-\left(\frac{x^2}{a^2y}+y\right)}$$

$$=\frac{\frac{rx}{a^2y}}{\frac{x^2+a^2y^2}{a^2y}}$$

$$=\frac{rx}{x^2+a^2y^2}$$

$$= \frac{x}{a} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{a^2}{x^2 + a^2 y^2}$$

$$= \frac{x}{a} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{a^2}}$$

$$= cn(u)\, dn(u) \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + y^2} \qquad ; \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{d\, sn(u)}{du} = cn(u)\, dn(u)$ #

ตัวอย่างที่ 4.5 จงพิสูจน์ว่า $d\, cn(u) = -sn(u)\, dn(u)$

วิธีทำ จาก $(4.1.6)$ $cn(u,k) = \dfrac{x}{a}$

จาก $(4.3.2)$ $dx = \dfrac{-a^2 y}{x} dy$

จาก $(4.3.5)$ $du = \dfrac{1}{r}\left(x + \dfrac{a^2 y^2}{x} \right) dy$

จะได้

$$\frac{dx}{du} = \frac{\frac{-a^2 y}{x} dy}{\frac{1}{r}\left(x + \frac{a^2 y^2}{x} \right) dy}$$

$$= \frac{-\frac{a^2 yr}{x}}{\frac{x^2 + a^2 y^2}{x}}$$

$$= \frac{-a^2 yr}{x^2 + a^2 y^2}$$

$$= -y \cdot \frac{a^2 r}{x^2 + a^2 y^2}$$

$$= -y \cdot \frac{r}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{a^2}}$$

$$= -y \cdot r \frac{1}{\frac{x^2}{a} + y^2} \qquad ; \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

$$\frac{d\frac{x}{a}}{du} = -y \cdot \frac{r}{a}$$

ดังนั้น $$\frac{d\,cn(u)}{du} = -sn(u)\,dn(u)$$ #

ตัวอย่างที่ 4.6 จงพิสูจน์ว่า $d\,dn(u) = -k^2 sn(u)\,cn(u)$

วิธีทำ จาก (4.1) $$x^2 + y^2 = r^2$$

$$dr = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2xdx + 2ydy\right)$$

จาก $(4.3.5)$ $$du = \frac{1}{r}\left(x + \frac{a^2y^2}{x}\right)dy$$

จะได้ $$\frac{dr}{du} = \frac{\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2xdx + 2ydy\right)}{\frac{1}{r}\left(x + \frac{a^2y^2}{x}\right)dy}$$

จาก $(4.3.2)$ $$dx = \frac{-a^2y}{x}dy$$

$$= \frac{\left(2x\left(\frac{-a^2y}{x}dy\right) + 2ydy\right)}{\frac{2}{r}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{a^2y^2}{x}\right)dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{-2a^2xy}{x}dy + 2ydy\right)}{\frac{2}{r}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{a^2y^2}{x}\right)dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{-2a^2xy}{x} + 2y\right)dy}{\frac{2}{r}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{a^2y^2}{x}\right)dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{-2a^2xy + 2xy}{x}\right)}{\frac{2}{r}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2 + a^2y^2}{x}\right)}$$

$$= \frac{-2a^2xy + 2xy}{\frac{2}{r}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2 + a^2y^2\right)}$$

จาก (4.1) $x^2 + y^2 = r^2$

$$= \frac{-2a^2xy + 2xy}{2\left(x^2 + a^2y^2\right)}$$

$$= \frac{2\left(-a^2xy + xy\right)}{2\left(x^2 + a^2y^2\right)}$$

$$= \frac{xy\left(-a^2 + 1\right)}{x^2 + a^2y^2}$$

$$= \frac{xy\left(\frac{-a^2+1}{a^2}\right)}{\frac{x^2 + a^2y^2}{a^2}}$$

$$= \frac{xy\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)}{\frac{x^2}{a^2} + y^2} \qquad ; \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

$$= xy\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)$$

$$\frac{d\frac{r}{a}}{du} = \frac{x}{a}\cdot y\cdot\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) \qquad ; \quad k^2 = 1 - \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d\frac{r}{a}}{du}=cn(u)sn(u)-k^2$$

ดังนั้น $\dfrac{d\,dn(u)}{du}=-k^2 sn(u)cn(u)$ #

4.4 การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นจากฟังก์ชันเชิงวงรี

สามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เชิงเส้น จากฟังก์ชันเชิงวงรีได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4.7 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์จาก $\dfrac{d}{du}sn(u)=cn(u)dn(u)$

วิธีทำ จาก $(4.2.1)$ $sn^2(u)+cn^2(u)=1$

จาก $(4.2.2)$ $dn^2(u)+k^2 sn^2(u)=1$

จาก
$$\frac{d}{du}sn(u)=cn(u)dn(u)$$
$$=\sqrt{1-sn^2(u)}\sqrt{1-k^2 sn^2(u)}$$

ให้ $sn(u)=y$
$$\frac{dy}{du}=\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}$$
$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2)$$
$$=(1-k^2y^2)-y^2(1-k^2y^2)$$
$$=1-k^2y^2-y^2+k^2y^4$$
$$=1+k^2y^4-(1+k^2)y^2$$

จะได้ว่า $(y')^2+(1+k^2)y^2-1-k^2y^4=0$

ให้ $y(u)=\int\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}\,du$

และ $u(y)=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}dy$

โดยการหาอนุพันธ์ จะได้
$$2\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2}=\left(-2y\frac{dy}{du}\right)\left(1-k^2y^2\right)+\left(1-y^2\right)\left(-2k^2y\frac{dy}{du}\right)$$

$$=-2y\frac{dy}{du}+2y^3k^2\frac{dy}{du}-2k^2y\frac{dy}{du}+2k^2y^3\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=2k^2y^3-\left(1+k^2\right)y$$

จะได้ว่า $y''+\left(1+k^2\right)y-2k^2y^3=0$

ดังนั้น จาก $sn(u)$ สามารถสร้างสมการได้ดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $(y')^2+\left(1+k^2\right)y^2-1-k^2y^4=0$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง $y''+\left(1+k^2\right)y-2k^2y^3=0.$ #

ตัวอย่างที่ 4.8 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์จาก $\frac{d}{du}cn(u)=-sn(u)dn(u)$

วิธีทำ จาก (4.2.1) $sn^2(u)+cn^2(u)=1$

จาก (4.2.2) $dn^2(u)+k^2sn^2(u)=1$

จาก
$$\frac{d}{du}cn(u)=-sn(u)dn(u)$$

$$=-\sqrt{1-cn^2(u)}\sqrt{1-k^2sn^2(u)}$$

$$=-\sqrt{1-cn^2(u)}\sqrt{1-k^2\left(1-cn^2(u)\right)}$$

ให้ $cn(u)=y$
$$\frac{dy}{du}=-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2\left(1-y^2\right)}$$

$$=-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2+k^2y^2}$$

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=\left(1-y^2\right)\left(1-k^2+k^2y^2\right)$$

$$=1-k^2+k^2y^2-y^2+k^2y^2-k^2y^4$$

$$=1-k^2-y^2+2k^2y^2-k^2y^4$$

$$=1-k^2-\left(1-2k^2\right)y^2-k^2y^4$$

จะได้ว่า $\left(y'\right)^2+\left(1-2k^2\right)y^2+k^2y^4-1+k^2=0$

ให้ $y(u)=\int\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2+k^2y^2}\,du$

$$u(y)=\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2+k^2y^2}}dy$$

โดยการหาอนุพันธ์

$$2\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2}=\left(-2y\frac{dy}{du}\right)\left(1-k^2+k^2y^2\right)+\left(1-y^2\right)\left(2k^2y\frac{dy}{du}\right)$$

$$=-2y\frac{dy}{du}+2k^2y\frac{dy}{du}-2k^2y^3\frac{dy}{du}+2k^2y\frac{dy}{du}-2k^2y^3\frac{dy}{du}$$

$$=-2y\frac{dy}{du}+4k^2y\frac{dy}{du}-4k^2y^3\frac{dy}{du}$$

$$=-2\left(1-2k^2\right)y\frac{dy}{du}-4k^2y^3\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=-\left(1-2k^2\right)y-2k^2y^3$$

จะได้ว่า $y''+\left(1-2k^2\right)y+2k^2y^3=0$

ดังนั้น จาก $cn(u)$ สามารถสร้างสมการได้ดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\left(y'\right)^2+\left(1-2k^2\right)y^2+k^2y^4-1+k^2=0$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง $y''+\left(1-2k^2\right)y+2k^2y^3=0.$ #

ตัวอย่างที่ 4.9 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์จาก $\frac{d}{du}dn(u)=-k^2sn(u)cn(u)$

วิธีทำ จาก $(4.2.2)\ dn^2(u)+k^2sn^2(u)=1$

จาก $(4.2.1)\quad sn^2(u)+cn^2(u)=1$

จาก
$$\frac{d}{du}dn(u)=-k^2sn(u)cn(u)$$

$$=-k^2\sqrt{\frac{1-dn^2(u)}{k^2}}\sqrt{1-sn^2(u)}$$

$$=-k^2\sqrt{\frac{1-dn^2(u)}{k^2}}\sqrt{1-\left(\frac{1-dn^2(u)}{k^2}\right)}$$

$$=-k^2\sqrt{\frac{1-dn^2(u)}{k^2}}\sqrt{\frac{k^2-1+dn^2(u)}{k^2}}$$

$$=\frac{-k^2}{k^2}\sqrt{1-dn^2(u)}\sqrt{k^2-1+dn^2(u)}$$

ให้ $dn(u)=y$
$$\frac{dy}{du}=-\sqrt{1-y^2}\sqrt{k^2-1+y^2}$$

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=\left(1-y^2\right)\left(k^2-1+y^2\right)$$

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=\left(y^2-1\right)\left(1-k^2-y^2\right)$$

$$=y^2-k^2y^2-y^4-1+k^2+y^2$$

$$=2y^2-y^4+k^2-k^2y^2-1$$

$$=\left(2-k^2\right)y^2-y^4+k^2-1$$

จะได้ว่า $(y')^2-\left(2-k^2\right)y^2+y^4-k^2+1=0$

ให้ $y(u)=\int\sqrt{y^2-1}\sqrt{1-k^2-y^2}\,du$

$$u(y)=\int\frac{1}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{1-k^2-y^2}}dy$$

$$2\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2}=2y\frac{dy}{du}\left(1-k^2-y^2\right)+\left(y^2-1\right)\left(-2y\frac{dy}{du}\right)$$

$$=2y\frac{dy}{du}-2k^2y\frac{dy}{du}-2y^3\frac{dy}{du}-2y^3\frac{dy}{du}+2y\frac{dy}{du}$$

$$=4y\frac{dy}{du}-2k^2y\frac{dy}{du}-4y^3\frac{dy}{du}$$

$$=2\left(2y-k^2y-2y^3\right)\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=\left(2-k^2\right)y-2y^3$$

จะได้ว่า $y''-\left(2-k^2\right)y+2y^3=0$

ดังนั้น จาก $dn(u)$ สามารถสร้างสมการได้ดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $(y')^2-\left(2-k^2\right)y^2+y^4-k^2+1=0$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง $y''-\left(2-k^2\right)y+2y^3=0$ #

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาสมบัติของฟังก์ชันทีตา พบว่า ฟังก์ชันทีตามีรูปแบบพื้นฐาน 4 แบบ โดยรูปแบบของฟังก์ชันทีตาเกิดจากการหาผลเฉลยของสมการการนำความร้อน โดยระเบียบวิธีการแยกตัวแปร คณะผู้วิจัยได้ศึกษาเอกลักษณ์ผลคูณของฟังก์ชันทีตา ซึ่งทำให้ทราบว่าเอกลักษณ์ผลคูณของฟังก์ชันทีตา สามารถนำไปหาผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารได้ รวมถึงศึกษาเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทีตาและสมบัติของฟังก์ชันเชิงวงรี ซึ่งเป็นการประยุกต์ของฟังก์ชันทีตา โดยสามารถนิยามฟังก์ชันเชิงวงรี จากอัตราส่วนของฟังก์ชันทีตาได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์เชิงวงรี การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงวงรี และการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นจากฟังก์ชันเชิงวงรีไว้ด้วย เป็นผลที่จะนำไปสู่การหาปริพันธ์เชิงวงรีต่อไป

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้ที่สนใจศึกษาสมบัติของฟังก์ชันทีตา สามารถนำไปศึกษาต่อได้ เช่น Theta Functions as Infinite Products , Jacobi’s Transformation และ Landen’ s Transformation เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] ภัคคินี ชิตสกุล. 2553. **คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** กรุงเทพฯ : หจก.ประสิทธิภัณฑ์แอนด์พริ้นติ้ง

[2] __________. 2558. เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชา **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.** กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ สจล. 2558

[3] Derek F.Lawdan. 1980. **Elliptic Functions and Applications.** Applied Mathematical Sciences 80 , Springer-Verlag.

[4] **Dirac delta functions.** 2017. [ออนไลน์][ค้นเมื่อ 24 กุมภาพันธ์ 2560].สืบค้นจาก : https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_functions

[5] **Jacobi elliptic functions.** 2016. [ออนไลน์][ค้นเมื่อ 4 มิถุนายน 2559]. สืบค้นจาก : https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_elliptic_functions

[6] W. Schwalm, Physics, Univ. N. Dakota. [ออนไลน์][ค้นเมื่อ 4 มิถุนายน 2559]. สืบค้นจาก:http://www.und.edu/instruct/schwalm/ MAA_Presentation_10-02/handout.pdf