ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

BLOCK HADAMARD PRODUCT OF MATRICES OVER A COMMUTATIVE SEMIRING

พรรษพิชญ์ชา กุแก้ว
พรสุดา ศักดิ์ดี
วณารัตน์ ไฝ่การณ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

BLOCK HADAMARD PRODUCT OF MATRICES OVER A COMMUTATIVE SEMIRING

พรรษพิชญ์ชา กุแก้ว
พรสุดา ศักดิ์ดี
วณารัตน์ ไฝ่การณ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

BLOCK HADAMARD PRODUCT OF MATRICES OVER A COMMUTATIVE SEMIRING

PHANSPHITCHA GUGAEW
PHORNSUDA SAKDEE
WANARAT FRIKRAN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHMATICS)
DEPARTMENT OF MATHMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ Block Hadamard Product of Matrices Over a Commutative Semiring			
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพรรษพิชญ์ชา	กุแก้ว	รหัสนักศึกษา	56050091
	นางสาวพรสุดา	ศักดิ์ดี	รหัสนักศึกษา	56050093
	นางสาววณารัตน์	ไฝ่การณ์	รหัสนักศึกษา	56050118
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)			
ภาควิชา	คณิตศาสตร์			
ปีการศึกษา	2559			
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม			

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง(สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.เดชา สมนะ ประธานกรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ Block Hadamard Product of Matrices Over a Commutative Semiring
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพรรษพิชญ์ชา กุแก้ว รหัสนักศึกษา 56050091 นางสาวพรสุดา ศักดิ์ดี รหัสนักศึกษา 56050093 นางสาววณารัตน์ ไฝ่การณ์ รหัสนักศึกษา 56050118
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษนี้ เราขยายความคิดของ ผลคูณฮาดามาร์ดไปยัง ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ เราจะศึกษาคุณสมบัติของการดำเนินการเชิงพีชคณิต เช่น สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลลาร์ การคูณปกติ การสลับเปลี่ยน เมทริกซ์แบบบล็อก

คำสำคัญ : กึ่งริงสลับที่ เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ผลคูณฮาดามาร์ด ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก

Title	Block Hadamard Product of Matrices Over a Commutative Semiring
Students	Miss Phansphitcha Gugaew Student ID 56050091
	Miss Phornsuda Sakdee Student ID 56050093
	Miss Wanarat Frikran Student ID 56050118
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Assist.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam

Abstract

In this special problem, we extend the notion of Hadamard product to the block Hadamard product for matrices over an arbitrary commutative semiring. We investigate its properties invdving certain algebraic operation, such as, the addition, the scalar multiplication, the usual multiplication, the transposition, and block partitioning.

Keywords : commutative semiring, matrix over commutative semiring, Hadamard product, block Hadamard product.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยความกรุณาจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาท่านได้ให้โอกาสในการศึกษาปัญหาพิเศษนี้ อีกทั้งยังให้คำแนะนำ คำปรึกษา ติดตามงาน ขั้นตอนการดำเนินงานและช่วยแก้ไขปัญหาต่างๆอยู่เสมอ คณะผู้จัดทำรู้สึกทราบซึ้งเป็นอย่างยิ่งในความกรุณาของท่าน จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ทั้งนี้ต้องขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตรจารย์ดร.เดชา สมนะ และดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ประธานและกรรมการสอบปัญหาพิเศษในครั้งนี้ที่ได้แนะนำ ติชม แก้ไขและเพิ่มเติมในส่วนที่ผิดพลาด ตลอดจนคณาจารย์ทุกท่านที่ให้วิชาความรู้ต่างๆแก่คณะผู้จัดทำมาโดยตลอดรวมถึงเจ้าหน้าที่ทุกท่านในภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ช่วยอำนวยความสะดวกในส่วนของอุปกรณ์และการติดต่อประสานงานตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา

สุดท้ายนี้ต้องขอขอบพระคุณครอบครัวและเพื่อนๆ ที่คอยสนับสนุน และให้กำลังใจตลอดมา รวมถึงผู้เกี่ยวข้องที่ไม่ได้กล่าวนามในข้างต้นที่มีส่วนช่วยให้ปัญหาพิเศษนี้ได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

พรรษพิชญ์ชา กุแก้ว
พรสุดา ศักดิ์ดี
วณารัตน์ ไฝ่การณ์

สารบัญ

บทที่1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในพีชคณิตเชิงเส้นเรามีการศึกษาการคูณปกติของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากฟิลด์ใดๆ เช่น $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ นอกเหนือจากนี้ยังมีเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากโครงสร้างทางพีชคณิตอื่น เช่น เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่[5] ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวจะมีความซับซ้อนของเงื่อนไขมากขึ้นและไม่สามารถทำการดำเนินการระหว่างสมาชิกแล้วเป็นไปตามสมบัติของการคูณปกติของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากฟิลด์ใดๆ ได้ทั้งหมด

นอกเหนือจากการคูณปกติแล้วยังมีการคูณแบบอื่นๆ เช่น ผลคูณฮาดามาร์ด ผลคูณโครเนคเคอร์ เป็นต้น ผลคูณฮาดามาร์ด (Hadamard Product) ถูกเรียกตามชื่อของนักคณิตศาสตร์ คือ Jacques Hadamard ซึ่งเป็นการดำเนินการระหว่างสองเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน ผลลัพธ์ที่ได้คือเมทริกซ์ขนาดเท่าเดิมที่สมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจากการคูณสมาชิกในตำแหน่งที่ ij ของสองเมทริกซ์นั้น นั่นคือ ผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดย $m=p$ และ $n=q$ นิยามโดย

$$A\odot B=[a_{ij}b_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

ผลคูณฮาดามาร์ด (Hadamard Product) ของเมทริกซ์ถูกประยุกต์ใช้ในสาขาต่างๆของวิทยาศาสตร์ เช่น แบบจำลองเชิงเส้นทั่วไป (General linear models) แบบจำลองการวิเคราะห์ตัวประกอบทั่วไป (Generalize factor analysis model) การวิเคราะห์เชิงสถิติ (Statistical analysis) [3] เป็นต้น

ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก (Block Hadamard Product) เป็นผลคูณของเมทริกซ์อีกรูปแบบหนึ่งที่ถูกศึกษาในงานวิจัย [3] โดย ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ นิยามโดย

$$A\boxdot B=[A\odot B_{kl}]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R}),$$

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการขยายแนวคิดจากผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกจากฟิลด์ใดๆ ไปสู่เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ซึ่งเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่มักถูกนำไปใช้ในสาขาวิชาต่างๆ เช่น การหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization theory) การวิจัยดำเนินการ (Operations research) ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) [7] เป็นต้น โดยการขยายแนวคิดดังกล่าว จะมีความซับซ้อนของเงื่อนไขมากขึ้น เช่น มีสมบัติบางประการที่แตกต่างจากการคูณปกติของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากฟิลด์ใดๆ เนื่องจากผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากกึ่งริงสลับที่ไม่สามารถทำการดำเนินการระหว่างสมาชิกแล้วเป็นไปตามสมบัติของการคูณปกติของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากฟิลด์ใดๆ ได้ทั้งหมด

1.2 วัตถุประสงค์

1.) ให้นิยามของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
2.) พิจารณาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ได้แก่ สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลลาร์ การคูณแบบปกติ การสลับเปลี่ยน เมทริกซ์แบบบล็อก

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.) ได้ฝึกฝนและพัฒนาทักษะกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
2.) ได้มีความรู้ความเข้าใจใน สมบัติเชิงพีชคณิตพื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ด
3.) เป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.) ศึกษาความรู้พื้นฐานในพีชคณิตนามธรรมและพีชคณิตเชิงเส้น
2.) ศึกษาความรู้พื้นฐานของกึ่งริงสลับที่
3.) ศึกษาสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการของเมทริกซ์เหนือกึ่งสลับที่
4.) ศึกษาความรู้พื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ดและผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก
5.) ศึกษาความรู้พื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
6.) ศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ได้แก่ สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลลาร์ การคูณแบบปกติ การสลับเปลี่ยน เมทริกซ์แบบบล็อก
7.) สรุปผล จัดทำเอกสารและนำเสนอ

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน (ปี 2559-2560)									
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.ศึกษาความรู้พื้นฐานในพีชคณิตนามธรรมและพีชคณิตเชิงเส้น										
2.ศึกษาความรู้พื้นฐานของกึ่งริงสลับที่										
3.ศึกษาสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
4.ศึกษาความรู้พื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ดและผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก										
5.ศึกษาความรู้พื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
6.ศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ได้แก่ สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วย สเกลลาร์ การคูณแบบปกติ การสลับเปลี่ยนเมทริกซ์แบบบล็อก										
7.สรุปผล จัดทำเอกสารและนำเสนอ										

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานในพีชคณิตนามธรรม

ในการศึกษาสมบัติของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ เราจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานในพีชคณิตนามธรรม ได้แก่ การดำเนินการทวิภาค กรุป ริง กึ่งริงสลับที่และสมบัติการดำเนินการของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

2.1 การดำเนินการทวิภาค (binary operations)

บทนิยาม 2.1.1 การดำเนินการ บน A (กำหนดให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง) หมายถึง ฟังก์ชันซึ่งกำหนดสมาชิกในเซต A และ $A\times A=\{(a,b)\mid a,b\in A\}$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian) ของเซต A กล่าวโดยสัญลักษณ์ การดำเนินการบนทวิภาคบน A หมายถึง ฟังก์ชันจาก $A\times A$ ไป S นั่นคือ $*: A\times A\to A$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต S เป็นสมบัติซึ่งกำหนดว่าทุกๆคู่อันดับ $(a,b)\in A\times A$ ต้องไปเกี่ยวข้องกับสมาชิกในเซต A เพียงตัวเดียว เท่านั้น โดยสมาชิกตัวนี้จะเขียนแทนด้วย $*((a,b))$ (ภาพ (image) ของ (a,b)) ต่อไปจะเขียนแทน $*((a,b))$ ด้วย $a*b$

2.2 กรุป (group)

กรุป เป็นซึ่งเป็นระบบพีชคณิตที่มีองค์ประกอบไม่ซับซ้อน แต่มีสมบัติและโครงสร้างซึ่งสามารถใช้เป็นตัวแบบที่ดีในการศึกษาระบบพีชคณิตอื่นต่อไป (กาลัว (Evariste Galois: 1811-1832) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสเป็นผู้นำใช้คำว่ากรุป) เช่น การคูณหรือการบวก ซึ่งสอดคล้องกับสัจพจน์ที่กำหนด ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนเต็มเป็นกรุปภายใต้การดำเนินการการบวก

บทนิยาม 2.2.1 ให้ G เซตไม่ว่าง และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G พิจารณาสมบัติต่อไปนี้

(P1) การเปลี่ยนกลุ่ม : สำหรับ $a,b,c\in G, a*(b*c)=(a*b)*c$

(P2) การมีสมาชิกเอกลักษณ์ : มีสมาชิก $e\in G$ ที่ทำให้สำหรับทุก $a\in G, e*a=a*e=a$

(P3) แต่ละสมาชิกมีตัวผกผัน : สำหรับ $a\in G$ จะมีสมาชิก $b\in G$ ที่ทำให้ $a*b=b*a=e$, เมื่อ e คือ สมาชิกเอกลักษณ์

(P4) การสลับที่ : คือ สำหรับทุกๆ $a,b\in G, a*b=b*a$ สำหรับทุกสมาชิก a และ b

ถ้า $*$ มีคุณสมบัติ (P1) เราจะเรียก $(G,*)$ ว่า กึ่งกรุป (semigroup)

ถ้า $*$ มีคุณสมบัติ (P1) - (P2) เราจะเรียก $(G,*)$ ว่า โมนอยด์ (monoid)

ถ้า $*$ มีคุณสมบัติ (P1) - (P3) เราจะเรียก $(G,*)$ ว่า กรุป (group)

ถ้า $*$ มีคุณสมบัติ (P1), (P2), (P3) เราจะเรียก $(G,*)$ ว่า โมนอยด์สลับที่

ถ้า $*$ มีคุณสมบัติ (P1) - (P4) เราจะเรียก $(G,*)$ ว่า กรุปอาบีเลียน

2.3 ริง (ring)

ริง (ring) หมายถึง โครงสร้างเชิงพีชคณิตประเภทหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยสมบัติต่างๆ ทางพีชคณิตของจำนวนเต็ม ริงหนึ่งๆ มีการดำเนินการสองชนิดที่มัก เรียกว่า การบวก (addition) กับการคูณ(multiplication) ต่างกับกรุป (group) ที่มีการดำเนินการเพียงชนิดเดียว

บทนิยาม 2.3.1 ริง หมายถึง ระบบพีชคณิตที่ประกอบด้วยเซตไม่ว่าง G และ การดำเนินการทวิภาค 2 ชนิดบน G ที่จะเรียกว่า บวก เขียนแทนด้วย $+$ และอีกชนิดเรียกว่า คูณ เขียนแทนด้วย $\cdot$ ซึ่งสอดคล้องสมบัติดังต่อไปนี้

1. $(G,+)$ เป็นกรุปอาบีเลียน
2. $(G,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป
3. สำหรับทุกๆ $a,b,c \in G$

   $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ สมบัติการแจกแจงทางซ้าย (left distributive)

   $(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$ สมบัติการแจกแจงทางขวา (right distributive)

จะเขียนแทนด้วย $(G,+,\cdot)$

บทนิยาม 2.3.2 ริงสลับที่ (commutative ring) ให้ $(G,+,\cdot)$ เป็นริง จะกล่าวว่า $(G,+,\cdot)$ เป็นริงสลับที่ (commutative ring) ถ้า $a\cdot b=b\cdot a \quad \forall a,b\in G$

บทนิยาม 2.3.3 ริงที่มีเอกลักษณ์ (ring with identity) ให้ $(G,+,\cdot)$ เป็นริง จะกล่าวว่า $(G,+,\cdot)$ เป็น ริงที่มีเอกลักษณ์ (ring with identity) ถ้ามีสมาชิก $1\in G$ ทำให้ได้ว่า $1\cdot a=a=a\cdot 1 \quad \forall a\in G$

หมายเหตุ

1.จะใช้ 0 แทนสมาชิกเอกลักษณ์ของ G ภายใต้ $+$ และจะใช้ $-a$ แทนสมาชิกตัวผกผันของ a ภายใต้ $+$

2. $+$ และ $\cdot$ ในริง $(G,+,\cdot)$ เป็นเพียงเครื่องหมายที่ใช้บอกว่า G มีการดำเนินการทวิภาค 2 ชนิด ไม่ได้หมายถึง การบวกในจำนวนจริง หรือ การคูณในจำนวนจริง

2.4 บทนิยามและตัวอย่างของกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 2.4.1 $\mathbb{L}$ จะเรียกว่า กึ่งริงสลับที่ เมื่อมีการดำเนินทวิภาคสองอย่างควบคู่กัน

- แทนการดำเนินการทวิภาคตัวแรกบนเซต $\mathbb{L}$ ด้วย $\oplus$ เรียกว่า การบวก
- แทนการดำเนินการทวิภาคตัวที่สองบนเซต $\mathbb{L}$ ด้วย $\odot$ เรียกว่า การคูณ
- เรียกเอกลักษณ์ภายใต้การบวกว่า สมาชิกศูนย์ แทนด้วย 0
- เรียกเอกลักษณ์ภายใต้การคูณว่า หนึ่ง หรือ เอกลักษณ์ แทนด้วย 1

กึ่งริงสลับที่ มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. $(\mathbb{L},\oplus,0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่
2. $(\mathbb{L},\odot,1)$ เป็นโมนอยด์สลับที่
3. สำหรับทุกๆ $x,y,z\in\mathbb{L}$

$$x\cdot(\mathrm{y}+z)=x\cdot y+x\cdot z$$
$$(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$$

4. $0\cdot r=0=r\cdot 0\ \forall r\in\mathbb{L}$
5. $0\neq 1$

สามารถเขียนได้ในรูป $(\mathbb{L},\oplus,\odot,0,1)$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.1**</u> พิจารณา $\mathbb{L}\subseteq R$ ซึ่งมี a เป็นค่าสูงสุดและ b เป็นค่าต่ำสุด โดยที่ $a<b$ ภายใต้การดำเนินการ

$$x\oplus y=\max\{x,y\}$$
$$x\odot y=\min\{x,y\}$$

สำหรับทุก $x,y\in\mathbb{L}$ จะได้ว่า $(\mathbb{L},\oplus,\odot,a,b)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

บทพิสูจน์

1. $(\mathbb{L},\oplus,a)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

ให้ $x,y,z\in\mathbb{L}$

<u>กรณีที่1</u> $\max\{x,y,z\}=x$

จะได้ $(x\oplus y)\oplus z=\max\{\max\{x,y\},z\}=x$

$x\oplus(y\oplus z)=\max\{x,\max\{y,z\}\}=x$

<u>กรณีที่2</u> $\max\{x,y,z\}=y$

จะได้ $(x\oplus y)\oplus z=\max\{\max\{x,y\},z\}=y$

$x\oplus(y\oplus z)=\max\{x,\max\{y,z\}\}=y$

<u>กรณีที่3</u> $\max\{x,y,z\}=z$

จะได้ $(x\oplus y)\oplus z=\max\{\max\{x,y\},z\}=z$

$x\oplus(y\oplus z)=\max\{x,\max\{y,z\}\}=z$

- มีสมาชิก $a\in\mathbb{L}$ ที่ซึ่ง สำหรับทุก $x\in\mathbb{L}$ จะได้

$$x\oplus a=\max\{x,a\}=\mathrm{x}=\max\{a,x\}=a\oplus x$$

ดังนั้น a เป็นเอกลักษณ์การบวก

- มีสมบัติการสลับที่

ให้ $x,y\in\mathbb{L}$ จะได้ว่า $x\oplus y=\max\{x,y\}=\max\{y,x\}=y\oplus x$

ดังนั้น $x\oplus y=y\oplus x$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{L},\oplus,a)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

2. $(\mathbb{L},\odot,b)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

ให้ $x,y,z \in \mathbb{L}$

<u>กรณีที่1</u> $\min\{x,y,z\}=x$

จะได้ $(x\odot y)\odot z=\min\{\min\{x,y\},z\}=x$

$x\odot(y\odot \mathrm{z})=\min\{x,\min\{y,z\}\}=x$

<u>กรณีที่2</u> $\min\{x,y,z\}=y$

จะได้ $(x\odot y)\odot z=\min\{\min\{x,y\},z\}=y$

$x\odot(\mathrm{y}\odot \mathrm{z})=\min\{x,\min\{y,z\}\}=y$

<u>กรณีที่3</u> $\min\{x,y,z\}=z$

จะได้ $(x\odot y)\odot z=\min\{\min\{x,y\},z\}=z$

$x\odot(\mathrm{y}\odot \mathrm{z})=\min\{x,\min\{y,z\}\}=z$

- มีสมาชิก $b\in\mathbb{L}$ ที่ซึ่ง สำหรับทุก $x\in\mathbb{L}$ จะได้

$x\odot b=\min\{x,b\}=x=\min\{b,x\}=b\odot x$

ดังนั้น b เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- มีสมบัติการสลับที่

ให้ $x,y\in\mathbb{L}$ จะได้ว่า $x\odot y=\min\{x,y\}=\min\{y,x\}=y\odot x$

ดังนั้น $x\odot y=y\odot x$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{L},\odot,b)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

3. การคูณ $(\bullet)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$

สำหรับทุกๆ $x,y,z\in\mathbb{L}$

$$x\odot(y\oplus z)=(x\odot y)\oplus(x\odot z)$$
$$(x\oplus y)\odot z=(x\odot z)\oplus(y\odot z)$$

ให้ $x,y,z\in\mathbb{L}$

<u>กรณีที่</u>1 $\min\{x,y,z\}=x,\max\{x,y,z\}=z$

จะได้ $x\odot(y\oplus z)=\min\{x,\max\{y,z\}\}=\min\{x,z\}=x$

$(x\odot y)\oplus(x\odot z)=\max\{\min\{x,y\},\min\{x,z\}\}=\max\{x,x\}=x$

<u>กรณีที่</u>2 $\min\{x,y,z\}=x,\max\{x,y,z\}=y$ จะได้

$x\odot(y\oplus z)=\min\{x,\max\{y,z\}\}=\min\{x,y\}=x$

$(x\odot y)\oplus(x\odot z)=\max\{\min\{x,y\},\min\{x,z\}\}=\max\{x,x\}=x$

<u>กรณีที่</u>3 $\min\{x,y,z\}=y,\max\{x,y,z\}=x$

จะได้ $x\odot(y\oplus z)=\min\{x,\max\{y,z\}\}=\min\{x,z\}=z$

$(x\odot \mathrm{y})\oplus(x\odot z)=\max\{\min\{x,y\},\min\{x,z\}\}=\max\{y,z\}=z$

<u>กรณีที่</u>4 $\min\{x,y,z\}=y, \max\{x,y,z\}=z$

จะได้ $x\odot(y\oplus z)=\min\{x,\max\{y,z\}\}=\min\{x,z\}=x$

$(x\odot y)\oplus(x\odot z)=\max\{\min\{x,y\},\min\{x,z\}\}=\max\{y,x\}=x$

<u>กรณีที่</u>5 $\min\{x,y,z\}=z, \max\{x,y,z\}=x$

จะได้ $x\odot(y\oplus z)=\min\{x,\max\{y,z\}\}=\min\{x,y\}=y$

$(x\odot y)\oplus(x\odot z)=\max\{\min\{x,y\},\min\{x,z\}\}=\max\{y,z\}=y$

<u>กรณีที่</u>6 $\min\{x,y,z\}=z, \max\{x,y,z\}=y$

จะได้ว่า $x\odot(y\oplus z)=\min\{x,\max\{y,z\}\}=\min\{x,y\}=x$

$(x\odot y)\oplus(x\odot z)=\max\{\min\{x,y\},\min\{x,z\}\}=\max\{x,z\}=x$

ดังนั้น $x\odot(y\oplus z)=(x\odot y)\oplus(x\odot z)$

ทำในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $(x\oplus y)\odot z=(x\odot z)\oplus(y\odot z)$

4. $a\odot r=\min\{a,r\}=a=\min\{r,a\}=r\odot a, \forall r\in\mathbb{L}$

5. $a\neq b$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{L},\oplus,\odot,a,b)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.2</u> ให้ $(\mathbb{L},\oplus,\odot)$ และ $(R,+,\bullet)$ เป็นกึ่งริงสลับที่ พิจารณา $\mathbb{L}\times R$ ภายใต้การดำเนินการ

$$(a_1,b_1)\oplus'(a_2,b_2)=(a_1\oplus a_2,b_1+b_2)$$
$$(a_1,b_1)\odot'(a_2,b_2)=(a_1\odot a_2,b_1\bullet b_2)$$

สำหรับทุกๆ $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\mathbb{L}\times R$ จะได้ว่า $(\mathbb{L}\times R,\oplus',\odot')$ เป็นกึ่งริงสลับที่

บทพิสูจน์

1. $(\mathbb{L}\times R,\oplus',(0,0))$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- <u>สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม</u>

$$\begin{aligned}[(a_1,b_1)\oplus'(a_2,b_2)]\oplus'(a_3,b_3)&=(a_1\oplus a_2,b_1+b_2)\oplus'(a_3,b_3)\\&=((a_1\oplus a_2)\oplus a_3,(b_1+b_2)+b_3)\\&=(a_3\oplus(a_1\oplus a_2),b_3+(b_1+b_2))\\&=(a_3,b_3)\oplus'(a_1\oplus a_2,b_1+b_2)\\&=(a_3,b_3)\oplus'[(a_1,b_1)\oplus'(a_2,b_2)]\end{aligned}$$

ดังนั้น มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

- มีสมาชิก $(0,0)\in\mathbb{L}\times R$ ที่ซึ่ง

$(a,b)\oplus'(0,0)=(a\oplus 0,b+0)=(a,b), \forall(a,b)\in\mathbb{L}\times R$

ดังนั้น $(0,0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวก

- <u>สมบัติการสลับที่</u>

$$\begin{aligned}(a_1,b_1)\oplus'(a_2,b_2) &= (a_1\oplus a_2, b_1+b_2)\\ &= (a_2\oplus a_1, b_2+b_1)\\ &= (a_2,b_2)\oplus'(a_1,b_1)\end{aligned}$$

ดังนั้น มีสมบัติการสลับที่

2. $(\mathbb{L}\times R,\odot',(1,1))$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- <u>สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม</u>

$$\begin{aligned}[(a_1,b_1)\odot'(a_2,b_2)]\odot'(a_3,b_3) &= (a_1\odot a_2, b_1\bullet b_2)\odot'(a_3,b_3)\\ &= ((a_1\odot a_2)\odot a_3,(b_1\bullet b_2)\bullet b_3)\\ &= (a_3\odot(a_1\odot a_2), b_3\bullet(b_1\bullet b_2))\\ &= (a_3,b_3)\odot'(a_1\odot a_2, b_1\bullet b_2)\\ &= (a_3,b_3)\odot'[(a_1,b_1)\odot'(a_2,b_2)]\end{aligned}$$

ดังนั้น มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

- มีสมาชิก $(1,1)\in\mathbb{L}\times R$ ที่ซึ่ง

$$(a,b)\odot'(1,1) = (a\odot 1, b\bullet 1) = (a,b) \quad ,\forall(a,\mathrm{b})\in\mathbb{L}\times R$$

ดังนั้น $(1,1)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- <u>สมบัติการสลับที่</u>

$$\begin{aligned}(a_1,b_1)\odot'(a_2,b_2) &= (a_1\odot a_2, b_1\bullet b_2)\\ &= (a_2\odot a_1, b_2\bullet b_1)\\ &= (a_2,b_2)\odot'(a_1,b_1)\end{aligned}$$

ดังนั้น มีสมบัติการสลับที่

3. การคูณ $(\bullet)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$

ให้ $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in\mathbb{L}\times R$

$$[(a_1,b_1)\oplus'(a_2,b_2)]\odot'(a_3,b_3)$$

$$\begin{aligned}&= (a_1\oplus a_2, b_1+b_2)\odot'(a_3,b_3)\\ &= ((a_1\oplus a_2)\odot a_3,(b_1+b_2)\bullet b_3)\\ &= ((a_1\odot a_3)\oplus(a_2\odot a_3),(b_1\bullet b_3)+(b_2\bullet b_3))\\ &= (a_1\odot a_3, b_1\bullet b_3)\oplus'(a_2\odot a_3, b_2\bullet b_3)\\ &= [(a_1,b_1)\odot'(a_3,b_3)]\oplus'[(a_2,b_2)\odot'(a_3,b_3)]\end{aligned}$$

ดังนั้น การคูณ $(\bullet)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$

4. $(0,0) \odot' (a,\mathrm{b}) = (0 \odot a, 0 \bullet b) = (0,0) = (a,\mathrm{b}) \odot' (0,0)\ \forall (a,b) \in \mathbb{L} \times R$

5. $(0,0) \neq (1,1)$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{L} \times R, \oplus', \odot')$ ภายใต้การดำเนินการตามพิกัด เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.3**</u> พิจารณา $\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ ภายใต้การดำเนินการ

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad \text{และ}$$

$$(a,b) \bullet (\mathrm{c},d) = (a\mathrm{c} - bd, ad + bc)$$

1. $(\mathbb{C}, +, (0,0))$ เป็นโมนอยด์สลับที่

2. $(\mathbb{C}, \bullet, (1,0))$ เป็นโมนอยด์สลับที่

3. การคูณ $(\bullet)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$

$$[(a,b) + (c,d)] \bullet (e,f) = [(a,b) \bullet (e,f)] + [(c,d) \bullet (e,f)]$$

4. $(0,0) \bullet (a,b) = (0,0) = (a,b) \bullet (0,0),\ \forall (a,\mathrm{b}) \in \mathbb{C}$

5. $(0,0) \neq (1,0)$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{C}, +, \bullet, (0,0), (1,0))$ เป็นกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 2.4.2 ให้ $a,b \in \mathbb{Z}$ จำนวนนับ m จะกล่าวว่าเป็น **ตัวคูณร่วมน้อย(least common multiple)** ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $a \mid m$ และ $b \mid m$
2. สำหรับจำนวนนับ m' ใดๆ ซึ่ง $a \mid m'$ และ $b \mid m'$ จะได้ว่า $m \mid m'$ นั่นคือ $\forall m' \in \mathbb{N}, (a \mid m') \wedge (b \mid m') \rightarrow (m \mid m')$

และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{lcm}(a,b)$ แทน ตัวคูณร่วมน้อยของ a และ b

บทนิยาม 2.4.3 ให้ $a,b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ โดย a และ b ไม่เป็น 0 พร้อมกัน จำนวนนับ d จะกล่าวว่าเป็น **ตัวหารร่วมมาก(greatest common divisor)** ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $d \mid a$ และ $d \mid b$
2. สำหรับจำนวนนับ d' ใดๆ ซึ่ง $d' \mid a$ และ $d' \mid b$ จะได้ว่า $d' \mid d$ นั่นคือ $\forall d' \in \mathbb{N}, (d' \mid a) \wedge (d' \mid b) \rightarrow (d' \mid d)$

และจะใช้สัญลักษณ์ $\gcd(a,b)$ แทน ตัวหารร่วมมาของ a และ b

<u>สมบัติการสลับที่</u> สำหรับแต่ละ $a,b \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\operatorname{lcm}(a,b) = \operatorname{lcm}(b,a)$$

$$\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$$

บทพิสูจน์ ให้ $\operatorname{lcm}(b,a) = m$ ต้องแสดงว่า $\operatorname{lcm}(a,b) = m$

1. $a \mid m$ และ $b \mid m$

เนื่องจาก $\operatorname{lcm}(b,a) = m$ ดังนั้น $b \mid m$ และ $a \mid m$

2. $\forall m' \in \mathbb{N}, (a \mid m') \wedge (b \mid m') \rightarrow (m \mid m')$

สำหรับจำนวนนับ m' ใดๆ ให้ $(a \mid m')$ และ $(b \mid m')$

เนื่องจาก $\operatorname{lcm}(b,a) = m$ ดังนั้น $\forall m' \in \mathbb{N}, (a \mid m') \wedge (b \mid m') \rightarrow (m \mid m')$

จาก 1.และ 2. ทำให้ได้ว่า $\operatorname{lcm}(a,b) = \operatorname{lcm}(b,a)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$

<u>สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม</u> สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\operatorname{lcm}(a, \operatorname{lcm}(b,c)) = \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b), c)$$

$$\gcd(a, \gcd(b,c)) = \gcd(\gcd(a,b), c)$$

บทพิสูจน์ ให้ $a,b,c,p,q,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ให้ $q = \operatorname{lcm}(a,b)$ นั่นคือ $a \mid q$ และ $b \mid q$

$p = \operatorname{lcm}(b,c)$ นั่นคือ $b \mid p$ และ $c \mid p$

$m = \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b), c)$ นั่นคือ $q \mid m$ และ $c \mid m$

ต้องแสดงว่า

1. $a \mid m$ และ $p \mid m$

   1.1) $a \mid m$

   เนื่องจาก $a \mid q$ และ $q \mid m$ ดังนั้น $a \mid m$

   1.2) $p \mid m$

   (เนื่องจาก $p \mid m$ ต้องแสดงว่า m เป็นตัวคูณร่วมของ b และ c นั่นคือ

   ต้องแสดงว่า $b \mid m$ และ $c \mid m$)

เนื่องจาก $b|q$ และ $q|m$ ดังนั้น $b|m$

เนื่องจาก $m = \mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(a,b),c)$ ดังนั้น $c|m$

จะได้ว่า $p|m$

จาก 1.1) และ 1.2) ทำให้ได้ว่า $a|m$ และ $p|m$

2. $\forall m' \in \mathbb{N}, (a|m') \wedge (p|m') \rightarrow (m|m')$

สำหรับจำนวนนับ m' ใดๆ ให้ $a|m'$ และ $p|m'$

(ต้องแสดงว่า $m|m'$ นั่นคือ m' เป็นตัวคูณร่วมของ q และ c)

เนื่องจาก $b|p$, $p|m'$ และ $a|m'$ จะได้ว่า $q|m'$ และเนื่องจาก $c|p$, $p|m'$ จะได้ว่า $c|m'$

ดังนั้น $m|m'$

จาก 1.และ 2. ทำให้ได้ว่า $\mathrm{lcm}(a,\mathrm{lcm}(b,c)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(a,b),c)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\gcd(a,\gcd(b,c)) = \gcd(\gcd(a,b),c)$

<u>สมบัติการกระจาย</u> สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\mathrm{lcm}(a,\gcd(b,c)) = \gcd(\mathrm{lcm}(a,b),\mathrm{lcm}(a,c))$$

$$\gcd(a,\mathrm{lcm}(b,c)) = \mathrm{lcm}(\gcd(a,b),\gcd(a,c))$$

บทพิสูจน์

โดย ทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต จะได้ว่า มีจำนวนนับ e,f,g,h,j,k,l,m,n และจำนวนเฉพาะ $p_1,\ldots,p_k,q_{k+1},\ldots,q_m,r_{m+1},\ldots,r_n,t_{n+1},\ldots,t_l,s_{l+1},\ldots,s_g,u_{g+1},\ldots u_f,$ $v_{f+1},\ldots,v_h$ ซึ่งทำให้

$$a = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i})(\prod_{i=k+1}^{m} q_i^{\alpha_i})(\prod_{i=m+1}^{n} r_i^{\alpha_i})(\prod_{i=l+1}^{g} s_i^{\alpha_i})$$

$$b = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i})(\prod_{i=k+1}^{m} q_i^{\beta_i})(\prod_{i=n+1}^{l} t_i^{\beta_i})(\prod_{i=g+1}^{f} u_i^{\beta_i})$$

$$c = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\delta_i})(\prod_{i=m+1}^{n} r_i^{\delta_i})(\prod_{i=n+1}^{l} t_i^{\delta_i})(\prod_{i=f+1}^{h} v_i^{\delta_i})$$

จะได้ $\operatorname{lcm}(b,c) = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\beta_i,\delta_i\}})(\prod_{i=k+1}^{m} q_i^{\beta_i})(\prod_{i=m+1}^{n} r_i^{\delta_i})(\prod_{i=n+1}^{l} t_i^{\max\{\beta_i,\delta_i\}})(\prod_{i=g+1}^{f} u_i^{\beta_i})(\prod_{i=f+1}^{h} v_i^{\delta_i})$

$$\gcd(a,\operatorname{lcm}(b,c)) = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\max\{\beta_i,\delta_i\}\}})(\prod_{i=k+1}^{m} q_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}})(\prod_{i=m+1}^{n} r_i^{\min\{\alpha_i,\delta_i\}})$$

และ $\gcd(a,b) = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}})(\prod_{i=k+1}^{m} q_i^{\min\{\alpha_i\beta_i\}})$

$$\gcd(a,\mathrm{c}) = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\delta_i\}})(\prod_{i=m+1}^{n} r_i^{\min\{\alpha_i\delta_i\}})$$

$$\operatorname{lcm}(\gcd(a,b),\gcd(a,c)) = (\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\},\min\{\alpha_i,\delta_i\}\}})(\prod_{i=k+1}^{m} q_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}})(\prod_{i=m+1}^{n} r_i^{\min\{\alpha_i,\delta_i\}})$$

ดังนั้น $\gcd(a,\operatorname{lcm}(b,c)) = \operatorname{lcm}(\gcd(a,b),\gcd(a,c))$.

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\operatorname{lcm}(a,\gcd(b,c)) = \gcd(\operatorname{lcm}(a,b),\operatorname{lcm}(a,c))$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.4**</u> $\mathbb{N}\cup\{0\}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนนับภายใต้การดำเนินการ

$$a\cdot b = \begin{cases} 0 & ; a=b=0 \\ \gcd(a,b) & ; \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

$$a+b = \begin{cases} \operatorname{lcm}(a,b) & ; a,b\in\mathbb{N} \\ 0 & ; \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

บทพิสูจน์ จะแสดงว่า $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,\cdot,0,1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ให้ $a,b,c\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

1. $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

<u>ในกรณี</u> $a,b,c\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= a+\operatorname{lcm}(a,b) \\ &= \operatorname{lcm}(\mathrm{a},\operatorname{lcm}(a,b)) \\ &= \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b),c) \\ &= \operatorname{lcm}(a,b)+c \\ &= (a+b)+c \end{aligned}$$

<u>ในกรณี</u> $a=0$ หรือ $b=0$ หรือ $c=0$ เห็นได้ชัดว่า

$$a+(b+c) = 0 = (a+b)+c$$

● มีสมาชิกเอกลักษณ์ คือ 1

กรณีที่1 $a \in \mathbb{N}$; $a+1=\operatorname{lcm}(a,1)=a=1+a$

กรณีที่2 $a=0$; $0+1=0=1+0$

● มีสมบัติสลับที่

ในกรณี $a,b \in \mathbb{N}$

$$a+b=\operatorname{lcm}(a,b)=\operatorname{lcm}(b,a)=b+a$$

ในกรณี $a=0$ หรือ $b=0$ จะได้

$$a+b=0=b+a$$

2. $(\mathbb{N}\cup\{0\},\cdot,1)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

● มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

กรณีที่1 $a=b=c=0$

$$(a\cdot b)\cdot c=0\cdot c=0$$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot 0=a$$

กรณีที่2 $a\neq 0, b=0, c=0$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(a,b)\cdot c=a\cdot c=\gcd(a,c)=a$$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot\gcd(b,c)=a\cdot 0=\gcd(a,0)=a$$

กรณีที่3 $a=0, b\neq 0, c=0$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(a,b)\cdot c=b\cdot c=\gcd(b,c)=b$$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot\gcd(b,c)=a\cdot b=b$$

กรณีที่4 $a=0, b=0, c\neq 0$

$$(a\cdot b)\cdot c=0\cdot c=c$$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot c=c$$

กรณีที่5 $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(a,b)\cdot c=\gcd(\gcd(a,b),0)\ =\gcd(a,b)$$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b=\gcd(a,b)$$

<u>กรณีที่6</u> $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot c = \gcd(a,c)$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot c = \gcd(a,c)$$

<u>กรณีที่7</u> $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$(a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = \gcd(b,c)$$

$$a \cdot (b \cdot c) = 0 \cdot \gcd(b,c) = \gcd(b,c)$$

<u>กรณีที่8</u> $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$(a \cdot b) \cdot c = \gcd(a,b) \cdot c = \gcd(\gcd(a,b),c)$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot \gcd(b,c) = \gcd(\mathrm{a}, \gcd(b,c))$$

$$= \gcd(\gcd(a,b),c)$$

- มีสมาชิกเอกลักษณ์ คือ 0

<u>กรณีที่1</u> $a = 0$; $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

<u>กรณีที่2</u> $a \neq 0$; $a \cdot 0 = \gcd(a,0) = a = 0 \cdot a$

- มีสมบัติสลับที่

เห็นได้ชัดจากนิยามว่า $a \cdot b = b \cdot a$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

3.การคูณ $(\cdot)$ กระจายเหนือการบวก $(+)$ ได้

- ต้องแสดงว่า $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$a \cdot (b+c) = \begin{cases} 0 & ; a = b = c = 0 \\ \gcd(a, b+c) & ;\text{ อื่นๆ} \end{cases}$$

$$a \cdot b + a \cdot c = \begin{cases} \operatorname{lcm}(a \cdot b, a \cdot c) & ; a, b, c \in \mathbb{N} \\ 0 & ;\text{ อื่นๆ} \end{cases}$$

<u>กรณีที่1</u> $a = 0$

$b = 0, c = 0$

$$a \cdot (b+c) = 0$$

$$a \cdot b + a \cdot c = 0$$

$b \neq 0, c \neq 0$

$$a \cdot (b+c) = 0 \cdot (b+c) = \gcd(0, b+c)$$
$$= b+c = \operatorname{lcm}(b,c)$$

$$a \cdot b + a \cdot c = 0 \cdot b + 0 \cdot c$$
$$= \gcd(0,b) + \gcd(0,c)$$
$$= b+c = \operatorname{lcm}(b,c)$$

<u>กรณีที่2</u> $a \neq 0$

$b \neq 0, c \neq 0$

$$a \cdot (b+c) = 0 \cdot \operatorname{lcm}(b,c)$$
$$= \gcd(0, \operatorname{lcm}(b,c))$$
$$= \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c))$$
$$a \cdot b + a \cdot c = \gcd(a,b) + \gcd(a,c)$$
$$= \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c))$$

$b = 0, c = 0$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot 0 = a$$
$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a + a = a$$

$b \neq 0, c = 0$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot 0 = a$$
$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot b + a \cdot 0$$
$$= \gcd(a,b) + \gcd(a,0)$$
$$= \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,0))$$
$$= \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), a)$$
$$= \operatorname{lcm}(a, \gcd(a,b))$$
$$= \gcd(\operatorname{lcm}(a,a), \operatorname{lcm}(a,b))$$
$$= \gcd(a, \operatorname{lcm}(a,b)) = a$$

$b = 0, c \neq 0$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot 0 = a$$
$$a \cdot b + a \cdot c = a + \gcd(a,c)$$
$$= \operatorname{lcm}(a, \gcd(0,c))$$
$$= \gcd(\operatorname{lcm}(a,a), \operatorname{lcm}(a,c)) = a$$

- ต้องแสดงว่า $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

$$(a+b)\cdot c = \begin{cases} 0 & ; a=b=c=0 \\ \gcd(a+b,c) & ; \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

$$a\cdot c + b\cdot c = \begin{cases} \operatorname{lcm}(a\cdot c, b\cdot c) & ; a,b,c\in\mathbb{N} \\ 0 & ; \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

<u>กรณีที่1</u> $c=0$

$a=0, b=0$

$$(a+b)\cdot c = 0\cdot c = 0$$

$$a\cdot c + b\cdot c = 0+0 = 0$$

$a\neq 0, b\neq 0$

$$(a+b)\cdot c = \operatorname{lcm}(a,b)\cdot 0$$

$$= \gcd(\operatorname{lcm}(a,b),0)$$

$$= \operatorname{lcm}(a,b)$$

$$a\cdot c + b\cdot c = \gcd(a,0)+\gcd(b,0)$$

$$= a+b = \operatorname{lcm}(a,b)$$

<u>กรณีที่2</u> $c\neq 0$

$a=0, b=0$

$$(a+b)\cdot c = 0\cdot c = \gcd(0,c) = c$$

$$a\cdot c + b\cdot c = \gcd(0,c)+\gcd(0,c)$$

$$= c+c$$

$$= \operatorname{lcm}(c,c) = c$$

$a\neq 0, b\neq 0$

$$(a+b)\cdot c = \operatorname{lcm}(a,b)\cdot c$$

$$= \gcd(\operatorname{lcm}(a,b),c)$$

$$= \gcd(c,\operatorname{lcm}(a,b))$$

$$= \operatorname{lcm}(\gcd(c,a),\gcd(c,b))$$

$$a\cdot c+b\cdot c=\gcd(a,c)+\gcd(b,c)$$

$$= \operatorname{lcm}(\gcd(c,a),\gcd(c,b))$$

$a\neq 0, b=0$

$$(a+b)\cdot c = 0\cdot c$$

$$= \gcd(0,c)=c$$

$$a\cdot c+b\cdot c=\gcd(a,c)+\gcd(0,c)$$

$$= \gcd(a,c)+c$$

$$= \operatorname{lcm}(\gcd(a,c),c)$$

$$= \operatorname{lcm}(c,\gcd(a,c))$$

$$= \gcd(\operatorname{lcm}(c,a),\operatorname{lcm}(c,c))$$

$$= \gcd(\operatorname{lcm}(c,a),c)=c$$

$a=0, b\neq 0$

$$(a+b)\cdot c = 0\cdot c$$

$$= \gcd(0,c)=c$$

$$a\cdot c+b\cdot c=\gcd(0,c)+\gcd(b,c)$$

$$= \operatorname{lcm}(\gcd(0,c),\gcd(b,c))$$

$$= \operatorname{lcm}(\gcd(c,0),\gcd(c,b))$$

$$= \gcd(c,\operatorname{lcm}(b,c))=c$$

4. $0\cdot r=0=r\cdot 0 \qquad \forall r\in \mathbb{N}\cup\{0\}$

5. $0\neq 1$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,\cdot,0,1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 2.4.4 ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ กล่าวว่า a สมภาคกับ b หรือ a สมภาคมอดุโล m กับ b เขียน $a \equiv b(\bmod n)$ ก็ต่อเมื่อ $m|(a-b)$

บทนิยาม 2.4.5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $\mathbb{Z}_n$ เป็นเซตของชั้นสมมูลของ $\mathbb{Z}$ ที่เกิดจากการสามภาคมอดุโล n กำหนดให้

$$[a]+[b]=[a+b] \text{ และ } [a]\bullet[b]=[a\bullet b]$$

เราสามารถแสดงได้ว่า การดำเนินการข้างต้นนิยามดีแล้ว ดังนี้

ให้ $[a],[b] \in \mathbb{Z}_n$

สมมติว่า $[a]=[a']$ และ $[b]=[b']$

ต้องการแสดงว่า $[a+b]=[a']+[b']$

เนื่องจาก $[a]=[a']$ จากทฤษฎีบท1 จะได้ว่า $a \equiv a'(\bmod n)$

จะได้ว่า $n|(a-a')$ ดังนั้น $a-a'=nk \ \forall k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก $[b]=[b']$ จากทฤษฎีบท1 จะได้ว่า $b \equiv b'(\bmod n)$

จะได้ว่า $n|(b-b')$ ดังนั้น $b-b'=nl \ \forall l \in \mathbb{Z}$

จะเห็นว่า $a=a'+nk$ และ $b=b'+nl \ \forall k,l \in \mathbb{Z}$

$$a+b=(a'+nk)+(b'+nl)$$

$$=a'+b'+nk+nl$$

$$(a+b)-(a'+b')=n(k+l)$$

แสดงว่า $n|(a+b)-(a'+b')$ และ $a+b \equiv a'+b'(\bmod n)$

ดังนั้น $[a]+[b]=[a+b]=[a']+[b']=[a'+b']$

สมมติว่า $[a]=[a']$ และ $[b]=[b']$

ต้องการแสดงว่า $[ab]=[a'b']$

เนื่องจาก $[a]=[a']$ จากทฤษฎีบท1 จะได้ว่า $a \equiv a'(\bmod n)$

จะได้ว่า $n|(a-a')$ ดังนั้น $a-a'=nk \ \forall k \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก $[b]=[b']$ จากทฤษฎีบท1 จะได้ว่า $b \equiv b'(\bmod n)$

จะได้ว่า $n|(b-b')$ ดังนั้น $b-b'=nl \ \forall l\in\mathbb{Z}$

จะเห็นว่า $a=a'+nk$ และ $b=b'+nl \ \forall k,l\in\mathbb{Z}$

$$ab=(a'+nk)(b'+nl)$$

$$=a'b'+a'nl+b'nk+n^2kl$$

$$ab-a'b'=n(a'l+b'k+nkl)$$

แสดงว่า $n|(ab-a'b')$ และ $ab\equiv a'b'(\bmod n)$

ดังนั้น $[ab]=[a'b']$

สรุปได้ว่า $[a+b]=[a'+b']=[ab]=[a'b']$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.5**</u> สำหรับแต่ละ n จะได้ว่า $\mathbb{Z}_n$ เป็นกึ่งริงสลับที่

บทพิสูจน์ $(\mathbb{Z}_n,+,\bullet,\overline{0},\overline{1})$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ให้ $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in\mathbb{Z}_n$

1. จะแสดงว่า $(\mathbb{Z}_n,+,\overline{0})$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}+(\overline{b+c})$$

$$=\overline{a+(b+c)}$$

$$=\overline{(a+b)+c}$$

$$=\overline{a+b}+\overline{c}=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$$

- มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a+0}=\overline{a}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{0+a} \ \forall\overline{a}\in\mathbb{Z}_n$$

- มีสมบัติการสลับที่

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}=\overline{b+a}=\overline{b}+\overline{a}$$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}_n,+,\overline{0})$ เป็นโมนอยด์สลับที่

2. จะแสดงว่า $(\mathbb{Z}_n,\bullet,\overline{1})$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$\overline{a}\bullet(\overline{b}\bullet\overline{c})=\overline{a}\bullet(\overline{b\bullet c})=\overline{a\bullet(b\bullet c)}=\overline{(a\bullet b)\bullet c}=\overline{a\bullet b}\bullet\overline{c}=(\overline{a}\bullet\overline{b})\bullet\overline{c}$$

- มีสมาชิกเอกลักษณ์

$$\overline{a}\bullet\overline{1}=\overline{a\bullet 1}=\overline{a}=\overline{1\bullet a}=\overline{1}\bullet\overline{a}\quad\forall\overline{a}\in\mathbb{Z}_n$$

- มีสมบัติการสลับที่

ให้ $\overline{a},\overline{b}\in\mathbb{Z}_n$

$$\overline{a}\bullet\overline{b}=\overline{a\bullet b}=\overline{b\bullet a}=\overline{b}\bullet\overline{a}$$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}_n,\bullet,\overline{1})$ เป็นโมนอยด์สลับที่

3. การคูณ $(\bullet)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$

ต้องการแสดงว่า $\overline{a}\bullet(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}\bullet\overline{b})+(\overline{a}\bullet\overline{c})$

$$\begin{aligned}\overline{a}\bullet(\overline{b}+\overline{c})&=\overline{a}\bullet(\overline{b+c})\\&=\overline{a\bullet(b+c)}\\&=\overline{(a\bullet b)+(a\bullet c)}\\&=(\overline{a\bullet b})+(\overline{a\bullet c})\\&=(\overline{a}\bullet\overline{b})+(\overline{a}\bullet\overline{c})\end{aligned}$$

ดังนั้น $\overline{a}\bullet(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}\bullet\overline{b})+(\overline{a}\bullet\overline{c})$

ทำในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $(a+b)\bullet c=(a\bullet c)+(b\bullet c)$

4. $0\bullet r=0=r\bullet 0\quad\forall r\in L$

ให้ $\overline{r}\in\mathbb{Z}_n$

$$\overline{0}\bullet\overline{r}=\overline{0\bullet r}=\overline{0}=\overline{r}\bullet\overline{0}=\overline{r\bullet 0}=\overline{0}$$

ดังนั้น $0\bullet r=0=r\bullet 0\ \forall r\in\mathbb{Z}_n$

5. $\overline{0}\neq\overline{1}$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{Z}_n,+,\bullet,\overline{0},\overline{1})$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.6</u> $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ภายใต้การดำเนินการ

$x + y = \max\{x, y\}$ และ $x \bullet y = \min\{x, y\}$

บทพิสูจน์ จะแสดงว่า $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, +, \bullet, -\infty, \infty)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ให้ $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

1. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, +, -\infty)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

<u>กรณีที่1</u> $\max\{x, y, z\} = z$

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= \max\{x+y, z\} \\
&= \max\{\max\{x, y\}, z\} \\
&= z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= \max\{x, y+z\} \\
&= \max\{x, \max\{y, z\}\} \\
&= \max\{x, z\} \\
&= z
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่2</u> $\max\{x, y, z\} = y$

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= \max\{x+y, z\} \\
&= \max\{\max\{x, y\}, z\} \\
&= \max\{y, z\} \\
&= y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= \max\{x, y+z\} \\
&= \max\{x, \max\{y, z\}\} \\
&= \max\{x, y\} \\
&= y
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่3</u> $\max\{x, y, z\} = x$

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= \max\{x+y, z\} \\
&= \max\{\max\{x, y\}, z\} \\
&= \max\{x, z\} \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= \max\{x, y+z\} \\
&= \max\{x, \max\{y,z\}\} \\
&= x
\end{aligned}
$$

- มีสมาชิกเอกลักษณ์

เนื่องจาก $-\infty \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$x + (-\infty) = \max\{x, -\infty\} = x = \max\{-\infty, x\} = -\infty + x$
$\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- มีสมบัติการสลับที่

$x + y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y + x$

ดังนั้น $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, +, -\infty)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

2. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \bullet, \infty)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

$x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

<u>กรณีที่1</u> $\min\{x, y, z\} = z$

$$
\begin{aligned}
(x \bullet y) \bullet z &= \min\{x \bullet y, z\} \\
&= \min\{\min\{x, y\}, z\} \\
&= z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \bullet (y \bullet z) &= \min\{x, y \bullet z\} \\
&= \min\{x, \min\{y, z\}\} \\
&= \min\{x, z\} \\
&= z
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่2</u> $\min\{x, y, z\} = y$

$$
\begin{aligned}
(x \bullet y) \bullet z &= \min\{x \bullet y, z\} \\
&= \min\{\min\{x, y\}, z\} \\
&= \min\{y, z\} \\
&= y
\end{aligned}
$$

$$x \bullet (y \bullet z) = \min\{x, y \bullet z\}$$
$$= \min\{x, \min\{y, z\}\}$$
$$= \min\{x, y\}$$
$$= y$$

<u>กรณีที่3</u> $\min\{x, y, z\} = x$

$$(x \bullet y) \bullet z = \min\{x \bullet y, z\}$$
$$= \min\{\min\{x, y\}, z\}$$
$$= \min\{x, z\}$$
$$= x$$

$$x \bullet (y \bullet z) = \min\{x, y \bullet z\}$$
$$= \min\{x, \min\{y, z\}\}$$
$$= x$$

- มีสมาชิกเอกลักษณ์

เนื่องจาก $\infty \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$x + (\infty) = \min\{x, \infty\} = x = \min\{\infty, x\} = \infty + x$
$\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- มีสมบัติการสลับที่

ให้ $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$$a \bullet b = \min\{a, b\}$$
$$= \min\{b, a\}$$
$$= b \bullet a$$

ดังนั้น $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \bullet, \infty)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

3. การคูณ $(\bullet)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$

เนื่องจาก $a \bullet (b + c) = \min\{a, \max\{b, c\}\}$
$(a \bullet b) + (a \bullet c) = \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\}$

ให้ $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

<u>กรณีที่1</u> $\min\{x, y, z\} = z$

$x \geq y$

$$\begin{aligned} x \bullet (y+z) &= \min\{x, \max\{y,z\}\} \\ &= \min\{x,y\} \\ &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \bullet y) + (x \bullet z) &= \max\{\min\{x,y\}, \min\{x,z\}\} \\ &= \max\{y,z\} \\ &= y \end{aligned}$$

$x \leq y$

$$\begin{aligned} x \bullet (y+z) &= \min\{x, \max\{y,z\}\} \\ &= \min\{x,y\} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \bullet y) + (x \bullet z) &= \max\{\min\{x,y\}, \min\{x,z\}\} \\ &= \max\{x,z\} \\ &= x \end{aligned}$$

กรณีที่2 $\min\{x,y,z\} = y$

$x \geq z$

$$\begin{aligned} x \bullet (y+z) &= \min\{x, \max\{y,z\}\} \\ &= \min\{x,z\} \\ &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \bullet y) + (x \bullet z) &= \max\{\min\{x,y\}, \min\{x,z\}\} \\ &= \max\{y,z\} \\ &= z \end{aligned}$$

$x \leq z$

$$\begin{aligned} x \bullet (y+z) &= \min\{x, \max\{y,z\}\} \\ &= \min\{x,z\} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \bullet y) + (x \bullet z) &= \max\{\min\{x,y\}, \min\{x,z\}\} \\ &= \max\{y,x\} \\ &= x \end{aligned}$$

กรณีที่3 $\min\{x, y, z\} = x$

$y \geq z$

$$x \bullet (y+z) = \min\{x, \max\{y, z\}\}$$
$$= x$$

$$(x \bullet y) + (x \bullet z) = \max\{\min\{x, y\}, \min\{x, z\}\}$$
$$= \max\{x, x\}$$
$$= x$$

4. $(-\infty) \bullet r = -\infty = r \bullet (-\infty) \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

จะได้ $-\infty \bullet r = \min\{-\infty, r\} = -\infty = \min\{r, -\infty\} = r \bullet -\infty \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

5. $-\infty \neq \infty$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, +, \bullet, -\infty, \infty)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

2.5 สัญลักษณ์แทนการบวกในกึ่งริงสลับที่

ให้ $\mathbb{L}$ เป็นกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 2.5.1 สัญลักษณ์แทนการบวกในกึ่งริงสลับที่

ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_3 \in \mathbb{L}$ เราจะนิยามสัญลักษณ์แทนการบวกด้วย $\sum$ โดยที่

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $P(n)$ แทนประพจน์ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

ต้องแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับใดๆ

1.) ขั้นฐาน เมื่อ $n = 1$ ต้องแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\sum_{i=1}^{1} (x_i + y_i) = x_1 + y_1 = \sum_{i=1}^{1} x_i + \sum_{i=1}^{1} y_i$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2.) ขั้นอุปนัย สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i$$

ต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k+1}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{k+1} x_i + \sum_{i=1}^{k+1} y_i$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_k + y_k) + (x_{k+1} + y_{k+1})$$

$$\begin{aligned}
&= [(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_k + y_k)] + (x_{k+1} + y_{k+1}) \\
&= (x_1 + (x_2 + \ldots + x_k)) + (y_1 + (y_2 + \ldots + y_k)) + (x_{k+1} + y_{k+1}) \\
&= (x_1 + (x_2 + \ldots + x_k)) + [(x_{k+1} + y_{k+1}) + (y_1 + (y_2 + \ldots + y_k))] \\
&= [(x_1 + (x_2 + \ldots + x_k)) + (x_{k+1} + y_{k+1})] + (y_1 + (y_2 + \ldots + y_k)) \\
&= [(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}) + y_{k+1}] + (y_1 + (y_2 + \ldots + y_k)) \\
&= (x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}) + [y_{k+1} + (y_1 + (y_2 + \ldots + y_k))] \\
&= (x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}) + [(y_1 + (y_2 + \ldots + y_k)) + y_{k+1}] \\
&= (x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_k + y_{k+1}) \\
&= (x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_k + y_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} x_i + \sum_{i=1}^{k+1} y_i
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ทำให้ได้ว่า $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

2. $\sum_{i=1}^{n}(ax_i) = a(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $P(n)$ แทนประพจน์ $\sum_{i=1}^{n}(ax_i) = a(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

ต้องแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับใดๆ

1.) ขั้นฐาน เมื่อ $n=1$ ต้องแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\sum_{i=1}^{1}(ax_1) = ax_1 = a(\sum_{i=1}^{1} x_i)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2.) ขั้นอุปนัย สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k}(ax_i) = a(\sum_{i=1}^{k} x_i)$

ต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k+1}(ax_i) = a(\sum_{i=1}^{k+1} x_i)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(ax_i) &= ax_1 + ax_2 + \ldots ax_k + ax_{k+1} \\ &= (ax_1 + ax_2 + \ldots ax_k) + ax_{k+1} \\ &= a(x_1 + (x_2 + \ldots x_k)) + ax_{k+1} \\ &= a(x_1 + (x_2 + \ldots x_k + x_{k+1})) \\ &= a\sum_{i=1}^{k+1} x_i\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ทำให้ได้ว่า $\sum_{i=1}^{n}(ax_i) = a(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

3. $\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij})$

บทพิสูจน์ ให้ $m \in \mathbb{N}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $P(n)$ แทนประพจน์

$$\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij})$$

ต้องแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับใดๆ

1. ขั้นฐาน เมื่อ $n=1$ ต้องแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{1} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} a_{1j} = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m} = \sum_{i=1}^{1}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij})$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. ขั้นอุปนัย สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij})$$

ต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$$\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{k+1}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{(k+1)j})$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{kj}) + \sum_{j=1}^{m}a_{(\mathrm{k}+1)j}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(a_{ij}) + \sum_{j=1}^{m}a_{(\mathrm{k}+1)j}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1}(\sum_{j=1}^{m}a_{ij})$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ทำให้ได้ว่า $\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}a_{ij})$

บทที่ 3

เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

เราจะกล่าวถึงสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับการดำเนินการของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ได้แก่ การบวก การคูณ การคูณด้วยสเกลาร์ การสลับเปลี่ยนและรอยเมทริกซ์

3.1 สมบัติของการบวกและการคูณของเมทริกซ์

กำหนดให้ $\mathbb{L}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ และ สำหรับแต่ละ $m,n \in \mathbb{N}$ ให้ $M_{m,n}(\mathbb{L})$ เป็นเซตเมทริกซ์ ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก $\mathbb{L}$

ถ้า $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ เราจะเขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ (i,j) ของเมทริกซ์ A ด้วย a_{ij} สำหรับแต่ละ $i=1,\dots,m$ และ $j=1,\dots,n$ ในกรณีนี้เราเขียนแทนด้วย $A=\left[a_{ij}\right]_{m,n}$ หรือ $A=\left[a_{ij}\right]$

ในกรณีที่ $m=n$ เราจะเขียนแทน $M_{n,n}(\mathbb{L})$ ด้วย $M_n(\mathbb{L})$ และเขียน $M_{n,1}(\mathbb{L})$ ด้วย $V_n(\mathbb{L})$

บทนิยาม 3.1.1 (การบวกเมทริกซ์)

สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะนิยามว่า

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{L})$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.1.1**</u> จากตัวอย่าง 2.4.1 พิจารณาการดำเนินการ $x \oplus y=\max\{x,y\}$ และ $x \odot y=\min\{x,y\}$ สำหรับ $x,y \in [0,3]$

ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

จะได้ $A+B=\begin{bmatrix}1\oplus 2 & 2\oplus 1\\ 3\oplus 0 & 1\oplus 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\max\{1,2\} & \max\{2,1\}\\ \max\{3,0\} & \max\{1,1\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

บทนิยาม 3.1.2 (การคูณเมทริกซ์)

สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{n,t}(\mathbb{L})$ จะนิยามว่า

$$AB=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]\in M_{m,t}(\mathbb{L})$$

__ตัวอย่างที่ 3.1.2__ จากตัวอย่าง 2.4.1 พิจารณาการดำเนินการ $x\oplus y=\max\{x,y\}$ และ $x\odot y=\min\{x,y\}$ สำหรับ $x,y\in[0,3]$

ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

จะได้ $AB=\begin{bmatrix}(1\odot 2)+(2\odot 0) & (1\odot 1)+(2\odot 1)\\ (3\odot 2)+(1\odot 0) & (3\odot 1)+(1\odot 1)\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\min\{1,2\}\oplus\min\{2,0\} & \min\{1,1\}\oplus\min\{2,1\}\\ \min\{3,2\}\oplus\min\{1,0\} & \min\{3,1\}\oplus\min\{1,1\}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\oplus 0 & 1\oplus 1\\ 2\oplus 0 & 1\oplus 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\max\{1,0\} & \max\{1,1\}\\ \max\{2,0\} & \max\{1,1\}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

3.2 สมบัติของการคูณด้วยสเกลลาร์ของเมทริกซ์

บทนิยาม 3.2.1 (การคูณด้วยสเกลลาร์ของเมทริกซ์)

สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]$ และ $k\in\mathbb{L}$ จะนิยามว่า

$$kA=k\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{L})$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.2.1**</u> จากตัวอย่าง ที่ 2.4.4

นิยามโดย $a \cdot b = \begin{cases} 0 & ;a=b=0 \\ \gcd(a,b) & ;\text{ อื่นๆ} \end{cases}$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ให้ $k=4$

จะได้ $kA = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gcd\{4,1\} & \gcd\{4,2\} \\ \gcd\{4,3\} & \gcd\{4,1\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 3.2.1 $M_n(\mathbb{L})$ เป็นกึ่งริง ([5])

บทพิสูจน์ 1. $(M_n(\mathbb{L}),+,0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม
- สมบัติเอกลักษณ์การบวกคือ $0 = [0] \in M_n(\mathbb{L})$
- สมบัติสลับที่

2. $(M_n(\mathbb{L}),\bullet,I_n)$ เป็นโมนอยด์

- สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม
- สมบัติเอกลักษณ์การคูณคือ $I_n = \left[\delta_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{L})$ เมื่อ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases}$
- สมบัติสลับที่

3. การคูณ $(\bullet)$ สามารถเหนือการบวก $(+)$ ได้

4. $0\bullet r = 0 = r\bullet 0 \quad \forall r \in M_n(\mathbb{L})$

5. $[0] \neq \left[\delta_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{L})$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $M_n(\mathbb{L})$ เป็นกึ่งริง แต่ไม่เป็นกึ่งริงสลับที่ ยกเว้นกรณี $n=1$

ทฤษฎีบท 3.2.2 ([1]) ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L}$ ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่างๆในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมายและ ให้ $k,p \in \mathbb{L}$ จะได้ว่า

$$1.k(A+B)=kA+kB$$
$$2.(k+p)A=kA+pA$$
$$3.k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

3.3 สมบัติการสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์

บทนิยาม 3.3.1 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ การสลับเปลี่ยนของ A นิยามโดย

$$A^T=[a_{ji}]\in M_{n,m}(\mathbb{L})$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.3.1**</u> จากตัวอย่าง 2.4.3 พิจารณา $\mathbb{L}=\mathbb{C}$

ให้ $A=\begin{bmatrix}1+i & 3+2i\\ 4i & 2\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A^T=\begin{bmatrix}1+i & 3+2i\\ 4i & 2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1+i & 4i\\ 3+2i & 2\end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือ $\mathbb{L}$ ที่มีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการในแต่ละข้อมีความหมายจะได้ว่าและ ให้ $k\in\mathbb{L}$

$$1.(A^T)^T=A$$
$$2.(A+B)^T=A^T+B^T$$
$$3.(kA)^T=kA^T$$
$$4.(AB)^T=B^TA^T$$

5.ถ้า $A=\left[A_{ij}\right]$ แล้ว $A^T=\left[(A_{ji})^T\right]$

3.4 รอยของเมทริกซ์

บทนิยาม 3.4.1 รอย (trace) ของเมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n(\mathbb{L})$ คือผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ $\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

<u>ตัวอย่างที่ 3.4.1</u> จากตัวอย่างที่ 2.4.5

ให้ $A=\begin{bmatrix}\overline{4} & \overline{2}\\ \overline{3} & \overline{1}\end{bmatrix}$ ซึ่ง $\mathbb{L}=\mathbb{Z}_5$

จะได้ว่า $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}\begin{bmatrix}\overline{4} & \overline{2}\\ \overline{3} & \overline{1}\end{bmatrix}=\overline{4}+\overline{1}=0$

ทฤษฎีบท 3.4.1 สำหรับแต่ละ $A,B\in M_n(\mathbb{L})$ และ $k\in\mathbb{L}$ จะได้ว่า

$$1.\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$$
$$2.\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}(A)$$

บทที่ 4

ผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากจำนวนจริง $(\mathbb{R})$ โดยจะขยายแนวคิดจากเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากจำนวนจริง $(\mathbb{R})$ ไปสู่เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ $(\mathbb{L})$

4.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณฮาดามาร์ดเหนือกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $\mathbb{L}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ สำหรับ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ ผลคูณฮาดามาร์ดของ A และ B นิยามดังนี้

$$A\odot B=[a_{ij}b_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{L})$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.1.1</u> พิจารณา $\mathbb{L}=\mathbb{R}$

ให้ $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\2&3&4\\7&1&9\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}3&5&1\\6&2&7\\1&4&3\end{bmatrix}$

จะได้ $A\odot B=\begin{bmatrix}1\cdot 3&2\cdot 5&5\cdot 1\\2\cdot 6&3\cdot 2&4\cdot 7\\7\cdot 1&1\cdot 4&9\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&10&5\\12&6&28\\7&4&27\end{bmatrix}$

<u>ตัวอย่างที่ 4.1.2</u> พิจารณาเมทริกซ์ $\mathbb{L}$ ใน ตัวอย่าง 2.4.1 ให้

$$A=\begin{bmatrix}0.2&0.3\\0.1&0.7\end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix}0.1&0.6\\0.3&0.3\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{L})$$

จะได้ $A\odot B=\begin{bmatrix}(0.2)(0.1)&(0.3)(0.6)\\(0.1)(0.3)&(0.7)(0.3)\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\min(0.2,0.1)&\min(0.3,0.6)\\\min(0.1,0.3)&\min(0.7,0.3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.1&0.3\\0.1&0.3\end{bmatrix}$$

4.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดเหนือกึ่งริงสลับที่

ทฤษฎีบท 4.2.1 ให้ $A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $\mathbf{0} \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และให้ $k \in \mathbb{L}$ จะได้ว่า

1. $A \odot B = B \odot A$
2. $k(A \odot B) = (kA) \odot B = A \odot (kB)$
3. $(A+B) \odot C = (A \odot C) + (B \odot C)$
4. $(A \odot B)^T = A^T \odot B^T$
5. $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$
6. $A \odot J_n = A$
7. $A \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ โดยที่ $\mathbf{0}$ คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ทุกตำแหน่ง

บทพิสูจน์ 1. ให้ $A,B \in M_{m,n}(\mathbb{L})$, $A \odot B = B \odot A$

จะได้ว่า $A \odot B = [a_{ij} \cdot b_{ij}] = [b_{ij} \cdot a_{ij}] = B \odot A$

2. ให้ $A,B \in M_{m,n}(\mathbb{L})$

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$k(A \odot B) = k\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= k\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k(a_{11}b_{11}) & k(a_{12}b_{12}) & \cdots & k(a_{1n}b_{1n}) \\ k(a_{21}b_{21}) & k(a_{22}b_{22}) & \cdots & k(a_{2n}b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(a_{m1}b_{m1}) & k(a_{m2}b_{m2}) & \cdots & k(a_{mn}b_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (ka_{11})b_{11} & (ka_{12})b_{12} & \cdots & (ka_{1n})b_{1n} \\ (ka_{21})b_{21} & (ka_{22})b_{22} & \cdots & (ka_{2n})b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (ka_{m1})b_{m1} & (ka_{m2})b_{m2} & \cdots & (ka_{mn})b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = (kA)\odot B$$

ดังนั้น $k(A\odot B)=(kA)\odot B$

ทำในทำนองเดียวกัน จะได้ $k(A\odot B)=A\odot(kB)$

3. ให้ $A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$(A+B)\odot C=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\right)$$

$$\odot\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})\\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m1}) & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(a_{11}+b_{11})c_{11} & (a_{12}+b_{12})c_{12} & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})c_{1n}\\ (a_{21}+b_{21})c_{21} & (a_{22}+b_{22})c_{22} & \cdots & (a_{2n}+b_{2n})c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{m1}+b_{m1})c_{m1} & (a_{m2}+b_{m1})c_{m2} & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})c_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}c_{11}+b_{11}c_{11} & a_{12}c_{12}+b_{12}c_{12} & \cdots & a_{1n}c_{1n}+b_{1n}c_{1n}\\ a_{21}c_{21}+b_{21}c_{21} & a_{22}c_{22}+b_{22}c_{22} & \cdots & a_{2n}c_{2n}+b_{2n}c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}c_{m1}+b_{m1}c_{m1} & a_{m2}c_{m2}+b_{m1}c_{m2} & \cdots & a_{mn}c_{mn}+b_{mn}c_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}c_{11} & a_{12}c_{12} & \cdots & a_{1n}c_{1n}\\ a_{21}c_{21} & a_{22}c_{22} & \cdots & a_{2n}c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}c_{m1} & a_{m2}c_{m2} & \cdots & a_{mn}c_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}c_{11} & b_{12}c_{12} & \cdots & b_{1n}c_{1n}\\ b_{21}c_{21} & b_{22}c_{22} & \cdots & b_{2n}c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1}c_{m1} & b_{m1}c_{m2} & \cdots & b_{mn}c_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}\right)$$

$$+\left(\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}\right)$$

$$=(A\odot C)+(B\odot C)$$

ดังนั้น $(A+B)\odot C=(A\odot C)+(B\odot C)$

4. ให้ $A,B \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$(A \odot B)^T = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{21}b_{21} & \cdots & a_{m1}b_{m1} \\ a_{12}b_{12} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{m2}b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}b_{1n} & a_{2n}b_{2n} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = A^T \odot B^T$$

ดังนั้น $(A \odot B)^T = A^T \odot B^T$

5. ให้ $A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$(A \odot B) \odot C = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

$$\odot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11})c_{11} & (a_{12}b_{12})c_{12} & \cdots & (a_{1n}b_{1n})c_{1n} \\ (a_{21}b_{21})c_{21} & (a_{22}b_{22})c_{22} & \cdots & (a_{2n}b_{2n})c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{m1})c_{m1} & (a_{m2}b_{m2})c_{m2} & \cdots & (a_{mn}b_{mn})c_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}) & a_{12}(b_{12}c_{12}) & \cdots & a_{1n}(b_{1n}c_{1n}) \\ a_{21}(b_{21}c_{21}) & a_{22}(b_{22}c_{22}) & \cdots & a_{2n}(b_{2n}c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(b_{m1}c_{m1}) & a_{m2}(b_{m2}c_{m2}) & \cdots & a_{mn}(b_{mn}c_{mn}) \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} & b_{12}c_{12} & \cdots & b_{1n}c_{1n} \\ b_{21}c_{21} & b_{22}c_{22} & \cdots & b_{2n}c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}c_{m1} & b_{m2}c_{m2} & \cdots & b_{mn}c_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right.
$$

$$
\left. \odot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \right)
$$

$$
= A \odot (B \odot C)
$$

ดังนั้น $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$

6. ให้ 1 แทนสมาชิกเอกลักษณ์การคูณ ผลคูณฮาดามาร์ดมีเอกลักษณ์การคูณ คือ เมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกเป็น 1 ทุกตำแหน่ง แทนด้วย $ee^T = J_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$ เมื่อ $e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}$

ให้ $A \in M_n(\mathrm{L})$ จะได้ว่า

$$A \odot J_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot 1 & a_{12}\cdot 1 & \cdots & a_{1n}\cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\cdot 1 & a_{n2}\cdot 1 & \cdots & a_{nn}\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot a_{11} & 1\cdot a_{12} & \cdots & 1\cdot a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\cdot a_{n1} & 1\cdot a_{n2} & \cdots & 1\cdot a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

ดังนั้น $A \odot J_n = A = J_n \odot A$

7. ให้ 0 แทนสมาชิกเอกลักษณ์ของการบวก ผลคูณฮาดามาร์ดมีเอกลักษณ์การบวก คือเมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกเป็น 0 ทุกตำแหน่ง แทนด้วย $\mathbf{0}$ ซึ่ง $A \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$A \odot \mathbf{0} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot 0 & a_{12}\cdot 0 & \cdots & a_{1n}\cdot 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\cdot 0 & a_{m2}\cdot 0 & \cdots & a_{mn}\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{0}$$

ดังนั้น $A \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

ทฤษฎีบท 4.2.2 ให้ $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า $\operatorname{tr}(AB)$ ได้มาจากผลบวกสมาชิกทุกตำแหน่งของเมทริกซ์ $A \odot B^T$ นั่นคือ

$$\operatorname{tr}(AB) = e^T (A \odot B^T) e \quad \text{โดยที่ } e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

บทพิสูจน์ ให้ $A, B \in M_n(\mathbb{L})$

$$\text{พิจารณา } AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \ldots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } \operatorname{tr}(AB) = (a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1}) + \ldots + (a_{n1}b_{1n} + \ldots + a_{nn}b_{nn})$$

$$= (a_{11}b_{11} + \ldots + a_{n1}b_{1n}) \; + \ldots + \; (a_{1n}b_{n1} + \ldots + a_{nn}b_{nn})$$

$$= \left[(a_{11}b_{11} + \ldots + a_{n1}b_{1n}) \;\; \cdots \;\; (a_{1n}b_{n1} + \ldots + a_{nn}b_{nn}) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{1n} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \right)_{n \times n} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}' \right)_{n \times n} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= e^T (A \odot B^T) e$$

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ $A, B \in M_n(\mathbb{L})$ และ ให้ $D \in M_n(\mathbb{L})$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม จะได้ว่า

1) $D(A \odot B) = (DA) \odot B = A \odot (DB)$

2) $(A \odot B)D = (AD) \odot B = A \odot (BD)$

3) $D(A \odot B)D = (DAD) \odot B = A \odot (DBD) = (DA) \odot (BD) = (AD) \odot (DB)$

บทพิสูจน์ 1.ให้ $A, B \in M_n(\mathbb{L})$ และ $D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$D(A \odot B) = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11}a_{11}b_{11} & \cdots & d_{11}a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{nn}a_{n1}b_{n1} & \cdots & d_{nn}a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & \cdots & d_{11}a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{nn}a_{n1} & \cdots & d_{nn}a_{nn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= (DA) \odot B = A \odot (DB)$$

ดังนั้น $D(A \odot B) = (DA) \odot B = A \odot (DB)$

2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับ 1.

3. ให้ $A,B\in M_n(\mathbb{L})$ และ $D=\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$D(A\odot B)=\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_{11}a_{11}b_{11}d_{11} & \cdots & d_{11}a_{1n}b_{1n}d_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{nn}a_{n1}b_{n1}d_{11} & \cdots & d_{nn}a_{nn}b_{nn}d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_{11}a_{11}d_{11} & \cdots & d_{11}a_{1n}d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{nn}a_{n1}d_{n1} & \cdots & d_{nn}a_{nn}d_{nn} \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=(DAD)\odot B$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} d_{11}b_{11}d_{11} & \cdots & d_{11}b_{1n}d_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{nn}b_{n1}d_{11} & \cdots & d_{nn}b_{nn}d_{nn} \end{bmatrix}=A\odot(DBD)$$

$$=(DA)\odot(BD)$$

$$=(AD)\odot(DB)$$

ดังนั้น $D(A\odot B)D=(DAD)\odot B=A\odot(DBD)=(DA)\odot(BD)=(AD)\odot(DB)$

4.3 การยกกำลังของผลคูณฮาดามาร์ดเหนือกึ่งริงสลับที่(Hadamard power)

บทนิยาม 4.3.1 ให้ $A\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $p\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$A^{\odot p}=\underbrace{A\odot A\odot\ldots\odot A}_{p \text{ พจน์}}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.3.1</u> พิจารณา $\mathbb{L}=\mathbb{C}$

ให้ $A=\begin{bmatrix} 3i & 2 & 5 & 2i \\ 4 & 5i & 1 & 8 \\ 4 & 9i & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $p=2$

จะได้ $A^2=\begin{bmatrix} 3i & 2 & 5 & 2i \\ 4 & 5i & 1 & 8 \\ 4 & 9i & 0 & 1 \end{bmatrix}^2$

$$=\begin{bmatrix} 3i & 2 & 5 & 2i \\ 4 & 5i & 1 & 8 \\ 4 & 9i & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 3i & 2 & 5 & 2i \\ 4 & 5i & 1 & 8 \\ 4 & 9i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (3i)(3i) & (2)(2) & (5)(5) & (2i)(2i) \\ (4)(4) & (5i)(5i) & (1)(1) & (8)(8) \\ (4)(4) & (9i)(9i) & (0)(0) & (1)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 25 & -4 \\ 16 & -25 & 1 & 64 \\ 16 & -81 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้ $A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

1. $A^{\odot p} \odot A^{\odot q} = A^{\odot (p+q)}$
2. $\left(A^{\odot m}\right)^{\odot n} = A^{\odot mn}$
3. $\left(A \odot B\right)^{\odot m} = A^{\odot m} \odot B^{\odot m}$

บทพิสูจน์ 1. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A^{\odot p} \odot A^{\odot q} &= \underbrace{(A \odot A \odot \cdots \odot A)}_{p \text{ พจน์}} \odot \underbrace{(A \odot A \odot \cdots \odot A)}_{q \text{ พจน์}} \\ &= \underbrace{A \odot A \odot \cdots \odot A}_{p+q \text{ พจน์}} \\ &= A^{\odot (p+q)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $A^{\odot p} \odot A^{\odot q} = A^{\odot (p+q)}$

2. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left(A^{\odot m}\right)^{\odot n} &= \underbrace{A^{\odot m} \odot A^{\odot m} \odot \cdots \odot A^{\odot m}}_{n \text{ พจน์}} \\
&= \underbrace{\underbrace{(A \odot A \odot \cdots \odot A)}_{m \text{ พจน์}} \odot \underbrace{(A \odot A \odot \cdots \odot A)}_{m \text{ พจน์}} \odot \cdots \odot \underbrace{(A \odot A \odot \cdots \odot A)}_{m \text{ พจน์}}}_{n \text{ พจน์}} \\
&= \underbrace{A \odot A \odot \cdots \odot A}_{mn \text{ พจน์}} \\
&= A^{\odot mn}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left(A^{\odot m}\right)^{\odot n} = A^{\odot mn}$

3. สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$

ให้ $P(n)$ แทนประพจน์ $(A \odot B)^{\odot n} = A^{\odot n} \odot B^{\odot n}$

1. ให้ $n=1$ จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง
   $(A \odot B)^{\odot 1} = (A \odot B) = A^{\odot 1} \odot B^{\odot 1}$
2. ให้ $k \in \mathbb{N}$
   สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $(A \odot B)^{\odot k} = A^{\odot k} \odot B^{\odot k}$
   จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ข้อสังเกต 4.3.1

ให้ $A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $\mathbf{0} \in M_{m,n}(\mathbb{L})$

1. ถ้า $A \odot B = \mathbf{0}$ แล้ว $A = \mathbf{0}$ หรือ $B = \mathbf{0}$ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป

เช่น พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_{10}$

ให้ $A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \overline{5} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$ จะได้

$$A \odot B = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \overline{5} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

แต่ $A \neq \mathbf{0}$ และ $B \neq \mathbf{0}$

2. ถ้า $A \odot A = \mathbf{0}$ แล้ว $A = \mathbf{0}$ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป

เช่น พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_4$

ให้ $A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$ จะได้

$$A \odot A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

แต่ $A \neq \mathbf{0}$

3. ถ้า $A \odot B = A \odot C$ แล้ว $B = C$ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป

เช่น พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_9$

ให้ $A = \begin{bmatrix} \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \overline{5} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}$ จะได้

$$A \odot B = \begin{bmatrix} \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{2} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \overline{5} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{8} \end{bmatrix}$$

และ $$A \odot C = \begin{bmatrix} \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{2} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{8} \end{bmatrix}$$

แต่ $B \neq C$

4.4 ผลบวกฮาดามาร์ด(Hadamard sum)

บทนิยาม 4.4.1 ให้ $A \in M_n(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$A \circledast B = (A \odot I_n) + (I_n \odot B) = (A + B) \odot I_n$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.4.1</u> จากตัวอย่างที่ 2.4.2 พิจารณา $\mathbb{L}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$

ให้ $A=\begin{bmatrix}(1,0) & (4,2)\\(2,1) & (1,3)\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}(2,1) & (1,1)\\(1,3) & (0,2)\end{bmatrix}\in M_n(\mathbb{L})$

ภายใต้การดำเนินการตามพิกัด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}A\circledast B &= \left(\begin{bmatrix}(1,0) & (4,2)\\(2,1) & (1,3)\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}(1,1) & (0,0)\\(0,0) & (1,1)\end{bmatrix}\right)\\
&\quad+\left(\begin{bmatrix}(1,1) & (0,0)\\(0,0) & (1,1)\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}(2,1) & (1,1)\\(1,3) & (0,2)\end{bmatrix}\right)\\
&=\begin{bmatrix}(1,0) & (0,0)\\(0,0) & (1,3)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(2,1) & (0,0)\\(0,0) & (0,2)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(3,1) & (0,0)\\(0,0) & (1,5)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.4.1 ให้ $A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

1.สมบัติการสลับที่ $A\circledast B=B\circledast A$

2.สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม $(A\circledast B)\circledast C=A\circledast(B\circledast C)$

3.สมบัติการคูณกระจายเหนือการบวก $A\odot(B\circledast C)=(A\odot B)\circledast(A\odot C)$

บทพิสูจน์ 1.ให้ $A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}A\circledast B &= (A\odot I_n)+(I_n\odot B)\\
&=(A+B)\odot I_n\\
&=(B+A)\odot I_n\\
&=(B\odot I_n)+(I_n\odot A)=B\circledast A\end{aligned}$$

2. ให้ $A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(A \circledast B) \circledast C &= [(A \circledast B) \odot I_n] + (I_n \odot C) \\
&= [(A \odot I_n) + (I_n \odot B)] + (I_n \odot C) \\
&= (A \odot I_n) + [(B \odot I_n) + (I_n \odot C)] \\
&= (A \odot I_n) + [(B \circledast C) \odot I_n] \\
&= (A \odot I_n) + [I_n \odot (B \circledast C)] \\
&= A \circledast (B \circledast C)
\end{aligned}
$$

3. ให้ $A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
A \odot (B \circledast C) &= A \odot [(B \odot I_n) + (I_n \odot C)] \\
&= [A \odot (B \odot I_n)] + [A \odot (I_n \odot C)] \\
&= [(A \odot B) \odot I_n] + [(A \odot C) \odot I_n] \\
&= [(A \odot B) \odot I_n] + [I_n \odot (A \odot C)] \\
&= (A \odot B) \circledast (A \odot C)
\end{aligned}
$$

ข้อสังเกต 4.4.1

1.ไม่มีสมบัติเอกลักษณ์

ให้ $\mathbb{L}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $X \in M_n(\mathbb{L})$ จะมี $Y \in M_n(\mathbb{L})$ ที่ทำให้ $X \circledast Y \neq Y$ นั่นคือ ผลบวกฮาดามาร์ดไม่มีเอกลักษณ์

บทพิสูจน์ ให้ $X \in M_n(\mathbb{L})$ จะมี $Y = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
X \circledast Y &= \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_{11}+1 & \cdots & x_{1n}+1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}+1 & \cdots & x_{nn}+1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=\begin{bmatrix} x_{11}+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}+1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = Y$$

ดังนั้น $X \circledast Y \neq Y$

2.ผลบวกฮาดามาร์ดไม่มีสมบัติการตัดออกของการบวก นั่นคือ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป

ถ้า $A \circledast B = A \circledast C$ แล้ว $B = C$

บทพิสูจน์ พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L} = \mathbb{Z}_{10}$ ใน ตัวอย่าง 2.4.1 ให้

$$A=\begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{1} \\ \overline{7} & \overline{8} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{3} & \overline{5} & \overline{6} \\ \overline{5} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{7} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{7} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{7} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{7} \\ \overline{6} & \overline{7} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{7} \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า}$$

$$A \circledast B = \left(\begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{1} \\ \overline{7} & \overline{8} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{3} & \overline{5} & \overline{6} \\ \overline{5} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{7} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{7} \end{bmatrix}\right) \odot \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{7} \end{bmatrix}$$

$$A \circledast C = \left(\begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{1} \\ \overline{7} & \overline{8} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{7} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{7} \\ \overline{6} & \overline{7} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{7} \end{bmatrix}\right) \odot \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{6} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{7} \end{bmatrix}$$

แต่ $B \neq C$

4.5 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณฮาดามาร์ดและผลคูณโครเนกเคอร์

บทนิยาม 4.5.1 ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{L})$ ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A \otimes B = \left[a_{ij} B \right]_{ij} \in M_{mp,nq}(\mathbb{L})$$

นั่นคือแต่ละบล็อกที่ (i, j) ของ $A \otimes B$ คือ $a_{ij}B$ สำหรับ $i = 1,2,...,m$ และ $j = 1,2,...,n$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.5.1**</u> พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L}$ ใน ตัวอย่าง 2.4.4

ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} & 1 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \\ 8 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} & 2 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gcd\{4,2\} & \gcd\{4,1\} & \gcd\{1,2\} & \gcd\{1,1\} \\ \gcd\{4,10\} & \gcd\{4,4\} & \gcd\{1,10\} & \gcd\{1,4\} \\ \gcd\{8,2\} & \gcd\{8,1\} & \gcd\{2,2\} & \gcd\{2,1\} \\ \gcd\{8,10\} & \gcd\{8,4\} & \gcd\{2,10\} & \gcd\{2,4\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 4.5.1 ให้ $A,B \in M_{m,n}$ จะได้ว่า

$$A \odot B = (A \otimes B)_{\alpha,\beta}$$

เมื่อ $\alpha = \{1, m+2, 2m+3, \ldots, m^2\}$ และ $\beta = \{1, n+2, 2n+3, \ldots, n^2\}$

กล่าวคือ ถ้า $m = n$ จะได้ว่า $A \odot B$ คือเมทริกซ์ย่อยสำคัญของ $A \otimes B$

บทพิสูจน์ ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$

จะได้ $A \odot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$

พิจารณา

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{1n}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & a_{22}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{2n}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & a_{m2}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{mn}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{12}b_{1n} & & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\
a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{2n} & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{m1} & a_{11}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{mn} & a_{12}b_{m1} & a_{12}b_{m2} & \cdots & a_{12}b_{mn} & & a_{1n}b_{m1} & a_{1n}b_{m2} & \cdots & a_{1n}b_{mn} \\
a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1n} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{22}b_{1n} & & a_{2n}b_{11} & a_{2n}b_{12} & \cdots & a_{2n}b_{1n} \\
a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & \cdots & a_{21}b_{2n} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} & \cdots & a_{2n}b_{21} & a_{2n}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{21}b_{m1} & a_{21}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{mn} & a_{22}b_{m1} & a_{22}b_{m2} & \cdots & a_{22}b_{mn} & & a_{2n}b_{m1} & a_{2n}b_{m2} & \cdots & a_{2n}b_{mn} \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\
a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1n} & a_{m2}b_{11} & a_{m2}b_{12} & \cdots & a_{m2}b_{1n} & & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1n} \\
a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2n} & a_{m2}b_{21} & a_{m2}b_{22} & \cdots & a_{m2}b_{2n} & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{m1} & a_{m1}b_{m2} & \cdots & a_{m1}b_{mn} & a_{m2}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{m2}b_{mn} & & a_{mn}b_{m1} & a_{mn}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn}
\end{bmatrix}
$$

จะเห็นว่า ตำแหน่งที่ (i,j) ของ $A\odot B$ จะเท่ากับตำแหน่งที่ (α_i,β_j) ของ $A\otimes B$ เมื่อ $\alpha=\{1,m+2,2m+3,\ldots,m^2\}$ นั่นคือ $\alpha_i=\alpha_{i-1}+m+1$ โดยที่ $i=1,2,\ldots,m$ และ $\alpha_1=1$, $\beta=\{1,n+2,2n+3,\ldots,n^2\}$ นั่นคือ $\beta_j=\beta_{j-1}+n+1$ โดยที่ $j=1,2,...,n$ และ $\beta_1=1$

ดังนั้น $A\odot B=(A\otimes B)_{\alpha,\beta}$

__ตัวอย่างที่ 4.5.2__ พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L}$ ใน ตัวอย่าง 2.4.5

ใน Z_4 ให้ $A=\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2} & \bar{3}\\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1}\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}$

เนื่องจาก $m=2$ และ $n=3$ จะได้ $\alpha=\{1,4\}$ และ $\beta=\{1,5,9\}$

พิจารณา $A\otimes B=\begin{bmatrix}\bar{1}\cdot\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} & \bar{2}\cdot\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} & \bar{3}\cdot\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\\ \bar{0}\cdot\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} & \bar{2}\cdot\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix} & \bar{1}\cdot\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{\mathbf{2}} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{\mathbf{1}} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A \odot B = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & 2 \end{bmatrix}$

นั่นคือ

ตำแหน่งที่ $(1,1)$ ของ $A \odot B$ จะเท่ากับ ตำแหน่งที่ $(\alpha_1, \beta_1) = (1,1)$ ของ $A \otimes B$ คือ $\bar{0}$

ตำแหน่งที่ $(1,2)$ ของ $A \odot B$ จะเท่ากับ ตำแหน่งที่ $(\alpha_1, \beta_2) = (1,5)$ ของ $A \otimes B$ คือ $\bar{2}$

ตำแหน่งที่ $(1,3)$ ของ $A \odot B$ จะเท่ากับ ตำแหน่งที่ $(\alpha_1, \beta_3) = (1,9)$ ของ $A \otimes B$ คือ $\bar{1}$

ตำแหน่งที่ $(2,1)$ ของ $A \odot B$ จะเท่ากับ ตำแหน่งที่ $(\alpha_2, \beta_1) = (4,1)$ ของ $A \otimes B$ คือ $\bar{0}$

ตำแหน่งที่ $(2,2)$ ของ $A \odot B$ จะเท่ากับ ตำแหน่งที่ $(\alpha_2, \beta_2) = (4,5)$ ของ $A \otimes B$ คือ $\bar{0}$

ตำแหน่งที่ $(2,3)$ ของ $A \odot B$ จะเท่ากับ ตำแหน่งที่ $(\alpha_2, \beta_3) = (4,9)$ ของ $A \otimes B$ คือ $\bar{2}$

บทที่ 5

ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากจำนวนจริง $(\mathbb{R})$ โดยจะขยายแนวคิดจากเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากจำนวนจริง $(\mathbb{R})$ นี้ ไปสู่เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ $(\mathbb{L})$

5.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $\mathbb{L}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ สำหรับ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $B = \left[B_{kl}\right] \in M_{p,q}(\mathbb{L})$ ซึ่งแต่ละบล็อกย่อย B_{kl} มีขนาด $m \times n$ แล้วผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของ A และ B นิยามโดย

$$A \boxdot B = [A \odot B_{kl}]_{kl} \in M_{p,q}(\mathbb{L}),$$

เมื่อ $A \odot B_{kl}$ คือเมทริกซ์ย่อยที่ kl ของเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$.

<u>ตัวอย่างที่ 5.1.1</u> พิจารณา $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ \hline 7 & 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ -8 & 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$

จะได้ $A \boxdot B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 4 \\ -7 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 15 & -1 & 10 & -5 \\ -4 & 9 & 12 & 12 & 9 & 0 \\ 21 & 1 & 9 & 21 & -4 & 9 \\ 7 & 4 & 5 & -1 & 8 & 15 \\ -16 & 9 & 16 & -4 & 3 & 4 \\ -49 & 4 & 18 & 21 & -1 & 18 \end{bmatrix}
$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.1.2</u> พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L}=\mathbb{Z}_8$

ให้ $A=\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} \overline{4} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{2} \\ \overline{7} & \overline{2} & \overline{1} \end{bmatrix}$

$$
A\boxdot B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} \overline{4} & \overline{3} & \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} \overline{4} & \overline{5} & \overline{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} \overline{7} & \overline{2} & \overline{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} \overline{4} & \overline{1} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{7} & \overline{2} \\ \overline{7} & \overline{6} & \overline{5} \end{bmatrix}
$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.1.3</u> พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L}$ ใน ตัวอย่าง 2.4.1

ให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$$
A\boxdot B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$=\begin{bmatrix} \min\{2,1\} & \min\{1,2\} & \min\{3,4\} & \min\{3,6\} \\ \min\{5,3\} & \min\{6,5\} & \min\{7,7\} & \min\{9,3\} \\ \min\{2,3\} & \min\{5,8\} & \min\{3,8\} & \min\{3,1\} \\ \min\{5,4\} & \min\{6,3\} & \min\{7,1\} & \min\{9,1\} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกเหนือกึ่งริงสลับที่

ทฤษฎีบท 5.2.1 ให้ A,B,C และ $\mathbf{0}$ เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ซึ่งมีขนาดและการแบ่งบล็อกที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมายและให้ $k \in \mathbb{L}$ จะได้ว่า

1. $\alpha(A \boxdot B) = (\alpha A) \boxdot B = A \boxdot (\alpha B)$
2. $(A+B) \boxdot C = (A \boxdot C) + (B \boxdot C)$
3. $A \boxdot (B+C) = (A \boxdot B) + (A \boxdot C)$
4. $(A \boxdot B)^T = A^T \boxdot B^T$
5. $(A \boxdot B) \boxdot C = A \boxdot (B \boxdot C)$
6. $A \boxdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \boxdot A$ โดยที่ $\mathbf{0}$ คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ทุกตำแหน่ง

บทพิสูจน์ 1. ให้ $A=[a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $B=[B_{kl}] \in M_{p,q}(\mathbb{L})$ $,k \in \mathbb{L}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix}_{p,q}$$ และ

$$B_{kl}=\begin{bmatrix} b_{p_1q_1} & b_{p_1q_2} & \cdots & b_{p_1q_l} \\ b_{p_2q_1} & b_{p_2q_2} & \cdots & b_{p_2q_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p_kq_1} & b_{p_kq_2} & \cdots & b_{p_kq_l} \end{bmatrix}_{p_k,q_l}$$

จะได้ $\alpha(A \boxdot B) = \alpha \begin{bmatrix} A \odot B_{11} & A \odot B_{12} & \dots & A \odot B_{1l} \\ A \odot B_{21} & A \odot B_{22} & \dots & A \odot B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A \odot B_{k1} & A \odot B_{k2} & \dots & A \odot B_{kl} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(A \odot B_{11}) & \alpha(A \odot B_{12}) & \dots & \alpha(A \odot B_{1l}) \\ \alpha(A \odot B_{21}) & \alpha(A \odot B_{22}) & \dots & \alpha(A \odot B_{2l}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(A \odot B_{k1}) & \alpha(A \odot B_{k2}) & \dots & \alpha(A \odot B_{kl}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha A) \odot B_{11} & (\alpha A) \odot B_{12} & \dots & (\alpha A) \odot B_{1l} \\ (\alpha A) \odot B_{21} & (\alpha A) \odot B_{22} & \dots & (\alpha A) \odot B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha A) \odot B_{k1} & (\alpha A) \odot B_{k2} & \dots & (\alpha A) \odot B_{kl} \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha A) \boxdot B$$

$$= \begin{bmatrix} A \odot (\alpha B_{11}) & A \odot (\alpha B_{12}) & \dots & A \odot (\alpha B_{1l}) \\ A \odot (\alpha B_{21}) & A \odot (\alpha B_{22}) & \dots & A \odot (\alpha B_{2l}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A \odot (\alpha B_{k1}) & A \odot (\alpha B_{k2}) & \dots & A \odot (\alpha B_{kl}) \end{bmatrix}$$

$$= A \boxdot (\alpha B)$$

ดังนั้น $\alpha(A \boxdot B) = (\alpha A) \boxdot B = A \boxdot (\alpha B)$

บทพิสูจน์ 2. ให้ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{L})$, $B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $C = [\mathrm{C}_{kl}] \in M_{p,q}(\mathbb{L})$ โดยแต่ละบล็อกย่อย C_{kl} มีขนาด $m \times n$

จะได้ $(A+B) \boxdot C = \begin{bmatrix} (A+B) \odot C_{11} & (A+B) \odot C_{12} & \dots & (A+B) \odot C_{1l} \\ (A+B) \odot C_{21} & (A+B) \odot C_{22} & \dots & (A+B) \odot C_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A+B) \odot C_{k1} & (A+B) \odot C_{k2} & \dots & (A+B) \odot C_{kl} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(A\odot C_{11})+(B\odot C_{11}) & (A\odot C_{12})+(B\odot C_{12}) & \dots & (A\odot C_{1l})+(B\odot C_{1l})\\(A\odot C_{21})+(B\odot C_{21}) & (A\odot C_{22})+(B\odot C_{22}) & \dots & (A\odot C_{2l})+(B\odot C_{2l})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(A\odot C_{k1})+(B\odot C_{kl}) & (A\odot C_{k2})+(B\odot C_{k2}) & \dots & (A\odot C_{kl})+(B\odot C_{kl})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A\odot C_{11} & A\odot C_{12} & \dots & A\odot C_{1l}\\A\odot C_{21} & A\odot C_{22} & \dots & A\odot C_{2l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\A\odot C_{k1} & A\odot C_{k2} & \dots & A\odot C_{kl}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\odot C_{11} & B\odot C_{12} & \dots & B\odot C_{1l}\\B\odot C_{21} & B\odot C_{22} & \dots & B\odot C_{2l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\B\odot C_{kl} & B\odot C_{k2} & \dots & B\odot C_{kl}\end{bmatrix}$$

$=(A\boxdot C)+(B\boxdot C)$

ดังนั้น $(A+B)\boxdot C=(A\boxdot C)+(B\boxdot C)$

บทพิสูจน์ 3. ทำในทำนองเดียวกันกับข้อที่ 2

บทพิสูจน์ 4. ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $B=[B_{kl}]\in M_{p,q}(\mathbb{L})$ โดยแต่ละบล็อกย่อย B_{kl} มีขนาด $m\times n$

จะได้ $$(A\boxdot B)^T=\left(A\odot\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1l}\\B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kl}\end{bmatrix}\right)^T$$

$$=\begin{bmatrix}A\odot B_{11} & A\odot B_{12} & \dots & A\odot B_{1l}\\A\odot B_{21} & A\odot B_{22} & \dots & A\odot B_{2l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\A\odot B_{k1} & A\odot B_{k2} & \dots & A\odot B_{kl}\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}(A\odot B_{11})^T & (A\odot B_{21})^T & \dots & (A\odot B_{k1})^T\\(A\odot B_{12})^T & (A\odot B_{22})^T & \dots & (A\odot B_{k2})^T\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(A\odot B_{1l})^T & (A\odot B_{2l})^T & \dots & (A\odot B_{kl})^T\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^T \odot B_{11}{}^T & A^T \odot B_{21}{}^T & \cdots & A^T \odot B_{k1}{}^T \\ A^T \odot B_{12}{}^T & A^T \odot B_{22}{}^T & \cdots & A^T \odot B_{k2}{}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^T \odot B_{1l}{}^T & A^T \odot B_{2l}{}^T & \cdots & A^T \odot B_{kl}{}^T \end{bmatrix}$$

$$= A^T \odot \begin{bmatrix} B_{11}{}^T & B_{21}{}^T & \cdots & B_{k1}{}^T \\ B_{12}{}^T & B_{22}{}^T & \cdots & B_{k2}{}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1l}{}^T & B_{2l}{}^T & \cdots & B_{kl}{}^T \end{bmatrix}$$

$$= A^T \boxdot B^T$$

ดังนั้น $(A \boxdot B)^T = A^T \boxdot B^T$

บทพิสูจน์ 5. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$, $B = [B_{kl}] \in M_{p,g}(\mathbb{L})$, $C = [\mathrm{C}_{uv}] \in M_{r,s}(\mathbb{L})$ โดยที่แต่ละบล็อกย่อย B_{kl} และ C_{uv} มีขนาด $m \times n$ และ $p \times q$ ตามลำดับ และให้ $C_{ij}^{u,v}$ คือสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของเมทริกซ์แบบบล็อก C_{uv}

โดย $m|p, m|r, p|r$ และ $n|g, n|s, g|s$

จะได้ $$(A \boxdot B) \boxdot C = \begin{bmatrix} A \odot B_{11} & A \odot B_{12} & \cdots & A \odot B_{1l} \\ A \odot B_{21} & A \odot B_{22} & \cdots & A \odot B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A \odot B_{k1} & A \odot B_{k2} & \cdots & A \odot B_{kl} \end{bmatrix} \boxdot C$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (A \odot B_{11}) \odot C_{11} & (A \odot B_{12}) \odot C_{11} & \cdots & (A \odot B_{1l}) \odot C_{11} \\ (A \odot B_{21}) \odot C_{11} & (A \odot B_{22}) \odot C_{11} & \cdots & (A \odot B_{2l}) \odot C_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A \odot B_{k1}) \odot C_{11} & (A \odot B_{k2}) \odot C_{11} & \vdots & (A \odot B_{kl}) \odot C_{11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} (A \odot B_{11}) \odot C_{1v} & (A \odot B_{12}) \odot C_{1v} & \cdots & (A \odot B_{1l}) \odot C_{1v} \\ (A \odot B_{21}) \odot C_{1v} & (A \odot B_{22}) \odot C_{1v} & \cdots & (A \odot B_{2l}) \odot C_{1v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A \odot B_{k1}) \odot C_{1v} & (A \odot B_{k2}) \odot C_{1v} & \cdots & (A \odot B_{kl}) \odot C_{1v} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} (A \odot B_{11}) \odot C_{u1} & (A \odot B_{12}) \odot C_{u1} & \cdots & (A \odot B_{1l}) \odot C_{u1} \\ (A \odot B_{21}) \odot C_{u1} & (A \odot B_{22}) \odot C_{u1} & \cdots & (A \odot B_{2l}) \odot C_{u1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A \odot B_{k1}) \odot C_{u1} & (A \odot B_{k2}) \odot C_{u1} & \vdots & (A \odot B_{kl}) \odot C_{u1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} (A \odot B_{11}) \odot C_{uv} & (A \odot B_{12}) \odot C_{uv} & \cdots & (A \odot B_{1l}) \odot C_{uv} \\ (A \odot B_{21}) \odot C_{uv} & (A \odot B_{22}) \odot C_{uv} & \cdots & (A \odot B_{2l}) \odot C_{uv} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A \odot B_{k1}) \odot C_{uv} & (A \odot B_{k2}) \odot C_{uv} & \cdots & (A \odot B_{kl}) \odot C_{uv} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A\odot(B_{11}\odot C_{11}) & A\odot(B_{12}\odot C_{11}) & \cdots & A\odot(B_{1l}\odot C_{11}) \\ A\odot(B_{21}\odot C_{11}) & A\odot(B_{22}\odot C_{11}) & \cdots & A\odot(B_{2l}\odot C_{11}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\odot(B_{k1}\odot C_{11}) & A\odot(B_{k2}\odot C_{11}) & \vdots & A\odot(B_{kl}\odot C_{11}) \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} A\odot(B_{11}\odot C_{1v}) & A\odot(B_{12}\odot C_{1v}) & \cdots & A\odot(B_{1l}\odot C_{1v}) \\ A\odot(B_{21}\odot C_{1v}) & A\odot(B_{22}\odot C_{1v}) & \cdots & A\odot(B_{2l}\odot C_{1v}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\odot(B_{k1}\odot C_{1v}) & A\odot(B_{k2}\odot C_{1v}) & \cdots & A\odot(B_{kl}\odot C_{1v}) \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} A\odot(B_{11}\odot C_{u1}) & A\odot(B_{12}\odot C_{u1}) & \cdots & A\odot(B_{1l}\odot C_{u1}) \\ A\odot(B_{21}\odot C_{u1}) & A\odot(B_{22}\odot C_{u1}) & \cdots & A\odot(B_{2l}\odot C_{u1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\odot(B_{k1}\odot C_{u1}) & A\odot(B_{k2}\odot C_{u1}) & \vdots & A\odot(B_{kl}\odot C_{u1}) \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} A\odot(B_{11}\odot C_{uv}) & A\odot(B_{12}\odot C_{uv}) & \cdots & A\odot(B_{1l}\odot C_{uv}) \\ A\odot(B_{21}\odot C_{uv}) & A\odot(B_{22}\odot C_{uv}) & \cdots & A\odot(B_{2l}\odot C_{uv}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\odot(B_{k1}\odot C_{uv}) & A\odot(B_{k2}\odot C_{uv}) & \cdots & A\odot(B_{kl}\odot C_{uv}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= A\odot\left(\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(11)} & C_{12}^{(11)} & \cdots & C_{1v}^{(11)} \\ C_{21}^{(11)} & C_{22}^{(11)} & \cdots & C_{2v}^{(11)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(11)} & C_{u2}^{(11)} & \cdots & C_{uv}^{(11)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11}^{(12)} & C_{12}^{(12)} & \cdots & C_{1v}^{(12)} \\ C_{21}^{(12)} & C_{22}^{(12)} & \cdots & C_{2v}^{(12)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(12)} & C_{u2}^{(12)} & \cdots & C_{uv}^{(12)} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} C_{11}^{(1v)} & C_{12}^{(1v)} & \cdots & C_{1v}^{(1v)} \\ C_{21}^{(1v)} & C_{22}^{(1v)} & \cdots & C_{2v}^{(1v)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(1v)} & C_{u2}^{(1v)} & \cdots & C_{uv}^{(1v)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_{11}^{(21)} & C_{12}^{(21)} & \cdots & C_{1v}^{(21)} \\ C_{21}^{(21)} & C_{22}^{(21)} & \cdots & C_{2v}^{(21)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(21)} & C_{u2}^{(21)} & \cdots & C_{uv}^{(21)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11}^{(22)} & C_{12}^{(22)} & \cdots & C_{1v}^{(22)} \\ C_{21}^{(22)} & C_{22}^{(22)} & \cdots & C_{2v}^{(22)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(22)} & C_{u2}^{(22)} & \cdots & C_{uv}^{(22)} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} C_{11}^{(2v)} & C_{12}^{(2v)} & \cdots & C_{1v}^{(2v)} \\ C_{21}^{(2v)} & C_{22}^{(2v)} & \cdots & C_{2v}^{(2v)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(2v)} & C_{u2}^{(2v)} & \cdots & C_{uv}^{(2v)} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} C_{11}^{(u1)} & C_{12}^{(u1)} & \cdots & C_{1v}^{(u1)} \\ C_{21}^{(21)} & C_{22}^{(u1)} & \cdots & C_{2v}^{(u1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(uv)} & C_{u2}^{(u1)} & \cdots & C_{uv}^{(u1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11}^{(u1)} & C_{12}^{(u1)} & \cdots & C_{1v}^{(u1)} \\ C_{21}^{(u1)} & C_{22}^{(u1)} & \cdots & C_{2v}^{(u1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(u1)} & C_{u2}^{(u1)} & \cdots & C_{uv}^{(u1)} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} C_{11}^{(uv)} & C_{12}^{(uv)} & \cdots & C_{1v}^{(uv)} \\ C_{21}^{(uv)} & C_{22}^{(uv)} & \cdots & C_{2v}^{(uv)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{u1}^{(uv)} & C_{u2}^{(uv)} & \cdots & C_{uv}^{(uv)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right)$$

$$= A\odot\left[B\odot C_{uv}\right]_{uv}$$

$$= A\boxdot(B\boxdot C)$$

ดังนั้น $(A\boxdot B)\boxdot C = A\boxdot(B\boxdot C)$

บทพิสูจน์ 6. ให้ $A\in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $\mathbf{0}=[\mathbf{0}_{kl}]\in M_{p,q}(\mathbb{L})$ โดยที่บล็อกย่อยที่ kl ของ $\mathbf{0}$ มีขนาด $m\times n$ จะได้ว่า

$$(A\boxdot\mathbf{0}) = \left(A\odot\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \cdots & \mathbf{0}_{1l} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \cdots & \mathbf{0}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k1} & \mathbf{0}_{k2} & \cdots & \mathbf{0}_{kl} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} A\odot\mathbf{0}_{11} & A\odot\mathbf{0}_{12} & \cdots & A\odot\mathbf{0}_{1l} \\ A\odot\mathbf{0}_{21} & A\odot\mathbf{0}_{22} & \cdots & A\odot\mathbf{0}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\odot\mathbf{0}_{k1} & A\odot\mathbf{0}_{k2} & \cdots & A\odot\mathbf{0}_{kl} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \cdots & \mathbf{0}_{1l} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \cdots & \mathbf{0}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k1} & \mathbf{0}_{k2} & \cdots & \mathbf{0}_{kl} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ดังนั้น $(A \boxdot \mathbf{0}) = \mathbf{0}$

ให้ $\mathbf{0} \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $A = [A_{kl}] \in M_{p,q}(\mathbb{L})$ โดยที่บล็อกย่อยที่ kl ของ A มีขนาด $m \times n$ จะได้ว่า

$$(\mathbf{0} \boxdot A) = \left(\mathbf{0} \odot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \odot A_{11} & 0 \odot A_{12} & \cdots & 0 \odot A_{1l} \\ 0 \odot A_{21} & 0 \odot A_{22} & \cdots & 0 \odot A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \odot A_{k1} & 0 \odot A_{k2} & \cdots & 0 \odot A_{kl} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ดังนั้น $A \boxdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \boxdot A$

5.3 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกและผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก

บทนิยาม 5.3.1 ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ให้ $\mathbb{L}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L})$ และ $B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(\mathbb{L})$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อก แล้วผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์ A และ B นิยามโดย

$$A \boxtimes B = [A \otimes B_{kl}]_{kl} \in M_{mp,nq}(\mathbb{L})$$

<u>**ตัวอย่างที่ 5.3.1**</u> พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L}$ ใน ตัวอย่าง 2.4.4

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \left[\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ \hline 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$$

จะได้ $A \boxtimes B = \begin{bmatrix} A \otimes B_{11} \\ A \otimes B_{21} \end{bmatrix}$

$$= \left[\begin{array}{cc} 4B_{11} & 1B_{11} \\ 8B_{11} & 2B_{11} \\ \hline 4B_{21} & 1B_{21} \\ 8B_{21} & 2B_{21} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} 4\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ 8\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \hline 4\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ 8\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} \gcd(4,5) & \gcd(4,1) & \gcd(1,5) & \gcd(1,1) \\ \gcd(4,2) & \gcd(4,3) & \gcd(1,2) & \gcd(1,3) \\ \gcd(8,5) & \gcd(8,1) & \gcd(2,5) & \gcd(2,1) \\ \gcd(8,2) & \gcd(8,3) & \gcd(2,3) & \gcd(2,2) \\ \hline \gcd(4,6) & \gcd(4,4) & \gcd(1,6) & \gcd(1,4) \\ \gcd(4,1) & \gcd(4,2) & \gcd(1,1) & \gcd(1,2) \\ \gcd(8,6) & \gcd(8,4) & \gcd(2,6) & \gcd(2,4) \\ \gcd(8,1) & \gcd(8,2) & \gcd(2,1) & \gcd(2,2) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ทฤษฎีบท 5.3.1 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B = \left[B_{kl}\right] \in M_{p,q}$ ถูกแบ่งเป็นบล็อกย่อย โดยบล็อกย่อยที่ kl ของ B มีขนาด $m \times n$ จะได้ว่า สมาชิกตำแหน่ง (i,j) ในบล็อกย่อยที่ kl ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ (α_i, β_j) ในบล็อกย่อยที่ kl ของ $A \boxtimes B$ เมื่อ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_i = \alpha_{i-1} + m + 1$ โดยที่ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $\beta_1 = 1$, $\beta_j = \beta_{j-1} + n + 1$ โดยที่ $j = 1,2,\ldots,n$

บทพิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{L}), B \in M_{p,q}(\mathbb{L})$ และให้ B_{kl} แทนบล็อกย่อยที่ kl ของ B มีขนาด $m \times n$ สำหรับแต่ละ $k = 1,2,\ldots,s$ และ $l = 1,2,\ldots,t$

พิจารณา
$$A \boxdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \boxdot \left[\begin{array}{cccc:c:cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & \cdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} & & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \\ \hdashline & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ \hdashline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{11} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{1t} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{s1} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{st} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}_{11} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}_{1t} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}_{s1} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}_{st} \end{array}\right]$$

และ
$$A\boxtimes B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\boxtimes\left[\begin{array}{cccc:c:cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & \cdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} & & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\\ \hdashline & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ \hdashline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c:c:c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}_{11} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}_{1t}\\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}_{s1} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}_{st}\end{array}\right]$$

เมื่อพิจารณาทีละบล็อก จะได้ว่า แต่ละบล็อกย่อย (k,l) ของ $A\boxtimes B$ โดยที่ $k=1,2,...,s$ และ $l=1,2,...,t$ มีผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}b_{11}} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{11} & \boldsymbol{a_{12}b_{12}} & \cdots & a_{12}b_{1n} & & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}b_{1n}}\\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{2n} & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{11}b_{m1} & a_{11}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{mn} & a_{12}b_{m1} & a_{12}b_{m2} & \cdots & a_{12}b_{mn} & & a_{1n}b_{m1} & a_{1n}b_{m2} & \cdots & a_{1n}b_{mn}\\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1n} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{22}b_{1n} & & a_{2n}b_{11} & a_{2n}b_{12} & \cdots & a_{2n}b_{1n}\\ \boldsymbol{a_{21}b_{21}} & a_{21}b_{22} & \cdots & a_{21}b_{2n} & a_{22}b_{21} & \boldsymbol{a_{22}b_{22}} & \cdots & a_{22}b_{2n} & \cdots & a_{2n}b_{21} & a_{2n}b_{22} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}b_{2n}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{21}b_{m1} & a_{21}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{mn} & a_{22}b_{m1} & a_{22}b_{m2} & \cdots & a_{22}b_{mn} & & a_{2n}b_{m1} & a_{2n}b_{m2} & \cdots & a_{2n}b_{mn}\\ & \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1n} & a_{m2}b_{11} & a_{m2}b_{12} & \cdots & a_{m2}b_{1n} & & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1n}\\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2n} & a_{m2}b_{21} & a_{m2}b_{22} & \cdots & a_{m2}b_{2n} & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{a_{m1}b_{m1}} & a_{m1}b_{m2} & \cdots & a_{m1}b_{mn} & a_{m2}b_{m1} & \boldsymbol{a_{m2}b_{m2}} & \cdots & a_{m2}b_{mn} & & a_{mn}b_{m1} & a_{mn}b_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}b_{mn}}\end{bmatrix}_{kl}$$

และแต่ละบล็อกย่อย (k,l) ของ $A\boxdot B$ มีผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}_{kl}$$

ดังนั้น จาก **ทฤษฎีบท 5.3.1** ทำให้ได้ว่า สมาชิกตำแหน่ง (i,j) ในบล็อกย่อยที่ kl ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ (α_i, β_j) ในบล็อกย่อยที่ kl ของ $A \boxtimes B$ เมื่อ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_i = \alpha_{i-1} + m + 1$ โดยที่ $i = 1,2,...,m$ และ $\beta_1 = 1$, $\beta_j = \beta_{j-1} + n + 1$ โดยที่ $j = 1,2,...,n$

<u>**ตัวอย่างที่ 5.3.2**</u> พิจารณาเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่ $\mathbb{L}$ ใน ตัวอย่าง 2.4.5

$$\text{ใน } \mathbb{Z}_4 \text{ ให้ } A = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \text{ และ } B = \left[\begin{array}{c:c:c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right]$$

พิจารณา $A \boxtimes B = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \boxtimes \left[\begin{array}{c:c:c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} \bar{2}\begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} & \bar{2}\begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{3} \end{bmatrix} & \bar{2}\begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \\ \bar{3}\begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} & \bar{3}\begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{3} \end{bmatrix} & \bar{3}\begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{\bar{2}} & \mathbf{\bar{0}} & \mathbf{\bar{0}} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} \\ \mathbf{\bar{0}} & \mathbf{\bar{1}} & \mathbf{\bar{3}} \end{array}\right]$$

เมื่อพิจารณาทีละบล็อกย่อย โดย **ทฤษฎีบท 5.3.1** จะได้ว่า $\alpha_i = \{1,4\}$ และ $\beta_j = \{1\}$ จะได้

สมาชิกตำแหน่งที่ $(1,1)$ ในบล็อกย่อยที่ 11 ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ $(\alpha_1, \beta_1) = (1,1)$ ในบล็อกย่อยที่ 11 ของ $A \boxtimes B$ คือ $\bar{2}$

สมาชิกตำแหน่งที่ (2,1) ในบล็อกย่อยที่ 11 ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ $(\alpha_2, \beta_1) = (4,1)$ ในบล็อกย่อยที่ 11 ของ $A \boxtimes B$ คือ $\overline{0}$

สมาชิกตำแหน่งที่ (1,1) ในบล็อกย่อยที่ 12 ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ $(\alpha_1, \beta_1) = (1,1)$ ในบล็อกย่อยที่ 12 ของ $A \boxtimes B$ คือ $\overline{0}$

สมาชิกตำแหน่งที่ (2,1) ในบล็อกย่อยที่ 12 ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ $(\alpha_2, \beta_1) = (4,1)$ ในบล็อกย่อยที่ 12 ของ $A \boxtimes B$ คือ $\overline{1}$

สมาชิกตำแหน่งที่ (1,1) ในบล็อกย่อยที่ 13 ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ $(\alpha_1, \beta_1) = (1,1)$ ในบล็อกย่อยที่ 13 ของ $A \boxtimes B$ คือ $\overline{0}$

สมาชิกตำแหน่งที่ (2,1) ในบล็อกย่อยที่ 13 ของ $A \boxdot B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ $(\alpha_2, \beta_1) = (4,1)$ ในบล็อกย่อยที่ 13 ของ $A \boxtimes B$ คือ $\overline{3}$

ดังนั้น $A \boxdot B = \left[\begin{array}{c:c:c} \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{3} \end{array}\right]$

บทที่6

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้เราจะสรุปผลและให้ข้อเสนอแนะสำหรับปัญหาพิเศษนี้ ที่เราได้ขยายความคิดของผลคูณฮาดามาร์ดไปยังผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ และศึกษาคุณสมบัติของการดำเนินการเชิงพีชคณิต เช่น สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลลาร์ การคูณปกติ การสลับเปลี่ยน และเมทริกซ์แบบบล็อก

6.1 สรุปผล

1. ผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ มีสมบัติเชิงพีชคณิตดังนี้

   1. $A \odot B = B \odot A$
   2. $k(A \odot B) = (kA) \odot B = A \odot (kB)$
   3. $(A+B) \odot C = (A \odot C) + (B \odot C)$
   4. $(A \odot B)^T = A^T \odot B^T$
   5. $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$
   6. $A \odot J_n = A$
   7. $A \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ โดยที่ $\mathbf{0}$ คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ทุกตำแหน่ง

2. ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ มีสมบัติเชิงพีชคณิตดังนั้น

   1. $\alpha(A \boxdot B) = (\alpha A) \boxdot B = A \boxdot (\alpha B)$
   2. $(A+B) \boxdot C = (A \boxdot C) + (B \boxdot C)$
   3. $A \boxdot (B+C) = (A \boxdot B) + (A \boxdot C)$
   4. $(A \boxdot B)^T = A^T \boxdot B^T$
   5. $(A \boxdot B) \boxdot C = A \boxdot (B \boxdot C)$
   6. $A \boxdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \boxdot A$ โดยที่ $\mathbf{0}$ คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ทุกตำแหน่ง

3. ผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่เป็นเมทริกซ์ย่อยสำคัญของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

4. ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่เป็นเมทริกซ์ย่อยสำคัญของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

5. มีการยกกำลังของผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

6. ผลบวกฮาดามาร์ดของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ไม่มีเอกลักษณ์และไม่มีสมบัติการตัดออก

6.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาคุณสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดและผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ เราจะเห็นว่ามีสมบัติบางประการที่แตกต่างจากการคูณปกติของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากฟิลด์ใดๆ เนื่องจากผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากกึ่งริงสลับที่ไม่สามารถทำการดำเนินการระหว่างสมาชิกแล้วเป็นไปตามสมบัติของการคูณปกติของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากฟิลด์ใดๆ ได้ทั้งหมด จึงเป็นคำถามต่อไปว่า ถ้าหากขยายแนวคิดไปยังโครงสร้างเชิงพีชคณิตอื่นๆนอกเหนือจากนี้ คุณสมบัติบางประการจะยังเป็นจริงอยู่หรือไม่

เอกสารอ้างอิง

[1]Adem Kilicman Zeyad Al Zhour. (2007). Some new connections between matrix products for partitioned and non-partitioned matrices. *An International Journal computers&mathematics with applications*, 772.

[2]George P.H Styan. (1973). Hadamard Product. *Linear algebra and its application*, 217-222.

[3]George P.H Styan. (1973). Hadamard Products and Multivariate Statistical Analysis. *Linear algebra and its applications* , 217-222.

[4]Ghosh S. (1996). Matrices over semiring. 221-230.

[5]Rawiwan Stangam and Pattrawut Chansangiam. (2016). Kronecker Product of Matrices over a Commutative Semiring. *Thai J. Math*, 25-26.

[6]Reutenauer C.Straubing H. (1984). Inversion of matrices over a commutative semiring . *Journal of Algebra*, 350-360.

[7]Tan YJ. (2007). On invertible matrices over antirings. *Linear Algebra and its Applications*, 428-444.

[8]Winta Morab,Yupaporn Kemprasita Surachai Sombatboriboona. (2011). Some results concerning invertible matrices over semirings. 130-135.

[9]วิชัย ชำนิ. (2547). *พีชคณิตนามธรรม.* กรุงเทพฯ: ภารกิจเอกสารและตำรา มหาวิทยาลัยทักษิณ.