สมการไดโอแฟนไทน์บางสมการที่มีผลเฉลยในรูปแบบของลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป

Some Diophantine Equations with solution in terms of Generalized Fibonacci Sequence

จิรัชญา นาคพิทักษ์
ฐิติพัฒน์ กิจเจริญ
ฐนรินทร์ วัฒนสุขเอกพงศ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

สมการไดโอแฟนไทน์บางสมการที่มีผลเฉลยในรูปแบบของลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป

Some Diophantine Equations with solution in terms of Generalized Fibonacci Sequence

จิรัชญา นาคพิทักษ์
ฐิติพัฒน์ กิจเจริญ
ฐนรินทร์ วัฒนสุขเอกพงศ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

Some Diophantine Equations with solution in terms of Generalized Fibonacci Sequence

Jiratchaya Narkpitark

Titipat Kitcharoen

Thanarin Wattanasukaekkaphong

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมการไดโอแฟนไทน์บางสมการที่มีผลเฉลยในรูปแบบของลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป Some Diophantine Equations with solution in terms of Generalized Fibonacci Sequence.
ชื่อนักศึกษา	1.นางสาวจิรัชญา นาคพิทักษ์ 55050030 2.นายฐิติพัฒน์ กิจเจริญ 55050044 3.นางสาวฐนรินทร์ วัฒนสุขเอกพงศ์ 55050179
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก ประธานกรรมการ	เทิดขวัญ ช.
ดร.พุทธพร วานิชกร กรรมการ	พุทธพร วานิชกร
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ อาจารย์ที่ปรึกษา	ศุกระวรรณ มะเวชะ

หัวข้อปัญหาพิเศษ สมการไดโอแฟนไทน์บางสมการที่มีผลเฉลยในรูปแบบของลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป Some Diophantine Equations with solution in terms of Generalized Fibonacci Sequence.

ชื่อนักศึกษา 1.นางสาวจิรัชญา นาคพิทักษ์ 55050030

2.นายฐิติพัฒน์ กิจเจริญ 55050044

3.นางสาวฐนรินทร์ วัฒนสุขเอกพงศ์ 55050179

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2558

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

บทคัดย่อ

งานวิจัยของ Andreescu และ Andrica [2] พิจารณาผลเฉลยของสมการกำลังสอง

$$x^2 + axy + ay^2 = \pm 1$$

เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ในรูปแบบของลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส

ในงานวิจัยนี้พิจารณาผลเฉลยของสมการ $x^2 + axy + ay^2 = \pm 1$ ในรูปแบบของลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป (GFS) นิยามโดย $G_1 = b$, $G_2 = c$ และ $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$; $n \geq 3$ โดยที่ b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ไม่เป็นศูนย์

นอกจากนี้พิจารณาสมการ

$$x^2 + axy + ay^2 = \pm N$$

เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวกและมากกว่าหนึ่ง สำหรับผลเฉลยจำนวนเต็มบวก

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ ลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคัส ลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

Special Problem Title	Some Diophantine Equations with solution in terms of Generalized Fibonacci Sequence.
Students	Ms. Jiratchaya Narkpitark 55050030
	Mr. Titipat Kitcharoen 55050044
	Ms. Thanarin Wattanasukaekkaphong 55050179
Degree	Bachelor of Science
Department	Applied Mathematics
Academic Year	2015
Advisor	Dr.Sukrawan Mavecha

ABSTRACT

In the work of Andreescu and Andrica [2], they considered equation

$$x^2 + axy + ay^2 = \pm 1$$

Where $a \in \mathbb{Z}$, with solution in terms of Fibonacci and Lucas sequences.

In this research, we consider the solution of $x^2 + axy + ay^2 = \pm 1$ in terms of Generalized Fibonacci Sequence (GFS) Defined by $G_1 = b$, $G_2 = c$ and $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$; $n \geq 3$ and $b, c \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Moreover, we consider the equation

$$x^2 + axy + ay^2 = \pm N$$

where N is a positive integer > 1 for positive integer solutions.

Keywords : Diophantine equation, Fibonacci sequence, Lucas sequence, Generalized Fibonacci Sequence, Solution of Diophantine equation

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่อง ผลเฉลยของบางสมการไดโอแฟนไทน์ คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษาและความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้และช่วยตรวจสอบแก้ไขงานให้เกิดความถูกต้องครบถ้วนตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก และ ดร.พุทธพร วานิชกร ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายที่สุด ทางคณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่านที่ท่านช่วยประสิทธิ์ประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำอันเกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมาตลอดจนขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ของทางภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้ จนเป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จไปด้วยดี

จิรัชญา นาคพิทักษ์

ฐิติพัฒน์ กิจเจริญ

ฐนรินทร์ วัฒนสุขเอกพงศ์

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในทฤษฎีจำนวนมักจะมีความเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการพีชคณิตที่มีมากกว่าหรือเท่ากับสองตัวแปร พีชคณิตของกรีกและทฤษฎีจำนวนมีบทบาทสำคัญที่ก่อให้เกิดหนังสือ Arithmetica ซึ่งเขียนโดย Diophantus ซึ่ง Diophantus ได้สนใจที่จะหาคำตอบที่แท้จริงมากกว่า คำตอบที่เป็นค่าโดยประมาณ เขาสนใจที่จะหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนตรรกยะของสมการพหุนามในหนึ่งตัวแปรหรือมากกว่านั้น ซึ่งเรียกสมการประเภทนี้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equations)

สำหรับปัญหาพิเศษนี้ต้องศึกษาความรู้พื้นฐาน Pell's equation และ Special Pell's equation ซึ่งใช้ในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ทั่วไป

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลข เนื่องจากการหาผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์ที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลขนั้นทำได้ยากและซับซ้อน จึงต้องอาศัยทฤษฎีบทของ Pell's equation เข้ามาช่วยในการหาผลเฉลย ซึ่งในการหาผลเฉลยของเรานั้นเป็นวิธีที่ทำให้หาผลเฉลยได้ง่ายมากยิ่งขึ้น

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

จะพิจารณาวิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลข โดยใช้ทฤษฎีบทของ Pell's equation และทฤษฎีบทของ Special Pell's equation เข้ามาช่วยในการหาผลเฉลย

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้เรียนรู้วิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบต่างๆ

1.4.2 สามารถหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลขได้ และสามารถนำทฤษฎีบทของ Pell’s equation และ Special Pell’s equation เข้ามาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยได้

1.4.3 สามารถหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลขได้ง่ายขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาความรู้ขั้นพื้นฐานของทฤษฎีบท Pell’s equation และ Special Pell’s equation

1.5.2 ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยและรวบรวมวิธีการหาผลเฉลยในรูปแบบต่างๆ

1.5.3 นำความรู้ที่ศึกษามาประยุกต์เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลข

1.5.4 ทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้มา

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินงานตามแผนงาน 10 เดือน ได้แสดงไว้ในตารางนี้

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2558					ปี 2559				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
ศึกษาข้อมูล และกำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ										
ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีบทของ Pell's equation และทฤษฎีบทSpecial Pell's equation										
ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้าเกี่ยวกับ ทฤษฎีบทของ Pell's equation และทฤษฎีบท Special Pell's equation										
ศึกษาค้นคว้าวิจัยเอกสารเกี่ยวกับวิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลข										
ค้นคว้าข้อมูลเพิ่มเติมและทำการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อนำมาประกอบการทำปัญหาพิเศษ										
ทำการศึกษา วิเคราะห์ กระบวนการผลเฉลยสมการ ไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบที่ติดตัวแปรไม่ใช่ตัวเลข										
ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาทั้งหมด										
จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งจัดทำแบบการนำเสนอ										
ซ้อมนำเสนอปัญหาพิเศษ										
นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น (Linear Diophantine Equation)

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equation) คือ สมการพหุนามที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไป โดยพิจารณาผลเฉลยของพหุนามที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น

สมการไดโอแฟนไทน์ดีกรี 2 ที่มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวแปร x และ y และมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

เมื่อ $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}$ และ $a\neq 0$ เรียกสมการนี้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นดีกรี 2 (Linear Diophantine equations of second degree)

สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น (Linear Diophantine Equation) คือ สมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=b$ เมื่อ $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,b$ เป็นจำนวนเต็ม และ $a_i\neq 0$ ทุกๆ $1\leq i\leq n$

สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นของสองตัวแปรคือ x และ y อยู่ในรูป $ax+by=c$ มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $(a,b)|c$ ถ้า (x_0,y_0) เป็นผลเฉลยหนึ่ง แล้วผลเฉลยจะอยู่ในรูป $x=x_0+\frac{b}{(a,b)}t$ และ $y=y_0-\frac{a}{(a,b)}t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มใดๆ

สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นของสามตัวแปรคือ x,y และ z อยู่ในรูป $ax+by+cz=d$ มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $(a,b,c)|d$ และหาผลเฉลยได้โดยประยุกต์แนวคิดของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นของสองตัวแปร

ต่อไปนี้กล่าวถึงทฤษฎีบทและความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ดีกรี 2

2.2 จำนวนฟีโบนัชชีและจำนวนลูคัส (Fibonacci and Lucas Numbers)

2.2.1 จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci Number)

จำนวนฟีโบนัชชี หรือ เลขฟีโบนัชชี คือจำนวนต่างๆ ที่อยู่ในลำดับของจำนวนเต็ม โดยมีนิยามของความสัมพันธ์ว่า จำนวนถัดไปเท่ากับผลบวกของจำนวนก่อนหน้า และสองจำนวนแรกก็คือ 0 และ 1 ตามลำดับ และลำดับของจำนวนดังกล่าวก็จะเรียกว่า ลำดับฟีโบนัชชี หากเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ ลำดับ F_n ของจำนวนฟีโบนัชชีนิยามขึ้นด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้น คือ $x^2 - x - 1 = 0$ ซึ่งผลเฉลย 2 ผลเฉลย คือ $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ซึ่ง $\alpha + \beta = 1$ และ $\alpha\beta = -1$

พิจารณารูปแบบทั่วไปของ F_n ที่เขียนในรูปของจำนวน α และ β

ผลเฉลยทั่วไปคือ $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$ เมื่อ $n \ge 1$ ต้องการหาค่า A และ B เนื่องจากมีระบบสมการ

$$n = 1; \qquad F_1 = A\alpha + B\beta = 1 \tag{*}$$

$$n = 2; \qquad F_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1 \tag{**}$$

จากสมการ (*) *และ* (**) จะได้

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)/2}{\left(5+\sqrt{5}\right)/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{\beta}{1+\beta^2} = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)/2}{\left(5+\sqrt{5}\right)/2} = \frac{1-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ คือ

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\text{หรือ} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{1}$$

เรียกสูตรนี้ว่า Binet's formulas สำหรับ F_n

จากรูปแบบที่ข้างต้นเราสามารถขยายเป็นจำนวนฟีโบนัชชีที่ติดลบได้ดังนี้

$$F_{-n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} - \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - (-1)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

$$= (-1)^n\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] = (-1)^{n-1}F_n$$

ดังนั้น $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$ (2)

<u>**ตัวอย่าง 2.2.1**</u> จงหาค่า F_3 โดยใช้สูตร Binet's formulas สำหรับ F_n

<u>วิธีทำ</u> $F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(1^3+3\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3\right)-\left(1^3-3\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^3\right)}{2^3}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}\right)-\left(1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}\right)}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(16+8\sqrt{5}\right)-\left(16-8\sqrt{5}\right)}{8}\right] = 2$$

ซึ่งสังเกตเห็นว่าเป็นจริงเนื่องจาก $F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$ #

2.2.2 จำนวนลูคัส (Lucas Number)

เลขลูคัสจะคล้ายกับเลขฟีโบนัชชีแต่เลขลูคัสถูกนิยามเป็นผลรวมสองเทอมก่อนหน้า และมีความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกันกับฟีโบนัชชีเพียงแต่ได้เริ่มต้นด้วยค่าที่แตกต่างกันออกไป

ลำดับ L_n ของจำนวนลูคัสนิยามขึ้นด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_n = L_{n-1} + L_{n+1}$ เมื่อ $n \geq 1$ โดยกำหนดค่าเริ่มแรกให้ $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$; $n \geq 1$

สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้น คือ $x^2 - x - 1 = 0$ ซึ่งผลเฉลย 2 ผลเฉลย คือ $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ซึ่ง $\alpha + \beta = 1$ และ $\alpha\beta = -1$

พิจารณารูปแบบทั่วไปของ L_n ที่เขียนในรูปของจำนวน α และ β

ผลเฉลยทั่วไปคือ $L_n = A\alpha^n + B\beta^n$ เมื่อ $n \geq 1$ ต้องการหาค่า A และ B เนื่องจากมีระบบสมการ

$$n = 1; \qquad L_1 = A\alpha + B\beta = 1 \tag{*}$$

$$n = 2; \qquad L_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 3 \tag{**}$$

จากสมการ (*) *และ* (**) จะได้

$$A = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1-\left(1+\sqrt{5}\right)/2}{\left(1+\sqrt{5}\right)/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = 1$$

$$B = \frac{\sqrt{5}\beta}{\beta+3} = \frac{\sqrt{5}\left[\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right]}{\left[\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right]+3} = \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}-5} = 1$$

ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ คือ

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

หรือ $$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3}$$

เรียนสูตรนี้ว่า Binet's formulas สำหรับ L_n

จากรูปแบบที่ข้างต้นเราสามารถขยายเป็นจำนวนฟีโบนัชชีที่ติดลบได้ดังนี้

$$L_{-n}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}$$

$$=\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}+\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n}$$

$$=(-1)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+(-1)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

$$=(-1)^n\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]=(-1)^n L_n$$

ดังนั้น $L_{-n}=(-1)^n L_n$ (4)

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาค่า L_3 โดยใช้สูตร Binet's formulas สำหรับ L_n

วิธีทำ $L_3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}$

$$=\frac{\left(1^3+3\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3\right)+\left(1^3-3\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^3\right)}{2^3}$$

$$=\frac{\left(1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}\right)+\left(1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}\right)}{8}$$

$$=\frac{\left(16+8\sqrt{5}\right)+\left(16-8\sqrt{5}\right)}{8}=4$$

ซึ่งสังเกตเห็นว่าเป็นจริงเนื่องจาก $L_3=L_2+L_1=3+1=4$ #

2.3 ลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป (Generalized Fibonacci sequence)

พิจารณาลำดับ $\{G_n\}$ เมื่อ $G_1 = a, G_2 = b$ และ $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}\ ; n \geq 3$

ลำดับที่ได้ตามมา

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \ldots \tag{5}$$

เรียกว่า ลำดับฟีโบนัชชีทั่วไป (Generalized Fibonacci sequence) แทนด้วย GFS

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่

ทฤษฎีบท 2.3.1 [3] ให้ G_n เป็นสัญลักษณ์เทอมที่ n ของ GFS แล้ว $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}\ , n \geq 3$

พิสูจน์ โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

เนื่องจาก $G_3 = a + b = aF_1 + bF_2$ เป็นจริง เมื่อ $n = 3$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ ≥ 3

สมมติให้เป็นจริงทุกจำนวนเต็ม i เมื่อ $3 \leq i \leq k$

$$G_i = aF_{i-2} + bF_{i-1}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &= (aF_{k-2} + bF_{k-1}) + (aF_{k-3} + bF_{k-2}) \\ &= a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2}) \\ &= aF_{k-1} + bF_k \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.3.2 [3] ให้ $c = a + (a-b)\beta$ และ $d = a + (a-b)\alpha$ แล้ว $G_n = \dfrac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}$

โดยที่ $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ และ $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

พิสูจน์ จาก Binet's formula จะได้

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$$

$$\sqrt{5}G_n = a\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right) + b\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right)$$

$$= a\alpha^{n-2} - a\beta^{n-2} + b\alpha^{n-1} - b\beta^{n-1}$$

$$= \left(\frac{\alpha^n}{\alpha^2}(a) + \frac{\alpha^n}{\alpha}(b)\right) - \left(\frac{\beta^n}{\beta^2}(a) + \frac{\beta^n}{\beta}(b)\right)$$

$$= \alpha^n\left(\frac{a}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha}\right) - \beta^n\left(\frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta}\right)$$

$$= \alpha^n\left(\frac{a + b\alpha}{\alpha^2}\right) - \beta^n\left(\frac{a + b\beta}{\beta^2}\right)$$

$$= \frac{a\alpha^n + b\alpha^{n+1}}{\alpha^2} - \frac{a\beta^n + b\beta^{n+1}}{\beta^2}$$

$$= \frac{a\alpha^n\beta^2 + b\alpha^{n+1}\beta^2 - a\beta^n\alpha^2 + b\beta^{n+1}\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{\left(a\alpha^n + b\alpha^{n+1}\right)\beta^2 - \left(a\beta^n + b\beta^{n+1}\right)\alpha^2}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \alpha^n\left(a\beta^2 + b\alpha\beta^2\right) - \beta^n\left(a\alpha^2 + b\beta\alpha^2\right)$$

$$= \alpha^n\left(a\beta^2 - b\beta\right) - \beta^n\left(a\alpha^2 - b\alpha\right)$$

$$= \alpha^n\left[a + (a+b)\beta\right] - \beta^n\left[a + (a+b)\alpha\right] \;; 1+\alpha = \alpha^2, 1+\beta = \beta^2$$

$$\therefore G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}$$ □

2.4 Pell's equation

ในปี ค.ศ.1909 A.Thue ได้มีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญ ดังนี้

ให้ $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ เป็นพหุนามที่ตัดทอนไม่ได้ (Irreducible polynomial) โดยมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม พิจารณาพหุนามเอกพันธุ์ (Homogenous polynomial) ที่สัมพันธ์กับ f คือ $F(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n$

แล้วสมการ $F(x,y) = m$ เมื่อ $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ไม่มีผลเฉลยหรือมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มจำนวนจำกัดอย่างใดอย่างหนึ่ง

กรณีดีกรีของ F คือ 2 หรือ $n = 2$

สำหรับ ถ้า $F(x,y) = x^2 - Dy^2$ ซึ่ง D คือจำนวนเต็มบวกที่ไม่สามารถเขียนในรูปเลขยกกำลังสองของจำนวนเต็มใดๆได้ แล้ว ทุกจำนวนเต็ม m ไม่เท่ากับศูนย์ สมการของ Pell's equation ในรูปทั่วไป

$$x^2 - Dy^2 = m \tag{6}$$

ไม่มีผลเฉลยหรือมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มเป็นจำนวนอนันต์อย่างใดอย่างหนึ่ง

เริ่มต้นด้วยคุณสมบัติเบื้องต้นของ Pell's equation ให้ D คือจำนวนเต็มบวกที่ไม่สามารถเขียนในรูปเลขยกกำลังสองของจำนวนเต็มใดๆได้ แล้ว N เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ที่ถูกกำหนด แล้วสมการ $x^2 - Dy^2 = N$ เรียกว่า Pell's equation

สำหรับ $N = \pm 1$ สมการ $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ เรียกว่า classical Pell's equation จะใช้สัญลักษณ์ (x,y) หรือ $x + y\sqrt{D}$ เพื่อแสดงถึงผลเฉลยของ $x^2 - Dy^2 = N$ ถ้า x และ y เป็นจำนวนบวกจะเรียก $x + y\sqrt{D}$ ว่าผลเฉลยบวกของสมการ $x^2 - Dy^2 = N$ ผลเฉลยจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด $x_1 + y_1\sqrt{D}$ ของสมการ $x^2 - Dy^2 = N$ จะเรียกว่าผลเฉลยพื้นฐานของสมการ (Fundamental Solution)

บทตั้ง 1 [4] ถ้า $x_1 + y_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของสมการ $x^2 - Dy^2 = -1$ จะได้ว่า $(x_1 + y_1\sqrt{D})^2$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของสมการ $x^2 - Dy^2 = 1$

พิสูจน์ $x_1 + y_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยของ $x^2 - Dy^2 = -1$

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D}) = x_1^2 + x_1y_1\sqrt{D} + x_1y_1\sqrt{D} + y_1^2\sqrt{D}$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 D) + (2x_1y_1)\sqrt{D}$$ เป็นผลเฉลยของ $x^2 - Dy^2 = 1$

จะได้ $$(x_1^2 + y_1^2 D) - D(2x_1y_1)^2 = x_1^4 + 2x_1^2y_1^2D + D^2y_1^4 - 4x_1^2y_1^2D$$

$$= x_1^4 - 2x_1^2y_1^2D + D^2y_1^4$$

$$= (x_1^2)^2 - 2x_1^2y_1^2D + (Dy_1^2)^2$$

$$= (x_1^4 - Dy_1^2)^2$$

$$= (-1)^2 = 1$$ □

ทฤษฎีบท 2.4.1 [4] ถ้า $x_1 + y_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของสมการ $x^2 - Dy^2 = 1$ แล้วผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $x^2 - Dy^2 = 1$ จะเขียนได้ว่า

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (\mathrm{x}_1 + \mathrm{y}_1\sqrt{D})^n \tag{7}$$

พิสูจน์ โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

ให้ $(x_1 + y_1)$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของ $x^2 - Dy^2 = 1$

$P(n)$ $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n; n \geq 1$

$P(1)$ $x_1 + y_1\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^1$

ดังนั้น (x_1, y_1) เป็นผลเฉลยของ $x^2 - Dy^2 = 1$

$P(2)$ (x_2, y_2) เป็นผลเฉลยของ $x^2 - Dy^2 = 1$

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D}) = x_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{D} + y_1^2D$$

$$= (x_1^2 + y_1^2D) + 2x_1y_1\sqrt{D}$$

$$(x, y) = (x_1^2 + y_1^2D, 2x_1y_1)$$

จะได้

$$(x_1^2 + y_1^2D)^2 - D(2x_1y_1)^2 = (x_1^2)^2 + 2x_1^2y_1^2D + D^2(y_1^2)^2 - 4Dx_1^2y_1^2$$

$$= (x_1^2)^2 + 2x_1^2y_1^2D + D^2(y_1^2)^2$$

$$= (x_1^2 - y_1^2D)^2$$

$$= 1^2 = 1$$

ดังนั้น (x_2, y_2) เป็นผลเฉลยของ $x^2 - Dy^2 = 1$

สมมติ $P(n)$ เป็นจริง คือ $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$

$\therefore \quad x_n^2 - Dy_n^2 = 1$

จะแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริงเมื่อ

$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
(x_1 + y_1\sqrt{D})^n &= (x_1 + y_1\sqrt{D})^n (x_1 + y_1\sqrt{D}) \\
&= (x_n + y_n\sqrt{D})^n (x_1 + y_1\sqrt{D}) \\
&= x_1x_n + x_ny_1\sqrt{D} + x_1y_n\sqrt{D} + Dy_1y_n \\
&= (x_1x_n + Dy_1y_n) + (x_ny_1 + x_1y_n)\sqrt{D}
\end{aligned}
$$

$$(x, y) = (x_1x_n + Dy_1y_n\,, x_ny_1 + x_1y_n)$$

$$
\begin{aligned}
(x_1x_n + Dy_1y_n)^2 - D(x_ny_1 + x_1y_n)^2 &= x_1^2x_n^2 + 2x_1x_ny_1y_nD + D^2y_1^2y_n^2 - D(x_n^2u_1^2 + 2x_1x_ny_1y_n + x_1^2y_n^2) \\
&= x_1^2x_n^2 + D^2y_1^2y_n^2 - Dx_n^2y_1^2 - Dx_1^2y_n^2 \\
&= (x_n^2 - Dy_n^2) - (x_1^2 - Dy_1^2) \\
&= 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}
$$

□

ผลเฉลย (x_n, y_n) จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนบังเกิดดังต่อไปนี้

$$x_{n+1} = 2x_1x_n - x_{n-1} \tag{8}$$

$$y_{n+1} = 2x_1y_n - y_{n-1} \tag{9}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้พิจารณาผลเฉลยของสมการของ Pell's equation $u^2 - Dv^2 = 1$ เมื่อกำหนด $(u_1, v_1) = (1, 0)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้ง (trivial solution)

ทฤษฎีบท 2.4.2 [1] ถ้า D เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังสองของจำนวนเต็มใดๆได้ แล้วสมการ $$u^2 - Dv^2 = 1 \quad (10)$$
มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนอนันต์ และรูปแบบทั่วไปของผลเฉลยคือ $(u_n, v_n)_{n\geq 1}$
โดยที่ $$u_{n+1} = u_1 u_n + Dv_1 v_n \ , \ v_{n+1} = v_1 u_n + u_1 v_n \quad (11)$$

เมื่อ (u_1, v_1) เป็นผลเฉลยพื้นฐาน (fundamental solution) กล่าวคือผลเฉลย $v_1 > 0$ น้อยสุดที่ไม่ใช่ $(1,0)$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $u^2 - Dv^2 = 1$ มีผลเฉลยพื้นฐาน

ให้จำนวนเต็ม $c_1 > 1$ และจะแสดงว่ามีจำนวนเต็ม $t_1, w_1 \geq 1$ ที่ซึ่ง

$$\left| t_1 - w_1\sqrt{D} \right| < \frac{1}{c_1} \qquad , w_1 \leq c_1$$

พิจารณา $l_k = \left[k\sqrt{D} + 1 \right] \qquad , k = 0, \ldots, c_1$

เนื่องจาก $[x]$ คือ *Greatest Integer*

จะได้ว่า $x - 1 < [x] \leq x$

ดังนั้น $k\sqrt{D} + 1 - 1 < \left[k\sqrt{D} + 1 \right] \leq k\sqrt{D} + 1$

$k\sqrt{D} < l_k \leq k\sqrt{D} + 1$

$0 < l_k - k\sqrt{D} \leq 1 \qquad , k = 0, \ldots, c_1$

เนื่องจาก $D \in \mathbb{N} - \{ r^2 | r \in \mathbb{N} \}$

ดังนั้น $\sqrt{D} > 1$ และ $\sqrt{D}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

$\left[k' \right] \neq \left[k'' \right]$ เมื่อ $\left| k' - k'' \right| > 1$

สมมติให้ $k' \neq k''$

โดยที่ $0 \leq k', k'' < c_1 \in \mathbb{N}$

จะเห็นว่า $\left| k' - k'' \right| > 1$

จะได้ $k' - k'' > 1$ หรือ $k'' - k' < 1$

นำ $\sqrt{D}$ คูณทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $k'\sqrt{D} - k''\sqrt{D} > \sqrt{D}$ หรือ $k''\sqrt{D} - k'\sqrt{D} < \sqrt{D}$

จะเห็นว่า $\left| k'\sqrt{D} - k''\sqrt{D} \right| > \sqrt{D} > 1$

ดังนั้น $\left[k'\sqrt{D} \right] \neq \left[k''\sqrt{D} \right]$

และ $\left[k^{'}\sqrt{D}+1\right]\neq\left[k^{''}\sqrt{D}+1\right]$

สรุปได้ว่า $l_{k^{'}}\neq l_{k^{''}}$

จะแสดงว่ามี $i,j,p\in\{0,1,...,c_1\}$ และ $i\neq j$, $p\neq 0$ ที่ซึ่ง

$\frac{p-1}{c_1}<l_i-i\sqrt{D}\leq\frac{p}{c_1}$ และ $\frac{p-1}{c_1}<l_j-j\sqrt{D}\leq\frac{p}{c_1}$

เนื่องจาก $(0,1]$ สามารถแบ่งออกเป็น c_1 ช่วงที่มีรูปแบบคือ $\left(\frac{p-1}{c_1},\frac{p}{c_1}\right]$

เมื่อ $p=1,...,c_1$ นั่นคือช่วงต่อไปนี้

$\left(0,\frac{1}{c_1}\right],\left(\frac{1}{c_1},\frac{2}{c_1}\right],...,\left(\frac{c_1-1}{c_1},1\right]$ ที่ยูเนียนกันได้ $(0,1]$

และมี c_1+1 จำนวนที่อยู่ในรูปแบบ $l_k-k\sqrt{D}$

เมื่อ $k=0,1,...,c_1$ นั่นคือจำนวนต่อไปนี้

$l_0,l_1-\sqrt{D},l_2-2\sqrt{D},...,l_c-c\sqrt{D}$

โดยที่ l_k เป็นจำนวนเต็มและ $\sqrt{D}$ เป็นจำนวนอตรรกยะที่มากกว่า 1

เพราะฉะนั้น $0<l_k-k\sqrt{D}\leq 1,\forall k=0,1,...,c_1$

และ $l_0\neq\frac{p}{c_1}$, $\forall p=1,...,c_1$

เนื่องจาก $l_0=1$ แล้ว $l_0\in\left(\frac{c_1-1}{c_1},1\right]$

และ $l_i-i\sqrt{D}\,,l_j-j\sqrt{D}\in\left(\frac{p-1}{c_1},\frac{p}{c_1}\right]$

สำหรับ $p\in\{1,...,c_1\}$

แต่เนื่องจากมี c_1 ช่วง และ c_1+1 จำนวน

ดังนั้นต้องมีอย่างน้อย 1 ช่วง ที่บรรจุจำนวน (ที่ไม่เท่ากัน)อย่างน้อย 2 ตัว

และเนื่องจาก $\dfrac{p-1}{c_1} < i \le \dfrac{p}{c_1}$

$$\frac{p-1}{c_1} < j \le \frac{p}{c_1}$$

$$|i-j| < \frac{p}{c_1} - \frac{p-1}{c_1} = \frac{1}{c_1}$$

โดยกฎอสมการสามเหลี่ยม

ดังนั้น $\left\| l_i - l_j \right| - \left| i - j\sqrt{D} \right\| < \dfrac{1}{c_1}$

ให้ $t_1 = \left| l_i - l_j \right|$ และ $w_1 = |i-j|$

จะได้ $\left| t_1 - w_1\sqrt{D} \right| \le \dfrac{1}{c_1}$

$$t_1 - w_1\sqrt{D} < \frac{1}{c_1}$$

$$t_1 < w_1\sqrt{D} + \frac{1}{c_1} < w_1\sqrt{D} + 1$$

ดังนั้น $t_1 + w_1\sqrt{D} < w_1\sqrt{D} + \dfrac{1}{c_1} + w_1\sqrt{D}$

$$t_1 + w_1\sqrt{D} < 2w_1\sqrt{D} + \frac{1}{c_1} < 2w_1\sqrt{D} + 1$$

นำ $t_1 + w_1\sqrt{D} < 2w_1\sqrt{D} + 1$ คูณทั้งอสมการ

จะได้ $\left| t_1^2 - Dw_1^2 \right| < 2\dfrac{w_1}{c_1}\sqrt{D} + \dfrac{1}{c_1}$

ดังนั้น $\left| t_1^2 - Dw_1^2 \right| < 2\dfrac{w_1}{c_1}\sqrt{D} + \dfrac{1}{c_1}$

เนื่องจาก $w_1 \le c_1$ จะได้ $\dfrac{w_1}{c_1} \le 1$

จะได้ว่า $\left| t_1^2 - Dw_1^2 \right| < 2\sqrt{D} + 1$

เลือกจำนวนเต็ม $c_2 > c_1$ ที่ซึ่ง $\exists i, j, p \in \{0,1,...,c_1\}$ และ $i \neq j$, $p = 0$

$$\left\| l_{i+1} - l_{j+1} \right| - \left| i+1-j+1 \right| \sqrt{D} \right| < \frac{p}{c_2} - \frac{p-1}{c_2} = \frac{1}{c_2}$$

ดังนั้น $t_2 = \left| l_{i+1} - l_{j+1} \right|$ และ $w_1 = \left| i+1-j+1 \right|$

จะเห็นว่า $\left| t_2 - w_2\sqrt{D} \right| \leq \frac{1}{c_2}$

จะได้ $\left| t_2^2 - Dw_2^2 \right| < 2\sqrt{D} + 1$

และ $\left| t_1 - t_2 \right|, \left| w_1 - w_2 \right| \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $\left| t_1 - t_2 \right| + \left| w_1 - w_2 \right| \neq 0$

โดยการเริ่มต้นขั้นตอนเดิมอีกครั้ง จะได้ลำดับของคู่อันดับ $(t_n, w_n)_{n\geq 1}$ ที่แตกต่างกัน

สอดคล้องกับอสมการ $\left| t_n^2 - Dw_n^2 \right| < 2\sqrt{D} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

จะเห็นว่า $-2\sqrt{D} - 1 < \left| t_n^2 - Dw_n^2 \right| < 2\sqrt{D} + 1$

อยู่ในช่วง $\left(-2\sqrt{D} - 1, 2\sqrt{D} + 1 \right)$ บรรจุจำนวนเต็ม k ที่ $k \neq 0$

ที่ซึ่งจะมีลำดับย่อย $(t_n, w_n)_{n\geq 1}$ ที่สอดคล้องกับ $t^2 - Dw^2 = k$

จะมีคู่อันดับที่น้อยสุด 2 คู่ คือ $(t_s, w_s), (t_r, w_r)$

เพราะ $t_s \equiv t_r \left(\bmod |k| \right)$ และ $w_s \equiv w_r \left(\bmod |k| \right)$

และ $t_s w_r - t_r w_s \neq 0$

ดังนั้น $t_s = t_r$, $w_s = w_r$

จะเห็นได้ว่าขัดแย้งกัน $\left| t_s - t_r \right| + \left| w_s - w_r \right| \neq 0$

ให้ $t_0 = t_s t_r - Dw_s w_r$

และ $w_0 = t_s w_r - Dt_r w_s$

แล้ว $t_0^2 - Dw_0^2 = k^2$ (12)

ในทางกลับกัน $t_0 = t_s t_r - Dw_s w_r \equiv t_0^2 - Dw_0^2 \equiv 0 \left(\bmod |k| \right)$

และจะเห็นว่า $w_0 \equiv 0\left(\bmod |k|\right)$

คู่อันดับ (t,w) ซึ่ง $t_0 = t|k|$ และ $w_0 = w|k|$

ซึ่งไม่เป็นผลเฉลยของสมการ (10)

จะแสดงว่า (u_n, v_n) นิยามโดย (11) สอดคล้องสมการ (10)

เราจะใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์โดยพิจารณาถึง n

เห็นได้ชัดว่า (u_1, v_1) เป็นผลเฉลยของสมการ (10)

ถ้า (u_n, v_n) คือผลเฉลยของสมการ

แล้ว $u_{n+1}^2 - Dv_{n+1}^2 = \left(u_1u_n + Dv_1v_n\right)^2 - D\left(v_1u_n + u_1v_n\right)^2$

$$= \left(u_1^2 - Dv_1^2\right)\left(u_n^2 - Dv_n^2\right)$$

$$= 1$$

นั่นคือคู่อันดับ (u_{n+1}, v_{n+1}) เป็นผลเฉลยของสมการ (10)

ไม่ยากที่จะมองว่าทุกจำนวนเต็ม $n + \{0\}$

และ $u_n + v_n\sqrt{D} = \left(u_1 + v_1\sqrt{D}\right)^n$ (13)

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์

$z_0 < z_1 < z_2 \ldots < z_n < \ldots$

$P(n); u_n + v_n\sqrt{D} = \left(u_1 + v_1\sqrt{D}\right)^n, n = 0,1,2,\ldots$

$P(0); u_0 + v_0\sqrt{D} = 1$ ดูได้จาก $(u_0, v_0) = (1,0)$

ทำให้ได้ $u^2 - Dv^2 = 1$

สมมุติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

ทำให้ได้ $u_k + v_k\sqrt{D} = \left(u_1 + v_1\sqrt{D}\right)^k$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

ต้องการแสดงว่า $P(n)$เป็นจริง

นั่นคือ $\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)\left(u_{n-1}+v_{n-1}\sqrt{D}\right)=\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^{n-1}\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^1$

$$=\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^n$$

$$u_1u_{n-1}+v_1v_{n-1}\sqrt{D}+u_{n-1}v_1\sqrt{D}+v_1v_{n-1}D=\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^n$$

$$u_n+v_n\sqrt{D}=\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^n \qquad (13)$$

ให้ $z_n=u_n+v_n\sqrt{D}=\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^n, n\geq 0$

และสังเกตว่า $z_0<z_1<z_2\ldots<z_n<\ldots$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าทุกผลเฉลยของสมการ (10) สอดคล้องกับ (13)

จริงๆแล้ว ถ้าสมการ (10) มีผลเฉลย (u,v) ซึ่ง $z=u+v\sqrt{D}$ ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ (13) ได้แล้ว ให้ $z_i<z_j$

ซึ่ง $z_i=u_i+v_i\sqrt{D}=\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^i$

$z_j=u_j+v_j\sqrt{D}=\left(u_1+v_1\sqrt{D}\right)^j$

เนื่องจาก $u_1+v_1\sqrt{D}>1$

จะได้ว่า $u_1^i+u_1^{i-1}\binom{i}{1}v_1\sqrt{D}+\ldots+u_1\binom{i}{i-1}\left(v_1\sqrt{D}\right)^{i-1}+\left(v_1\sqrt{D}\right)^j$

$$<u_1^j+u_1^{j-1}\binom{j}{1}v_1\sqrt{D}+\ldots+u_1\binom{j}{j-1}\left(v_1\sqrt{D}\right)^{j-1}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า

$$u_1^i+u_1^j,\ u_1^{i-1}\binom{i}{1}<u_1^{j-1}\binom{j}{1},\ \binom{i}{i-1}\left(v_1\sqrt{D}\right)^{i-1}<\binom{j}{j-1}\left(v_1\sqrt{D}\right)^{j-1},\ \left(v_1\sqrt{D}\right)^i<\left(v_1\sqrt{D}\right)^j$$

ทำให้ได้ว่า $i<j$

ดังนั้น $z_m<z<z_{m+1}$ บางจำนวนเต็ม m

$$u_m+v_m\sqrt{D}<u+v\sqrt{D}<u_{m+1}+v_{m+1}\sqrt{D}$$

$$\left(u_m + v_m\sqrt{D}\right)\left(u_m - v_m\sqrt{D}\right) < \left(u + v\sqrt{D}\right)\left(u_m - v_m\sqrt{D}\right) < \left(u_{m+1} + v_{m+1}\sqrt{D}\right)\left(u_m - v_m\sqrt{D}\right)$$

$$u_m^2 - Dv_m^2 < uu_m - uv_m\sqrt{D} + u_m v\sqrt{D} - vv_m D < \left(u_m^2 - Dv_m^2\right)\left(u_1 + v_1\sqrt{D}\right)$$

$$1 < \left(uu_m - vv_m D\right) + \left(u_m v - uv_m\right)\sqrt{D} < u_1 + v_1\sqrt{D}$$

ในทางตรงข้าม

$$\left(uu_m - vv_m D\right)^2 - D\left(u_m v - uv_m\right)^2 = \left(u^2 - Dv^2\right)\left(u_m^2 - Dv_m^2\right) = 1$$

นั่นคือ $\left(uu_m - vv_m D, u_m v - uv_m\right)$ คือผลเฉลยของ (12) น้อยกว่า $\left(u_1, v_1\right)$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานว่า $\left(u_1, v_1\right)$ คือผลเฉลยที่น้อยที่สุดเพียงหนึ่งเดียว □

<u>**ข้อสังเกต**</u> ความสัมพันธ์ (13) สามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & Dv_1 \\ v_1 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & Dv_1 \\ v_1 & u_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

ถ้า

$$\begin{pmatrix} u_1 & Dv_1 \\ v_1 & u_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

โดยสมการ (8) จะได้ ,

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(u_1 + v_1\sqrt{D}\right)^n + \left(u_1 - v_1\sqrt{D}\right)^n\right],$$

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[\left(u_1 + v_1\sqrt{D}\right)^n - \left(u_1 - v_1\sqrt{D}\right)^n\right] \tag{15}$$

ในส่วนนี้เราศึกษาสมการทั่วไปมากขึ้น

$$ax^2 - by^2 = 1 \tag{16}$$

ซึ่ง a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก และสมการ (16) สามารถลดรูปไป Pell’s equation ได้

ถ้า $ab=k^2$ ซึ่ง k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว สมการ (16) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก โดยมีการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

สมมติว่า (16) มีผลเฉลย (x,y) ซึ่ง x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $ax^2-by^2=1$

เห็นได้ชัดว่า a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

จาก $\quad ab=k^2$

จะเห็นว่า $a=k_1^2$ และ $b=k_2^2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k_1 และ k_2

จะได้ว่า $\quad 1<(k_1x+k_2y)=(k_1x-k_2y)=1$

สามารถเขียนได้ว่า $\quad (k_1x-k_2y)(k_1x+k_2y)=1$

จะได้ว่า $\quad 1<(k_1x+k_2y)=(k_1x-k_2y)=1$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ทฤษฎีบท 2.4.3 [1] สมมติว่าสมการ (16) มีผลเฉลยในจำนวนเต็มบวก และ ให้ (x_1,y_1) เป็นผลเฉลยที่น้อยที่สุด นั่นคือ $y_1>0$ น้อยที่สุด ผลเฉลยรูปแบบทั่วไปของ (16) คือ $(x_n,y_n)_{n\geq 1}$ ซึ่ง

$$x_n=x_1u_n+by_1v_n\ ,\ y_n=x_1u_n+ay_1v_n \tag{17}$$

และ $(u_n,v_n)_{n\geq 1}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของการหาผลเฉลยของสมการ $u^2-abv^2=1$ ไปเป็นรูปแบบสมการของ Pell's equation จากสมการ (16)

พิสูจน์ จะแสดงว่า (x_n,y_n) เป็นผลเฉลยของสมการ (16)

เห็นได้ชัดว่า $ax_n^2-by_n^2=a(x_0u_n+by_0v_n)^2-b(y_0u_n+ax_0v_n)^2$

$$=(ax_0^2-by_0^2)(u_n^2-abv_n^2)=1\cdot 1=1$$

ในทางตรงกันข้ามให้ (x,y) เป็นผลเฉลยของสมการ (16) แล้ว (u,v)

ซึ่ง $u=ax_0x-by_0y$ และ $v=y_0x-x_0y$ เป็นผลเฉลยของการหาผลเฉลยของ Pell ของสมการ (16) แก้ปัญหาระบบสมการเส้นตรงโดยไม่ทราบค่า x และ y ผลที่ได้ $x=x_0u+by_0v$ และ $y=y_0u+ax_0v$ นั่นคือ (x,y) มีรูปแบบตาม (17) □

<u>ข้อสังเกต</u> คำนวณพีชคณิตพื้นฐาน ผลที่ได้ถัดไประหว่างผลเฉลยพื้นฐาน

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\left(x_0\sqrt{a}+y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}+\left(x_0\sqrt{a}-y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}\right],$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left[\left(x_0\sqrt{a}+y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}-\left(x_0\sqrt{a}-y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}\right]$$

ของการหาผลเฉลยแบบ Pell และผลเฉลยที่เล็กที่สุด (x_0, y_0) ของสมการ (16) โดยผลเฉลย

$$u_1 \pm v_1\sqrt{ab} = (x_0\sqrt{a} \pm y_0\sqrt{b})^2$$

ซึ่งเครื่องหมาย + และ – สอดคล้องกัน

ใช้สูตร (15) จากสมการ (17) เป็นตามนี้

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left(x_0+\frac{y_0}{a}\sqrt{ab}\right)\left(u_1+v_1\sqrt{ab}\right)^n+\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{y_0}{a}\sqrt{ab}\right)\left(u_1-v_1\sqrt{ab}\right)^n, \\ y_n &= \frac{1}{2}\left(y_0+\frac{x_0}{a}\sqrt{ab}\right)\left(u_1+v_1\sqrt{ab}\right)^n+\frac{1}{2}\left(y_0-\frac{x_0}{a}\sqrt{ab}\right)\left(u_1-v_1\sqrt{ab}\right)^n \end{aligned} \tag{18}$$

โดยคำนึงถึงข้อสังเกต1 , จากสูตรข้างต้นสามารถเขียนได้ว่า

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\left(x_0\sqrt{a}+y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}+\left(x_0\sqrt{a}-y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}\right],$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left[\left(x_0\sqrt{a}+y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}-\left(x_0\sqrt{a}-y_0\sqrt{b}\right)^{2n+1}\right]$$

พิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$u^2 - Dv^2 = N$$

เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นศูนย์

สมมติสมการหาผลเฉลยได้และ $u + v\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยของ $u^2 - Dv^2 = N$

ถ้า $x + y\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยใดๆของสมการ $x^2 - Dy^2 = 1$ แล้วจำนวน

$$\left(u + v\sqrt{D}\right)\left(x + y\sqrt{D}\right) = ux + vyD + (uy + vx)\sqrt{D}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (4) ด้วยซึ่งผลเฉลยนี้เรียกว่า ผลเฉลยสมทบ (associated solution) กับผลเฉลย $u + v\sqrt{D}$ ให้ K เป็นคลาสของผลเฉลยของ $x^2 - Dy^2 = 1$ และแต่ละผลเฉลยในคลาสนี้เป็นผลเฉลยสมทบของกันและกัน

ผลเฉลย $u^* + v^*\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของคลาส K ถ้า $u^* + v^*\sqrt{D}$ อยู่ใน K และ $v^* \geq 0$ เป็นค่าน้อยสุดของ v ที่เกิดขึ้นในคลาส K นี้

ทฤษฎีบท 2.4.4 [4] ถ้า $u + v\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของคลาส K ของสมการ

$$u^2 - Dv^2 = N$$

และถ้า $x_1 + y_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของสมการ $x^2 - Dy^2 = 1$ แล้วเรามีว่า

$$0 \leq v \leq \frac{y_1}{\sqrt{2(x_1 + 1)}} \cdot \sqrt{N}$$

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x_1 + 1)N}$$

ทฤษฎีบท 2.4.5 [4] ถ้า $u + v\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของคลาส K ของสมการ

$$u^2 - Dv^2 = -N$$

และถ้า $x_1 + y_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของสมการ $x^2 - Dy^2 = 1$ แล้วเรามีว่า

$$0 \leq v \leq \frac{y_1}{\sqrt{2(x_1 - 1)}} \cdot \sqrt{N}$$

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x_1 - 1)N}$$

ทฤษฎีบท 2.4.6 [4] ถ้า D เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และ $D \neq s^2$ ทุกจำนวนเต็มบวก s สมมติสมการ

$$x^2 - Dy^2 = -1 \tag{19}$$

หาผลเฉลยได้และมี $\varsigma_1 + n_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐาน

แล้วผลเฉลยพื้นฐานของสมการ $x^2 - Dy^2 = 1$ มีรูปแบบ $x_1 + y_1\sqrt{D} = \left(\varsigma_1 + \eta_1\sqrt{D}\right)^2$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการ (19) มีรูปแบบดังนี้

$$\varsigma_n + \eta_n\sqrt{D} = \left(\varsigma_1 + \eta_1\sqrt{D}\right)^n$$

โดยที่ $\varsigma_n = \varsigma_1^n + \sum_{k=1} \binom{n}{2k} \varsigma_1^{n-2k}\eta_1^{2k}D^k,$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

$$\eta_n = \sum_{k=1} \binom{n}{2k-1} \varsigma_1^{n-2k+1}\eta_1^{2k-1}D^{k-1}$$

ทฤษฎีบท 2.4.7 [2] ถ้า D เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังสองได้ แล้วจะได้สมการ

$$u^2 + Dv^2 = 4 \tag{20}$$

มีผลเฉลยรูปแบบทั่วไป คือ $(u_n, v_n)_{n\geq 1}$

$$\frac{1}{2}\left(u_n + v_n\sqrt{D}\right) = \left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^n \tag{21}$$

เมื่อ (u_1, v_1) คือผลเฉลยทั่วไปของ (21) สามารถขยายเป็นจำนวนเต็มลบ n ได้จากสูตร

$$\frac{1}{2}\left(u_n + v_n\sqrt{D}\right) = \varepsilon_n \left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{Z} \tag{22}$$

เมื่อ ε_n คือ 1 หรือ -1

สำหรับ $n>0$ และ $\varepsilon_n=\pm 1$ จะได้ผลเฉลย (u_n,v_n) เป็น $(-u_n,-v_n)$

สำหรับ $n<0$ และ $\varepsilon_n=1$ ผลเฉลย (u_n,v_n) เป็น $(u_n,-v_n)$ ทั้งหมด

สำหรับ $n<0$ และ $\varepsilon_n=-1$ ผลเฉลย (u_n,v_n) เป็น $(-u_n,v_n)$ ทั้งหมด

ผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (20) คือ $(2,0)$ และ $(-2,0)$ เมื่อ $n=0$

สมมติในทางลบของ special Pell's equation $u^2+Dv^2=-4$ มีผลเฉลย

และให้ (u_1,v_1) เป็นผลเฉลยพื้นฐานของ $u^2+Dv^2=4$

นิยามให้ u_n,v_n จาก (22) แล้ว เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ (u_n,v_n) เป็นผลเฉลยของ $u^2+Dv^2=-4$ และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ (u_n,v_n) เป็นผลเฉลยของ $u^2+Dv^2=4$ ทุกผลเฉลยของสมการเป็นลักษณะนี้

2.5 งานวิจัยของ Andreescu and Andrica

ในงานวิจัยนี้เขาได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนเต็มทั้งหมด ที่ซึ่งสมการกำลังสอง

$$x^2 + axy + ay^2 = \pm 1 \tag{23}$$

มีผลเฉลยเป็นผลรวมเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะ และอยู่ในรูปแบบของจำนวนฟีโบนัชชีและลูคัส คือ $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 1$ และ $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, n \geq 1$

ทฤษฎีบท 2.5.1 [2] สมการ $x^2 + axy + ay^2 = 1$ (24) เป็นผลรวมเชิงเส้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะ ผลเฉลยเป็นผลรวมอย่างมาก 2 เทอมของจำนวนฟีโบนัชชี และจำนวนลูคัส ก็ต่อเมื่อ

$$a = a_n \pm L_{2n} + 2, n \geq 1$$

สำหรับแต่ละ n ทุกผลเฉลยจำนวนเต็ม (x_k, y_k) มีรูปแบบ

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{\varepsilon_k}{2} L_{2kn} \pm \dfrac{a_n}{2F_{2n}} F_{2kn} \\ y_k = \pm \dfrac{a_n}{2F_{2n}} \end{cases} \tag{25}$$

เมื่อ $k \geq 1$ เครื่องหมาย + และ − ขึ้นอยู่กับ k และมีความสัมพันธ์กับ $\varepsilon_k = \pm 1$

พิสูจน์ จากสมการ $x^2 + axy + ay^2 = 1$

คูณ 4 ทั้งสมการ จะได้ $4\left(x^2 + axy + ay^2\right) = 4$

$$4x^2 + 4axy + 4ay^2 = 4$$

$$4x^2 + 4axy + a^2y^2 - a^2y^2 + 4ay^2 = 4$$

$$\left[(2x)^2 + 2(2x)(ay) + (ay)^2\right] - \left(a^2 - 4a\right)y^2 = 4$$

$$(2x + ay)^2 - \left(a^2 - 4a\right)y^2 = 4 \tag{26}$$

$$u^2 + Dv^2 = 4 \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\left(u_n + v_n\sqrt{D}\right) = \varepsilon_n \left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^n \tag{21}$$

แทน u และ v ของสมการ (26) ในสมการ (21)

$$\frac{1}{2}\left(2x_m + ay_m + y_m\sqrt{D}\right) = \varepsilon_m\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m$$

$$2x_m + ay_m + y_m\sqrt{D} = 2\varepsilon_m\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m$$

$$2x_m + ay_m + y_m\sqrt{D} = \varepsilon_m\left[\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m + \left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right]$$

$$2x_m + ay_m + y_m\sqrt{D} = \varepsilon_m\left[\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m + \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m + \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m - \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right]$$

$$2x_m + ay_m + y_m\sqrt{D} = \varepsilon_m\left[\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m + \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right] + \varepsilon_m\left[\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m - \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right]$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$2x_m + ay_m = \varepsilon_m\left[\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m + \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right]$$

$$y_m\sqrt{D} = \varepsilon_m\left[\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m - \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right]$$

$$y_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{D}}\left[\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m - \left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right] \tag{27}$$

$$x_m = \frac{\varepsilon_m}{2}\left[\left(1 - \frac{a}{\sqrt{D}}\right)\left(\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m + \left(1 + \frac{a}{\sqrt{D}}\right)\left(\frac{u_1 - v_1\sqrt{D}}{2}\right)^m\right] \tag{28}$$

เมื่อ $m \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_m = \pm 1$ จากสมการที่ (31) จะเห็นว่า $D = a^2 - 4a$ และ (u_1, v_1) เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดของ $u^2 + Dv^2 = 4$ ซึ่ง $(u_1, v_1) = (a-2, 1)$ และรวมถึงความสัมพันธ์ข้างต้น ดังนั้นเราได้

$$x_m = \frac{\varepsilon_m}{2}\left[\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-4a}}\right)\left(\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)^m+\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-4a}}\right)\left(\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)^m\right] \quad (29)$$

และ

$$y_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{a^2-4a}}\left[\left(\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)^m-\left(\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)^m\right] \quad (30)$$

โดยพิจารณา Binet’s formulas สามารถทำให้ผลเฉลย (x_m, y_m) อยู่ในเทอมของ F_m และ L_m ได้ดังต่อไปนี้

ให้ $a^2-4a=5s^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก s จะสมมูลกับสมการ Special Pell’s equation

$$(a-2)^2-5s^2=4 \quad (31)$$

มีผลเฉลยพื้นฐานคือ $(a_1-2, s_1)=(3,1)$ รูปทั่วไปของผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของ (31) คือ

$$a_n-2=\varepsilon_n\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\varepsilon_n L_{2n}$$

และ $$S=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{D}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\varepsilon_n F_{2n}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มและ $\varepsilon_n=\pm1$ จาก $(2x+ay)^2-(a^2-4a)y^2=4$

ดังนั้น $(2x+a_n y)^2-5(Sy)^2=4$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม (x_m, y_m) รูปแบบดังนี้

$$2x_m+ay_m=\varepsilon_{2m}L_{2m} \quad \text{และ} \quad Sy_m=\pm F_{2m}$$

ดังนั้น $$x_m=\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{2m}L_{2m}\mp a_n\frac{F_{2m}}{F_{2n}}\right] \quad , y_m=\pm\frac{F_{2m}}{F_{2n}} \quad (32)$$

เมื่อเครื่องหมาย $+$ และ $-$ สอดคล้องกันและ $\varepsilon_{2m}=\pm1$

จาก $F_{2n}|F_{2m}$ ก็ต่อเมื่อ $n|m$ ซึ่งจะคิดได้ว่า $m=kn$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางจำนวน

ดังนั้นแทน $m=kn$ ใน (32) จะได้ผลเฉลยรูปแบบใน (25) ซึ่ง x_k ใน (25) เป็นจำนวนเต็มเสมอ □

ตารางต่อไปนี้แสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม (25) เมื่อ $1 \le n \le 6$

n	$a_n = L_{2n} + 2$	สมการ (24)	ผลเฉลย
1	5	$x^2 + 5xy + 5y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{2k} \mp \frac{5}{2} F_{2k}$, $y = \pm F_{2k}$
2	9	$x^2 + 9xy + 9y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{4k} \mp \frac{5}{6} F_{4k}$, $y = \pm \frac{1}{3} F_{4k}$
3	20	$x^2 + 20xy + 20y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{6k} \mp \frac{5}{4} F_{6k}$, $y = \pm \frac{1}{8} F_{6k}$
4	49	$x^2 + 49xy + 49y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{8k} \mp \frac{7}{6} F_{8k}$, $y = \pm \frac{1}{21} F_{8k}$
5	125	$x^2 + 125xy + 125y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{10k} \mp \frac{25}{22} F_{10k}$, $y = \pm \frac{1}{55} F_{10k}$
6	324	$x^2 + 324xy + 324y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{12k} \mp \frac{9}{8} F_{12k}$, $y = \pm \frac{1}{144} F_{12k}$

n	$a_n = -L_{2n} + 2$	สมการ (24)	ผลเฉลย
1	-1	$x^2 - xy - y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{2k} \pm \frac{1}{2} F_{2k}$, $y = \pm F_{2k}$
2	-5	$x^2 - 5xy - 5y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{4k} \pm \frac{5}{6} F_{4k}$, $y = \pm \frac{1}{3} F_{4k}$
3	-16	$x^2 - 16xy - 16y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{6k} \pm F_{6k}$, $y = \pm \frac{1}{8} F_{6k}$
4	-45	$x^2 - 45xy - 45y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{8k} \pm \frac{7}{6} F_{8k}$, $y = \pm \frac{1}{21} F_{8k}$
5	-121	$x^2 - 121xy - 121y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{10k} \pm \frac{25}{22} F_{10k}$, $y = \pm \frac{1}{55} F_{10k}$
6	-320	$x^2 - 320xy - 320y^2 = 1$	$x = \frac{\varepsilon_k}{2} L_{12k} \pm \frac{9}{8} F_{12k}$, $y = \pm \frac{1}{144} F_{12k}$

ต่อมาพิจารณาสมการที่เป็นลบจาก (23)

$$x^2 + axy + ay^2 = -1 \tag{33}$$

ทฤษฎีบท 2.5.2 [2] ผลเฉลยของสมการ (27) ในทางลบเป็นผลรวมเชิงเส้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์สองค่า คือ ฟีโบนัชชีและลูคัส ก็ต่อเมื่อ $a=-1$ หรือ $a=5$

ถ้า $a=-1$ จะได้ผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม (x_m, y_m) จะได้

$$x_m = \frac{\varepsilon_m}{2} L_{2m+1} \pm \frac{1}{2} F_{2m+1}\ ,\ y_m = \pm F_{2m+1}\ \ ;m \geq 0 \tag{34}$$

ถ้า $a=5$ จะได้ผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม (x_m, y_m) จะได้

$$x_m = \frac{\varepsilon_m}{2} L_{2m+1} \pm 5F_{2m+1}\ ,\ y_m = \pm F_{2m+1}\ \ ;m \geq 0 \tag{35}$$

ซึ่งจะมีเครื่องหมาย + และ – ขึ้นอยู่กับ m และสอดคล้องกับ $\varepsilon_m = \pm 1$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.5.1 จะได้สมการที่สมมูลกับ

$$(2x+ay)^2 - (a^2-4a)y^2 = -4$$

สมมติว่าการหาผลเฉลยที่เป็นลบของ Pell's equation ผลเฉลย (x_m, y_m) คือการอธิบายในรูปแบบของลำดับของฟีโบนัชชีและลูคัส ตามที่แบบผลรวมเชิงเส้นด้วยเหตุผลที่ค่าสัมประสิทธิ์ก็ต่อเมื่อ $a^2 - 4a = 5s^2$

พิสูจน์ตามทฤษฎี 2.5.1 ซึ่งจะได้ $a_n = \pm L_{2n} + 2$ และ $S_n = \pm F_{2n}, n \geq 1$

จากสมการ $(2x+ay)^2 - (a^2-4a)y^2 = -4$

จะได้ $(2x+ay)^2 - 5(S_n y)^2 = -4$

ที่ผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มคือ $2x_m + ay_m = \varepsilon_m L_{2m+1}$ และ $S_n y_m = \pm F_{2m+1}$

จะได้ว่า $y_m = \pm \dfrac{F_{2m+1}}{F_{2n}}, m \geq 1$

ถ้า $n \geq 2$ แล้ว $F_{2n} \geq 2$ และตั้งแต่ $2n | 2m+1$

จะได้ว่า $F_{2n} | F_{2m+1}$ ดังนั้น y_m ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $n=1$ และ $a = \pm L_2 + 2$ เช่น $a=-1$ และ $a=-5$

สำหรับ $a=-1$ สรุปได้ว่า $y_m = \pm F_{2m+1}$ และ $2x_m - y_m = \varepsilon_m L_{2m+1}$ และจะได้ผลเฉลยสมการ (34)
สำหรับ $a=-5$ แล้ว $y_m = \pm F_{2m+1}$ และ $2x_m + 5y_m = \varepsilon_m L_{2m+1}$ จะได้ผลเฉลยของสมการ (35) □

บทที่ 3

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2+axy+ay^2=\pm 1$ และ $x^2+axy+ay^2=\pm N$

3.1 ผลเฉลยของ $x^2+axy+ay^2=\pm 1$ ในเทอมของ GFS

ผลเฉลยในบทวิจัยของ Andreescu และ Andrica อยู่ในเทอมของ F_n และ L_n จะต้องแทน F_n และ L_n โดยเทอมของ G_n เท่านั้น เราจะแทนผลเฉลยให้อยู่ในเทอม G_n ได้อย่างไร

จาก $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$ สำหรับ $n\geq 3$

และ $G_n=aF_{n-2}+bF_{n-1}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มไม่เป็นศูนย์ a และ b

แล้ว $G_{n+1}=aF_{n-1}+bF_n$

$$G_n=a\left(F_n-F_{n-1}\right)+bF_{n-1}$$

$$G_n=\left(b-a\right)F_{n-1}+aF_n$$

ดังนั้น $G_n=\left(b-a\right)F_{n-1}+aF_n$

$$G_{n+1}=aF_{n-1}+bF_n$$

$$\begin{bmatrix} G_n \\ G_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b-a & a \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b-a & a \\ a & b \end{vmatrix}=\left(b-a\right)b-a^2=b^2-ab-a^2$$

สามารถพิสูจน์ว่า $b^2-ab-a^2\neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มไม่เป็นศูนย์ a และ b

พิสูจน์ สมมติ $b^2 - ab - a^2 = 0$

$$b = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4(1)(-a^2)}}{2}$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$b = \frac{a \pm |a|\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore\ b \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

แล้ว $\begin{bmatrix} b-a & a \\ a & b \end{bmatrix}$ จึงสามารถหาผกผันได้

ดังนั้น $\begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{b^2 - ab - a^2} \begin{bmatrix} b & -a \\ -a & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \\ G_{n+1} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{b^2 - ab - a^2} \begin{bmatrix} bG_n - aG_{n+1} \\ -aG_n + (b-a)G_{n+1} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $F_{n-1} = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}(bG_n - aG_{n+1})$

$$F_n = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-aG_n + (b-a)G_{n+1}\right]$$

จะได้ว่า $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $n \geq 1$

$$= \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[bG_n - aG_{n+1} - aG_{n+1} + (b-a)G_{n+2}\right]$$

$$= \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[bG_n - 2aG_{n+1} + (b-a)G_{n+2}\right]$$

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> กำหนดให้ $G_1 = a$ และ $G_2 = b$

เมื่อแทน $n=1$ จะได้ $L_1 = 1$

จะเห็นว่า $L_n = \dfrac{1}{b^2-ab-a^2}\left[bG_n - 2aG_{n+1} + (b-a)G_{n+2}\right]$

จะได้ $$L_1 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}\left[bG_1 - 2aG_2 + (b-a)G_3\right]$$

$$L_1 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}\left[ba - 2ab + (b-a)(a+b)\right]$$

$$L_1 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}\left[-ab + b^2 - a^2\right]$$

ดังนั้น $L_1 = 1$

เมื่อแทน $n=2$ จะได้ $L_2 = 3$

จะได้ $$L_2 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}\left[bG_2 - 2aG_3 + (b-a)G_4\right]$$

$$L_2 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}\left[b^2 - 2a(a+b) + (b-a)(a+2b)\right]$$

$$L_2 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}\left[b^2 - 2a^2 - 2ab + ab + 2b^2 - a^2 - 2ab\right]$$

$$L_2 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}\left[3b^2 - 3a^2 - 3ab\right]$$

$$L_2 = \frac{1}{b^2-ab-a^2}3\left(b^2 - a^2 - ab\right)$$

ดังนั้น $L_2 = 3$

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> กำหนดให้ $G_1 = a$ และ $G_2 = b$

เมื่อแทน $n=1$ จะได้ $F_1 = 1$

จะเห็นว่า $F_n = \dfrac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-aG_n + (b-a)G_{n+1}\right]$

จะได้ $$F_1 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-aG_1 + (b-a)G_2\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-a^2 + (b-a)b\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-a^2 + b^2 - ab\right]$$

ดังนั้น $F_1 = 1$

เมื่อแทน $n=2$ จะได้ $F_2 = 1$

จะได้ $$F_2 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-aG_2 + (b-a)G_3\right]$$

$$F_2 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-ab + (b-a)(a+b)\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-a^2 + b^2 - ab\right]$$

ดังนั้น $F_2 = 1$

เมื่อแทน $n=3$ จะได้ $F_3 = 2$

จะได้ $$F_3 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-aG_3 + (b-a)G_4\right]$$

$$F_3 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-a(a+b) + (b-a)(a+2b)\right]$$

$$F_3 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[-a^2 - ab + ab + 2b^2 - a^2 - 2ab\right]$$

$$F_3 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2}\left[2b^2 - 2a^2 - 2ab\right]$$

$$F_3 = \frac{1}{b^2 - ab - a^2} 2\left(b^2 - a^2 - ab\right)$$

ดังนั้น $F_3 = 2$ #

ดังนั้นในงานวิจัยของ Andrescu และ Andrica สามารถเขียนผลเฉลยของสมการ

$$x^2 + axy + ay^2 = \pm 1$$

ให้อยู่ในรูปของ Generalized Fibonacci Sequence ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 $x^2 + axy + ay^2 = 1$ มีผลเฉลยและอยู่ในเทอมของ G_n ก็ต่อเมื่อ $a = a_n = -\frac{1}{5}\left[G_n - 4G_{n+1} - G_{n+2}\right] + 2$, $n \geq 1$ เมื่อ $G_1 = c$ และ $G_2 = d$

โดยที่ c และ d เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 1$ ทุกผลเฉลย $\left(x_k, y_k\right)$ ที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ในรูปแบบ

$$x_k = \frac{\varepsilon_k}{2}\left[\frac{1}{5}\left(G_{2nk} - 4G_{2(n+2)} - G_{2k(n+2)}\right)\right] \mp \frac{a_n}{2}\left[\frac{G_{2nk}}{G_n}\right]$$

$$y_k = \pm\left[\frac{G_{2nk}}{G_{2n}}\right]$$

เมื่อ $k \geq 1$, เครื่องหมาย + และ − สอดคล้องกับค่า k , ขณะที่ $\varepsilon_k = \pm 1$

ทฤษฎีบท 3.1.2 $x^2+axy+ay^2=-1$ มีผลเฉลยและอยู่ในเทอมของ G_n ก็ต่อเมื่อ $a=-1$ หรือ $a=5$

ถ้า $a=-1$ ทุกผลเฉลย (x_m, y_m) ที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ในรูปแบบ

$$x_m=\frac{\varepsilon_m}{2}\left[\frac{1}{5}\left(G_{2m+1}-4G_{2m+2}-G_{2m+3}\right)\right]\pm\frac{1}{2}\left[G_{2m+1}\right]$$

$$y_m=\pm\left(G_{2m+1}\right) \qquad , m\geq 0$$

ถ้า $a=5$ ทุกผลเฉลย (x_m, y_m) ที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ในรูปแบบ

$$x_m=\frac{\varepsilon_m}{2}\left[\frac{1}{5}\left(G_{2m+1}-4G_{2m+2}-G_{2m+3}\right)\right]\mp 5\left[G_{2m+1}\right]$$

$$y_m=\pm G_{2m+1} \qquad , m\geq 0$$

เครื่องหมาย + และ − ขึ้นอยู่กับค่า m และสอดคล้องกับ $\varepsilon_m=\pm 1$

3.2 สมการไดโอแฟนไทน์ $x^2+axy+ay^2=\pm N$

ในงานวิจัยของ Andreescu and Andrica มีเงื่อนไข

$$x^2+axy+ay^2=\pm 1 \qquad (23)$$

ในขั้นตอนแรกเราจะพิจารณาสมการ

$$x^2+axy+ay^2=\pm N$$

เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 โดยสนใจเฉพาะผลเลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น

เราจะพิสูจน์ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.3

1) ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ $1<N\leq a$ แล้วสมการ $x^2+axy+ay^2=N$ จะไม่มีผลเฉลย

2) ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ $1<N\leq a-4$ แล้วสมการ $x^2+axy+ay^2=-N$ จะไม่มีผลเฉลย

พิสูจน์ เนื่องจาก $x^2+axy+ay^2=\pm N$

สามารถจัดรูปเป็น Special Pell's equation ได้ดังนี้

$$(2x+ay)^2-(a^2-4a)y^2=\pm 4N \tag{36}$$

เนื่องจาก a เป็นจำนวนบวกคู่

ดังนั้น $a\geq 2$ ซึ่งสามารถแบ่งได้ 2 กรณี

กรณี $a=2$ และ $N=2$ ต้องพิจารณาสมการ $x^2+2xy+2y^2=2$

ซึ่งสมการไม่มีผลเฉลย x และ y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณี $a\geq 4$

ดังนั้น $a=2a'$ เมื่อ a' เป็นจำนวนเต็มบวก

แทน $a=2a'$ ในสมการ (36) จะได้

$$(2x+(2a')y)^2-((2a')^2-4(2a'))y^2=\pm 4N$$

$$4x^2+2(2x)(2a'y)+(a'y)^2-(4a'^2-8a')y^2=\pm 4N$$

นำ 4 หารทั้งสมการได้

$$x^2+2xa'y+(a'y)^2-(a'^2-a')y^2=\pm N$$

$$(x+a'y)^2-(a'^2-2a')y^2=\pm N$$

จะได้
$$u^2-Dv^2=\pm N \tag{37}$$

เมื่อ $u=x+a'y$, $y=v$ และ $D=a'^2-2a'$

ดังนั้น $u=x+a'v$

จะหาผลเฉลยพื้นฐานของ $x^2-Dy^2=1$

ให้ $y=1$ ดังนั้น

$$x^2-(a'^2-2a')=1$$

$$x^2=1+a'^2-2a'$$

$$x^2=(a'-1)^2$$

$$x=\pm(a'-1)$$

เลือก $x=a'-1$ เพราะต้องการ x เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $a'-1+\sqrt{a'^2-2a'}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของ $x^2-Dy^2=1$

โดย ทฤษฎีบท 2.4.4 ได้ว่า

$$0\le v\le \frac{y_1}{\sqrt{2(x_1+1)}}\sqrt{N}$$

เมื่อ $x_1+y_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยพื้นฐานของ $x^2-Dy^2=1$

ได้ $0\le v\le \frac{1}{\sqrt{2a'}}\sqrt{N}$

นั่นคือ $0\le v\le \frac{1}{\sqrt{2a'}}\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{a}}$

1. ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวกคู่และพิจารณา $1<N\le a$ แบ่งออกเป็น 2 กรณีต่อไปนี้

1.) กรณี $N<a$ แล้ว $0\le v<1$

ดังนั้น $v=0$ ซึ่งเป็น trivial solution กล่าวคือสมการไม่มีผลเฉลย

2.) กรณี $N=a=2a'$ จะมี $0\le v\le \frac{1}{\sqrt{2a'}}\sqrt{N}=1$

ดังนั้น $0\le v\le 1$

นั่นคือ $v=1$

แล้ว $u^2-(a'^2-2a')=N=2a'$

ดังนั้น $u^2 = a'^2$

นั่นคือ $u = a' = \frac{a}{2}$

จะมี $a' = u = x + a'y = x + a'$

ดังนั้น $x = 0$

ดังนั้นสมการไม่มีผลเฉลย

2. ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวกคู่และพิจารณา $1 < N \le a$ แบ่งออกเป็น 2 กรณีต่อไปนี้

พิจารณา $x^2 + axy + ay^2 = -N$

ทำนองเดียวกัน $u^2 - Dv^2 = -N$

เมื่อ $u = x + a'y$, $y = v$ และ $D = a'^2 - 2a'$

ทำนองเดียวกันกับข้อ 1 ได้ว่า

ผลเฉลยพื้นฐานของ $x^2 - Dy^2 = 1$ คือ $a' - 1 + \sqrt{a'^2 - 2a'}$ เมื่อ $a = 2a'$

1.) กรณี $N < a - 4$

$$0 \le v \le \frac{1}{\sqrt{2(a'-2)}}\sqrt{N}$$

นั่นคือ $0 \le v \le \sqrt{\frac{N}{2a'-4}} < 1$

ดังนั้น $v = 0$ แสดงว่าสมการไม่มีผลเฉลย

2.) กรณี $N = a - 4$

ดังนั้น $0 \le v \le 1$

จะได้ $v = 1$ และ $u^2 - (a'^2 - 2a') = -(2a' - 4)$

แล้ว $u^2 = a'^2 - 4a' + 4 = (a' - 2)^2$

เนื่องจาก $u > 0$

จะได้ $u = a' - 2$

$$u = x + a'y = a' - 2$$

จะเห็นว่า $x = a'(1 - y) - 2$

$$x = -2$$

ดังนั้นสมการไม่มีผลเฉลย □

<u>ตัวอย่าง 3.3</u>

ในกรณี $1 < N \le a$

พิจารณา $N = a$

กำหนดให้ $a = 8$ และ $N = 8$

จะได้สมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = 8$

ในขั้นตอนแรกจะพิจารณาผลเฉลยของสมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = 1$

คูณ 4 ทั้งสมการ จะได้ $4x^2 + 32xy + 32y^2 = 4$

$$(2x + 8y)^2 - (8^2 - 32)y^2 = 4$$

$$(2x + 8y)^2 - 32y^2 = 4$$

$$(2x + 8y - 32y)(2x + 8y + 32y) = 4$$

ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ 3 กรณีย่อยดังนี้ (2,2) , (1,4) , (4,1)

ยกตัวอย่างเช่น

กรณีที่ 1 (2,2)

จะได้ว่า $2x - 24y = 2$ (*)

และ $2x + 40y = 2$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y = 0$

ดังนั้น $y = 0$

นำ $y = 0$ แทนในสมการ (*)

จะได้ $2x = 2$

ดังนั้น $x = 1$

ผลเฉลยที่ได้มานั้นคือ (1,0) ซึ่งเป็น trivial solution

จึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 2 (1,4)

จะได้ว่า $2x - 24y = 1$ (*)

และ $2x + 40y = 4$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y = -3$

ดังนั้น $y = \frac{3}{64}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

และในกรณีเลขฝั่งขวาเป็นตัวอื่นๆ ก็คิดในทำนองเดียวกันกับในกรณีตัวอย่าง

และในขั้นตอนที่สองจะพิจารณาสมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = 8$

เราจะพิจารณาตามแบบขั้นตอนในข้างต้น

จะได้ว่า $(2x + 8y - 32y)(2x + 8y + 32y) = 32$

ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ 6 กรณีดังนี้ (1,32) , (32,1) , (2,16) , (16,2) , (8,4) , (4,8)

ยกตัวอย่างเช่น

กรณีที่ 1 (1,32)

จะได้ว่า $2x-24y=1$ (*)

และ $2x+40y=32$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=-31$

ดังนั้น $y=\frac{31}{64}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 (2,16)

จะได้ว่า $2x-24y=2$ (*)

และ $2x+40y=16$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=-14$

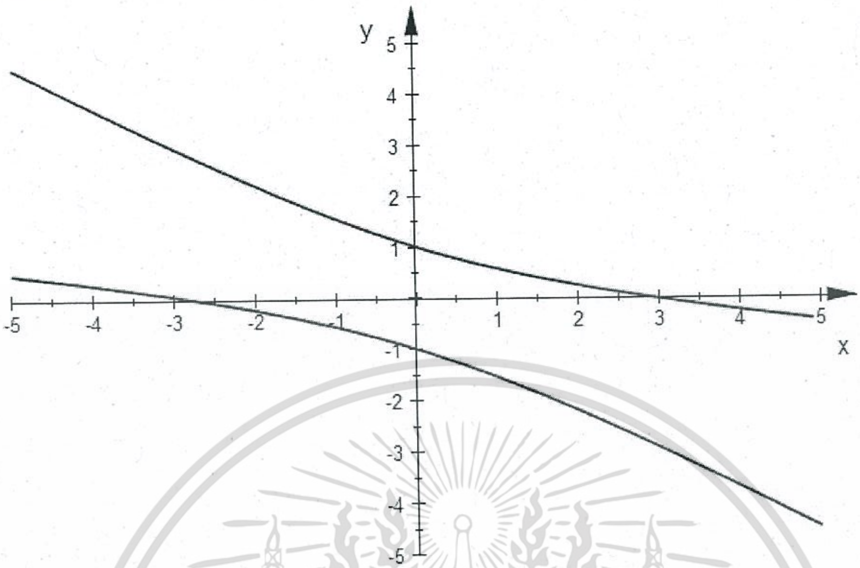
ดังนั้น $y=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

และในกรณีเลขฝั่งขวาเป็นตัวอื่นๆ ก็คิดในทำนองเดียวกันกับในกรณีตัวอย่าง

เราสามารถ plot graph ได้ดังนี้

```
plot(x^2+8*x*y+8*y^2=8)
```



ในกรณี $1 < N \le a$

พิจารณา $N < a$

กำหนดให้ $a = 8$ และ $N = 7$

จะได้สมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = 7$

ในขั้นตอนแรกจะพิจารณาผลเฉลยของสมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = 1$

ดังนั้นผลเฉลยในขั้นตอนแรกจะเหมือนในข้างต้น

และในขั้นตอนที่สองจะพิจารณาสมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = 7$

เราจะพิจารณาตามแบบขั้นตอนในข้างต้น

จะได้ว่า $(2x + 8y - 32y)(2x + 8y + 32y) = 28$

ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ 6 กรณีดังนี้ (1,28) , (28,1) , (2,14) , (14,2) , (4,7) , (7,4)

ยกตัวอย่างเช่น

กรณีที่ 1 (1,28)

จะได้ว่า $2x-24y=1$ (*)

และ $2x+40y=28$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=-27$

ดังนั้น $y=\frac{27}{64}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 (4,7)

จะได้ว่า $2x-24y=4$ (*)

และ $2x+40y=7$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=-3$

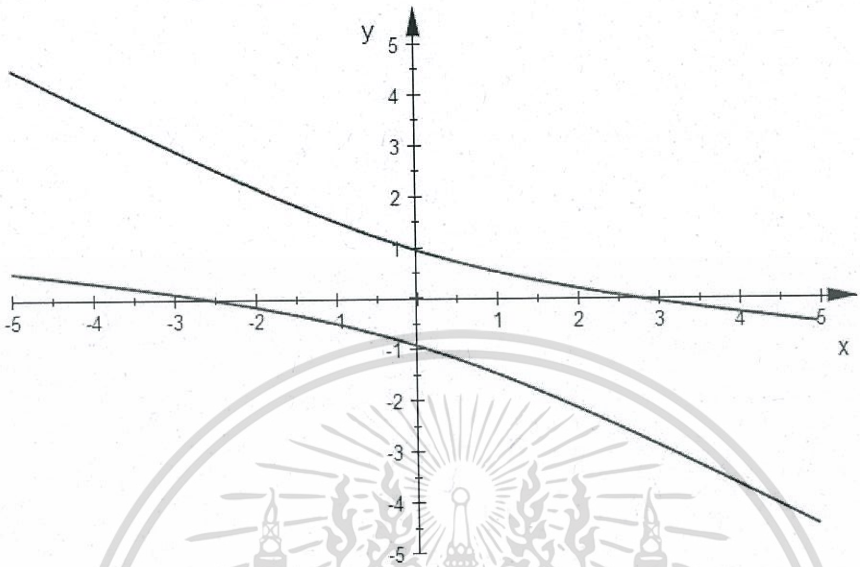
ดังนั้น $y=\frac{3}{64}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

และในกรณีเลขฝั่งขวาเป็นตัวอื่นๆ ก็คิดในทำนองเดียวกันกับในกรณีตัวอย่าง

เราสามารถ plot graph ได้ดังนี้

```
plot(x^2+8*x*y+8*y^2=7)
```



<u>ตัวอย่าง 3.4</u>

ในกรณี $1 < N \le a-4$

พิจารณา $N = a-4$

กำหนดให้ $a = 8$ และ $N = 4$

จะได้สมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = -4$

ในขั้นตอนแรกจะพิจารณาผลเฉลยของสมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = 1$

ดังนั้นผลเฉลยในขั้นตอนแรกจะเหมือนในข้างต้น

และในขั้นตอนที่สองจะพิจารณาสมการ $x^2 + 8xy + 8y^2 = -4$

เราจะพิจารณาตามแบบขั้นตอนในข้างต้น

จะได้ว่า $(2x + 8y - 32y)(2x + 8y + 32y) = -16$

เราสามารถแบ่งได้ออกเป็นอีก 10 กรณีย่อยดังนี้ (1,-16) , (-1,16) , (16,-1) , (-16,1) , (4,-4) , (-4,4) , (2,-8) , (-2,8) , (8,-2) , (-8,2)

ยกตัวอย่างเช่น

กรณีที่ 1 (1,-16)

จะได้ว่า $2x-24y=-1$ (*)

และ $2x+40y=16$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=-17$

ดังนั้น $y=\frac{17}{64}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 (4,-4)

จะได้ว่า $2x-24y=4$ (*)

และ $2x+40y=-4$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=8$

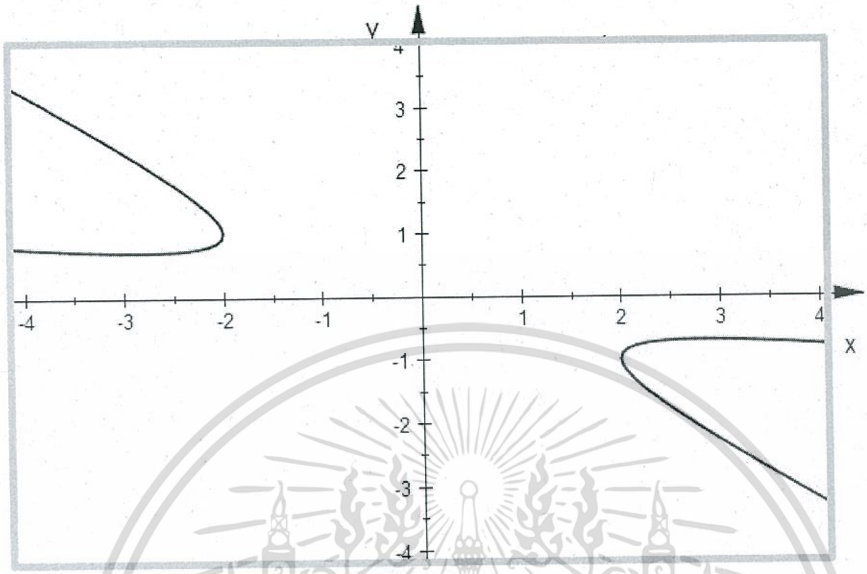
ดังนั้น $y=-\frac{8}{64}=-\frac{1}{8}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

และในกรณีเลขฝั่งขวาเป็นตัวอื่นๆ ก็คิดในทำนองเดียวกันกับในกรณีตัวอย่าง

เราสามารถ plot graph ได้ดังนี้

```
plot(x^2+8*x*y+8*y^2=-4)
```



พิจารณา $N < a-4$

กำหนดให้ $a=8$ และ $N=3$

จะได้สมการ $x^2+8xy+8y^2=-3$

ในขั้นตอนแรกจะพิจารณาผลเฉลยของสมการ $x^2+8xy+8y^2=1$

ดังนั้นผลเฉลยในขั้นตอนแรกจะเหมือนในข้างต้น

และในขั้นตอนที่สองจะพิจารณาสมการ $x^2+8xy+8y^2=-3$

เราจะพิจารณาตามแบบขั้นตอนในข้างต้น

จะได้ว่า $(2x+8y-32y)(2x+8y+32y)=-12$

เราสามารถแบ่งได้ออกเป็นอีก 12 กรณี (1,-12) , (-1,12) , (12,-1) , (-12,1) , (4,-3) , (-4,3) , (3,-4) , (-3,4) , (6,-2) , (-6,2) , (2,-6) , (-2,6)

ยกตัวอย่างเช่น

กรณีที่ 1 (-1,12)

จะได้ว่า $2x-24y=-1$ (*)

และ $2x+40y=12$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=-13$

ดังนั้น $y=\frac{13}{64}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 (4,-3)

ยกตัวอย่างเช่น

จะได้ว่า $2x-24y=4$ (*)

และ $2x+40y=-3$ (**)

นำสมการ (*) และ (**) มาลบกัน

จะได้ $-64y=7$

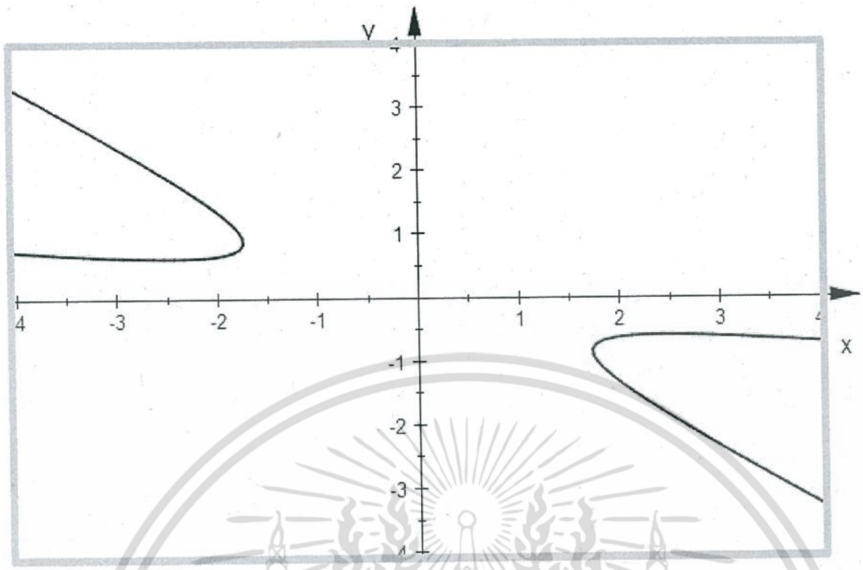
ดังนั้น $y=-\frac{7}{64}$

ค่า y ไม่เป็นจำนวนเต็มดังนั้นจึงทำให้สมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

และในกรณีเลขฝั่งขวาเป็นตัวอื่นๆ ก็คิดในทำนองเดียวกันกับในกรณีตัวอย่าง

เราสามารถ plot graph ได้ดังนี้

```
plot(x^2+8*x*y+8*y^2=-3)
```



บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

เราสามารถเปลี่ยนรูปแบบของ F_n และ L_n ให้อยู่ในรูปของ G_n ได้

โดยกำหนดให้ $G_1 = a\,, G_2 = b$ และ $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}\,; n \geq 3$ และ $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$

ดังนั้น $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ สำหรับ $n \geq 3$

สัญลักษณ์ G_n แทน The Generalized Fibonacci sequence (GFS)

ในงานวิจัยนี้จะได้ทฤษฎีใหม่ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 $x^2 + axy + ay^2 = 1$ มีผลเฉลยและอยู่ในเทอมของ G_n ก็ต่อเมื่อ

$a = a_n = -\frac{1}{5}\left[G_n - 4G_{n+1} - G_{n+2}\right] + 2$, $n \geq 1$ เมื่อ $G_1 = a$ และ $G_2 = b$

โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 1$ ทุกผลเฉลย (x_k, y_k) ที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ในรูปแบบ

$$x_k = \frac{\varepsilon_k}{2}\left[\frac{1}{5}\left(G_{2nk} - 4G_{2(n+2)} - G_{2k(n+2)}\right)\right] \mp \frac{a_n}{2}\left[\frac{G_{2nk}}{G_n}\right]$$

$$y_a = \pm\left[\frac{G_{2nk}}{G_{2n}}\right]$$

เมื่อ $k \geq 1$, เครื่องหมาย + และ − สอดคล้องกับค่า k , ขณะที่ $\varepsilon_k = \pm 1$

ทฤษฎีบท 3.1.2 $x^2+axy+ay^2=-1$ มีผลเฉลยและอยู่ในเทอมของ G_n ก็ต่อเมื่อ $a=-1$ หรือ $a=5$

ถ้า $a=-1$ ทุกผลเฉลย (x_m, y_m) ที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ในรูปแบบ

$$x_m=\frac{\varepsilon_m}{2}\left[\frac{1}{5}\left(G_{2m+1}-4G_{2m+2}-G_{2m+3}\right)\right]\pm\frac{1}{2}\left[G_{2m+1}\right]$$

$$y_m=\pm\left(G_{2m+1}\right) \qquad , \ m\geq 0$$

ถ้า $a=5$ ทุกผลเฉลย (x_m, y_m) ที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ในรูปแบบ

$$x_m=\frac{\varepsilon_m}{2}\left[\frac{1}{5}\left(G_{2m+1}-4G_{2m+2}-G_{2m+3}\right)\right]\mp 5\left[G_{2m+1}\right]$$

$$y_m=\pm G_{2m+1} \qquad , \ m\geq 0$$

เครื่องหมาย + และ − ขึ้นอยู่กับค่า m และสอดคล้องกับ $\varepsilon_m=\pm 1$

ทฤษฎีบท 3.1.3 1) ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ $1<N\leq a$ แล้วสมการ $x^2+axy+ay^2=N$ จะไม่มีผลเฉลย

2) ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ $1<N\leq a-4$ แล้วสมการ $x^2+axy+ay^2=-N$ จะไม่มีผลเฉลย

4.2 ข้อเสนอแนะ

เราอาจสามารถประยุกต์ใช้การพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.1.3 พิจารณาการมีผลเฉลยของสมการ $x^2-axy+ay^2=\pm N$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก

เอกสารอ้างอิง

[1] Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I., An Introduction to Diophantine Equations, Brikhäuser, Boston-Besal-Berlin, 2010.

[2] Andreescu, T., Andrica, D., Equations with Solution in Terms of Fibonacci and Lucas Sequences, Texas-Romania, 2013.

[3] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley and Sons, New York, Toronto, 2001, Proc.

[4] T. Nagell, Introduction to Number Theory, Professor of Mathematics University of Uppsala, 1951.

[5] รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์, รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ, ทฤษฎีจำนวน 2 (Number Theory 2), สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2557.