การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน
NUMERICAL SOLUTION FOR VIBRATION OF CANTILEVER BEAM

เมธา อิ้วสวัสดิ์
อารียา ชุมแก้ว

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน
NUMERICAL SOLUTION FOR VIBRATION OF CANTILEVER BEAM

เมธา อิ้วสวัสดิ์
อารียา ชุมแก้ว

0026506 2
TB00085

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NUMERICAL SOLUTION FOR VIBRATION OF CANTILEVER BEAM

MATHA EWSAWAT
AREEYA CHUMKAEW

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน Numerical solution for Vibrations of Cantilever Beams
ชื่อนักศึกษา	นายเมธา อิ้วสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 56050107 นางสาวอารียา ชุมแก้ว รหัสนักศึกษา 56050180
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผ.ศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ประธานกรรมการ	
อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทย่าศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน
ชื่อนักศึกษา นายเมธา อิ้วสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 56050107
นางสาวอารียา ชุมแก้ว รหัสนักศึกษา 56050180
ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะ วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา 2559
อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษนี้ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคานเพื่อหาสมการการสั่นของคาน ที่ปลายคานข้างหนึ่งยึดติดกับผนังและปลายคานอีกข้างเป็นอิสระ(Cantilever Beam) โดยจะศึกษาระเบียบวิธีผลต่างจำกัดเปรียบเทียบกับผลเฉลยโดยระเบียบวิธีแยกตัวแปร และลดรูปสมการการสั่นของคานพร้อมหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด การแปลงลาปลาซและวิธีคอลโลเคชัน

คำสำคัญ : การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Numerical solution for Vibration of Cantilever Beam
Students	Mr Matha Ewsawat Student ID 56050107
	Miss Areeya Chumkaew Student ID 56050180
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Applied Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul
Co-Advisor (if any)	Dr.Wannaporn Sanprasert

ABSTRACT

This special problem study Numerical Solution for vibration of Cantilever Beam at the tip that adhere to the wall and another tip which is independent (Cantilever Beam). By Studying Finite Difference compare with solution by separate of variable. After that reduce equation for vibration of beam and find the solution by Finite Difference, Laplace Transformation and Collocation Method.

Keywords : Numerical solution for Vibration of Cantilever Beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษเรื่องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน คณะผู้จัดทำขอขอบคุณ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล และดร.วรรณพร สรรประเสริฐ เป็นอย่างสูงที่คอยให้คำปรึกษา และให้ความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้ และช่วยตรวจสอบแก้ไขข้อผิดพลาดในการดำเนินงานให้เกิดความถูกต้องอย่างครบถ้วน

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณ ผ.ศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ และอ.พรชัย ชัยสนิท ที่ให้ความกรุณาและสละเวลามาเป็นประธานกรรมการและกรรมการในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้และช่วยให้คำแนะนำเพื่อให้ปัญหาพิเศษนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สุดท้ายนี้คณะผู้จัดทำขอขอบคุณอาจารย์สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่านที่ช่วยให้ความรู้และขอขอบคุณเจ้าหน้าที่สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่ช่วยให้ความสะดวกในการใช้บริการห้องคอมพิวเตอร์ในการทำปัญหาพิเศษนี้จนสำเร็จไปได้ด้วยดี

เมธา อิ้วสวัสดิ์

อารียา ชุมแก้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	จ
สารบัญรูป	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	**1**
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	1
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน	2
1.6 แผนการดำเนินงาน	2
บทที่ 2 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับคาน	**3**
2.1 กำหนดค่าของคาน	4
2.2 สมการของคาน	5
2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงการสั่นของคาน	5
2.4 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่โดยการแยกตัวแปร	6
2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	13
บทที่ 3 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสมการเชิงอนุพันธ์	**14**
3.1 การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	15
3.2 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข	18
3.3 การหาผลเฉลยโดยคอลโลเคชัน	33
3.3.1 กรณีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง	33
3.3.2 กรณีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง	35
บทที่ 4 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน	**40**
4.1 ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน	40
4.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการการสั่นของคาน	43
4.3 การหาผลเฉลยกรณีลดรูป	50
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ	**62**
เอกสารอ้างอิง	**63**
ภาคผนวก	**64**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณเชิงวิเคราะห์และการคำนวณเชิงตัวเลข	32
3.2 ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ เชิงตัวเลขและวิธีคอลโลเคชัน	39
4.1 ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด วิธีคอลโลเคชันและการแปลงลาปลาซ	61

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 คานปลายตรึงข้างเดียว	3
2.2 คานจะโก่งตามแรงกด	3
2.3 การโก่งของคานที่เปลี่ยนแปลงไป	4
4.1 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า	50
4.2 ตำแหน่งของผลเฉลย	53

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

มีโครงสร้างจำนวนมากที่นำทฤษฎีและสมการคานมาประยุกต์ใช้ เช่น การก่อสร้างอาคาร สระว่ายน้ำ ตัวถังรถยนต์ เป็นต้น ในงานวิจัยนี้จะศึกษาปัญหาเชิงตัวเลขของสมการคานเพื่อหาค่าการสั่นของคานที่ปลายคานข้างหนึ่งยึดติดกับผนังและปลายคานอีกข้างเป็นอิสระ(Cantilever Beam) รวมทั้งศึกษาวิธีเชิงตัวเลข เพื่อการหาผลเฉลยโดยประมาณ

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

1.) พิจารณาทฤษฎีต่างๆและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการคานที่ปลายคานข้างหนึ่งยึดติดกับผนังและปลายคานอีกข้างเป็นอิสระ

2.) ศึกษาระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยในสมการของคานที่ปลายคานข้างหนึ่งยึดติดกับผนังและปลายคานอีกข้างเป็นอิสระ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1.) ศึกษาเฉพาะคานแบบปลายข้างหนึ่งยึดแน่นและปลายอีกข้างเป็นอิสระ โดยคานมีขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งคาน

2.) ศึกษาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของคานแบบยึดแน่น (Fixed-Ended Beam)

3.) ศึกษาการหาผลเฉลยจากระเบียบวิธีผลต่างจำกัดและวิธีคอลโลเคชัน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคานที่ปลายคานข้างหนึ่งยึดติดกับผนังและปลายคานอีกข้างเป็นอิสระ มีประโยชน์สำหรับผู้ที่ต้องการนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางด้านต่างๆ อาทิเช่น งานทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และสิ่งก่อสร้างต่างๆ และเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่จะศึกษาในด้านนี้ต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.) ค้นคว้าและศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับทฤษฎี รูปแบบและสมการคาน

2.) ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าการสั่นของคานในรูปแบบต่างๆ

3.) ศึกษาวิธีเชิงตัวเลขระเบียบวิธีผลต่างจำกัดและวิธีคอลโลเคชัน

4.) พัฒนาวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา

1.6 แผนการดำเนินงาน

กิจกรรมดำเนินการ	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2559					ปี 2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
วางแผนการวิจัย										
บทที่ 1 บทนำ										
บทที่ 2 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับคาน										
บทที่ 3 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสมการเชิงอนุพันธ์										
บทที่ 4 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน										
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ										
ทำรูปเล่มหน้าปก										
ศึกษาและนำเสนอ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

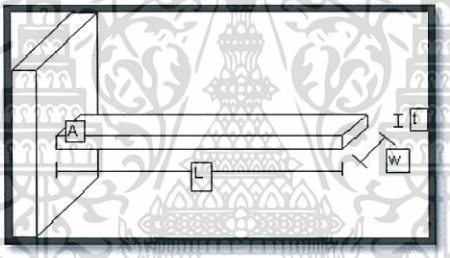
บทที่ 2
ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับคาน

ในงานนำเสนอนี้ กลุ่มของข้าพเจ้าจะนำเสนอสมการการสั่นของคาน ที่ปลายคานข้างหนึ่งยึดติดกับผนังและปลายคานอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระ โดยจะแสดงว่าสมการการสั่นของคาน คือ

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = -\lambda_m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

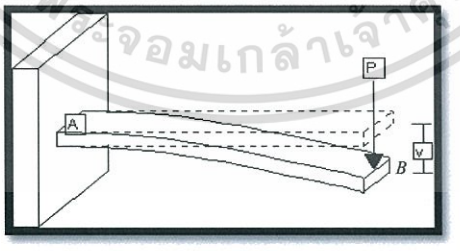
2.1 กำหนดค่าของคาน

คานที่จะศึกษาในงานวิจัยนี้ให้เป็นคานที่มีความยาว L หน่วย ความกว้าง w หน่วย และความหนา t หน่วย ปลายข้างหนึ่งของคานตรึงไว้ที่จุด A ปลายอีกข้างหนึ่งเป็นอิสระให้ A เป็นจุดเริ่มต้นของระบบแกน พิกัดดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 : คานปลายตรึงข้างเดียว

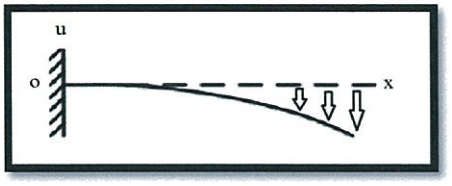
ให้ปลายอิสระของคาน ณ จุด B มีแรง Pมากระทำ ทำให้คานมีรูปร่างเปลี่ยนแปลงไป ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 : คานจะโก่งตามแรงกด

ให้ $u(x)$ เป็นการโก่งของคานที่เปลี่ยนแปลงไป ณ แต่ละตำแหน่ง P ในแนวราบตามพิกัด x ใดๆ เมื่อมีแรงมากระทำกับคาน ดังรูปที่ 2.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.3 : การโก่งของคานที่เปลี่ยนแปลงไป

2.2 สมการของคาน

2.2.1 อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ $u(x)$ เทียบกับ x จะได้ความชันของการโก่งของคาน คือ

$$T = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \tag{2.2}$$

2.2.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของการโก่งของคานเทียบกับ x คือค่าความโค้ง κ ของคาน ดังนั้น

$$\kappa = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

2.2.3 ในขณะเดียวกันค่าความโค้งของคานจะมีความสัมพันธ์กับโมเมนต์ดัด Mและสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่น EI ของคานเมื่อ E แทนความสามารถในการยืดของคานและ I แทนโมเมนต์ความเฉื่อยซึ่ง EI นี้จะมีค่าคงที่ขึ้นกับลักษณะของคานและวัสดุที่นำมาสร้างคาน

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$M = EI\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

2.2.4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัด คือแรงเฉือน V ดังนั้น

$$V = EI\frac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3} \tag{2.5}$$

2.2.5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน คือน้ำหนักบรรทุก F ดังนั้น

$$F = EI\frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} \tag{2.6}$$

2.2.6 ในขณะเดียวกันแรง F กระทำต่อคานทำให้คานโก่งแรง F มีความสัมพันธ์กับมวล m ของคานและอัตราเร่ง a ตามกฎข้อสองของนิวตัน

$$F = ma \tag{2.7}$$

$$a = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} \tag{2.7.1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$m = \rho v \tag{2.7.2}$$

$$v = \frac{A(x)\Delta x}{\Delta x} \tag{2.7.3}$$

$$\lambda_m = \rho A(x) \tag{2.7.4}$$

แทนสมการ (2.7.3) ลงในสมการ (2.7.2) จะได้

$$m = \rho \frac{A(x)\Delta x}{\Delta x} \tag{2.7.5}$$

แทนสมการ (2.7.1) และ(2.7.5) ลงในสมการ (2.7) จะได้

$$F = \frac{\rho A(x)\Delta x}{\Delta x}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

แทนสมการ (2.7.4) ลงในสมการ (2.8) จะได้

$$F = -\lambda_m \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} \tag{2.9}$$

เครื่องหมายเป็นลบ – เนื่องจากแรง F มีทิศชี้ลง

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงการสั่นของคาน

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = -\lambda_m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

โดยมีเงื่อนไข ดังนี้

$u(0,t) = 0$ เนื่องจากเป็นปลายคานข้างที่ถูกยึดติดไว้

$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ เนื่องจากเป็นปลายคานข้างที่ถูกยึดติดไว้ จึงไม่มีการเคลื่อนที่ของคาน

$\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} = 0$ เนื่องจากปลายคานของข้างที่ไม่ถูกยึดติดไว้ไม่มีความเร่ง จึงไม่สามารถหมุนได้

$\frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^3} = 0$ เนื่องจากปลายคานของข้างที่ไม่ถูกยึดไว้ไม่สามารถบิดได้

2.4 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่โดยการแยกตัวแปร

จาก

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = -\lambda_m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

$$a^2 = \frac{EI}{\lambda_m} \tag{2.11}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนสมการ (2.11)ในสมการ(2.10)

จะได้ $$a^2\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

สมมติให้ $$u(x,t)=X(x)T(t)$$

จะได้ $$a^2\frac{\partial^4 X(x)T(t)}{\partial x^4}=-\frac{\partial^2 X(x)T(t)}{\partial t^2}$$

จัดรูปโดยให้ x อยู่ข้างหนึ่ง t อยู่อีกข้างหนึ่ง

$$a^2\frac{\partial^4 X(x)}{X(x)\partial x^4}=-\frac{\partial^2 T(t)}{T(t)\partial t^2}$$

$$a^2\frac{\partial^4 X(x)}{X(x)\partial x^4}=-\frac{\partial^2 T(t)}{T(t)\partial t^2}=\mu$$

เนื่องจากทางซ้ายมีเฉพาะพจน์ของ x และทางขวามีเฉพาะพจน์ t และทางซ้ายเท่ากับทางขวา

ดังนั้นทั้งสองข้างจึงต้องมีค่าเท่ากับค่าคงที่ให้เป็น μ

โดย $\mu=0,\ \mu<0$ หรือ $\mu>0$

2.4.1 ถ้า $\mu=0$ แล้ว $a^2\frac{\partial^4 X(x)}{X(x)\partial x^4}=0$ หรือ $X^4(x)=0$

จะได้

$$X^3(x)=C_1$$
$$X^2(x)=C_1x+C_2$$
$$X^1(x)=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$$
$$X(x)=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$$

และ $-\frac{\partial^2 T(t)}{T(t)\partial t^2}=0$ หรือ $T^2(t)=0$

จะได้ $$T^1(t)=a_1$$
$$T(t)=a_1t+a_2$$

จาก $X(0)=0$ จะได้ $C_4=0$ $\quad X(x)=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2$

$X^1(0)=0$ จะได้ $C_3=0$ $\quad X^2(l)=C_1l+C_2=0$ จะได้ $C_2=0$

$X^3(l)=C_1=0$

$X(x)=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $u(x,t)=X(x)T(t)=0$ ผลเฉลยเป็น 0

2.4.2 ถ้า $\mu<0$ แล้ว $a^2\dfrac{\partial^4X(x)}{X(x)\partial x^4}=-\lambda^2$ และ $-\dfrac{\partial^2T(t)}{T(t)\partial t^2}=-\lambda^2$

ให้ $\mu=-\lambda^2$

$$a^2\frac{X^4(x)}{\partial x^4}+\lambda^2X(x)=0$$

$$a^2r^4+\lambda^2=0$$

$$r^4+\frac{\lambda^2}{a^2}=0 \quad \Rightarrow r^4=\frac{\lambda^2}{a^2}(-1)=\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\right)^4(\cos\pi+\sin\pi)$$

$$r=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$r=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\frac{1+i}{\sqrt{2}}),\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}),\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}),\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(\frac{1-i}{\sqrt{2}})$$

$$X(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left[e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left(C\cos\frac{1}{\sqrt{2}}x+D\sin\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)+e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left(E\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)+F\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)\right)\right]$$

$$X(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left[(C+E)\cos\frac{1}{\sqrt{2}}x+(D-F)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}x\right]$$

$$\frac{\partial^2T(t)}{\partial t^2}-\lambda^2T(t)=0$$

$$r^4-\lambda^2=0$$

$$r=\pm\lambda$$

$$T(t)=Ae^{\lambda t}+Be^{-\lambda t}$$

$u(x,t)=X(x)T(t)=0$

จากเงื่อนไข $u(0,t)=0=X(0)T(t)$

จะได้ $X(0)=0,T(t)\neq0$ และ $X(0)\neq0,T(t)=0$

กรณี $X(0)\neq0,T(t)=0$

จาก $T(t)=Ae^{\lambda t}+Be^{-\lambda t}$ เนื่องจาก $e^{\lambda t}\neq0$ และ $e^{-\lambda t}\neq0$

ดังนั้น $T(t)=0$ เมื่อ $A=0$ และ $B=0$ ทำให้ $T(t)=0$

แล้ว $u(x,t)=X(x)T(t)=0$ ผลเฉลยเป็น 0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี $X(0)=0, T(t)\neq 0$

จาก $X(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}\left[(C+E)\cos\frac{1}{\sqrt{2}}x+(D-F)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}x\right]$

$$X(0)=0=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(C+E)\Rightarrow C+E=0$$

ทำให้ $X(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}(D-F)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}x$

จาก

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(0,t)}=0=X^1(0)T(t)$$

$$T(t)\neq 0, X^1(0)=0$$

$$X^1(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}(D-F)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{\frac{\lambda}{a}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}\frac{1}{\sqrt{2}}(D-F)\cos\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$X^1(0)=0=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\frac{1}{\sqrt{2}}(D-F)=0$ จะได้ $D-F=0$ ทำให้ $X(x)=0$

ดังนั้น $u(x,t)=X(x)T(t)=0$ ผลเฉลยเป็น 0

2.4.3 จาก $-\frac{\partial^2 T(t)}{T(t)\partial t^2}=\lambda^2$ จัดรูปใหม่จะได้

ถ้า $\mu>0$

ให้ $\mu=\lambda^2$

$$-\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}=\lambda^2 T(t)$$

$$-\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}+\lambda^2 T(t)=0$$

สมการช่วย คือ $r^2+\lambda^2=0$ โดยการแยกตัวประกอบ

$$r^2-i^2\lambda^2=0$$

$$(r+i\lambda)(r-i\lambda)=0$$

$$r=\pm i\lambda$$

$$T(t)=A\cos\lambda t+B\sin\lambda t$$

จาก $a^2\frac{\partial^4 X(x)}{X(x)\partial x^4}=\lambda^2$ จัดรูปใหม่จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $\mu > 0$

ให้ $\mu = \lambda^2$

$$a^2 \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} = \lambda^2 X(x)$$

$$a^2 \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \lambda^2 X(x) = 0$$

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \frac{\lambda^2}{a^2} X(x) = 0$$

สมการช่วย คือ $r^4 + \frac{\lambda^2}{a^2} = 0$ โดยการแยกตัวประกอบ

$$\left(r^2 - \frac{\lambda}{a}\right)\left(r^2 + \frac{\lambda}{a}\right) = 0 = \left(r^2 - \frac{\lambda}{a}\right)\left(r^2 - i^2 \frac{\lambda}{a}\right)$$

$$\left(r - \sqrt{\frac{\lambda}{a}}\right)\left(r + \sqrt{\frac{\lambda}{a}}\right)\left(r - i\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\right)\left(r + i\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\right) = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{\lambda}{a}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{a}}, i\sqrt{\frac{\lambda}{a}}, -i\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$$

$$X(x) = C\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x + D\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x + E\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x + F\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x$$

จากเงื่อนไข $u(0,t) = 0 = X(0)T(t)$

แล้ว $X(0) = 0$ หรือ $T(t) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(0,t)} = 0$ จะได้ $X^1(0)T(t) = 0$

แล้ว $X^1(0) = 0$ หรือ $T(t) = 0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(l,t)} = 0$ จะได้ $X^2(0)T(t) = 0$

แล้ว $X^2(l) = 0$ หรือ $T(t) = 0$

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|_{(l,t)} = 0$ จะได้ $X^3(0)T(t) = 0$

แล้ว $X^3(l) = 0$ หรือ $T(t) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $T(t)=0$ แล้ว $u(x,t)=X(x)T(t)=0$ ได้เป็นผลเฉลยที่สำคัญน้อย

ถ้าต้องการผลเฉลยที่ไม่ใช่ศูนย์แล้ว $T(t)\neq 0$

ดังนั้น
$$X(0)=0$$
$$X^{1}(0)=0$$
$$X^{2}(l)=0$$
$$X^{3}(l)=0$$

$$X(x)=C\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+D\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+E\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+F\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x$$

$X(0)=C+E$ แล้ว $E=-C$ (2.12)

$$X'(x)=C\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+D\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+E\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+F\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x$$

$X'(0)=D\sqrt{\frac{\lambda}{a}}+F\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\Rightarrow D+F=0$ แล้ว $F=-D$ (2.13)

$$X^{2}(x)=-C\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x-D\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+E\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+F\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x$$

$$X^{3}(x)=C\frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x-D\frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+E\frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x+F\frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x$$

$$X^{2}(l)=0=\frac{\lambda}{a}\left[-C\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l-D\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+E\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+F\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l\right]$$

$$-C\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l-D\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+E\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+F\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l=0 \quad (2.14)$$

$$X^{3}(l)=0=\frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left[C\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l-D\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+E\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+F\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l\right]$$

$$C\sin\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l-D\cos\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+E\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l+F\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l=0 \quad (2.15)$$

ให้ $z=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}l$ จะได้

จาก (2.14) $-C\cos z-D\sin z+E\cosh z+F\sinh z=0$

จาก (2.15) $C\sin z-D\cos z+E\sinh z+F\cosh z=0$

จาก (2.12) $-C=E$, $C=-E$ และจาก(2.13) $F=-D$, $D=-F$

จะได้ $E\cos z+F\sin z+E\cosh z+F\sinh z=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-E\sin z+F\cos z+E\sinh z+F\cosh z=0$$

$$E\left(\cos z+\cosh z\right)+F\left(\sin z+\sinh z\right)=0$$

$$E\left(-\sin z+\sinh z\right)+F\left(\cos z+\cosh z\right)=0$$

$$\begin{bmatrix}\cosh z+\cos z & \sinh z+\sin z\\ \sinh z-\sin z & \cosh z+\cos z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E\\F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$E\neq 0$ และ $F\neq 0$

เพราะว่า $E=0$ แล้ว $C=0$ และ $F=0$ แล้ว $D=0$

ทำให้ $X(x)=0$

ถ้า $X(x)=0$ แล้ว $u(x,t)=X(x)T(t)=0$

ได้เป็นผลเฉลยที่สำคัญน้อยถ้าต้องการผลเฉลยที่ไม่ใช่ศูนย์แล้ว $\begin{bmatrix}E\\F\end{bmatrix}\neq 0$

ดังนั้น $$\begin{vmatrix}\cosh z+\cos z & \sinh z+\sin z\\ \sinh z-\sin z & \cosh z+\cos z\end{vmatrix}=0$$

$$\left[\cosh z\left(\cosh z+\cos z\right)+\cos z\left(\cosh z+\cos z\right)\right]$$

$$-\left[\sinh z\left(\sinh z-\sin z\right)+\sin z\left(\sinh z-\sin z\right)\right]=0$$

$$\left(\cosh^2 z+\cosh z\cos z+\cos z\cosh z+\cos^2 z\right)$$

$$-\left(\sinh^2 z-\sinh z\sin z+\sinh z\sin z-\sin^2 z\right)=0$$

$$\cosh^2 z+2\cosh z\cos z+\cos^2 z-\sinh^2 z+\sin^2 z=0$$

$$2\cosh z\cos z+2=0$$

$$\cosh z\cos z=-1$$

$$\cos z=\frac{-1}{\cosh z}$$

โดยโปรแกรมสำเร็จรูปทางการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

จะได้ รากของ z ของ $\cos z=\dfrac{-1}{\cosh z}$ คือ $z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots$

ณ แต่ละค่าของ z จะได้แต่ละค่าของ λ

โดย $z=\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{a}}l$ หรือ $\lambda=\dfrac{az_n^2}{l^2}$

$$\lambda_1=\frac{az_1^2}{l^2},\lambda_2=\frac{az_2^2}{l^2},\ldots,\lambda_n=\frac{az_n^2}{l^2},\ldots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือสามารถหา λ ได้

และ $\frac{z_n}{l}=\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}$

จาก $E\cos z+F\sin z+E\cosh z+F\sinh z=0$

$$E\left(\cos z+\cosh z\right)=-F\left(\sin z+\sinh z\right)$$

$$\frac{E}{F}=-\frac{\left(\sin z+\sinh z\right)}{\left(\cos z+\cosh z\right)}$$

ณ แต่ละค่าของ z_n

ให้ $E_n=-\left(\sin z_n+\sinh z_n\right)=-C_n$

$F_n=\left(\cos z_n+\cosh z_n\right)=-D_n$

จาก $X_n(x)=C_n\cos\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}x+D_n\sin\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}x+E_n\cosh\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}x+F_n\sinh\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}x$

จะได้ $X_n(x)=\left(\sin z_n+\sinh z_n\right)\cos\frac{z_n}{l}x-\left(\cos z_n+\cosh z_n\right)\sin\frac{z_n}{l}x$

$$-\left(\sin z_n+\sinh z_n\right)\cosh\frac{z_n}{l}x+\left(\cos z_n+\cosh z_n\right)\sinh\frac{z_n}{l}x$$

$$X_n(x)=\left(\sin z_n+\sinh z_n\right)\left(\cos\frac{z_n}{l}x-\cosh\frac{z_n}{l}x\right)-\left(\cos z_n+\cosh z_n\right)\left(\sin\frac{z_n}{l}x-\sinh\frac{z_n}{l}x\right)$$

และ $T_n(t)=A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t$

แล้ว $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t\right)$$

จากเงื่อนไข $u(x,0)=f(x)$

แล้ว $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left(A_n\cos 0+B_n\sin 0\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)=f(x)$$

จากอนุกรมฟูริเยร์ $A_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)\,dx}{\int_0^l X_n^2(x)\,dx}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากเงื่อนไข $\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x,0)} = g(x)$

แล้ว $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left(-A_n\lambda_n \cos\lambda_n t + B_n\lambda_n \sin\lambda_n t\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\lambda_n\left(-A_n \cos 0 + B_n \sin 0\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n X_n(x) = g(x)$$

จากอนุกรมฟูริเยร์ $$B_n = \frac{\int_0^l g(x)X_n(x)\,dx}{\lambda_n \int_0^l X_n^2(x)\,dx}$$

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

(K.S Thankane :2009) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยน เพื่อหาผลเฉลยโดยนำค่าที่ได้จริงมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดด้วยความคลาดเคลื่อน $O(h^2)$ ที่ได้จากการเขียนโปรแกรมMathematica

(S RAO.Gunnakala :2012) ได้ใช้ Galerkin Finite Element Method ในการหาผลเฉลยของสมการคานหน้าตัดไม่แปรเปลี่ยนโดยใช้โปรแกรม MATLAB

(กำพลศักดิ์ บุญโกย :2016) ได้ศึกษาเกี่ยวกับคานหน้าตัดแปรเปลี่ยน เพื่อหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดด้วยความคลาดเคลื่อน $O(h^4)$

ในปัญหาพิเศษนี้ได้ศึกษาสมการการสั่นของคาน โดยเมื่อเวลาผ่านไปนานๆตำแหน่งของคานจะเปลี่ยนไปตามน้ำหนักของคาน ณ ตำแหน่งนั้น โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดและวิธีCollocation เปรียบเทียบกับการแปลงลาปลาซ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสมการเชิงอนุพันธ์

ในบทนี้จะอธิบายถึงการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยจะเริ่มจากอธิบายถึงสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อเป็นความรู้

สมการเชิงอนุพันธ์(Differential Equation) คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวแปรหรือมากกว่า เทียบกับ ตัวแปรต้นหนึ่งตัวแปรหรือมากกว่า เช่น

$$\frac{dx(t)}{dt} = \cos\left(x(t)\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{dy}{dx} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial x(t,u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(t,u)}{\partial u^2} \tag{3.3}$$

การหาอนุพันธ์จะหาอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรต้น เช่น การเขียน $\frac{d^2y}{dx^2}$ และ $\frac{dy}{dx}$ ใน (3.2) บอกให้ทราบว่า y เป็นตัวแปรตามและ x เป็นตัวแปรต้น ตัวแปรต้นมีได้หลายตัว ดังเช่น ใน (3.3) มี t และ u เป็นตัวแปรต้น

ถ้าตัวแปรต้นมีเพียงตัวเดียว เช่น t ใน (3.1) และ x ใน (3.2) เรียกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) ถ้าตัวแปรต้นมีหลายตัวและมีอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรต้นนั้นดังเช่นใน (3.3) มี t และ u เป็นตัวแปรต้น เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย(partial differential equation)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1 การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สามารถดำเนินการได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กรณีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

$$y'+2y=2-e^{-4x} \quad , y(0)=1$$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$

จาก $\frac{dy}{dx}+2y=2-e^{-4x}$

จะได้ $p(x)=2$

หาตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating factor)

$$u(x)=e^{\int p(x)dx}$$
$$u(x)=e^{\int 2dx}$$
$$u(x)=e^{2x}$$

คูณด้วย e^{2x} ทั้งสองข้างของสมการ

$$e^{2x}y'+2e^{2x}=2e^{2x}-e^{-4x}e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{2x}\right)=2e^{2x}-e^{-2x}$$

$$ye^{2x}=\int\left(2e^{2x}-e^{-2x}\right)dx$$

$$ye^{2x}=\int 2e^{2x}dx-\int e^{-2x}dx$$

$$ye^{2x}=e^{2x}+\frac{e^{-2x}}{2}+C$$

$$y=1+\frac{1}{2}e^{-4x}+Ce^{-2x}$$

$x=0$ แล้ว $y=1$

จะได้ $1=1+\frac{1}{2}e^{0}+Ce^{0}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้ว $C=-\frac{1}{2}$

ดังนั้น $y=1+\frac{1}{2}e^{-4x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

ค่า $x=0.1$ แล้ว

$$y(0.1)=1+\frac{1}{2}e^{-4(0.1)}-\frac{1}{2}e^{-2(0.1)}$$

$$y(0.1)=0.9258$$

ดังนั้น ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ $y=0.9258$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กรณีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

$$y''-y+x=0 \quad ;y(0)=0, y(1)=0$$

<u>วิธีทำ</u> $y''-y=-x$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $y=y_c+y_p$

หา y_c โดย ให้ $y''-y=0$

$$r^2-1=0$$

$$r^2=1$$

$$r=\pm 1$$

$y_c=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์สมทบ $y''-y=0$

หา y_p โดยใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธ์

$$y_p=+Ax+B$$

$$y_p'=A$$

$$y''=0$$

$$A=1$$

$$B=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$y_p = x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

จะได้ $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + x$

$x = 0, y = 0$ จะได้ $c_1 + c_2 = 0$

$$c_2 = -c_1$$

$x = 1, y = 0$ จะได้ $c_1 e^{1} + c_2 e^{-1} + 1 = 0$

จาก $c_2 = -c_1$ จะได้ว่า

$$c_1 e^{1} - c_1 e^{-1} + 1 = 0$$

$$c_1 \left(e - e^{-1} \right) = -1$$

$$c_1 = -\frac{1}{\left(e^{1} - e^{-1} \right)}$$

$$c_2 = -c_1 = -\left(-\frac{1}{\left(e^{1} - e^{-1} \right)} \right) = \frac{1}{\left(e^{1} - e^{-1} \right)}$$

แทนค่า c_1 และ c_2

$$y = \frac{-1}{\left(e^{1} - e^{-1} \right)} e^{x} + \frac{1}{\left(e^{1} - e^{-1} \right)} e^{-x} + x$$

ดังนั้น $y = x - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{1} - e^{-1}} \right)$

ค่า $x = 0.2$ แล้ว $y = 0.2 - \left(\frac{e^{0.2} - e^{-0.2}}{e^{1} - e^{-1}} \right)$

$$= 0.0287$$

ค่า $x = 0.4$ แล้ว $y = 0.4 - \left(\frac{e^{0.4} - e^{-0.4}}{e^{1} - e^{-1}} \right)$

$$= 0.0505$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่า $x=0.6$ แล้ว $y=0.6-\left(\frac{e^{0.6}-e^{-0.6}}{e^{1}-e^{-1}}\right)$

$$=0.0583$$

ค่า $x=0.8$ แล้ว $y=0.8-\left(\frac{e^{0.8}-e^{-0.8}}{e^{1}-e^{-1}}\right)$

$$=0.0443$$

ดังนั้น ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ $y(0.2)=0.0287, y(0.4)=0.0505, y(0.6)=0.0583$ และ $y(0.8)=0.0443$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กรณีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม

$$y'''+xy''-2yy'=4e^{x}$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=0,\ y'(1)=2,\ y''(1)=-1$

<u>วิธีทำ</u> $\therefore$ ไม่สามารถหา Analytical Solution ได้

เนื่องจากไม่ใช่ Cauchy-Euler Equation $x^3y'''+x^2y''+xy'+y=f(x)$

และไม่ใช่สมการเชิงเส้น เนื่องจากมีพจน์ yy'

3.2 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

3.2.1 วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

วิธีรุงเงคุตตา เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและนำไปใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง แนวความคิดที่ใช้ในการคิดค้นวิธีรุงเงคุตตา คือการหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูง เพื่อทำให้ได้ค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณค่าผลลัพธ์ในวิธีรุงเงคุตตา คือ

$$y_{i+1}=y_i+\phi(x_i,y_i,h)h \tag{3.4}$$

โดย $\phi(x_i,y_i,h)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเพิ่ม (Increment Function) หมายความว่าความชันเฉลี่ยตลอดขนาดช่วงกว้าง h ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าที่เหมาะสม และฟังก์ชันส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปโดยทั่วไปได้ ดังนี้

$$\phi=a_1k_1+a_2k_2+\ldots+a_nk_n \tag{3.5}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ a_i เป็นค่าคงที่ $(i=1,2,...,n)$ และ

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3.6ก}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \tag{3.6ข}$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \tag{3.6ค}$$

.

.

.

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + ... + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \tag{3.6น}$$

ตัวห้อย n บอกถึงอันดับของวิธีรุงเงคุตตาที่เลือกใช้

วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method)

วิธีรุงเงคุตตาอันดับที่สี่ จัดว่าเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมใช้กันโดยแพร่หลายสามารถทำได้โดยการดัดแปลงสมการ (3.4)- (3.6) ที่อยู่ในรูปทั่วไปโดยใช้ค่า $n=4$ ทำให้ได้สมการรุงเงคุตตาอันดับสี่ ซึ่งให้ค่าคลาดเคลื่อนในรูปของช่วงกว้างอันดับสี่ $O(h^4)$ ลักษณะของค่าผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าความเที่ยงสูง ทำให้วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานการคำนวณหลายๆด้าน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานวิจัยค้นคว้าที่ต้องการความเที่ยงตรงสูง รูปของสมการรุงเงคุตตาอันดับสี่ที่ใช้กันโดยทั่วไปมีลักษณะ ดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right] h$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

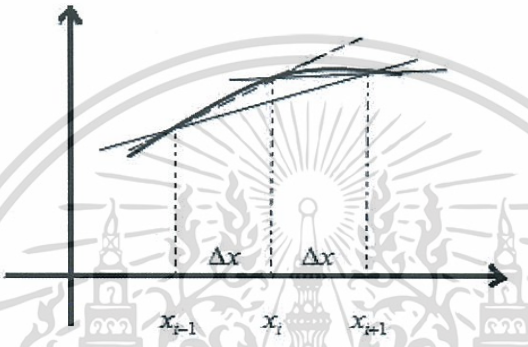
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method)

3.2.2.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันของตัวแปรตาม u เทียบกับตัวแปรอิสระ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $\frac{du}{dx}$ เราสามารถประมาณค่าโดยตรงของ $\frac{du}{dx}$ ได้ 3 วิธี โดยพิจารณาจากรูปที่ 3.1 ต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 การประมาณค่าโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

กำหนดสัญลักษณ์ $u(x_i)$ แทนด้วย u_i และ $\left(\frac{du}{dx}\right)_i$ ในทางเรขาคณิตเราทราบว่า $\left(\frac{du}{dx}\right)_i$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $u(x)$ ที่จุด x_i ดังนั้นเราสามารถประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสดังกล่าวได้ 3 วิธีโดยตรงดังนี้

1. **ผลต่างข้างหน้า (Forward difference)** เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรงผ่านจุด x_i และ x_{i+1} นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{เมื่อ } h = \Delta x$$

2. **ผลต่างข้างหลัง (Backward difference)** เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด x_i และ x_{i-1} นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad \text{เมื่อ } h = \Delta x$$

3. **ผลต่างกลาง (Central difference)** เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด x_{i-1} และ x_{i+1} นั่นคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad \text{เมื่อ } h = \Delta x$$

3.2.2.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง

สำหรับการประมาณค่าของ $\frac{d^2u}{dx^2}$ เราสามารถประมาณค่าได้โดยการประยุกต์ในแต่ละวิธีดังนี้

1. **ผลต่างข้างหน้า** สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i\right]$$
$$\approx \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right]$$
$$\approx \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+2} - u_{i+1} - u_{i+1} + u_i}{h}\right]$$
$$\approx \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2}$$

2. **ผลต่างข้างหลัง** สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right]$$
$$\approx \frac{1}{h}\left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{h}\right]$$
$$\approx \frac{1}{h}\left[\frac{u_i - u_{i-1} - u_{i-1} + u_{i-2}}{h}\right]$$
$$\approx \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2}$$

3. **ผลต่างกลาง** สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) \approx \frac{1}{2\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right]$$
$$\approx \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right]\right\}$$
$$\approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right]$$
$$\approx \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+1} - u_i - u_i + u_{i-1}}{h}\right]$$
$$\approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้กล่าวมา แล้วสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ใช้รุงเงคุตตา (Runge-Kutta) อันดับที่ 4 ในการหาผลเฉลย

$$y' + 2y = 2 - e^{-4x}$$

ให้ $h = 0.1 \quad , y(0) = 1$

<u>วิธีทำ</u> $y' = 2 - e^{-4x} - 2y$

$$f(x, y) = 2 - e^{-4x} - 2y$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_1 = (0.1) f(0,1)$$

$$= (0.1)(-1)$$

$$= -0.1$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_2 = (0.1) f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 - \frac{0.1}{2}\right)$$

$$= (0.1) f(0.05, 0.95)$$

$$= (0.1)(-0.719)$$

$$= -0.0719$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_3 = (0.1) f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 - \frac{0.0719}{2}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=(0.1)f(0.05,0.9641)$$

$$=(0.1)(-0.747)$$

$$=-0.0747$$

$$k_4 = hf(x_0+h, y_0+k_3)$$

$$k_4 = (0.1)f(0+0.1,1-0.0747)$$

$$=(0.1)f(0.1,0.9253)$$

$$=(0.1)(-0.5209)$$

$$=-0.0521$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

$$y_{i+1} = 1+\frac{1}{6}(-0.1+2(-0.0719)+2(-0.0747)-0.0521)$$

$$=1+\frac{1}{6}(-0.4453)$$

$$=1-0.0742$$

$$=0.9258$$

$$=y(0.1)$$

ดังนั้น ผลเฉลยเชิงตัวเลข $y=0.9258$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

ใช้ผลต่างจำกัด (Finite Difference) ในการหาผลเฉลย

$$y''-y+x=0 \quad ;y(0)=0, y(1)=0 \quad ,0\le x\le 1$$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $h=0.2$

สูตร $y_i''=\frac{1}{h^2}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากโจทย์ $y_i'' = y_i - x_i$

ดังนั้น $\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = y_i - x_i$

จากโจทย์ ผลเฉลยจะอยู่ในช่วง $0 \le x \le 1$ และ $h = 0.2$ โดย

$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow 0.2 = \frac{1-0}{n} \Rightarrow n = 5$ ดังนั้น ถูกแบ่งเป็น 5 ช่วง ดังนี้

$x_0 = 0$ $y_0 = 0$

$x_1 = x_0 + h = 0.2$ y_1

$x_2 = x_1 + h = 0.4$ y_2

$x_3 = x_2 + h = 0.6$ y_3

$x_4 = x_3 + h = 0.8$ y_4

$x = 1$ $y_5 = 1$

<u>ผลต่างจำกัด</u>

$$y_1 - x_1 = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$$

$$y_1 - 0.2 = \frac{1}{0.04}(0 - 2y_1 + y_2)$$

$$0.04y_1 - 0.008 = y_2 - 2y_1$$

$$-0.008 = y_2 - 2.04y_1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_2 - x_2 = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$y_2 - 0.4 = \frac{1}{0.04}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$0.04y_2 - 0.016 = y_1 - 2y_2 + y_3$$

$$-0.016 = y_1 - 2.04y_2 + y_3$$

$$y_3 - x_3 = \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

$$y_3 - 0.6 = \frac{1}{0.04}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

$$0.04y_3 - 0.024 = y_2 - 2y_3 + y_4$$

$$-0.024 = y_2 - 2.04y_3 + y_4$$

$$y_4 - x_4 = \frac{1}{h^2}(y_3 - 2y_4 + y_5)$$

$$y_4 - 0.8 = \frac{1}{0.04}(y_3 - 2y_4 + 1)$$

$$0.04y_4 - 0.032 = y_3 - 2y_4 + 1$$

$$-1.032 = y_3 - 2.04y_4$$

$$-2.04y_4 + y_3 = -1.032$$

$$y_4 - 2.04y_3 + y_2 = -0.024$$

$$y_3 - 2.04y_2 + y_1 = -0.016$$

$$y_2 - 2.04y_1 = -0.008$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.04 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2.04 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.032 \\ -0.024 \\ -0.016 \\ -0.008 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.04 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2.04 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ l_1 u_1 & l_1 v_1 + u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & l_2 u_2 & l_2 v_2 + u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & l_3 u_3 & l_3 v_3 + u_4 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = -2.04, v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 1$$

$$l_1 = \frac{1}{-2.04} = -0.490196$$

$$u_2 = -2.04 - (1)(-0.490196) = -1.549804$$

$$l_2 = \frac{1}{-1.549804} = -0.645243$$

$$u_3 = -2.04 - (-0.645243)(1) = -1.394757$$

$$l_3 = \frac{1}{-1.394757} = -0.716971$$

$$u_4 = -2.04 - (-0.716971)(1) = -1.323029$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.490196 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.645243 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7169711 & \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -2.04 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.549804 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.394757 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.323029 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.490196 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.645243 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7169711 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.032 \\ -0.024 \\ -0.016 \\ -0.008 \end{bmatrix}$$

$$z_4 = -1.032$$

$$z_3 = (-0.024) - (-0.490196)(-1.032) = -0.529882$$

$$z_2 = (-0.016) - (-0.645243)(-0.529882) = -0.357903$$

$$z_1 = (-0.008) - (-0.716971)(-0.357903) = -0.264606$$

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.549804 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.394757 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.323029 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.032 \\ -0.024 \\ -0.016 \\ -0.008 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{-0.264606}{-1.323029} = 0.200000 \approx 0.2$$

$$y_2 = \frac{-0.357903 - (1)(0.200000)}{-1.394757} = 0.400000 \approx 0.4$$

$$y_3 = \frac{-0.529882 - (1)(0.400000)}{-1.549804} = 0.599999 \approx 0.6$$

$$y_4 = \frac{-1.032 - (1)(0.599999)}{-2.04} = 0.799999 \approx 0.8$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สาม

ใช้รุงเงคุตตา (Runge-Kutta) อันดับที่ 4 ในการหาผลเฉลย

$$y''' + xy'' - 2yy' = 4e^x$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = -1$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u_1 = y, u_2 = y', u_3 = y''$

จะได้ระบบสมการ $u_1' = u_2$

$$u_2' = u_3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_3' = 4e^x - xy'' + 2yy' = 4e^x - xu_3 + 2u_1u_2$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $u_1(1) = 0,\ u_2(1) = 2,\ u_3(1) = -1$

ให้ $h = 0.1$

$$f_1(x, u_1, u_2, u_3) = u_2$$

$$f_2(x, u_1, u_2, u_3) = u_3$$

$$f_3(x, u_1, u_2, u_3) = 4e^x - xu_3 + 2u_1u_2$$

$$k_{1\cdot u_1} = hf_1(x_1, u_{11}, u_{21}, u_{31})$$

$$= (0.1) f_1(1, 0, 2, -1)$$

$$= (0.1)(2)$$

$$= 0.2$$

$$k_{1\cdot u_2} = hf_2(x_1, u_{11}, u_{21}, u_{31})$$

$$= (0.1) f_2(1, 0, 2, -1)$$

$$= (0.1)(-1)$$

$$= -0.1$$

$$k_{1\cdot u_3} = hf_3(x_1, u_{11}, u_{21}, u_{31})$$

$$= (0.1) f_3(1, 0, 2, -1)$$

$$= (0.1)\left(4e^1 + 1 + 0\right)$$

$$= 1.1873$$

$$k_{2\cdot u_1} = hf_1\left(x_1 + \frac{h}{2}, u_{11} + \frac{k_{1\cdot u_1}}{2}, u_{21} + \frac{k_{1\cdot u_2}}{2}, u_{31} + \frac{k_{1\cdot u_3}}{2}\right)$$

$$= (0.1) f_1(1 + 0.05, 0 + 0.1, 2 - 0.05, -1 + 0.5937)$$

$$= (0.1) f_1(1.05, 0.1, 1.95, -0.4063)$$

$$= (0.1)(1.95)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= 0.195$$

$$k_{2\cdot u_2} = hf_2\left(x_1 + \frac{h}{2}, u_{11} + \frac{k_{1\cdot u_1}}{2}, u_{21} + \frac{k_{1\cdot u_2}}{2}, u_{31} + \frac{k_{1\cdot u_3}}{2}\right)$$

$$= (0.1) f_2 (1 + 0.05, 0 + 0.1, 2 - 0.05, -1 + 0.5937)$$

$$= (0.1) f_2 (1.05, 0.1, 1.95, -0.4063)$$

$$= (0.1)(-0.4063)$$

$$= -0.0406$$

$$k_{2\cdot u_3} = hf_3\left(x_1 + \frac{h}{2}, u_{11} + \frac{k_{1\cdot u_1}}{2}, u_{21} + \frac{k_{1\cdot u_2}}{2}, u_{31} + \frac{k_{1\cdot u_3}}{2}\right)$$

$$= (0.1) f_3 (1 + 0.05, 0 + 0.1, 2 - 0.05, -1 + 0.5937)$$

$$= (0.1) f_3 (1.05, 0.1, 1.95, -0.4063)$$

$$= (0.1)\left(4e^1 - (1)(-0.4063) + 2(0.1)(1.95)\right)$$

$$= 1.1669$$

$$k_{3\cdot u_1} = hf_1\left(x_1 + \frac{h}{2}, u_{11} + \frac{k_{2\cdot u_1}}{2}, u_{21} + \frac{k_{2\cdot u_2}}{2}, u_{31} + \frac{k_{2\cdot u_3}}{2}\right)$$

$$= (0.1) f_1 (1 + 0.05, 0 + 0.0975, 2 - 0.0203, -1 + 0.5835)$$

$$= (0.1) f_1 (1.05, 0.0975, 1.9797, -0.4165)$$

$$= (0.1)(1.9797)$$

$$= 0.1979$$

$$k_{3\cdot u_2} = hf_2\left(x_1 + \frac{h}{2}, u_{11} + \frac{k_{2\cdot u_1}}{2}, u_{21} + \frac{k_{2\cdot u_2}}{2}, u_{31} + \frac{k_{2\cdot u_3}}{2}\right)$$

$$= (0.1) f_2 (1 + 0.05, 0 + 0.0975, 2 - 0.0203, -1 + 0.5835)$$

$$= (0.1) f_2 (1.05, 0.0975, 1.9797, -0.4165)$$

$$= (0.1)(-0.4165)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -0.0417$$

$$k_{3\cdot u_1} = hf_3\left(x_1 + \frac{h}{2}, u_{11} + \frac{k_{2\cdot u_1}}{2}, u_{21} + \frac{k_{2\cdot u_2}}{2}, u_{31} + \frac{k_{2\cdot u_3}}{2}\right)$$

$$= (0.1) f_3 (1+0.05, 0+0.0975, 2-0.0203, -1+0.5835)$$

$$= (0.1) f_3 (1.05, 0.0975, 1.9797, -0.4165)$$

$$= (0.1)\left(4e^1 - (1)(-0.4165) + 2(0.0975)(1.9797)\right)$$

$$= 1.1676$$

$$k_{4\cdot u_1} = hf_1\left(x_1 + h, u_{11} + k_{3\cdot u_1}, u_{21} + k_{3\cdot u_2}, u_{31} + k_{3\cdot u_3}\right)$$

$$= (0.1) f_1 (1+0.1, 0+0.1979, 2-0.0417, -1+1.1676)$$

$$= (0.1) f_1 (1.1, 0.1979, 1.9583, 0.1676)$$

$$= (0.1)(1.9583)$$

$$= 0.1958$$

$$k_{4\cdot u_2} = hf_2\left(x_1 + h, u_{11} + k_{3\cdot u_1}, u_{21} + k_{3\cdot u_2}, u_{31} + k_{3\cdot u_3}\right)$$

$$= (0.1) f_2 (1+0.1, 0+0.1979, 2-0.0417, -1+1.1676)$$

$$= (0.1) f_2 (1.1, 0.1979, 1.9583, 0.1676)$$

$$= (0.1)(0.1676)$$

$$= 0.0168$$

$$k_{4\cdot u_3} = hf_3\left(x_1 + h, u_{11} + k_{3\cdot u_1}, u_{21} + k_{3\cdot u_2}, u_{31} + k_{3\cdot u_3}\right)$$

$$= (0.1) f_3 (1+0.1, 0+0.1979, 2-0.0417, -1+1.1676)$$

$$= (0.1) f_3 (1.1, 0.1979, 1.9583, 0.1676)$$

$$= (0.1)\left(4e^1 - (1)(0.1676) + 2(0.1979)(1.9583)\right)$$

$$= 1.1481$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_1 = y(1) + \left[\frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\right]$$

$$= 0 + \left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(0.2 + (2)(0.195) + (2)(0.1979) + 0.1958\right)\right]$$

$$= 0.1969$$

$$u_2 = y'(1) + \left[\frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\right]$$

$$= 2 + \left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(-0.1 + (2)(-0.0406) + (2)(-0.0417) + 0.0168\right)\right]$$

$$= 1.9587$$

$$u_3 = y''(1) + \left[\frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\right]$$

$$= -1 + \left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(1.1873 + (2)(1.1669) + (2)(1.1676) + 1.1481\right)\right]$$

$$= 0.1674$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าคลาดเคลื่อน

จากการคำนวณเชิงวิเคราะห์และการคำนวณเชิงตัวเลขของแต่ละตัวอย่าง สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1 ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณเชิงวิเคราะห์และการคำนวณเชิงตัวเลข

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	ผลเฉลยเชิงตัวเลข	Error
$y'+2y=2-e^{-4x}$	ที่ $x=0.1$ $y=0.9258$	ที่ $x=0.1$ $y=0.9258$	0
$y''-y+x=0$	ที่ $x=0.2$ $y=0.0287$	ที่ $x=0.2$ $y=0.0060$	0.0227
	ที่ $x=0.4$ $y=0.0505$	ที่ $x=0.4$ $y=0.0158$	0.0347
	ที่ $x=0.6$ $y=0.0583$	ที่ $x=0.6$ $y=0.0257$	0.0326
	ที่ $x=0.8$ $y=0.0443$	ที่ $x=0.8$ $y=0.5185$	0.4742
$y'''+xy''-2yy'=4e^{x}$	ไม่สามารถหา Analytic Solution ได้	ที่ $x=0.1$ $y=0.1969$	–
		ที่ $x=0.1$ $y'=1.9587$	–
		ที่ $x=0.1$ $y''=0.1674$	–

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 การหาผลเฉลยโดยคอลโลเคชัน

3.3.1 กรณีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

ในที่นี้จะแสดงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีคอลโลเคชัน (collocation) ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง **แบบเงื่อนไขเริ่มต้น** ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \quad , y(x_0) = y_0$$

ต้องการหาผลเฉลยในช่วง $\left[x_0, x_0 + h\right]$ โดย $0 \le c_1 < c_2 < \ldots < c_n \le 1$

สมมติผลเฉลย คือ พหุนาม p ที่มีดีกรี n ที่เป็นไปตาม

เงื่อนไข $p(x_0) = y_0$ และ $p'(x_k) = f\left(x_k, p(x_k)\right)$

โดย $x_k = x_0 + c_k h$ เมื่อ $k = 1, \ldots, n$

เลือก $c_1 = 0$ และ $c_2 = 1$ เมื่อ $n = 2$

แล้ว $p(x_0) = y_0$

$$p'(x_0) = f\left(x_0, p(x_0)\right) \tag{3.4}$$

$$p'\left(x_0 + h\right) = f\left(x_0 + h, p(x_0 + h)\right) \tag{3.5}$$

เนื่องจากมี 3 เงื่อนไข ดังนั้น p ควรจะเป็นพหุนามดีกรี 2 ดังนั้น p อยู่ในรูปแบบ

$$p(x) = \alpha\left(x - x_0\right)^2 + \beta\left(x - x_0\right) + \gamma$$

$x = x_0$ จะได้ $p(x_0) = y_0 = \gamma$

$$p'(x) = 2\alpha\left(x - x_0\right) + \beta$$

$x = x_0$ จะได้ $f\left(x_0, p(x_0)\right) = p'(x_0) = \beta = f\left(x_0, y_0\right)$

$$p''(x) = 2\alpha$$

$(3.5) - (3.4)$ จะได้ $p'(x_0 + h) - p'(x_0) = f\left(x_0 + h, p(x_0 + h)\right) - f\left(x_0, p(x_0)\right)$ (3.6)

$\frac{(3.6)}{h}$ จะได้ $\frac{p'(x_0 + h) - p'(x_0)}{h} = \frac{f\left(x_0 + h, p(x_0 + h)\right) - f\left(x_0, p(x_0)\right)}{h}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$2\alpha = \frac{f\left(x_0+h, p(x_0+h)\right) - f\left(x_0, p(x_0)\right)}{h}$$

$$\alpha = \frac{1}{2h}\left(f\left(x_0+h, p(x_0+h)\right) - f\left(x_0, p(x_0)\right)\right)$$

โดยคอลโลเคชันจะได้

$$y_1 = p(x_0+h) = \alpha(x_0+h-x_0)^2 + \beta(x_0+h-x_2) + \gamma$$

$$= y_0 + h^2\left(\frac{1}{2h}\left(f\left(x_0+h, p(x_0+h)\right) - f\left(x_0, p(x_0)\right)\right)\right)$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}hf\left(x_0+h, p(x_0+h)\right) - \frac{1}{2}hf\left(x_0, p(x_0)\right) + hf\left(x_0, p(x_0)\right)$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}h\left(f\left(x_0+h, p(x_0+h)\right) + \frac{1}{2}hf\left(x_0, p(x_0)\right)\right)$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}h\left(f\left(x_0+h, y_1\right) + f\left(x_0, y_0\right)\right)$$

ในรูปการหาผลเฉลยทั่วไป

$$y_n = y_{n-1} + f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}h\left(f\left(x_{n-1}+h, y_n\right) + f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)\right)$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> กรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$y' + 2y = 2 - e^{-4x} \qquad ; y(0) = 1,\ h = 0.1$$

<u>วิธีทำ</u> $y' = 2 - e^{-4x} - 2y$

$$y_1 = y_0 + f\left(x_0, y_0\right)$$

$$= 1 + f(0,1)$$

$$= 1 + \left(2 - e^{-4(0)} - 2(1)\right)$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h\big(f(x_1,y_1)+f(x_0,y_0)\big)$$

$$=1+\frac{1}{2}(0.1)\big(f(0.1,0)+f(0,1)\big)$$

$$=1+0.05\Big(\big(2-e^{-4(0.1)}-2(0)\big)+\big(2-e^{-4(0)}-2(1)\big)\Big)$$

$$=1+0.05\big(1.3297-1\big)$$

$$=1+0.05(0.3297)$$

$$=1+0.0165$$

$$=1.0165$$

$$=y(0.1)$$

ดังนั้น ผลเฉลยโดยคอลโลเคชัน $y=1.0165$

3.3.2 กรณีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

แบบเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขขอบเขต

$$y'' = f\left(y', y, x\right), \quad a_1 \le x \le a_2$$

$$y(a_1)=b_1 \ , \ y(a_2)=b_2$$

2. ให้ $Y(x)=C_1\phi_1(x)+C_2\phi_2(x)+\ldots$ เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ใน 1. ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

ดังนั้น $Y''(x)-Y(x)+x=0,\ a_1 \le x \le a_2,\ Y(a_1)=b_1$ และ $Y(a_2)=b_2$

3. จาก (a_1,b_1) และ (a_2,b_2) เพิ่มจุดภายในช่วง แล้วใช้การประมาณค่าภายในช่วงแบบลากรองจ์

หาพหุนาม $Y(x)$ ที่ผ่านจุดที่กำหนด จัดรูปแบบ แล้วจะได้ $\phi_i(x)$

4. จาก $Y''(x)$ ที่ได้จาก 3. ให้ $R=Y''-f\left(y', y, x\right)$ เป็นค่าตกค้างที่ทำให้ $Y(x)$ มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. ค่าตกค้าง R จะทำให้ $Y(x)$ มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดเมื่อ $\int_c R\phi_i(x)dx = 0$

6. จาก 5. สามารถดำเนินค่า C_i แล้วแทนค่า จะได้ $Y(x)$ เป็นผลเฉลยตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 8 กรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

$$y'' - y + x = 0 \quad , 0 \le x \le 1 \ , y(0) = 0, \ \ y(1) = 0$$

วิธีทำ

1. $y'' - y + x = 0 \quad , 0 \le x \le 1$

   $y(0) = 0, \ \ y(1) = 0$

2. ให้ $Y(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \ldots$ เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ใน 1.

   ดังนั้น $Y''(x) - Y(x) + x = 0, \ \ 0 \le x \le 1, \ \ Y(0) = 0$ และ $Y(1) = 0$

3. จาก $(0,0)$ และ $(1,0)$ เพิ่มจุด $\left(\frac{1}{2}, c\right)$ แล้วใช้การประมาณค่าภายในช่วงแบบลากรองจ์

   หา $Y(x)$ ที่ผ่านจุดที่กำหนด

$$Y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$= \frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}C$$

$$= \frac{Cx(x-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= -4Cx(x-1)$$

$$= 4Cx(1-x)$$

ดังนั้น $Y(x) = x(1-x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. จาก $Y(x)=-4Cx(x-1)$

โดยหาอนุพันธ์ $Y'(x)=-4\mathrm{C}\left[(x-1)+x(1)\right]$

$$=-4C(2x-1)$$

$$Y''(x)=-8\mathrm{C}$$

ดังนั้น $R=-8C+4Cx(x-1)+x$

$$=-8C+4Cx^2-4Cx+x$$

$$=4Cx^2+(1-4C)x-8C$$

5. $\int_c R\phi(x)\,dx=0$

$$\int_0^1\left(4Cx^2+(1-4C)x-8C\right)\left(x(1-x)\right)dx=0$$

$$\left(4Cx^2+x-4Cx-8C\right)\left(x-x^2\right)=4Cx^3+x^2-4Cx^2-8Cx-4Cx^4-x^3+4Cx^3+8Cx^2$$

$$=-4Cx^4+(4C-1+4C)x^3+(1-4C+8C)x^2-8Cx$$

$$\int_0^1\left(-4Cx^4+(4C-1+4C)x^3+(1-4C+8C)x^2-8Cx\right)dx$$

$$=-4C\frac{x^5}{5}+(8C-1)\frac{x^4}{4}+(1+4C)\frac{x^3}{3}-8C\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{4}{5}C+\frac{8C-1}{4}+\frac{1+4C}{3}-4C$$

$$=\frac{-48C+120C-15+20+80C-240C}{60}$$

$$=\frac{-88C+5}{60}$$

ให้ $\frac{-88C+5}{60}=0$

$$-88C+5=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C = \frac{5}{88}$$

6. $Y(x) = 4\left(\frac{5}{88}\right)x(1-x)$

$$= \frac{5}{22}x(1-x)$$

แทนค่าหาผลเฉลย

ค่า $x = 0.2$ แล้ว

$$Y(0.2) = \frac{5}{22}(0.2)(1-0.2)$$

$$= 0.0364$$

ค่า $x = 0.4$ แล้ว

$$Y(0.4) = \frac{5}{22}(0.4)(1-0.4)$$

$$= 0.0546$$

ค่า $x = 0.6$ แล้ว

$$Y(0.6) = \frac{5}{22}(0.6)(1-0.6)$$

$$= 0.0546$$

ค่า $x = 0.8$ แล้ว

$$Y(0.8) = \frac{5}{22}(0.8)(1-0.8)$$

$$= 0.0364$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าคลาดเคลื่อน

จากการคำนวณหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ เชิงตัวเลข และวิธีคอลโลเคชัน ของแต่ละตัวอย่าง สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.2 ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ เชิงตัวเลขและวิธีคอลโลเคชัน

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	ผลเฉลยเชิงตัวเลข	Error	ผลเฉลยโดยคอลโลเคชัน	Error
$y'+2y=2-e^{-4x}$	ที่ $x=0.1$ $y=0.9258$	ที่ $x=0.1$ $y=0.9258$	0	ที่ $x=0.1$ $y=1.0165$	0.0907
$y''-y+x=0$	ที่ $x=0.2$ $y=0.0287$	ที่ $x=0.2$ $y=0.2$	0.0227	ที่ $x=0.2$ $y=0.0364$	0.007
	ที่ $x=0.4$ $y=0.0505$	ที่ $x=0.4$ $y=0.4$	0.0347	ที่ $x=0.4$ $y=0.0546$	0.004
	ที่ $x=0.6$ $y=0.0583$	ที่ $x=0.6$ $y=0.6$	0.0326	ที่ $x=0.6$ $y=0.0546$	0.0037
	ที่ $x=0.8$ $y=0.0443$	ที่ $x=0.8$ $y=0.8$	0.4742	ที่ $x=0.8$ $y=0.0364$	0.0079

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของคาน

ในบทนี้จะทำการหาผลเฉลยของสมการ $EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\lambda_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ โดยการใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) และในกรณีลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) เป็นสมการอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation) จะได้ $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$ นำมาหาผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด(Finite difference) วิธีคอลโลเคชัน (Collocation) เปรียบเทียบกับการแปลงลาปลาซ (Laplace Transformation)

4.1 ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน

4.1.1 ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0\left(h^2\right)$

$$f^{(2)}(x)=\frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x=2h)}{12h^2}$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์จะได้

$$f(x+h)=f(x)+f^{(1)}(x)h+\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(x)h^5}{5!}+0(h^6) \tag{4.1}$$

$$f(x-h)=f(x)-f^{(1)}(x)h+\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!}-\frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!}-\frac{f^{(5)}(x)h^5}{5!}+0(h^6) \tag{4.2}$$

$$f(x+2h)=f(x)+f^{(1)}(x)2h+\frac{f^{(2)}(x)4h^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(x)8h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)16h^4}{4!}-\frac{f^{(5)}(x)32h^5}{5!}+0(h^6) \tag{4.3}$$

$$f(x-2h)=f(x)-f^{(1)}(x)2h+\frac{f^{(2)}(x)4h^2}{2!}-\frac{f^{(3)}(x)8h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)16h^4}{4!}-\frac{f^{(5)}(x)32h^5}{5!}+0(h^6) \tag{4.4}$$

นำสมการ (4.1)+(4.2) และ (4.3)+(4.4)จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+f^{(2)}(x)h^2+\frac{f^{(4)}(x)h^4}{12}+0(h^6) \tag{4.5}$$

$$f(x+2h)+f(x-2h)=2f(x)+4f^{(2)}(x)h^2+\frac{16f^{(4)}(x)h^4}{12}+0(h^6) \tag{4.6}$$

ทำ 16*(4.5)-(4.6) จะได้

$$-f(x-2h)+16f(x+h)+16f(x-h)+f(x-2h)=30f(x)+12f^{(2)}(x)h^2+0(h^6)$$

เพราะฉะนั้น

$$12f^{(2)}(x)h^2=-f(x-2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)+0(h^6)$$

ดังนั้น

$$f^{(2)}(x)=\frac{-f(x-2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)+0(h^6)}{12h^2}$$

จะได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-u_{i+2}+16u_{i+2}-30u_i+16u_{i-1}-u_{i+2}+0(h^4) \tag{4.7}$$

4.1.2 ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0\left(h^4\right)$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-f(x-3h)+12f(x+2h)-39f(x+h)+56f(x-h)-39f(x-h)+12f(x-2h)-f(x-3h)}{6h^2}$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์จะได้

$$f(x+h)=f(x)+f^{(1)}(x)h+\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(x)h^5}{5!}+0(h^6)$$

(4.8)

$$f(x-h)=f(x)-f^{(1)}(x)h+\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!}-\frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!}-\frac{f^{(5)}(x)h^5}{5!}+0(h^6)$$

(4.9)

$$f(x+2h)=f(x)+f^{(1)}(x)2h+\frac{f^{(2)}(x)4h^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(x)8h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)16h^4}{4!}-\frac{f^{(5)}(x)32h^5}{5!}+0(h^6)$$

(4.10)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f(x-2h)=f(x)-f^{(1)}(x)2h+\frac{f^{(2)}(x)4h^2}{2!}-\frac{f^{(3)}(x)8h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)16h^4}{4!}-\frac{f^{(5)}(x)32h^5}{5!}+0(h^6)$$

(4.11)

$$f(x+3h)=f(x)+f^{(1)}(x)3h+\frac{f^{(2)}(x)9h^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(x)27h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)81h^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(x)243h^5}{5!}+0(h^6)$$

(4.12)

$$f(x-3h)=f(x)-f^{(1)}(x)3h+\frac{f^{(2)}(x)9h^2}{2!}-\frac{f^{(3)}(x)27h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x)81h^4}{4!}-\frac{f^{(5)}(x)243h^5}{5!}+0(h^6)$$

(4.13)

นำสมการ (4.8)+(4.9) และ (4.10)+(4.11) และ (4.12)+(4.13) จะได้

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+f^{(2)}(x)h^2+\frac{f^{(4)}(x)h^4}{12}+0(h^6) \quad (4.14)$$

$$f(x+2h)+f(x-2h)=2f(x)+4f^{(2)}(x)h^2+\frac{16f^{(4)}(x)h^4}{12}+0(h^6) \quad (4.15)$$

$$f(x+3h)+f(x-3h)=2f(x)+9f^{(2)}(x)h^2+\frac{81f^{(4)}(x)h^4}{12}+0(h^6) \quad (4.16)$$

นำ 12*(4.15) - 39*(4.14) จะได้

$$12f(x+2h)+12f(x-2h)-39f(x+h)-39f(x-h)=-54f(x)+9f^{(2)}(x)h^2+\frac{153f^{(4)}(x)h^4}{12}+0(h^6)$$

(4.17)

นำ (4.17) - (4.16) จะได้

$$12f(x+2h)+12f(x-2h)-39f(x+h)-39f(x-h)-f(x-3h)-f(x-3h)=-56f(x)+\frac{72f^{(4)}(x)h^4}{12}+0(h^6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$f^{(4)}(x)=\frac{-f(x+3h)+12f(x+2h)-39f(x-h)+56f(x)-39f(x-h)+12f(x-2h)-f(x-3h)}{6h^4}$$

จะได้

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{-u_{i+3}+12u_{i+2}-39u_{i+1}+56u_i-39u_{i-1}+12u_{i-2}-u_{i-3}}{6h^4}+0(h^4) \qquad (4.18)$$

4.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของสมการการสั่นของคาน

จากสมการ (2.1)

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\lambda_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\lambda_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (4.19)$$

เงื่อนไขของขอบเขตกำหนดโดย

$$u(0,t)=0,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^3}=0 \qquad (4.20)$$

จะใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0(h^4)$ สำหรับสมการ $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ และผลต่างกลางด้วยความ

คลาดเคลื่อน $0(h^2)$ สำหรับสมการ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

โดยให้ $x_i=i*h, h=\frac{L}{n+1}$ และ $k=\frac{L}{m+1}$

และให้ $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\approx\Delta u_i+0(h^4)$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\approx\Delta u_i+0(h^2)$

พิจารณา Δu_i ที่ $i=1,2,...,n$ เราจะได้สมการผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0(h^4)$ และ $0(h^2)$ จาก (4.18)

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\approx\frac{-u_{i+3}^n+12u_{i+2}^n-39u_{i+1}^n+56u_i^n-39u_{i-1}^n+12u_{i-2}^n-u_{i-3}^n}{6h^4} \qquad (4.21)$$

และ $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\approx\frac{u_i^{n-1}-2u_i^n+u_i^{n+1}}{k^2} \qquad (4.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $u_i^n = u(i\Delta x, x\Delta t)$

ทำ (4.3) และ (4.4) แทนในสมการ (4.1) จะได้

$$EI\left(\frac{-u_{i+3}^n + 12u_{i+2}^n - 39u_{i+1}^n + 56u_i^n - 39u_{i-1}^n + 12u_{i-2}^n - u_{i-3}^n}{6h^4}\right) + \lambda_m\left(\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{k^2}\right) = 0 \tag{4.23}$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\lambda_m\left(\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{k^2}\right) = -EI\left(\frac{-u_{i+3}^n + 12u_{i+2}^n - 39u_{i+1}^n + 56u_i^n - 39u_{i-1}^n + 12u_{i-2}^n - u_{i-3}^n}{6h^4}\right)$$

$$\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{k^2} = \frac{-EI}{6h^4}\left(-u_{i+3}^n + 12u_{i+2}^n - 39u_{i+1}^n + 56u_i^n - 39u_{i-1}^n + 12u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\right)\frac{1}{\lambda_m}$$

$$u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1} = \frac{-EI}{6h^4}\left(-u_{i+3}^n + 12u_{i+2}^n - 39u_{i+1}^n + 56u_i^n - 39u_{i-1}^n + 12u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\right)\frac{k^2}{\lambda_m}$$

$$u_i^{n+1} = -\frac{EI}{6h^4}\left(-u_{i+3}^n + 12u_{i+2}^n - 39u_{i+1}^n + 56u_i^n - 39u_{i-1}^n + 12u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\right)\frac{k^2}{\lambda_m} + 2u_i^n - u_i^{n-1} \tag{4.24}$$

ให้ $\beta = \frac{EI}{6h^4}\frac{k^2}{\lambda_m}$ ดังนั้น

$$u_i^{n+1} = -\beta\left(-u_{i+3}^n + 12u_{i+2}^n - 39u_{i+1}^n + 56u_i^n - 39u_{i-1}^n + 12u_{i-2}^n - u_{i-3}^n\right) + 2u_i^n - u_i^{n-1} \tag{4.25}$$

เมื่อ $n = 0$ และ $i = 1$

$$u_1^1 = -\beta\left(-u_4^0 + 12u_3^0 - 39u_2^0 + 56u_1^0 - 39u_0^0 + 12u_{-1}^0 - u_{-2}^0\right) + 2u_1^0 - u_1^{-1} \tag{4.26}$$

จาก (4.2) พิจารณาหา Fictitious point ที่ u_{-1}, u_{-2} จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0(h^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

ให้ $u_0^0 = u_0$

จากเงื่อนไข (4.2) $u_0 = 0$ ดังนั้น $u_0 = 0 \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h}$

จะได้ $u_{-1} = u_1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_{-1} = u_1 \approx \frac{u_0 - u_{-2}}{2h}$$

ดังนั้น $u_{-2} = -2hu_1$

และ $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2k}$

ให้ $u_0^0 = u_0$

จากเงื่อนไข (4.2) $u_0 = 0$ ดังนั้นที่ $u_0 = 0 \approx \frac{u^1 - u^{-1}}{2k}$

จะได้ $u^{-1} = u^1$

นำ $u_{-1} = u_1$ และ $u^{-1} = u^1$ ไปแทนใน (4.26) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$u_1^1 = \left[\beta u_4^0 - \beta 12u_3^0 + \beta 39u_2^0 - \beta 56u_1^0 + \beta 39u_0^0 - \beta 12u_1^0 - 2\beta h u_1^0 + 2u_1^0 - u_1^1\right]$$

$$u_1^1 = \frac{1}{2}\left[\beta u_4^0 - \beta 12u_3^0 + \beta 39u_2^0 - (68\beta + 2\beta h - 2)u_1^0\right]$$

เมื่อ $n = 0$ และ $i = 2$

$$u_2^1 = -\beta\left(-u_5^0 + 12u_4^0 - 39u_3^0 + 56u_2^0 - 39u_1^0 + 12u_0^0 - u_{-1}^0\right) + 2u_2^0 - u_2^{-1} \qquad (4.27)$$

จาก $u_{-1} = u_1$ และ $u^{-1} = u^1$ นำไปแทนใน (4.27) จะได้

$$u_2^1 = \beta u_5^0 - \beta 12u_4^0 + \beta 39u_3^0 - \beta 56u_2^0 + \beta 39u_1^0 - 12\beta u_0^0 - \beta u_1^0 + 2u_2^0 - u_2^{-1}$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}\left[\beta u_5^0 - \beta 12u_4^0 + \beta 39u_3^0 - (56\beta - 2)u_2^0 - 40u_1^0\right]$$

เมื่อ $n = 0$ และ $i = N-1$

$$u_{N-1}^1 = -\beta\left(-u_{N+2}^0 + 12u_{N+2}^0 - 39u_N^0 + 56u_2^0 - 39u_{N-1}^0 + 12u_{N-3}^0 - u_{N-4}^0\right) + 2u_{N-1}^0 - u_{N-1}^{-1}$$

(4.28)

จากเงื่อนไข (4.2) จะพิจารณาหา Fictitious point ที่ u_{N+2} จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0(h^2)$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

ให้ $u_{n+1}^0 = u_{n+1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และจากเงื่อนไข (4.2) $u_{n+1}=0$ ดังนั้น $u_{N+1}=0\approx\frac{u_{N+2}-u_N}{2h}$

จะได้ $u_{N+2}=u_N$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_i^{n-1}-u_i^{n-1}}{2k}$$

ให้ $u_0^0=u_0$

จากเงื่อนไข (4.2) $u_0=0$ ดังนั้น $u_0=0\approx\frac{u^1-u^{-1}}{2k}$

จะได้ $u^{-1}=u^1$

นำ $u^{-1}=u^1$ ไปแทนใน (4.28) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$u_{N-1}^1=\beta u_{N+2}^0-\beta 12u_{N+1}^0+\beta 39u_N^0-(56\beta-2)u_{N-1}^0+\beta 39u_{N-2}^0-12\beta u_{N-3}^0+\beta u_{N-4}^0-u_{N-1}^1$$

$$u_{N-1}^1=\frac{1}{2}\left[\beta u_{N+2}^0-\beta 12u_{N+1}^0+\beta 39u_N^0-(56\beta-2)u_{N-1}^0+\beta 39u_{N-2}^0-12\beta u_{N-3}^0+\beta u_{N-4}^0\right]$$

เมื่อ $n=0$ และ $i=N$

$$u_N^1=-\beta\left(-u_{N+3}^0+12u_{N+2}^0-39u_{N+1}^0+56u_N^0-39u_{N-1}^0+12u_{N-2}^0-u_{N-3}^0\right)+2u_N^0-u_N^{-1}$$

(4.29)

เนื่องจาก $u_{N+2}=u_N$

$$u_{N+2}=u_N\approx\frac{u_{N+3}-u_{N+1}}{2h}$$

ดังนั้น $u_{N+3}=2hu_N$

และ $\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2k}$

ให้ $u_0^0=u_0$

จากเงื่อนไข (4.2) $u_0=0$ ดังนั้น $u_0=0\approx\frac{u^1-u^{-1}}{2k}$

จะได้ $u^{-1}=u^1$

นำ $u_{N+2}=u_N, u_{N+3}=2hu_N$ และ $u^{-1}=u^1$ ไปแทนใน (4.29) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_N^1 = \beta(2hu_N) - 12\beta(u_N) + 39\beta u_{N+1}^0 - 56\beta u_N^0 + 39\beta u_{N-1}^0 - 12\beta u_{N-2}^0 + \beta u_{N-3}^0 + 2u_N^0 - u_N^1$$

$$u_N^1 = \frac{1}{2}\left[-(68\beta - 2h\beta - 2)u_N^0 + 39\beta u_{N+1}^0 + 39\beta u_{N-1}^0 - 12\beta u_{N-2}^0 + \beta u_{N-3}^0\right]$$

จากสมการ (4.25) จัดรูปแบบของสมการที่ $n = 0$

เนื่องจาก $u^{-1} = u^1$

$$u_i^1 = -\beta\left(-u_{i+3}^0 + 12u_{i+2}^0 - 39u_{i+1}^0 + 56u_i^0 - 39u_{i-1}^0 + 12u_{i-2}^0 - u_{i-3}^0\right) + 2u_i^0 - u_i^{-1}$$

$$u_i^1 = \frac{1}{2}\left[\beta u_{i+3}^0 - 12\beta u_{i+2}^0 + 39\beta u_{i+1}^0 - (56\beta - 2)u_i^0 + 39\beta u_{i-1}^0 - 12\beta u_{i-2}^0 + \beta u_{i-3}^0\right]$$

ดังนั้น จะได้รูปแบบของสมการที่ $n = 0$ และ $i = 1, 2, \ldots, N$ ดังนี้

$$u_1^1 = \frac{1}{2}\left[\beta u_4^0 - 12\beta u_3^0 + 39\beta u_2^0 - (68\beta - 2h\beta - 2)u_1^0\right]$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}\left[\beta u_5^0 - 12\beta u_4^0 + 39\beta u_3^0 - (56\beta - 2)u_2^0 + 40u_1^0\right]$$

$$u_i^1 = \frac{1}{2}\left[\beta u_{i+3}^0 - 12\beta u_{i+2}^0 + 39\beta u_{i+1}^0 - (56\beta - 2)u_i^0 + 39\beta u_{i-1}^0 - 12\beta u_{i-2}^0 + \beta u_{i-3}^0\right]$$

$$u_{N-1}^1 = \frac{1}{2}\left[\beta u_{N+2}^0 - 12\beta u_{N+1}^0 + 39\beta u_N^0 - (56\beta - 2)u_{N-1}^0 + 39\beta u_{N-2}^0 - 12\beta u_{i-3}^0 + \beta u_{i-4}^0\right]$$

$$u_N^1 = \frac{1}{2}\left[-(68\beta - 2h\beta - 2)u_N^0 + 39\beta u_{N+1}^0 + 39\beta u_{N-1}^0 - 12\beta u_{N-2}^0 + \beta u_{N+3}^0\right] \tag{4.30}$$

เมื่อ $n = 1, 2, \ldots, m$ และ $i = 1$

จากสมการ (4.25)

$$u_1^{n+1} = -\beta\left(-u_4 + 12u_3^n - 39u_2^n + 56u_3^n - 39u_0^n + 12u_{-1}^n - u_{-2}^n\right) + 2u_1^n - u_1^{n-1} \tag{4.31}$$

จากเงื่อนไข (4.2) จะพิจารณาหา Fictitious point ที่ u_{-1}, u_{-2} จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0(h^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

ให้ $u_0^n = u_0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากเงื่อนไข $u_0 = 0$ ดังนั้น $u_0 = 0 \approx \dfrac{u_1 - u_{-1}}{2h}$

จะได้ $u_{-1} = u_1$

และที่ $u_{-1} = u_1 \approx \dfrac{u_0 - u_{-2}}{2h}$

ดังนั้น $u_{-2} = -2hu_1$

นำ $u_{-1} = u_1, u_{-2} = -2hu_1$ ไปแทนใน (4.31) จะได้สมการดังนี้

$$u_1^{n+1} = \beta u_4^n - 12\beta u_3^n + 39\beta u_2^n - 56\beta u_1^n + 39u_0^n - 12\beta u_1^n - 2h\beta u_1^n + 2u_1^n - u_1^{n-1}$$

$$u_1^{n+1} = \beta u_4^n - 12\beta u_3^n + 39\beta u_2^n - (68\beta + 2h\beta - 2)u_1^n - u_1^{n-1}$$

เมื่อ $i = 2$

$$u_2^{n+1} = -\beta\left(-u_5^n - 12u_4^n - 39u_3^n + 56u_2^n - 39u_1^n + 12u_0^n - 2u_{-1}^n\right) + 2u_2^n - u_2^{n-1} \qquad (4.32)$$

จาก $u_{-1} = u_1$ นำไปแทนใน (4.32) จะได้

$$u_2^{n+1} = \beta u_5^n - 12\beta u_4^n + 39\beta u_3^n - 56\beta u_2^n + 39u_1^n - 12\beta u_0^n + \beta u_1^n + 2u_2^n - u_2^{n-1}$$

$$u_2^{n+1} = \beta u_5^n - 12\beta u_4^n + 39\beta u_3^n - (56\beta - 2)u_2^n + 40\beta u_1^n - u_2^{n-1}$$

เมื่อ $i = N-1$

$$u_{N-1}^{n+1} = -\beta\left(-u_{N+2}^n + 12u_{N+1}^n - 39u_N^n + 56u_{N-1}^n - 39u_{N-2}^n + 12u_{N-3}^n - u_{N-4}^n\right) + 2u_{N-1}^n + u_{N-1}^{n-1} \qquad (4.33)$$

จากเงื่อนไข (4.2) พิจารณา Fictitious point ที่ u_{N+2} จากผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $0\left(h^2\right)$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

ให้ $u_{N+1}^n = u_{N+1}$

จากเงื่อนไข (4.20) $u_{N+1} = 0$ ดังนั้น $u_{N+1} = 0 \approx \dfrac{u_{N+2} - u_N}{2h}$

จะได้ $u_{N+1} = u_N$ นำไปแทนใน (4.33) จะได้สมการดังนี้

$$u_{N-1}^{n+1} = \beta u_N^n - 12\beta u_{N+1}^n + 39\beta u_N^n - 56\beta u_{N-1}^n + 39u_{N-2}^n - 12\beta u_{N-3}^n + \beta u_{N-4}^n + 2u_{N-1}^n + u_{N-1}^{n-1}$$

$$u_{N-1}^{n+1} = -12\beta u_{N+1}^n + 40\beta u_N^n - (56\beta - 2)u_{N-1}^n + 39\beta u_{N-2}^n - 12\beta u_{N-3}^n + \beta u_{N-4}^n + u_{N-1}^{n-1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = N$

$$u_N^{n+1} = -\beta\left(-u_{N+3}^n + 12u_{N+2}^n - 39u_{N+1}^n + 56u_N^n - 39u_{N-1}^n + 2u_{N-2}^n - u_{N-3}^n\right) + 2u_N^n - u_N^{n-1}$$

(4.34)

เนื่องจาก $u_{N+2} = u_N$

และที่ $u_{N+2} = u_N = \dfrac{u_{N+3} - u_{N+1}}{2h}$

ดังนั้น $u_{N+3} = 2hu_N$

นำ $u_{N+2} = u_N, u_{N+3} = 2hu_N$ แทนใน (4.34) จะได้สมการดังนี้

$$u_N^{n+1} = \beta\left(2hu_N^n\right) - 12\beta u_N^n + 39\beta u_{N+1}^n - 56\beta u_N^n + 36\beta u_{N-1}^n - 12\beta u_{N-2}^n + \beta u_{N-3}^n + 2u_N^n - u_N^{n-1}$$

$$u_N^{n+1} = 39u_{N+1}^n - \left(68\beta - 2h\beta - 2\right)u_N^n + 39\beta u_{N-1}^n - 12\beta u_{N-2}^n + \beta u_{N-3}^n - u_N^{n-1}$$

ดังนั้น จะได้รูปแบบของสมการที่ $t = 1, 2, \ldots M$ และ $i = 1, 2, \ldots N$ ดังนี้

$$u_1^{n+1} = \beta u_4^n - 12u_3^n + 39\beta u_2^n - \left(68\beta - 2h\beta - 2\right)u_1^n - u_1^{n-1}$$

$$u_2^{n+1} = \beta u_5^n - 12u_4^n + 39\beta u_3^n - \left(56\beta - 2\right)u_1^n + 40\beta u_1^n - u_2^{n-1}$$

$$u_i^{n+1} = \beta u_{i+3}^n - 12u_{i+2}^n + 39\beta u_{i+1}^n - \left(56\beta - 2\right)u_i^n + 39\beta u_{i-1}^n - 12\beta u_{i-2}^n + \beta u3 - u_i^{n-1}$$

$$u_N^{n+1} = 39u_{N+1}^n - \left(68\beta - 2h\beta - 2\right)u_N^n + 39\beta u_{N-1}^n - 12\beta u_{N-2}^n + \beta u_{N-3}^n - u_N^{n-1}$$

$$u_{N-1}^{n+1} = -12u_{N+1}^n + 40\beta u_N^n - \left(56\beta - 2\right)u_{N-1}^n + 39\beta u_{N-2}^n - 12\beta u_{N-3}^n + \beta u_{N-4}^n + u_{N-1}^{n-1}$$

(4.35)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> การหาผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method)

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\lambda_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{EI}{\lambda_m}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.36)$$

ให้ $\dfrac{EI}{\lambda_m} = 0.1$ จะได้สมการคานดังนี้

$$(0.1)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$u(0,t)=0,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^3}=0$$

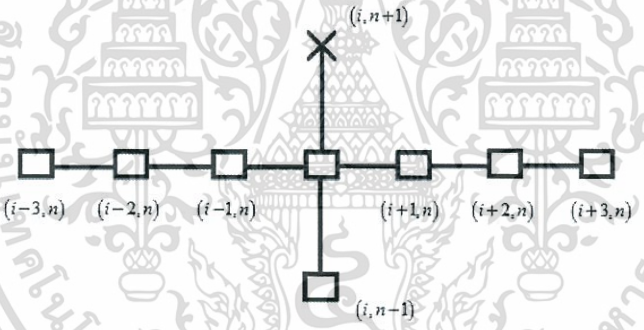
ใช้ผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $O(h^4)$ และผลต่างกลางด้วยความคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\approx\frac{-u_{i+3}^n+12u_{i+2}^n-39u_{i+1}^n+56u_i^n-39u_{i-1}^n+12u_{i-2}^n-u_{i-3}^n}{6h^4} \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\approx\frac{u_i^{n-1}-2u_i^n+u_i^{n+1}}{k^2} \tag{4.38}$$

นำ (4.37) และ (4.38) แทนใน (3.36)

$$(0.1)\left(\frac{-u_{i+3}^n+12u_{i+2}^n-39u_{i+1}^n+56u_i^n-39u_{i-1}^n+12u_{i-2}^n-u_{i-3}^n}{6h^4}\right)+\left(\frac{u_i^{n-1}-2u_i^n+u_i^{n+1}}{k^2}\right)=0$$



รูปที่ 4.1 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า

4.3 การหาผลเฉลยโดยการลดรูป

จากสมการการสั่นของคาน $EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\lambda_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ เมื่อเวลาผ่านไปนานๆคานจะมีลักษณะรูปร่างที่เปลี่ยนไปจากคานในแนวนอน เนื่องจากน้ำหนักของคานเอง ดังนั้น จึงตัดพจน์ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ออกไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> การหาผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite difference)

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$$

$$0\le x\le 1\ ,u(0)=0,\ u'(0)=0,\ u''(1)=0,\ u'''(1)=0$$

<u>วิธีทำ</u>

จากผลต่างกลางความคลาดเคลื่อน

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_{i-1}-u_{i+1}}{2\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{(\Delta x)^2}=0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{-u_{i-2}+2u_{i-1}-2u_{i+1}+u_{i+2}}{2(\Delta x)^3}=0$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{u_{i-2}-4u_{i-1}+6u_i-4u_{i+1}+u_{i+2}}{(\Delta x)^4}=1$$

จากสมการ จะได้

$$\frac{EI}{(\Delta x)^4}\left[u_{i-2}-4u_{i-1}+6u_i-4u_{i+1}+u_{i+2}\right]=1$$

ให้ $R_i=\Delta x$ และที่ $i=1$

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3}\left[u_{-1}-4u_0+6u_1-4u_2+u_3\right]=R_1$$

ที่ $i=2$

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3}\left[u_0-4u_1+6u_2-4u_3+u_4\right]=R_2$$

ที่ $i=3$

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3}\left[u_1-4u_2+6u_3-4u_4+u_5\right]=R_3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ $i=4$

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3}\left[u_2-4u_3+6u_4-4u_5+u_6\right]=R_4$$

และที่ $i=0$

ในผลต่างกลางของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้

$$u_{-1}=u_1$$

ในผลต่างกลางของอนุพันธ์อันดับสอง จะได้

$$u_{-1}-2u_0+u_1=0$$

$$u_1-2u_0+u_1=0$$

$$2u_1-2u_0=0$$

ดังนั้น $$u_1=u_0$$

จาก $i=1$ นำ $u_{-1}=u_1$ และ $u_1=u_0$ มาแทน จะได้

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3}\left[u_1-4u_1+6u_1-4u_2+u_3\right]=R_1$$

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3}\left[3u_1-4u_2+u_3\right]=R_1$$

จาก R_1-R_4 สามารถนำมาเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\frac{EI}{(\Delta x)^3}\begin{bmatrix}3&-4&1&0\\-4&6&-4&1\\1&-4&6&-4\\0&1&-4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\end{bmatrix}$$

แก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรม MATLAB ในการหาคำตอบ โดยจะให้ R_i เป็น array ให้กับผลเฉลยของ u_i และให้ $R_i=1$

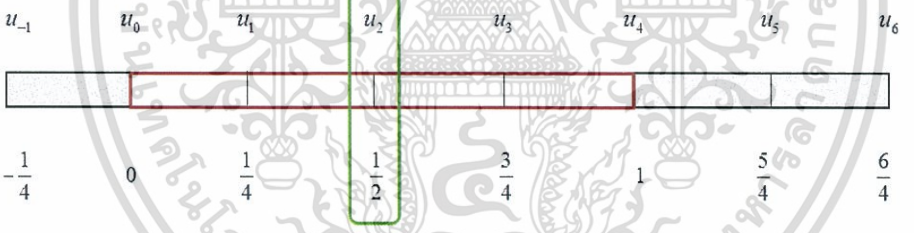
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ 1.3333 \\ 1.3333 \\ 0.8333 \end{bmatrix} \frac{(\Delta x)^3}{EI}$$

โดยกำหนดให้ $\Delta x = \frac{L}{5} = \frac{1}{5}$ และ $EI = 1$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ 1.3333 \\ 1.3333 \\ 0.8333 \end{bmatrix} \frac{1}{125}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0133336 \\ 0.0106664 \\ 0.0106664 \\ 0.0066664 \end{bmatrix}$$



รูปที่ 4.2 ตำแหน่งของผลเฉลย

ดังนั้น ที่ u_2 หรือ $x = 0.5$ ผลเฉลยที่ได้คือ $u(0.5) = 0.0106664$

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> การหาผลเฉลยโดยใช้วิธีเชิงตัวเลขคอลโลเคชัน (Collocation)

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

$$0 \le x \le 1, u(0) = 0,\ u'(0) = 0,\ u''(1) = 0,\ u'''(1) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>วิธีทำ</u>

1. $EI\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \quad ,0\le x\le 1$

   $u(0)=0,\ u'(0)=0,\ u''(1)=0,\ u'''(1)=0$

2. ให้ $U(x)=C_1\phi_1(x)+C_2\phi_2(x)+\ldots$ เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ใน 1.

   ดังนั้น $\dfrac{\partial^4 U(x)}{\partial x^4}=0 \ ,0\le x\le 1\ ,U(0)=0\ U'(0)=0,\ U''(1)=0,\ U'''(1)=0$

3. จาก $(0,0),\left(\dfrac{1}{4},c_1\right),\left(\dfrac{1}{2},c_2\right),\left(\dfrac{3}{4},c_3\right)$ และ $(1,\dfrac{1}{10})$ ได้เพิ่มจุดแล้วใช้การประมาณค่าภาย

   ในช่วงแบบลากรองจ์ หา $U(x)$ ที่ผ่านจุดที่กำหนด

$$U(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}u_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}u_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}u_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}u_3$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}u_4$$

$$U(x)=\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{\left(\frac{1}{4}-0\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)}c_1+\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}c_2$$

$$+\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(\frac{3}{4}-0\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-1\right)}c_3+\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}c_1+\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}c_2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}c_3+\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{\left(-\frac{3}{64}\right)}c_1+\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{\left(\frac{1}{64}\right)}c_2$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(-\frac{3}{128}\right)}c_3+\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{32}\right)}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$=-\frac{64}{3}c_1x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)+64c_2x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)$$

$$-\frac{128}{3}c_3x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)+\frac{16}{15}x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

ดังนั้น

$$U(x)=-x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)+x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)-x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$+x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

4.จาก

$$U(x)=-\frac{64}{3}c_1x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)+64c_2x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)$$

$$-\frac{128}{3}c_3x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)+\frac{32}{3}x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

โดยการหาอนุพันธ์

$$U'(x)=-\frac{64}{3}c_1\left(4x^3-\frac{27}{4}x^2+\frac{13}{4}x-\frac{3}{8}\right)+64c_2\left(4x^3-6x^2+\frac{19}{8}x-\frac{13}{16}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\frac{128}{3}c_3\left(4x^3-\frac{21}{4}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{1}{8}\right)+\frac{16}{15}\left(4x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{22}{16}x-\frac{3}{24}\right)$$

$$U''(x)=-\frac{64}{3}c_1\left(12x^2-\frac{27}{2}x+\frac{13}{4}\right)+64c_2\left(12x^2-12x+\frac{19}{8}\right)-\frac{128}{3}c_3\left(12x^2-\frac{21}{2}x+\frac{7}{4}\right)$$

$$+\frac{16}{15}\left(12x^2-9x+\frac{22}{16}\right)$$

$$U'''(x)=-\frac{64}{3}c_1\left(24x-\frac{27}{2}\right)+64c_2(24x-12)-\frac{128}{3}c_3\left(24x-\frac{21}{2}\right)+\frac{16}{15}(24x-9)$$

$$U^{(4)}(x)=-512c_1+1536c_2-1024c_3+\frac{128}{5}$$

ดังนั้น

$$R=\left(-512c_1+1536c_2-1024c_3+\frac{128}{5}\right)-0$$

$$R=-512c_1+1536c_2-1024c_3+\frac{128}{5}$$

5. $\int_c R\phi(x)\,dx=0$

$$\int_0^1\left[\left(-512c_1+1536c_2-1024c_3+\frac{128}{5}\right)\left(-x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)\right.\right.$$

$$\left.\left.+x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)-x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)+x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)\right]dx=0$$

$$\left(-512c_1+1536c_2-1024c_3+\frac{128}{5}\right)\left(-x^4+\frac{9}{4}x^3-\frac{13}{8}x^2+\frac{3}{8}x+x^4-2x^3+\frac{19}{16}x^2\right.$$

$$\left.-\frac{13}{16}x-x^4+\frac{7}{4}x^3-\frac{7}{8}x^2+\frac{1}{8}x+x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{16}{11}x^2-\frac{3}{24}x\right)$$

$$=-256c_1x^3+320c_1x^2-224c_1x-768c_2x^3-960c_2x^2-672c_2x-512c_3x^3+640c_3x^2+448c_3x$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\frac{64}{5}x^3-\frac{40}{11}x^2-\frac{56}{5}x$$

$$\int_0^1\Big(-256c_1x^3+320c_1x^2-224c_1x-768c_2x^3-960c_2x^2-672c_2x-512c_3x^3$$

$$+640c_3x^2+448c_3x+\frac{64}{5}x^3-\frac{40}{11}x^2-\frac{56}{5}x\Big)dx=0$$

$$=-256c_1\frac{x^4}{4}+320c_1\frac{x^3}{3}-224c_1\frac{x^2}{2}-768c_2\frac{x^4}{4}-960c_2\frac{x^3}{3}-672c_2\frac{x^2}{2}-512c_3\frac{x^4}{4}$$

$$+640c_3\frac{x^3}{3}+448c_3\frac{x^2}{2}+\frac{64}{5}\frac{x^4}{4}+\frac{40}{11}\frac{x^3}{3}-\frac{56}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=-64c_1+\frac{320}{3}c_1-112c_1+192c_2-320c_2-336c_2-128c_3+\frac{640}{3}c_3+224c_3+\frac{16}{5}+\frac{40}{33}-\frac{28}{5}$$

$$=-\frac{208}{3}c_1-464c_2+\frac{928}{3}c_3-\frac{196}{165}$$

ให้ $$-\frac{208}{3}c_1-464c_2+\frac{928}{3}c_3-\frac{196}{165}=0$$

จากผลต่างกลางความคลาดเคลื่อนของอนุพันธ์อันดับสองและอันดับสาม

$$0.1-2c_3+c_2=0$$

$$0.1-3c_3+3c_2-c_1=0$$

จากผลต่างกลางความคลาดเคลื่อนของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้ว่า $c_1=0$

แทนค่า จะได้

$$\frac{1}{10}-2c_3+c_2=0 \qquad (4.39)$$

$$\frac{1}{10}-3c_3+3c_2=0 \qquad (4.40)$$

$$-464c_2+\frac{928}{3}c_3-\frac{196}{165}=0 \qquad (4.41)$$

จาก (4.39) จะได้ $$c_2=2c_3-\frac{1}{10} \qquad (4.42)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ (4.42) แทนใน (4.40) จะได้

$$\frac{1}{10}-3c_3+3\left(2c_3-\frac{1}{10}\right)=0$$

$$\frac{1}{10}-3c_3+6c_3-\frac{3}{10}=0$$

$$3c_3-\frac{1}{5}=0$$

$$3c_3=\frac{1}{5}$$

$$c_3=\frac{1}{15}$$

นำ $c_3=\frac{1}{15}$ แทนใน (4.42) จะได้

$$c_2=2\left(\frac{1}{15}\right)-\frac{1}{10}$$

$$c_2=\frac{2}{15}-\frac{1}{10}$$

$$c_2=\frac{1}{30}$$

ดังนั้น $c_1=0, c_2=\frac{1}{30}, c_3=\frac{1}{15}$

6. $U(x)=-\frac{64}{3}(0)x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)+64\left(\frac{1}{30}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)$

$$-\frac{128}{3}\left(\frac{1}{15}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)+\frac{16}{15}x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

$$U(x)=\frac{32}{15}x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)-\frac{128}{45}x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$+\frac{16}{15}x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าหาผลเฉลย

เมื่อ $x=0.5=\frac{1}{2}$

$$U(0.5)=\frac{32}{15}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{128}{45}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$+\frac{16}{15}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{30}-0-0$$

$$=\frac{1}{30}$$

$$\approx 0.033333$$

ดังนั้น ที่ $x=0.5$ จะได้ผลเฉลยของสมการเป็น $U(0.5)=0.033333$

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> การหาผลเฉลยโดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ (Laplace Transformation)

$$EI\frac{du}{dx^4}=1$$

เงื่อนไขขอบเขต $u(0)=0,\ u'(0)=0,\ u''(L)=0,\ u'''(L)=0$

<u>วิธีทำ</u> โดยการแปลงลาปลาซ

$$EI\left[s^4U(s)-s^3u(0)-s^2u'(0)-su''(0)-u'''(0)\right]=\frac{1}{s}$$

แทนเงื่อนไข $u(0)=0, u'(0)=0$

$$s^4U(s)-su''(0)-u'''(0)=\frac{1}{EIs}$$

ให้ $c_1=u''(0)$ และ $c_2=u'''(0)$ แล้ว

$$U(s)=\frac{c_1}{s^3}+\frac{c_2}{s^4}+\frac{1}{EIs^5}$$

โดยการแปลงลาปลาซผกผันได้

$$u(x)=\frac{c_1}{2!}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}+\frac{c_2}{3!}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}+\frac{1}{4!EI}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{6}x^3 + \frac{1}{24EI}x^4$$

$$u'(x) = c_1 x + \frac{c_2}{2}x^2 + \frac{1}{6EI}x^3$$

$$u''(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2EI}x^2$$

$$u'''(x) = c_2 + \frac{1}{EI}x$$

แทนเงื่อนไข $u''(L) = 0, u'''(L) = 0$ ได้

$$0 = c_1 + c_2 L + \frac{L^2}{2EI}$$

$$0 = c_2 + \frac{L}{EI}$$

โดยการหาผลเลยระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นได้

$$c_1 = \frac{L^2}{2EI}, c_2 = -\frac{L}{EI}$$

ดังนั้น $u(x) = \frac{L^2}{4EI}x^2 - \frac{L}{6EI}x^3 + \frac{x^4}{24EI}$

$$= \frac{6L^2}{24EI}x^2 - \frac{4L}{24EI}x^3 + \frac{x^4}{24EI}$$

$$= \frac{1}{24EI}\left(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4\right)$$

$$= \frac{1}{24EI}\left(x^2\right)\left(x^2 - 4L + 6L^2\right)$$

แทนค่าหาผลเฉลย

เมื่อ $x = 0.5, L = 1, EI = 1$

$$u(0.5) = \frac{1}{24(1)}\left(0.5^2\right)\left(0.5^2 - 4(1) + 6(1)^2\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{16}\right)}{24}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{3}{128}$$

$$\approx 0.0234375$$

ดังนั้น ที่ $x = 0.5$ จะได้ผลเฉลยของสมการเป็น $u(0.5) = 0.0234375$

ค่าคลาดเคลื่อน

จากการคำนวณโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด วิธีคอลโลเคชันและการแปลงลาปลาซของสมการกรณีลดรูป สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด วิธีคอลโลเคชันและการแปลงลาปลาซ

การหาผลเฉลย	การแปลงลาปลาซ	ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด	Error	คอลโลเคชัน	Error
เมื่อ $x = 0.5$	0.0234375	0.0106664	0.0127711	0.033333	0.0098955

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

การหาผลเฉลยของสมการการสั่นของคานในกรณีที่ลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด(Finite difference) วิธีคอลโลเคชัน มาเปรียบเทียบกับวิธีการแปลงลาปลาซ พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน นั่นคือ สามารถพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยโดยวิธีคอลโลเคชันซึ่งจะได้ผลเฉลยใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาพิเศษนี้ ได้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถหาผลเฉลยได้จริงแต่มีความคลาดเคลื่อน ซึ่งสำหรับผู้ที่จะศึกษาในเรื่องนี้ต่อไปสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อไปได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] กาญจนา คำนึงนิจ. 2555. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข. กรุงเทพฯ : เอกสารประกอบการเรียนการสอน ภาควิชาคณิตศาสตร์ สจล. 2558

[2] กำพลศักดิ์ บุญโกย. 2559. การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด. กรุงเทพฯ : วิทยานิพนธ์ ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ สจล. 2559

[3] พัชรินทร์ เหมโชติ. 2555. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ. กรุงเทพฯ : เอกสารประกอบการเรียนการสอน ภาควิชาคณิตศาสตร์ สจล. 2558

[4] Collocation method. 2016. [ออนไลน์][ค้นเมื่อ12 มิถุนายน 2559].สืบค้นจาก: https://en.wikipedia.org/wiki/Collocation_method

[5] J.Evangeline Cicelia, Solution of Weighted residual problems by using Galerkin's Method, 2014, Bharath University. [ออนไลน์][ค้นเมื่อ12 มิถุนายน 2559].สืบค้นจาก: https://www.researchgate.net/publication/265412796_Solution_of_Weighted_residual_problems_by_using_Galerkin%27s_Method

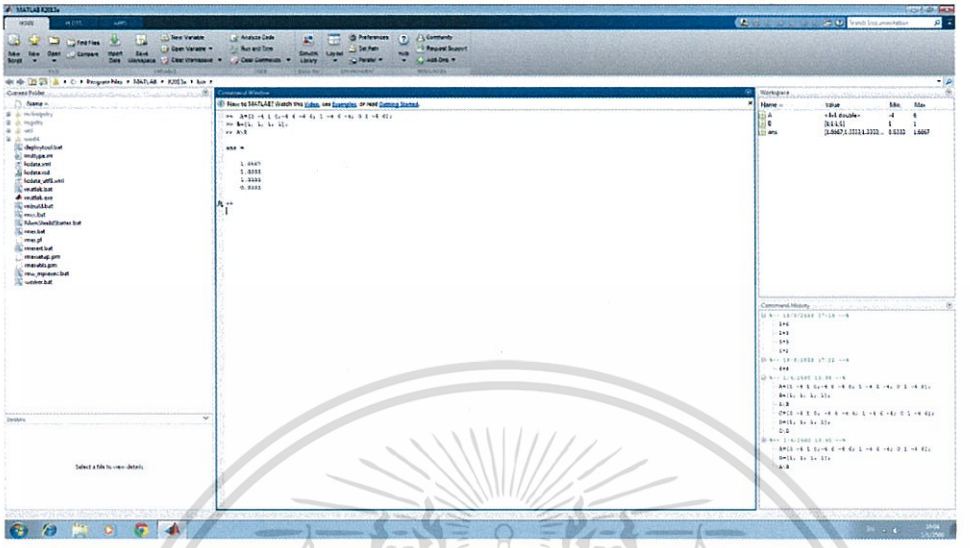
[6] Scott Whitney.(1999). [ออนไลน์][ค้นเมื่อ12 มิถุนายน 2559].สืบค้นจาก: http://imechanica.org/files/Vibrations%20of%20Cantilever%20Beams%20.pdf

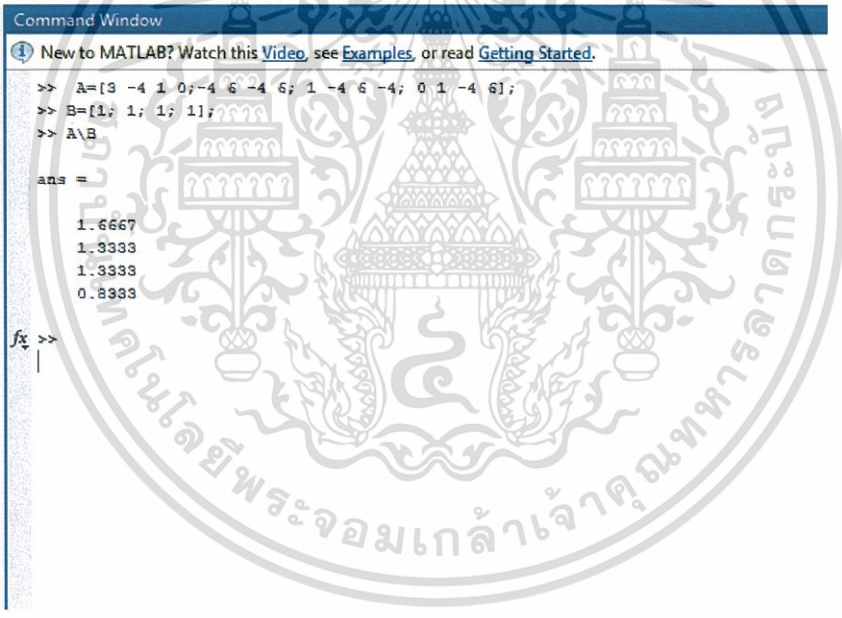
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรม MATLAB ในการหาคำตอบของ ตัวอย่างที่ 10





เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลต่างกลางความคลาดเคลื่อนของอนุพันธ์ของ ตัวอย่างที่ 11

x	y	อนุพันธ์อันดับหนึ่ง	อนุพันธ์อันดับสอง	อนุพันธ์อันดับสาม
0	0	$\frac{c_1 - 0}{2h}$		
$\frac{1}{4}$	c_1		$\frac{c_2 - 2c_1 + 0}{h^2}$	
		$\frac{c_2 - c_1}{2h}$		$\frac{c_3 - 3c_2 + 3c_1}{h^3}$
$\frac{1}{2}$	c_2		$\frac{c_3 - 2c_2 + c_1}{h^2}$	
		$\frac{c_3 - c_2}{2h}$		$\frac{\frac{1}{10} - 3c_3 + 3c_2 - c_1}{h^3}$
$\frac{3}{4}$	c_3		$\frac{\frac{1}{10} - 2c_3 + c_2}{h^2}$	
		$\frac{\frac{1}{10} - c_3}{2h}$		
1	$\frac{1}{10}$			

Activate \
Go to PC set

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้