ฟังก์ชันมอร์ส
MORSE FUNCTION

ทิพวรรณ แซ่แพ้
สุคนธ์ทิพย์ ศรีเปารยะ
สุธิดา พุทธขันธ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ฟังก์ชันมอร์ส

MORSE FUNCTION

ทิพวรรณ แซ่แพ้

สุคนธ์ทิพย์ ศรีเปารยะ

สุธิดา พุทธขันธ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

MORSE FUNCTION

TIPPAWAN SAEPAE

SUKHONTHIP SRIPAORAYA

SUTIDA PHUTTAKAN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIRMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อโครงงานพิเศษ ฟังก์ชันมอร์ส
Morse Function

ชื่อนักศึกษา นางสาวทิพวรรณ แซ่แพ้ รหัสนักศึกษา 56050053
นางสาวสุคนธ์ทิพย์ ศรีเปารยะ รหัสนักศึกษา 56050153
นางสาวสุธิดา พุทธขันธ์ รหัสนักศึกษา 56050159

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2559
อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการ	
รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	สิริพร

หัวข้อโครงงานพิเศษ	ฟังก์ชันมอร์ส
	Morse Function
ชื่อนักศึกษา	นางสาวทิพวรรณ แซ่แพ้ รหัสนักศึกษา 56050053
	นางสาวสุคนธ์ทิพย์ ศรีเปารยะ รหัสนักศึกษา 56050153
	นางสาวสุธิดา พุทธขันธ์ รหัสนักศึกษา 56050159
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษนี้จะศึกษาสมบัติบางประการของบางพื้นผิวกำลังสอง โดยการพิจารณาจากจุดวิกฤตของพื้นผิวที่แทนด้วยฟังก์ชัน f ถ้าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f:\mathrm{M}\rightarrow R$ บน M เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate แล้ว f เป็นฟังก์ชันมอร์ส และถ้า f เป็นฟังก์ชันมอร์ส แล้วค่าดัชนีของฟังก์ชันมอร์สจะแสดงลักษณะของพื้นผิว

คำสำคัญ : ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด , พื้นผิวกำลังสอง , ฟังก์ชันมอร์ส

Title	Morse function	
Students	Miss. Tippawan Saepae	Student ID 56050053
	Miss. Sukhonthip Sripaoraya	Student ID 56050153
	Miss. Sutida Phuttakan	Student ID 56050159
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Faculty	Science	
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)	
Academic Year	2016	
Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul	
Co-advisor	Dr.Siripawn H.Winter	

ABSTRACT

In this special project is about studying in some properties of some quadratic surfaces by considering from function f at critical point which gets from surface. If critical point of function $f:\mathrm{M}\to\mathrm{R}$ on M is non-degenerate critical point, then function f is morse function and if f is morse function, then the value of index will show type of surface.

Keywords : maximum and minimum , quadratic surface , morse function

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง “ฟังก์ชันมอร์ส” ได้ประสบกับปัญหาและอุปสรรคต่างๆมากมาย และการแก้ไขปัญหาเหล่านี้ไม่สามารถแก้ไขปัญหาและอุปสรรคดังกล่าวได้หากขาดบุคคลเหล่านี้ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล และ ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้และได้ให้ความรู้คำแนะนำและแนวทางในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้อีกทั้งยังเป็นกำลังใจในการทำงาน

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ประธานกรรมการสอบ และ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนในการทำปัญหาพิเศษและเป็นกำลังใจให้มาโดยตลอด เพื่อนๆ สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่คอยแลกเปลี่ยนความคิดเห็น และให้กำลังใจในการทำงานครั้งนี้ เจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่อำนวยความสะดวกในการทำงานต่างๆ

นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์ในด้านต่างๆ จากผู้ที่เกี่ยวข้องที่ไม่สามารถกล่าวนามได้หมดในที่นี้ ผู้จัดทำขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

ทิพวรรณ แซ่แพ้
สุคนธ์ทิพย์ ศรีเปารยะ
สุธิดา พุทธขันธ์

สารบัญ

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา รวมทั้งวัตถุประสงค์ของปัญหา ขอบเขตของปัญหา ขั้นตอนของปัญหา และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการศึกษาปัญหาพิเศษนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจจะนำไปศึกษาต่อไป

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

พื้นผิวคือ ตัวอย่างของแมนิโฟลด์ในสามมิติ พื้นผิวนี้อาจเป็นพื้นผิวกำลังสอง (Quadratic Surface) พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนรอบ (Surface of Revolution) พื้นผิวที่มีเส้นตรงอยู่ในพื้นผิวนั้น (Ruled Surface) เป็นต้น นอกจากนี้การศึกษาพื้นผิวที่มีช่องว่างภายในพื้นผิว เช่น ขนมโดนัทหรือห่วงยาง (Torus) ยังไม่มีข้อมูลที่เป็นภาษาไทยมากนัก คณะผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาฟังก์ชันมอร์ส ซึ่งสามารถใช้อธิบายพื้นผิวที่มีจีนัสซึ่งคือพื้นผิวใดๆ ที่มีช่องว่างภายในพื้นผิวได้ และสามารถบอกค่าของดัชนีเพื่ออธิบายลักษณะของพื้นผิวได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหา

1.2.1 เพื่อศึกษาลักษณะของพื้นผิวที่ไม่มีจีนัส

1.2.2 เพื่อศึกษาลักษณะของพื้นผิวที่มี 1 จีนัส

1.2.3 เพื่อศึกษาลักษณะของพื้นผิวที่มี 2 จีนัส

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1.3.1 ศึกษาพื้นผิวเรียบในปริภูมิ 3 มิติที่มีจีนัส

1.3.2 ศึกษาเฉพาะกรณีมีจีนัสไม่เกิน 2 จีนัส

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถเข้าใจลักษณะของพื้นผิวที่ไม่มีจีนัส, ที่มี 1 จีนัส และที่มี 2 จีนัส

1.4.2 สามารถเข้าใจลักษณะของจุดวิกฤตแบบ degenerate และ non-degenerate

1.4.3 สามารถเข้าใจลักษณะของฟังก์ชันมอร์สบนบางพื้นผิว

1.5 แผนการดำเนินงาน

	เดือน									
	ส.ค. 59	ก.ย. 59	ต.ค. 59	พ.ย. 59	ธ.ค. 59	ม.ค. 60	ก.พ. 60	มี.ค. 60	เม.ย. 60	พ.ค. 60
หาอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ปรึกษาเรื่องที่สนใจ										
ค้นคว้าและศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจ										
วางแผนการวิจัย										
บทที่ 1 บทนำ										
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง										
บทที่ 3 ลักษณะของพื้นผิว										
บทที่ 4 ฟังก์ชันมอร์ส										
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ										
จัดทำรูปเล่ม										
ตรวจสอบและนำเสนอ										

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำไปใช้ในการหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันมอร์ส โดยประกอบไปด้วยการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรและสองตัวแปร และการเขียนรูปในพื้นผิวสามมิติ ซึ่งมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการศึกษาฟังก์ชันมอร์ส เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานในการดำเนินปัญหาพิเศษต่อไป

2.1 การหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

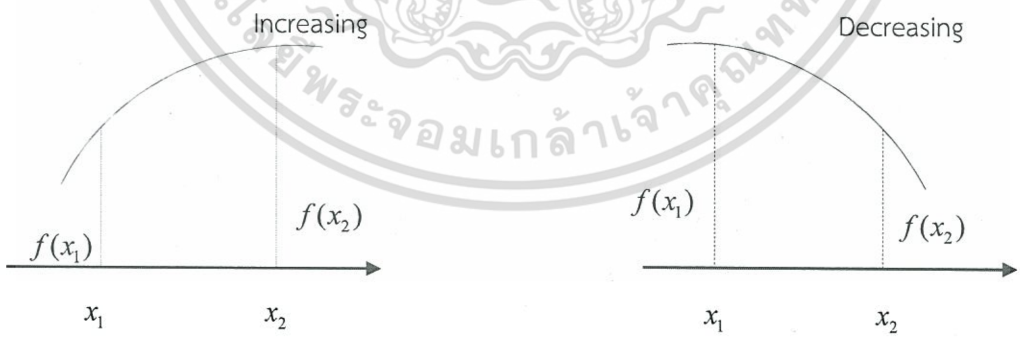
การพิจารณาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชันโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

<u>นิยาม 2.1[2]</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามในช่วง $[a,b]$ และมีจำนวนสองจำนวน x_1 และ x_2 ในช่วง $[a,b]$

2.1.1) ถ้า $f(x_1)<f(x_2)$ เมื่อ $x_1<x_2$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing)

2.1.2) ถ้า $f(x_1)>f(x_2)$ เมื่อ $x_1<x_2$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing)

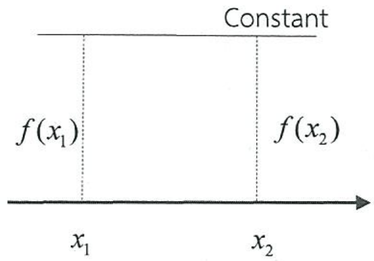
2.1.3) ถ้า $f(x_1)=f(x_2)$ สำหรับทุกค่าของ x_1 และ x_2 แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ (constant)



$f(x_1)<f(x_2)\quad if\ x_1<x_2$ $\qquad$ $f(x_1)>f(x_2)\quad if\ x_1<x_2$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \qquad\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



$$f(x_1) = f(x_2) \;\; for \;\; all \;\; x_1 \;\; and \;\; x_2 \in [a,b]$$

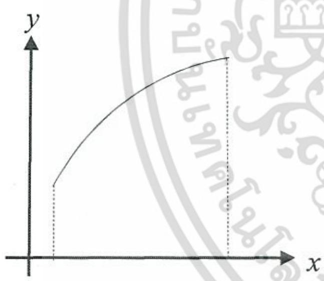
รูปที่ 2.1 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันค่าคงที่

<u>ทฤษฎีบท 2.1[2]</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วง (a,b)

2.1.1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่าของ x ใน (a,b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน $[a,b]$

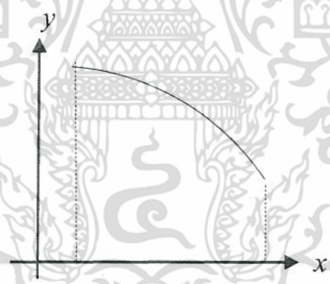
2.2.2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่าของ x ใน (a,b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดใน $[a,b]$

2.2.3) ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุกค่าของ x ใน (a,b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ใน $[a,b]$



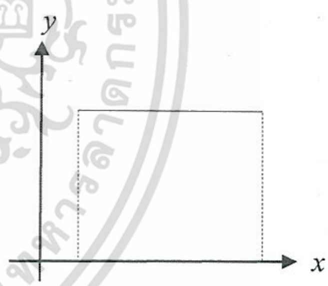
รูปที่ 2.2

Graph has positive slope



รูปที่ 2.3

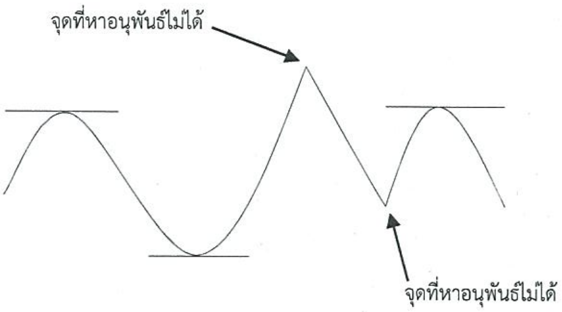
Graph has negative slope



รูปที่ 2.4

Graph has zero slope

<u>ทฤษฎีบท 2.3[2]</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามในช่วงเปิดที่มี x_0 อยู่ในช่วง ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ แล้ว $f'(x) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0 เรียก x_0 ว่าค่าวิกฤต (critical value)



รูปที่ 2.5 จุดที่หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0

ตัวอย่างที่ 2.1 พิจารณาช่วงของฟังก์ชันต่อไปนี้ที่จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง

(i) $f(x)=x^2-4x+3$

(ii) $f(x)=x^3$

(iii) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$

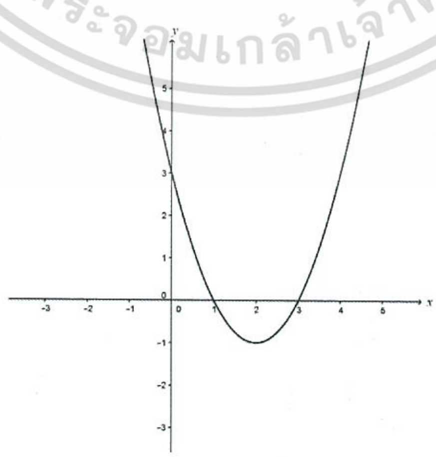
วิธีทำ (i) $f(x)=x^2-4x+3$

โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f'(x)=2x-4=2(x-2)=0$

จะได้จุดวิกฤตคือ 2

พบว่า ถ้า $-\infty<x<2$ แล้ว $f'(x)<0$ และ ถ้า $2<x<+\infty$ แล้ว $f'(x)>0$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องดังนั้น f ลดลงใน $(-\infty,2]$ เพิ่มขึ้นใน $[2,+\infty)$



รูปที่ 2.6 $f(x)=x^2-4x+3$

(ii) $f(x)=x^3$

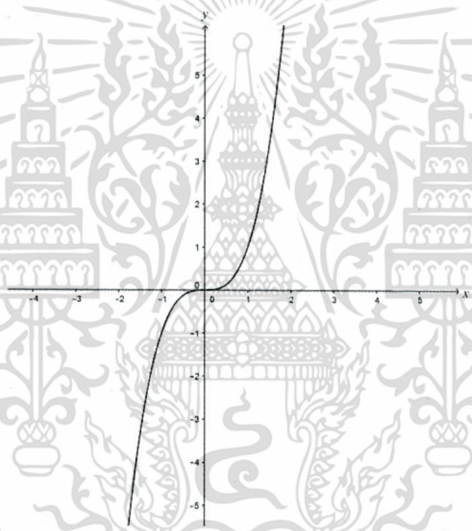
โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f'(x)=3x^2=0$

จะได้จุดวิกฤตคือ 0

พบว่า ถ้า $-\infty<x<0$ แล้ว $f'(x)>0$ และ ถ้า $0<x<+\infty$ แล้ว $f'(x)>0$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องดังนั้น f เพิ่มขึ้นใน $(-\infty,0]$ และ $[0,+\infty)$

นั่นคือ f เพิ่มขึ้นใน $(-\infty,+\infty)$ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.7 $f(x)=x^3$

(iii) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$

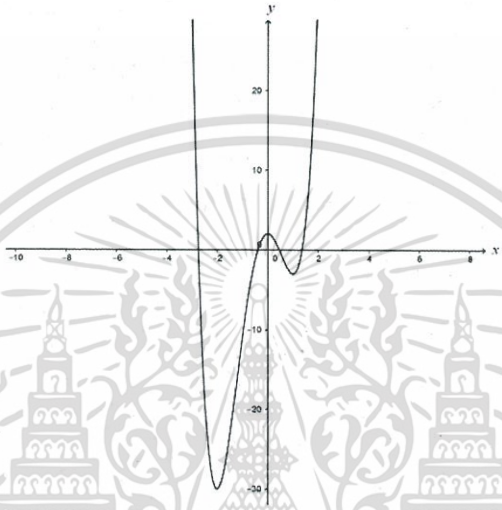
โดยการหาอนุพันธ์ได้

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x\left(x^2+x-2\right)=12x(x+2)(x-1)=0$$

จะได้จุดวิกฤตคือ -2 , 0 และ 1

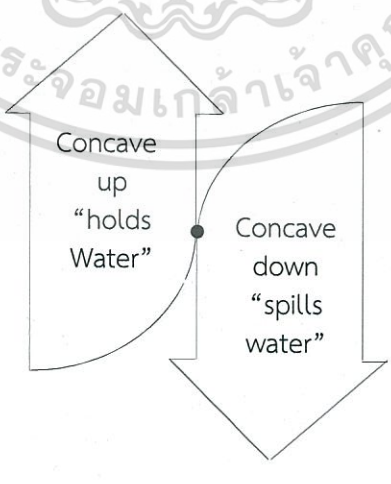
เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง มีช่วงที่จะพิจารณาดังนี้

ช่วง	$(12x)(x+2)(x-1)$	$f'(x)$	ข้อสรุป
$x<-2$	$(-)(-)(-)$	$-$	f ลดลงใน $(-\infty,-2]$
$-2<x<0$	$(-)(+)(-)$	$+$	f เพิ่มขึ้นใน $[-2,0]$
$0<x<1$	$(+)(+)(-)$	$-$	f ลดลงใน $[0,1]$
$1<x$	$(+)(+)(+)$	$+$	f เพิ่มขึ้นใน $[1,+\infty)$ #



รูปที่ 2.8 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$

ถึงแม้เครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของกราฟของ f จะทำให้รู้ว่ากราฟเพิ่มขึ้นหรือลดลงในช่วงใด แต่ไม่สามารถบอกลักษณะโค้งได้ ดังรูปต่อไปนี้

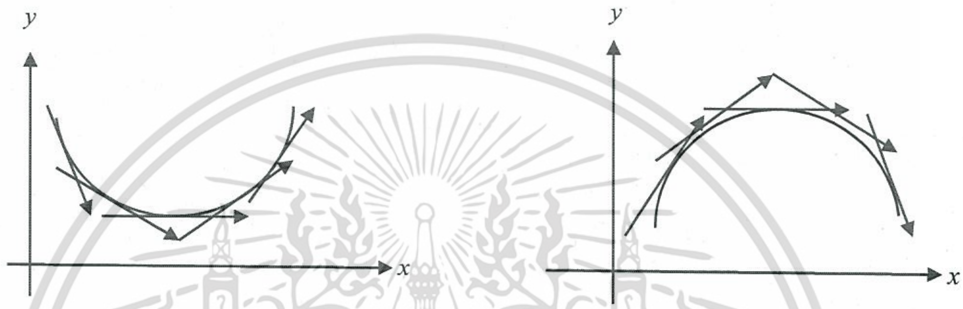


รูปที่ 2.9 Concave up และ Concave down

ทั้งสองข้างของจุดในรูปที่ 2.9 กราฟมีลักษณะเพิ่มขึ้น แต่ทางซ้ายของจุด กราฟมีลักษณะโค้งหงาย (เก็บน้ำได้) ในขณะที่ทางขวาของจุด กราฟมีลักษณะโค้งคว่ำ (เก็บน้ำไม่ได้) สำหรับฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ลักษณะโค้งจะพิจารณาจากเส้นสัมผัสกราฟ ดังนี้

ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะเป็นโค้งหงายในช่วงแล้วเส้นกราฟอยู่เหนือเส้นสัมผัส

ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะเป็นโค้งคว่ำในช่วงแล้วเส้นกราฟอยู่ใต้เส้นสัมผัส



รูปที่ 2.10 โค้งหงายและโค้งคว่ำ

โดยกราฟที่มีลักษณะเป็นโค้งหงายในช่วงแล้วเส้นสัมผัสจะมีความชันเพิ่มขึ้น
ในขณะที่กราฟที่มีลักษณะเป็นโค้งคว่ำในช่วงแล้วเส้นสัมผัสจะมีความชันลดขึ้น

<u>นิยาม 2.2[2]</u> ให้ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง $[a,b]$ แล้ว f เป็นโค้งหงาย ถ้า f' เพิ่มขึ้นใน $[a,b]$ และ f เป็นโค้งคว่ำ ถ้า f' ลดลงใน $[a,b]$

2.2.1) ถ้า $f'(x)>0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f'(x)<0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด

2.2.2) ถ้า $f''(x)>0$ แล้ว f' เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f''(x)<0$ แล้ว f' เป็นฟังก์ชันลด

<u>ทฤษฎีบท 2.2[2]</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่สองในช่วง $[a,b]$

2.2.1) ถ้า $f''(x)>0$ ใน $[a,b]$ แล้ว f เป็นโค้งหงายใน $[a,b]$

2.2.2) ถ้า $f''(x)<0$ ใน $[a,b]$ แล้ว f เป็นโค้งคว่ำใน $[a,b]$

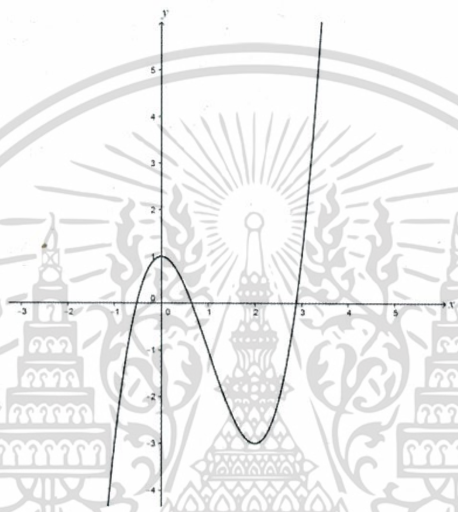
<u>ตัวอย่างที่ 2.2</u> พิจารณาช่วงของฟังก์ชัน $f(x)=x^3-3x^2+1$ เป็นโค้งหงายและเป็นโค้งคว่ำ

<u>วิธีทำ</u> โดยการหาอนุพันธ์ถึงอันดับที่สองได้

$$f'(x)=3x^2-6x \quad \text{และ} \quad f''(x)=6x-6=6(x-1)$$

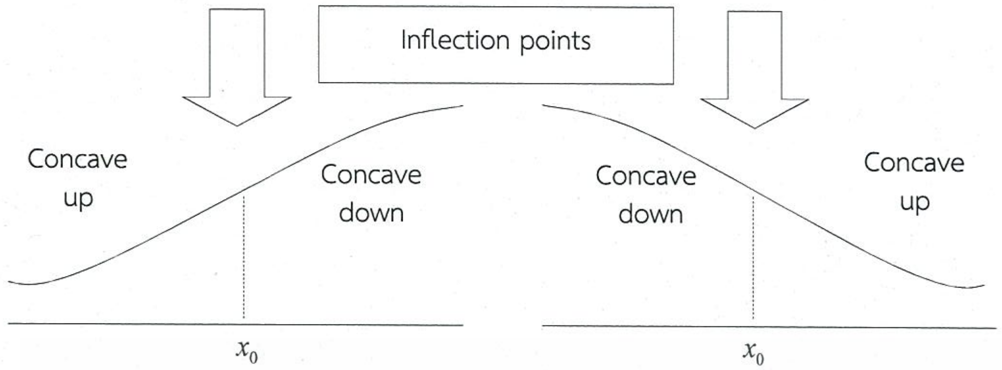
เนื่องจาก $f''(x)>0$ ถ้า $x>1$ และ $f''(x)<0$ ถ้า $x<1$

ดังนั้น f เป็นโค้งหงายใน $[1,+\infty)$ และ f เป็นโค้งคว่ำใน $(-\infty,1]$ ดังรูปที่ 2.10 #



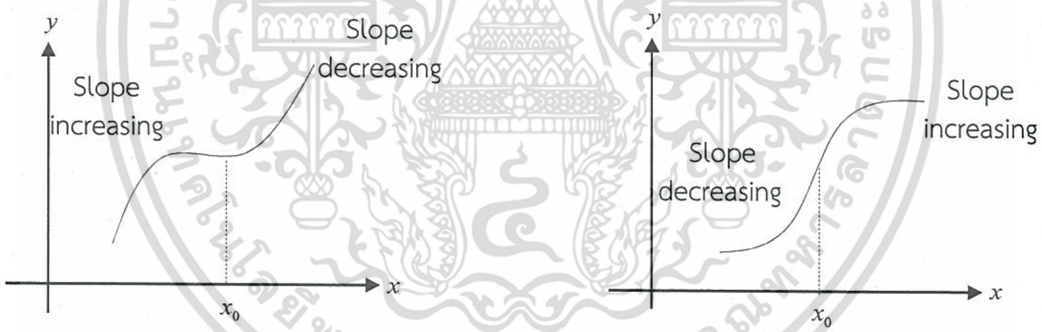
รูปที่ 2.11 $f(x)=x^3-3x^2+1$

<u>นิยาม 2.3[2]</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วงเปิดที่มี x_0 อยู่ในช่วงและ ถ้า f เปลี่ยนลักษณะโค้งที่จุด $(x_0, f(x_0))$ แล้ว f มีจุดเปลี่ยนเว้า (inflection point) ที่ x_0 และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่าจุดเปลี่ยนเว้า



รูปที่ 2.12 Inflection points

จุดเปลี่ยนเว้าคือจุดบนเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่ง ณ จุดนี้เส้นโค้งมีการเปลี่ยนลักษณะโค้ง ในขณะเดียวกัน ณ จุดเปลี่ยนเว้านี้ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟมีการเปลี่ยนแปลงจากความชันเพิ่มขึ้นเป็นความชันลดลงหรือเปลี่ยนจากความชันลดลงเป็นความชันเพิ่มขึ้น ดังรูป



รูปที่ 2.13 จุดเปลี่ยนเว้า x_0

ดังนั้นในการพิจารณาจุดเปลี่ยนเว้าของเส้นกราฟ $y = f(x)$ จะพิจารณาดังนี้

ถ้า $(x_0, f(x_0))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าแล้ว $f''(x_0) = 0$ และ $f''(x_0)$ ต้องเปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบ หรือ จากลบเป็นบวก

<u>ตัวอย่างที่ 2.3</u> พิจารณาจุดเปลี่ยนเว้าของ $f(x)=\sin x$ ใน $[0,2\pi]$

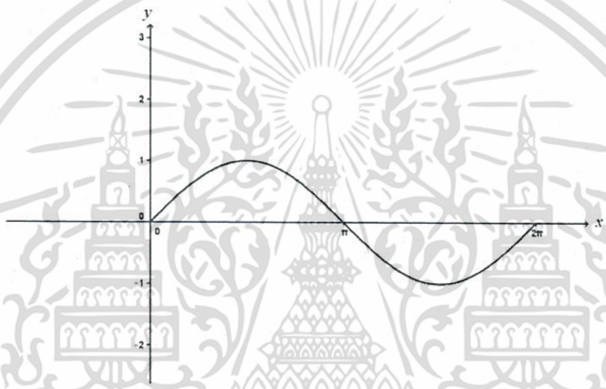
<u>วิธีทำ</u> โดยการหาอนุพันธ์ถึงอันดับที่สองได้

$$f'(x)=\cos x \quad \text{และ} \quad f''(x)=-\sin x$$

เนื่องจาก $f''(x)<0$ เมื่อ $0<x<\pi$ และ $f''(x)>0$ เมื่อ $\pi<x<2\pi$

ดังนั้น f เป็นโค้งหงายใน $\pi<x<2\pi$ และ f เป็นโค้งคว่ำใน $0<x<\pi$

นั่นคือ $x=\pi$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าโดย $f''(\pi)=0$ #



รูปที่ 2.14 $f(x)=\sin x; 0\le x\le 2\pi$

จากตัวอย่างที่ผ่านมานี้พบว่า จุดเปลี่ยนเว้าของ f พบเมื่อ $f''(x)=0$ แต่ไม่ได้หมายความว่า $f''(x_0)=0$ แล้วจะได้จุดเปลี่ยนเว้า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

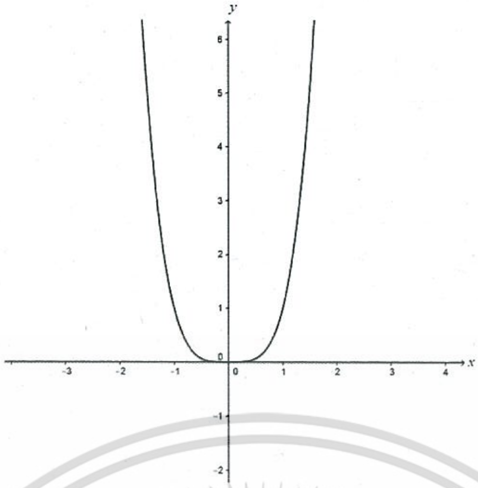
<u>ตัวอย่างที่ 2.4</u> พิจารณาจุดเปลี่ยนเว้าของ $f(x)=x^4$

<u>วิธีทำ</u> โดยการหาอนุพันธ์ถึงอันดับที่สองได้

$$f'(x)=4x^3 \quad \text{และ} \quad f''(x)=12x^2$$

เนื่องจาก $f''(x)=0$ เมื่อ $x=0$ แต่ $f''(x)>0$ เมื่อ $x>0$ และ $x<0$

ดังนั้น f เป็นโค้งหงายเมื่อ $x>0$ และ $x<0$ นั่นคือ f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า ดังรูปที่ 2.14 #



รูปที่ 2.15 $f(x)=x^4$

<u>นิยาม 2.4[2]</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามในช่วงเปิดที่มี x_0 อยู่ในช่วง (a,b)

2.4.1) $f(x_0)$ เรียกว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ถ้ามีจำนวน x_0 ที่อยู่ในช่วง (a,b) ซึ่งทำให้ $f(x)\le f(x_0)$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วง (a,b)

2.4.2) $f(x_0)$ เรียกว่าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ถ้ามีจำนวน x_0 ที่อยู่ในช่วง (a,b) ซึ่งทำให้ $f(x)\ge f(x_0)$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วง (a,b)

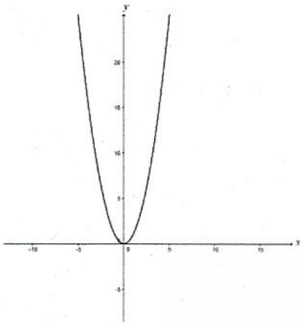
<u>นิยาม 2.5[2]</u> ถ้า x_0 เป็นจำนวนในช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว

2.5.1) $f(x_0)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f ในช่วง $[a,b]$ เมื่อ $f(x)\le f(x_0)$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วง $[a,b]$

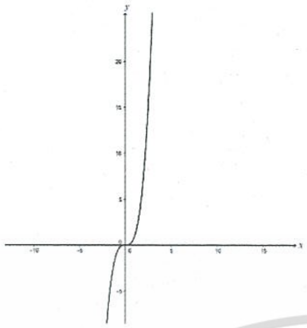
2.5.2) $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดของ f ในช่วง $[a,b]$ เมื่อ $f(x)\ge f(x_0)$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วง $[a,b]$

ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันในช่วง $[a,b]$ นี้บางทีเรียกว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันในช่วง $[a,b]$ ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนี้เรียกรวมกันว่า ค่าสุดขีด (extreme value)

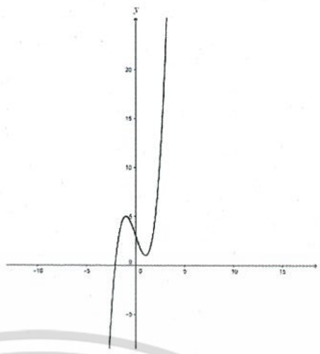
<u>ตัวอย่างที่ 2.5</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของกราฟที่กำหนดดังรูป



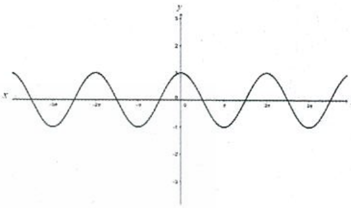
รูปที่ 2.16 (a)



รูปที่ 2.17 (b)



รูปที่ 2.18 (c)



รูปที่ 2.19 (d)

<u>วิธีทำ</u> (a) ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

(b) ฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

(c) ฟังก์ชัน $f(x)=x^3-3x+3$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ และมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $x=-1$

(d) ฟังก์ชัน $f(x)=\cos x$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ทุกค่าของจำนวนเต็มคี่ที่คูณกับ π และมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ทุกค่าของจำนวนเต็มคู่ที่คูณกับ π #

<u>ทฤษฎีบท 2.4[2]</u> (การทดสอบค่าสุดขีดด้วยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง)

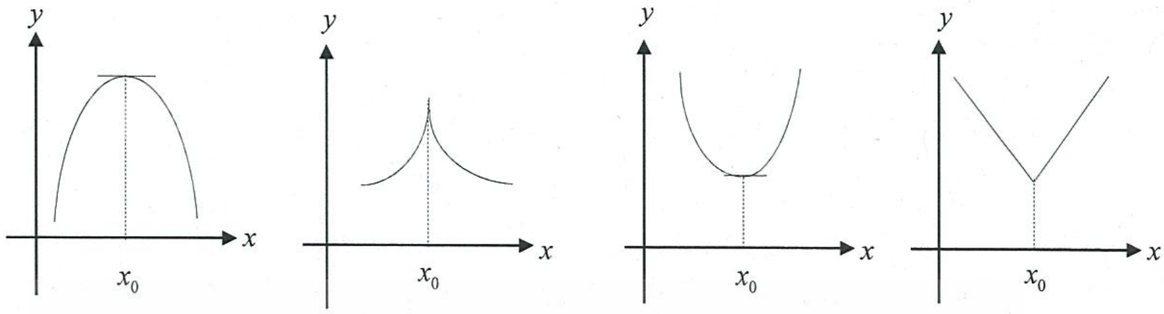
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มี x_0 เป็นค่าวิกฤต

2.4.1) ถ้า $f'(x_0)>0$ ในช่วงเปิดทางซ้ายของ x_0 และ $f'(x_0)<0$ ในช่วงเปิดทางขวาของ x_0 แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพันธ์ที่ x_0

2.4.2) ถ้า $f'(x_0)<0$ ในช่วงเปิดทางซ้ายของ x_0 และ $f'(x_0)>0$ ในช่วงเปิดทางขวาของ x_0 แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพันธ์ที่ x_0

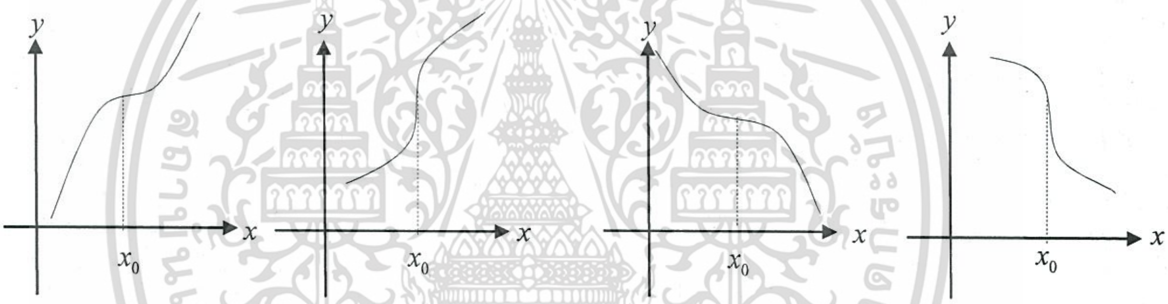
2.4.3) ถ้า $f'(x_0)$ มีเครื่องหมายเดียวกันในช่วงเปิดทั้งทางซ้ายและทางขวาของ x_0 แล้ว f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพันธ์ที่ x_0

กราฟต่อไปนี้มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ x_0



รูปที่ 2.20 กราฟที่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ x_0

กราฟต่อไปนี้ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ x_0



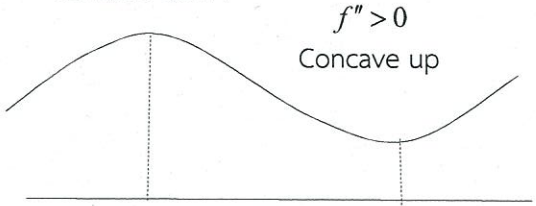
รูปที่ 2.21 กราฟที่ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ x_0

<u>**ทฤษฎีบท 2.5[2]**</u> (การทดสอบค่าสุดขีดด้วยอนุพันธ์อันดับที่สอง)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่สองที่ x_0

2.5.1) ถ้า $f'(x_0)=0$ และ $f''(x_0)<0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x_0 และกราฟเป็นโค้งคว่ำ

2.5.2) ถ้า $f'(x_0)=0$ และ $f''(x_0)>0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0 และกราฟเป็นโค้งหงาย

2.5.3) ถ้า $f'(x_0)=0$ และ $f''(x_0)=0$ แล้วไม่สามารถใช้การทดสอบนี้ได้



รูปที่ 2.22 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 2.6 พิจารณาค่าวิกฤตของ $f(x)=3x^{\frac{5}{3}}-15x^{\frac{2}{3}}$ พร้อมพิจารณาว่าเป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

วิธีทำ $f(x)=3x^{\frac{5}{3}}-15x^{\frac{2}{3}}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและนิยามสำหรับทุกค่าของ x

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งคือ

$$f'(x)=3\left(\frac{5}{3}\right)x^{\frac{5}{3}-1}-15\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}=5x^{\frac{2}{3}}-10x^{\frac{-1}{3}}$$
$$=5x^{\frac{-1}{3}}(x-2)=\frac{5(x-2)}{x^{\frac{1}{3}}}$$

เนื่องจาก $f'(x)$ ไม่นิยามเมื่อ $x=0$ และ $f'(x)=0$ เมื่อ $x=2$

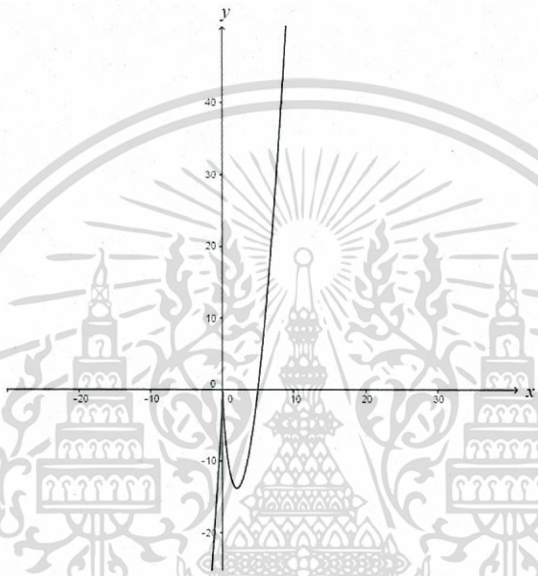
ดังนั้น f มีค่าวิกฤตที่ $x=0$ และ $x=2$

อนุพันธ์อันดับที่สองคือ

$$f''(x)=5\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}-10\left(-\frac{1}{3}\right)x^{\frac{-1}{3}-1}=\frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{10}{3}x^{\frac{-4}{3}}$$
$$=\frac{10}{3}x^{\frac{-4}{3}}(x+1)=\frac{10}{3}\frac{(x+1)}{x^{\frac{4}{3}}}$$

ที่ค่าวิกฤต $x=2$ ได้ว่า $f''(2)=\frac{10}{3}\frac{(2+1)}{2^{\frac{4}{3}}}>0$ ดังนั้นที่ $x=2$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ที่ค่าวิกฤต $x=0$ นั้น $f''(x)$ ไม่นิยาม ดังนั้นไม่สามารถใช้ทฤษฎีอนุพันธ์อันดับที่สองได้ พิจารณาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งพบว่า เมื่อ $x<0$ แล้ว $f'(x)>0$ และเมื่อ $x>0$ แล้ว $f'(x)<0$ เนื่องจาก $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบ ที่ $x=0$ ดังนั้นที่ $x=0$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ดังรูปที่ 2.23 #



รูปที่ 2.23 $f(x)=3x^{\frac{5}{3}}-15x^{\frac{2}{3}}$

<u>ตัวอย่างที่ 2.7</u> พิจารณาค่าวิกฤตของ $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ พร้อมพิจารณาว่าเป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

<u>วิธีทำ</u> $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งคือ

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$$

เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ เท่านั้น ดังนั้น $x=1$ เป็นค่าวิกฤต

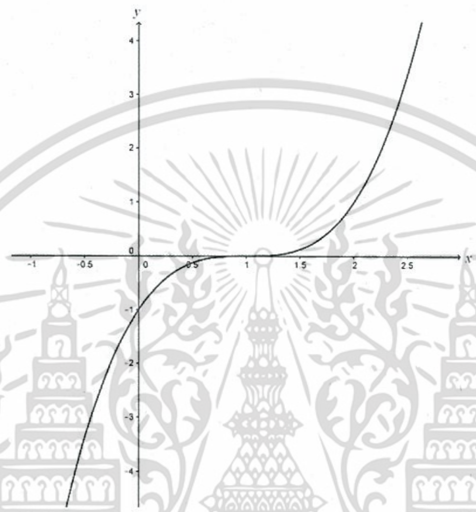
อนุพันธ์อันดับที่สองคือ $f''(x)=6(x-1)$

ที่ค่าวิกฤต $x=1$ ได้ว่า $f''(1)=0$ ดังนั้นไม่สามารถใช้ทฤษฎีอนุพันธ์อันดับที่สองได้

พิจารณาอนุพันธ์อับดับที่หนึ่งพบว่า $f'(x)>0$ สำหรับทุกค่าของ x ซึ่ง $x \neq 1$

นั่นคือ $f'(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย

ดังนั้น ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ ดังรูป #



รูปที่ 2.24 $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

<u>ตัวอย่างที่ 2.8</u> พิจารณาค่าวิกฤตของ $f(x)=x^4-2x^2$ พร้อมพิจารณาว่าเป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

<u>วิธีทำ</u> $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

$f''(x)=12x^2-4$

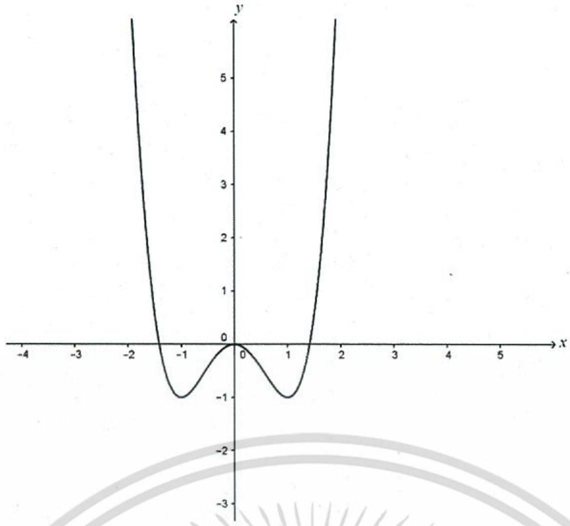
เนื่องจาก $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-1$, $x=0$ และ $x=1$

ดังนั้นจะพิจารณา $f''(x)$ ที่สามจุดนี้เท่านั้น ดังนี้

$f''(-1)=8>0$ $\quad$ $f''(0)=-4<0$ $\quad$ $f''(1)=8>0$

ดังนั้นที่ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=-1$ และ $x=1$

มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ #



รูปที่ 2.25 $f(x)=x^4-2x^2$

<u>ทฤษฎีบท 2.6[2]</u> ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องในช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ใน $[a,b]$

<u>ทฤษฎีบท 2.7[2]</u> ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ในช่วงเปิด (a,b) แล้วค่าสุดขีดสัมบูรณ์คือค่าวิกฤต

สิ่งที่ตามมาจากทฤษฎีทั้งสองนี้คือ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องในช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว ค่าสุดขีดสัมบูรณ์อาจอยู่ที่จุดปลายช่วง หรือ อยู่ที่จุดวิกฤต

<u>ตัวอย่างที่ 2.9</u> พิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x)=2x^3-15x^2+36x$ ในช่วง $[1,5]$

<u>วิธีทำ</u> f ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้โดย $f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-2)(x-3)$

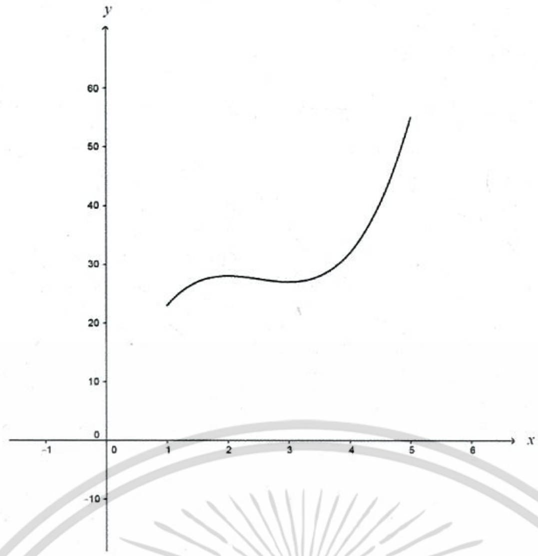
$f'(x)=0$ เมื่อ $x=2$ และ $x=3$ ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $x=2$ และ $x=3$

ค่า f ที่จุดปลาย และ ที่จุดวิกฤตแสดงดังนี้

$$f(1)=2(1)^3-15(1)^2+36(1)=23$$
$$f(2)=2(2)^3-15(2)^2+36(2)=28$$
$$f(3)=2(3)^3-15(3)^2+36(3)=27$$
$$f(5)=2(5)^3-15(5)^2+36(5)=55$$

สามารถสรุปได้ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ในช่วง $[1,5]$ คือ 23 ซึ่งพบเมื่อ $x=1$

สามารถสรุปได้ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ในช่วง $[1,5]$ คือ 55 ซึ่งพบเมื่อ $x=5$ #



รูปที่ 2.26 $f(x)=2x^3-15x^2+36x \quad , \quad x\in[1,5]$

ตัวอย่างที่ 2.10 พิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x)=2x^3+3x^2-12x-3$ ในช่วง $[-3,2.2]$

วิธีทำ f ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้โดย $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

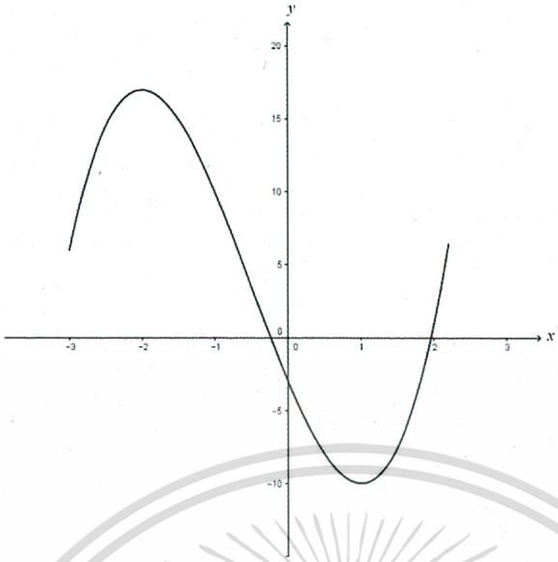
$f'(x)=0$ เมื่อ $x=-2$ และ $x=1$ ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $x=-2$ และ $x=1$

ค่า f ที่จุดปลาย และ ที่จุดวิกฤตแสดงดังนี้

$$f(-3)=2(-3)^3+3(-3)^2-12(-3)-3=6$$
$$f(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)-3=17$$
$$f(1)=2(1)^3+3(1)^2-12(1)-3=-10$$
$$f(2.2)=2(2.2)^3+3(2.2)^2-12(2.2)-3=9.416$$

สามารถสรุปได้ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ในช่วง $[-3,2.2]$ คือ -10 ซึ่งพบเมื่อ $x=1$

สามารถสรุปได้ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ในช่วง $[-3,2.2]$ คือ 17 ซึ่งพบเมื่อ $x=-2$ #



รูปที่ 2.27 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-3$, $x\in[-3,2.2]$

<u>ตัวอย่างที่ 2.11</u> พิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x)=\begin{cases}|x|;0<|x|<1\\1;x=0\end{cases}$

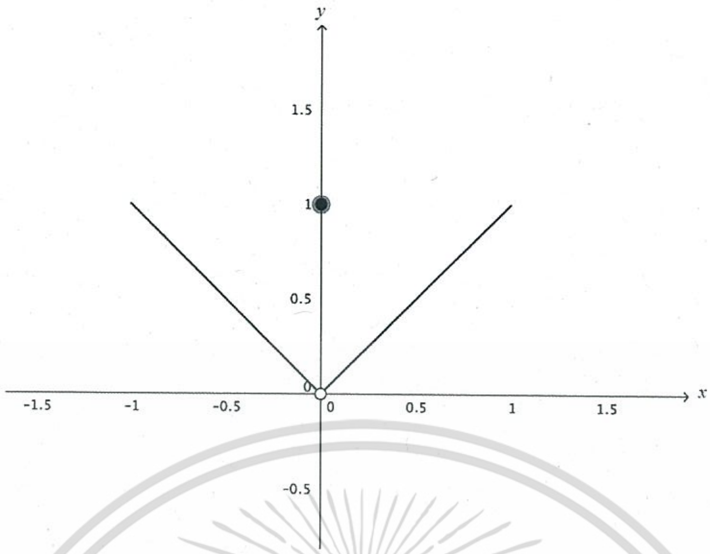
<u>วิธีทำ</u> f ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้เมื่อ $x\neq 0$ โดย $f'(x)=\begin{cases}1;0<x<1\\-1;-1<x<0\end{cases}$

พบว่า $f'(x)\neq 0$ เมื่อ $x\neq 0$ และ $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ ดังนั้น f มีจุดวิกฤต เมื่อ $x=0$ ค่า f ที่จุดปลายและ ที่จุดวิกฤตแสดงดังนี้

$$f(-1)=1 \qquad f(0)=1 \qquad f(1)=1$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f คือ 1 ซึ่งพบเมื่อ $x=1$, $x=0$ และ $x=-1$

ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เนื่องจาก f ไม่รวมค่า 0 ดังรูป #



รูปที่ 2.28 $f(x)=\begin{cases}|x|;0<|x|<1\\1;x=0\end{cases}$

2.2 ค่าสุดขีดของฟังก์ชันของหลายตัวแปร

<u>นิยาม 2.6</u> ฟังก์ชันหลายตัวแปรประกอบด้วย 2 ส่วนคือโดเมนที่ประกอบด้วยจุดทุกจุดในระนาบ (R^2) หรือในปริภูมิ (R^3) และกฎ (rule) ที่ส่งแต่ละจุดที่อยู่ในโดเมน ซึ่งโดเมน 1 จุดจะส่งไปได้ 1 ค่าเท่านั้น

ฟังก์ชันหลายตัวแปร จะเรียกว่า ฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้าโดเมนคือเซตของจุดที่อยู่ในระนาบ (R^2) และเรียกว่า ฟังก์ชันสามตัวแปร ถ้าโดเมนคือเซตของจุดที่อยู่ในปริภูมิ (R^3)

กำหนดให้ $f(x,y)$ แทนค่าของฟังก์ชัน f สองตัวแปรที่จุด (x,y)

และ $f(x,y,z)$ แทนค่าของฟังก์ชัน f สามตัวแปรที่จุด (x,y,z)

2.2.1 ค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปร

<u>นิยาม 2.7</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามที่ (x_0, y_0)

2.7.1) $f(x_0, y_0)$ เป็น ค่าสูงสุด ของ f บน R ก็ต่อเมื่อ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุกจุด (x, y) ที่ซึ่ง $(x, y) \in R$ เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดบน R ที่ (x_0, y_0)

2.7.2) $f(x_0, y_0)$ เป็น ค่าต่ำสุด ของ f บน R ก็ต่อเมื่อ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุกจุด (x, y) ที่ซึ่ง $(x, y) \in R$ เรากล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดบน R ที่ (x_0, y_0)

2.7.3) $f(x_0, y_0)$ เป็น ค่าสุดขีด ของ f บน R ก็ต่อเมื่อ $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน R หรือ $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน R

<u>ตัวอย่างที่ 2.12</u> ให้ $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$ พิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน R^2 หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$

เนื่องจาก $x^2, y^2 \geq 0$ นั่นคือ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

จะได้ว่า $f(0,0) = 4 \leq f(x, y)$ ทุก $(x, y) \in R^2$

ดังนั้น $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$

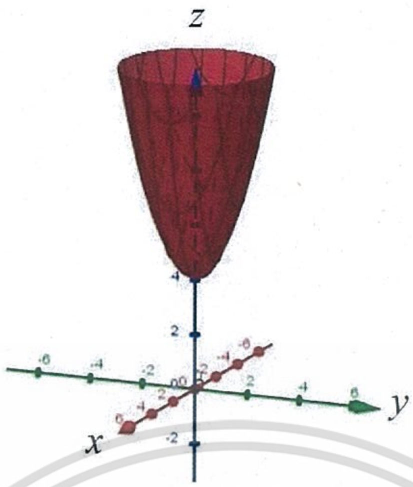
เพราะฉะนั้น $f(0, 0) = 4$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน R^2

เนื่องจากทุกจำนวนจริงบวก N จะมี $f(\sqrt{N}, 0)$ ซึ่งทำให้

$f(\sqrt{N}, 0) = N + 4 > N$

จะได้ว่า $\{f(x, y) = x^2 + y^2 + 4 \mid (x, y) \in R^2\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

เพราะฉะนั้น f ไม่มีค่าสูงสุดบน R^2 #



รูปที่ 2.29 พื้นผิวของ $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$

<u>ตัวอย่างที่ 2.13</u> ให้ $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

พิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $S = \left\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le 25\right\}$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

เนื่องจาก $x^2, y^2 \ge 0$ นั่นคือ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

จะได้ว่า $f(0, 0) = 5 \ge f(x, y)$ ทุก $(x, y) \in S$

ดังนั้น $f(x_0, y_0) \ge f(x, y)$

เพราะฉะนั้น $f(0, 0) = 5$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน S

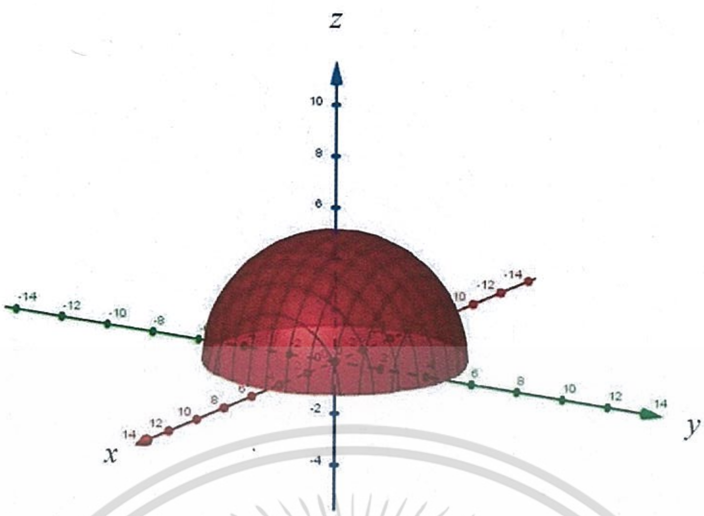
จาก $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ให้ $(x_0, y_0) = (5, 0)$

จะได้ว่า $f(5, 0) = 0 \le f(x, y)$ ทุก $(x, y) \in S$

ดังนั้น $f(x_0, y_0) \le f(x, y)$

เพราะฉะนั้น $f(5, 0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน S

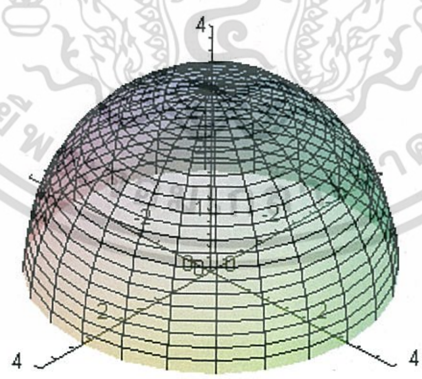
สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดบน $S = \left\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le 25\right\}$ #



รูปที่ 2.30 พื้นผิวของ $f(x, y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$

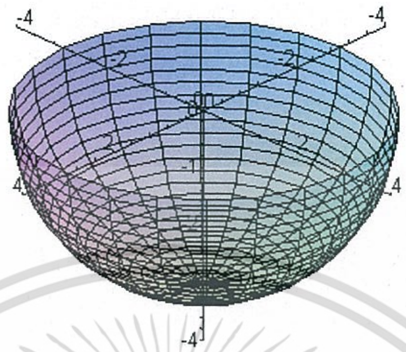
<u>นิยาม 2.8</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามที่ (x_0, y_0) เราจะกล่าวว่า

(i) $f(x_0, y_0)$ เรียกว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ของ f บน R ถ้ามีจำนวน (x_0, y_0) ที่อยู่ใน (a,b) ซึ่งทำให้ $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$ สำหรับทุกค่าของ (x,y) ที่ซึ่ง (x,y) อยู่ในช่วง (a,b)



รูปที่ 2.31 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

(ii) $f(x_0, y_0)$ เรียกว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ของ f บน R ถ้ามีจำนวน (x_0, y_0) ที่อยู่ใน (a,b) ซึ่งทำให้ $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ สำหรับทุกค่าของ (x,y) ที่ซึ่ง (x,y) อยู่ในช่วง (a,b)



รูปที่ 2.32 ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(iii) $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f บน R ก็ต่อเมื่อ $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน R หรือ $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน R

<u>ทฤษฎีบท 2.11</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบนเซต R และ R เป็นเซตปิดในระนาบ และมีขอบเขต แล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน R

<u>ข้อสังเกต</u>

2.11.1) ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f บน R อาจเกิดที่จุดขอบหรือ จุดภายในของ R ก็ได้

2.11.2) ถ้าค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f บน R อาจเกิดที่จุดภายในแล้ว จุดนั้นต้องเป็นจุดวิกฤต

2.11.3) ขั้นตอนในการหาจุดสุดขีดสัมบูรณ์ควรทำดังนี้

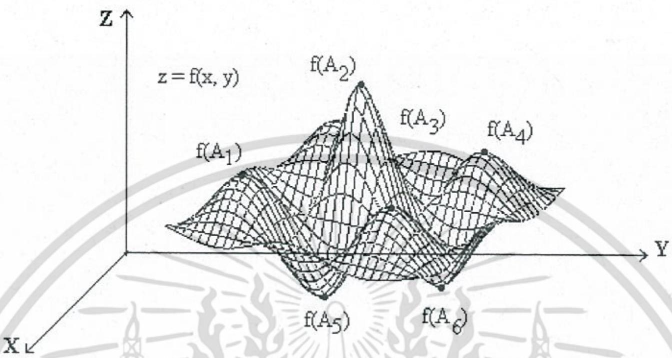
2.11.3.1) หาจุดวิกฤตของ f

2.11.3.2) หาจุดขอบทั้งหมดของ R ที่อาจให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

2.11.3.3) เปรียบเทียบค่าของ f ที่จุดซึ่งหาได้ในสองขั้นตอนแรกค่าที่มากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ค่าที่น้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

<u>ข้อตกลง</u> ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และ ค่าสุดขีดของ f บน $[a,b]$ เรียกว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ ของ f บน $[a,b]$ ตามลำดับเพื่อให้เข้าใจความหมายของคำว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และ ค่าสุดขีด

จากตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน f



รูปที่ 2.33 พื้นผิวของฟังก์ชัน f

จากรูป ให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน R^3

1. $f(A_1), f(A_2), f(A_3), f(A_4)$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน R^3

2. $f(A_5), f(A_6)$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน R^3

3. $f(A_2)$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน R^3

4. $f(A_5)$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน R^3

<u>ทฤษฎีบท 2.8</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและ f มีค่าสุดขีดที่จุด (x_0, y_0)

ถ้า $f(x_0, y_0)$ สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ แล้ว $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

ถ้า f เป็นไปตามทฤษฎีบทข้างต้น จะกล่าวได้ว่า f มีจุดวิกฤตที่จุด (x_0, y_0) ในโดเมนของ f

<u>ทฤษฎีบท 2.9</u> ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนเซต $S \subseteq D$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของ S

ถ้า $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0) แล้ว $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

<u>หมายเหตุ</u> บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จริง ตัวอย่างเช่น

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

จะได้ว่า $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y)$$

ดังนั้น $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,\,0)} = (0,\ 0)$$

แต่ $f(0,\ 0) < f(r,\ 0)$ และ $f(0,\ 0) > f(0,\ r)$ ทุกค่า $r \neq 0, r \in D$

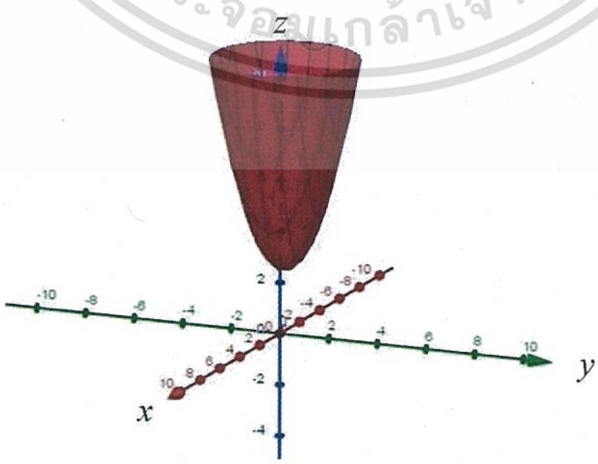
เพราะฉะนั้น $f(0,\ 0)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ #

<u>ตัวอย่างที่ 2.14</u> พิจารณาจุดวิกฤตของ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8$

<u>วิธีทำ</u> โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f_x(x, y) = 2x - 4 = 0$ เมื่อ $x = 2$

และ $f_y(x, y) = 2y - 2 = 0$ เมื่อ $y = 1$

ดังนั้น (2, 1) เป็นจุดวิกฤตของ f #



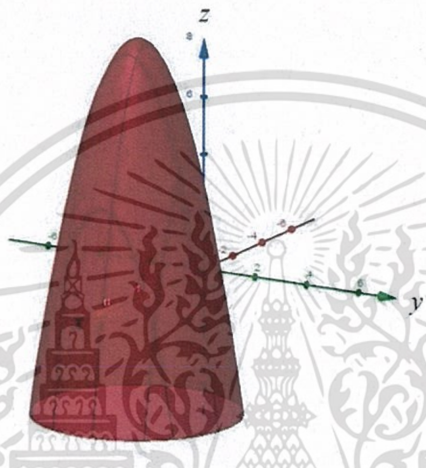
รูปที่ 2.34 พื้นผิวของ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8$

<u>ตัวอย่างที่ 2.15</u> พิจารณาจุดวิกฤตของ $f(x, y) = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$

<u>วิธีทำ</u> โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f_x(x, y) = -2x + 2 = 0$ เมื่อ $x = 1$

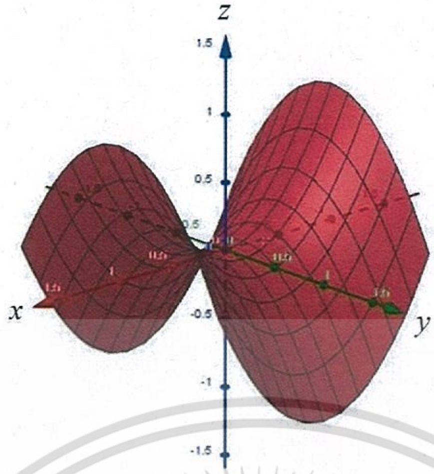
และ $f_y(x, y) = -2y - 4 = 0$ เมื่อ $y = -2$

ดังนั้น $(1, -2)$ เป็นจุดวิกฤตของ f #



รูปที่ 2.35 พื้นผิวของ $f(x, y) = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$

<u>นิยาม 2.9</u> ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$, $S \in D$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของ S เรากล่าวว่า (x_0, y_0) เป็น จุดวิกฤตของ f ก็ต่อเมื่อ $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ หรือ $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ ไม่มีค่าและจุดวิกฤตของ f ที่ไม่เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์เรียกว่า จุดอานม้า ดังนั้น สำหรับ $f(x, y) = x^2 - y^2$ จะได้ (0, 0) เป็นจุดอานม้า



รูปที่ 2.36 พื้นผิวของ $f(x, y) = x^2 - y^2$

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ f มีจุดวิกฤตที่จุด (x_0, y_0) และ f สามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองต่อเนื่องได้ที่จุด (x_0, y_0) และให้ D เป็นจำนวนจริงที่นิยามดังนี้

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$$

เรียก D ว่าดิสครีมิแนนท์ (Discriminant) ของ f ที่ (x_0, y_0) จะได้ว่า

(i) ถ้า $D(x_0, y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (หรือ $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$)
แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0)

(ii) ถ้า $D(x_0, y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (หรือ $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$)
แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0)

(iii) ถ้า $D(x_0, y_0) < 0$ แล้ว f มีจุดอานม้าที่ (x_0, y_0)

(iv) ถ้า $D(x_0, y_0) = 0$ แล้ว เราสรุปไม่ได้ว่า (x_0, y_0) เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์หรือจุดอานม้า

<u>หมายเหตุ</u> ตัวอย่างเสริมความเข้าใจกรณีที่ (iv)

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้ $f_{xx}(0,0)=0, f_{xy}(0,0)=0, f_{yy}(0,0)=0$, $D(0,0)=0$

แต่ $f(x, y)=x^2+y^2 \ge 0 = f(0,0)$ ทุก $(x, y)\in R^2$

ดังนั้น $(0,0)$ เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(b) $f(x,y)=-(x^2+y^2)$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้ $f_{xx}(0,0)=0, f_{xy}(0,0)=0, f_{yy}(0,0)=0$, $D(0,0)=0$

แต่ $f(x, y)=x^2+y^2 \le 0 = f(0,0)$ ทุก $(x, y)\in R^2$

ดังนั้น $(0,0)$ เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

(c) $f(x,y)=x^2-y^2$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้ $f_{xx}(0,0)=0, f_{xy}(0,0)=0, f_{yy}(0,0)=0$, $D(0,0)=0$

แต่ $f(0,0)<f(r,0)$ และ $f(0,0)>f(0,r)$ ทุกค่า r

จะได้ว่า $(0,0)$ ไม่เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และ $(0,0)$ ไม่เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ดังนั้น $(0,0)$ เป็นจุดอานม้า

<u>ตัวอย่างที่ 2.16</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x,y)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$

<u>วิธีทำ</u> โดเมน f คือ R^2 และทุกจุดใน R^2 เป็นจุดภายในโดเมนของ f

โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f_x(x,y)=2x-2y$ และ $f_y(x,y)=-2x+y^2-3$

จะได้ว่า $f_x(x,y)=0$ เมื่อ $x=y$

และ $f_y(x,y)=0$ เมื่อ $-2x+y^2-3=0$

นั่นคือ $y^2-2y-3=0$

$$(y+1)(y-3)=0$$

$$y=-1 \text{ หรือ } y=3$$

ดังนั้น จุดวิกฤตของ f คือ $(3,3)$ และ $(-1,-1)$

ตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้

$f_{xx}(x,y)=-2,\quad f_{xy}(x,y)=2y$ และ $f_{yy}(x,y)=-2$

ดังนั้น $D(3,3)=f_{xx}(3,3)f_{yy}(3,3)-\left[f_{xy}(3,3)\right]^2=(2)(6)-(-2)^2=8>0$

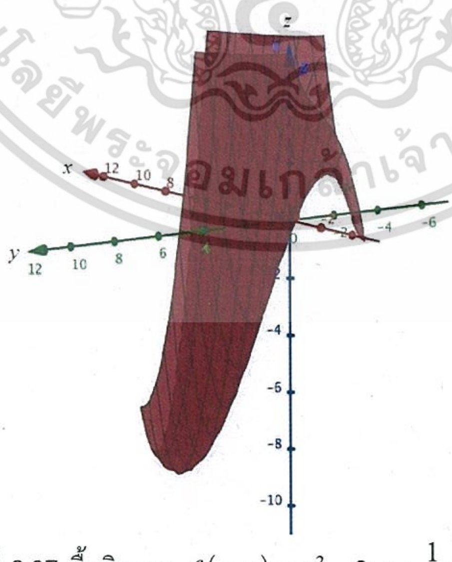
และ $D(-1,-1)=f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1)-\left[f_{xy}(-1,-1)\right]^2$

$$=(2)(-2)-(-2)^2=-8<0$$

เนื่องจาก $D(3,3)>0$ และ $f_{xx}(3,3)=2>0$

จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(3,3)$ คือ $f(3,3)=-9$

เนื่องจาก $D(-1,-1)<0$ จะได้ว่า f มีจุดอานม้าที่ $(-1,-1)$ คือ $f(-1,-1)=\frac{5}{3}$ #



รูปที่ 2.37 พื้นผิวของ $f(x,y)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$

<u>ตัวอย่างที่ 2.17</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x,y) = xy - y^2 - x^2 - 2x - 2y + 6$

<u>วิธีทำ</u> โดเมน f คือ R^2 และทุกจุดใน R^2 เป็นจุดภายในโดเมนของ f

โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f_x(x,y) = y - 2x - 2$ และ $f_y(x,y) = x - 2y - 2$

จะได้ว่า $f_x(x,y) = y - 2x - 2 = 0$ และ $f_y(x,y) = x - 2y - 2 = 0$

จะได้จุดวิกฤตคือ $(-2,-2)$

ตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้

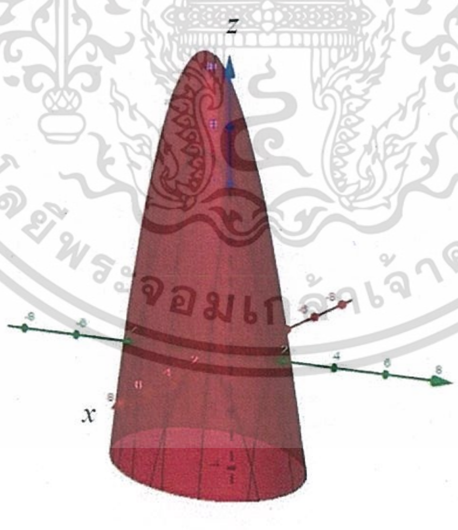
$f_{xx}(-2,-2) = -2,\quad f_{xy}(-2,-2) = 1$ และ $f_{yy}(-2,-2) = -2$

ดังนั้น $D(-2,-2) = f_{xx}(-2,-2)f_{yy}(-2,-2) - \left[f_{xy}(-2,-2)\right]^2$

$$= (-2)(-2) - (1)^2 = 3 > 0$$

เนื่องจาก $D(-2,-2) > 0$ และ $f_{xx}(-2,-2) = -2 < 0$

จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(-2,-2)$ คือ $f(-2,-2) = 10$ #



รูปที่ 2.38 พื้นผิวของ $f(x,y) = xy - y^2 - x^2 - 2x - 2y + 6$

<u>ตัวอย่างที่ 2.18</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x,y)=4xy+3$

<u>วิธีทำ</u> โดเมน f คือ R^2 และทุกจุดใน R^2 เป็นจุดภายในโดเมนของ f

โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f_x(x,y)=4y$ และ $f_y(x,y)=4x$

จะได้ว่า $f_x(x,y)=4y=0$ และ $f_y(x,y)=4x=0$

จะได้จุดวิกฤตคือ $(0,0)$

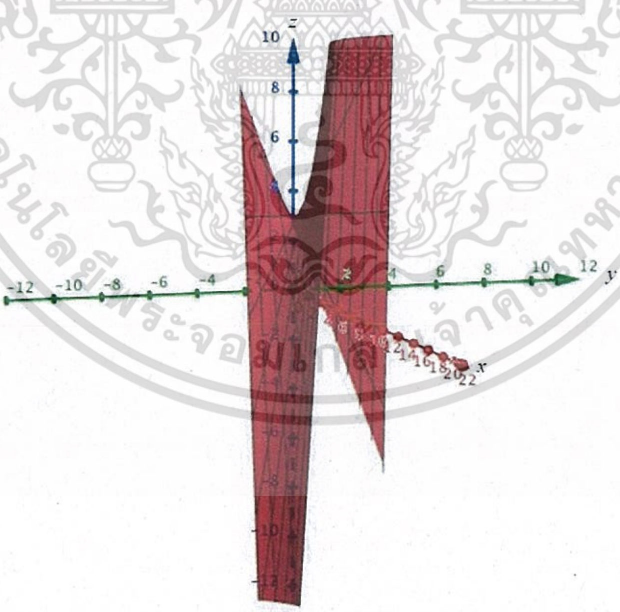
ตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้

$f_{xx}(0,0)=0,\quad f_{xy}(0,0)=4$ และ $f_{yy}(0,0)=0$

ดังนั้น $D(0,0)=f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-\left[f_{xy}(0,0)\right]^2=(0)(0)-(4)^2=-16<0$

เนื่องจาก $D(0,0)<0$ และ $f_{xx}(0,0)=0$

จะได้ว่า f มีจุดอานม้าที่จุด $(0,0)$ คือ $f(0,0)=3$ #



รูปที่ 2.39 พื้นผิวของ $f(x,y)=4xy+3$

<u>ตัวอย่างที่ 2.19</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x,y)=x^3+3xy^2+3y^2-15x+2$

<u>วิธีทำ</u> โดเมน f คือ R^2 และทุกจุดใน R^2 เป็นจุดภายในโดเมนของ f

โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f_x(x,y)=3x^2+3y^2-15$ และ $f_y(x,y)=6xy+6y$

จะได้ว่า $f_x(x,y)=3x^2+3y^2-15=0$ (2.1)

และ $f_y(x,y)=6xy+6y=0$ (2.2)

จาก (2) จะได้ $6y(x+1)=0$

$y=0$ หรือ $x=-1$

จาก (1) เมื่อ $y=0$ จะได้ $x=\pm\sqrt{5}$

จาก (1) เมื่อ $x=-1$ จะได้ $y=\pm 2$

ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0),(-1,2),(-1,-2)$

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้

$f_{xx}(x,y)=6x,\quad f_{xy}(x,y)=6y$ และ $f_{yy}(x,y)=6x+6$

ดังนั้น $D(\sqrt{5},0)=f_{xx}(\sqrt{5},0)f_{yy}(\sqrt{5},0)-\left[f_{xy}(\sqrt{5},0)\right]^2$

$=\left(6\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{5+6}\right)-(0)^2=180+36\sqrt{5}>0$

เนื่องจาก $D(\sqrt{5},0)>0$ และ $f_{xx}(\sqrt{5},0)=6\sqrt{5}>0$

จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(\sqrt{5},0)$ คือ $f(\sqrt{5},0)=-10\sqrt{5}+2$

$D(-\sqrt{5},0)=f_{xx}(-\sqrt{5},0)f_{yy}(-\sqrt{5},0)-\left[f_{xy}(-\sqrt{5},0)\right]^2$

$=\left(-6\sqrt{5}\right)\left(-6\sqrt{5+6}\right)-(0)^2=180-36\sqrt{5}>0$

เนื่องจาก $D(-\sqrt{5},0)>0$ และ $f_{xx}(-\sqrt{5},0)=-6\sqrt{5}<0$

จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(-\sqrt{5},0)$ คือ $f(-\sqrt{5},0)=10\sqrt{5}+2$

$$D(-1,2)=f_{xx}(-1,2)f_{yy}(-1,2)-\left[f_{xy}(-1,2)\right]^2=(-6)(0)-(12)^2=-144<0$$

เนื่องจาก $D(-1,2)<0$ และ $f_{xx}(-1,2)=-6<0$

จะได้ว่า f มีจุดอานม้าที่จุด $(-1,2)$ คือ $f(-1,2)=16$

$$D(-1,-2)=f_{xx}(-1,-2)f_{yy}(-1,-2)-\left[f_{xy}(-1,-2)\right]^2$$

$$=(-6)(0)-(-12)^2=-144<0$$

เนื่องจาก $D(-1,-2)<0$ และ $f_{xx}(-1,-2)=-6<0$

จะได้ว่า f มีจุดอานม้าที่จุด $(-1,-2)$ คือ $f(-1,-2)=16$ #

<u>ตัวอย่างที่ 2.20</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x,y)=xy+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

<u>วิธีทำ</u> โดเมนของ f คือ $D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$ และทุกจุดใน D เป็นจุดภายในของโดเมน f

โดยการหาอนุพันธ์ได้ $f_x(x,y)=y-\frac{1}{x^2}$ และ $f_y(x,y)=x-\frac{1}{y^2}$

จะได้ว่า $f_x(x,y)=y-\frac{1}{x^2}=0$ (2.3)

และ $f_y(x,y)=x-\frac{1}{y^2}=0$ (2.4)

จาก (2.3) จะได้ $x^2y-1=0$

$$x^2y=1 \qquad (2.5)$$

จาก (2.4) จะได้ $xy^2-1=0$

$$xy^2=1 \qquad (2.6)$$

จาก (2.5) และ (2.6) จะได้ $x^2y=xy^2$

เนื่องจาก $x\neq 0,\ y\neq 0$ จะได้ $x=y$ (2.7)

จาก (2.5) และ (2.7) จะได้ $x = 1$ และ $y = 1$

ดังนั้นจุดวิกฤตคือ (1, 1)

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองได้

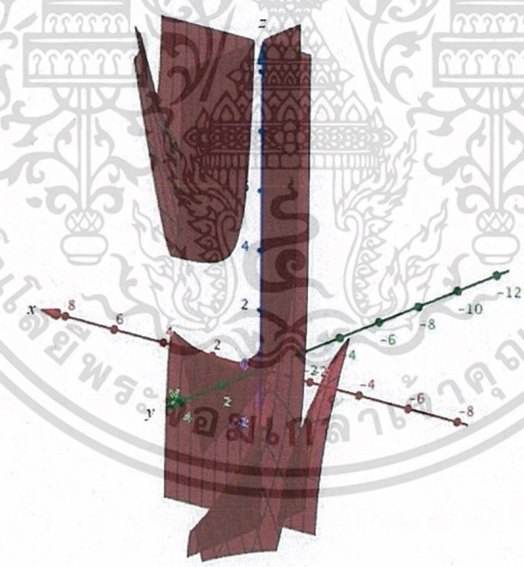
$$f_{xx}(x, y) = \frac{2}{x^3} \quad , \quad f_{xx}(1, 1) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 1$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{2}{y^3} \quad , \quad f_{yy}(1, 1) = 2$$

เนื่องจาก $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$ และ $D(1,1) = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0$

ดังนั้น (1, 1) เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (1, 1) คือ $f(1, 1) = 3$ #



รูปที่ 2.40 พื้นผิวของ $f(x,y) = xy + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

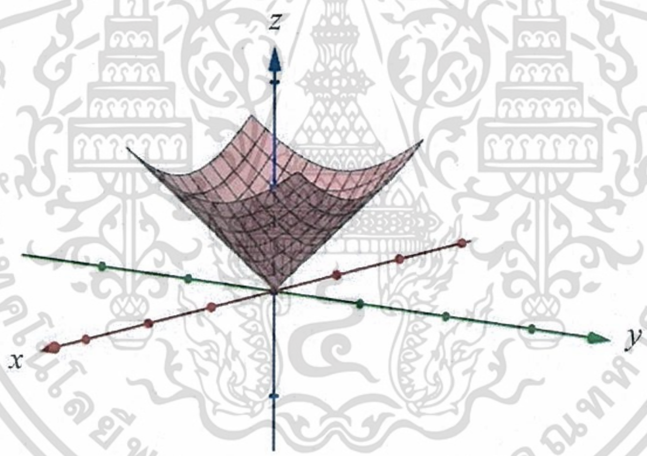
<u>หมายเหตุ</u> เราจะพิจารณาเฉพาะจุด (x_0, y_0) ที่เป็นจุดภายในของโดเมน f เท่านั้น โดยที่ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) และ อนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่าแล้ว $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$ ซึ่งจะเห็นว่าถ้า อนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่า แต่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์แล้ว จุด (x_0, y_0) ไม่เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f ในบางกรณีที่เราพบว่ามีจุดบางจุด (x_0, y_0) ในโดเมน f ที่มีสมบัติ

1. (x_0, y_0) ไม่เป็นจุดภายในของโดเมน f

2. อนุพันธ์ย่อย f_x ไม่มีค่าที่จุด (x_0, y_0) หรือ อนุพันธ์ย่อย f_y ไม่มีค่าที่จุด (x_0, y_0)

แต่จุด (x_0, y_0) อาจเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f

เช่น $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



รูปที่ 2.41 พื้นผิวของ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

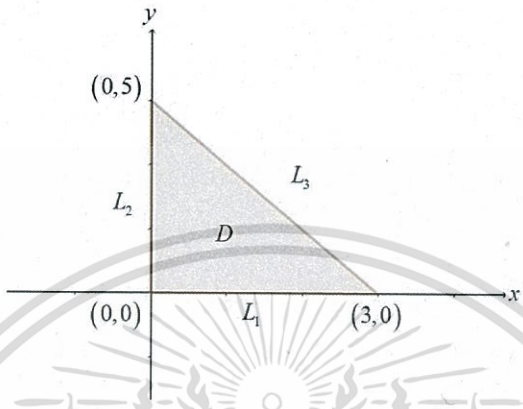
จะได้ว่าจุด $(0, 0)$ เป็นจุดภายในของโดเมน f

f_x และ f_y ไม่มีค่าที่จุด $(0, 0)$ แต่ $f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y)$ ทุก $(x, y) \in R^2$

ดังนั้น $f(0, 0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ด้วย #

<u>ตัวอย่างที่ 2.21</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ บนบริเวณ S บนระนาบ XY ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $(0,0)$, $(3,0)$ และ $(0,5)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 2.42 รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $(0,0)$, $(3,0)$ และ $(0,5)$

เพราะว่า D เป็นเซตปิดและมีขอบเขต และ f มีความต่อเนื่องบน D

ดังนั้น f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนเซต D

$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$

$f_x(x, y) = 3y - 6$

$f_y(x, y) = 3x - 3$

หาจุดวิกฤต โดยการหาอนุพันธ์

จะได้ $f_x(x, y) = 3y - 6 = 0$ (2.8)

และ $f_y(x, y) = 3x - 3 = 0$ (2.9)

จาก (2.8) และ (2.9) จะได้จุดวิกฤตคือ $(1, 2)$

ต่อไปพิจารณาที่จุดขอบของ D เนื่องจากขอบของเซต D ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรง 3 เส้น

1. บนส่วนของเส้นตรง L_1 ที่เชื่อมระหว่างจุด (0, 0) และ (3, 0) ดังนั้นบนส่วนของเส้นตรง L_1 ค่า $y = 0$

ให้ $u(x) = f(x, 0) = -6x + 7$ เมื่อ $0 \le x \le 3$

เนื่องจาก $u'(x) = -6 \ne 0$ ดังนั้นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ u เกิดที่จุดปลายของช่วง

คือที่ $x = 0$ และ $x = 3$

จะได้ว่าจุดบนส่วนของเส้นตรง L_1 ที่ให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f คือ (0, 0) และ (3, 0)

2. บนส่วนของเส้นตรง L_2 ที่เชื่อมระหว่าง จุด (0, 0) และ (3, 0) ดังนั้นบนส่วนของเส้นตรง L_2 ค่า $x = 0$

ให้ $v(y) = f(0, y) = -3y + 7$ เมื่อ $0 \le y \le 5$

เนื่องจาก $v'(x) = -3 \ne 0$ ดังนั้นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ v เกิดที่จุดปลายของช่วง

คือที่ $y = 0$ และ $y = 5$

เพราะฉะนั้นจุดบนส่วนของเส้นตรง L_2 ที่ให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f คือ (0, 0) และ (0, 5)

3. บนส่วนของเส้นตรง L_3 ที่เชื่อมระหว่างจุด (3, 0) และ (0, 5) ดังนั้นบนส่วนของเส้นตรง L_3

จะได้ $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$

$$y=-\frac{5}{3}x+5 \text{ เมื่อ } 0\le x\le 3$$

ดังนั้นบนส่วนของเส้นตรง L_3 จะได้

$$f(x,y)=3x(-\frac{5}{3}x+5)-6x-3(-\frac{5}{3}x+5)+7$$

$$=-5x^2+14x\ -8$$

ให้ $\quad w(x)=-5x^2+14x-8$ เมื่อ $0\le x\le 3$

$$w'(x)=-10x+14$$

และ $\quad w'(x)=-10x+14=0$ เมื่อ $x=\frac{7}{5}$

บนส่วนของเส้นตรง L_3 เมื่อ $x=\frac{7}{5}$ จะได้ $y=\frac{8}{3}$

เพราะฉะนั้นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ w อาจจะเกิดที่จุด $x=\frac{7}{5}$ หรือที่จุดปลายช่วงคือ $x=0,x=3$

บนส่วนของเส้นตรง L_3 เมื่อ $x=0$ จะได้ $y=5$ เมื่อ $x=3$ จะได้ $y=0$

เพราะฉะนั้นจุดบน L_3 ที่ให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f คือ $(\frac{7}{5},\frac{8}{3})$, $(3,\ 0)$ และ $(0,\ 5)$

สรุปจุดที่จะให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์มีทั้งหมด 5 จุดคือ $(1,2),(0,0),(3,0),(0,5)$ และ $(\frac{7}{5},\frac{8}{3})$

ต่อไปเปรียบเทียบค่าของ $f(x,y)$ ที่แต่ละจุดซึ่งหาไว้ข้างต้น

$f(1,2)=1 \qquad f(0,0)=7 \qquad f(3,0)=-11$

$f(0,5)=-8 \qquad f\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{5}$

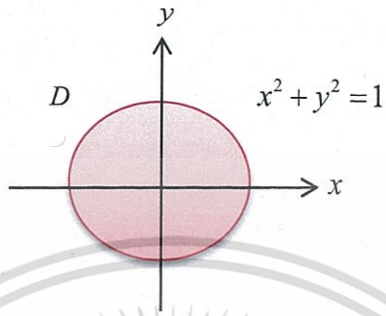
ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เท่ากับ -11 ที่จุด $(3,0)$ และ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ 7 ที่จุด $(0,0)$

#

<u>ตัวอย่างที่ 2.22</u> พิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x,y)=2x^2+y^2$ บนบริเวณ D

เมื่อ $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 2.43 $x^2+y^2=1$

เพราะว่า D เป็นเซตปิดและมีขอบเขตและ f มีความต่อเนื่องบน D
ดังนั้น f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บนเซต D

หาจุดวิกฤต โดยการหาอนุพันธ์

จะได้ $f_x(x,y)=4x=0$ $\quad (2.10)$

และ $f_y(x,y)=2y=0$ $\quad (2.11)$

จาก (2.10) และ (2.11) จะได้จุดวิกฤตคือ $(0,0)$

ต่อไปพิจารณาที่จุดขอบของ D

เนื่องจากขอบของเซต D ประกอบจุดบนวงกลม $x^2+y^2=1$

ดังนั้น $f(x,y)=2x^2+y^2 = x^2+(x^2+y^2) = x^2+1$

ให้ $h(x)=x^2+1$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$

จะได้ $h'(x)=2x$ ดังนั้น $h'(x)=0$ เมื่อ $x=0$

ซึ่งค่าสุดขีดของ h อาจเกิดที่ $x=0$ หรือ ที่จุดปลายช่วงคือ $x=-1, x=1$

ดังนั้นจุดบนขอบของ D ที่อาจจะให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f คือ

$(0,1),(0,-1),(-1,0),(1,0)$

สรุปมีจุดทั้งหมด 5 จุดที่มีความเป็นไปได้ที่จะให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f คือ

$(0,1),(0,-1),(-1,0),(1,0)$ และ $(0,0)$

ต่อไปเปรียบเทียบค่า $f(x,y)$ จาก 5 จุดข้างต้น

เนื่องจาก $f(0,0)=0 \quad f(0,1)=1 \quad f(0,-1)=1 \quad f(-1,0)=2 \quad f(1,0)=2$

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด $(0,0)$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $=0$

f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด $(1,0),(-1,0)$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $=2$ #

<u>ตัวอย่างที่ 2.23</u> พิจารณาขนาดของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด ซึ่งมีปริมาตร 32 ลูกบาศก์เซนติเมตร และมีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นพื้นที่ผิวของกล่อง

x เป็นความกว้างของกล่อง

y เป็นความยาวของกล่อง

และ z เป็นความสูงของกล่อง

ดังนั้น $A = xy + 2xz + 2yz = xy + 2(x+y)z$

เนื่องจากกล่องมีปริมาตร 32 ลูกบาศก์เซนติเมตร

จะได้ $xyz = 32$ หรือ $z = \dfrac{xy}{32}$

และ $A = xy + 2(x+y)\dfrac{32}{xy}$

$$= xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

ดังนั้น A เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x, y โดยที่ $x>0, y>0$

ให้ $f(x,y)=xy+\frac{64}{y}+\frac{64}{x}$ เมื่อ $D=\{(x, y)\mid x>0, y>0\}$

เพราะว่า D เป็นเซตไม่มีขอบเขต เราจึงไม่ทราบว่า f จะมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือไม่

แต่ถ้ามีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ต้องเกิดที่จุดวิกฤตของ f

ดังนั้นเราจะเริ่มต้นหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ด้วยการหาจุดวิกฤตของ f

จาก $f(x,y)=xy+\frac{64}{y}+\frac{64}{x}$

จะได้ $f_x(x, y)=y-\frac{64}{x^2}$

$f_y(x,y)=x-\frac{64}{y^2}$

หาจุดวิกฤต โดยการหาอนุพันธ์

จะได้ $f_x(x,y)=y-\frac{64}{x^2}=0$ (2.12)

และ $f_y(x, y)=x-\frac{64}{y^2}=0$ (2.13)

จาก (2.12) จะได้ $y=\frac{64}{x^2}$ (2.14)

แทนค่าลงใน (2.13) จะได้ $x-\frac{x^4}{64}=0$

เนื่องจาก $x>0$ ดังนั้น $1-\frac{x^3}{64}=0$

จะได้ $x=4$

จาก (2.14) จะได้ $y=4$

ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $(4,4)$

ตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดแบบใด โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองจะได้

$$f_{xx}(x,y)=\frac{128}{x^3} \qquad f_{xx}(4,4)=\frac{128}{4^3}=2$$

$$f_{xy}(x,y)=1 \qquad f_{xy}(4,4)=1$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{128}{y^3} \qquad f_{yy}(4,4)=\frac{128}{4^3}=2$$

เนื่องจาก $D(4,4)=(2)(2)-1=3>0$ และ $f_{xx}(4,4)>0$

ดังนั้น $f(4,4)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

จาก $x=4, y=4$ เนื่องจาก $z=\dfrac{32}{xy}$ จะได้ $z=2$

ดังนั้นกล่องที่ต้องการมีขนาดกว้าง 4 ซม. ยาว 4 ซม. และสูง 2 ซม. #

หมายเหตุ ในตัวอย่างนี้เราไม่ได้แสดงว่าจุด (4,4) เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ก็เพราะว่าสำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปร การแสดงว่าจุดสุดขีดสัมพัทธ์เป็นจุดสุดขีดสัมบูรณ์ในบางปัญหาหรือบางฟังก์ชันเป็นเรื่องที่ค่อนข้างซับซ้อน สำหรับปัญหาที่เป็นการประยุกต์ในลักษณะเช่นนี้โดยมากจุดสุดขีดสัมพัทธ์เป็นจุดสุดขีดสัมบูรณ์ โดยอาศัยการพิจารณาในเชิงเรขาคณิต

2.3 การเขียนรูปพื้นผิว 3 มิติ

การเขียนรูปในพื้นผิว 3 มิติ สามารถทำได้โดยการแทนเส้นในสามมิติ เป็นสมการ 3 สมการที่แต่ละสมการมีพารามิเตอร์หนึ่งตัว คือ

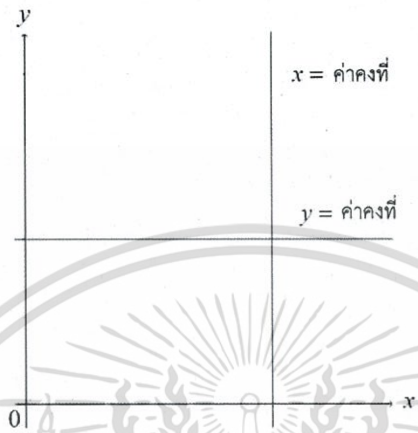
$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

เช่น

- $x=x_0+at\,, y=y_0+bt\,, z=z_0+ct \quad ;0\le t\le 1$
  เมื่อ $a=x_1-x_0\,,\quad b=y_1-y_0\,,\quad c=z_1-z_0$
  เป็นเส้นตรงที่ลากจาก (x_0,y_0,z_0) ไปยัง (x_1,y_1,z_1)
- $x=a\cos t\,,\quad y=a\sin t\,,\quad z=bt\,;-\infty<t<+\infty,\quad a,b$ คงที่
  เป็นฮีลิกซ์ที่หมุนรอบแกน z ยกขึ้นไปตามแกน z ด้วยระยะช่วงเกลียว $2\pi|b|$

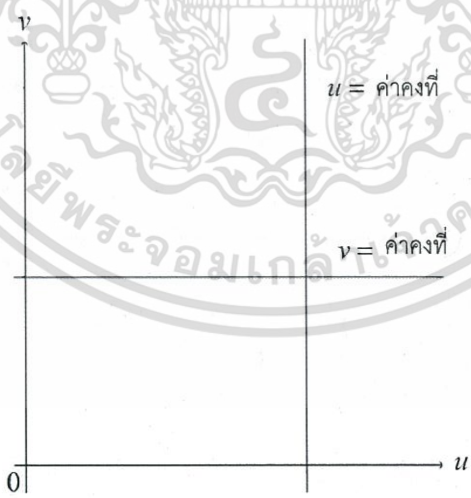
สำหรับพื้นผิวใน 3 มิติ สามารถแทนเป็นสมการสามสมการที่แต่ละสมการมีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$



รูปที่ 2.44 ระนาบ xy

ในระนาบ xy เส้น $x =$ ค่าคงที่ ขนานกับแกน y โดย $-\infty < y < +\infty$ และเส้น $y =$ ค่าคงที่ ขนานกับแกน x โดย $-\infty < x < +\infty$



รูปที่ 2.45 ระนาบ uv

ในระนาบ uv เส้น $u =$ ค่าคงที่ ขนานกับแกน v โดย $-\infty < v < +\infty$ และเส้น $v =$ ค่าคงที่ ขนานกับแกน u โดย $-\infty < u < +\infty$

กรณี $x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$

ถ้า u มีค่าคงที่ เช่น $u = a$ เมื่อ a คงที่ และ v มีค่าเปลี่ยนแปลง จะได้

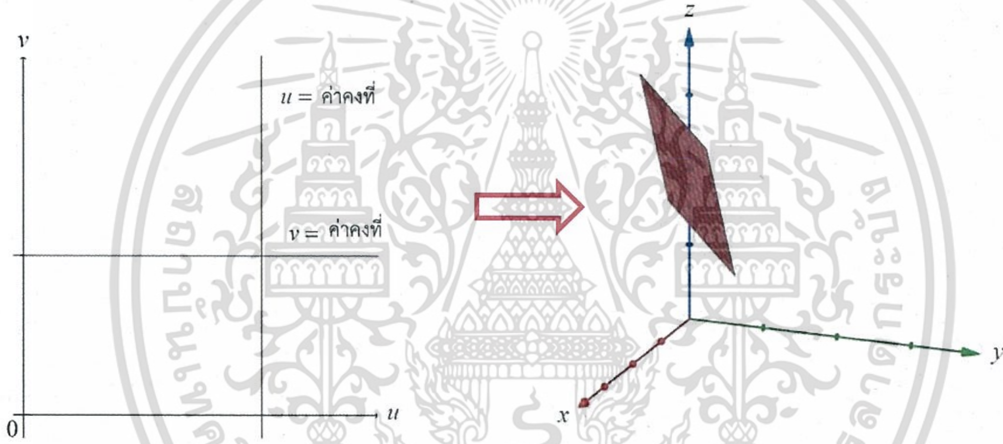
$$x = x(a,v),\quad y = y(a,v),\quad z = z(a,v)$$

เป็นเส้นกราฟใน 3 มิติที่เรียกว่า เส้น - u คงที่ (Constant u- curve)

ถ้า v มีค่าคงที่ เช่น $v = b$ เมื่อ b คงที่ และ u มีค่าเปลี่ยนแปลง จะได้

$$x = x(u,b),\quad y = y(u,b),\quad z = z(u,b)$$

เป็นเส้นกราฟใน 3 มิติที่เรียกว่า เส้น - v คงที่ (Constant v- curve)
เมื่อเปลี่ยนค่าของ a และ b จะได้เป็นวงศ์เส้นโค้ง u (family of u- curves)
และวงศ์เส้นโค้ง v (family of v- curves) ซึ่งจะรวมกันเป็นรูปพื้นผิวบนระนาบดังรูปที่ 2.46



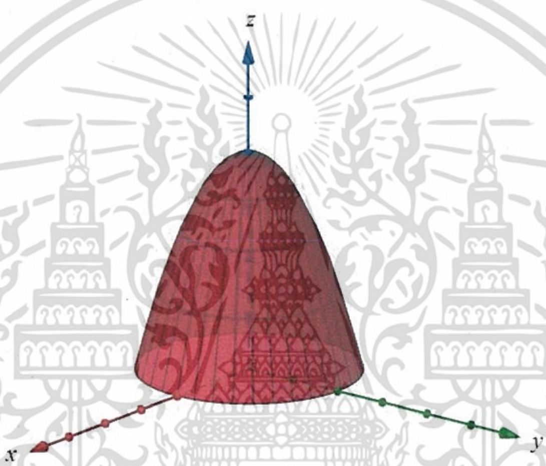
รูปที่ 2.46 ระนาบ uv ในสามมิติ

<u>ตัวอย่างที่ 2.24</u> พิจารณาพาราโบลอยด์ $z = 4 - x^2 - y^2$

วิธีทำหนึ่งในการแทนเป็นพื้นผิวอิงพารามิเตอร์ คือ ให้ $x = u$ และ $y = v$ แล้วพื้นผิวอิงพารามิเตอร์ คือ $x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - u^2 - v^2$

เส้น $u =$ ค่าคงที่ สมนัยกับค่าคงที่ของ x และอยู่บนพื้นผิวเป็นเส้นที่ขนานกับระนาบ yz

ในทำนองเดียวกัน เส้น $v =$ ค่าคงที่ สมนัยกับค่าคงที่ของ y และอยู่บนพื้นผิวเป็นเส้นที่ขนานกับระนาบ xz ดังรูปที่ 2.47



รูปที่ 2.47 $u^2 + v^2 \le 4$

อีกวิธีหนึ่งในการแทนเป็นพื้นผิวอิงพารามิเตอร์ สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนเป็นสมการในระบบพิกัดเชิงทรงกระบอก โดยการแทน $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ ซึ่งทำให้ $z = 4 - r^2$ ดังนั้นพาราโบลอยด์ $z = 4 - x^2 - y^2$ ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ r และ θ คือ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = 4 - r^2$$

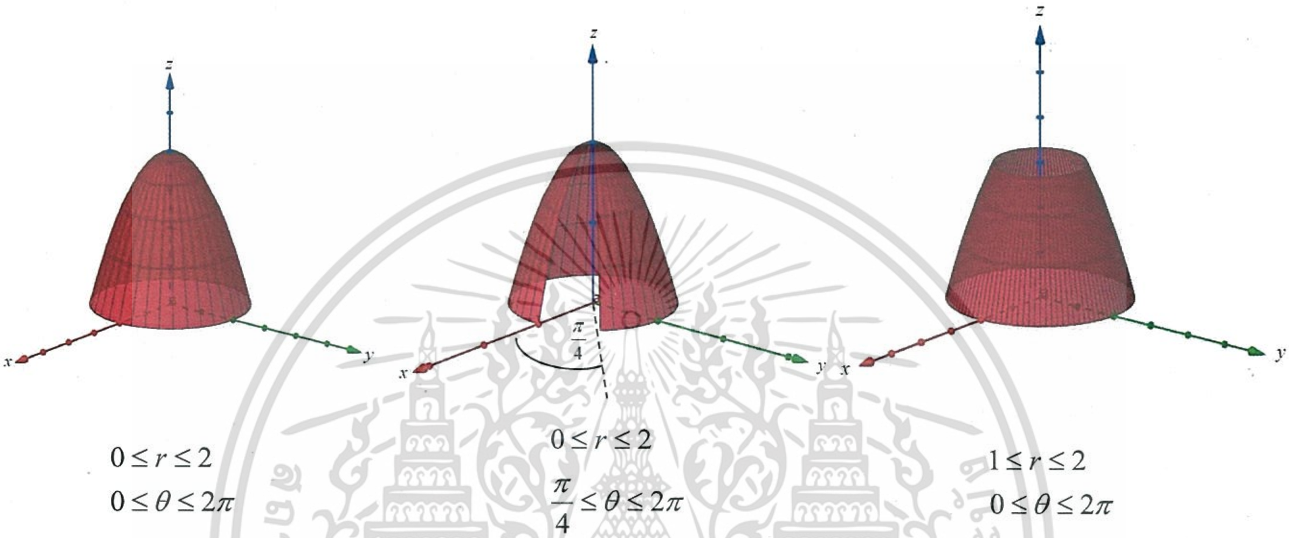
กราฟของพื้นผิวเมื่อ $0 \le y \le 2$ และ $0 \le \theta \le 2\pi$ แสดงดังรูปที่ 2.48

เส้น r สมนัยกับค่าคงที่ของ z ดังนั้นเส้น r จะปรากฏเป็นเส้นที่ขนานกับระนาบ xy

ค่าคงที่ θ บนพื้นผิวจะเป็นระนาบในแนวตั้งที่ผ่านจุดกำเนิด และทำมุมต่างๆกับแกน x

กราฟกรณี $0 \le r \le 2$ และ $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le 2\pi$ และกรณี $1 \le r \le 2$ และ $0 \le \theta \le 2\pi$

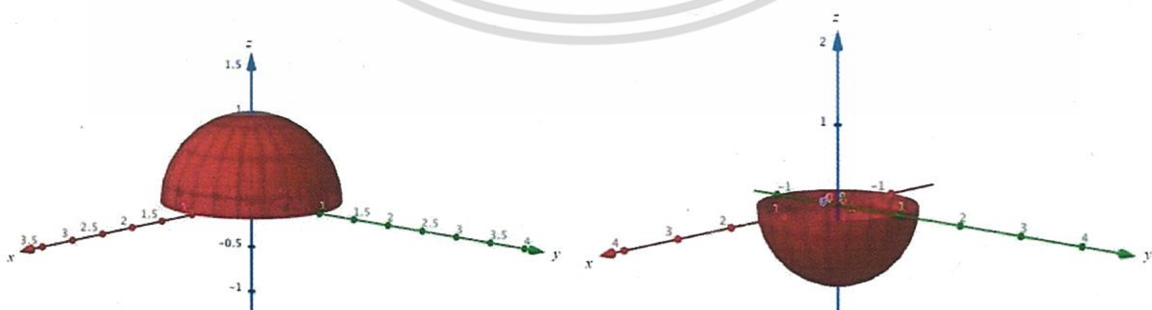
จะมีรูปแบบที่แตกต่างกันดังรูปที่ 2.48 #



รูปที่ 2.48 พื้นผิวของพาราโบลอยด์ในแต่ละขอบเขต

ตัวอย่างที่ 2.25 พิจารณาการสร้างทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ซึ่งเป็นการสร้างกราฟของครึ่งทรงกลมบนและครึ่งทรงกลมล่าง

$$z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{และ} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



รูปที่ 2.49 $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ และ $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

อีกวิธีหนึ่งจะแทนทรงกลม $x^2+y^2+z^2=1$ ซึ่งเป็นทรงกลมในพิกัดฉากให้เป็นทรงกลมในพิกัดเชิงทรงกลมโดย $x=\rho\sin\phi\cos\theta$, $y=\rho\sin\phi\sin\theta$,$z=\rho\cos\phi$ เมื่อ $\rho=1$

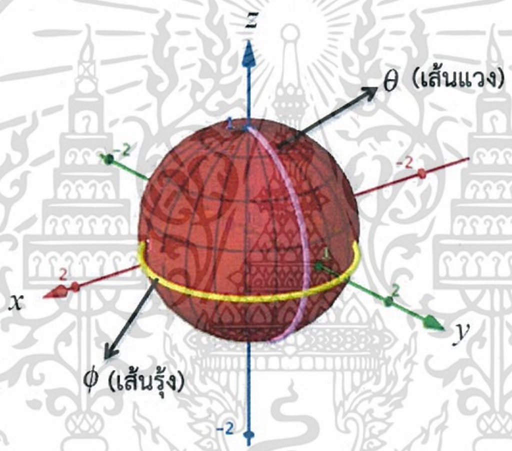
ดังนั้นทรงกลมในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ θ และ ϕ คือ

$$x=\sin\phi\cos\theta,\quad y=\sin\phi\sin\theta,\quad z=\cos\phi$$

เมื่อ $0\le\theta\le 2\pi$ และ $0\le\phi\le\pi$ แสดงดังรูปที่ 2.50

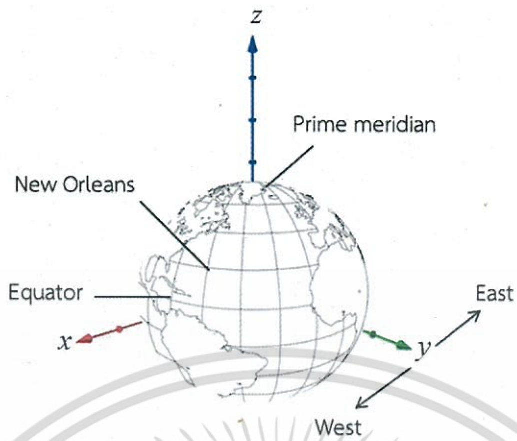
เรียกเส้น ϕ ที่มีค่าคงที่ว่า เส้นรุ้ง (Latitude)

และเรียก เส้น θ ที่มีค่าคงที่ว่า เส้นแวง (Longitude)



รูปที่ 2.50 ทรงกลมรัศมี 1 หน่วย

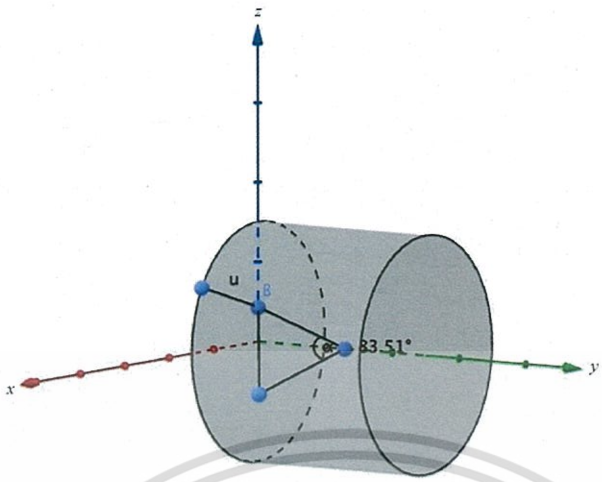
พิกัดเชิงทรงกลมมีความสัมพันธ์กับพิกัดเส้นละติจูดและเส้นลองจิจูด ที่ใช้ในการกำหนดเส้นทางการเดินทาง จากระบบพิกัดฉากแบบมือขวาที่มีจุดศูนย์กลางของโลกเป็นจุดกำเนิดของระบบ แกน z บวก ชี้ไปทางขั้วโลกเหนือ และแกน x บวกตัดกับเส้นแวงแรกที่พาดผ่านตำบลกรีนวิช ของอังกฤษ (Prime Meridian) ดังรูปที่ 2.51



รูปที่ 2.51 Spherical Coordinates in Navigation

สมมติโลกเป็นทรงกลมที่มีรัศมี $\rho = 4000$ ไมล์ แล้ว แต่ละจุดบนโลกในพิกัดเชิงทรงกลมอยู่ในรูปแบบ $(4000, \theta, \phi)$ เมื่อ θ และ ϕ เป็นเส้นรุ้งและเส้นแวงของจุดนั้น โดยเส้นแวงจะวัดเป็น องศา (Degree) ไปทางทิศตะวันออกหรือทิศตะวันตกของ Prime Meridian และเส้นรุ้งจะวัดเป็น องศาไปทางทิศเหนือหรือทิศใต้ของเส้นศูนย์สูตร (Equator) ดังรูปที่ 2.51

<u>ตัวอย่างที่ 2.26</u> พิจารณาสมการอิงพารามิเตอร์ของส่วนของทรงกระบอกตรง $x^2 + z^2 = 9$ ซึ่ง $0 \le y \le 5$ ในพจน์ของ u และ v โดยพารามิเตอร์ u คือ พิกัด y ของจุด $P(x, y, z)$ ที่อยู่บนพื้นผิว และ v เป็นมุมดังรูปที่ 2.52

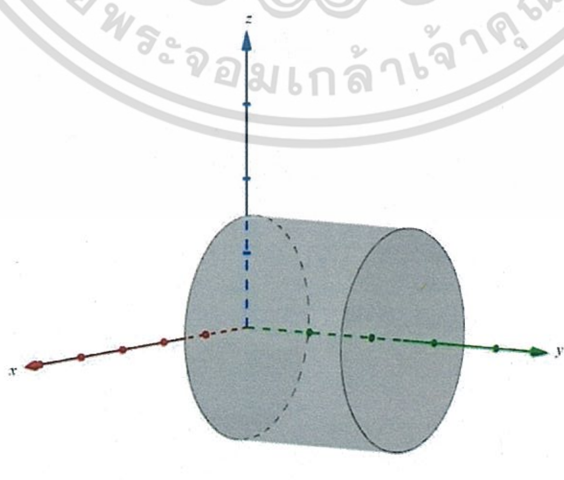


รูปที่ 2.52 $x^2 + z^2 = 9$

<u>วิธีทำ</u> รัศมีของทรงกระบอกคือ 3 จากรูป $y = u$, $x = 3\cos v$ และ $z = 3\sin v$ ดังนั้น พื้นผิวในแบบอิงพารามิเตอร์ คือ

$$x = 3\cos v, \quad y = u, \quad z = 3\sin v$$

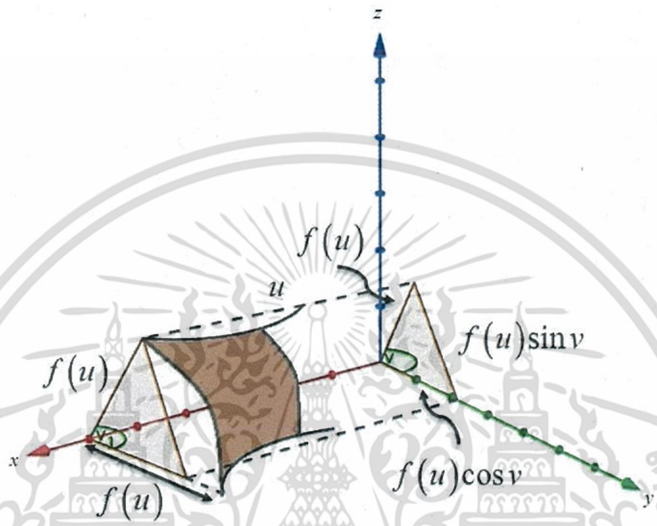
เพื่อจะได้ส่วนของพื้นผิวจาก $y = 0$ ถึง $y = 5$ จะให้พารามิเตอร์ u มีค่าเปลี่ยนไปในช่วง $0 \le u \le 5$ เพื่อที่จะให้รวมพื้นผิวด้านข้างทั้งหมดเอาไว้ จะให้พารามิเตอร์มีค่าเปลี่ยนในช่วง $0 \le v \le 2\pi$ เส้น u ที่มีค่าคงที่จะปรากฏเป็นวงกลมที่ขนานกับระนาบ xz และเส้น v ที่มีค่าคงที่จะปรากฏเป็นเส้นที่ขนานกับแกน y ดังรูปที่ 2.53



รูปที่ 2.53 ทรงกระบอกในรูปแบบพารามิเตอร์

2.3.1 **การแทนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเป็นรูปแบบอิงพารามิเตอร์**

จากตัวอย่างสุดท้ายที่ผ่านมานี้สามารถพัฒนาเป็นสมการอิงพารามิเตอร์ที่เกิดจากพื้นผิวของการหมุน ต้องการหาสมการอิงพารามิเตอร์ที่เกิดจากพื้นผิวของการหมุนเส้นบนระนาบ $y=f(x)$ รอบแกน x



รูปที่ 2.54 พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นรอบแกน x

จากรูปที่ 2.54 พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนในรูปแบบอิงพารามิเตอร์คือ

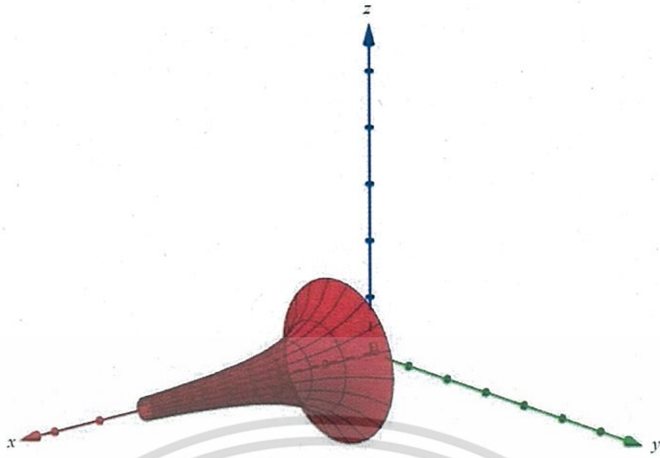
$$x=u,\quad y=f(u)\cos v,\quad z=f(u)\sin v$$ เมื่อ v เป็นมุมดังรูป 2.54

<u>ตัวอย่างที่ 2.27</u> พิจารณาสมการอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้น $y=\frac{1}{x}$ รอบแกน x

<u>วิธีทำ</u> จาก $x=u,\quad y=f(u)\cos v,\quad z=f(u)\sin v$ พื้นผิวในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ คือ

$$x=u,\quad y=\frac{1}{u}\cos v,\quad z=\frac{1}{u}\sin v$$

เมื่อ $0.7\le u\le 5$ และ $0\le v\le 2\pi$ แสดงดังรูปที่ 2.55



รูปที่ 2.55 พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้น $y=\dfrac{1}{x}$ รอบแกน x

2.3.2 **การแปลงเชิงเส้น**

<u>นิยาม 2.10</u> T เป็นการแปลงจากระบบพิกัด (x,y) เป็นระบบพิกัด (u,v) โดย $(x,y)=\mathrm{T}(u,v)$ แล้ว $\mathrm{T}(u,v)$ จะกล่าวว่าหาอนุพันธ์ได้ ถ้ามีเมทริกซ์ $J(u,v)$ ซึ่ง

$$J(u,v)=\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

เรียก $J(u,v)$ ว่าเมทริกซ์จาโคเบียนของการแปลง $\mathrm{T}(u,v)$

<u>ตัวอย่างที่ 2.28</u> พิจารณาเมทริกซ์จาโคเบียนของการแปลงจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $x=r\cos\theta$ และ $y=r\sin\theta$ แล้วเมทริกซ์จาโคเบียนคือ

$$J(r,\theta)=\begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$ #

<u>ตัวอย่างที่ 2.29</u> พิจารณาเมทริกซ์จาโคเบียนของการแปลงจากระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นระบบพิกัดฉาก

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $r^2=x^2+y^2$ และ $\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ แล้วเมทริกซ์จาโคเบียนคือ

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad , \quad 2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

จะได้ $$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = -\frac{r\sin\theta}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

ดังนั้น $$J(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$ #

<u>**นิยาม 2.11**</u> ตัวกำหนดของเมทริกซ์จาโคเบียน นิยามโดย

$$\det(J) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

สมบัติบางประการของตัวกำหนดของจาโคเบียนคือ

$$\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$= -\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

จะพบว่า $$\frac{\partial(x,x)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(y,y)}{\partial(u,v)} = 0$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 2.30</u> พิจารณาตัวกำหนดของเมทริกซ์จาโคเบียนของการแปลงจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial r} = (\cos\theta)(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta)$

$$= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$$ #

ให้ $\mathrm{T}(u,v)$ เป็นการแปลงจาก (x,y) ไปเป็น (u,v) โดย $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ ณ (p,q) ที่อยู่ในบริเวณ S ในระนาบ uv แล้ว T มีการแปลงผกผัน ตัวกำหนดของจาโคเบียนของการแปลงผกผัน คือ

$$\det\left(J^{-1}\right) = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.31</u> พิจารณาตัวกำหนดของเมทริกซ์จาโคเบียนของการแปลงจากระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นระบบพิกัดฉาก

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} - \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$

$$= \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ #

บทที่ 3
ลักษณะของพื้นผิว

ในบทนี้จะกล่าวถึงการพิจารณาลักษณะของพื้นผิว การหาจุดวิกฤติของฟังก์ชันสองตัวแปรแบบ non-degenerate และ degenerate การหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปร นิยาม บทตั้ง บทแทรก ทฤษฎีบทที่นำไปใช้ในการศึกษาฟังก์ชันมอร์ส

3.1 พื้นผิวอิงพารามิเตอร์ (Parametric Surface)

ให้ S^2 เป็นการส่งจากโดเมน (u,v) ที่อยู่ใน R^2 ไปยัง (x,y,z) ที่อยู่ใน R^3 นั่นคือ

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v);\quad (u,v)\in D\subset R^2$$

และฟังก์ชัน $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ สามารถหาอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องได้ทุกอันดับใน D ถ้าค่าลำดับชั้น (rank) ของ $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=2$ จะเรียก S^2 ว่า พื้นผิว

<u>หมายเหตุ</u> ค่าลำดับชั้น (rank) คือจำนวนของ 1 ตัวแรกในแถว และภายในคอลัมน์นั้นตัวอื่นๆ ต้องเป็นศูนย์

<u>ตัวอย่างที่ 3.1</u> พิจารณาว่า $S^2=(u,v,u^2+v^2)$ เป็นพื้นผิวหรือไม่

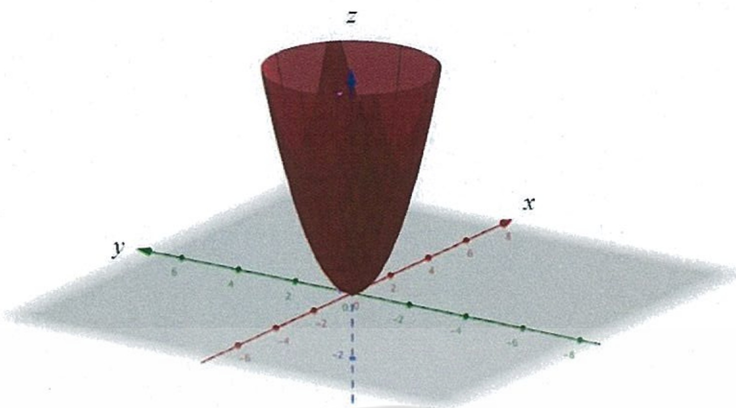
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $x=u$, $y=v$ และ $z=u^2+v^2$

จะได้ $x_u=1$, $y_u=0$, $z_u=2u$

$x_v=0$, $y_v=1$, $z_v=2v$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$ ซึ่ง rank มีค่าเท่ากับ 2

นั่นคือ $S^2=(u,v,u^2+v^2)$ เป็นพื้นผิว ดังรูปที่ 3.1 #



รูปที่ 3.1 $S^2 = (u, v, u^2 + v^2)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.2</u> พิจารณาว่า $S^2 = (u, v, 0)$ เป็นพื้นผิวหรือไม่

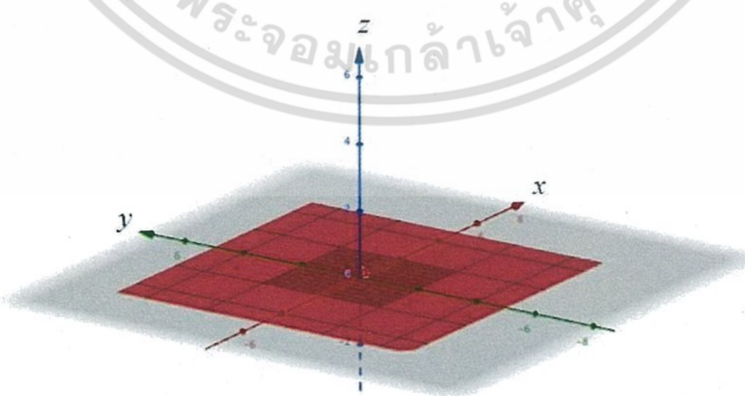
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $x = u$, $y = v$ และ $z = 0$

จะได้ $x_u = 1$, $y_u = 0$, $z_u = 0$

$x_v = 0$, $y_v = 1$, $z_v = 0$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ซึ่ง rank มีค่าเท่ากับ 2

นั่นคือ $S^2 = (u, v, 0)$ เป็นพื้นผิว ดังรูปที่ 3.2 #



รูปที่ 3.2 $S^2 = (u, v, 0)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.3</u> พิจารณาว่า $S^2=\left(u,v,u^2-v^2\right)$ เป็นพื้นผิวหรือไม่ โดยที่ $u\in(-3,3)$, $v\in(-2,2)$

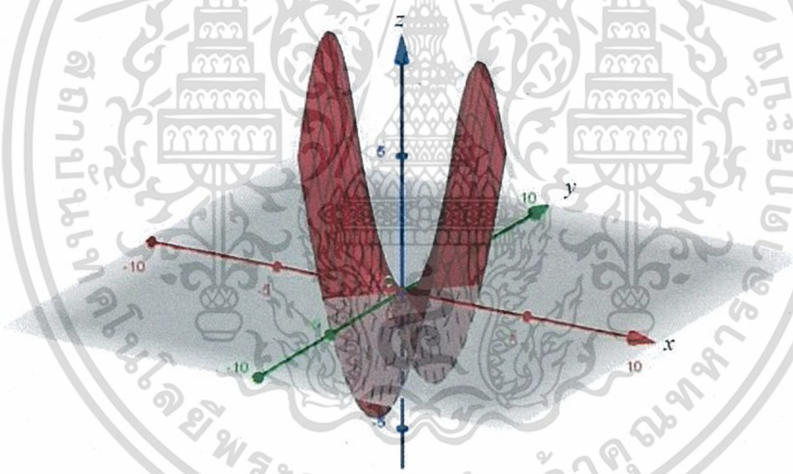
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $x=u$, $y=v$ และ $z=u^2-v^2$

จะได้ $x_u=1$, $y_u=0$, $z_u=2u$

$x_v=0$, $y_v=1$, $z_v=-2v$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{pmatrix}$ ซึ่ง rank มีค่าเท่ากับ 2

นั่นคือ $S^2=\left(u,v,u^2-v^2\right)$ เป็นพื้นผิว ดังรูปที่ 3.3 #



รูปที่ 3.3 $S^2=\left(u,v,u^2-v^2\right)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.4</u> พิจารณาว่า $S^2 = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$ เป็นพื้นผิวหรือไม่

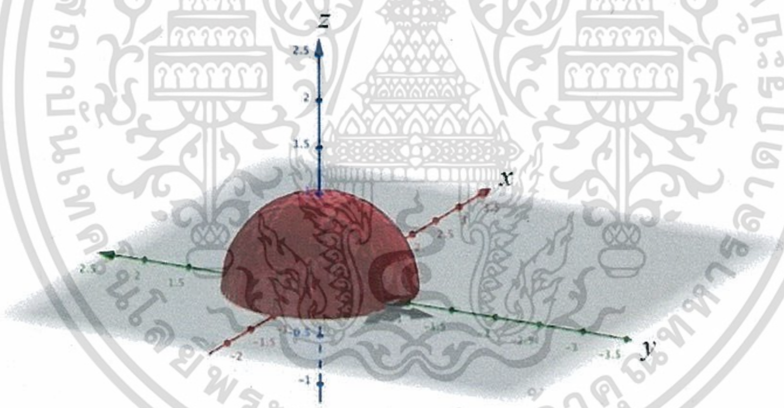
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $x = u$, $y = v$ และ $z = \sqrt{1-u^2-v^2}$

จะได้ $x_u = 1 \quad , \quad y_u = 0 \quad , \quad z_u = -u\left(1-u^2-v^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$x_v = 0 \quad , \quad y_v = 1 \quad , \quad z_v = -v\left(1-u^2-v^2\right)^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u\left(1-u^2-v^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & -v\left(1-u^2-v^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ ซึ่ง rank มีค่าเท่ากับ 2

นั่นคือ $S^2 = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$ เป็นพื้นผิว ดังรูปที่ 3.4 #



รูปที่ 3.4 $S^2 = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.5</u> พิจารณาว่า $S^2 = (1,0,0)$ เป็นพื้นผิวหรือไม่

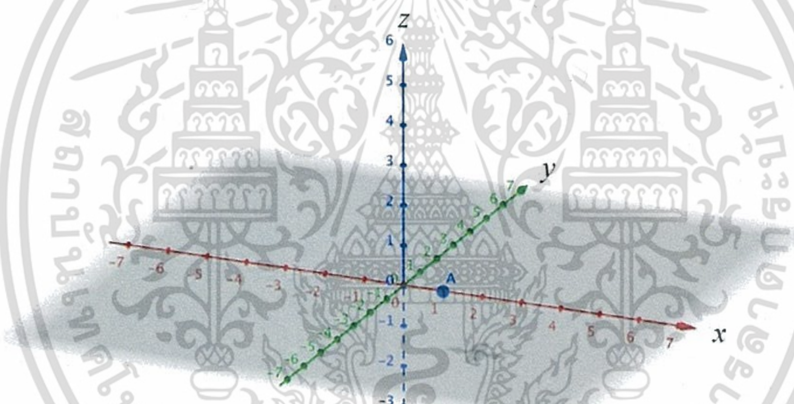
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $x=1, y=0$ และ $z=0$

จะได้ $x_u = 0 \quad , \quad y_u = 0 \quad , \quad z_u = 0$

$x_v = 0 \quad , \quad y_v = 0 \quad , \quad z_v = 0$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ซึ่ง rank มีค่าไม่เท่ากับ 2

นั่นคือ $S^2 = (1,0,0)$ ไม่เป็นพื้นผิว ดังรูปที่ 3.5 #



รูปที่ 3.5 $S^2 = (1,0,0)$

<u>หมายเหตุ</u> เนื่องจาก rank ของตัวอย่างที่ 3.5 ไม่เท่ากับ 2 นั่นคือตัวอย่างนี้จะไม่เป็นพื้นผิวแต่จะเป็นจุด

<u>นิยาม 3.1[1]</u> จุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f แบ่งเป็น 2 ชนิด ตามค่าของอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน f ถ้า $f''(x_0) \neq 0$ เรียก x_0 ว่าจุดวิกฤตแบบ non-degenerate และถ้า $f''(x_0) = 0$ เรียก x_0 ว่าจุดวิกฤตแบบ degenerate

ตัวอย่างที่ 3.6 พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

วิธีทำ จาก $f(x)=x^2$

$f'(x)=2x=0$ จะได้ $x=0$

$f''(x)=2\neq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ใดๆ

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

ตัวอย่างที่ 3.7 พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=-x^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

วิธีทำ จาก $f(x)=-x^2$

$f'(x)=-2x=0$ จะได้ $x=0$

$f''(x)=-2\neq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ใดๆ

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=-x^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

ตัวอย่างที่ 3.8 พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

วิธีทำ จาก $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2=0$ จะได้ $x=0$

$f''(x)=6x$

$f''(0)=6(0)=0$

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ เป็นจุดวิกฤตแบบ degenerate #

อีกหนึ่งข้อแตกต่างระหว่างจุดวิกฤตแบบ non-degenerate กับ degenerate คือ เมื่อเราจัดรูปฟังก์ชัน โดยเพิ่มฟังก์ชันเส้นตรง $y^*=ax+b$ ดังนี้

$$y=f(x)\mapsto y=f(x)+ax+b$$

ทำให้พบว่ามีความเหมือนดังตัวอย่างที่ 3.6 , 3.7, 3.9 และ 3.10 แต่มีความแตกต่างในตัวอย่าง 3.8 และ 3.11

<u>ตัวอย่างที่ 3.9</u> พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $y=x^2 \mapsto y=x^2+ax+b$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

<u>วิธีทำ</u> จาก $y=x^2 \mapsto y=x^2+ax+b$

$y'=2x+a=0$ จะได้ $x=\dfrac{-a}{2}$

$y''=2\neq 0$

ดังนั้นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $y=x^2 \mapsto y=x^2+ax+b$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

<u>ตัวอย่างที่ 3.10</u> พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $y=-x^2 \mapsto y=-x^2+ax+b$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

<u>วิธีทำ</u> จาก $y=-x^2 \mapsto y=-x^2+ax+b$

$y'=-2x+a=0$ จะได้ $x=\dfrac{a}{2}$

$y''=-2\neq 0$

ดังนั้นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $y=-x^2 \mapsto y=-x^2+ax+b$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

<u>ตัวอย่างที่ 3.11</u> พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $y=x^3 \mapsto y=x^3+ax+b$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

<u>วิธีทำ</u> จาก $y=x^3 \mapsto y=x^3+ax+b$

$y'=3x^2+a=0$ จะได้ $x=\pm\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$

$y''=6x$

ถ้า $a>0$ จะไม่มีจุดวิกฤต เนื่องจากในการพิจารณาจะพิจารณาเฉพาะจำนวนจริงเท่านั้น

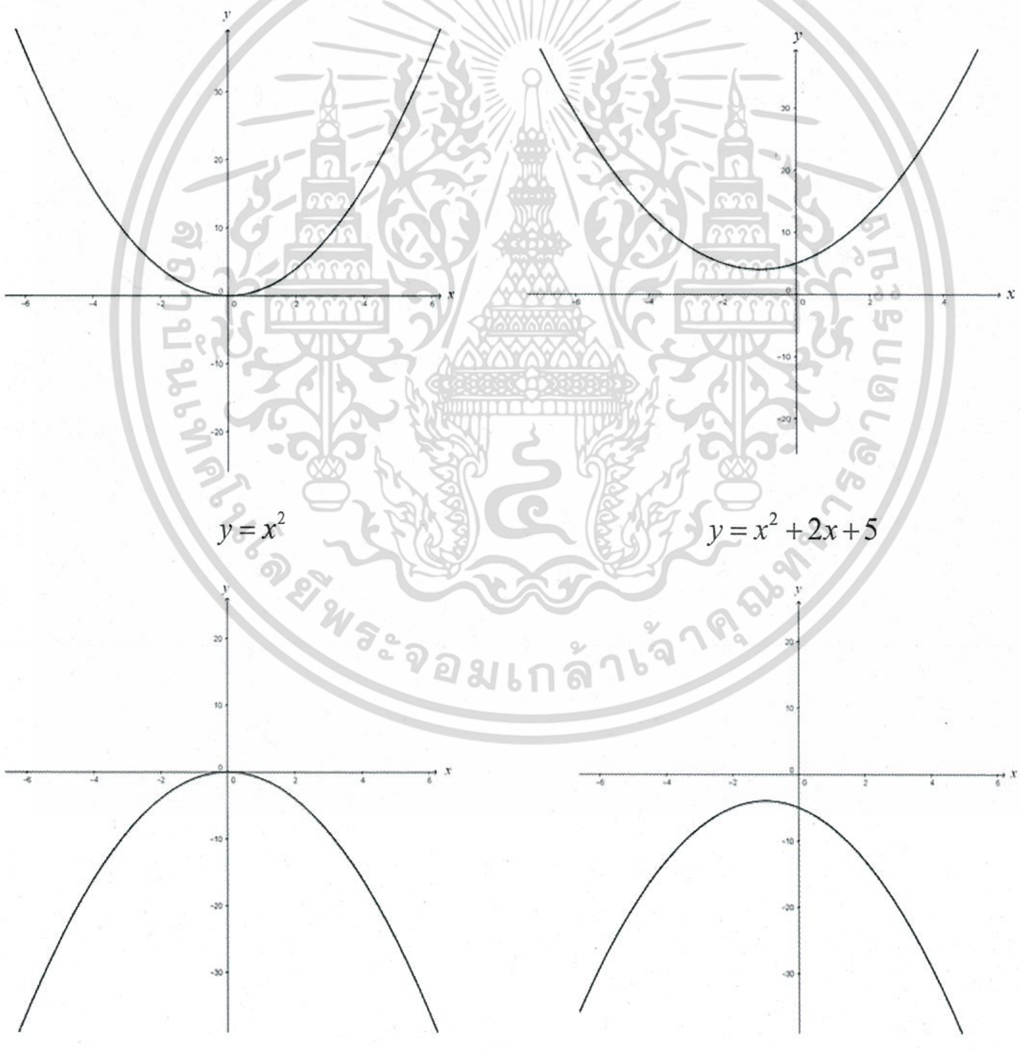
ถ้า $a\leq 0$ จะมี 2 กรณี คือ

เมื่อ $a<0$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate

เมื่อ $a=0$ เป็นจุดวิกฤตแบบ degenerate #

จากตัวอย่างที่ 3.7 , 3.8 , 3.9 และ 3.10 จะเห็นได้ว่า จุดวิกฤตแบบ non-degenerate เป็นจุดวิกฤตแบบ stable เสมอ แต่จุดวิกฤตแบบ degenerate อาจมีกรณีที่ทำให้เกิดกรณี non-degenerate ได้ด้วย จึงเรียกจุดวิกฤตแบบ degenerate ว่า unstable ดังรูปที่ 3.8 และ 3.11

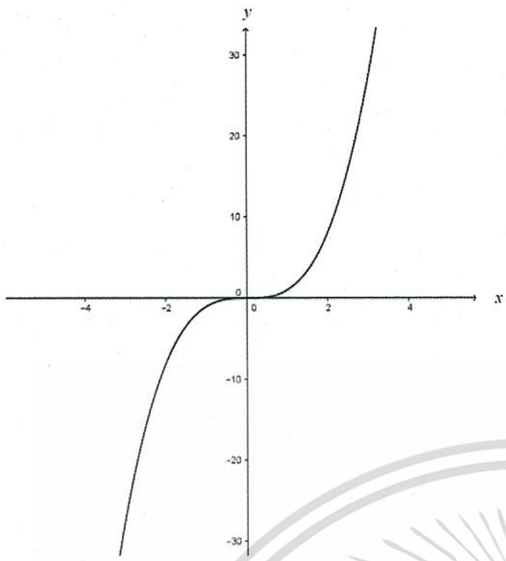
ทั้งนี้เนื่องจากการเพิ่มพจน์บางพจน์ในฟังก์ชันเมื่อจัดสมการใหม่ อาจเป็นการเลื่อนเส้นกราฟของฟังก์ชันขึ้นหรือลงดังรูปที่ 3.6 โดยจำนวนจุดวิกฤตไม่เปลี่ยนแปลง ลักษณะสมบัติของจุดวิกฤตแบบนี้เรียกว่า จุดวิกฤตแบบ stable ในขณะที่บางฟังก์ชันเมื่อเพิ่มบางพจน์ในฟังก์ชัน เมื่อจัดสมการใหม่อาจมีจำนวนจุดวิกฤตเพิ่มหรือจำนวนจุดวิกฤตคงเดิม ดังรูป 3.7 เรียกจุดวิกฤตแบบนี้ว่า unstable



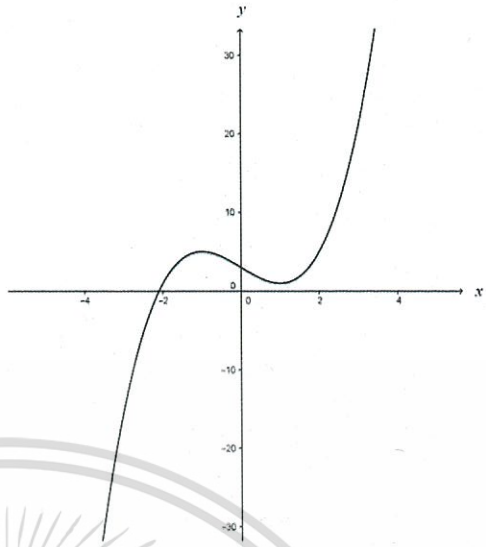
$y=x^2$ $y=x^2+2x+5$

$y=-x^2$ $y=-x^2-2x-5$

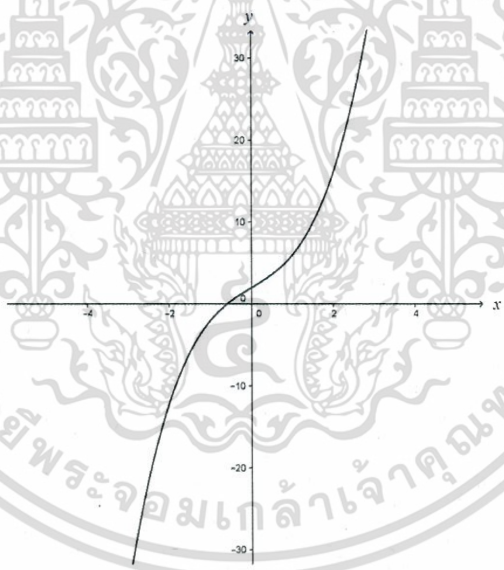
รูปที่ 3.6 จุดวิกฤตแบบ stable



$y = x^3$



$y = x^3 - 3x + 3$



$y = x^3 + 3x + 2$

รูปที่ 3.7 จุดวิกฤตแบบ unstable

3.2 การหาค่าสุดขีดบนกราฟ $z=f(x,y)$

พิจารณาฟังก์ชัน 2 ตัวแปร $z=f(x,y), x,y\in R$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ให้ (x,y) เป็นจุดในระนาบ xy และ $z=f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันบนระนาบสำหรับทุก (x,y) ที่เป็นจำนวนจริงบนระนาบ สามารถพิจารณา $z=f(x,y)$ เป็นกราฟของฟังก์ชันบน R^3

<u>นิยาม 3.2[1]</u> (จุดวิกฤตของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร)

ให้จุด $p_0=(x_0,y_0)$ ในระนาบ xy เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ ถ้าเป็นไปตาม

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)=0$$

<u>นิยาม 3.3[1]</u> (i) ให้ $p_0=(x_0,y_0)$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ แล้วเมทริกซ์ของอนุพันธ์อันดับสองที่ p_0 ดังนี้

$$H_f(p_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

เรียกว่า เมทริกซ์เฮสเซียนของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ ที่จุดวิกฤต p_0

(ii) จุดวิกฤต p_0 ของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ เป็น non-degenerate ถ้าตัวกำหนด (determinant) ของ $H_f(p_0)$ ไม่เท่ากับศูนย์ หรือ

$$\det\left(H_f(p_0)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0)\right)^2\neq 0$$

ถ้าตัวกำหนดของ $H_f(p_0)=0$ แล้ว p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ degenerate หรือ

$$\det\left(H_f(p_0)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0)\right)^2=0$$

ตัวอย่างที่ 3.12 พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=x^2+y^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2+y^2\right)=2 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(x^2+y^2\right)=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(x^2+y^2\right)=0 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2+y^2\right)=2$$

จะได้ $H_f\left(p_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(p_0\right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(p_0\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(H_f\left(p_0\right)\right)=4\neq 0$

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=x^2+y^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

ตัวอย่างที่ 3.13 พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=x^2-y^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2-y^2\right)=2 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(x^2-y^2\right)=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(x^2-y^2\right)=0 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2-y^2\right)=-2$$

จะได้ $H_f\left(p_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(p_0\right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(p_0\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(H_f\left(p_0\right)\right)=-4\neq 0$

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=x^2-y^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

<u>ตัวอย่างที่ 3.14</u> พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=-x^2-y^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-x^2-y^2\right)=-2$, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-x^2-y^2\right)=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(-x^2-y^2\right)=0 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-x^2-y^2\right)=-2$$

จะได้ $$H_f\left(p_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(p_0\right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(p_0\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(H_f\left(p_0\right)\right)=4\neq 0$$

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=-x^2-y^2$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

<u>ตัวอย่างที่ 3.15</u> พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=xy$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xy)=0$, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(xy)=1$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(xy)=1 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xy)=0$$

จะได้ $$H_f\left(p_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(p_0\right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(p_0\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(H_f\left(p_0\right)\right)=-1\neq 0$$

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z=xy$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

<u>ตัวอย่างที่ 3.16</u> พิจารณาว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z = x^2 + y^3$ เป็นจุดวิกฤตแบบใด

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2+y^3\right)=2 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^2+y^3\right)=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(x^2+y^3\right)=0 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2+y^3\right)=6y$$

จะได้ $H_f\left(p_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(p_0\right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\left(p_0\right) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(p_0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6(0) \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(H_f\left(p_0\right)\right)=0$

ดังนั้น จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z = x^2 + y^3$ เป็นจุดวิกฤตแบบ degenerate #

<u>บทตั้ง 3.1[1]</u> ถ้า p_0 เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ และ $H_f\left(p_0\right)$ เป็นเมทริกซ์ของ $f(x,y)$ โดยการแปลง (x,y) เป็น (X,Y) เมื่อกำหนด $x = x(X,Y)$ และ $y = y(X,Y)$ และ $H_f^*\left(p_0\right)$ เป็นเมทริกซ์ของ $f\left(x(X,Y), y(X,Y)\right)$ แล้ว

$$H_f^*\left(p_0\right) = J^t\left(p_0\right) H_f\left(p_0\right) J\left(p_0\right)$$

เมื่อ
$$J\left(p_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X}\left(p_0\right) & \frac{\partial x}{\partial Y}\left(p_0\right) \\ \frac{\partial y}{\partial X}\left(p_0\right) & \frac{\partial y}{\partial Y}\left(p_0\right) \end{pmatrix}$$

และ $J^t\left(p_0\right)$ เป็นเมทริกซ์ทรานสโพสของ $J\left(p_0\right)$

<u>พิสูจน์</u> จาก $x = x(X,Y)$ และ $y = y(X,Y)$ แล้ว $f(X,Y) = f\left(x(X,Y), y(X,Y)\right)$

โดยการหาอนุพันธ์และกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial X\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial y\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\left(+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

และ $$\frac{\partial f}{\partial Y}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial Y\partial x}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial Y}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial Y^2}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial Y\partial x}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial Y}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial Y^2}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$

และ $$\frac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial Y}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial X}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial Y}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial y\partial Y}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial X}$$

จาก $H_f^*(p_0)=J^t(p_0)H_f(p_0)J(p_0)$

จะได้ $\quad RHS=J^t(p_0)H_f(p_0)J(p_0)$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X}\\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y}\\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X}\\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X} & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}\\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial Y} & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}\end{pmatrix}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

จาก $f(X,Y)$ จะได้ $\quad H_f^*(p_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial Y\partial X} & \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X} & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}\\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial Y} & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}\end{pmatrix}$$

$$=RHS \qquad \square$$

<u>ข้อสังเกต</u>

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.17</u> พิจารณาว่าฟังก์ชัน $z=xy$ มีจุดวิกฤตแบบใด เมื่อ $x=X-Y$ และ $y=X+Y$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ $xy=(X-Y)(X+Y)=X^2-Y^2$

จากตัวอย่างที่ 3.13 $z=X^2-Y^2$

มีจุดกำเนิด $p_0=(0,0)$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate

และ $H_f^*(p_0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $\det\left(H_f^*(p_0)\right)\neq 0$

จาก $x=X-Y$ และ $y=X+Y$ จะได้

$J=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ และ $J^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \det\left(H_f(0,0)\right)\neq 0$

$$J^tH_fJ=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=H_f^*$$

ซึ่งเป็นไปตามบทตั้ง 3.1

นั่นหมายความว่าคำนวณในระบบพิกัด (x,y) หรือ (X,Y) จะได้ผลสรุปเหมือนกัน #

<u>บทแทรก 3.1[1]</u> จุดวิกฤตแบบ non-degenerate และ degenerate ไม่ขึ้นอยู่กับระบบพิกัด

<u>พิสูจน์</u> จากบทตั้ง 3.1 ได้ว่า $\left(H_f^*(p_0)\right)=J^t(p_0)H_f(p_0)J(p_0)$ (3.1)

แล้ว $\det\left(H_f^*(p_{.0})\right)=\det\left(J^t(p_0)\right)\det\left(H_f(p_0)\right)\det\left(J(p_0)\right)$ (3.2)

เนื่องจาก $\det\left(J(p_0)\right)\neq 0$ แล้ว $\det\left(J'(p_0)\right)\neq 0$

ถ้า p_0 เป็น non-degenerate ในระบบพิกัด (x,y) แล้ว $\det\left(H_f(p_0)\right)\neq 0$

จาก (3.2) ได้ว่า $\det\left(H_f^*(p_0)\right)\neq 0$ นั่นคือ p_0 เป็น non-degenerate ในระบบพิกัด (X,Y) ด้วย และถ้า p_0 เป็น degenerate ในระบบพิกัด (x,y) แล้ว $\det\left(H_f(p_0)\right)=0$

จาก (3.2) ได้ว่า $\det\left(H_f^*(p_0)\right)=0$ นั่นคือ p_0 เป็น degenerate ในระบบพิกัด (X,Y) ด้วย

□

<u>บทตั้ง 3.2[1]</u> ให้ p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate ของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ ในระบบพิกัด (x,y) เมื่อ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)=0$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)=0$ แล้วระบบพิกัดใหม่ (X,Y) จะได้ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2}(p_0)\neq 0$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(p_0)\neq 0$ เมื่อ $x=X-Y$ และ $y=X+Y$ แล้ว $H_f(p_0)\neq 0$ จะได้ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=a$

<u>พิสูจน์</u> ให้ p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate ของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$

ในระบบพิกัด (x,y) เมื่อ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)=0$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)=0$

แล้ว
$$H_f(p_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_o) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_o)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p_o) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_o)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}\quad ;\quad a\neq 0$$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $a=0$ แล้ว p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ degenerate ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานข้างต้น

ให้ (X,Y) เป็นระบบพิกัดใหม่ ซึ่งกำหนดโดย

$$x=X-Y \quad , \quad y=X+Y$$

จะได้เมทริกซ์จาโคเบียนของการแปลงระบบพิกัดจาก (X,Y) ไป (x,y) คือ

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

และทรานสโพสของเมทริกซ์ J คือ $J^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

จากบทตั้ง 3.1 โดยการแทน J,J^t และ H_f

จะได้ $$H_f^*(p_0)=J^t(p_0)H_f(p_0)J(p_0)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

โดยนิยาม 3.3 $$H_f(p_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial Y\partial X}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(p_0)=2a\neq 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(p_0)=2a\neq 0$$ □

<u>**บทตั้ง 3.3[1]**</u> ให้ $z=f(x,y)$ และ $f(0,0)=0$ แล้ว $f(x,y)=xg(x,y)+yh(x,y)$

เมื่อ $g(x,y)=\int_0^1 \frac{df}{dx}(tx,ty)\,dt$ และ $h(x,y)=\int_0^1 \frac{df}{dy}(tx,ty)\,dt$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $z=f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันบนระนาบ xy และ $f(0,0)=0$

เลือกจุด (x,y) ใดๆ จากนั้นพิจารณาฟังก์ชัน $f(tx,ty)$ เมื่อ t เป็นพารามิเตอร์

โดยการหาอนุพันธ์ของ $f(tx,ty)$ เทียบกับ t แบบตรงและโดยกฎลูกโซ่

$$\frac{d}{dt}f(tx,ty)=\frac{\partial}{\partial x}f(tx,ty)\frac{d}{dt}tx+\frac{\partial}{\partial y}f(tx,ty)\frac{d}{dt}ty$$

$$=x\frac{\partial}{\partial x}f(tx,ty)+y\frac{\partial}{\partial y}f(tx,ty)$$

แล้วหาปริพันธ์จำกัดเขต จะได้

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}f(tx,ty)\,dt=\int_0^1 x\frac{\partial}{\partial x}f(tx,ty)\,dt+\int_0^1 y\frac{\partial}{\partial y}f(tx,ty)\,dt$$

$$LHS:\int_0^1 \frac{d}{dt}f(tx,ty)\,dt=f(tx,ty)\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$=f(x,y)-f(0,0)$$

$$=f(x,y)$$

$$RHS:\int_0^1 x\frac{\partial}{\partial x}f(tx,ty)\,dt+\int_0^1 y\frac{\partial}{\partial y}f(tx,ty)\,dt=\int_0^1\left[x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\right]dt+\int_0^1\left[y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right]dt$$

$$=x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\,dt+y\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\,dt$$

$$=xg(x,y)+yh(x,y)$$

เมื่อกำหนดให้ $g(x,y)=\int_0^1 \frac{df}{dx}(tx,ty)\,dt$ และ $h(x,y)=\int_0^1 \frac{df}{dy}(tx,ty)\,dt$

ดังนั้น $f(x,y)=xg(x,y)+yh(x,y)$ □

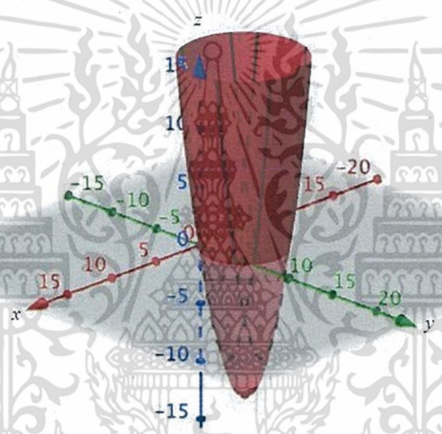
ในการศึกษาจะพิจารณาพื้นผิวเรียบในปริภูมิ 3 มิติที่เป็นพื้นผิวกำลังสอง ในรูปแบบ $z=f(x,y)$ โดย $f(x,y)$ มีรูปแบบทั่วไปคือ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ซึ่งสามารถจัดเป็นรูปแบบมาตรฐาน $X^2+Y^2+c=0$

เช่น $x^2+4x+y^2-6y=0$

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9-13=0$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2-13=0$$

โดยการแปลง $X=x+2$ และ $Y=y-3$ จะได้ $X^2+Y^2-13=0$



รูปที่ 3.8 $(x+2)^2+(y-3)^2-13=0$

<u>ทฤษฎีบท 3.1[1]</u> บทตั้งของมอร์ส (Morse Lemma)

ให้ p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate ของฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x,y)$ ภายใต้การแปลง $X=X(x,y)$ และ $Y=Y(x,y)$ ที่เหมาะสม $f(x,y)$ สามารถเขียนในระบบพิกัด (X,Y) ได้แบบใดแบบหนึ่งของรูปแบบมาตรฐานสามแบบต่อไปนี้

$$(i)\quad f=X^2+Y^2+c$$

$$(ii)\quad f=X^2-Y^2+c$$

$$(iii)\quad f=-X^2-Y^2+c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ $(c=f(p_0))$ และกรณีเฉพาะ p_0 เป็นจุดกำเนิด $(p_0=(0,0))$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $p_0=(0,0)$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate ของ $f(x,y)$

แล้ว $\det\left(H_f(0,0)\right)\neq 0$ หรือ $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0) & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0,0)\\ \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(0,0) & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,0)\end{vmatrix}\neq 0$

<u>ข้อสังเกต</u> เนื่องจาก $f(x,y)$ มี p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate ซึ่งเป็นจุดวิกฤตแบบ stable ดังนั้น $f(p_0)$ จะให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดอย่างแน่นอน ไม่เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

ดังนั้น $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{p_0}\neq 0$

จากบทตั้ง 3.3 $f(0,0)=0$ แล้ว $f(x,y)=xg(x,y)+yh(x,y)$ (3.3)

โดยการหาอนุพันธ์ (3.3) เทียบกับ x และ y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=g(x,y)+x\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)+y\frac{\partial}{\partial x}h(x,y) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=x\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)+h(x,y)+y\frac{\partial}{\partial y}h(x,y) \tag{3.5}$$

แทน $(x,y)=(0,0)$ ใน (3.4) และ (3.5) จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=g(0,0) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h(0,0)$$

เนื่องจาก $f(0,0)$ เป็นจุดวิกฤต ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

นั่นคือ $g(0,0)=0$ และ $h(0,0)=0$

จากบทตั้ง 3.3 จะได้

$$g(0,0)=0 \text{ แล้ว } g(x,y)=xh_{11}(x,y)+yh_{12}(x,y) \tag{3.6}$$

และ $$h(0,0)=0 \text{ แล้ว } h(x,y)=xh_{21}(x,y)+yh_{22}(x,y) \tag{3.7}$$

จาก (3.3),(3.6) และ (3.7) จะได้

$$f(x,y) = x^2h_{11}(x,y) + xyh_{12}(x,y) + yxh_{21}(x,y) + y^2h_{22}(x,y)$$

ให้ $H_{11} = h_{11}$, $H_{12} = \dfrac{h_{12}+h_{21}}{2}$ และ $H_{22} = h_{22}$ โดย $xy = yx$

ดังนั้น
$$f(x,y) = x^2H_{11} + 2xyH_{12} + y^2H_{22} \tag{3.8}$$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองของ (3.8) เทียบกับ x และ y จะได้

$$f_x = 2xH_{11} + x^2\frac{\partial}{\partial x}H_{11} + 2yH_{12} + 2xy\frac{\partial}{\partial x}H_{12}$$

$$f_{xx} = 2H_{11} + 2x\frac{\partial}{\partial x}H_{11} + 2x\frac{\partial}{\partial x}H_{11} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{11} + 2y\frac{\partial}{\partial x}H_{12} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{12}$$

$$f_{xy} = 2x\frac{\partial}{\partial y}H_{11} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}H_{11} + 2H_{12} + 2y\frac{\partial}{\partial y}H_{12} + 2x\frac{\partial}{\partial x}H_{12} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}H_{12}$$

$$f_{xx}(0,0) = 2H_{11} \quad , \quad f_{xy}(0,0) = 2H_{12}$$

$$f_y = 2xH_{12} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}H_{12} + 2yH_{22} + y^2\frac{\partial}{\partial y}H_{12}$$

$$f_{yy} = 2x\frac{\partial}{\partial y}H_{12} + 2x\frac{\partial}{\partial y}H_{12} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial y^2}H_{12} + 2H_{22} + 2y\frac{\partial}{\partial y}H_{12} + 2y\frac{\partial}{\partial y}H_{22} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}H_{22}$$

$$f_{yx} = 2H_{12} + 2x\frac{\partial}{\partial x}H_{12} + 2y\frac{\partial}{\partial y}H_{12} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}H_{12} + 2y\frac{\partial}{\partial x}H_{12} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}H_{12}$$

$$f_{yy}(0,0) = 2H_{22} \quad , \quad f_{yx}(0,0) = 2H_{12}$$

นั่นคือ
$$f_{xx}(0,0) = 2H_{11}(0,0) \tag{3.9}$$

$$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 2H_{12}(0,0) \tag{3.10}$$

$$f_{yy}(0,0) = 2H_{22}(0,0) \tag{3.11}$$

ถ้า $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$ แล้ว $H_{11}(0,0) \neq 0$ $\quad (3.12)$

เลือกระบบพิกัดใหม่รอบ $p_0 = (0,0)$ โดยให้

$$X = \sqrt{|H_{11}|}\left(x + \frac{H_{12}}{H_{11}}y\right) \tag{3.13}$$

$$Y = y$$

แล้ว $X_x = \sqrt{|H_{11}|}$ $\qquad X_y = \sqrt{|H_{11}|}\frac{H_{12}}{H_{11}}$

$Y_x = 0$ $\qquad Y_y = 1$

และ จาโคเบียน คือ

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{|H_{11}|} & \sqrt{|H_{11}|}\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{|H_{11}|} \neq 0 \quad \text{จาก} \quad (3.12)$$

จาก (3.13) โดยการยกกำลังสองได้

$$X^2 = |H_{11}|\left(x^2 + 2\frac{H_{12}}{H_{11}}xy + \frac{H^2_{12}}{H_{11}}y^2\right)$$

$$= \begin{cases} H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + \dfrac{H^2_{12}}{H_{11}}y^2 & , \quad (H_{11} > 0) \\ -H_{11}x^2 - 2H_{12}xy - \dfrac{H^2_{12}}{H_{11}}y^2 & , \quad (H_{11} < 0) \end{cases}$$

จาก (3.8) จะได้

$$f(x,y) = x^2H_{11} + 2xyH_{12} + \frac{H_{12}^2}{H_{11}}y^2 - \frac{H_{12}^2}{H_{11}}y^2 + y^2H_{22}$$

$$= \left(x^2H_{11} + 2xyH_{12} + \frac{{H_{12}}^2}{H_{11}}y^2\right) + \left(H_{22} - \frac{{H_{12}}^2}{H_{11}}\right)y^2$$

$$= X^2 + \left(H_{22} - \frac{{H_{12}}^2}{H_{11}}\right)y^2 \tag{3.14}$$

และ $$f(x,y) = -\left(-x^2H_{11} - 2xyH_{12} - y^2\frac{H_{12}^2}{H_{11}}y^2\right) + \left(H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}}\right)y^2$$

$$= -X^2 + \left(H_{22} - \frac{H_{12}{}^2}{H_{11}}\right)y^2 \qquad (3.15)$$

จาก $(3.9),(3.10)$ และ (3.11) จะได้

$$\det\left(H_f\right) = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2H_{11}(0,0) & 2H_{12}(0,0) \\ 2H_{12}(0,0) & 2H_{22}(0,0) \end{vmatrix}$$

$$= 4\left(H_{11}(0,0)H_{22}(0,0) - H_{12}^2(0,0)\right)$$

เนื่องจาก p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate ดังนั้น $\det H_f\left(p_0\right) \neq 0$

นั่นคือ $$H_{11}(0,0)H_{22}(0,0) - H_{12}^2(0,0) = \frac{1}{4}\det H_f \neq 0 \qquad (3.16)$$

ให้ $$Y = \sqrt{\left|\frac{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}{H_{11}}\right|}\,y$$

$$= \sqrt{\left|H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}}\right|}\,y$$

$$= \sqrt{|K|}\,y \quad , \quad K = H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}} \qquad (3.17)$$

แทน (3.17) ลงในสมการที่ (3.14) และ (3.15) แล้วรูปแบบที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้

ของ f คือ $$f = \begin{cases} X^2 + Y^2 & \left(H_{11} > 0, K > 0\right) \\ X^2 - Y^2 & \left(H_{11} > 0, K < 0\right) \\ -X^2 + Y^2 & \left(H_{11} < 0, K > 0\right) \\ -X^2 - Y^2 & \left(H_{11} < 0, K < 0\right) \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าสับเปลี่ยนระหว่าง X และ Y แล้ว $X^2 - Y^2$ และ $-X^2 + Y^2$ จะมี

สมบัติเหมือนกัน

ในกรณีทั่วไป ถ้า p_0 เป็นจุดวิกฤต แล้ว $f(p_0)=c$

จะได้ 1. $f(X,Y)=X^2+Y^2+c$

2. $f(X,Y)=X^2-Y^2+c$

3. $f(X,Y)=-X^2-Y^2+c$ □

บทที่ 4
ฟังก์ชันมอร์ส

บทที่ผ่านมาเป็นการศึกษาจุดวิกฤตบริเวณรอบๆ จุดบางจุดบนพื้นผิว ในบทนี้จะศึกษาจุดวิกฤตบนบางพื้นผิวทรงตันที่มีขอบเขต มีช่องว่างในรูปทรง และไม่มีช่องว่างในรูปทรง เช่น ทรงห่วงยาง และทรงกลม โดยพิจารณาจากดัชนีของจุดวิกฤต และฟังก์ชันมอร์ส

<u>นิยาม 4.1[1]</u> (ดัชนีของจุดวิกฤตแบบ Non-degenerate)

ให้ p_0 เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate ของฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y เมื่อ (x,y) เป็นจุดในบริเวณรอบๆ p_0 จากรูปแบบมาตรฐานของฟังก์ชันตามบทตั้งของมอร์ส

คือ 1. $f(x,y)=x^2+y^2+c$

2. $f(x,y)=x^2-y^2+c$

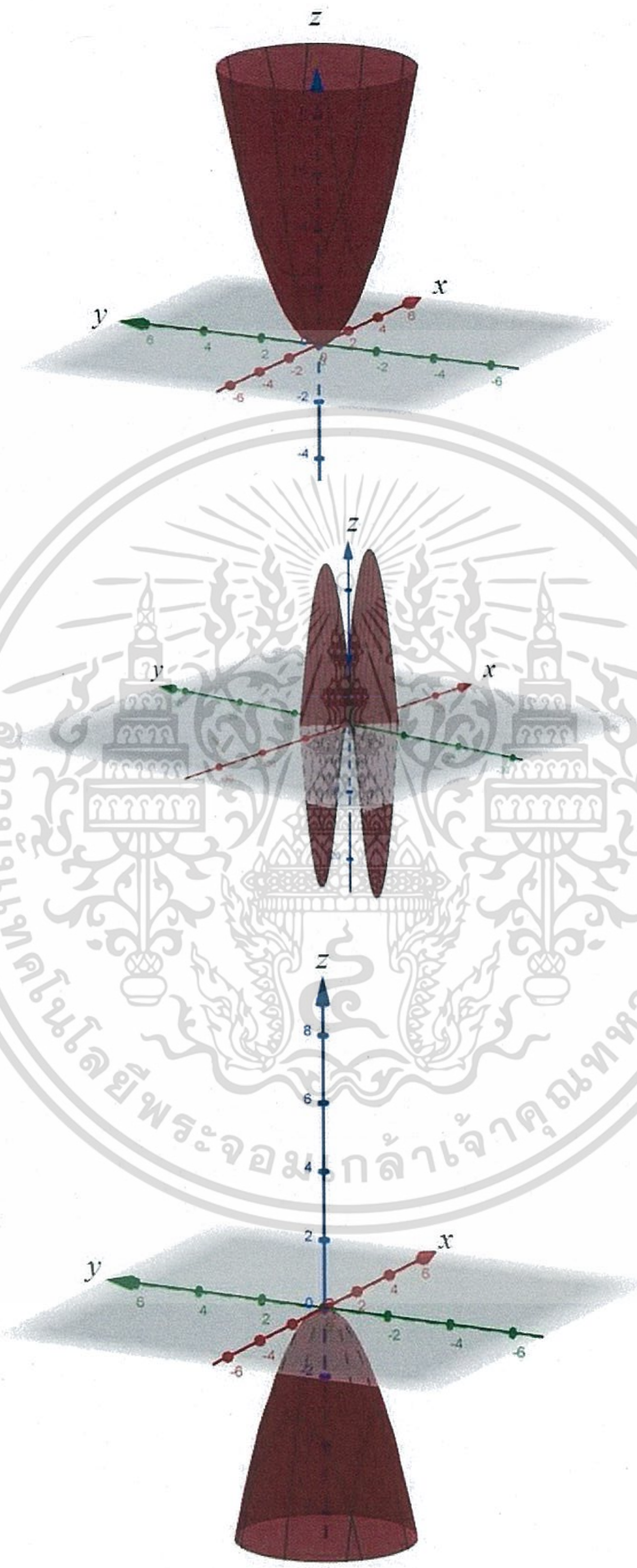
3. $f(x,y)=-x^2-y^2+c$

แล้วจำนวนสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบของฟังก์ชัน เรียกว่า ดัชนีของจุดวิกฤต นั่นคือ

$z=x^2+y^2$ ไม่มีเครื่องหมายลบ แล้วดัชนีเป็น 0 และ $p_0=(0,0)$ ให้ค่าต่ำสุดของ f

$z=x^2-y^2$ มีเครื่องหมายลบ 1 พจน์ แล้วดัชนีเป็น 1 และ $p_0=(0,0)$ เป็นจุดวิกฤตที่มีทั้งค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดขึ้นอยู่กับบริเวณรอบๆ p_0

$z=-x^2-y^2$ มีเครื่องหมายลบ 2 พจน์ แล้วดัชนีเป็น 2 และ $p_0=(0,0)$ ให้ค่าสูงสุดของ f ดังรูป 4.1



รูปที่ 4.1 กราฟที่แสดงค่าต่ำสุด กราฟที่แสดงทั้งค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด กราฟที่แสดงค่าสูงสุด

เฮสเซียนของฟังก์ชัน $z=x^2+y^2$, $z=x^2-y^2$ และ $z=-x^2-y^2$ คือ

$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$ และ $\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$ โดยตัวกำหนดของเฮสเซียนของแต่ละฟังก์ชันไม่เป็นศูนย์ และจุดวิกฤต $p_0=(0,0)$ ของทุกฟังก์ชันเป็นแบบ non-degenerate ดัชนีของจุดวิกฤตแบบ non-degenerate p_0 จะเป็นพจน์ที่แสดงลักษณะสมบัติของพื้นผิวรอบๆ p_0

<u>นิยาม 4.2</u> (M.Kuga) จีนัสของพื้นผิวตันหมายถึงจำนวนของช่องวางในพื้นผิวนั้น จีนัสของทรงกลมคือ 0 เนื่องจากทรงกลมเป็นทรงตันไม่มีช่องว่างใดๆ จีนัสของทรงห่วงยางคือ 1 เนื่องจากทรงห่วงยางเป็นทรงตันที่มีช่องว่าง 1 ช่อง ดังรูปที่ 4.2 พื้นผิวที่มีจีนัส 2 และ 3 คือพื้นผิวทรงตันที่มีช่องว่าง 2 และ 3 ช่องดังรูปที่ 4.3 ในทำนองเดียวกันพื้นผิวที่มี g จีนัส จะมีช่องว่าง g ช่อง

รูปที่ 4.2 ทรงกลมและทอรัส

รูปที่ 4.3 พื้นผิวปิดที่มี 2 จีนัส และ 3 จีนัส

กำหนด S^2 แทนทรงกลม

T^2 แทนทรงห่วงยาง

และ ε_g แทนพื้นผิวที่มี g จีนัส

ในกรณี ε_0 คือ ทรงกลม S^2 และ ε_1 คือทรงห่วงยาง T^2

4.1 ฟังก์ชันมอร์ส

ให้ M เป็นพื้นผิวที่เป็นกราฟฟังก์ชัน $z = f(x,y), f:\Omega \to R^3, g:\mathrm{M} \to R; \mathrm{M} \subseteq R^3$ $, \mathrm{M} = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, z = f(x,y)\}$

ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเรียบ (smooth function) และจุด p_0 บนพื้นผิว M เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f เมื่อ

$$\frac{\partial}{\partial x} f(p_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) = 0$$

จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าจุดวิกฤตแบบ non-degenerate เป็นจุดวิกฤตแบบ stable ดังนั้นฟังก์ชันที่จะศึกษาต่อไปนี้จะพิจารณากรณีจุดวิกฤตแบบ non-degenerate เท่านั้น

<u>นิยาม 4.3[1]</u> (ฟังก์ชันมอร์ส)

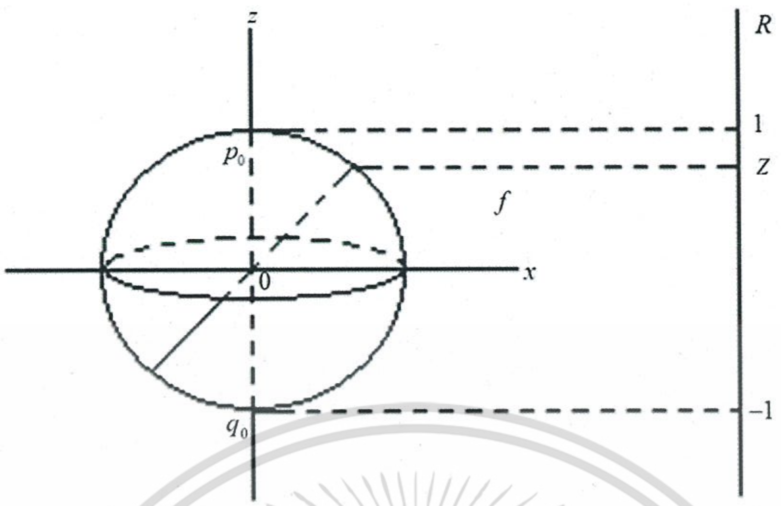
ถ้าทุกจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f:\mathrm{M} \to R$ บน M เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate แล้ว f เป็นฟังก์ชันมอร์ส

<u>ตัวอย่าง 4.1</u> ความสูงของฟังก์ชันบนทรงกลมเป็นฟังก์ชันมอร์ส

ให้ S^2 เป็นทรงกลม 1 หน่วย ในระบบพิกัดฉาก (x,y,z) ในปริภูมิ 3 มิติ R^3 แล้ว S^2 เป็นไปตามสมการ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{4.1}$$

แล้วฟังก์ชันความสูงสามารถกำหนดโดย $f: S^2 \to R$ หรือ $f:(x,y,z) \to R$



รูปที่ 4.4 ความสูงของฟังก์ชัน $f : S^2 \to R$

จะพบว่า f มีจุดวิกฤตสองจุด คือ ขั้วเหนือ $p_0 = (0,0,1)$ และขั้วใต้ $q_0 = (0,0,-1)$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ จะได้ $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$z_x = \pm\frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \pm\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \pm\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$z_x = 0$ แล้ว $x = 0$ และ $z_y = 0$ แล้ว $y = 0$

แทน $x = 0$ และ $y = 0$ ใน $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ จะได้ $z = \pm 1$

ดังนั้นจุดวิกฤตของ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ คือ $(0,0,1)$ และ $(0,0,-1)$ เป็นจุดวิกฤต

เนื่องจาก $$z_{xx}=\pm\left(\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}-x\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1-x^2-y^2}\right)$$

$$=\pm\left(\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{1-x^2-y^2}\right)$$

$$=\pm\left(\frac{1-x^2-y^2+x^2}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\pm\frac{1-y^2}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$z_{yy}=\pm\frac{1-x^2}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{xy}=\pm x\left(-\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2y)\right)=\pm\frac{xy}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=z_{yx}$$

$$z_{xx}(0,0,1)=1 \quad , \quad z_{yy}(0,0,1)=1 \quad , \quad z_{xy}(0,0,1)=z_{yx}(0,0,1)=0$$

ดังนั้น $H_f(p_0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(H_f(p_0)\right)=1\neq 0$

และ $z_{xx}(0,0,-1)=-1 \quad , \quad z_{yy}(0,0,-1)=-1 \quad , \quad z_{xy}(0,0,-1)=z_{yx}(0,0,-1)=0$

ดังนั้น $H_f(q_0)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(H_f(q_0)\right)=1\neq 0$

นั่นคือจุดวิกฤต $p_0=(0,0,1)$ และ $q_0=(0,0,-1)$ เป็นจุดวิกฤตแบบ non-degenerate #

สมมติมีการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $h: X \to Y$ ระหว่างสองปริภูมิ X และ Y แล้วสามารถนิยามอินเวอร์สการส่ง $h^{-1}: Y \to X$ ถ้า $h: X \to Y$ และ $h^{-1}: Y \to X$ ต่อเนื่องทั้งคู่แล้วจะกล่าวว่า $h: X \to Y$ เป็น homeomorphism แล้วปริภูมิ X และ Y homeomorphic ซึ่งกันและกัน แล้วจะกล่าวว่าปริภูมิทั้งสองมีรูปทรงเหมือนกัน

<u>ตัวอย่างที่ 4.2</u> พิจารณา X คือ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ และ Y คือ $y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 = 1$ ว่าเป็น homeomorphic กันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ภายใต้การส่ง $h: x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ และ $x_3 = 2y_3$

จะได้
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = 2 \neq 0$$

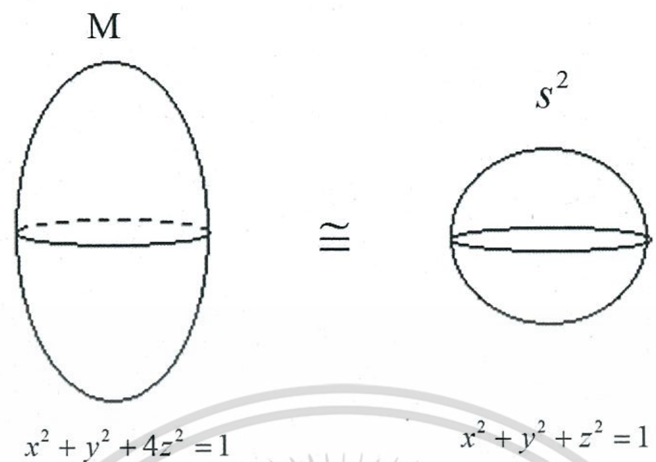
แล้ว $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + (2y_3)^2 = 1$

และอินเวอร์สการส่ง $h^{-1}: y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ และ $y_3 = \frac{1}{2}x_3$

จะได้
$$J^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J^*) = \frac{1}{2} \neq 0$$

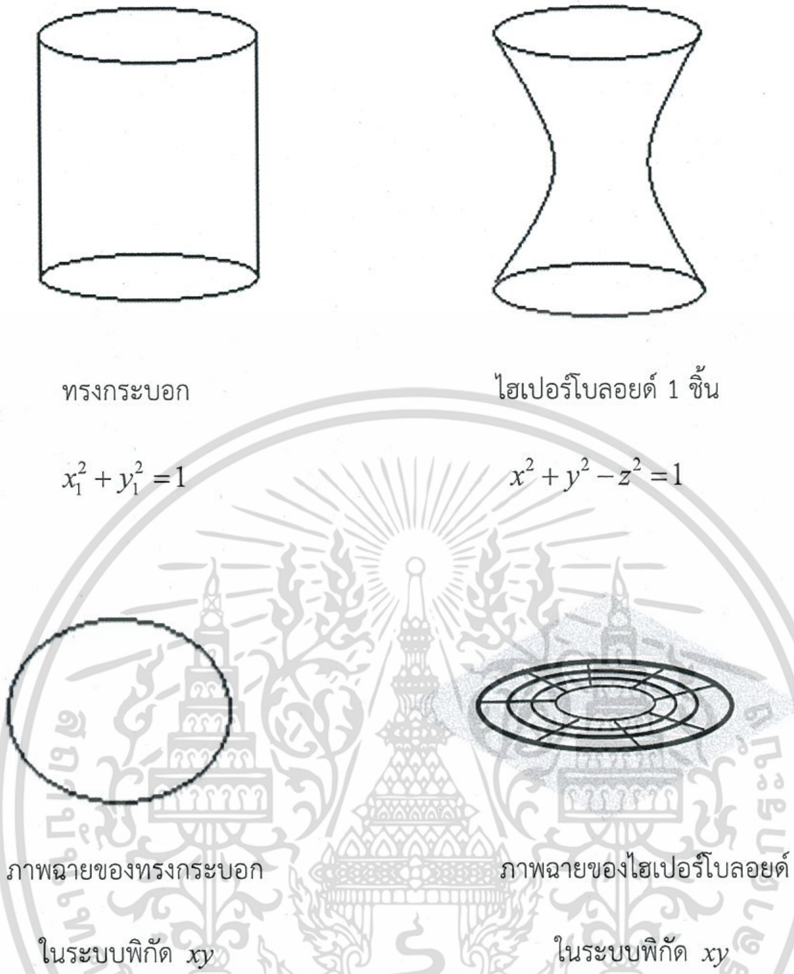
แล้ว X และ Y homeomorphic ซึ่งกันและกัน เนื่องจาก h และ h^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง #

จากตัวอย่าง 4.2 จะพบว่าภายใต้การส่ง $h: x_1 = y_1 , x_2 = y_2 , x_3 = 2y_3$ หรือ $h: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ และภายใต้การส่ง $h^{-1}: \mathrm{y}_1 = x_1 , y_2 = x_2 , y_3 = \frac{1}{2}x_3$ หรือ $h^{-1}: \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ เป็น homeomorphic ซึ่งกันและกัน และแต่ละการส่ง $h: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ และ $h^{-1}: \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ เป็นฟังก์ชันเรียบ ดังนั้นจะเรียกพื้นผิว M และ N ว่า diffeomorphic นั่นคือพื้นผิว M และ N มีฟังก์ชัน $f: \mathrm{M} \to R$ และ $f: \mathrm{N} \to R$ โดยที่พื้นผิว M และ N มีจุดวิกฤตแบบ non-degenerate เพียงสองจุดเท่านั้น (ไม่มีจุดวิกฤตอื่น) แล้วพื้นผิว M จะ diffeomorphic กับทรงกลม S^2 ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 M diffeomorphic กับทรงกลม S^2

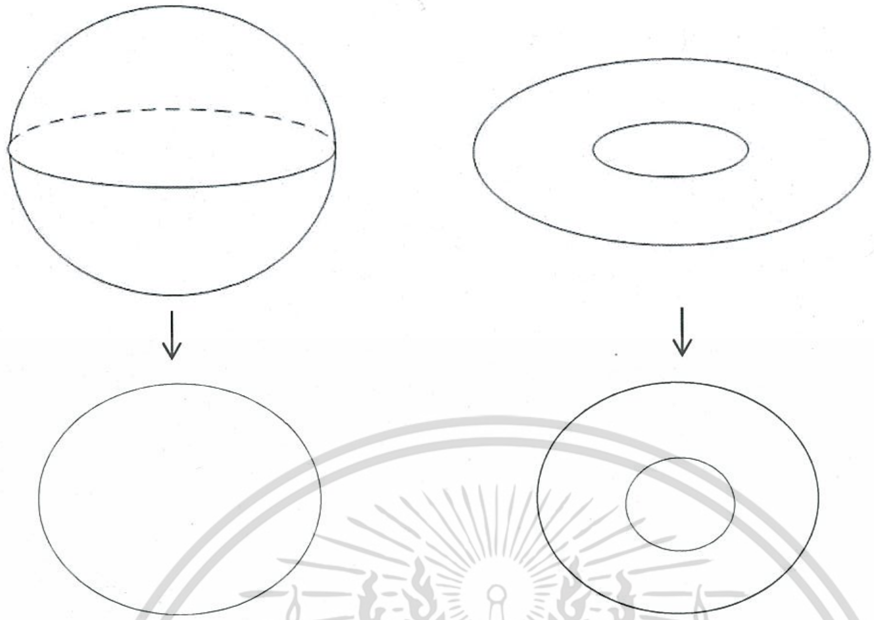
ภาพฉายของ $x^2+y^2+4z^2=1$ ในระบบพิกัด xy คือวงกลม $x^2+y^2=1$ และในกรณีเดียวกันภาพฉายของ $x^2+y^2+z^2=1$ ในระบบพิกัด xy คือวงกลม $x^2+y^2=1$ ซึ่งเป็นขอบเขตของรูปทรงทั้งสอง และเป็นเส้นที่มีขอบเขตจำกัดเช่นเดียวกัน แต่ในบางกรณี เช่น ทรงกระบอก และไฮเปอร์โบลอยด์ 1 ชิ้น ภายใต้การส่ง $\mathrm{g}: x_1 = x_2 , y_1 = y_2 , z_1 = 1 + z_2^2$ หรือ $\mathrm{g}:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ และภายใต้การส่ง $\mathrm{g}^{-1}: x_2 = x_1 , y_2 = y_1 , z_2 = 1 + z_1^2$ หรือ $\mathrm{g}^{-1}:\mathrm{N}\to\mathrm{M}$ เป็น homeomorphic ซึ่งกันและกัน เนื่องจาก h และ h^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และแต่ละการส่ง $\mathrm{g}:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ และ $g^{-1}:\mathrm{N}\to\mathrm{M}$ เป็นฟังก์ชันเรียบ ดังนั้นจะเรียกพื้นผิว M และ N ว่า diffeomorphic ซึ่งภาพฉายของทรงกระบอก $x_1^2+y_1^2=1$ ในระบบพิกัด xy คือวงกลมที่มีขอบเขตจำกัด แต่ภาพฉายของไฮเปอร์โบลอยด์ 1 ชิ้น $x^2+y^2-z^2=1$ ในระบบพิกัด xy คือบริเวณแผ่นวงกลมที่ไม่มีขอบเขตและมีช่องว่าง 1 ช่องเป็นวงกลม ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 ภาพฉายของทรงกระบอกและไฮเปอร์โบลอยด์ในระบบพิกัด xy

นั่นคือจะเห็นได้ว่า ถึงแม้ว่าพื้นผิว 2 พื้นผิวจะ diffeomorphic ซึ่งกันและกัน แต่ภาพฉายของทั้งคู่ในระบบพิกัด xy จะเหมือนกัน หรือแตกต่างกัน

และจากรูปที่ 4.5 และ 4.6 พบว่าภาพฉายของบางพื้นผิวเป็นแผ่นกลม บางพื้นผิวเป็นวงกลม บางพื้นผิวเป็นบริเวณไม่จำกัดที่มีช่องว่าง ถ้าพิจารณาเฉพาะพื้นผิวปิดจะพบว่า ภาพฉายอาจเป็นแผ่นวงกลมไม่มีช่องว่าง หรือแผ่นกลมที่มีช่องว่าง ซึ่งคือจีนัสดังรูปที่ 4.7 และจากจีนัสที่จะพิจารณาต่อเป็น handle ดังหัวข้อถัดไป



รูปที่ 4.7 ภาพฉายของทรงกลมและทรงรี

4.2 Handle decomposition

สำหรับการศึกษาต่อไปนี้จะพิจารณาจากการนำรูปทรงใส่ลงไปในภาชนะที่มีน้ำอยู่และจะศึกษาเฉพาะรูปทรงที่อยู่ใต้น้ำภายในภาชนะเท่านั้น

<u>**นิยาม 4.4[1]**</u> (ค่าวิกฤต)

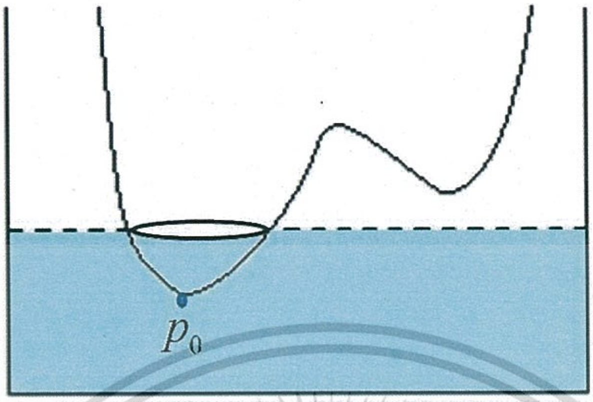
ให้จำนวนจริง c_0 คือค่าวิกฤตของ f ถ้า f ที่ p_0 คือจุดวิกฤต $p_0 : f\left(p_0\right) = c_0$

ให้ M เป็นรูปทรงที่มีฟังก์ชันตามรูปแบบมาตรฐาน 3 แบบของฟังก์ชันมอร์สแบบใดแบบหนึ่ง คือ $X^2+Y^2+c, X^2-Y^2+c\left(Y^2+X^2+c\right)$ หรือ $-X^2-Y^2+c$

ให้ p_0 เป็นจุดวิกฤต

ค่อยๆ นำ M ลงไปในภาชนะที่มีน้ำอยู่ พิจารณาเฉพาะส่วนที่อยู่ในน้ำ โดยแบ่งกรณีการพิจารณาดังนี้

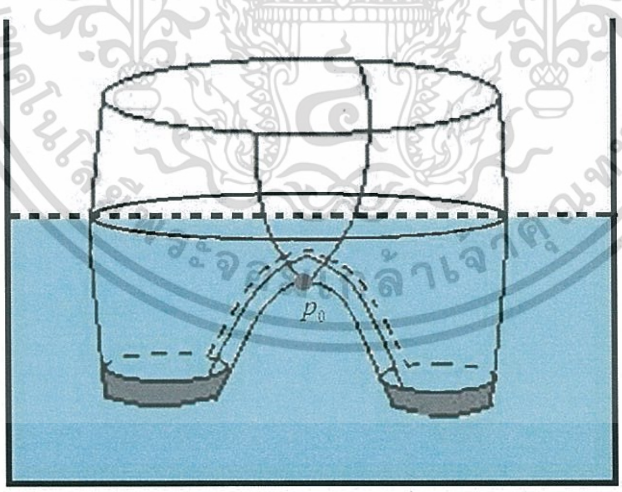
(a) ถ้า M ที่ใส่ลงไปในน้ำมีรูปร่างลักษณะดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 กรณีเมื่อดัชนีของ p_0 เป็น 0

จะได้ $f: X^2+Y^2+c$ ซึ่งเป็นไปตามรูปแบบมาตรฐาน และมีดัชนีเป็น 0 นั่นคือจุดวิกฤต p_0 ให้ค่าต่ำสุด

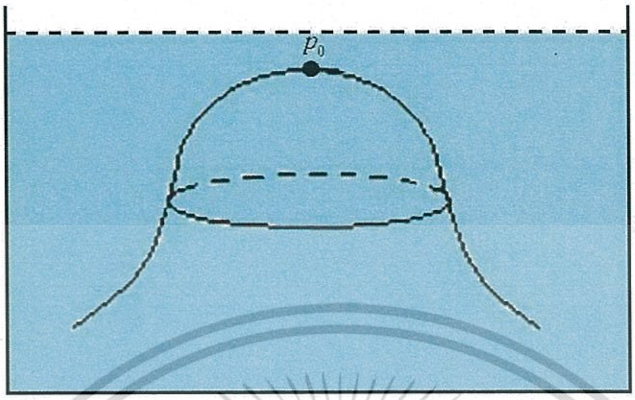
(b) ถ้ารูปร่างของ M ใต้น้ำ มีลักษณะดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 กรณีเมื่อดัชนีของ p_0 เป็น 1

จะได้ $f: X^2-Y^2+c$ หรือ $f: -X^2+Y^2+c$ ซึ่งเป็นไปตามรูปแบบมาตรฐาน และมีดัชนีเป็น 1 นั่นคือจะเห็นได้ว่า จุดวิกฤต p_0 บอกไม่ได้ว่าเป็นจุดค่าต่ำสุดหรือจุดสูงสุด

(c) ถ้ารูปร่างของ M ใต้น้ำ มีลักษณะดังรูปที่ 4.10



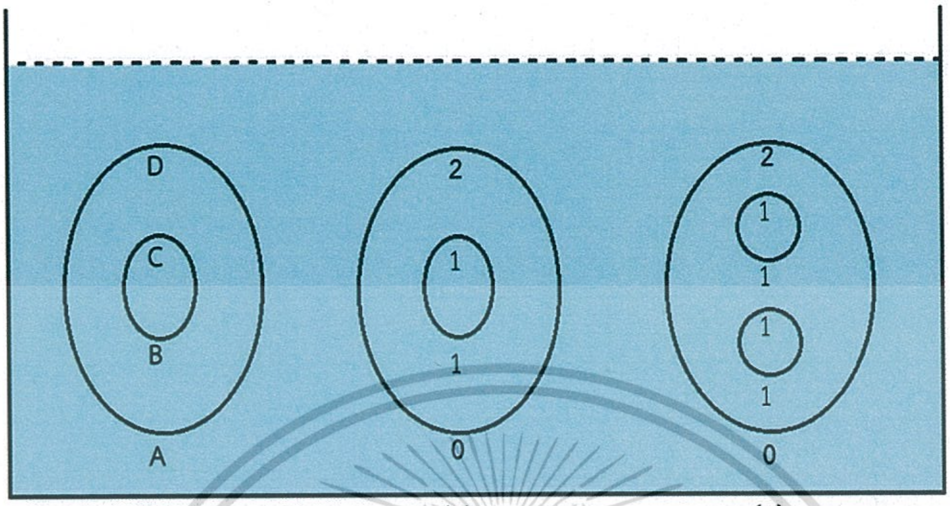
รูปที่ 4.10 กรณีเมื่อดัชนีของ p_0 เป็น 2

จะได้ $f : -X^2 - Y^2 + c$ ซึ่งเป็นไปตามรูปแบบมาตรฐาน และมีดัชนีเป็น 2 นั่นคือจุดวิกฤต p_0 ให้จุดสูงสุด

จะพบว่ารูปร่างของ M ใต้น้ำจะเปลี่ยนไปเมื่อพิจารณาจุดวิกฤต เพราะรูปทรง M อาจมีหลายจุดวิกฤตแต่ละแบบจะให้รูปร่างแตกต่างกันไป จุดต่ำสุดให้ค่าต่ำสุด และมีดัชนีเป็น 0 จะเรียกว่า $0-handle$ จุดที่ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด และมีดัชนีเป็น 1 จะเรียกว่า $1-handle$ และจุดสูงสุดให้ค่าสูงสุด และมีดัชนีเป็น 2 จะเรียกว่า $2-handle$

4.2.1 การเปลี่ยนค่าของดัชนีเมื่อพิจารณาวัตถุที่ใส่ลงไปในน้ำ

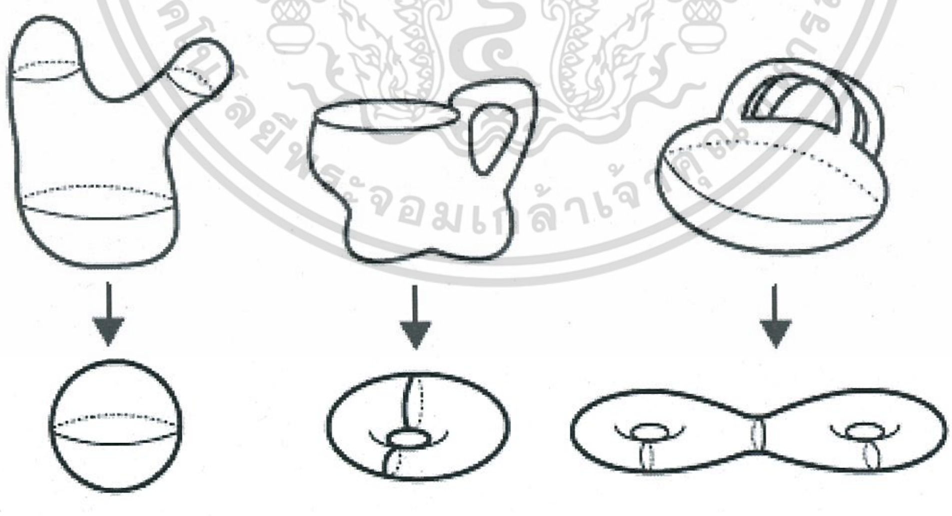
พิจารณารูปทรงห่วงยางซึ่งมีจุดวิกฤต 4 จุด A, B, C และ D คือรูปที่ 4.11 (ก) จะพบว่าแต่ละจุดวิกฤต ดัชนีมีการเปลี่ยนแปลงไปดังรูปที่ 4.11 (ข) แล้ว พื้นผิวมี 1 จีนัส แต่ถ้าดัชนีมีการเปลี่ยนแปลงดังรูปที่ 4.11 (ค) แล้ว พื้นผิวมี 2 จีนัส



รูปที่ 4.11 การเปลี่ยนค่าของดัชนีเมื่อพิจารณาวัตถุที่ใส่ลงไปในน้ำ

<u>ข้อคาดการณ์</u> (handle decomposition of close surface)

ถ้าพื้นผิว M เป็นไปตามฟังก์ชันมอร์ส $f: \mathrm{M} \rightarrow R$ แล้ว M สามารถอธิบายเป็นยูเนียนของ $0-handle$, $1-handle$ และ $2-handle$ ได้ดังรูปที่ 4.11



แหล่งที่มา : https://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/4/textbook/03.php

รูปที่ 4.12 ตัวอย่างยูเนียนของ $0-handle$, $1-handle$ และ $2-handle$

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าจุดวิกฤตของฟังก์ชันมี 2 แบบ คือ จุดวิกฤตแบบ degenerate และจุดวิกฤตแบบ non-degenerate โดยถ้า $f''(x_0)\neq 0$ เรียก x_0 ว่าจุดวิกฤตแบบ non-degenerate และถ้า $f''(x_0)=0$ เรียก x_0 ว่าจุดวิกฤตแบบ degenerate ซึ่งฟังก์ชันที่มีจุดวิกฤตแบบ non-degenerate จะเรียกว่าฟังก์ชันมอร์ส (Morse Function) ถ้า f เป็นฟังก์ชันมอร์สบนพื้นผิวปิด M แล้วค่าของดัชนีจะแสดงลักษณะของพื้นผิว โดยถ้าดัชนีเป็น 0 ที่จุดวิกฤต p_0 จะให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ถ้าดัชนีเป็น 1 ที่จุดวิกฤต p_0 อาจจะให้ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด และถ้าดัชนีเป็น 2 ที่จุดวิกฤต p_0 จะให้ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

ข้อคาดการณ์ : ถ้าพื้นผิว M เป็นไปตามฟังก์ชันมอร์ส $f:\mathrm{M}\to R$ แล้ว M สามารถอธิบายเป็นยูเนียนของ $0-handle$, $1-handle$ และ $2-handle$ ได้ ซึ่งเป็นหัวข้อที่น่าสนใจที่จะต้องมีการศึกษาและพิสูจน์ต่อไป

5.2 ข้อเสนอแนะ

ประโยชน์อย่างนึงในการศึกษาฟังก์ชันมอร์ส คือ สามารถนำไปใช้อธิบายลักษณะของภูมิศาสตร์ของพื้นผิวโลก ซึ่งมีลักษณะสูงต่ำไม่เท่ากันได้ นอกจากนี้ความรู้เกี่ยวกับวิถีที่มีจุดวิกฤตที่จะเป็นส่วนสำคัญในการศึกษาจีออเดซิกในพื้นผิวอีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] Yukio Matsumoto. (1997). An Introduction to Morse Theory, American Mathematic Society, Translations of Mathematical Monographs Volume208. Tokyo.

[2] ภัคคินี ยิมเรวัต. (2529). คณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์1. โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, กรุงเทพมหานคร.

[3] ภัคคินี ชิตสกุล. (2554). เอกสารประกอบการสอนวิชา *Differential geometry*. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[4] รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ และ รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ (2555). พีชคณิตเชิงเส้น1. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด มีนเซอร์วิส ซัพพลาย.

[5] การหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปร. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก : http://math.sut.ac.th/~jessada/CALII/slide/cal_II_11.pdf (วันที่สืบค้นข้อมูล 30 กันยายน 2559)