การวิเคราะห์ดูเรชันของการลงทุนโดยใช้กระแสเงินสดฟัซซี
DURATION ANALYSIS OF INVESTMENT
BASE ON FUZZY CASH FLOWS

กนกวรรณ จิตบรรจงจักร
ภิญญูดา ดิษยารุ่งคุณ
อัศดา ศาสตราวาหะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

การวิเคราะห์ดูเรชันของการลงทุนโดยใช้กระแสเงินสดฟัซซี
DURATION ANALYSIS OF INVESTMENT BASE ON FUZZY CASH FLOWS

กนกวรรณ จิตบรรจงจักร
ภิญญ์ดา ดิษยารุ่งคุณ
อัศดา ศาสตราวาหะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การวิเคราะห์ดูเรชันของการลงทุนโดยใช้กระแสเงินสดฟัซซี DURATION ANALYSIS OF INVESTMENT BASE ON FUZZY CASH FLOW
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ จิตบรรจงจักร 55050003
	นางสาวภิญญ์ดา ดิษยารุ่งคุณ 55050117
	นายอัศดา ศาสตราวาหะ 55050188
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อาจารย์ ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ประธานกรรมการ	ธวัชชัย
อาจารย์ ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ กรรมการ	
ผศ.ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การวิเคราะห์ดูเรชันของการลงทุนโดยใช้กระแสเงินสดฟัซซี
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ จิตบรรจงจักร 55050003
	นางสาวภิญญูดา ดิษยารุ่งคุณ 55050117
	นายอัศดา ศาสตราวาหะ 55050188
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ได้ปรับปรุง Duration หรือระยะเวลาการลงทุนแบบดั้งเดิม เนื่องจากกระแสเงินสดที่นำมาพิจารณานั้นไม่ใช่ค่าที่ตายตัว แต่เราสามารถคาดการณ์ให้อยู่ในช่วงได้ จึงทำให้เกิดแนวคิดที่นำตรรกศาสตร์ฟัซซีมาประยุกต์ใช้ และนิยามขึ้นใหม่ว่า Fuzzy Duration ในงานวิจัยนี้เราได้จำลองการตัดสินใจในการเลือกลงทุนในแต่ละโครงการ โดยใช้กระแสเงินสดฟัซซีเพื่อวิเคราะห์หาดูเรชันที่เหมาะสม

คำสำคัญ : ตรรกศาสตร์ฟัซซี ดูเรชัน ดีฟัซซีฟิเคชัน

Title	DURATION ANALYSIS OF INVESTMENT BASE ON FUZZY CASH FLOWS
Students	Ms. Kanokwan Chitbunchongchak 55050003
	Ms. Pinyada Dissayarungkun 55050117
	Mr. Asada Sastrawaha 55050188
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Applied Mathematics
Academic Year	2015
Advisor	Assist.Prof.Dr. Wichai Witayakittilerd

ABSTRACT

The special problem has been improved the duration due to considered cash flows are not fixed rates, but we can predict and make them be in a range. That's why fuzzy logic is applied and re-defined as fuzzy duration. In this research, we reproduced decision making in project investment by using fuzzy cash flows to analyze to find a suitable.

Keywords: Fuzzy logic, Duration , Defuzzification

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาอย่างสูงจากท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ โดยให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยหาวิธีการแก้ไขปัญหาข้อบกพร่องต่างๆที่เกิดขึ้น ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านการศึกษาหรือปัญหาทางด้านการทำงาน รวมทั้งให้กำลังใจผู้จัดทำตั้งแต่เริ่มทำปัญหาพิเศษฉบับนี้จนสำเร็จ นับว่าเป็นพระคุณยิ่งสำหรับคณะผู้จัดทำ ขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ที่เป็นประธานกรรมการ และ ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ ที่เป็นกรรมการ สำหรับการทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้ ซึ่งอาจารย์ทั้ง 2 จะคอยแนะนำและให้แนวคิดใหม่ๆมาปรับปรุงและพัฒนาตลอดจนแก้ไขตรวจสอบปัญหาพิเศษให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ทางคณะผู้จัดทำจึงขอขอบคุณทั้ง 2 ท่านอีกครั้งที่ให้เกียรติมาเป็นประธานกรรมการและกรรมการในการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้ ขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาผู้ให้กำเนิด ซึ่งท่านได้วางรากฐานชีวิต พื้นฐานทางความคิดให้ผู้จัดทำมีความเชื่อมั่นในสิ่งที่ถูกต้องและเป็นกำลังใจแก่ผู้จัดทำเสมอมาอันเป็นแนวทางไปสู่ความสำเร็จของผู้จัดทำ

สุดท้ายนี้ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาความรู้และขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือด้วยดีมาโดยตลอด

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

การลงทุนมีหลายปัจจัยที่ทำให้นักลงทุนตัดสินใจเลือกโครงการในการลงทุน บางกรณีอาจจะพิจารณาเฉพาะผลตอบแทนจากการลงทุนของโครงการเพียงอย่างเดียวโดยไม่คำนึงถึงระยะเวลาลงทุน ในบางกรณีนักลงทุนอาจต้องการโครงการลงทุนที่มีผลตอบแทนดีและมีระยะเวลาลงทุนสั้นเพื่อเพิ่มความคล่องตัวหรือสภาพคล่อง (Liquidity) ทางการเงิน ที่จะนำเงินไปลงทุน แต่บางครั้งอาจต้องการโครงการลงทุนหรือทางเลือกการลงทุนที่มีระยะเวลาที่ยาวนานกว่า เพื่อหลีกเลี่ยงการนำเงินไปลงทุนต่อ ซึ่งผลตอบแทนที่ได้รับและความเสี่ยงจะมีต่ำกว่าโครงการลงทุนในระยะเวลาสั้น

ดูเรชัน (Duration) หรือระยะเวลาการลงทุนของโครงการ คิดค้นโดย Frederick Robertson Macaulay ในปี ค.ศ. 1938 โดยใช้เป็นวิธีกำหนดราคาผันผวนของพันธบัตร แต่ไม่เป็นที่นิยมใช้กันทั่วไปในขณะนั้น ปัจจุบันดูเรชันถูกใช้เป็นเครื่องมือชี้วัดตัวหนึ่งที่แสดงระยะเวลาเฉลี่ยที่จะได้ผลตอบแทนจากการลงทุน เป็นระยะเวลาการจ่ายคืนเงินเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยกระแสเงินในแต่ละงวด ซึ่งการตีความของดูเรชันอาจเปรียบเสมือนกับอายุคงเหลือของตราสารหนี้นั้นๆ แต่ดูเรชันได้คำนึงถึงจำนวนเงินที่ตราสารนั้นจ่ายให้แก่ผู้ลงทุนในแต่ละงวดด้วย ทำให้การพิจารณาความเสี่ยงเป็นไปอย่างสมเหตุสมผลมากยิ่งขึ้น ซึ่งเป็นข้อมูลประกอบการวิเคราะห์และตัดสินใจของนักลงทุนและได้มีการพัฒนาและการประยุกต์ใช้ดูเรชันเป็นเครื่องมือวิเคราะห์ในปัญหาทางการเงินอย่างต่อเนื่องเรื่อยมาซึ่งปรากฏในผลงานวิจัยหลายงานวิจัย ซึ่งขอกล่าวไว้พอสังเขป อาทิเช่น ในปี ค.ศ. 1970 Frederick Robertson Macaulay ได้พัฒนาดูเรชันขึ้น โดยมีการคำนวณดูเรชันโดยการเพิ่มผลของการคูณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดตามแต่ละเวลาที่จะได้รับและหารโดยราคารวมของพันธบัตร ในปี ค.ศ. 1971 Fisher และ Weil ได้พัฒนาวิธีดูเรชันของ Macaulay ขึ้น โดยคำนึงถึงโครงสร้างระยะยาวของอัตราดอกเบี้ย ซึ่งคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่เกี่ยวข้อง โดยใช้ระยะเวลาครบกำหนด (Maturity) ของอัตราผลตอบแทนพันธบัตรไม่มีคูปอง ในปี ค.ศ. 1985 Caks, John, Lane, William R., Greenleaf, Robert W., และ Reginald G. Joules ศึกษาและพัฒนารูปสูตรอย่างง่ายของดูเรชัน

ในปี ค.ศ. 1988 Chua, Jess H. ได้ศึกษาและพัฒนาสูตรรูปทั่วไปของดูเรชันสำหรับตราสารหนี้ ในปี ค.ศ. 1992 Ho, Thomas S.Y. ศึกษาอัตราคีย์ดูเรชันดัชนีวัดความสี่ยงในอัตราดอกเบี้ย ในปี ค.ศ. 2002 Corrado, Charles J. และ Bradford D. Jordan ได้เขียนบทความเรื่องสาระสำคัญของการลงทุน (Essentials of Investments)ตีพิมพ์ใน New York, NY, McGraw Hill-Irwin และในปี ค.ศ. 2010 Kathryn Stafford, Vibha Bhargava, Sharon M. Danes , George Haynes และ

Katherine E. Brewton ได้ศึกษาปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับอยู่รอดระยะยาวของธุรกิจครอบครัวด้วยการใช้การวิเคราะห์ระยะเวลา เป็นต้น

ตรรกศาสตร์ฟัซซี (Fuzzy logic) เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนของข้อมูล ใช้หลักเหตุผลที่คล้ายกับการเลียนแบบวิธีคิดที่ซับซ้อนของมนุษย์โดยค่าความจริงจะอยู่ในช่วงระหว่าง ค่าความจริงที่เป็นจริงกับค่าความจริงที่เป็นเท็จ ส่วนตรรกศาสตร์เดิมจะมีค่าความจริงที่เป็นจริงกับค่าความจริงที่เท็จเท่านั้น ความไม่แน่นอนในที่นี้หมายถึงความไม่ทราบขอบเขตของข้อมูลที่ชัดเจนซึ่งแตกต่างจากความไม่แน่นอนของการเกิดเหตุการณ์ในทฤษฎีความน่าจะเป็นในปัจจุบันได้มีการนำความรู้ด้านตรรกศาสตร์ฟัซซีมาประยุกต์ใช้ด้านการจัดการและการเงินมากขึ้นซึ่งปรากฏในงานเขียนและงานวิจัยต่างๆมากมาย อาทิเช่นในปี ค.ศ. 1999 ศึกษาปัญหาการงบประมาณเงินทุนด้วยกระแสเงินสดฟัซซี ในปี ค.ศ. 2000 Dorota Kuchta ศึกษาการงบประมาณเงินทุน (Capital Budgeting)ด้วยตรรกศาสตร์ฟัซซี ในปี ค.ศ. 2004 Cengiz Kahraman และ Cafer Erhan Bozdag ศึกษาการวิเคราะห์การลงทุนด้วยตรรกศาสตร์ฟัซซีโดยใช้การงบประมาณเงินทุนและเทคนิคกำหนดการเชิงไดนามิก ในปี ค.ศ. 2012 Mehdi Nosratpoura , Ali Nazerib และ Hadi Meftahic ศึกษาการวิเคราะห์มูลค่าปัจจุบันสุทธิแบบฟัซซี (Fuzzy net present value) เป็นต้น

จากการศึกษางานวิจัยที่กล่าวมาแล้วข้างต้น คณะผู้วิจัยจึงได้เกิดแนวความคิดในการปรับปรุงการวิเคราะห์ระยะเวลาโครงการลงทุนด้วยดัชนีดูเรชัน(duration) โดยประยุกต์กับตรรกศาสตร์ฟัซซีนิยามเป็นดัชนีที่ใช้ในการวิเคราะห์ระยะเวลาโครงการลงทุนใหม่ว่า “ดูเรชันฟัซซี (Fuzzy Duration)”

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1) เพื่อนิยาม fuzzy cash flows โดยใช้ความรู้เรื่องกระแสเงินสดและตรรกศาสตร์ฟัซซี
2) นำแนวความคิดเรื่องดูเรชันมาปรับปรุงโดยนำกระแสเงินสดฟัซซีมาประยุกต์ใช้
3) เพื่อช่วยในการตัดสินใจเลือกโครงการที่ดีที่สุดในการลงทุน
4) ศึกษาสมบัติของฟัซซีดูเรชัน

1.3 ขอบเขตของปัญหา

จำลองการตัดสินใจในการเลือกลงทุนในแต่ละโครงการ โดยใช้กระแสเงินสดฟัซซีเพื่อวิเคราะห์หาดูเรชันที่เหมาะสม

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สามารถใช้ในการวิเคราะห์โครงการที่ไม่สามารถใช้ดูเรชันแบบดั้งเดิม

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1) ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับ ดูเรชัน กระแสเงินสด ตรรกศาสตร์ฟัซซี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2) นิยาม ค่าเฉลี่ยเวลาถ่วงน้ำหนัก ดูเรชันแมคคอเลย์ ดูเรชันดัดแปลง กระแสเงินสดและตรรกศาสตร์ฟัซซี
3) วิเคราะห์การตัดสินใจในการเลือกโครงการในการลงทุนด้วยวิธี ค่าเฉลี่ยเวลาถ่วงน้ำหนัก ดูเรชันแมคคอเลย์ ดูเรชันดัดแปลง
4) วิเคราะห์ดูเรชันด้วยกระแสเงินสดฟัซซี
5) สรุปผลและจัดทำรายงาน

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงระยะเวลาการดำเนินงานในขั้นตอนต่างๆ

การดำเนินงาน	ระยะเวลา									
	2558					2559				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1) ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับดูเรชัน กระแสเงินสด ตรรกศาสตร์ฟัซซี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	↔	↔								
2) นิยาม ค่าเฉลี่ยเวลาถ่วงน้ำหนัก ดูเรชันมาคอเลย์ ดูเรชันดัดแปลง กระแสเงินสด และตรรกศาสตร์ฟัซซี			↔	↔						
3) วิเคราะห์การตัดสินใจในการเลือกโครงการในการลงทุนด้วยวิธี ค่าเฉลี่ยเวลาถ่วงน้ำหนัก ดูเรชันมาคอเลย์ ดูเรชันดัดแปลง					↔	↔				
4) วิเคราะห์ดูเรชันด้วยกระแสเงินสดฟัซซี							↔	↔		
5) เปรียบเทียบผลลัพธ์									↔	
6) สรุปผลและจัดทำรายงาน										↔

บทที่ 2

บทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัย

ในบทที่ 2 นี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัย ซึ่งได้แก่ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ฟัซซี การแปลงกลับค่าฟัซซีให้เป็นค่าดั้งเดิมหรือการดีฟัซซีฟิเคชันที่ใช้ในงานวิจัย และความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการวิเคราะห์โครงการลงทุนด้วยดัชนีดูเรชันซึ่งเป็นเครื่องมือที่ใช้วิเคราะห์ระยะเวลาของโครงการลงทุน

2.1 เซตฟัซซีและจำนวนฟัซซี

ตรรกศาสตร์ฟัซซีได้ถูกคิดค้นโดย L.A.Zadeh ในปี ค.ศ.1965 ตรรกศาสตร์ฟัซซีเป็นตรรกะที่อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่า “ทุกสิ่งบนโลกแห่งความเป็นจริงไม่ใช่มีเฉพาะสิ่งที่มีความแน่นอนเท่านั้น แต่มีหลายสิ่งหลายเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่าง ไม่เที่ยงและไม่แน่นอน อาจจะเป็นสิ่งที่ไม่คลุมเครือและไม่ชัดเจน” Zadeh ได้เสนอแนวคิดในการนิยามเซตฟัซซีจากฟังก์ชันความเป็นสมาชิก ในทำนองเดียวกับการกล่าวถึงเซตดั้งเดิมด้วยฟังก์ชันบ่งชี้เฉพาะโดยใส่เงื่อนไขเพิ่มเติม คือ ค่าความเป็นสมาชิกสามารถเป็นได้ตั้งแต่ 0 ถึง 1 แทนที่จะมีค่าเพียง 0 กับ 1 อย่างเซตดั้งเดิม

นิยามที่ 2.1 กำหนดให้ A เป็นเซตดั้งเดิมของเอกภพสัมพัทธ์ เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ บนเซตดั้งเดิม A นิยามโดย

$$\mathcal{A}=\{(x,\mu_A(x))\,|\,x\in A \text{ และ } \mu_A(x)\in[0,1]\}$$

โดย $\mu_A : A\to[0,1]$ เรียก μ_A ว่า <u>ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก</u> ของเซตฟัซซี $\mathcal{A}$

ถ้าจะกล่าวถึงเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ บนเซตดั้งเดิม A จะกล่าวโดยย่อว่า “ เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ ”

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $A=\{0,1,2,3,4\}$ จงหาเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ ภายใต้ฟังซ์ชันความเป็นสมาชิก μ_A เมื่อ $\mu_A(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2+1}$

จากนิยามของ ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A ค่าความเป็นสมาชิกเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ เขียนได้ดังตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4
$\mu_A(x)$	0.2	0.5	1	0.5	0.2

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าความเป็นสมาชิกของเซตฟัซซี $\mathcal{A}$

ดังนั้น $\mathcal{A}=\{(0,0.2),(1,0.5),(2,1),(3,0.5),(4,0.2)\}$ #

ต่อไปจะกล่าวถึงนิยามทั่วไปของจำนวนฟัซซี ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของเซตฟัซซี โดยจำนวนฟัซซีเป็นเซตฟัซซีซึ่งฟังก์ชันความเป็นสมาชิกนิยามบนเอกภพสัมพัทธ์ $\mathbb{R}$ โดยมีสมบัตินอร์มอล เซตฟัซซีนูน เซตระดับ α และ เซตโคลสเซอร์

นิยามที่ 2.2 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A

1) เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ เป็นนอร์มอล (Normalized) ก็ต่อเมื่อ $\exists x \in A$ ซึ่ง $\mu_A(x)=1$
2) เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ เป็นนอนนอร์มอล (Nonnormalized) ก็ต่อเมื่อ $\forall x \in A$ ซึ่ง $\mu_A(x)<1$

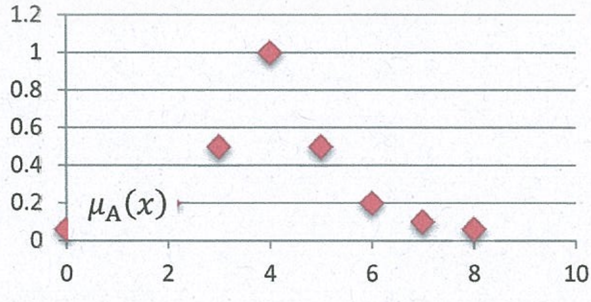
ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้ $A=\{0,1,...,8\}$ จงหาเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ ภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A พร้อมตรวจสอบว่า $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีนอร์มอลหรือไม่ เพราะเหตุใด เมื่อ $\mu_A(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2+1}$

จากนิยามของ ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A ค่าความเป็นสมาชิกเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ เขียนได้ดังตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_A(x)$	0.06	0.1	0.2	0.5	1	0.5	0.2	0.1	0.06

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าความเป็นสมาชิกของเซตฟัซซี $\mathcal{A}$

และกราฟของค่าความเป็นสมาชิกของเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ สามารถแสดงได้กราฟดังนี้



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงเซตฟัซซีนอร์มอล

จะได้ $\mathcal{A}=\{(0,0.06),(1,0.1),(2,0.2),(3,0.5),(4,1),(5,0.5),(6,0.2),(7,0.1),(8,0.06)\}$

เนื่องจาก มี x บางตัวที่อยู่ในเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 1
ดังนั้น เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีนอร์มอล #

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดเซตฟัซซี $\mathcal{A}=\{(0,0.2),(1,0.7),(2,0.9),(3,0.5),(4,0.2)\}$
จงตรวจสอบว่า $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีนอร์มอลหรือไม่เพราะเหตุใด

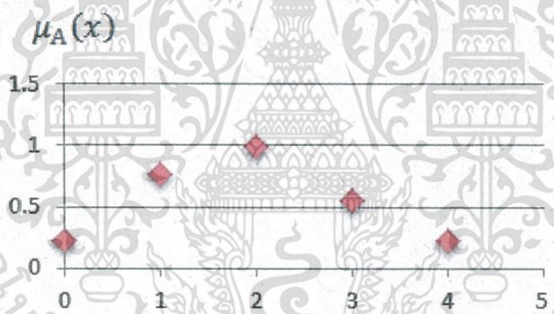
เนื่องจาก x ทุกตัวที่อยู่ในเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ มีค่าความเป็นสมาชิกไม่เท่ากับ 1
ดังนั้น เซตฟัซซี $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีนอนนอร์มอล #

หมายเหตุ สำหรับเซตฟัซซีนอนนอร์มอล $\mathcal{A}$ สามารถทำให้เป็นเซตฟัซซีนอร์มอลได้

โดยการนิยามฟังก์ชันสมาชิกใหม่เป็น $\overline{\mu}_{\mathcal{A}}(x)=\dfrac{\mu_{\mathcal{A}}(x)}{\max \mu_{\mathcal{A}}(x)}$

จากตัวอย่างที่ 2.3 สามารถทำให้เป็นเซตฟัซซีนอร์มอล ได้ดังนี้

$$\overline{\mathcal{A}}=\{(0,\frac{0.2}{0.9}),(1,\frac{0.7}{0.9}),(2,\frac{0.9}{0.9}),(3,\frac{0.5}{0.9}),(4,\frac{0.2}{0.9})\}$$



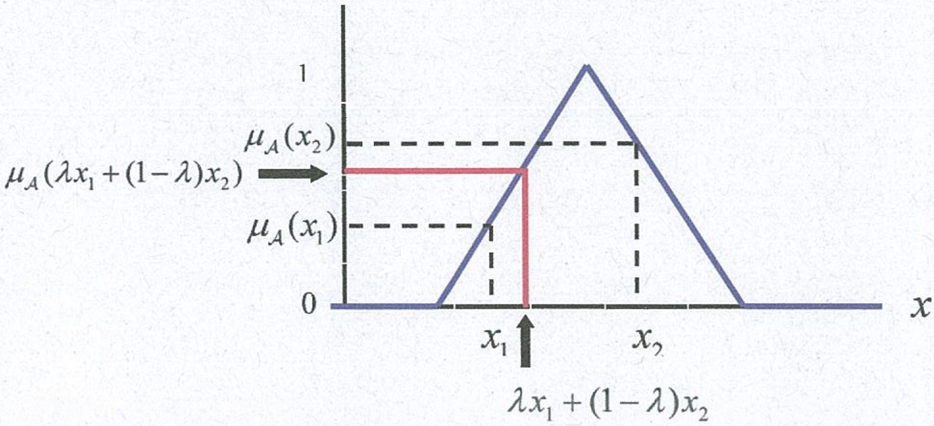
รูปที่ 2.2 กราฟแสดงเซตฟัซซีนอร์มอล

เนื่องจาก $(2,1)\in\overline{\mathcal{A}}$ ดังนั้น $\overline{\mathcal{A}}=\{(0,0.22),(1,0.77),(2,1),(3,0.55),(4,0.22)\}$ #

นิยามที่ 2.3 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\mathcal{A}}$ เรียก $\mathcal{A}$ ว่า *เซตฟัซซีนูน* (Convex fuzzy set) นิยามโดย

$$\mu_{\mathcal{A}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq \min\{\mu_{\mathcal{A}}(x_1),\mu_{\mathcal{A}}(x_2)\} \;;\forall x_1,x_2\in A \text{ และ } \lambda\in[0,1]$$

ความหมายของนิยามที่ 2.3 คือ ค่าของฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของทุกๆจุดที่อยู่ระหว่าง 2 จุดใดๆใน A จะต้องไม่ต่ำกว่าค่าของฟังก์ชันสมาชิกของ 2 จุดนั้นเสมอ ดังรูปที่ 2.6



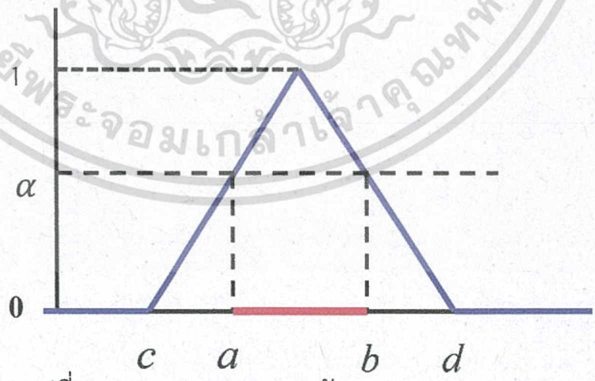
รูปที่ 2.3 กราฟแสดงเซตฟัซซีนูน

นิยามที่ 2.4 กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A เซตระดับ α (α-cut) ของเซตฟัซซี $\mathcal{A}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $[\mu_A]^\alpha$ ที่นิยามโดย

$$[\mu_A]^\alpha = \{x \in A \mid \mu_A(x) \ge \alpha\} \quad ;\alpha \in (0,1]$$

และ
$$[\mu_A]^0 = \overline{\{x \in A \mid \mu_A(x) > 0\}}$$

เมื่อสัญลักษณ์ $\overline{A}$ แทนโคลสเชอร์ (Closure) ของเซต A



รูปที่ 2.4 กราฟแสดงเซตระดับ α

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดเซตฟัซซี

$\mathcal{A} = \{(0,0.05),(1,1),(2,0.25),(3,0.2),(4,0.8),(5,0.9),(6,0.6),(7,0.2),(8,0.3)\}$

จงหาเซตระดับ $\alpha : [\mu_A]^0, [\mu_A]^{0.25}, [\mu_A]^{0.5}, [\mu_A]^{0.75}$ และ $[\mu_A]^1$

จากนิยามของเซตระดับ α จะได้

$$[\mu_A]^0 = \overline{\{x \in A \mid \mu_A(x) > 0\}} = \overline{\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$[\mu_A]^{0.25} = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq 0.25\} = \{1,2,4,5,6,8\}$$
$$[\mu_A]^{0.5} = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq 0.50\} = \{1,4,5,6\}$$
$$[\mu_A]^{0.75} = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq 0.75\} = \{1,4,5\}$$
$$[\mu_A]^1 = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq 1\} = \{1\}$$

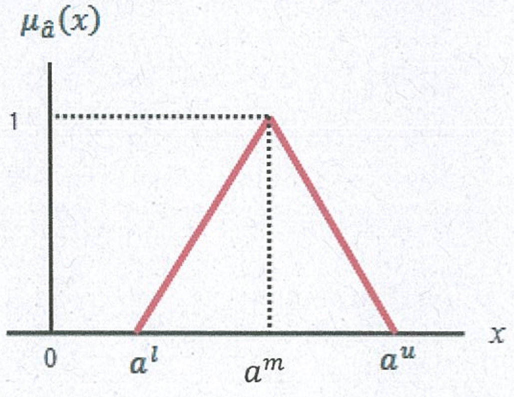
#

นิยามที่ 2.5 กำหนดให้ $\hat{a}$ เป็นเซตฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\hat{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ จะเรียก $\hat{a}$ ว่า <u>จำนวนฟัซซี</u> (Fuzzy number) ก็ต่อเมื่อ

1) $\hat{a}$ เป็นเซตฟัซซีนอร์มอล (Normalized)
2) $\hat{a}$ เป็นเซตฟัซซีนูน (Convex fuzzy set)
3) สำหรับทุกๆ $\alpha \in [0,1]$ จะมีช่วง $[a,b]$ ซึ่ง เซตระดับแอลฟา $[\mu_{\hat{a}}]^\alpha = [a,b]$

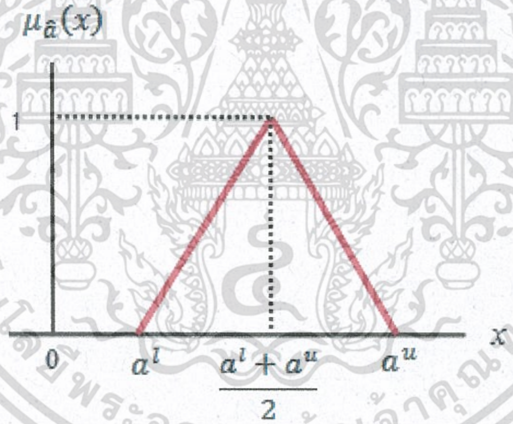
นิยามที่ 2.6 กำหนดให้ a^l, a^m, a^u เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a^l \leq a^m \leq a^u$ และ $\hat{a}$ เป็นจำนวนฟัซซีภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\hat{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ เรียก $\hat{a}$ ว่า *จำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม* (triangle fuzzy number) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $< a^l, a^m, a^u >$ ถ้าฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\hat{a}}$ นิยามโดย

$$\mu_{\hat{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a^l}{a^m-a^l} & ; a^l \leq x \leq a^m \\ \dfrac{x-a^u}{a^m-a^u} & ; a^m \leq x \leq a^u \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$



รูปที่ 2.5 แสดงจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม

นิยามที่ 2.7 กำหนดให้ $\hat{a} = < a^l, a^m, a^u >$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยม เรียก $\hat{a}$ ว่า *จำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว* (Isosceles triangle fuzzy number) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $< a^l, a^u >$ เมื่อ $a^m = \dfrac{a^l + a^u}{2}$

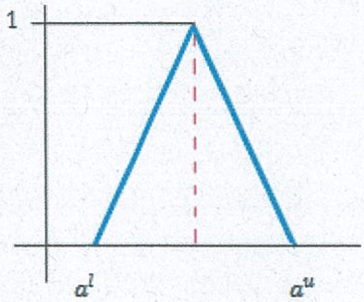


รูปที่ 2.6 แสดงจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

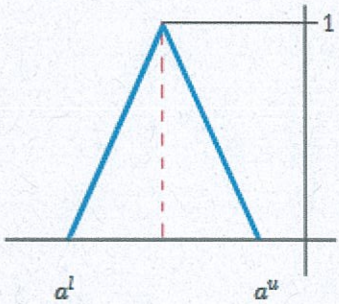
นิยามที่ 2.8 กำหนดให้ $\hat{a} = \langle a^l, a^u \rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะกล่าวว่า

1) $\hat{a}$ เป็นจำนวนฟัซซีบวก ถ้า $a^l > 0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a} > 0$

2) $\hat{a}$ เป็นจำนวนฟัซซีลบ ถ้า $a^u < 0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a} < 0$



รูปที่ 2.7 แสดงจำนวนฟัซซีบวก



รูปที่ 2.8 แสดงจำนวนฟัซซีลบ

2.2 ตัวดำเนินการเชิงเลขคณิตของจำนวนฟัซซี

ในหัวนี้จะกล่าวถึงเฉพาะตัวดำเนินการเชิงเลขคณิตของจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ใช้ในปัญหาพิเศษเท่านั้น ซึ่งได้แก่ตัวดำเนินการ ตามบทนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 2.9 กำหนดให้ $\hat{a} = < a^l, a^u >$ และ $\hat{b} = < b^l, b^u >$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $k \in \mathbb{R}$ นิยามตัวดำเนินการระหว่าง $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ ดังนี้

1) การคูณจำนวนฟัซซีด้วยสเกลาร์

ผลคูณจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ ด้วยสเกลาร์ เขียนแทนด้วย $k\hat{a}$ นิยามโดย

$$k\hat{a} = k < a^l, a^u > = < ka^l, ka^u > \quad \text{สำหรับ } k > 0$$

$$k\hat{a} = k < a^u, a^l > = < ka^u, ka^l > \quad \text{สำหรับ } k < 0$$

2) การบวกระหว่างจำนวนฟัซซี

ผลบวกระหว่างจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ เขียนแทนด้วย $\hat{a} + \hat{b}$ นิยามโดย

$$\hat{a} + \hat{b} = < a^l, a^u > + < b^l, b^u > = < a^l + b^l, a^u + b^u >$$

3) การลบระหว่างจำนวนฟัซซี

ผลลบระหว่างจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ เขียนแทนด้วย $\hat{a} - \hat{b}$ นิยามโดย

$$\hat{a} - \hat{b} = < a^l, a^u > + (-1) < b^l, b^u > = < a^l - b^u, a^u - b^l >$$

4) การคูณจำนวนฟัซซี

ผลคูณระหว่างจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ เขียนแทนด้วย $\hat{a} \times \hat{b}$ นิยามโดย

$$\hat{a} \times \hat{b} = < \min\{a^l b^l, a^l b^u, a^u b^l, a^u b^u\}, \max\{a^l b^l, a^l b^u, a^u b^l, a^u b^u\} >$$

5) อินเวิร์สเทียมของจำนวนฟัซซี

ให้ $\hat{a} = < a^l, a^u >$ โดยที่ $\hat{a} > 0$ หรือ $\hat{a} < 0$ อินเวิร์สเทียมของจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a}^{-1}$ นิยามโดย

$$\hat{a}^{-1} = < (a^u)^{-1}, (a^l)^{-1} >$$

6) การหารระหว่างจำนวนฟัซซี

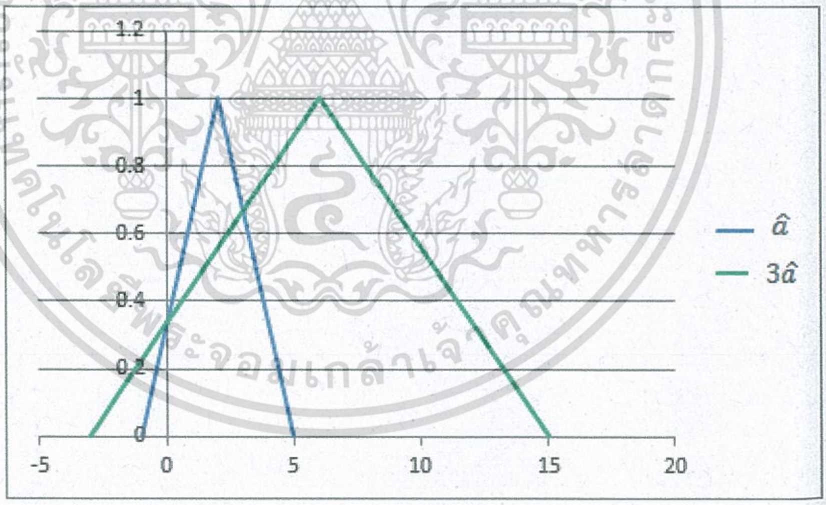
ผลหารระหว่างจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ เมื่อ $\hat{b}^{-1}$ สามารถหาค่าได้ เขียนแทนด้วย $\hat{a}/\hat{b}$ นิยามโดย

$$\begin{aligned}\hat{a}/\hat{b} &= \hat{a}\times\hat{b}^{-1}\\ &=< a^l, a^u > \times < (b^u)^{-1}, (b^l)^{-1} >\\ &=< \min\{a^l(b^u)^{-1}, a^l(b^l)^{-1}, a^u(b^u)^{-1}, a^u(b^l)^{-1}\},\\ &\quad \max\{a^l(b^u)^{-1}, a^l(b^l)^{-1}, a^u(b^u)^{-1}, a^u(b^l)^{-1}\} >\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ $\hat{a}=\langle -1,5\rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่วภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\hat{a}}$ และ $\hat{b}=\langle 3,5\rangle$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่วภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก $\mu_{\hat{b}}$ จงหา $3\hat{a}$, $-3\hat{b}$, $\hat{a}+\hat{b}$, $\hat{a}-2\hat{b}$, $\hat{a}\times\hat{b}$, $\hat{b}^{-1}$ และ $\hat{a}/\hat{b}$

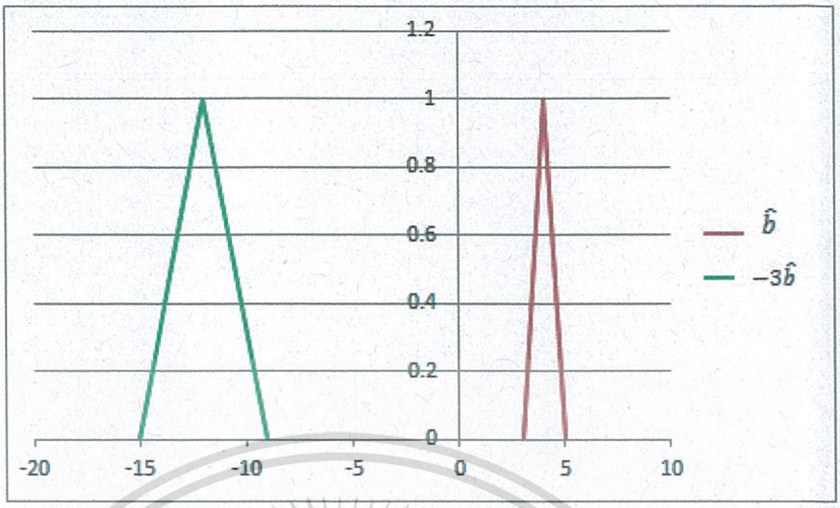
จากโจทย์ จำนวนฟัซซีผลลัพธ์ภายใต้ตัวดำเนินการซึ่งนิยามตามบทนิยามที่ 2.9 มีดังนี้

จำนวนฟัซซี $3\hat{a} = 3 < -1,5 > = < -3,15 >$



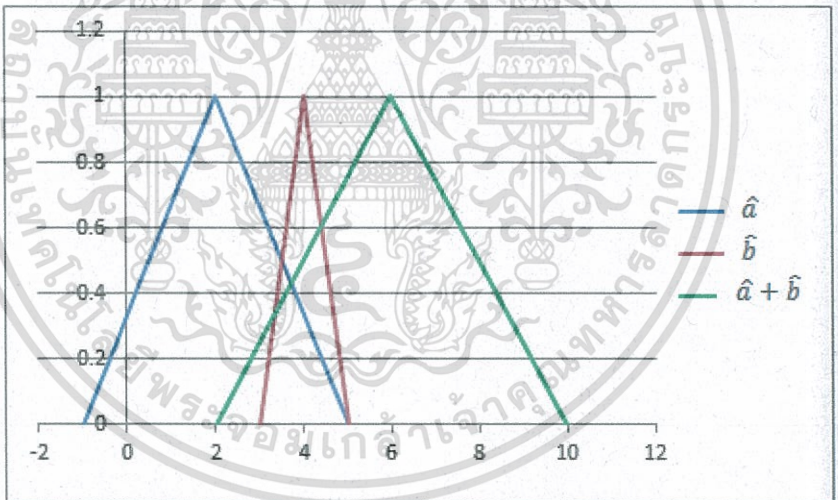
รูปที่ 2.9 แสดงจำนวนฟัซซี $\hat{a}$ และ $3\hat{a}$

จำนวนฟัซซี $-3\hat{b}=-3\langle 3,5\rangle=\langle -15,-9\rangle$



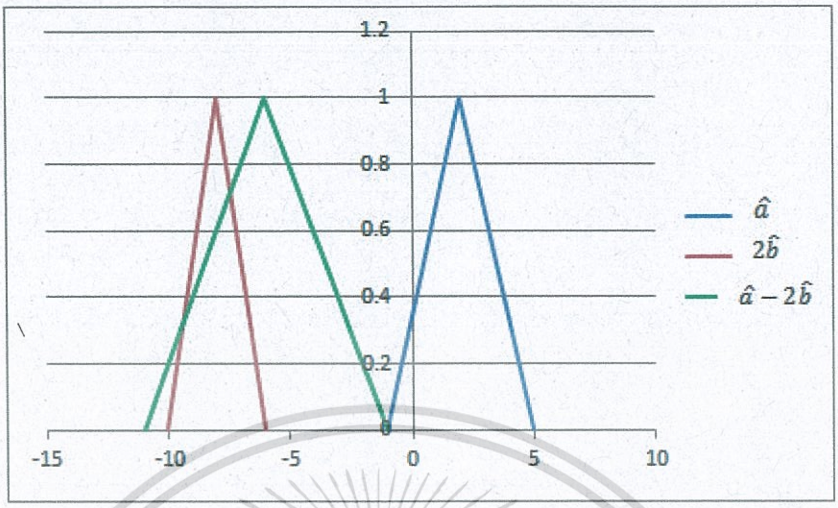
รูปที่ 2.10 แสดงจำนวนฟัซซี $\hat{b}$ และ $-3\hat{b}$

จำนวนฟัซซี $\hat{a}+\hat{b}=\langle -1,5\rangle+\langle 3,5\rangle=\langle 2,10\rangle$



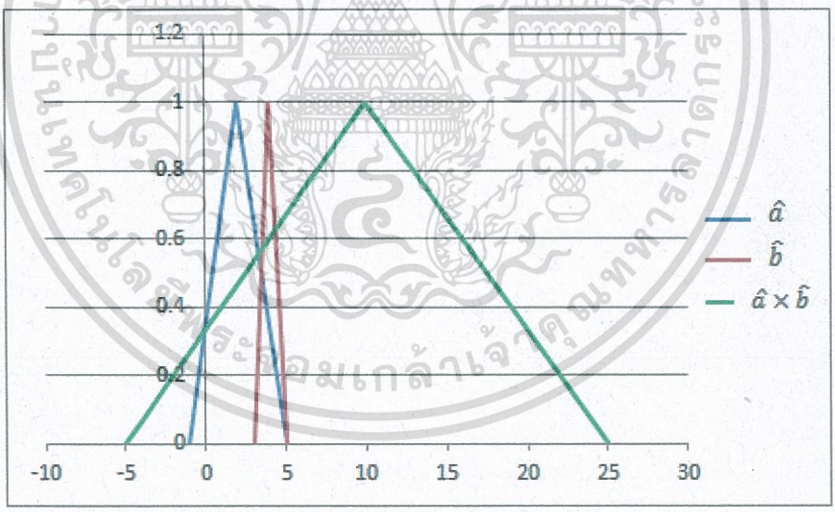
รูปที่ 2.11 แสดงจำนวนฟัซซี $\hat{a}$,$\hat{b}$ และ $\hat{a}+\hat{b}$

จำนวนฟัซซี $\hat{a}-2\hat{b}=\langle -1,5\rangle+(-2)\langle 3,5\rangle=\langle -11,-1\rangle$



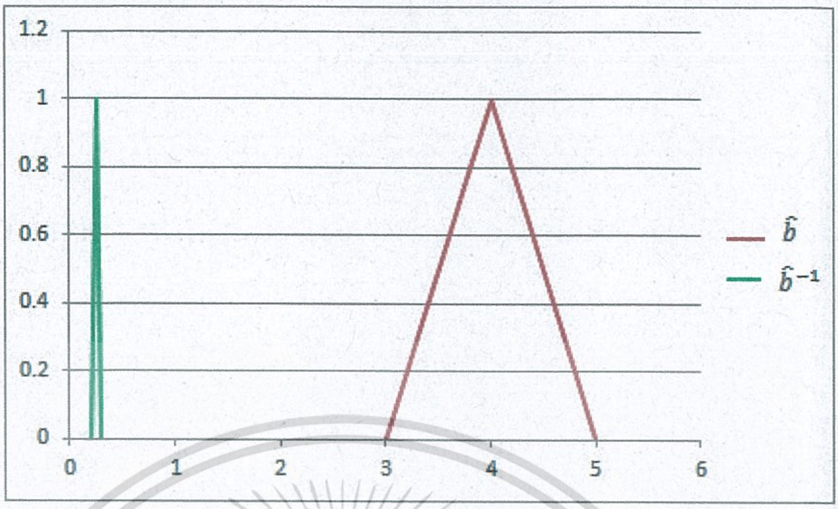
รูปที่ 2.12 แสดงจำนวนฟัซซี $\hat{a}$,$2\hat{b}$ และ $\hat{a}-2\hat{b}$

จำนวนฟัซซี $\hat{a}\times\hat{b}=\langle -1,5\rangle\times\langle 3,5\rangle=\langle -5,25\rangle$



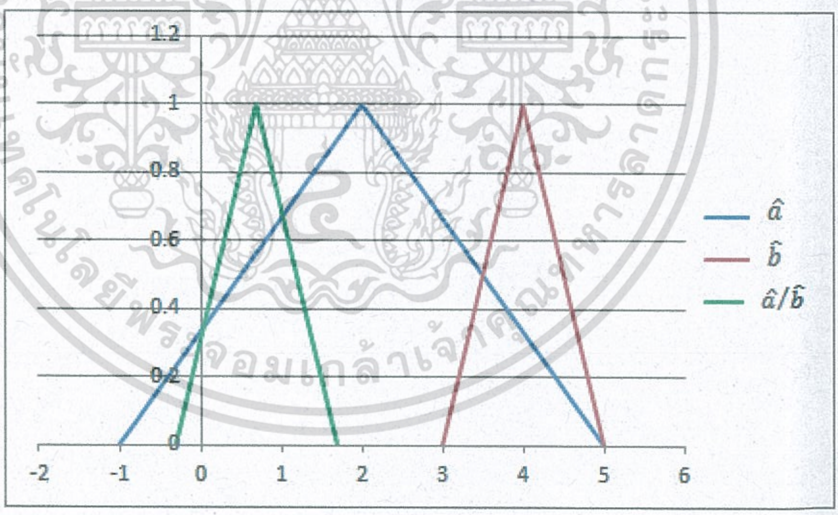
รูปที่ 2.13 แสดงจำนวนฟัซซี $\hat{a}$,$\hat{b}$ และ $\hat{a}\times\hat{b}$

จำนวนฟัซซี $\hat{b}^{-1} = \langle 1/5, 1/3 \rangle = \langle 0.2\ , 0.3 \rangle$



รูปที่ 2.14 แสดงจำนวนฟัซซี $\hat{b}$ และ $\hat{b}^{-1}$

จำนวนฟัซซี $\hat{a}/\hat{b} = \hat{a} \times \hat{b}^{-1} = \langle -1,5 \rangle \times \langle 0.2\ , 0.3 \rangle = \langle -0.3, 1.7 \rangle$



รูปที่ 2.15 แสดงจำนวนฟัซซี $\hat{a}$,$\hat{b}$ และ $\hat{a}/\hat{b}$

#

2.3 การดำเนินการดีฟัซซีฟิเคชัน

การดำเนินการดีฟัซซีฟิเคชัน (Defuzzification) เป็นการดำเนินการแปลงจำนวนฟัซซีให้เป็นจำนวนดั้งเดิมหรือจำนวนจริง โดยทั่วไปมีการนิยามตัวดำเนินการดีฟัซซีฟิเคชันหลากหลาย และสามารถเลือกใช้ได้ตามลักษณะและความเหมาะสมของจำนวนฟัซซีที่ต้องการแปลงให้เป็นจำนวนจริง การนิยามตัวดำเนินการดีฟัซซีฟิเคชันเหล่านั้นมีหลายวิธีได้แก่ 1) วิธีหลักความเป็นสมาชิกสูงสุด 2)วิธีหลักความเป็นสมาชิกสูงสุดตัวน้อยสุด 3)วิธีหลักความเป็นสมาชิกสูงสุดตัวมากสุด 4) วิธีค่าจุดกึ่งกลางจุดต่ำสุด-จุดสูงสุด 5) วิธีค่าเฉลี่ยของจุดกึ่งกลางจุดต่ำสุด-จุดสูงสุด 6) วิธีจุดศูนย์ถ่วง 7) วิธีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของจุดศูนย์ถ่วง เป็นต้น

สำหรับในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงตัวดำเนินการดีฟัซซีฟิเคชันที่นิยามด้วยวิธีหลักความเป็นสมาชิกสูงสุดซึ่งใช้ในงานวิจัยเท่านั้น ซึ่งต่อไปจะกล่าวโดยย่อว่า *ดีฟัซซีฟิเคชัน* หรือ $D_{\max}$ (ดี-แม็กซ์)

นิยามที่ 2.10 สำหรับจำนวนฟัซซี $\hat{a} = < a^l, a^u >$ ดีฟัซซีฟิเคชันของ $\hat{a}$ เขียนแทนด้วย $D_{\max}(\hat{a})$ นิยามโดย

$$D_{\max}(\hat{a}) = \frac{a^l + a^u}{2}$$

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ $\hat{a} = < a^l, a^u >$, $\hat{b} = < b^l, b^u >$ เป็นจำนวนฟัซซี และให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1) $D_{\max}(\alpha) = \alpha$
2) $D_{\max}(\alpha\hat{a}) = \alpha D_{\max}(\hat{a})$
3) $D_{\max}(\hat{a} \pm \hat{b}) = D_{\max}(\hat{a}) \pm D_{\max}(\hat{b})$
4) $D_{\max}(\hat{a} \cdot \hat{b}) = b^l D_{\max}(\hat{a}) + a^u D_{\max}(\hat{b}) - a^u b^l$

ถ้า $\hat{a}, \hat{b} > 0$ แล้ว

$$D_{\max} \hat{a} \cdot \hat{b} = \frac{a^l b^l + a^u b^u}{2} = b^l D_{\max}(\hat{a}) + a^u D_{\max}(\hat{b}) - a^u b^l$$

พิสูจน์ ได้โดยตรงตาม นิยามที่ 2.10 #

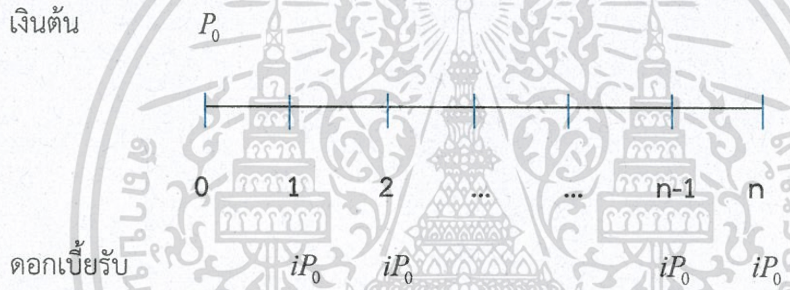
2.4 ความรู้เบื้องต้นทางการเงิน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นทางการเงินที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้แก่ ดอกเบี้ย ตราสารหนี้ ระยะเวลาเฉลี่ย ดูเรชัน และความไว

สำหรับในงานวิจัยนี้จะเรียกกิจกรรมการลงทุนใดๆที่นักลงทุนสนใจ ว่า *โครงการลงทุน* และเพื่อความสะดวกจะใช้หน่วยงวดเวลา เป็นปี

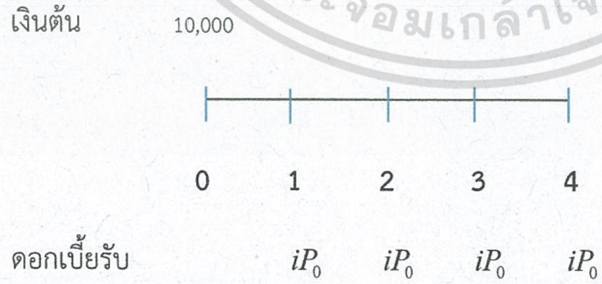
นิยามที่ 2.11 กำหนดให้ A เป็นโครงการลงทุนใดๆ ซึ่งลงทุนด้วยเงินทุนเริ่มต้น P_0 ในระยะเวลา n ปี S เป็นเงินสะสมปลายปีที่ n เรียก $i=\dfrac{S-P_0}{P_0 n}$ ว่า *อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว* และเรียก $S_t = P_0(1+it)$ ว่าเงินสะสมปลายปีที่ t

จากบทนิยามที่ 2.11 สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดของดอกเบี้ยเชิงเดียว ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 2.6 จงหามูลค่าสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 4 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว 10% ต่อปี

จากข้อมูลเขียนแผนภาพแสดงกระแสเงินสดของดอกเบี้ย ได้ดังนี้



จาก $S = P_0(1+in)$

$= 10,000[1+0.1(4)]$

$= 14,000$

ดังนั้น มูลค่าสะสมของอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว คือ $14,000$ บาท #

นิยามที่ 2.12 กำหนดให้ A เป็นโครงการลงทุนใดๆ ซึ่งลงทุนด้วยเงินทุนเริ่มต้น P_0 ในระยะเวลา n ปี S เป็นเงินสะสมปลายปีที่ n เรียก $i=\dfrac{\ln S-\ln P_0}{n\ln P_0}$ ว่า *อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว* และเรียก $S_t=P_0(1+i)^t$ ว่าเงินสะสมปลายปีที่ t

สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้

เงินต้น	P_0						
	0	1	2	...	...	n-1	n
ดอกเบี้ยรับ		i	$i(1+i)$			$i(1+i)^{n-2}$	$i(1+i)^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหามูลค่าสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 4 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์

เงินต้น	10,000				
	0	1	2	3	4
ดอกเบี้ยรับ		i	$i(1+i)$	$i(1+i)^2$	$i(1+i)^3$

จาก $S=P_0(1+i)^n$

$=10,000(1+0.1)^4$

$=14,641$

ดังนั้น มูลค่าสะสมของอัตราดอกเบี้ยทบต้น คือ $14,641$ บาท #

นิยามที่ 2.13 กำหนดให้ A เป็นโครงการลงทุน ในระยะเวลา t_n ปี R_{t_k} เป็นกระแสเงินสดรับจากโครงการ A เมื่อ $k=1,2,\ldots,n$ และ i เป็นอัตราผลตอบแทนจากโครงการ A มูลค่าปัจจุบันของการลงทุน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P นิยามโดย

$$P=\sum_{k=1}^{n} R_{t_k} v^{t_k}$$

จากนิยามที่ 2.13 สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดเงินสดรับจากโครงการ A ได้ดังนี้

กระแสเงินสดรับ

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $t_k = k$, $R_{t_k} = R$ จะได้

$$P = Ra_{\overline{n}|i} \qquad \text{เมื่อ } a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{1+v^n}{i}$$

ซึ่งสามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้

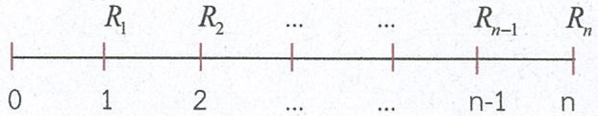
กระแสเงินสดรับ

นิยามที่ 2.14 กำหนดให้ A เป็นโครงการลงทุน ในระยะเวลา t_n ปี R_{t_k} เป็นกระแสเงินสดรับจากโครงการ A เมื่อ $k=1,2,\ldots,n$ และ i เป็นอัตราผลตอบแทนจากโครงการ A มูลค่าอนาคตของการลงทุน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S นิยามโดย

$$S=\sum_{k=1}^{n} R_{t_k} (1+i)^{t_n - t_k}$$

จากนิยามที่ 2.14 สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้

กระแสเงินสดรับ

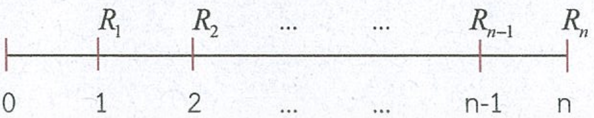


โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $t_k = k$, $R_{t_k} = R$ จะได้

$$S = RS_{\overline{n|}i} \qquad \text{เมื่อ } S_{\overline{n|}i} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ซึ่งสามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้

กระแสเงินสดรับ



ตัวอย่างที่ 2.8 โครงการลงทุนมีระยะเวลา 8 ปี ได้รับผลตอบแทนทุกปี ปีละ 1,500 บาท อัตราดอกเบี้ย 20% จงหามูลค่าปัจจุบัน และมูลค่าอนาคตของโครงการลงทุน

วิธีทำ หามูลค่าปัจจุบัน

$$\begin{aligned} P &= Ra_{\overline{n|}i} \\ &= 1,500(\frac{1-v^n}{i}) \\ &= 1,500(\frac{1-(1.2)^{-8}}{0.2}) \\ &= 5,755.74 \end{aligned}$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของโครงการลงทุนคือ 5,755.74 บาท #

หามูลค่าอนาคต

$$\begin{aligned} S &= RS_{\overline{n|}i} \\ &= 1,500[a_{\overline{n|}i}(1+i)^n] \\ &= 1,500[(\frac{1-v^n}{i})(1+i)^n] \\ &= 1,500[(\frac{1-(1.2)^{-8}}{0.2})(1.2)^8] \\ &= 24,748.63 \end{aligned}$$

ดังนั้น มูลค่าอนาคตของโครงการลงทุนคือ 24,748.63 บาท #

2.5 สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง

ในที่นี้สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง (Risk-free Assets) หมายถึง สินทรัพย์ที่ทราบมูลค่าหรือราคาแน่นอนที่ราคาต่างๆ นั่นคือ ถ้าเราลงทุนในสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง แล้วเราจะได้ผลตอบแทนในอัตราที่แน่นอน ตามระยะเวลาที่กำหนดไว้ ตัวอย่างของสินทรัพย์ เช่น เงินฝาก ตั๋วเงินฝาก ตราสารหนี้ พันธบัตรรัฐบาล ตั๋วเงินคลัง เป็นต้น สำหรับในงานวิจัยนี้เราจะใช้ตราสารหนี้เป็นตัวแทนของสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง

1) ตราสารหนี้

ตราสารหนี้ (Bonds) คือ ตราสารทางการเงินชนิดหนึ่งซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างผู้ออกตราสาร (ผู้กู้หรือลูกหนี้) กับผู้ซื้อตราสาร (ผู้ให้กู้หรือเจ้าหนี้) ซึ่งผู้ออกตราสารจะจ่ายผลตอบแทนในรูปของดอกเบี้ยเป็นงวดๆและเงินต้นให้แก่ผู้ซื้อตราสาร

1.1) องค์ประกอบของตราสารหนี้

1) ราคาที่ตราไว้หรือมูลค่าที่ตราไว้ (Face value) แทนด้วย F
2) ราคาไถ่ถอนหรือมูลค่าไถ่ถอน (Maturity value) แทนด้วย C
3) วันครบกำหนดไถ่ถอน หรืออายุของตราสาร แทนด้วย T
4) อัตราคูปอง แทนด้วย r
5) อัตราผลตอบแทน หรืออัตราดอกเบี้ย แทนด้วย i
6) ราคาซื้อ (ขาย) หรือราคาปัจจุบันของตราสาร แทนด้วย P

1.2) ประเภทของตราสารหนี้

แบ่งตามลักษณะของการจ่ายคูปองได้ 2 ประเภท คือ

1) ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (Zero-coupon bond) เป็นตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายคูปอง ซึ่งราคาที่ตราไว้อาจจะเท่ากับหรือไม่เท่ากับราคาไถ่ถอนก็ได้ ถ้าราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้นักลงทุนมักจะซื้อตราสารในราคาส่วนลด (ราคาที่ต่ำกว่าราคาที่ตราไว้)

2) ตราสารหนี้มีคูปอง (Coupon bond) เป็นตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองตามอัตราคูปองที่กำหนดไว้ ราคาที่ตราไว้อาจจะเท่ากับหรือไม่เท่ากับราคาไถ่ถอนก็ได้ แต่โดยทั่วไปมักจะกำหนดให้เท่ากัน

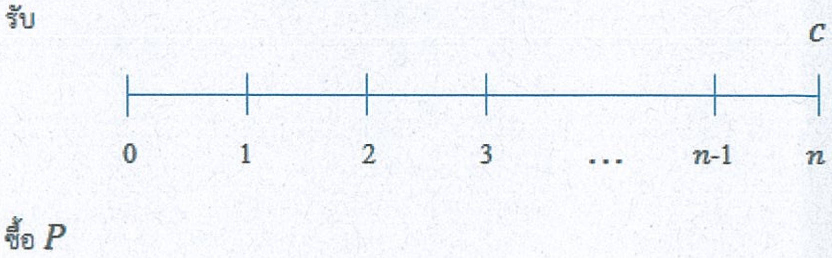
1.3) การประเมินมูลค่าตราสารหนี้

1) ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

พิจารณาตราสารหนี้ที่ไม่มีคูปอง อายุ n ปี มีมูลค่าที่ตราไว้ F มูลค่าไถ่ถอน C มีอัตราผลตอบแทน i ราคาซื้อ ณ เวลาเริ่มต้น P จะได้มูลค่าตราสารเท่ากับ

$$P = Cv^n$$

สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ได้ดังนี้



ถ้ามูลค่าไถ่ถอนเท่ากับมูลค่าที่ตราไว้ นั่นคือ $C = F$

ดังนั้น จะได้มูลค่าตราสารเท่ากับ

$$P = Fv^n$$

ตัวอย่างที่ 2.9 พันธบัตรฉบับหนึ่งไม่มีคูปอง อายุ 5 ปี มีมูลค่าที่ตราไว้ 50,000 บาท จงหามูลค่าพันธบัตร ฉบับนี้ ณ วันออกพันธบัตร เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี

จาก $P = Fv^n$

$$= 50{,}000(1 + 0.08)^{-5}$$

$$= 50{,}000(1.08)^{-5}$$

$$= 34{,}029$$

ดังนั้น มูลค่าพันธบัตรฉบับนี้ ณ วันออกพันธบัตร คือ 34,029 บาท #

2) ตราสารหนี้มีคูปอง

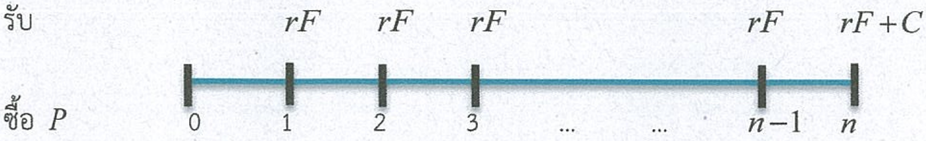
พิจารณาตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองอัตรา r อายุ n ปี ซึ่งมีราคาที่ตราไว้ F ราคาไถ่ถอน C มีอัตราผลตอบแทน i ราคาซื้อ ณ เวลาเริ่มต้น P จะได้มูลค่าตราสารเท่ากับ

$$P = \sum_{k=1}^{n} (r\,F)v^k + Cv^n$$

$$= rF \textstyle\sum_{k=1}^{n} v^k + Cv^n$$

$$= rF\, a_{\overline{n}|i} + Cv^n$$

สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ได้ดังนี้



ถ้ามูลค่าไถ่ถอนเท่ากับมูลค่าที่ตราไว้ นั่นคือ $C = F$
ดังนั้น จะได้มูลค่าตราสารเท่ากับ

$$P = rF\,a_{\overline{n}|i} + Fv^n$$

$$= F(r\,a_{\overline{n}|i} + v^n)$$

ตัวอย่างที่ 2.10 พันธบัตรฉบับหนึ่งมีมูลค่าที่ตราไว้ 1,000,000 บาท อายุ 10 ปี อัตราคูปอง 10% ต่อปี จงหามูลค่าพันธบัตรฉบับนี้ ณ วันออกพันธบัตร เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ย 7% ต่อปี

จาก $P = F(r\,a_{\overline{n}|i} + v^n)$

$$= 1{,}000{,}000\left[0.1 \times \left(\frac{1-1.07^{-8}}{0.07}\right) + 1.07^{-8}\right]$$

$$= 1{,}179{,}139$$

ดังนั้น มูลค่าพันธบัตรฉบับนี้ ณ วันออกพันธบัตร คือ 1,179,139 บาท #

ดูเรชันหรือระยะเวลาการลงทุน ได้ถูกคิดค้นโดย F.R. Macaulay ในปี ค.ศ.1938 โดยกำหนดราคาผันผวนของพันธบัตร มีความแม่นยำในการทำนายระยะเวลาการลงทุนน้อยมาก และไม่ตรงกับระยะเวลาจริง ทำให้แนวคิดเรื่องดูเรชันไม่เป็นที่นิยมใช้กันทั่วไป

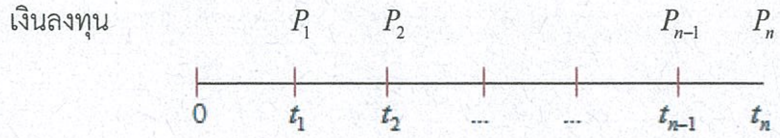
2.6 ระยะเวลาเฉลี่ย

ในปี ค.ศ.1938 Macaulay ได้นิยามระยะเวลาการลงทุน ด้วยวิธีโดยตรง และวิธีระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก (Time- Weighted Average:TWA)

นิยามที่ 2.15 ให้ A เป็นโครงการลงทุน ระยะเวลา n ปี และ $P_1, P_2, ..., P_n$ เป็นมูลค่าเงินลงทุน วิธีตรงของโครงการ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(\sum_{k=1}^{n} P_k)v^t$ นิยามโดย

$$(\sum_{k=1}^{n} P_k)v^t = \sum_{k=1}^{n} P_k v^{t_k}$$

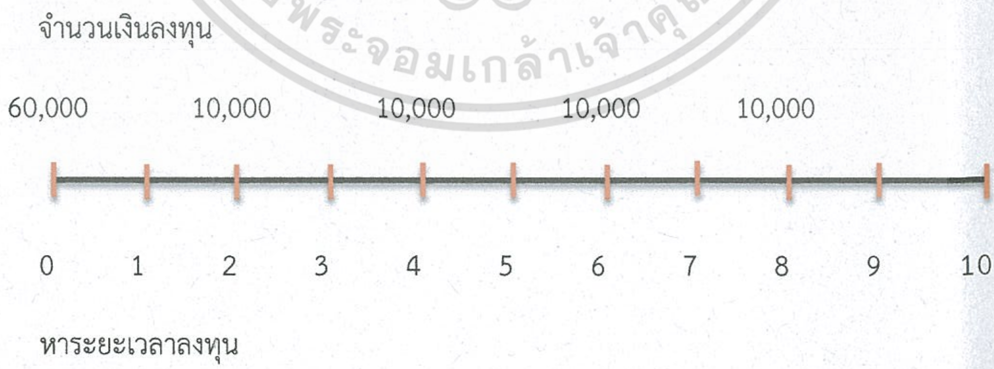
จากบทนิยามที่ 2.14 สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้



นิยามที่ 2.16 ให้ A เป็นโครงการลงทุน ระยะเวลา n ปี และ $P_1, P_2, ..., P_n$ เป็นมูลค่ามูลค่าการลงทุน ระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของโครงการ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{t}$ นิยามโดย

$$\overline{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}$$

ตัวอย่างที่ 2.11 การลงทุนโครงการหนึ่งมีระยะเวลาเฉลี่ยทั้งสิ้น 10 ปี โดยลงทุนทันทีต้นปีที่ 1 จำนวน 60,000 บาท หลังจากนั้นลงทุนทุกๆต้นปีที่ 3,5,7 และ 9 ปี ปีละ 10,000 บาท โดยได้อัตราผลตอบแทน 20% ต่อปี หากนักลงทุนต้องการลงทุนทันทีต้นปีที่ 1 ครั้งเดียว ด้วยจำนวนเงินลงทุนที่เท่ากับเงินลงทุนทั้งหมดในโครงการอีกโครงการหนึ่ง เขาจะต้องใช้เวลาลงทุนประมาณเท่าใดจึงจะได้ผลตอบแทนเท่ากัน และจงหาระยะเวลาการลงทุนด้วยวิธีระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของโครงการลงทุน



$$(\sum_{k=1}^{n} P_k)v^t = \sum_{k=1}^{n} P_k v^{t_k}$$

$$100,000(v)^t = 60,000 + 10,000v^2 + 10,000v^4 + 10,000v^6 + 10,000v^8$$

$$10(1.2)^{-t} = 6 + (1.2)^{-2} + (1.2)^{-4} + (1.2)^{-6} + (1.2)^{-8}$$

$$1.2^{-t} = 0.77441635$$

$$\ln t = -\frac{\ln 0.77441635}{\ln 1.2}$$

$$t = 1.4021$$

ดังนั้น ระยะเวลาลงทุนทั้งหมด คือ 1ปี 6 เดือน จึงจะได้มูลค่าเท่ากับผลตอบแทน #

หาระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก

$$\overline{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}$$

$$\overline{t} = \frac{60,000(0) + 10,000(2) + 10,000(4) + 10,000(6) + 10,000(8)}{60,000 + 10,000(4)}$$

$$\overline{t} = 2$$

ดังนั้น ระยะเวลาการลงทุนด้วยวิธีระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของโครงการลงทุน คือ 2 ปี #

นิยาม 2.17 ดูเรชันแมคคอเลย์ (Macaulay Duration) ให้ A เป็นโครงการลงทุน ระยะเวลา n ปี และ $R_1, R_2, ..., R_n$ เป็นมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดรับ ระยะเวลาเฉลี่ยของโครงการ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{d}$ นิยามโดย

$$\overline{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} R_k}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k}$$

หมายเหตุ: เราจะเรียนดูเรชันธรรมดาว่า"ดูเรชันแมคคอเลย์"เพื่อเป็นเกียรติแก่ Macaulay

นิยามที่ 2.18 ดูเรชันโมดิฟาย (Modified Duration) ให้ A เป็นโครงการในการลงทุน ระยะเวลา n ปี และ $R_1, R_2, ..., R_n$ เป็นมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดรับ ระยะเวลาเฉลี่ยของโครงการ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{v}$ นิยามโดย

$$\overline{v} = \frac{\overline{d}}{1+i}$$

ตัวอย่างที่ 2.12 โครงการหนึ่งมีระยะเวลาทั้งสิ้น 5 ปี โดยมีผลตอบแทนทุกปี ปีละ 2,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี จงหาดูเรชันและความไวของโครงการลงทุนนี้

หาระยะเวลาเฉลี่ย

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} R_k}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k}$$

$$= \frac{R_k \sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k}}{R_k \sum_{k=1}^{n} v^{t_k}}$$

$$= \frac{2000(v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + 5v^5)}{2000(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5}$$

$$= \frac{(1.1)^{-1} + 2(1.1)^{-2} + 3(1.1)^{-3} + 4(1.1)^{-4} + 5(1.1)^{-5}}{(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + (1.1)^{-3} + (1.1)^{-4} + (1.1)^{-5}}$$

$$= 3.759$$

ดังนั้น ดูเรชันของโครงการลงทุนนี้ คือ 3.759 ปี #

หาความไวของโครงการ

$$\bar{v} = \frac{\bar{d}}{1+i}$$

$$= \frac{3.759}{1+0.1}$$

$$= 3.418$$

ดังนั้น ความไวของตราสารหนี้ฉบับนี้คือ 3.418 ปี #

บทที่ 3

วิเคราะห์การเลือกโครงการลงทุน

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีหาระยะเวลาการลงทุน Fuzzy Cash Flow และ Fuzzy Duration เพื่อเป็นหนึ่งทางเลือกในการเลือกโครงการลงทุน

3.1 วิเคราะห์กระแสเงินสดที่ลงทุนอยู่ในรูปตรรกศาสตร์ฟัซซี

สมมติให้กระแสเงินสดอยู่ในรูป Triangular Fuzzy

$\hat{R}_k = < R_k^l, R_k^u >$ เป็นกระแสเงินสดสุทธิ

$\hat{O}_k = < O_k^l, O_k^u >$ เป็นกระแสเงินสดออก

$\hat{C}_k = < C_k^l, C_k^u >$ เป็นกระแสเงินสดรับ

$$\hat{R}_k = < R_k^l, R_k^u > = \hat{C}_k - \hat{O}_k = < C_k^l - O_k^u, C_k^u - O_k^l >$$

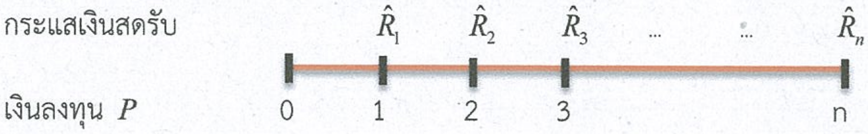
นิยามที่ 3.1 ให้ A เป็นโครงการลงทุน ระยะเวลา n ปี และ $\hat{R}_1, \hat{R}_2, ..., \hat{R}_n$ เป็นกระแสเงินสดรับภายใต้อัตราดอกเบี้ยคาดหวัง i เมื่อ $i \in \mathbb{R}$ มูลค่าเงินลงทุนของโครงการ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P นิยามโดย

$$P = \hat{R}_1 v + \hat{R}_2 v^2 + \hat{R}_3 v^3 + ... + \hat{R}_n v^n \qquad (1)$$

จาก (1) แทนค่า R_k ด้วย $< R_k^l, R_k^u >$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P &= < R_1^l v, R_1^u v > + < R_2^l v^2, R_2^u v^2 > + ... + < R_n^l v^n, R_n^u v^n > \\ &= < R_1^l v + R_2^l v^2 + ... R_n^l v^n, R_1^u v + R_2^u v^2 + ... R_n^u v^n > \\ &= < \sum_{k=1}^{n} R_k^l v^k, \sum_{k=1}^{n} R_k^u v^k > \qquad (2) \end{aligned}$$

สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้



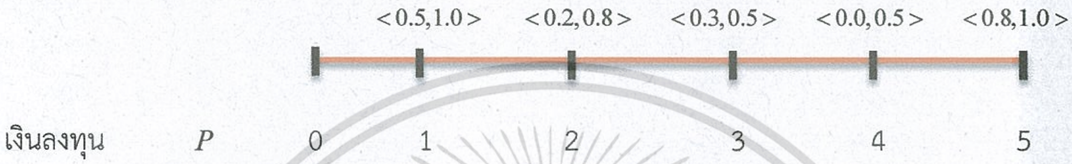
ตัวอย่างที่ 3.2 โครงการลงทุนอายุ 5ปี โครงการหนึ่งคาดว่าจะให้ผลตอบแทนที่ปลายงวดที่ k ดังนี้

ปีที่	0	1	2	3	4	5
ผลตอบแทน	-	$<0.5,1.0>$	$<0.2,0.8>$	$<0.3,0.5>$	$<0.0,0.5>$	$<0.8,1.0>$

มูลค่าการลงทุน(ล้านบาท)จงหาช่วงของเงินลงทุนที่ได้รับผลตอบแทนดังกล่าว ภายใต้ดอกเบี้ยคาดหวัง 10%

สามารถเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้

กระแสเงินสดรับ



จาก (2) $P =< \sum_{k=1}^{n} R_k^l v^k , \sum_{k=1}^{n} R_k^u v^k >$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P &=< R_1 v + R_2 v^2 + R_3 v^3 + R_4 v^4 + R_5 v^5 > \\
&=< 0.5,1.0 > (1.1)^{-1} + < 0.2, 0.8 > (1.1)^{-2} + < 0.3, 0.5 > (1.1)^{-3} + \\
&\quad < 0.0, 0.5 > (1.1)^{-4} + < 0.8,1.0 > (1.1)^{-5} \\
&=< 0.5(1.1)^{-1} + 0.2(1.1)^{-2} + (0.3)(1.1)^{-3} + 0.0(1.1)^{-4} + 0.8(1.1)^{-5}, \\
&\quad 1.0(1.1)^{-1} + 0.8(1.1)^{-2} + 0.5(1.1)^{-3} + 0.5(1.1)^{-4} + 1(1.1)^{-5} > \\
&=< 1.35, 2.91 >
\end{aligned}
$$

ดังนั้น มูลค่าเงินลงทุนของโครงการนี้อยู่ในช่วง <1.35,2.91> ล้านบาท #

หมายเหตุ: การพิจารณาคำตอบที่อยู่ในรูปเซตฟัซซี สามารถเรียกเป็นช่วงคำตอบได้

3.2 ค่าน้ำหนักฟัซซี

นิยามที่ 3.3 ตัวดำเนินการ Δ ระหว่างจำนวนฟัซซี $\hat{a} =< a^l , a^u >$ และจำนวนจริง α จะกล่าวได้ว่า

$$\hat{a}\,\Delta\alpha =< \min\{a^l, \alpha\}, \min\{a^u, \alpha\} >$$

นิยามที่ 3.4 ให้ $\hat{w}_k = < w_k^l, w_k^u >$ โดยที่ $0 \le w_k^l \le w_k^u \le 1 \;\; ; k = 1, 2, ..., n$ เป็นจำนวนฟัซซีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะเรียก $\hat{w}_k$ ว่าเป็นค่าน้ำหนักฟัซซี ถ้ามี $w_k \in [w_k^l, w_k^u]$

ที่ทำให้ $\sum_{k=1}^{n} \hat{w}_k = 1$

ถ้า $\hat{w}_k = < w_k^l, w_k^u > \Delta 1$ จะมี $w_k \in \left[w_k^l, w_k^u \right]$ ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n} \hat{w}_k = 1$

ตัวอย่างที่ 3.5

ถ้าให้ $\hat{R}_k \geq 0$ จะได้ว่า $\hat{w}_k = \dfrac{\hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n} \hat{R}_k} = \dfrac{< R_k^l, R_k^u >}{\sum_{k=1}^{n} < R_k^l, R_k^u >} = \dfrac{< R_k^l, R_k^u >}{< \sum_{k=1}^{n} R_k^l, \sum_{k=1}^{n} R_k^u >}$

เพราะว่า $\hat{w}_k = \left\langle \min\left\{ \dfrac{R_k^l}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l}, \dfrac{R_k^l}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u}, \dfrac{R_k^u}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l}, \dfrac{R_k^u}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u} \right\}, \max\left\{ \dfrac{R_k^l}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l}, \dfrac{R_k^l}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u}, \dfrac{R_k^u}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l}, \dfrac{R_k^u}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u} \right\} \right\rangle$

$$\hat{w}_k = < \frac{R_k^l}{\sum R_k^u}, \frac{R_k^u}{\sum R_k^l} >$$

$$\frac{R_k^l}{\sum R_k^u} < \frac{R_k^l}{\sum R_k^l} < \frac{R_k^u}{\sum R_k^l}$$

ดังนั้นจะได้ว่ามี $w_k = \dfrac{R_k^l}{\sum R_k^l}$ ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n} \hat{w}_k = 1$

นิยามที่ 3.6 ให้ $X : x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นข้อมูลค่าดั้งเดิม และ $\hat{w}_k = < w_k^l, w_k^u >$ เป็นค่าน้ำหนักฟัซซี โดยที่ $\sum_{k=1}^{n} \hat{w}_k = 1$ ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของ X คือ

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{w}_k X$$

นิยามที่ 3.7 ให้ $\hat{R}_1, \hat{R}_2, ..., \hat{R}_n$ เป็นเงินสดรับฟัซซีของโครงการลงทุน ระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยเงินสดรับฟัซซีของการลงทุน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{t}$ นิยามโดย

$$\hat{t} = (\sum_{k=1}^{n} \hat{w}_k t_k) \Delta n$$

$$\text{เมื่อ } \hat{w}_k = \frac{\hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n} \hat{R}_k} \Delta 1$$

$$\frac{\hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n}\hat{R}_k} = <\min\{R_k^l(\sum_{k=1}^{n}R_k^u)^{-1},\ R_k^l(\sum_{k=1}^{n}R_k^l)^{-1},\ R_k^u(\sum_{k=1}^{n}R_k^u)^{-1},\ R_k^u(\sum_{k=1}^{n}R_k^l)^{-1}\},$$

$$\max\{R_k^l(\sum_{k=1}^{n}R_k^u)^{-1},\ R_k^l(\sum_{k=1}^{n}R_k^l)^{-1},\ R_k^u(\sum_{k=1}^{n}R_k^u)^{-1},\ R_k^u(\sum_{k=1}^{n}R_k^l)^{-1}\}>$$

ตัวอย่างที่ 3.8 โครงการหนึ่งมีระยะเวลาทั้งสิ้น 5 ปี ที่คาดว่าจะให้ผลตอบแทนปลายงวดที่ k ดังนี้

ปีที่	0	1	2	3	4	5
ผลตอบแทน	<0.3,1>	-	<0.5,1.2>	-	<0.5,1.2>	<0.5,1.2>

(ล้านบาท) หากนักลงทุนต้องการลงทุนทันทีต้นปีที่ 1 ครั้งเดียว ด้วยจำนวนเงินลงทุนทั้งหมด ในอีกโครงการหนึ่ง จงหาระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักฟัซซีของการลงทุน

กระแสเงินสดรับ

$$\hat{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n}\hat{R}_k}\Delta n$$

$$= \frac{<0.3,1.0>(0)+<0.5,1.2>(2)+<0.5,1.2>(4)+<0.5,1.2>(5)}{<0.3,0.4>+<0.5,1.2>(3)}$$

$$= \left(\left\{\frac{0.3,1.0}{1.8,4.0}\right\}\Delta 1\right)(0)+\left(\left\{\frac{0.5,1.2}{1.8,4.0}\right\}\Delta 1\right)(2)+$$
$$\left(\left\{\frac{0.5,1.2}{1.8,4.0}\right\}\Delta 1\right)(4)+\left(\left\{\frac{0.5,1.2}{1.8,4.0}\right\}\Delta 1\right)(5)$$

$$= (<\min\{0.17,0.075,0.56,0.25\},\max\{0.17,0.075,0.56,0.25\}>\Delta 1(0)+$$
$$<\min\{0.28,0.13,0.67,0.3\},\max\{0.28,0.13,0.67,0.3\}>\Delta 1(2)+$$
$$<\min\{0.28,0.13,0.67,0.3\},\max\{0.28,0.13,0.67,0.3\}>\Delta 1(4)+$$
$$<\min\{0.28,0.13,0.67,0.3\},\max\{0.28,0.13,0.67,0.3\}>\Delta 1(5)$$

$$= (<0.075,0.17>(0))+(<0.13,0.67>(2))+$$
$$(<0.13,0.67>(4))+(<0.13,0.67>(5))$$

$$=<0,0>+<0.26,1.34>+<0.52,2.68>+<0.65,3.35>$$
$$=<1.43,7.37>\Delta 5$$
$$=<1.43,5.0>$$

ดังนั้นระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักฟัซซีของโครงการนี้คือ <1.43,5.0> ปี #

นิยามที่ 3.9 ให้ $\hat{R}_1,\hat{R}_2,...,\hat{R}_n$ เป็นกระแสเงินสดรับฟัซซีของการลงทุน และ i เป็นอัตราผลตอบแทนคาดหวัง ดูเรชันฟัซซีของการลงทุน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{d}$ นิยามโดย

$$\hat{d}=(\sum_{k=1}^{n} t_k \hat{w}_k)\Delta n$$

เมื่อ $$\hat{w}_k=\left(\frac{v^{t_k}\hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}\hat{R}_k}\right)\Delta 1$$

$$\frac{v^{t_k}\hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}\hat{R}_k}=<\min\{R_k^l v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^l)^{-1}, R_k^l v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^u)^{-1},$$
$$R_k^u v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^l)^{-1}, R_k^u v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^u)^{-1}\},$$
$$\max\{R_k^l v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^l)^{-1}, R_k^l v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^u)^{-1},$$
$$R_k^u v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^l)^{-1}, R_k^u v^{t_k}(\sum_{k=1}^{n} v^{t_k}R_k^u)^{-1}\}>$$

3.3 นิยามดูเรชันภายใต้ตัวดำเนินการดีฟัซซีฟิเคชัน

ในหัวข้อนี้จะนิยามดูเรชันภายใต้ตัวแปรดีฟัซซีฟิเคชันค่าความเป็นสมาชิกสูงสุดซึ่งจะเรียกตัวดำเนินการแทนด้วย $D_{\max}$ และตัวแปรดีฟัซซีฟิเคชัน $D_{\max}$ จะแปลงค่าฟัซซีให้เป็นค่าดั้งเดิม โดยใช้หลักความเป็นสมาชิกสูงสุด มีนิยามดังนี้

นิยามที่ 3.10 ให้ $\hat{R}_1,\hat{R}_2,...,\hat{R}_n$ เป็นเงินสดลงทุนฟัซซีของโครงการลงทุน ระยะเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยเงินสดลงทุนดีฟัซซีฟิเคชันของการลงทุน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $t^{D_{\max}}$ นิยามโดย

$$t^{D_{\max}}=\sum_{k=1}^{n} w_k^{D_{\max}} t_k$$

$$\text{เมื่อ } w_k^{D_{\max}} = \frac{D_{\max}(\hat{R}_k)}{\sum_{k=1}^{n} D_{\max}(\hat{R}_k)}$$

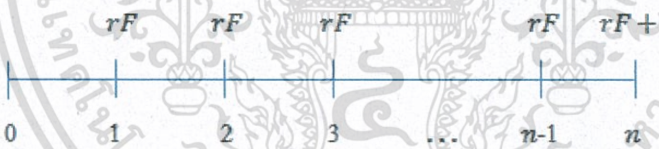
นิยามที่ 3.11 ให้ $\hat{R}_1, \hat{R}_2, ..., \hat{R}_n$ เป็นกระแสเงินสดรับฟัซซีของการลงทุน และ i เป็นอัตราผลตอบแทนคาดหวัง ดูเรชันดีฟัซซีฟิเคชันของการลงทุน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $d^{D_{\max}}$ นิยามโดย

$$d^{D_{\max}} = \sum_{k=1}^{n} w_k^{D_{\max}} t_k$$

$$\text{เมื่อ } w_k^{D_{\max}} = \frac{v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)}$$

3.4 ดูเรชันของตราสารหนี้

สำหรับตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองอัตรา r อายุ n ปี ซึ่งมีราคาที่ตราไว้ F ราคาไถ่ถอน C ให้ B เป็นตราสารหนี้ ซึ่ง $F = C$ มีอัตราผลตอบแทน i จะได้ดูเรชัน d_F ของตราสารหนี้ B



เมื่อ

$$d_F = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} < R_k^l, R_k^u >}{\sum_{k=1}^{n} < R_k^l, R_k^u > v^{t_k}} \quad ; < R_k^l, R_k^u > = < rF, rF >$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} k v^{t_k} < rF, rF > + < F, F > n v^n}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} < rF, rF > + < F, F > v^n}$$

$$= \frac{< rF, rF > \sum_{k=1}^{n} k v^{t_k} + n < F, F > v^n}{< rF, rF > \sum_{k=1}^{n} v^{t_k} + < F, F > v^n}$$

$$= \frac{< rF,rF > \left(\uparrow a_{n|i} \right) + < F,F > v^n}{< rF,rF > \left(a_{n|i} \right) + < F,F > v^n}$$

$$= \frac{rF \uparrow a_{n|i} + Fv^n}{rF \, a_{n|i} + Fv^n}$$

$$= \bar{d}$$

ตัวอย่างที่ 3.12

พันธบัตรฉบับหนึ่งมีมูลค่าที่ตราไว้ 10,000,000บาท อายุ 5 ปี อัตราคูปอง 10% ต่อปี จงหาดูเรชันดั้งเดิม ดูเรชันฟัชชีและ ดูเรชันดีฟัซซีฟิเคชัน

หาโดยวิธีดูเรชันแบบดั้งเดิม

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} R_k}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k}$$

$$= \frac{R_k \sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k}}{R_k \sum_{k=1}^{n} v^{t_k}}$$

$$= \frac{1,000,000(v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + 5v^5)}{1,000,000(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5}$$

$$= \frac{(1.03)^{-1} + 2(1.03)^{-2} + 3(1.03)^{-3} + 4(1.03)^{-4} + 5(1.03)^{-5}}{(1.03)^{-1} + (1.03)^{-2} + (1.03)^{-3} + (1.03)^{-4} + (1.03)^{-5}}$$

$$= 2.94$$

ดังนั้น ดูเรชันของโครงการนี้คือ 2.94 ปี #

หาโดยวิธีดูเรชันฟัซซี

$$\hat{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} < R_k^l, R_k^u >}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} < R_k^l, R_k^u >}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} < rF, rF >}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} < rF, rF >}$$

$$= \frac{< rF, rF > \sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k}}{< rF, rF > \sum_{k=1}^{n} v^{t_k}}$$

$$= \frac{1,000,000(v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + 5v^5)}{1,000,000(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5}$$

$$= \frac{(1.03)^{-1} + 2(1.03)^{-2} + 3(1.03)^{-3} + 4(1.03)^{-4} + 5(1.03)^{-5}}{(1.03)^{-1} + (1.03)^{-2} + (1.03)^{-3} + (1.03)^{-4} + (1.03)^{-5}}$$

$$= 2.94$$

ดังนั้น ดูเรชันฟัซซีของโครงการนี้คือ 2.94 ปี #

หาโดยวิธีดูเรชันดีฟัซซีฟิเคชัน

$$d^{D_{\max}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)}$$

$$= \frac{D_{\max}(\hat{R}_k) \sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k}}{D_{\max}(\hat{R}_k) \sum_{k=1}^{n} v^{t_k}}$$

$$= \frac{1,000,000(v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + 5v^5)}{1,000,000(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5}$$

$$= \frac{(1.03)^{-1} + 2(1.03)^{-2} + 3(1.03)^{-3} + 4(1.03)^{-4} + 5(1.03)^{-5}}{(1.03)^{-1} + (1.03)^{-2} + (1.03)^{-3} + (1.03)^{-4} + (1.03)^{-5}}$$

$$= 2.94$$

ดังนั้น ดูเรชันดีฟัซซีฟิเคชันของโครงการนี้คือ 2.94 ปี #

สามารถสรุปได้ว่า เมื่อหาดูเรชันแต่ละแบบของพันธบัตรจะได้คำตอบที่เท่ากัน นั่นคือ $\bar{d} = \hat{d} = d^{D_{\max}}$

บทที่ 4

Defuzzification Methods

ในงานวิจัยนี้เราได้สร้างเครื่องมือสำหรับวิเคราะห์โครงการลงทุนที่ไม่ทราบผลตอบแทนที่แน่นอน แต่สามารถประมาณค่าให้อยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งได้ ซึ่งไม่สามารถใช้ดูเรชันแบบดั้งเดิมเพื่อวิเคราะห์โครงการลงทุนได้ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงใช้ความรู้เรื่องตรรกะศาสตร์ฟัซซีมาเป็นตัวช่วยในการวิเคราะห์โครงการลงทุน ซึ่งพิจารณาได้ 2 แบบ คือ

4.1 Defuzzification First Method

จะมีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

$d_F^{D_{\max}}$

จากข้อมูลที่ได้รับเป็นกระแสเงินสดที่ไม่รู้จำนวนเงินที่แน่นอนแต่สามารถคาดการณ์ให้อยู่ในช่วงของกระแสเงินสดได้

ขั้นตอนที่ 1 แปลงข้อมูลที่อยู่ในช่วงของกระแสเงินสดให้เป็นค่าจริง โดยใช้ตัวดำเนินการดีฟัซซิฟิเคชันค่าความเป็นสมาชิกสูงสุด

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาดูเรชัน โดยใช้วิธีดูเรชันฟัซซี หรือใช้วิธีการหาดูเรชันแบบดั้งเดิม

(หมายเหตุ : ค่าที่ได้จากการคำนวณฟัซซีดูเรชันและดูเรชันแบบดั้งเดิมจะได้ค่าที่ เท่ากัน)

$< R_k^l , R_k^u >$ ⟶ Defuzzification ⟶ Duration fuzzy ⟶ ค่าดั้งเดิม

หมายเหตุ จะแสดงว่า ดูเรชันดีฟัซซีฟิเคชัน $d^{D_{\max}}$ เป็นฟังก์ชันลดของในตัวแปร i เมื่อ โดยการพิจารณาอนุพันธ์ของ $d^{D_{\max}}$ เทียบกับ i ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$
\frac{dd^{D\max}}{di} = d^{D\max} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)}
$$

$$
\frac{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]\left[-\sum_{k=1}^{n} t_k^2 v^{t_k+1} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]}{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]^2} -
$$

$$
= \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]\left[-\sum_{k=1}^{n} v^{t_k+1} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]}{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]^2}
$$

$$
= -v \left(\frac{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]\left[-\sum_{k=1}^{n} t_k^2 v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]}{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]^2} - \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]\left[-\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]}{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]^2} \right)
$$

$$
= -v \left(\frac{\left[\sum_{k=1}^{n} t_k^2 v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]}{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]} - \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} D_{\max}(\hat{R}_k)\right]^2} \right) < 0
$$

จะได้ $\frac{dd^{D\max}}{di} < 0$ แสดงว่าอัตราเปลี่ยนแปลงของ ดูเรชันดีฟซีฟิเคชัน $d^{D_{\max}}$ เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ ดอกเบี้ย i เพิ่มขึ้น ดูเรชัน $d^{D_{\max}}$ จะมีค่าลดลง ในทางกลับกัน ถ้าอัตราดอกเบี้ย i มีค่าลดลง ดูเรชัน $d^{D_{\max}}$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

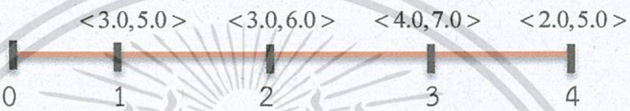
ตัวอย่างที่ 4.1 โครงการหนึ่งมีระยะเวลาทั้งสิ้น 4 ปี ที่คาดว่าจะให้ผลตอบแทนปลายงวดที่ k ดังนี้

ปีที่	0	1	2	3	4
ผลตอบแทน	-	<3.0,5.0>	<3.0,6.0>	<4.0,7.0>	<2.0,5.0>

(ล้านบาท) จงหาดูเรชันฟัซซีของกระแสเงินสดรับที่ได้รับผลตอบแทนดังกล่าว และวิธี Defuzzification First Method ภายใต้ดอกเบี้ยคาดหวัง 10%

สามาเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้

กระแสเงินสดรับ



ระยะเวลา(ปี)

หาโดยวิธี Defuzzification First Method

$$D_{\max} = \frac{R_k^l + R_k^u}{2}$$

$$= \frac{3.0+5.0}{2}, \frac{3.0+6.0}{2}, \frac{4.0+7.0}{2}, \frac{2.0+5.0}{2}$$
$$= 4, 4.5, 5.5, 3.5$$

สามาเขียนแผนภาพกระแสเงินสดใหม่ได้ดังนี้

กระแสเงินสดรับ

ระยะเวลา(ปี)

หาโดยวิธีดูเรชันฟัซซี

$$\hat{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} \hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} \hat{R}_k}$$

$$= \frac{(1)(1.1)^{-1}(4) + (2)(1.1)^{-2}(4.5) + (3)(1.1)^{-3}(5.5) + (4)(1.1)^{-4}(3.5)}{(1.1)^{-1}(4) + (1.1)^{-2}(4.5) + (1.1)^{-3}(5.5) + (1.1)^{-4}(3.5)}$$

$$= \frac{3.64 + 7.44 + 12.40 + 9.56}{3.64 + 3.72 + 4.31 + 2.39}$$

$$= \frac{33.04}{13.88}$$

$$\approx 2.38$$

ดังนั้น ดูเรชันของโครงการนี้ประมาณ 2.38 ปี #

4.2 Defuzzification Second Method

จะมีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

$d_S^{D_{\max}}$

จากข้อมูลที่ได้รับเป็นกระแสเงินสดที่ไม่รู้จำนวนเงินที่แน่นอนแต่สามารถคาดการณ์ให้อยู่ในช่วงของกระแสเงินสดได้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหาดูเรชัน โดยใช้วิธีดูเรชันฟัซซี จะได้เป็นช่วงของดูเรชัน

ขั้นตอนที่ 2 แปลงข้อมูลที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 โดยใช้ตัวดำเนินการดีฟัซซิฟิเคชันค่าความเป็นสมาชิกสูงสุด

$< R_k^l, R_k^u >$ → Duration fuzzy → Defuzzification → ค่าดั้งเดิม

หมายเหตุ เนื่องจากไม่สามารถพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของ $\hat{d}$ เมื่อเทียบกับ i โดยใช้อนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งในปกติจะมีการนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าฟัซซี แต่เนื่องจากการนิยาม $\hat{d}$ ซับซ้อนและทำได้ยากดังนั้นในงานวิจัยนี้จะศึกษาการเปลี่ยนแปลง $\hat{d}$ เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ i โดยพิจารณาจากค่า $\hat{w}_k$ ที่เป็นไปได้ ถ้า $\hat{R}_k \geq 0$ จะได้ว่า $\hat{w}_k = \frac{\hat{R}_k v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} \hat{R}_k v^{t_k}} \equiv < w_k^l, w_k^u >$

สมมติให้ $w_k^u \le 1$ จะได้ว่า

$$\hat{w}_k =< \min\{R_k^l v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^l)^{-1}, R_k^l v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^u)^{-1}, R_k^u v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^l)^{-1}, R_k^u v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^u)^{-1}\},$$

$$\max\{R_k^l v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^l)^{-1}, R_k^l v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^u)^{-1}, R_k^u v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^l)^{-1}, R_k^u v^{t_k} (\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} R_k^u)^{-1}\} >$$

เนื่องจาก $\hat{d} = \left(\sum_{k=1}^{n} t_k \hat{w}_k \right) \Delta n$

สมมติให้ $\hat{d} = \sum_{k=1}^{n} t_k \hat{w}_k = \sum_{k=1}^{n} t_k \left\langle \frac{R_k^l v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}}, \frac{R_k^u v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}} \right\rangle$

$$= \left\langle \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^l v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}}, \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^u v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}} \right\rangle$$

$$D_{\max}(\hat{d}) = \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^l v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}} + \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^u v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}} \right]$$

$$\frac{dD_{\max}(\hat{d})}{di} = \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{d}{di} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^l v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}} + \frac{d}{di} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^u v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{di} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^l v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}} + \frac{d}{di} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^u v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^l v^{t_k}\right)' - \left(\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^l v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}\right)'}{\left(\sum_{k=1}^{n} R_k^u v^{t_k}\right)^2} \right\} + \left\{ \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^u v^{t_k}\right)' - \left(\sum_{k=1}^{n} t_k R_k^u v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}\right)'}{\left(\sum_{k=1}^{n} R_k^l v^{t_k}\right)^2} \right\} \right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)\left(-\sum_{k=1}^{n}t_k^2 v^{t_k+1}R_k^l\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^l v^{t_k}\right)\left(-\sum_{k=1}^{n}t_k v^{t_k+1}R_k^u\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)^2}\right\}+\\ \left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)\left(-\sum_{k=1}^{n}t_k^2 R_k^u v^{t_k+1}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^u v^{t_k}\right)\left(-\sum_{k=1}^{n}R_k^l t_k v^{t_k+1}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)}\right\}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}-v\left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}t_k^2 v^{t_k}R_k^l\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^l v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}t_k v^{t_k}R_k^u\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)^2}\right\}+\\ (-v)\left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}t_k^2 R_k^u v^{t_k}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^u v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)^2}\right\}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}-v\left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k^2 v^{t_k}R_k^l\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)}-\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^l v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}t_k v^{t_k}R_k^u\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)^2}\right\}+\\ (-v)\left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k^2 R_k^u v^{t_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)}-\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^u v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)^2}\right\}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\,(-v)\left[\begin{array}{l}\left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k^2 v^{t_k}R_k^l\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)}-\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^l v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}t_k v^{t_k}R_k^u\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^u v^{t_k}\right)^2}\right\}+\\ \left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k^2 R_k^u v^{t_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)}-\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n}t_k R_k^u v^{t_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}R_k^l v^{t_k}\right)^2}\right\}\end{array}\right]<0$$

จะได้ $\dfrac{dD_{\max}(\hat{d})}{di} < 0$ แสดงว่าอัตตราเปลี่ยนแปลงของ ดูเรชันดีฟัซซีฟิเคชัน $D_{\max}(\hat{d})$ เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือดอกเบี้ย i เพิ่มขึ้น ดูเรชัน $D_{\max}(\hat{d})$ จะมีค่าลดลง ในทางกลับกัน ถ้าอัตราดอกเบี้ย i มีค่าลดลง ดูเรชัน $D_{\max}(\hat{d})$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

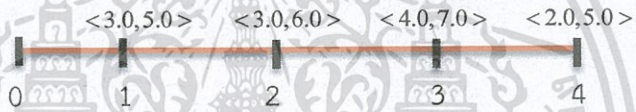
ตัวอย่างที่ 4.2 โครงการหนึ่งมีระยะเวลาทั้งสิ้น 4 ปี ที่คาดว่าจะให้ผลตอบแทนปลายงวดที่ k ดังนี้

ปีที่	0	1	2	3	4
ผลตอบแทน	-	<3.0,5.0>	<3.0,6.0>	<4.0,7.0>	<2.0,5.0>

(ล้านบาท) จงหาดูเรชันฟัซซีของกระแสเงินสดรับที่ได้รับผลตอบแทนดังกล่าว และวิธี Defuzzification Second Method ภายใต้ดอกเบี้ยคาดหวัง 10%

สามาเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้

กระแสเงินสดรับ



ระยะเวลา(ปี)

หาโดยวิธีดูเรชันฟัซซี

$$\hat{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k v^{t_k} \hat{R}_k}{\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} \hat{R}_k}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}(1.1)^{-1} < 3.0, 5.0 > +(2)(1.1)^{-2} < 3.0, 6, 0 > + \\ (3)(1.1)^{-3} < 4.0, 7.0 > +(4)(1.1)^{-4} < 2.0, 5.0 >\end{array}}{\begin{array}{c}(1.1)^{-1} < 3.0, 5.0 > +(1.1)^{-2} < 3.0, 6, 0 > + \\ (1.1)^{-3} < 4.0, 7.0 > +(1.1)^{-4} < 2.0, 5.0 >\end{array}}$$

$$= \left(\left\{\frac{< 2.72, 13.64 >}{< 9.63, 18.18 >}\right\}\Delta 1\right) + (2)\left(\left\{\frac{< 2.48, 14.88 >}{< 9.63, 18.18 >}\right\}\Delta 1\right) +$$

$$(3)\left(\left\{\frac{< 3.01, 21.04 >}{< 9.63, 18.18 >}\right\}\Delta 1\right) + (4)\left(\left\{\frac{< 1.37, 16.38}{< 9.63, 18.18 >}\right\}\Delta 1\right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} < \min\{0.28, 0.15, 1.42, 0.75\}, \max\{0.28, 0.15, 1.42, 0.75\} > \Delta 1, \\ \left[(< \min\{0.26, 0.14, 1.55, 0.82\}, \max\{0.26, 0.14, 1.55, 0.82\} > \Delta 1\right](2), \\ \left[(< \min\{0.31, 0.17, 2.18, 1.16\}, \max\{0.31, 0.17, 2.18, 1.16\} > \Delta 1\right](3), \\ \left[(< \min\{0.14, 0.08, 0.71, 0.38\}, \max\{0.14, 0.08, 0.71, 0.38\} > \Delta 1\right](4) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} < \min\{0.28, 0.15, 1, 0.75\}, \max\{0.28, 0.15, 1, 0.75\} >, \\ < \min\{0.52, 0.28, 2, 1.64\}, \max\{0.52, 0.28, 2, 1.64\} >, \\ < \min\{0.93, 0.51, 3, 3\}, \max\{0.93, 0.51, 3, 3\} >, \\ < \min\{0.56, 0.32, 2.84, 1.52\}, \max\{0.56, 0.32, 2.84, 1.52\} > \end{array} \right)$$

$$= < 0.52, 1 > + < 0.28, 2 > + < 0.51, 3 > + < 0.32, 2.84 >$$

$$= < 1.26, 8.84 > \Delta 4$$

$$= < 1.26, 4 >$$

ดังนั้นดูเรชันฟัซซีของโครงการนี้คือ <1.26,4> ปี #

หาโดยวิธี Defuzzification Second Method

$$D_{\max} = \frac{R_k^l + R_k^u}{2}$$

$$= \frac{1.26 + 4}{2}$$

$$\approx 2.63$$

ดังนั้น ดูเรชันของโครงการนี้ประมาณ 2.63 ปี #

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผลงานวิจัย

การวิเคราะห์ดูเรชันของโครงการลงทุน โดยใช้วิธีดูเรชันดั้งเดิมนั้นไม่สามารถใช้วิเคราะห์โครงการลงทุนที่มีผลตอบแทนแบบไม่คงที่ได้ อาจเป็นเพราะสภาพทางเศรษฐกิจภายในประเทศและตัวแปรต่างๆที่ส่งผลต่อผลตอบแทนจากการลงทุน แต่เราสามารถคาดการณ์ผลตอบแทนเป็นขอบเขตได้ ดังนั้นดูเรชันฟัซซีจึงเป็นทางเลือกหนึ่งในการตัดสินใจ ใช้วิเคราะห์คำนวณหาดูเรชันของการลงทุนที่ดูเรชันแบบดั้งเดิมไม่สามารถคำนวณได้

ในปัญหาพิเศษนี้สามารถแบ่งดูเรชันฟัซซีออกได้เป็น 2 แนวทาง คือ Defuzzification First Method ($d_F^{D_{\max}}$) และ Defuzzification Second Method ($d_S^{D_{\max}}$) เพื่อใช้เป็นตัวเลือกหนึ่งในการวิเคราะห์ดูเรชันของโครงการลงทุน

เอกสารอ้างอิง

[1] J. Baron, Thinking and Deciding, 2nd edition, (Cambridge University Press, 1994).
[2] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, Management Sciences, Ser. B 17(1970) 141-164.
[3] J.J. Buckley, Portfolio analysis using possibility distributions,in: E. Sanchez and L.A. Zadeh eds., Approximate Reasoning in Intelligent Systems, Decision and Control, Pergamon Press, New-York, 1987 69-76.
[4] J.J. Buckley, Fuzzy mathematics of finance, Fuzzy Sets and Systems, 21(1987) 257-273.
[5] C. Carlsson and R. Fuller, On fuzzy capital budgeting problem, in: Proceedings of the International ICSC Symposium on Soft Computing in Financial Markets, Rochester, New York, USA, June 22-25, 1999, ICSC Academic Press,1999 (to appear).
[6] Robert T. Clemen, Making Hard Decision: An Introduction to Decision Analysis, 2nd edition, (Duxbury Press, An Imprint of Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 1996).
[7] C. Chiu and C.S. Park, Fuzzy cash flows anslysis using present worth criterion, The Engineering Economist, 39(1994) 113-138.
[8] Simon French, Readings in Decision Analysis, (Chapman and Hall, London, 1990).
[9] R. Fuller, On stability in possibilistic linear equality systems with Lipschitzian fuzzy number, Fuzzy sets and Systems, 34(1990) 347-353.