ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น
IMAGE OF THE UNIT CIRCLE UNDER LINEAR TRANSFORMATIONS

กนกวรรณ สุขพงษ์
จรญา วงศ์เกย
ธนากร ศรีเคลือบ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น

IMAGE OF THE UNIT CIRCLE UNDER LINEAR TRANSFORMATIONS

กนกวรรณ สุขพงษ์

จรญา วงศ์เกย

ธนากร ศรีเคลือบ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

IMAGE OF THE UNIT CIRCLE UNDER LINEAR TRANSFORMATIONS

KANOKWAN SUKKAPONG

JARAYA WONGKOEI

THANAKORN SRIKLUAB

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE KING

MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น Image of The Unit Circle Under Linear Transformations
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ สุขพงษ์ 55050006 นางสาวจรญา วงศ์เกย 55050025 นายธนากร ศรีเคลือบ 55050065
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร. ธวัชชัย คำประภัสสร

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ขออนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการ	
ดร. ธวัชชัย คำประภัสสร กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ธวัชชัย

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ สุขพงษ์ 55050006
	นางสาวจรญา วงศ์เกย 55050025
	นายธนากร ศรีเคลือบ 55050065
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษนี้ คือ ศึกษาภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นใน R^2 และเราอธิบายภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นใน R^2 โดยใช้โปรแกรม GeoGebra อีกทั้งเราพิสูจน์ว่า ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้เชิงเส้นใน R^2 คือ จุด, ส่วนของเส้นตรง หรือ วงรี

คำสำคัญ : วงกลมหนึ่งหน่วย, การแปลงเชิงเส้น, GeoGebra

Title	Image of the unit circle under linear transformation
Students	Kanokwan Sukkapong 55050006
	Jaraya Wongkoei 55050025
	Thanakorn Srikluab 55050065
Degree	Bachelor of Science Applied Mathematics
Department	Applied Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2015
Advisor	Dr.Thawatchai Khumprapussorn

Abstract

The purpose of this special problem is to study image of the unit circle under linear transformation on R^2 and we describe the image of the unit circle under linear transformation on R^2 by using GeoGebra. Also, we prove that the image of the unit circle under linear transformation is point, segment line or ellipse.

Keywords : unit circle, linear transformation, GeoGebra

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง “ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น” ได้ประสบกับปัญหาและอุปสรรคต่างๆมากมาย และการแก้ไขปัญหาเหล่านี้ไม่สามารถแก้ไขปัญหาและอุปสรรค์ดังกล่าวได้หากขาดบุคคลเหล่านี้ ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ และได้ให้ความรู้ คำแนะนำและแนวทางในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ อีกทั้งยังเป็นกำลังใจในการทำงาน

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบคุณท่าน ผศ.ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ ประธานกรรมการสอบ และท่าน ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรมการสอบปัญหาพิเศษในครั้งนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนในการทำปัญหาพิเศษ และเป็นกำลังใจให้มาโดยตลอด เพื่อนสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่คอยแลกเปลี่ยนความคิดเห็น และให้กำลังใจในการทำงานครั้งนี้ เจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่อำนวยความสะดวกในการทำงาน

นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์ในด้านต่างๆจากผู้เกี่ยวข้องที่ไม่สามารถเอ่ยนามได้หมดในที่นี้ ผู้จัดทำขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

กนกวรรณ สุขพงษ์

จรญา วงศ์เกย

ธนากร ศรีเคลือบ

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ **หน้า**

สัญลักษณ์

สัญลักษณ์	คำอธิบาย
R	เซตของจำนวนจริง
$R^{m\times n}$	เซตของเมทริกซ์ ขนาด $m \times n$ บนจำนวนจริง
S	$\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle\vert x^2 + y^2 = 1\right\}$
R^2	$\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle\vert x$ และ y เป็นจำนวนจริง$\right\}$
$rank\ A$	ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ A
$T(X)$	$\{T(\vec{x}) \mid \vec{x} \in X\}$ โดยที่ $T : R^2 \to R^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $X \subseteq R^2$ เราเรียก $T(X)$ ว่า ภาพของ X ภายใต้การแปลงเชิงเส้น T

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $T: V \rightarrow W$ เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า T เป็น **การแปลงเชิงเส้น** จาก V ไปยัง W ถ้า T สอดคล้องกับเงื่อนไข ต่อไปนี้

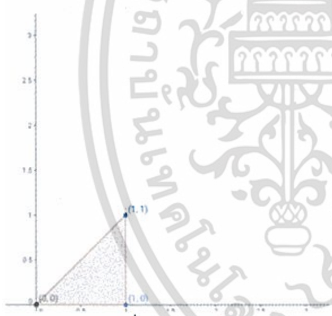
1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ ทุกๆ $u, v \in V$
2) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ ทุกๆ $v \in V$ และทุกๆ สเกลาร์ α

ตัวอย่าง 1 ให้ $T_1: R^2 \rightarrow R^2$ นิยามโดย $T_1(\vec{x}) = 3\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^2$

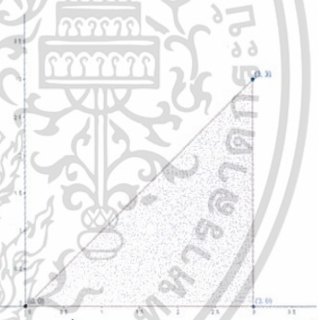
และ $T_2: R^2 \rightarrow R^2$ นิยามโดย $T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ทุกๆ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in R^2$

และ $T_3: R^2 \rightarrow R^2$ นิยามโดย $T_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}\right)$ ทุกๆ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in R^2$

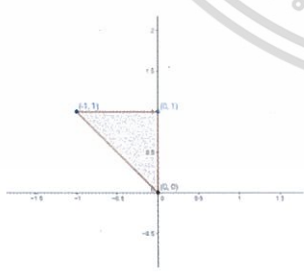
เราสามารถพิสูจน์ได้โดยไม่ยากว่า T_1, T_2 และ T_3 เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก R^2 ไปยัง R^2 เราใช้ภาพเรขาคณิตภายใต้การแปลงเชิงเส้น เป็นเครื่องมือสำคัญที่อธิบายถึงพฤติกรรมของการแปลงเชิงเส้น โดยสังเกตรูปร่างที่เปลี่ยนแปลงไป ผลลัพธ์ด้านล่างแสดงให้เห็น ถึงภาพของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด (0,0), (1,0) และ (1,1) ภายใต้การแปลงเชิงเส้น T_1, T_2 และ T_3



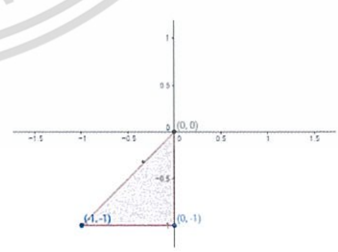
รูปภาพที่ 1 ภาพต้นแบบ



รูปภาพที่ 2 ภาพการแปลงภายใต้ T_1



รูปภาพที่ 3 ภาพการแปลงภายใต้ T_2



รูปภาพที่ 4 ภาพการแปลงภายใต้ T_3

ข้อสังเกต 1) ภาพการแปลงภายใต้ T_1 เป็นการขยาย 3 เท่า

2) ภาพการแปลงภายใต้ T_2 เป็นการหมุน 90 องศา ทิศทวนเข็มนาฬิกา

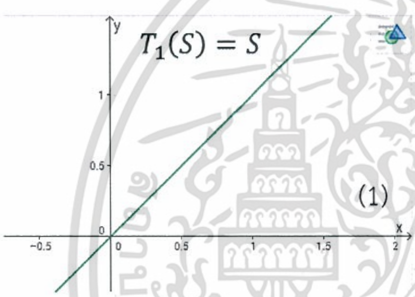
3) ภาพการแปลงภายใต้ T_3 เป็นการสะท้อนผ่านส่วนของเส้นตรง $y = -x$

เมื่อพิจารณาภาพของส่วนของเส้นตรง $y = x$ ภายใต้การแปลง T_1, T_2 และ T_3 เราได้ผลลัพธ์ดังนี้

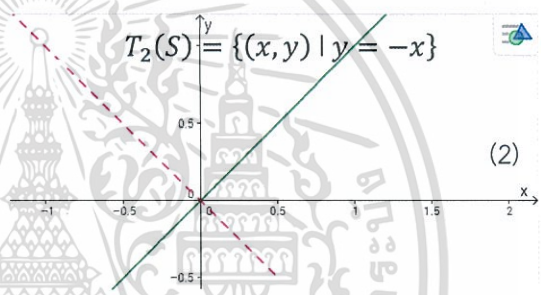
ให้ $S = \{(x, y) \mid y = x\}$

เราพิสูจน์ได้ว่า

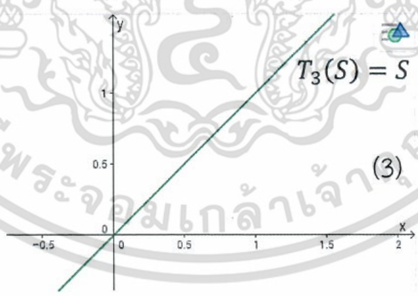
1) $T_1(S) = S$
2) $T_2(S) = \{(x, y) \mid y = -x\}$
3) $T_3(S) = S$



รูปภาพที่ 5 ภาพของกราฟ
$T_1(S) = S$



รูปภาพที่ 6 ภาพของกราฟ
$T_2(S) = \{(x, y) \mid y = -x\}$



รูปภาพที่ 7 ภาพของกราฟ
$T_3(S) = S$

Thomas Banchoff และ John Wermer [1] ได้อธิบายไว้ว่าภาพของส่วนของเส้นตรงภายใต้การแปลงเชิงเส้นบนระนาบ เป็น ส่วนของเส้นตรง หรือ จุด

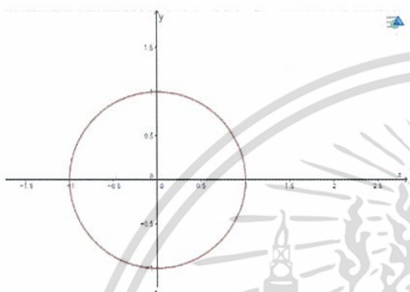
ทฤษฎีบท 1 [1] ให้ T เป็นการแปลงเชิงเส้น จาก R^2 ไปยัง R^2 จะได้ว่าภาพของส่วนของเส้นตรงภายใต้ T เป็น ส่วนของเส้นตรง หรือ จุด

ในปี 2001 Pratibha Ghatage และ Sally Shao [2] ได้พิจารณาการแปลงเชิงเส้นที่สามารถหาการแปลงผกผันได้ พร้อมทั้งแสดงว่า ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วย ภายใต้การแปลงเชิงเส้นที่สามารถหาการแปลงผกผันได้ เป็น วงรี

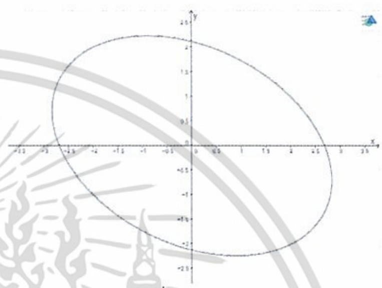
ตัวอย่าง 2 ให้ $T: R^2 \to R^2$ กำหนดโดย $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix}$ ทุกๆ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2$

Pratibha Ghatage และ Sally Shao ได้แสดงว่าภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้ T คือ

$5x^2 + 4xy + 8y^2 = 36$ ซึ่งเป็นวงรี



รูปภาพที่ 8 ภาพของสมการ
$x^2 + y^2 = 1$



รูปภาพที่ 9 ภาพของสมการ
$5x^2 + 4xy + y^2 = 36$

จากผลลัพธ์ดังกล่าวข้างต้น นำมาซึ่งข้อสงสัยที่ว่า ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วย ภายใต้การแปลงเชิงเส้นจาก R^2 ไปยัง R^2 ที่ไม่สามารถหาการแปลงผกผันได้ จะเป็นเช่นไร

ในขั้นต้นเราพิจารณาจากตัวอย่างง่ายๆ ดังนี้

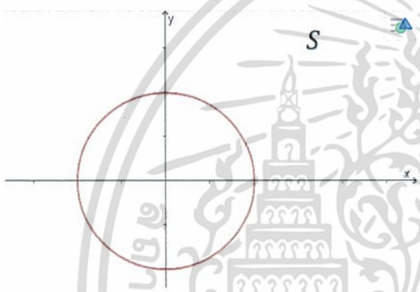
ตัวอย่าง 3 ให้ $T: R^2 \to R^2$ เป็นการส่งศูนย์ นั่นคือ $T(\vec{x}) = 0$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^2$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้ T เป็นจุด $(0,0)$

ตัวอย่าง 4 ให้ $T: R^2 \rightarrow R^2$ นิยามโดย $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix}$ ทุกๆ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2$

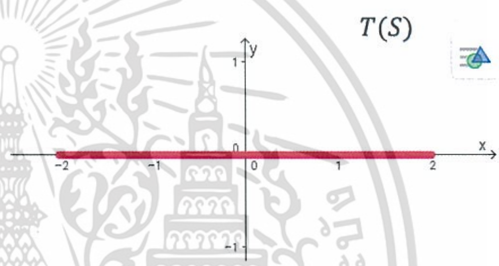
ให้ $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

จะเห็นว่า

$$T(S) = T\left\{\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$$
$$= \left\{\left(\begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix}\right) \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$= \left\{\left(\begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix}\right) \middle| -1 \le x \le 1\right\}$$
$$= \left\{\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) \middle| -2 \le x \le 2\right\}$$



รูปภาพที่ 10 ภาพต้นแบบ

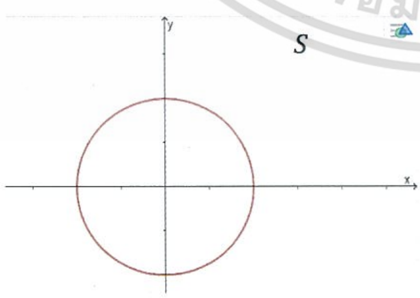


รูปภาพที่ 11 ภาพการแปลงเชิงเส้นโดย

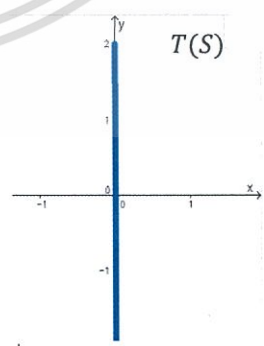
$$\boldsymbol{T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix}}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าการแปลงเชิงเส้น T กำหนดโดย $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2y \end{bmatrix}$

เราจะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้ $T(S) = \left\{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) \middle| -2 \le y \le 2\right\}$



รูปภาพที่ 12 ภาพต้นแบบ



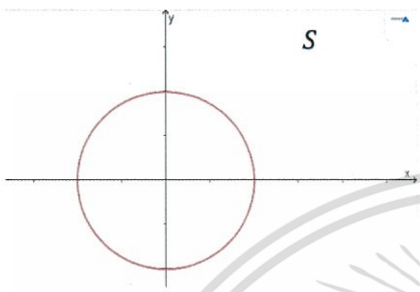
รูปภาพที่ 13 ภาพการแปลงเชิงเส้นโดย

$$\boldsymbol{T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2y \end{bmatrix}}$$

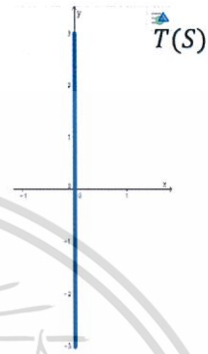
ตัวอย่าง 5 ให้การแปลงเชิงเส้น T จาก R^2 ไปยัง R^2 กำหนดโดย $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\0\end{bmatrix}$ ทุกๆ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in R^2$

ให้ $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

จะเห็นว่า $T(S)=\left\{\begin{bmatrix}2x+y\\0\end{bmatrix}\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$



รูปภาพที่ 14 ภาพต้นแบบ

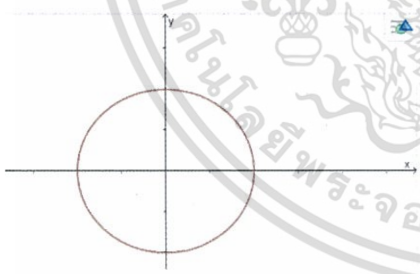


รูปภาพที่ 15 ภาพการแปลงเชิงเส้นโดย

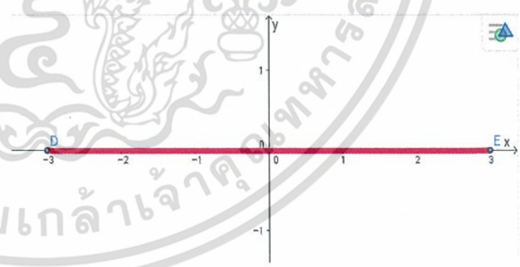
$$\boldsymbol{T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\0\end{bmatrix}}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าการแปลงเชิงเส้น T กำหนดโดย $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\2x+y\end{bmatrix}$

เราจะได้ผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้ $T(S)=\left\{\begin{bmatrix}0\\2x+y\end{bmatrix}\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$



รูปภาพที่ 16 ภาพต้นแบบ



รูปภาพที่ 17 ภาพการแปลงเชิงเส้นโดย

$$\boldsymbol{T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\2x+y\end{bmatrix}}$$

ตัวอย่าง 2,3 และ 4 นำไปสู่ข้อสังเกตว่า

“ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น อาจเป็น วงรี, ส่วนของเส้นตรง หรือ จุด”

สำหรับปัญหาพิเศษของเรา เรานำทฤษฎีบท 1 มาขยายผลลัพธ์ ผสมผสานกับข้อสังเกต โดยพิจารณาภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นจาก R^2 ไปยัง R^2 แยกลักษณะเฉพาะของแต่ละกรณี ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างชนิดของการแปลงเชิงเส้น (หนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง) ,รูปเรขาคณิต (วงรี,วงกลม,ส่วนของเส้นตรง,จุด) และค่าลำดับชั้นของการแปลง

โดยทั่วไป เมื่อกล่าวถึงการแปลงเชิงเส้น ส่วนใหญ่เน้นทฤษฎีทางพีชคณิตมากกว่าอธิบายด้วยรูปร่างเรขาคณิต ในปัญหาพิเศษนี้เราเติมเต็มความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงเชิงเส้น ด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีส่วนช่วยอย่างมากในการประมวลผล และใช้ ผลลัพธ์จากการประมวลผลนั้น นำไปสู่แนวทางสำหรับการพิสูจน์ทางทฤษฎี ตลอดจนช่วยให้เห็นภาพ และทำความเข้าใจกับการแปลงเชิงเส้นได้ดียิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) เพื่อศึกษาภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นในปริภูมิยุคลิด

2) เพื่อสร้างแบบจำลองที่ใช้อธิบายภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นในปริภูมิยุคลิด

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ศึกษาการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิยุคลิด 2 และ 3 มิติ โดยเลือกใช้ “วงกลมหนึ่งหน่วย” ซึ่งเป็นรูปเรขาคณิตพื้นฐาน เพื่อพิจารณาพฤติกรรมของการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิยุคลิด

2) เลือกใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Geogebra เพื่อช่วยเป็นสื่อนำเสนอภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิยุคลิด

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) สมาชิกภายในกลุ่มได้ประสบการณ์ในการทำงานวิจัย โดยใช้ความรู้พื้นฐานและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ควบคู่ไปกับการใช้งานโปรแกรมคอมพิวเตอร์

2) ได้เห็นถึงรูปแบบ ตลอดจนกระทั่ง ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นในปริภูมิยุคลิด ครบทุกกรณี

3) ได้โปรแกรมที่ช่วยนำเสนอภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น

4) ได้โปรแกรมที่ใช้เป็นสื่อประกอบการเรียนการสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นและการประยุกต์ซึ่งมีส่วนช่วยให้นักศึกษาได้เข้าใจถึงการแปลงเชิงเส้นมากยิ่งขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1) ทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริภูมิเวกเตอร์ โดยเฉพาะปริภูมิยุคลิด

2) ศึกษาสมบัติของความสัมพันธ์สมมูล พร้อมทั้งเลือกใช้ความสัมพันธ์สมมูลที่เหมาะสมกับปัญหาพิเศษ เพื่อนำมาสร้างผลแบ่งกั้นบนเซตของเมทริกซ์

3) ศึกษาการใช้งานโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ เช่น Geogebra

4) ใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ เขียนโปรแกรมสำเร็จรูป เพื่อสร้างภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น

5) วิเคราะห์รูปแบบของภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น

6) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง “การแปลงเชิงเส้น” และ “ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น”

7) สรุปผลการวิจัย

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ปริภูมิเวกเตอร์

เราใช้การดำเนินการบวก และ การคูณด้วยสเกลาร์ในหลายหลายเนื้อหาของคณิตศาสตร์ เพียงแต่ว่า ความหมายของตัวดำเนินการเหล่านี้แตกต่างกันไปตามบริบท อย่างไรก็ตามสมบัติทางพีชคณิตแต่ละตัวดำเนินการ ยังคงเป็นไปในแนวทางเดียวกัน สำหรับปัญหาพิเศษเล่มนี้ เราศึกษาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่ง ซึ่งประกอบไปด้วย เซต ร่วมกับสองตัวดำเนินการ ได้แก่ การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ โดยที่ทั้ง 2 การดำเนินการต้องสอดคล้องกับสมบัติบางประการ ซึ่งเราเรียกโครงสร้างนี้ว่า “ปริภูมิเวกเตอร์” เราจึงเริ่มต้นบทนี้ด้วย บทนิยามของปริภูมิเวกเตอร์

บทนิยาม 2.1.1 ให้ V เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $V \neq \emptyset$ และ การดำเนินการ 2 อย่าง คือ การบวก $+$ และการคูณด้วย สเกลาร์ $\cdot$ บน R เราจะเรียก V พร้อมด้วยการดำเนินการทั้งสองว่า **ปริภูมิเวกเตอร์** ก็ต่อเมื่อ ระบบดังกล่าวมีสมบัติครบ 10 ข้อ ต่อไปนี้

1. $\vec{u} + \vec{v} \in V$ สำหรับทุก $\vec{u}, \vec{v} \in V$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ สำหรับทุก $\vec{u}, \vec{v} \in V$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ สำหรับทุก $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
4. มี $\bar{0} \in V$ ซึ่งทำให้ $\vec{u} + \bar{0} = 0$ สำหรับทุก $\vec{u} \in V$
5. สำหรับทุก $\vec{u} \in V$ จะมี $-\vec{u} \in V$ ซึ่งทำให้ $\vec{u} + (-\vec{u}) = \bar{0}$
6. $\alpha \cdot \vec{u} \in V$ สำหรับทุกสเกลาร์ α และ สำหรับทุก $\vec{u} \in V$
7. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\alpha \cdot \vec{v})$ สำหรับทุกสเกลาร์ α และ สำหรับทุก $\vec{u}, \vec{v} \in V$
8. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\beta \cdot \vec{u})$ สำหรับทุกสเกลาร์ α, β และ สำหรับทุก $\vec{u} \in V$
9. $(\alpha\beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$ สำหรับทุกสเกลาร์ α, β และ สำหรับทุก $\vec{u} \in V$
10. มี $1 \in R$ ซึ่งทำให้ $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ สำหรับทุก $\vec{u} \in V$

ตัวอย่าง 2.1.2 ให้ $R^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \; a_1, a_2, \dots, a_n \in R \right\}$

ภายใต้การดำเนินการ “$+$” และ “$\cdot$” ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ และ } \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $(R^n, +, \cdot)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ $R^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| \, a_{mn} \in R, \right\}$

ภายใต้การดำเนินการบวกปกติของเมทริกซ์ และการคูณด้วยสเกลาร์บนเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{m1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

และ

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \cdots & \alpha a_{m1} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \cdots & \alpha a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $(R^{m\times n}, +, \cdot)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ $P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in R\}$

ภายใต้การดำเนินการ "$+$" และ "$\cdot$" ดังต่อไปนี้

$$[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n] + [b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n] = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

และ

$$\alpha[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n] = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_nx^n$$

จะได้ว่า $(P_n, +, \cdot)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

บทนิยาม 2.1.5 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $W \subseteq V$ จะกล่าวว่า W เป็น**ปริภูมิย่อย**ของ V ถ้า W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ภายใต้การดำเนินการเดียวกับ V

ทฤษฎีบท 2.1.6 ให้ $W \neq \emptyset$ โดยที่ W เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V จะได้ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $u, v \in W$ แล้ว $u + v \in W$ และ
2. ถ้า α เป็นสเกลาร์ และ $u \in W$ แล้ว $\alpha u \in W$

ตัวอย่าง 2.1.7 ให้ $S = \{(x_1, x_1, x_1)^T \mid x_1 = x_2\}$ เนื่องจาก S เป็นปริภูมิย่อยของ R^3

ดังนั้น (i) ถ้า $x = (a, a, b)^T \in S$ แล้ว

$$\alpha x = (\alpha a, \alpha a, \alpha b)^T$$

(ii) ถ้า $(a, a, b)^T$ และ $(c, c, d)^T = (a + c, a + c, b + d)^T \in S$

ตัวอย่าง 2.1.8 ให้ $S = \{A \in R^{2\times 2} \mid a_{12} = -a_{21}\}$ เนื่องจาก S เป็นปริภูมิย่อยของ $R^{2\times 2}$

ดังนั้น (i) ถ้า $A \in S$ แล้ว A จะต้องอยู่ในรูป

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

และ

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ -\alpha b & \alpha c \end{pmatrix}$$

เนื่องจากตำแหน่ง (2,1) ของ αA คือค่าลบของตำแหน่ง (1,2)

ดังนั้น $\alpha A \in S$

(ii) ถ้า $A, B \in S$ แล้ว A และ B ต้องอยู่ในรูป

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & f \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า

$$A + B = \begin{pmatrix} a + d & b + e \\ -(b + e) & c + f \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $A + B \in S$

ตัวอย่าง 2.1.9 ให้พหุนาม $p(x), q(x)$ เขียนแทนด้วย

$p(x) = [6 + 2x + 5x^2]$ และ $q(x) = [1 + 4x + 9x^2]$

$$p(x) + q(x) = [6 + 2x + 5x^2] + [1 + 4x + 9x^2]$$

$$= [(6 + 1) + (2 + 4)x + (5 + 9)x^2]$$

$$\alpha \cdot p(x) = \alpha \cdot [6 + 2x + 5x^2] = [\alpha 6 + \alpha 2x + \alpha 5x^2]$$

จะได้ว่า $(P_2, +, \cdot)$ เป็นปริภูมิย่อย ของ P_n

บทนิยาม 2.1.10 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in V$ เรากล่าวว่า $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ เป็น**อิสระเชิงเส้น** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกสเกลาร์ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ถ้า $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$ แล้ว $\alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_n = 0$

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in V$ เรากล่าวว่า $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ **ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น** ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ซึ่งไม่เป็น 0 พร้อมกัน และทำให้ $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} \dots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$

ตัวอย่าง 2.1.11 ให้ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นจำนวนจริง โดยที่

$$\alpha_1(3,-2,2) + \alpha_2(3,-1,4) + \alpha_3(1,0,5) = (0,0,0)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

โดยการแก้ระบบสมการ จะได้

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

ดังนั้น $(3,-2,2), (3,-1,4)$ และ $(1,0,5)$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.1.12 ให้ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ เป็นจำนวนจริง

$$\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$$

เห็นได้ชัดว่า $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

ดังนั้น $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.1.13 ให้ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นจำนวนจริง โดยที่

$$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(3x+x^2) + \alpha_3(2+x-x^2) = 0$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \quad + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

โดยการแก้ระบบสมการ จะได้

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

ดังนั้น $(1+x), (3x+x^2)$ และ $(2+x-x^2) = 0$ เป็นอิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 2.1.14 ให้ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in V$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ เป็นสเกลาร์ เราเรียกผลบวก $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{v_n}$ ว่า **ผลรวมเชิงเส้น**ของเวกเตอร์ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$

บทนิยาม 2.1.15 ถ้า $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในปริภูมิเวกเตอร์ V เราแทนเซตของผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$

ด้วย $span\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\} = \{\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R\}$ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $V = span\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ แล้วเรากล่าวว่า $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ **แผ่ทั่ว** V หรือ $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ เป็นเซตแผ่ทั่วของ V

ตัวอย่าง 2.1.16 พิจารณา $span\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ เมื่อ $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_n} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

เราจะเห็นว่า สำหรับทุกๆ $\vec{v} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} \in R^n$ จะได้ว่า $\vec{v} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + \dots + a_n\overrightarrow{e_n}$

ดังนั้น $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \dots + \overrightarrow{e_n}$ แผ่ทั่ว R^n จึงได้ว่า $span\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\} = R^n$

ตัวอย่าง 2.1.17 พิจารณา $span\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

ต้องแสดงว่าแต่ละพหุนาม $p(x)$ ใน P_n เป็นผลรวมเชิงเส้นของ $1, x, x^2, \dots, x^n$ แต่ชัดเจนอยู่แล้วเนื่องจากรูปแบบของ $p(x)$ คือ $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
ดังนั้น $span\{1, x, x^2, \dots, x^n\} = P^n$

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ศึกษาเกี่ยวกับเซตย่อย ของปริภูมิเวกเตอร์ ที่สามารถแผ่ทั่ว ปริภูมิเวกเตอร์นั้นได้และถ้าเซตย่อยดังกล่าวเป็นอิสระเชิงเส้น เราจะเรียกเซตย่อยชนิดนี้ว่า **ฐานของปริภูมิเวกเตอร์** ดังบทนิยาม ต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.18 ให้ Vเป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in V$ เรากล่าวว่า $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ เป็น **ฐาน** ของ V ก็ต่อเมื่อ

1. $span\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\} = V$ และ
2. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 2.1.19 ให้ B เป็นฐานของปริภูมิเวกเตอร์ V ถ้า B เป็นเซตจำกัดแล้ว **มิติ** ของ V คือจำนวนสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $\dim V = n$

ถ้า B เป็นเซตอนันต์ แล้วเรากล่าวว่า ปริภูมิเวกเตอร์ V มีมิติเป็นอนันต์ สำหรับกรณี $V = \{0\}$ เรากล่าวว่า มิติ $\{0\}$ คือ 0

ตัวอย่าง 2.1.20 จากตัวอย่าง 2.1.12 ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ เป็นอิสระเชิงเส้น และจาก ตัวอย่าง 2.1.15 จะได้ว่า $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ แผ่ทั่ว V

ดังนั้น $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ เป็นฐานของ R^n และทำให้ได้ว่า $\dim R^n = n$

และเรียก $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ ว่า ฐานมาตรฐานของ R^n

ตัวอย่าง 2.1.21 เราทราบจาก ตัวอย่าง 2.16 ว่า $1, x, x^2, \dots, x^n$ แผ่ทั่ว P_n

และสามารถพิสูจน์ได้โดยไม่ยากว่า $1, x, x^2, \dots, x^n$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น $1, x, x^2, \dots, x^n$ เป็นฐานของ P_n และ $\dim P_n = n + 1$

และเรียก $1, x, x^2, \dots, x^n$ ฐานมาตรฐานของ P_n

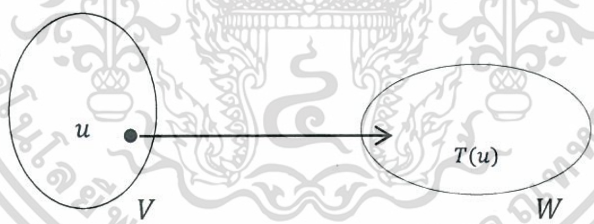
บทนิยาม 2.1.22 ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $T : V \to W$

เรากล่าวว่า T เป็น**การแปลงเชิงเส้น** (Linear Transformation) จาก V ไปยัง W เมื่อ

1) $T(u + v) = T(u) + T(v)$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $u, v \in V$ แล้ว

2) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $u \in V$ และทุกสเกลาร์ α ใน R

จากนิยามแสดงลักษณะของ V, W, u และ $T(u)$ ได้ดังรูป



รูปภาพที่ 18 ภาพของการแปลงเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.1.23 ให้ L เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$L(x) = 3x \text{สำหรับทุก } x \in R^2$$

เนื่องจาก

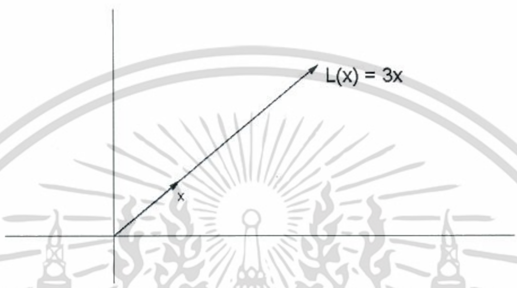
$$L(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha(3x) = \alpha L(x)$$

และ

$$L(x+y) = 3(x+y) = (3x) + (3y) = L(x) + L(y)$$

จะได้ L เป็นการแปลงเชิงเส้น เราจะได้ว่า L คือ การขยาย 3 เท่าจากรูปเดิม

ตัวอย่าง เช่น



รูปภาพที่ 19 ภาพการแปลงเชิงเส้น $\boldsymbol{F(x) = \alpha x}$

โดยทั่วไป ถ้า α เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่าการแปลงเชิงเส้น $F(x) = \alpha x$ คือการนำรูปเดิมมาย่อหรือขยายด้วย α

ตัวอย่าง 2.1.24 พิจารณา L เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$L(x) = x_1 e_1$$

สำหรับทุก $x \in R^2$ ดังนั้น

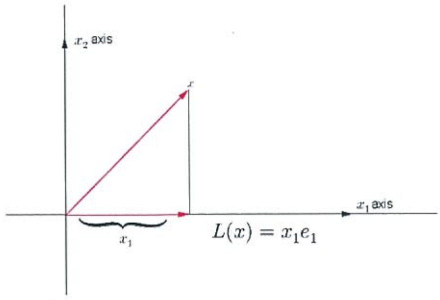
ถ้า $x = (x_1, x_2)^T$ แล้ว $L(x) = (x_1, 0)^T$ และ ถ้า $y = (y_1, y_2)^T$ แล้ว $(y_1, 0)^T$

$$\alpha x + \beta y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix}$$

จาก

$$L(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1)e_1 = \alpha(x_1 e_1) + \beta(y_1 e_1) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

ดังนั้น L เป็นการแปลงเชิงเส้น เราจะได้ว่า L คือการฉายลงไปบนแกน x



รูปภาพที่ 20 ภาพการแปลงเชิงเส้น $L(x) = x_1 e_1$

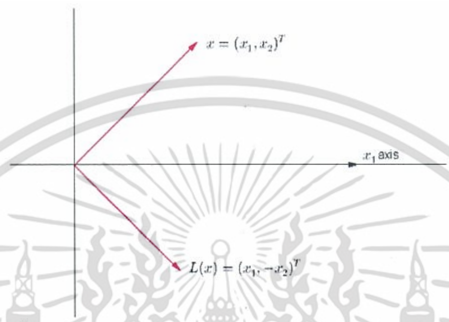
ตัวอย่าง 2.1.25 ให้ L เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$L(\vec{x}) = (x_1, -x_2)^T \text{ สำหรับทุก } \vec{x} = (x_1, x_2)^T \text{ ใน } R^2$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ -(\alpha x_2 + \beta y_2) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} \\ &= \alpha L(x) + \beta L(y) \end{aligned}$$

จะได้ว่า L เป็นการแปลงเชิงเส้น นั่นคือ ฟังก์ชัน L เป็นการสะท้อนเวกเตอร์ผ่านแกน x



รูปภาพที่ 21 ภาพการแปลงเชิงเส้น $\boldsymbol{L(\vec{x}) = (x_1, -x_2)^T}$

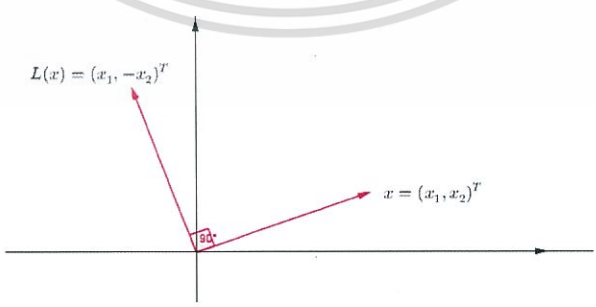
ตัวอย่าง 2.1.26 ให้ L เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$L(x) = (-x_2, x_1)^T$$

เป็นการแปลงเชิงเส้น เนื่องจาก

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) &= \begin{bmatrix} -(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ \alpha x_1 + \beta y_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha L(x) + \beta L(y) \end{aligned}$$

ฟังก์ชัน L เป็นการหมุนแต่ละเวกเตอร์ใน R^2 $90°$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา



รูปภาพที่ 22 ภาพการแปลงเชิงเส้น $L(x) = (-x_2, x_1)^T$

ตัวอย่าง 2.1.27 พิจารณาฟังก์ชัน M นิยามโดย

$$M(x) = ({x_1}^2 + {x_2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

เนื่องจาก

$$M(\alpha x) = (\alpha^2 {x_1}^2 + \alpha^2 {x_2}^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| M(x)$$

$$\alpha M(x) \neq M(\alpha x) \qquad \text{เมื่อ } \alpha < 0 \text{ และ } x \neq 0$$

ดังนั้น M ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.1.28 ฟังก์ชัน $L : R^2 \to R^1$ นิยามโดย

$$L(x) = x_1 + x_2$$

เป็นการแปลงเชิงเส้น เนื่องจาก

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) &= \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) \\ &= \alpha L(x) + \beta L(y) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.29 ฟังก์ชัน L จาก R^2 ไปยัง R^3 นิยามโดย

$$L(x) = (x_2, x_1, x_1 + x_2)^T$$

เป็นการแปลงเชิงเส้น เนื่องจาก

$$\begin{aligned} L(\alpha x) &= (\alpha x_2, \alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha x_2)^T = \alpha L(x) \\ L(x + y) &= (x_2 + y_2, x_1 + y_1, x_1 + y_1 + x_2 + y_2)^T \\ &= (x_2, x_1, x_1 + x_2)^T + (y_2, y, y_1 + y_2)^T \\ &= \alpha L(x) + \beta L(y) \end{aligned}$$

สังเกตว่า ถ้าเรานิยามเมทริกซ์ A โดย

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$L(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = A(x)$$

สำหรับทุกๆ $x \in R^2$

โดยทั่วไป ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ใดๆ เราสามารถนิยามการแปลงเชิงเส้น L_A จาก R^n ไปยัง R^m โดย

$$L_A(x) = Ax \text{ สำหรับทุกๆ } x \in R^n$$

ฟังก์ชัน L_A เป็นการแปลงเชิงเส้น เนื่องจาก

$$\begin{aligned} L_A(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) \\ &= (\alpha Ax + \beta Ay) \\ &= \alpha L_A(x) + \beta L_A(y) \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจะเห็นว่าทุกๆ เมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จาก R^n ไปยัง R^m

ทฤษฎีบท 2.1.30 ถ้า L เป็นการแปลงเชิงเส้น จากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ W แล้ว

(i) $L(0_v) = 0_w$ เมื่อ 0_v และ 0_w คือ เวกเตอร์ศูนย์ใน Vและ W ตามลำดับ

(ii) ถ้า $v_1, v_2, \dots, v_n$ คือสมาชิกของ V และ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ เป็นสเกลาร์

แล้ว $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n)$

(iii) $L(-v) = -L(v)$ สำหรับทุก $v \in V$

พิสูจน์ (i) เพราะว่า $0_w + L(0_v) = L(0_v) = L(0_v + 0_v) = L(0_v) + L(0_v)$

ดังนั้น $L(0_v) = 0_w$

(ii) สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ

ให้ $P(n)$ แทน

$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n)$

เนื่องจาก $L(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 L(v_1)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใดๆ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_k L(v_k)$

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) &= L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k) + L(\alpha_{k+1} v_{k+1}) \\ &= \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n) \\ &\quad + \alpha_{n+1} L(v_{n+1}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n)$

(iii) ให้ $\quad 0_w = L(0_v) = L\big(v + (-v)\big) = L(v) + L(-v)$

เนื่องจาก $L(-v)$ คือ อินเวิร์สการบวกของ $L(v)$ ดังนั้น

$$L(-v) = -L(v)$$

ตัวอย่าง 2.1.31 ถ้า V คือปริภูมิเวกเตอร์ใดๆ แล้วฟังก์ชันเอกลักษณ์ I นิยามโดย

$$I(v) = v$$

สำหรับทุกๆ $v \in V$ เห็นได้ชัดว่า I เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่งส่ง V ไปยังตัวมันเอง

$$I(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha I(v_1) + \beta I(v_2)$$

บทนิยาม 2.1.32 ให้ $L : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น **แก่นกลาง** (Kernel) ของ L เขียนแทนด้วย $\ker(L)$

นิยามโดย $$\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0_w\}$$

บทนิยาม 2.1.33 ให้ $L : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ S เป็นปริภูมิย่อยของ V **ภาพ (Image)** ของ S เขียนแทนด้วย $L(S)$

นิยามโดย $$L(S) = \{w \in W \mid L(v) \ \in S\}$$

ในกรณีที่ $S = V$ เราเรียก $L(V)$ ว่า **พิสัย** (range) ของ L

ให้ $L : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จะเห็นว่า $\ker(L)$ เป็น ปริภูมิย่อยของ V และถ้า S เป็นปริภูมิย่อยใดๆ ของ V แล้ว $L(S)$ เป็นปริภูมิย่อยของ W

ทฤษฎีบท 2.1.34 ถ้า $L: V \to W$ คือการแปลงเชิงเส้นและ S คือปริภูมิย่อยของ V แล้ว

(i) $\ker(L)$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

(ii) $L(S)$ เป็นปริภูมิย่อยของ W

พิสูจน์ (i) ให้ $v \in \ker(L)$ และ α เป็นสเกลาร์

จะเห็นว่า $L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha 0_w = 0_w$

ดังนั้น $\alpha v \in \ker(L)$

ต่อไป ให้ $v_1, v_2 \in \ker(L)$

จะเห็นว่า $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w$

ดังนั้น, $v_1, v_2 \in \ker(L)$

จึงได้ว่า $\ker(L)$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

(ii) ให้ $\vec{w} = L(S)$ และ α เป็นสเกลาร์

จะมี $\vec{v} \in S$ ที่ทำให้ $L(\vec{v}) = \vec{w}$

เพราะว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ V

ดังนั้น $\alpha\vec{v} \in S$

จะได้ว่า $\mathrm{L}(\alpha\vec{v}) \in L(S)$

เพราะฉะนั้น $\alpha\vec{w} = \alpha L(\vec{v}) = L(\alpha\vec{v}) \in L(S)$

ต่อไป ให้ $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in L(s)$

จะมี $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in S$ ที่ทำให้ $L(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{w_1}$ และ $L(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{w_2}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in S$

จะทำให้ $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} = L(\overrightarrow{v_1}) + L(\overrightarrow{v_2}) = L(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \in L(S)$

สรุปได้ว่า $L(S)$ เป็นปริภูมิย่อยของ W

ตัวอย่าง 2.1.35 ให้ L เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก R^2 ไปยัง R^2 นิยามโดย

$$L(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \ker L &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, y \in R \right\} \\ &= span(\overrightarrow{e_2}) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} L(R^2) &= \left\{ L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2 \right\} \\ &= span(\overrightarrow{e_1}) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.36 ให้ $L: R^3 \to R^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นนิยามโดย

$$L(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)^T$$

และให้ S เป็นปริภูมิย่อยของ R^3 แผ่ทั่วโดย e_1และ e_3

จะเห็นว่า
$$\begin{aligned}\ker L &= \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \middle| L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \middle| L\left(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}-\alpha\\\alpha\\-\alpha\end{bmatrix} \middle| \alpha \in R\right\}\\
&= span\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

เพราะว่า
$$S = span(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3})$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}L(S) &= \left\{L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) \middle| \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in S\right\}\\
&= \left\{L\left(\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_3\end{bmatrix}\right) \middle| x_1, x_3 \in R\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}x_1+0\\0+x_3\end{bmatrix} \middle| x_1, x_3 \in R\right\}\\
&= R^2\end{aligned}$$

2.2 รูปแบบของสมการวงรี

จากสมการ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{————(*)}$$

ซึ่งเป็นสมการมาตรฐานของวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ พิกัด (0,0) แกนเอกและแกนโท อยู่บนแกนพิกัดมาตรฐาน

ให้ $x = r\cos\theta\, , y = r\sin\theta$

หากเราหมุนรูปวงรีทวนเข็มนาฬิกา เป็นมุม α° เมื่อ $0 \le \alpha^{\circ} \le 2\pi$ จะได้จุดใหม่เป็น (u, v)

ซึ่ง $u = r\cos(\theta+\alpha)\ , v\ = r\sin(\theta+\alpha)$

จะได้ว่า $(u,v) = (r(\cos\ \theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha), r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\ \theta\sin\alpha))$

$$= (r\cos\ \theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha, \mathrm{r}\sin\theta\cos\alpha + \mathrm{r}\cos\ \theta\sin\alpha)$$

$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha, y\cos\alpha + x\sin\alpha)$$

จาก $(*)$

จะได้

$$\frac{(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x^2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha\, xy + y^2\sin^2\alpha)}{a^2}+\frac{(x^2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\, xy + y^2\cos^2\alpha)}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)x^2 - 2\cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)xy + \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)y^2 = 1$$

ให้

$$A = \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)$$

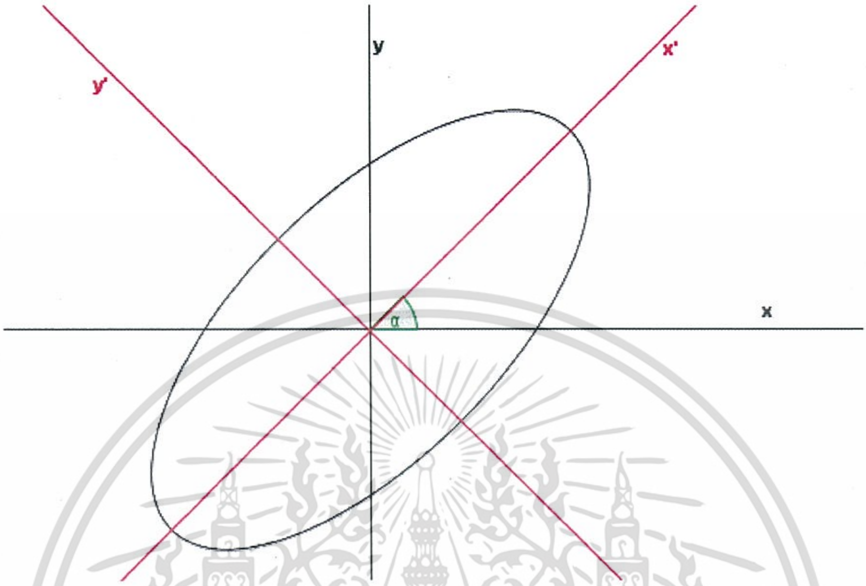
$$B = -2\cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$C = \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)$$

เมื่อ A, C เป็นบวก จะได้

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$$

เป็นสมการวงรีซึ่งหมุนจากแกนพิกัดมาตรฐาน เป็นมุม α° เมื่อ $0 \le \alpha^{\circ} \le 2\pi$



2.3 โปรแกรม GeoGebra

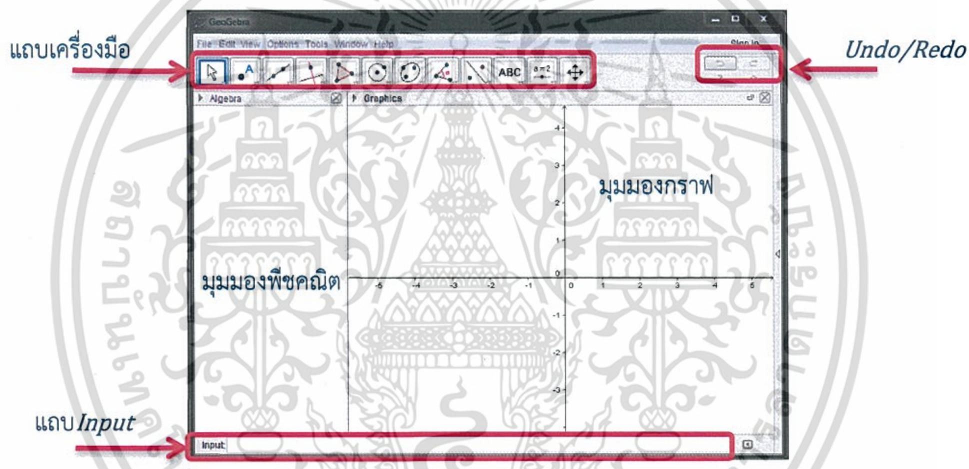
2.3.1 ความรู้เบื้องต้นของ GeoGebra

การทำงานเกี่ยวกับ GeoGebra

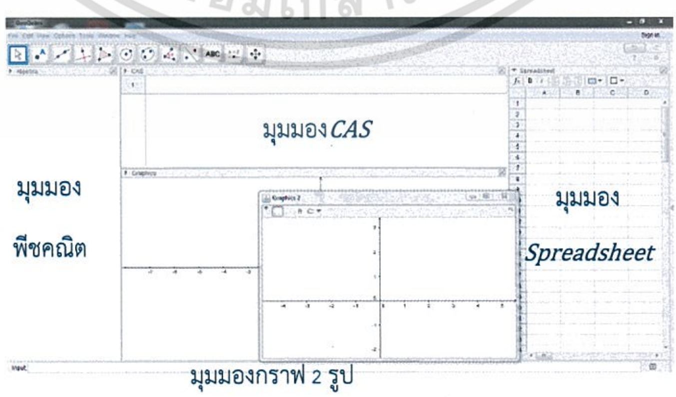
GeoGebra เป็นซอฟต์แวร์คณิตศาสตร์ที่เหมาะสำหรับการเรียนการสอนเรขาคณิต พีชคณิต และ แคลคูลัส กล่าวได้ว่า GeoGebra เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ที่เราสามารถสร้าง จุด เวกเตอร์ เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รูปหลายเหลี่ยม ภาคตัดกรวย และสมการต่างๆ

พื้นฐานของ GeoGebra

เครื่องมือในแถบเครื่องมือเราสามารถสร้างรูปทรงเรขาคณิต ในขณะเดียวกันโปรแกรมจะแสดงพิกัดที่สอดคล้องกับสมการในมุมมองพีชคณิต ในทางกลับกันเราสามารถใส่คำสั่งและฟังก์ชั่นพีชคณิตเข้ามาในแถบInput โดยตรงโดยใช้แป้นพิมพ์ ในขณะที่แสดงกราฟอยู่เราสามารถดูในมุมมองพีชคณิตไปพร้อมๆกันได้ กล่าวได้ว่าใน GeoGebra เรขาคณิตและพีชคณิตสามารถทำงานพร้อมกันได้



นอกจากมุมมองกราฟและมุมมองพีชคณิต GeoGebra ยังมี มุมมอง Spreadsheet มุมมอง CAS และยังสามารถแสดงมุมมองกราฟสองรูปไปพร้อมๆกันได้ มุมมองที่แตกต่างกันเหล่านี้สามารถแสดงหรือซ่อนโดยแถบเครื่องมือมุมมอง(View)



วิธีการบันทึกไฟล์ GeoGebra

1. คลิกที่เมนู 'ไฟล์' เลือก 'บันทึก'
2. เลือกโฟลเดอร์ที่ต้องการจะเก็บไฟล์งาน

3. ตั้งชื่อไฟล์งาน
4. คลิก 'บันทึก'

คำแนะนำ : ไฟล์ที่ถูกบันทึก จะบันทึกเป็นไฟล์นามสกุล '.ggb' ซึ่งเปิดได้เฉพาะกับโปรแกรม GeoGebra เท่านั้น

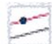
2.3.2 วิธีการใช้เครื่องมือ GeoGebra

1. เคลื่อนย้าย (Movement)
    - เคลื่อนที่ (Move) 
        - ลบอ็อบเจกต์โดยการกดปุ่ม Delete
        - ย้ายอ็อบเจกต์โดยการใช้ลูกศร
        - การทำงานในมุมมองกราฟ 3D สามารถหมุนกราฟดูในลักษณะ 3D ได้
    - หมุนรอบจุด (Move around point) 
        - เป็นเครื่องมือที่มีแต่ในเวอร์ชัน PC เท่านั้น
        - สร้างจุดเพื่อเป็นศูนย์กลางของการหมุน จากนั้นใช้เมาส์ในการลากหมุนรอบจุด
2. จุด (Point)
    - จุด (Point) 
        - คลิกที่มุมมองกราฟ เพื่อเราจะสร้างจุดใหม่ เราสามารถกำหนดพิกัดของจุดได้เพียงคลิกลงบนกราฟในพิกัดที่เราต้องการ
    - จุดบนอ็อบเจกต์ (Point on Object) 
        - เป็นพิกัดของจุดบนอ็อบเจกต์ สามารถเคลื่อนที่จุดภายในอ็อบเจกต์เท่านั้น
    - รวม/แยก จุด (Attach/Detach Point) 
        - การรวม คือ การที่เรามีส่วนของเส้นตรงหรืออ็อบเจกต์ และเราสร้างจุดขึ้นมาใหม่ จากนั้นคลิกที่จุดที่เราสร้างและพื้นที่บนอ็อบเจกต์ที่เราต้องการ จุดที่เราสร้างขึ้นมาใหม่นั้นจะเคลื่อนที่ไปยังอ็อบเจกต์ที่เราคลิก
        - การแยก คือ การที่เราคลิกที่จุดที่เราต้องการให้มันเป็นอิสระ ไม่อยู่ในส่วนของเส้นตรงหรือ
          อ็อบเจกต์ใดๆ จุดนั้นก็จะเป็นอิสระ
    - หาจุดตัดของอ็อบเจกต์ทั้งสอง (Intersect) 
        - สามารถคลิกที่อ็อบเจกต์สองอ็อบเจกต์ที่เกิดจุดตัด จุดที่ตัดกันทั้งหมดจะปรากฏขึ้น
        - คลิกตรงจุดที่อ็อบเจกต์ตัดกัน จะปรากฏจุดตัดขึ้นหนึ่งจุด
    - จุดกึ่งกลางหรือจุดศูนย์กลาง (Midpoint or Center) 
        - เราสามารถหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดได้ โดยที่เราสร้างจุดสองจุดขึ้นมาใหม่ จุดกึ่งกลางจะปรากฏขึ้นโดยอัตโนมัติ
        - เราสามารถหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงได้ โดยการคลิกที่ส่วนของเส้นตรงนั้นๆ จุดกึ่งกลางจะปรากฏขึ้น
        - เราสามารถหาจุดศูนย์กลางของวงกลมหรือวงรีได้ โดยคลิกที่วงกลมหรือวงรีนั้นๆ

- จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)
    - ลักษณะคล้ายการสร้างจุดใหม่ แต่ในมุมมองพีชคณิตบอกพิกัดจุดเป็นจำนวนเชิงซ้อนแทนการบอกเป็นพิกัด (x,y)

3. ส่วนของเส้นตรง (Line)
    - เชื่อมต่อจุดสองจุด (Line)
        - เลือกจุดสองจุด จะเกิดส่วนของเส้นตรงผ่านจุดสองจุดนั้น
    - ส่วนของเส้นตรงระหว่างจุดสองจุด (Segment)
        - เลือกจุดสองจุด จะเกิดส่วนของส่วนของเส้นตรงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง
        - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงความยาวของส่วนของเส้นตรงนั้นๆ
    - ส่วนของเส้นตรงพร้อมด้วยความยาวตรึง (Segment with Given Length)
        - เลือกจุดที่เป็นจุดเริ่มของส่วนของส่วนของเส้นตรง กำหนดความยาวของส่วนของเส้นตรงโดยใส่ตัวเลขลงบนหน้าต่างที่ปรากฏ
        - สามารถใช้การเคลื่อนที่เลื่อนจุดได้
    - รังสีผ่านจุดสองจุด (Ray)
        - เลือกจุดสองจุด จุดแรกจะเป็นจุดกำเนิดรังสีที่ผ่านจุดที่สอง
        - มุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการที่สอดคล้องกับรังสี
    - PolyLine ระหว่างจุด (Polyline)
        - มุมมองกราฟ สร้างจุดอย่างน้อยสามจุด เลือกจุดหนึ่งเพื่อเป็นจุดเริ่มต้นของ Polyline และเชื่อมต่อจุดกันไปสุดท้ายกลับมาคลิกที่จุดเริ่มต้นอีกครั้งเป็นการสิ้นสุด
        - มุมมองพีชคณิต จะแสดงความยาวของ Polyline
        - มุมมอง Spreadsheet เราสามารถกำหนดพิกัดในตาราง และคลิกขวา เลือก Create → Polyline สามารถแสดงกราฟในมุมมองกราฟได้เช่นกัน
    - เวกเตอร์ระหว่างจุดสองจุด (Vector)
        - เลือกจุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์
        - มุมมองพีชคณิตจะแสดงขนาดของเวกเตอร์
    - สร้างเวกเตอร์จากจุด (Vector from Point)
        - เลือกจุดและเวกเตอร์ขึ้นมา จากนั้นคลิกที่จุดและเวกเตอร์ที่สร้าง จะปรากฏเวกเตอร์อีกอันที่มีขนาดและทิศทางเหมือนเวกเตอร์ที่เราสร้างขึ้น

4. ส่วนของเส้นตรงลักษณะพิเศษ (Special Line)
    - เส้นตั้งฉาก (Perpendicular Line)
        - เลือกเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงและจุดหนึ่งจุดที่ไม่ได้อยู่บนส่วนของเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงนั้น
        - คลิกที่จุดและเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรง กราฟจะแสดงเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงนั้นและผ่านจุดที่เราสร้างขึ้น

- เส้นขนาน (Parallel Line) 
  - เลือกเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงและจุดหนึ่งจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงนั้น
  - คลิกที่จุดและเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรง กราฟจะแสดงส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงนั้นและผ่านจุดที่เราสร้างขึ้น
  - เราสามารถใช้คำสั่งเคลื่อนที่เปลี่ยนความชันของเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงนั้นต้นแบบได้
- เส้นแบ่งครึ่งด้านและตั้งฉาก (Perpendicular Bisector) 
  - เลือกส่วนของเส้นตรงหรืออ็อกเจกต์ขึ้น จากนั้นคลิกที่ส่วนของเส้นตรงหรือจุดสองจุดที่เราต้องการจะแบ่งครึ่ง ที่กราฟจะแสดงส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงนั้นๆ
- เส้นแบ่งครึ่งมุม (Angle Bisector) 
  - เลือกมุมหรือรูปสามเหลี่ยมหรืออ็อบเจกต์ที่มีมุม
  - วิธีที่หนึ่ง คลิกที่จุดสามจุดที่ต้องการจะแบ่งครึ่งมุม เช่น ต้องการแบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ ให้คลิกที่จุด A, B และ C ตามลำดับ
  - วิธีที่สอง คลิกที่เส้นสองเส้นที่เราต้องการแบ่งมุม เช่น ต้องการแบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ ให้คลิกที่ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$
- เส้นสัมผัส (Tangents) 
  - วิธีที่หนึ่ง เลือกจุดและ Conic Section ที่ต้องการ จะเกิดเส้นสัมผัสที่ผ่านจุดที่เราเลือกไปสัมผัสกับ Conic Section
  - วิธีที่สอง เลือกเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงและ Conic Section ที่ต้องการ จะเกิดเส้นสัมผัสที่ขนานกับเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงที่เราเลือกไปสัมผัสกับ Conic Section
- เส้นแกนหรือเส้นผ่านศูนย์กลาง (Polar or Diameter Line) 
  - เลือกจุดและ Conic Section จะแสดง Polar Line
  - เลือกเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงหรือเวกเตอร์และ Conic Section จะแสดง Conjugate Diameter
- ส่วนของเส้นตรงที่เหมาะสมที่สุด (Best Fit Line) 
  - สร้างเส้นแบบที่ดีที่สุดสำหรับชุดของจุดบนพิกัดต่างๆ โดยลากเมาส์ให้เกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมคลุมทุกจุดบนพิกัด กราฟจะแสดงเส้นแบบที่เหมาะสมกับทุกจุด
- โลคัส (Locus) 
  - เลือกจุด B ที่ขึ้นอยู่กับจุด A และมีฟังก์ชั่นรองรับ จากนั้นคลิกที่จุด A และ B กราฟจะแสดงโลคัส (หมายเหตุ : จุด A จะต้องเป็นจุดบนอ็อบเจกต์)
  - ทำการเลื่อนจุด A จะเห็นว่า จุด B เลื่อนไปตามเส้นโลคัส

5. รูปหลายเหลี่ยม (Polygon)

- รูปหลายเหลี่ยม (Polygon)
    - เลือกจุดอย่างน้อยสามจุดให้ต่อเนื่องกัน จากนั้นคลิกที่จุดแรกเพื่อเป็นการปิดรูปหลายเหลี่ยม
    - ในมุมมอมพีชคณิตจะแสดงพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม
- รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า (Regular Polygon)
    - เลือกสองจุด A และ B จากนั้นระบุจำนวนด้านที่ต้องการบนหน้าต่างที่ปรากฏขึ้นกราฟจะแสดงรูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันกับความยาวของ $\overline{AB}$
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม
- รูปหลายเหลี่ยมไม่บิดเบี้ยว (Rigid Polygon)
    - เลือกจุดอย่างน้อยสามจุดให้ต่อเนื่องกัน จากนั้นคลิกที่จุดแรกเพื่อเป็นการปิดรูปหลายเหลี่ยม
    - รูปที่ได้สามารถย้ายหรือหมุนโดยจุดสองจุด
    - ในมุมมอมพีชคณิตจะแสดงพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม
- เวกเตอร์รูปหลายเหลี่ยม (Vector Polygon)
    - เลือกจุดอย่างน้อยสามจุดให้ต่อเนื่องกัน จากนั้นคลิกที่จุดแรกเพื่อเป็นการปิดรูปหลายเหลี่ยม
    - รูปที่ได้สามารถเคลื่อนย้ายรูปได้เมื่อเราคลิกที่จุดแรก ส่วนจุดอื่นๆเมื่อเราคลิกจะเป็นอิสระ
    - ในมุมมอมพีชคณิตจะแสดงพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

6. วงกลมและส่วนโค้ง (Circle and Arc)

- วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางผ่านจุด (Circle with Center through Point)
    - เลือกจุด M และ P ที่กำหนดวงกลม ซึ่งมีจุด M เป็นจุดศูนย์กลาง และวงกลมนี้ผ่านจุด P
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของวงกลม
- วงกลมจากจุดศูนย์กลางและรัศมี (Circle with Center and Radius)
    - เลือกจุดศูนย์กลาง และระบุรัศมีที่ต้องการลงบนหน้าต่างที่ปรากฏขึ้น
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของวงกลม
- วงเวียน (Compass)
    - เลือกส่วนของเส้นตรงหรือจุดสองจุดเพื่อเป็นรัศมี จากนั้นคลิกเลือกจุดที่ต้องการให้เป็นจุดศูนย์กลาง
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของวงกลม
- วงกลมผ่านจุดสามจุด (Circle through 3 Point)
    - เลือกจุดสามจุดที่ต้องการให้วงกลมผ่านจุดทั้งสาม (หมายเหตุ : ทั้งสามจุดไม่สามารถอยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันได้)
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของวงกลม

- ครึ่งวงกลมผ่านจุดสองจุด (Semicircle through 2 Point)
    - เลือกจุดสองจุด A และ B เพื่อสร้างรูปครึ่งวงกลม บนส่วนของเส้นตรงหรือช่วงของ AB
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงความยาวของครึ่งวงกลม
- ส่วนโค้งวงกลมที่มีจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด (Circular Arc)
    - ขั้นแรกให้เลือกจุดศูนย์กลางของส่วนโค้งวงกลม จากนั้นเลือกจุดเริ่มต้นของส่วนโค้งและจุดอื่นที่ระบุความยาวของส่วนโค้ง
    - ส่วนโค้งที่ถูกดึงออกมาจะถูกดึงทิศทวนเข็มนาฬิกาเสมอ
    - ส่วนที่เป็นจุดศูนย์กลางและจุดเริ่มต้นนั้นจะอยู่ในวงกลมเดียวกัน แต่จุดที่สามไม่จำเป็นต้องอยู่ในวงกลมเดียวกัน
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงความยาวของส่วนโค้ง
- ส่วนโค้งวงกลมที่ผ่านจุดสามจุด (Circumcircular Arc)
    - เลือกสามจุดเพื่อสร้างวงกลมผ่านจุดเหล่านี้ ดังนั้นจุดที่เลือกจุดแรกเป็นจุดเริ่มต้นของส่วนโค้ง จุดที่สองตั้งอยู่บนโค้งและจุดที่สามคือจุดสิ้นสุดของส่วนโค้ง
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงความยาวของส่วนโค้ง
- เซกเตอร์วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางระหว่างจุดสองจุด (Circular Sector)
    - ขั้นแรกให้เลือกจุดกึ่งกลางของ Circular Sector จากนั้นเลือกจุดเริ่มต้นของส่วนโค้งและจุดที่สามที่ระบุความยาวของส่วนโค้ง
    - ส่วนโค้งที่ถูกดึงออกมาจะถูกดึงทิศทวนเข็มนาฬิกาเสมอ
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงพื้นที่ของ Circular Sector
- เซกเตอร์วงกลมผ่านจุดสามจุด (Circumcircular Sector)
    - เลือกจุดสามจุดเพื่อสร้าง Circular Sector ผ่านจุดเหล่านี้ ดังนั้น จุดแรกเป็นจุดเริ่มต้นของส่วนโค้ง จุดที่สองอยู่บนส่วนโค้ง และจุดที่สามกำหนดจุดปลายของส่วนโค้ง
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงพื้นที่ของ Circumcircular Sector

7. ภาคตัดกรวย (Conic Section)
    - วงรี (Ellipse)
        - เลือกจุดสองจุดที่เป็นโฟกัสของวงรี จากนั้นระบุจุดที่สามที่อยู่ในวงรี
        - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของวงรี
    - ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)
        - เลือกจุดสองจุดที่เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา จากนั้นระบุจุดที่สามที่อยู่ในไฮเพอร์โบลา
        - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของไฮเพอร์โบลา
    - พาราโบลา (Parabola)
        - เลือกจุดโฟกัส และ ไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา
        - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของพาราโบลา

- ภาคตัดกรวยผ่านจุดห้าจุด (Conic through 5 Point)
    - เลือกจุดห้าจุด เพื่อให้ Conic Section ผ่านจุดเหล่านี้
    - ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการของ Conic Section

8. การวัดขนาด (Measurement)

- มุม (Angle)
    - คลิกสามจุดเพื่อสร้างมุมระหว่างจุด จุดที่สองที่เลือกเป็นจุดยอดของมุม
    - คลิกส่วนของเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงสองเส้นเพื่อสร้างมุมระหว่างส่วนของเส้นตรง
    - คลิกสองเวกเตอร์การสร้างมุมระหว่างเวกเตอร์
    - คลิกด้านประกอบของรูปหลายเหลี่ยมเพื่อระบุขนาดของมุมรูปหลายเหลี่ยม
- มุมตามขนาดที่กำหนด (Angle with Given Size)
    - เลือกจุดที่เป็นแขนของมุม จุดยอดมุม ตามลำดับ ระบุขนาดของมุมบนหน้าต่างที่ปรากฏขึ้น
- ระยะทางหรือความยาว (Distance or Length)
    - เครื่องมือนี้จะวัดระยะทางจาดจุดสองจุด เส้นสองเส้น หรือจุดและเส้น ยังสามารถใช้วัดเส้นรอบวงของวงกลม วงรี และเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยมได้เช่นกัน
- พื้นที่ (Area)
    - เครื่องมือนี้จะช่วยวัดพื้นที่ของรูปวงกลม วงรี และรูปหลายเหลี่ยม
- ความชัน (Slope)
    - เลือกเส้นหรือส่วนของเส้นตรง เครื่องมือนี้จะช่วยวัดความชันเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรง
- สร้างรายการ (List)
    - มุมมองกราฟ คลิกที่เครื่องมือลากคลุมอ็อบเจกต์ที่ต้องการ เครื่องจะสร้างรายการของอ็อบเจกต์นั้นๆ
    - มุมมอง Spreadsheet เลือกข้อมูลในตารางที่ต้องการ คลิกที่เครื่องมือ จะปรากฏหน้าต่างสำหรับการตั้งชื่อ การปรับเปลี่ยนและการสร้างรายการจากข้อมูลที่เลือก

9. การแปลง (Transformation)

- สะท้อนอ็อบเจกต์ข้ามเส้น (Reflect about Line)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการให้เกิดการสะท้อน เลือกเส้นเพื่อระบุว่าเป็นเส้น
    - ของการสะท้อน
- สะท้อนอ็อบเจกต์รอบจุด (Reflect about Point)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการให้เกิดการสะท้อน เลือกจุดเพื่อระบุว่าเป็นจุดของการสะท้อน

- สะท้อนอ็อบเจกต์บนวงกลม (Reflect about Circle)
    - เป็นการสะท้อนที่ปรับจากอ็อบเจกต์ต่างๆให้ให้มีส่วนโค้งเหมือนวงกลม
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการสะท้อน เลือกวงกลมเพื่อระบุว่าเป็นวงกลมของการปรับ
- หมุนอ็อบเจกต์รอบจุดด้วยมุมที่กำหนด (Rotate about Point)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่เราต้องการจะหมุน จากนั้นให้คลิกที่จุดเพื่อกำหนดศูนย์กลางของการหมุนและระบุมุมในการหมุนในหน้าต่างปรากฏ
- เลื่อนขนานอ็อบเจกต์ด้วยเวกเตอร์ (Translate by Vector)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการเลื่อน เลือกเวกเตอร์ที่ต้องการให้อ็อบเจกต์เลื่อนไปตามเวกเตอร์
    - เครื่องมือนี้สามารถคัดลอกอ็อบเจกต์ต้นแบบได้
- ย่อ/ขยายอ็อบเจกต์จากจุดด้วยแฟกเตอร์ (Dilate from Pont)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการเปลี่ยนขนาด เลือกจุดเพื่อระบุจุดเปลี่ยนและใส่ขนาดที่ต้องการเปลี่ยนบนหน้าต่างที่ปรากฏ

10. เครื่องมือพิเศษ (Special Object)

- แทรกข้อความ (Text)
    - วิธีที่หนึ่ง ระบุตำแหน่งในมุมมองกราฟเพื่อสร้างข้อความใหม่ในมุมมองกราฟ
    - วิธีที่สอง เลือกจุดเพื่อสร้างข้อความใหม่ในพิกัดของจุดนั้น
    - ข้อความที่พิมพ์โดยตรงผ่านหน้าต่างที่ปรากฏขึ้นมานั้น คือเป็นข้อความแบบคงที่ ไม่มีผลกระทบต่อค่าของอ็อบเจกต์ใด
    - ถ้าต้องการสร้างข้อความที่สามารถปรับเปลี่ยนค่าของอ็อบเจกต์ได้ ให้เลือกอ็อบเจกต์นั้นๆและทำการใส่ข้อความลงในช่อง “นิยาม” หรือ “ค่า”
- แทรกภาพ (Image)
    - เครื่องมือนี้จะช่วยแทรกรูปภาพในมุมมองกราฟ
    - วิธีที่หนึ่ง คลิกตำแหน่งในกราฟเพื่อระบุตำแหน่งของภาพซึ่งจะเป็นตำแหน่งมุมล่างซ้ายของภาพ
    - วิธีที่สอง เลือกจุดที่จะเป็นตำแหน่งของภาพ โดยจุดนั้นจะเป็นตำแหน่งมุมล่างซ้ายของภาพเช่นกัน
    - จากนั้นจะมีหน้าต่างขึ้นมาให้เราเลือกภาพที่อยู่ในคอมพิวเตอร์
- ปากกา (Pen)
    - เครื่องมือนี้จะเปลี่ยนมุมมองกราฟให้เป็นกระดานไวท์บอร์ด มีประโยชน์มากสำหรับงานมัลติมีเดีย และเครื่องมือนี้จะเปลี่ยนเมาส์เป็นปากกาเมื่อคลิกซ้าย จะเปลี่ยนเป็นยางลบเมื่อคลิกขวา
- รูปร่างฟรีแฮนด์ (Freehand Shape)
    - เครื่องมือนี้ช่วยแปลงรูปที่วาดลงบนมุมมองกราฟด้วยมือที่ยอมรับได้ ให้เป็นรูปทรงที่แน่นอน

- ความสัมพันธ์ระหว่างอ็อบเจกต์สองอ็อบเจกต์ (Relation)
  - เลือกอ็อบเจกต์สองอ็อบเจกต์ จะปรากฏหน้าต่างที่แสดงข้อมูลความสัมพันธ์ของทั้งสองอ็อบเจกต์
- ตัวตรวจสอบฟังก์ชัน (Function Inspector)
  - ใส่ฟังก์ชั่นที่เราต้องการในการวิเคราะห์ แล้วเลือกเครื่องมือ

11. เครื่องมือดำเนินการของอ็อบเจกต์ (Action Object)

- สไลเดอร์ (Slider)
  - คลิกที่เครื่องมือ จะปรากฏหน้าต่างให้เราระบุช่วงของแถบเลื่อน มีให้เลือกว่าช่วงจะเป็นจำนวนจริง มุม หรือจำนวนเต็ม
  - แถบเลื่อนจะแสดงบนมุมมองกราฟ แถบเลื่อนจะไม่ได้รับผลกระทบจากการย่อ/ขยายกราฟและไม่มีความสัมพันธ์กับระบบพิกัด
  - แถบเลื่อนจะเลื่อนได้เมื่อเครื่องมืออยู่ในโหมดเคลื่อนที่หรือไลเดอร์เท่านั้น
- เลือกช่องเพื่อแสดงหรือซ่อนอ็อบเจกต์ (Check Box)
  - สร้าง Check Box ในมุมมองกราฟ ที่เก็บค่าเป็นบูลีน เก็บค่า ‘Ture’ ‘False’
  - เครื่องมือนี้สามารถแสดงหรือซ้อนอ็อบเจกต์ได้มากกว่าหนึ่งอ็อบเจกต์ โดยสามารถเลือกอ็อบเจกต์ผ่านหน้าต่างที่ปรากฏขึ้น
- แทรกปุ่ม (Button)
  - เรียกใช้เครื่องมือนี้ในมุมมองกราฟ สามารถตั้งชื่อหรือใส่คำอธิบายบนหน้าต่างที่ปรากฏขึ้น หรือเข้าไปใส่ใน OnClick
- แทรกกล่องรับข้อมูล (Input Box)
  - สร้าง Input Box ในมุมมองกราฟ สามารถตั้งชื่อหรือใส่คำอธิบายและเลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการเชื่อมกับ Input Box

12. ทั่วไป (General)

- เลื่อนมุมมองกราฟิก (Move Graphics View)
  - การเลื่อนมุมมองในมุมมองกราฟ สามารถลากและปล่อยพื้นหลังเพื่อเปลี่ยนพื้นที่การมอง
  - สามารถเปลี่ยนอัตราส่วนของแกน x แกน y เพียงกดปุ่ม Alt ค้างไว้พร้อมกับใช้เมาส์เลื่อนไปด้วย
- ซูมเข้า (Zoom In)
  - คลิกที่ตำแหน่งใดๆของมุมมองกราฟ มุมมองกราฟจะขยายเข้า
  - ตำแหน่งของการคลิกกำหนดการซูม
- ซูมออก (Zoom Out)
  - คลิกที่ตำแหน่งใดๆของมุมมองกราฟ มุมมองกราฟจะขยายออก
  - ตำแหน่งของการคลิกกำหนดการซูม

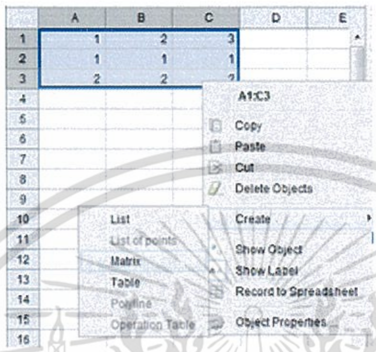
- แสดง/ซ่อนอ็อบเจกต์ (Show/Hide Object)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการแสดง/ซ่อน หลังจากการเปิดใช้งานเครื่องมือนี้ จากนั้นคลิกที่เครื่องมืออื่นๆการเปลี่ยนแปลงจะเกิดขึ้น
    - เมื่อคลิกที่เครื่องมือนี้อ็อบเจกต์ที่ควรจะซ่อนอยู่ก็จะแสดงขึ้น
- แสดง/ซ่อน ป้าย (Show/Hide Label)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการแสดง/ซ่อน ป้ายชื่อ
- คัดลอกรูปแบบการมองเห็น (Copy Visual Style)
    - เครื่องมือนี้สามารถคัดลอกเราสมบัติของอ็อบเจกต์หนึ่งไปยังอีกอ็อบเจกต์หนึ่งได้ เช่น สี ขนาด ลักษณะ
- ลบอ็อบเจกต์ (Delete)
    - เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการลบ
    - สามารถแก้ไขการลบได้ คลิกปุ่ม Undo เมื่อลบอ็อบเจกต์ที่ไม่ถูกต้อง

2.3.3 การใช้คำสั่ง และ ฟังก์ชัน ของ GeoGebra ในปัญหาพิเศษ

- การสร้างเมทริกซ์

  วิธีที่หนึ่ง ใส่คำสั่ง A = {{1, 2, 3}, {1, 1, 1}, {2, 2, 2}} ในแถบInput จะได้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

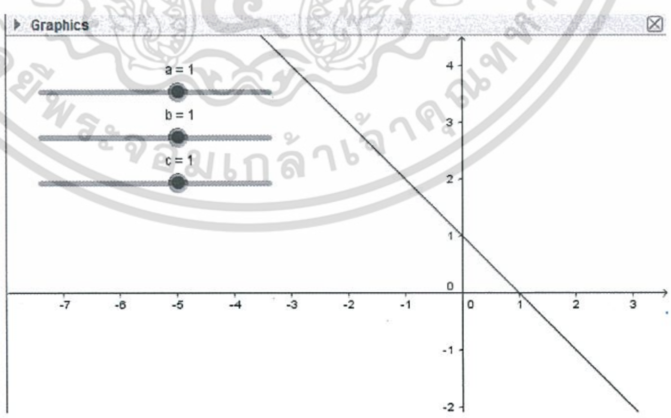
  วิธีที่สอง สร้างโดยใช้มุมมอง Spreadsheet ใส่ค่าในตาราง เลือก Create > Matrix



  จะได้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- การใส่ฟังก์ชั่น

  เรามาสามารถใส่ฟังก์ชั่นที่เราต้องการในแถบ Input เช่น $2x + 3y = 4$, $x^2 + y^2 = 0$ ในมุมมองพีชคณิตจะแสดงสมการที่เรา Input เข้าไป ในมุมมองกราฟจะแสดงกราฟตามสมการที่เรา Input เข้าไปเช่นกัน ในทางกลับกันถ้าเราใส่ฟังก์ชั่นที่มีตัวแปรเข้าไป เช่น $ax + by = c$ ในมุมมองกราฟจะแสดงเครื่องมือสไลเดอร์สำหรับตัวแปร a, b และ c



- คำสั่งหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ (MatrixRang Command)

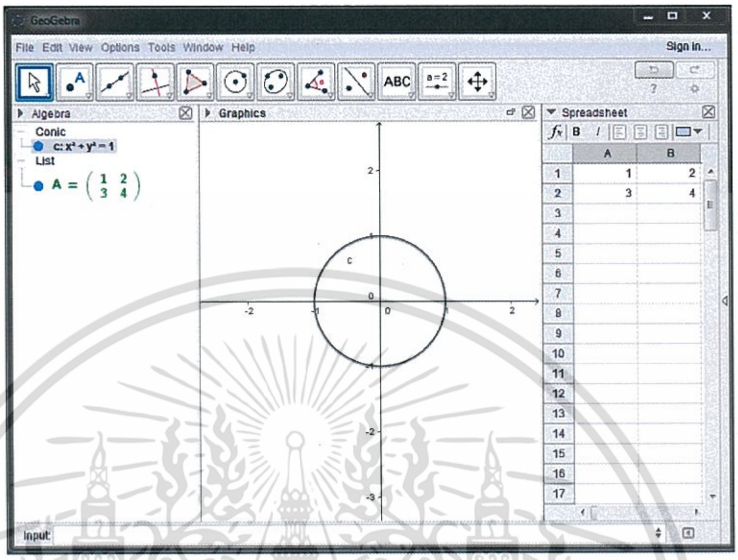
  ใส่โค้ด MatrixRang[<matrix>] ในแถบ Input

  เช่น MatrixRank[{{2, 2}, {1, 1}}] (Rang = 1)

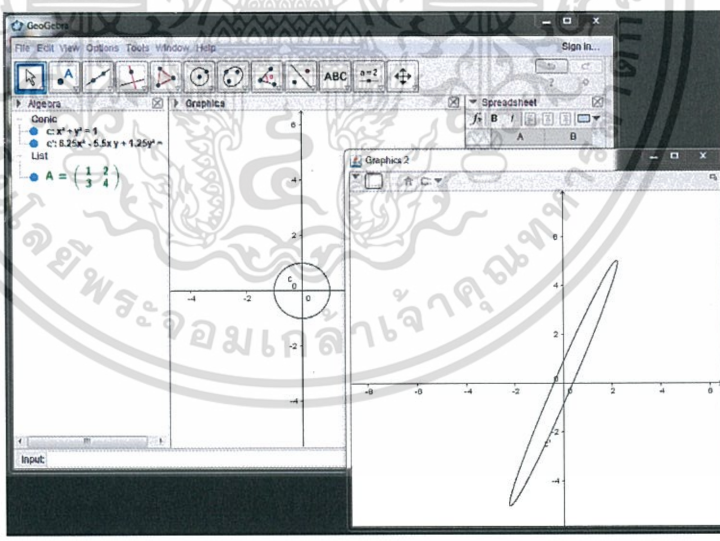
  MatrixRank[{{1, 2}, {3, 4}}] (Rang = 2)

  A = {{1, 2, 3}, {1, 1, 1}, {2, 2, 2}} MatrixRank[A] (Rang = 2)

- คำสั่ง ApplyMatrix (ApplyMatrix Command)
  ใส่โค้ด ApplyMatrix[<matrix>,<object>] ในแถบ Input
  ตัวอย่าง ขั้นแรกกำหนดเมทริกซ์และฟังก์ชันที่ต้องการ Apply



ขั้นที่สองใส่โค้ด ApplyMatrix[<matrix>,<object>] ในแถบ Input



เราสามารถเปลี่ยนตัวเลขในเมทริกซ์เพื่อดูการเปลี่ยนแปลงของลักษณะวงกลมที่เปลี่ยนไป

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

จาก ตัวอย่าง 2.1.29 จะเห็นว่า สำหรับแต่ละ $A \in R^{m\times n}$ เรานิยามการแปลงเชิงเส้น จาก R^n ไปยัง R^m ได้ โดยที่ $L_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^m$

ทฤษฎีต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า ทุกๆการแปลงเชิงเส้น $L: R^n \to R^m$ จะมีเมทริกซ์ $A \in R^{m\times n}$ โดยที่ $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^n$

ทฤษฎีบท 3.1 (Matrix representations of Linear transformations)
ถ้า L เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m แล้ว จะมีเมทริกซ์ $A \in R^{m\times n}$ ที่ทำให้ $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^n$

พิสูจน์ ให้ L เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m

สำหรับ $j = 1,2,3,\dots,n$ เรานิยาม $\overrightarrow{a_j} = L(\overrightarrow{e_j})$

สมมติสัญลักษณ์ $\overrightarrow{a_j} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T = L(\overrightarrow{e_j})$

ให้ $A = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}]$

เห็นได้ชัดว่า $A \in R^{m\times n}$

ต่อไปจะแสดงว่า $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^n$

ให้ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n$

ดังนั้น $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= x_1L(\overrightarrow{e_1}) + x_2L(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_nL(\overrightarrow{e_n}) \\ &= x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{a_n} \\ &= \begin{bmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} \cdots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} \cdots + x_na_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + x_3a_{m3} \cdots + x_na_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \cdots + a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} \cdots + a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= A\vec{x} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า ถ้า L เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m แล้ว จะมีเมทริกซ์ $A \in R^{m\times n}$ ที่ทำให้ $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^n$

ทฤษฎีข้างต้นอธิบายเราว่า สำหรับ การแปลงเชิงเส้น $L:\ R^n \to R^m$ ใดๆ จะมีเมทริกซ์ $A \in R^{m \times n}$ ที่ทำให้ $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^n$ ยิ่งไปกว่านั้น หลักที่ j ของเมทริกซ์ A หาได้จาก $L(\overrightarrow{e_j})$ เมื่อ $j = 1,2,3, \dots, n$

เราเรียกเมทริกซ์ A ดังกล่าวนี้ว่า **เมทริกซ์มาตรฐาน** ซึ่งแทนการแปลงเชิงเส้น L

ตัวอย่าง 3.2 ให้ $L:\ R^3 \to R^2$ นิยามโดย $L(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3)^T$ ทุกๆ $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ใน R^3 เราแสดงได้โดยไม่ยากว่า L เป็นการแปลงเชิงเส้น

ต่อไปเราเริ่มพิจารณา เมทริกซ์มาตรฐาน ซึ่งแทนการแปลงเชิงเส้น L โดยพิจารณา $L(\overrightarrow{e_1}), L(\overrightarrow{e_2})$ และ $L(\overrightarrow{e_3})$ ดังนั้น

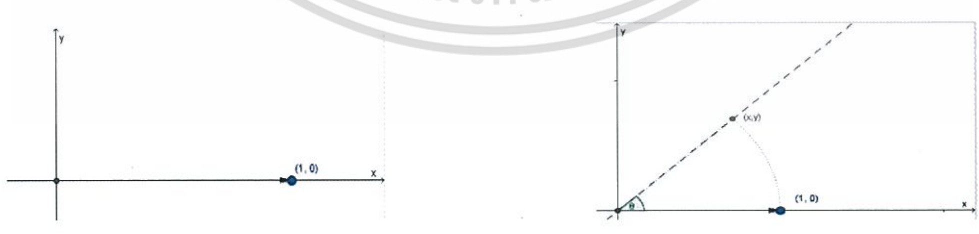
$$L(\overrightarrow{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L(\overrightarrow{e_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ และ } L(\overrightarrow{e_3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์มาตรฐาน ซึ่งแทนการแปลงเชิงเส้น L นี้คือ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ สำหรับทุกๆ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in R^3$

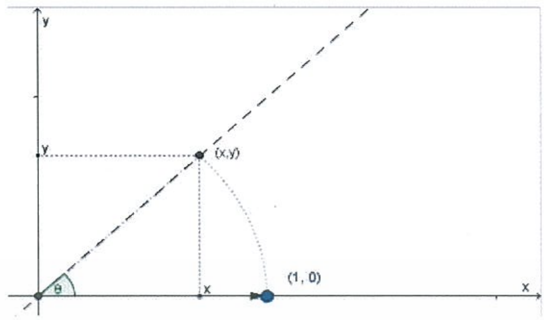
ตัวอย่าง 3.3 ให้ L เป็นการแปลงเชิงเส้น จาก R^2 ไปยัง R^2 โดยการดำเนินการหมุนแต่ละเวกเตอร์ใน R^2 ไปเป็นมุม θ ทิศทางทวนเข็มนาฬิการอบจุดกำเนิด

เราพิจารณา $L(\overrightarrow{e_1})$ และ $L(\overrightarrow{e_2})$ ดังนี้



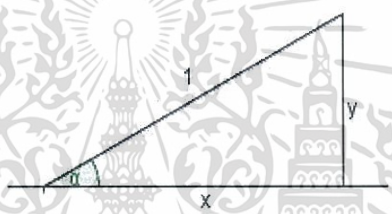
รูปภาพที่ 23 ภาพของ $\boldsymbol{L(\overrightarrow{e_1})}$

จากรูปข้างต้น เราพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้



รูปภาพที่ 24 ภาพที่ได้จากการพิจารณาภาพของ $\boldsymbol{L(\overrightarrow{e_1})}$

จะได้

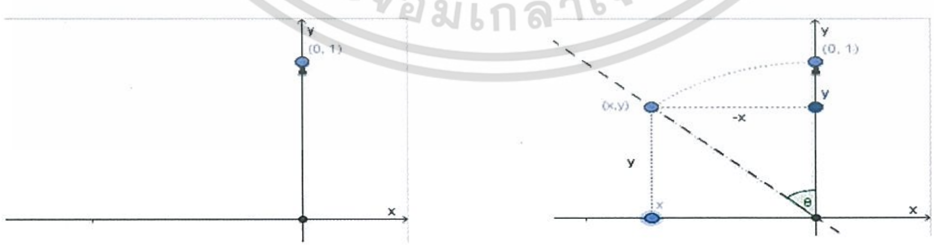


รูปภาพที่ 25 สามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$ และ $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$

ทำให้ได้ว่า $L(\overrightarrow{e_1}) = \begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix}$

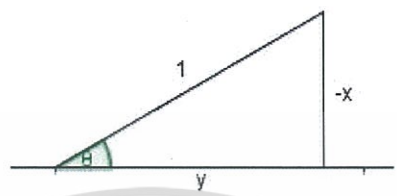
ต่อไปพิจารณา $L(\overrightarrow{e_2})$



รูปภาพที่ 26 ภาพของ $\boldsymbol{L(\overrightarrow{e_2})}$

เนื่องจากพิกัด (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 2 ดังนั้น $x < 0$ และ $y > 0$

จะได้



รูปภาพที่ 27 สามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้น $\cos\theta = y$ และ $\sin\theta = -x$

ทำให้ได้ว่า $L(\overline{e_1}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

ดังนั้น เมทริกซ์มาตรฐาน ซึ่งแทนการหมุนเป็นมุม θ รอบจุดกำเนิดในทิศทวนเข็มนาฬิกา คือ

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

จุดเริ่มต้นของปัญหาพิเศษนี้ เกิดจากคำถามในเชิงเรขาคณิตง่ายๆที่ว่า รูปร่างของเรขาคณิต เช่น ส่วนของเส้นตรง,วงกลม และ อื่นๆ เปลี่ยนแปลงไปเช่นไร เมื่อรูปร่างเหล่านั้นถูกแปลงด้วยการแปลงเชิงเส้น อย่างไรก็ตามคำถามนี้เราพุ่งความสนใจไปบนปริภูมิเวกเตอร์ R^2 เท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.4 [1] ถ้า L เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้วภาพของส่วนของเส้นตรงภายใต้ L เป็นส่วนของเส้นตรงหรือจุด

เราทราบจาก ทฤษฎีบท 3.1 ว่า การแปลงเชิงเส้นใดๆสามารถแทนได้ด้วยเมทริกซ์ ทฤษฎีบทต่อไปนี้อธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของส่วนของเส้นตรงภายใต้การแปลงเชิงเส้นที่สร้างได้จากเมทริกซ์ที่มีตัวผกผัน

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $A \in R^{2\times2}$ โดยที่ $\det A \neq 0$

1) ภาพของส่วนของเส้นตรงภายใต้ A คือ ส่วนของเส้นตรง
2) ภาพของส่วนของเส้นตรง ที่ผ่านจุดกำเนิดภายใต้ A คือ ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด
3) ภาพของสองส่วนของเส้นตรงที่ขนานกัน คือ สองส่วนของเส้นตรงที่ขนานกัน

พิสูจน์ 1) ให้ W เป็นส่วนของเส้นตรง ซึ่งกำหนดด้วย $ax + by = c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง เราเขียน สมการส่วนของเส้นตรง W ได้ในรูป ผลคูณของเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [c] \text{ ทุกๆ } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in W$$

ให้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in W$ และ$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in R^2$ โดยที่ $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

เพราะว่า $\det A \neq 0$

จึงได้ว่า $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [c]$

ให้ $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \in R^{1\times 2}$ โดยที่ $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$

เราจะได้ว่า $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [c]$

นั่นคือ $\alpha x' + \beta y' = c$ เป็นภาพของส่วนของเส้นตรง $ax + by = c$ ภายใต้การแปลงเชิงเส้นที่สร้างมาจากเมทริกซ์ A

2) เนื่องจากรูปแบบทั่วไปของสมการส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด คือ $ax + by = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยขั้นตอนเกี่ยวกับบทพิสูจน์ 1) เราจึงได้ว่า $\alpha x' + \beta y' = 0$ เป็นภาพของส่วนของเส้นตรง $ax + by = 0$ ภายใต้การแปลงเชิงเส้น ที่สร้างมาจากเมทริกซ์ A

3) ให้ W_1แทนส่วนของเส้นตรง $ax + by = c$

W_2แทนส่วนของเส้นตรง $ax + by = d$

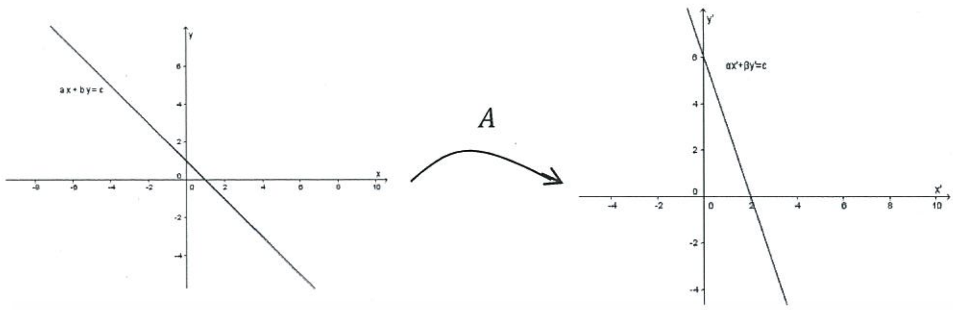
เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

เห็นได้ชัดว่า W_1ขนานกับ W_2

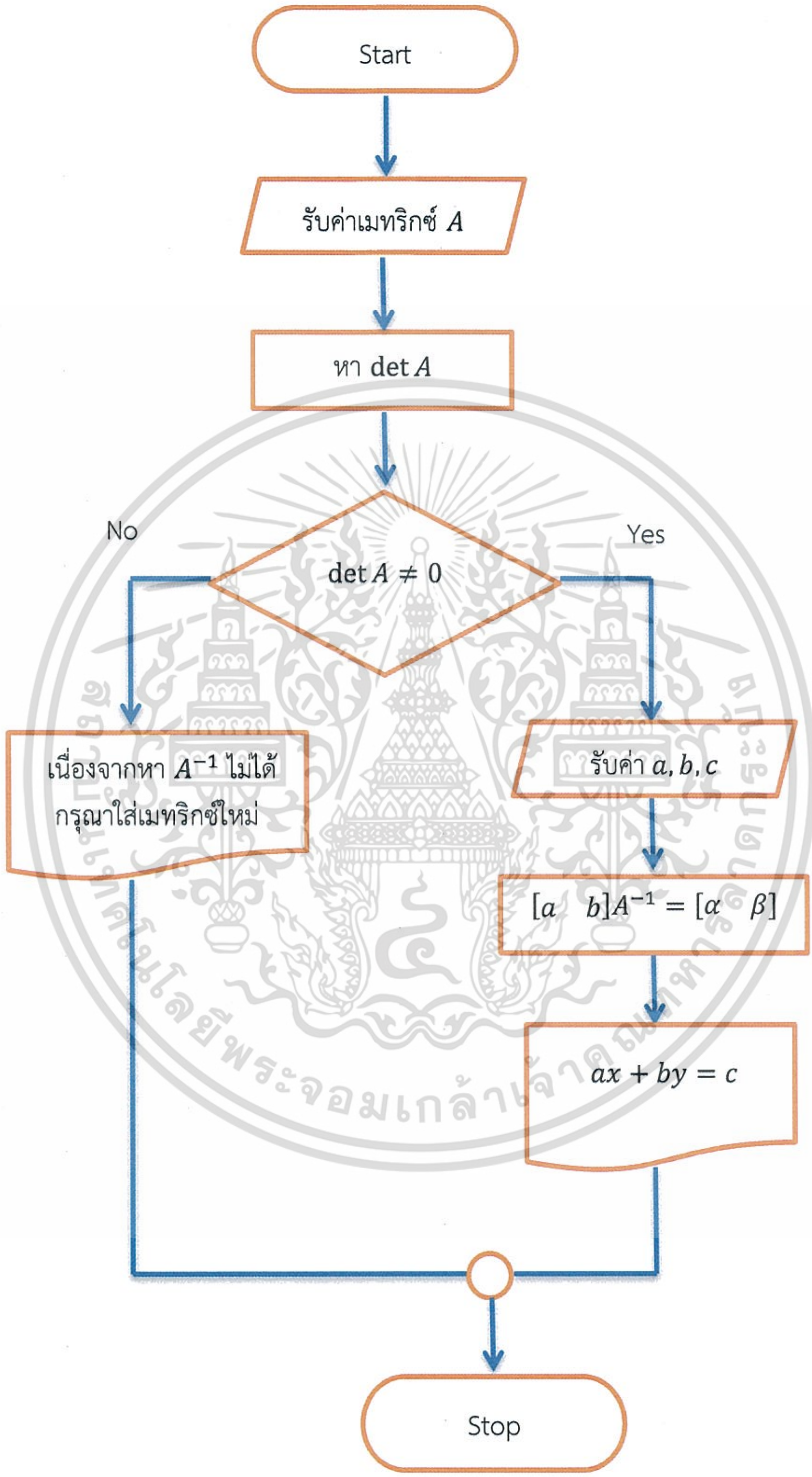
โดยบทพิสูจน์ 1) ทำให้เราทราบว่า ภาพของส่วนของเส้นตรง W_1และ W_2 ภายใต้การแปลงเชิงเส้น ที่สร้างมา จากเมทริกซ์ A คือ $ax' + by' = c$ และ $ax' + by' = d$ ตามลำดับ โดยที่

$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}A^{-1}$เห็นได้ชัดว่า ภาพของส่วนของเส้นตรงทั้งสองยังคงเป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกัน

แผนภาพ



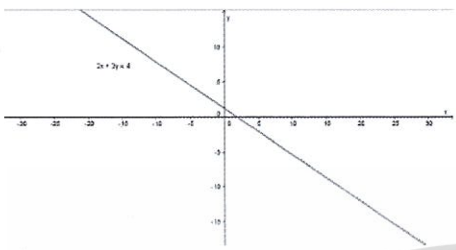
รูปภาพที่ 28 แผนภาพ



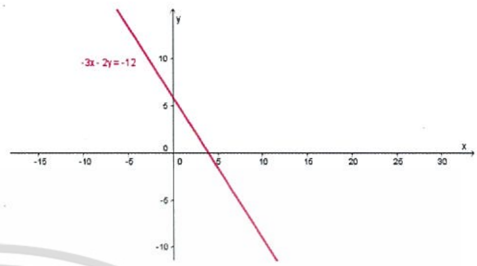
Start
รับค่าเมทริกซ์ A
หา $\det A$
No
$\det A \neq 0$
Yes
เนื่องจากหา A^{-1} ไม่ได้
กรุณาใส่เมทริกซ์ใหม่
รับค่า a, b, c
$[a \quad b]A^{-1} = [\alpha \quad \beta]$
$ax + by = c$
Stop

ตัวอย่าง 3.6 ให้ W แทนส่วนของเส้นตรง $2x + 3y = 4$ และ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

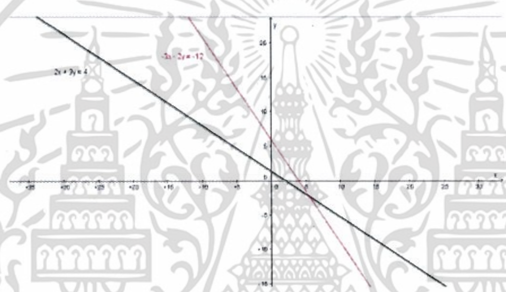
ด้วยการแปลงเชิงเส้นที่สร้างได้จากเมทริกซ์ A เราจะได้ภาพของ W ดังนี้



กราฟ $2x + 3y = 4$



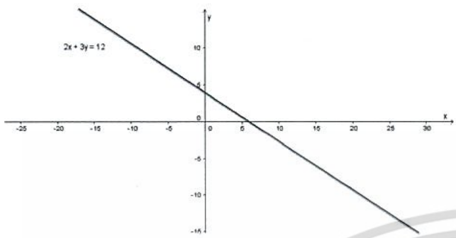
กราฟผลลัพธ์



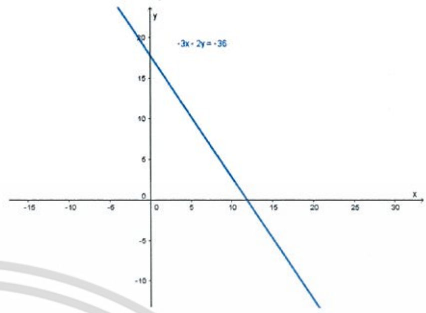
สองกราฟรวมกัน

ตัวอย่าง 3.7 ให้ U แทนส่วนของเส้นตรง $2x + 3y = 12$ และ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ด้วยการแปลงเชิงเส้นที่สร้างได้จากเมทริกซ์ A เราจะได้ภาพของ U ดังนี้



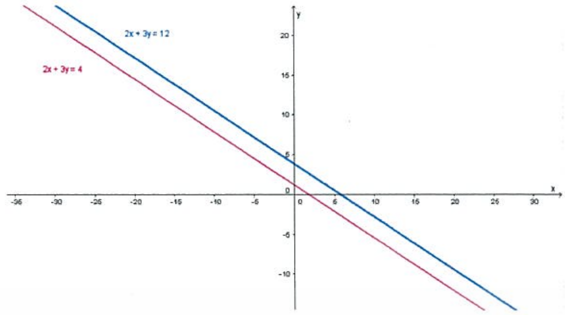
กราฟ $2x + 3y = 12$

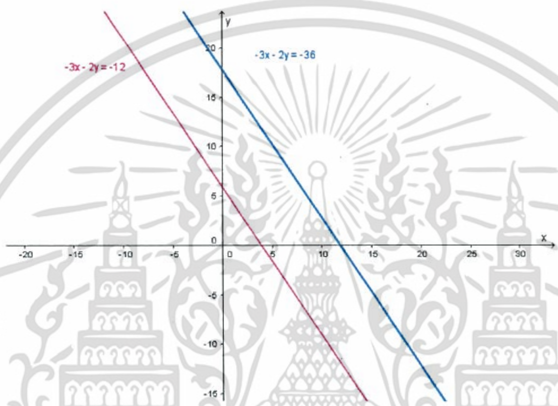


กราฟผลลัพธ์

สองกราฟรวมกัน

เพิ่มเติม





ปัญหาพิเศษนี้ เราสนใจศึกษาภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น ในเบื้องต้น เราจึงให้บทนิยามของ ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น ดังนี้

บทนิยาม 3.8 ให้ $L : R^2 \to R^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

เรากล่าวว่า $L(S) = \left\{ L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \middle| (x, y) \in S \right\}$ เป็นภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น L

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

4.1 ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น

ปัญหาพิเศษนี้ เราศึกษาภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น จึงขอเริ่มต้นโดยการกล่าวถึงสัญลักษณ์ที่ใช้ในปัญหาพิเศษนี้

ให้ R แทน เซตของจำนวนจริง

$R^2 = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x$ และ y เป็นจำนวนจริง$\right\}$

$R^{m\times n}$ แทน เซตของเมทริกซ์ ขนาด $m \times n$ บนจำนวนจริง

$rank\ A$ แทนค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ A

$$S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

ให้ $T : R^2 \to R^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $X \subseteq R^2$

$$T(X) = \{T(\vec{x}) \mid \vec{x} \in X\}$$

เราเรียก $T(X)$ ว่า ภาพของ X ภายใต้การแปลงเชิงเส้น T

เราทราบจาก ทฤษฎีบท 3.1 ทำให้เรามุ่งเน้นความสนใจไปที่เมทริกซ์ เพราะแต่ละการแปลงเชิงเส้นสามารถแทนได้ด้วยเมทริกซ์ ในทางกลับกัน ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว เราสามารถสร้าง การแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m ได้ โดยนิยามว่า $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R$ และเราเรียก T_A ว่า การแปลงเชิงเส้นโดยเมทริกซ์ A

ยิ่งไปกว่านั้น ค่าลำดับชั้น หรือ $rank$ ของเมทริกซ์ A มีบทบาทสำคัญในปัญหาพิเศษของเรา

นิยาม 4.1.1 ค่าลำดับชั้นของ A คือมิติของปริภูมิแถวของ A เขียนแทนด้วย $rank\ A$

โดยอาศัยความสัมพันธ์สมมูลบน $R^{2\times 2}$ เราจึงแบ่งชนิดของเมทริกซ์ออกเป็น 3 ชนิด ตามค่าลำดับชั้นดังนี้

สมบัติ 4.1.2 เรานิยามความสัมพันธ์ $\sim$ บน $R^{2\times 2}$ โดย $A \sim B$ ก็ต่อเมื่อ $rank\ A = rank\ B$

จะได้ว่า 1) $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

2) ถ้า T_i เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งค่าลำดับชั้นเป็น i แล้ว $\{T_0, T_1, T_2\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $R^{2\times2}$

บทแทรก 4.1.3 [3] ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 จะได้ว่า

1) $rank\ A = 0$ ก็ต่อเมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2) $rank\ A = 1$ ก็ต่อเมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$ หรือ $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$ โดยที่ $a, b, k \in R$ และ $(a,b) \neq (0,0)$
3) $rank\ A = 2$ ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

บทตั้ง 4.1.4 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่ง $rank\ A = 0$ แล้ว ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นโดยเมทริกซ์ A เป็นจุด (0,0)

พิสูจน์ ให้ $A \in R^{2\times2}$ โดยที่ $rank\ A = 0$

โดยบทแทรก 4.1.3 จึงทราบว่า $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ทุกๆ $\vec{x} \in R^2$

ดังนั้น ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นใดๆ เป็นจุด (0,0)

สมบัติ 4.1.5 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$

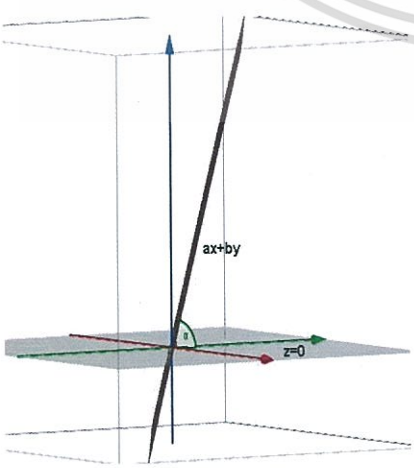
จะได้ว่า $ax + by \leq \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)\right)$ ทุกๆ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S$

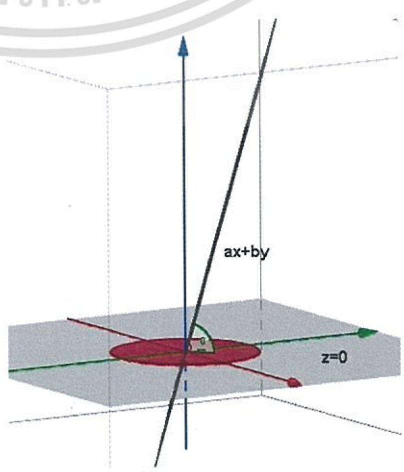
พิสูจน์ ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$

กำหนดให้ $z = ax + by$

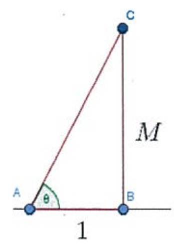
เราจึงทราบว่า 1) $ax + by - z = 0$ เป็นสมการระนาบ

2) มุมระหว่างระนาบ $ax + by - z = 0$ และ ระนาบ xy คือ $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)$





ให้ $M = max\ \{ax + by|(x, y) \in S\}$



จึงได้ว่า$\tan\theta = \frac{M}{1}$

ดังนั้น $M = \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)\right)$

นั่นคือ $ax + by \leq \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)\right)$ ทุกๆ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S$

บทตั้ง 4.1.6 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่ง $rank\ A = 1$ แล้ว ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น โดยเมทริกซ์ A เป็นส่วนของเส้นตรง

พิสูจน์ ให้ $A \in R^{2\times2}$ โดยที่ $rank\ A = 1$

โดยบทแทรก 4.1.3 จึงทราบว่า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$ หรือ $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$ โดยที่ $a, b, k \in R$ และ $(a, b) \neq (0,0)$

สมมติว่า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$ โดยที่ $a, b, k \in R$ และ $(a, b) \neq (0,0)$

เรามี 9 กรณี ที่ต้องพิจารณา ดังนี้

1.1) $a = 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

1.2) $a = 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

1.3) $a = 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

1.4) $a \neq 0, b = 0$ และ $k > 0$

1.5) $a \neq 0, b = 0$ และ $k < 0$

1.6) $a \neq 0, b = 0$ และ $k = 0$

1.7) $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

1.8) $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

1.9) $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

กรณี 1.1 $a = 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $T_A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} by \\ kby \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} z \\ kz \end{bmatrix} \middle| \, -|b| \leq z \leq |b| \right\}$$

กรณี 1.2 $a = 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $T_A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} by \\ kby \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} z \\ kz \end{bmatrix} \middle| \, -|b| \leq z \leq |b| \right\}$$

กรณี 1.3 $a = 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $T_A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} bx \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, -|b| \leq z \leq |b| \right\}$$

กรณี 1.4 $a \neq 0, b = 0$ และ $k > 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ ka & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $T_A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ ka & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} ax \\ kax \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} z \\ kz \end{bmatrix} \middle| \, -|a| \leq z \leq |a| \right\}$$

กรณี 1.5 $a \neq 0, b = 0$ และ $k < 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ ka & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า
$$T_A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ ka & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} ax \\ kax \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} z \\ kz \end{bmatrix} \middle| \, -|a| \leq z \leq |a| \right\}$$

กรณี 1.6 $a \neq 0, b = 0$ และ $k = 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า
$$T_A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} ax \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, -|a| \leq z \leq |a| \right\}$$

กรณี 1.7 $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

สมมติว่า $M = max\left\{ ax + by \, \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S \right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า
$$T_A(S) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} ax + by \\ kax + kby \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} ax + by \\ k(ax + by) \end{bmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} z \\ kz \end{bmatrix} \middle| \, -|M| \leq z \leq |M| \right\}$$

กรณี 1.8 $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

สมมติว่า $M = max\left\{ax + by \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax + by \\ kax + kby \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax + by \\ k(ax + by) \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} z \\ kz \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

กรณี 1.9 $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

สมมติว่า $M = max\left\{ax + by \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax + by \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

ลำดับต่อไป สมมติว่า $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$ โดยที่ $a, b, k \in R$ และ $(a, b) \neq (0,0)$

เรามี 9 กรณี ที่ต้องพิจารณา ดังนี้

2.1) $a = 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

2.2) $a = 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

2.3) $a = 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

2.4) $a \neq 0, b = 0$ และ $k > 0$

2.5) $a \neq 0, b = 0$ และ $k < 0$

2.6) $a \neq 0, b = 0$ และ $k = 0$

2.7) $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

2.8) $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

2.9) $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

กรณี 2.1 $a = 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

สมมติว่า $M = max\left\{x + ky \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า
$$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & kb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ bx + kby \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ bz \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

กรณี 2.2 $a = 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

สมมติว่า $M = max\left\{x + ky \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า
$$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & kb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ bx + kby \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ bz \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

กรณี 2.3 $a = 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า
$$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ bx \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \,\middle|\, -|b| \leq z \leq |b|\right\}$$

กรณี 2.4 $a \neq 0, b = 0$ และ $k > 0$

สมมติว่า $M = max\left\{x + ky \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & ka \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax + kay \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} az \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

กรณี 2.5 $a \neq 0, b = 0$ และ $k < 0$

สมมติว่า $M = max\left\{x + ky \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & ka \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax + kay \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} az \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

กรณี 2.6 $a \neq 0, b = 0$ และ $k = 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, -|a| \leq z \leq |a|\right\}$$

กรณี 2.7 $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k > 0$

สมมติว่า $M = max\left\{x + ky \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax + kay \\ bx + kby \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} a(x + ky) \\ b(x + ky) \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} az \\ bz \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

กรณี 2.8 $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k < 0$

สมมติว่า $M = max\left\{x + ky \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S\right\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax + kay \\ bx + kby \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} a(x + ky) \\ b(x + ky) \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} az \\ bz \end{bmatrix} \,\middle|\, -|M| \leq z \leq |M|\right\}$$

กรณี 2.9 $a \neq 0, b \neq 0$ และ $k = 0$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$

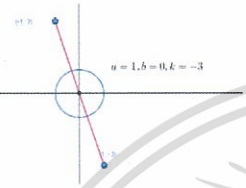
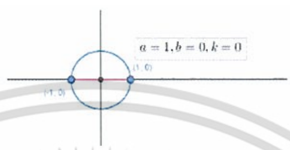
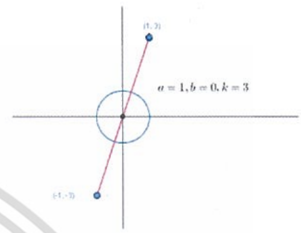
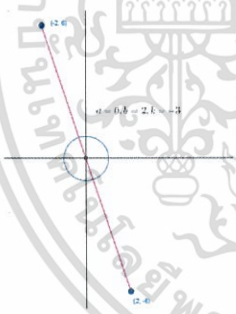
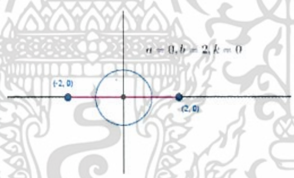
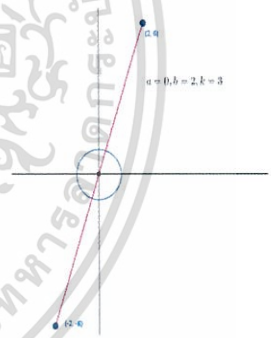
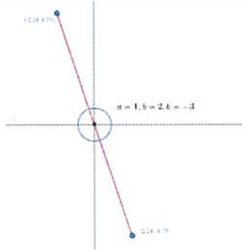
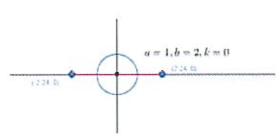
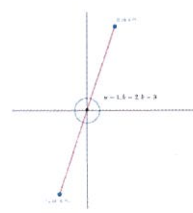
จะเห็นว่า $$T_A(S) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

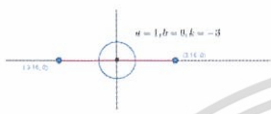
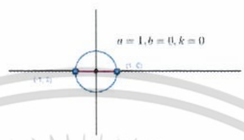
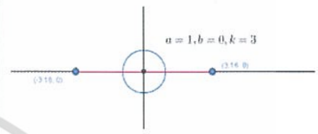
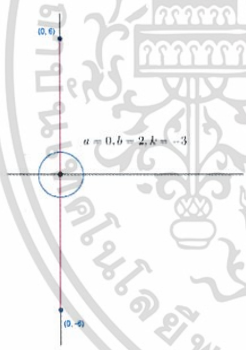
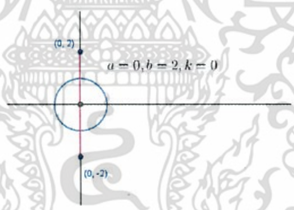
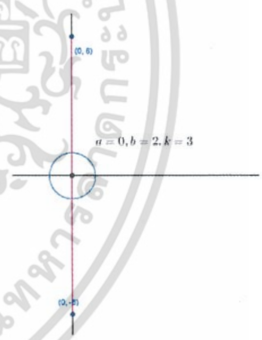
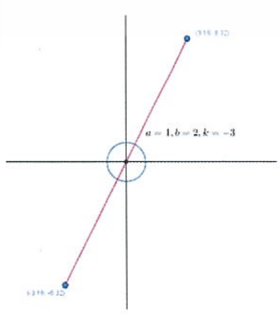
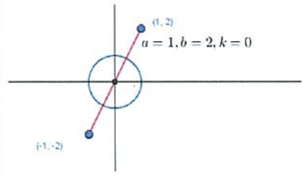
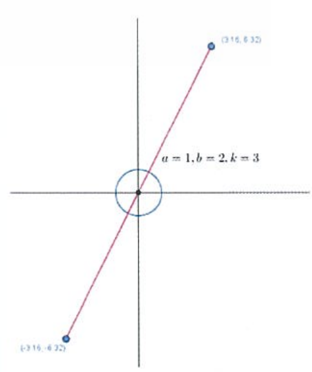
$$= \left\{\begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} \,\middle|\, -1 \leq x \leq 1\right\}$$

จากบทพิสูจน์ทุกกรณี เราสรุปได้ว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่ง $rank\ A = 1$ แล้ว ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น โดยเมทริกซ์ A เป็นส่วนของเส้นตรง

ตารางที่ 1.1 ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นเมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$

	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
$a \neq 0$ $b = 0$			
$a = 0$ $b \neq 0$			
$a \neq 0$ $b \neq 0$			

ตารางที่ 1.2 ตัวอย่างภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นเมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$

	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
$a \neq 0$ $b = 0$			
$a = 0$ $b \neq 0$			
$a \neq 0$ $b \neq 0$			

บทตั้ง 4.1.7 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่ง $rank\ A = 2$ แล้ว ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น โดยเมทริกซ์ A เป็นวงรี

พิสูจน์ ให้ $A \in R^{2\times 2}$ โดยที่ $rank\ A = 2$

โดยบทแทรก 4.1.3 จึงทราบว่า $\det A \neq 0$

สมมติว่า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $a, b, c, d \in R$

ให้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S$ และ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in R^2$ โดยที่ $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า $x = \frac{1}{ad-bc}(dx' + by')$ และ $y = \frac{1}{ad-bc}(ay' - cx')$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$

ดังนั้น $\left(\frac{dx'-by'}{ad-bc}\right)^2 + \left(\frac{ay'-cx'}{ad-bc}\right)^2 = 1$

จึงได้ว่า $\frac{d^2x'^2 - 2bdx'y' + b^2y'^2 + c^2x'^2 - 2acx'y' + a^2y'^2}{(ad-bc)^2} = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{(d^2+c^2)}{(ad-bc)^2}x'^2 - \frac{2(ac+bd)}{(ad-bc)^2}x'y' + \frac{(a^2+b^2)}{(ad-bc)^2}y'^2 = 1$

สรุปได้ว่า ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นด้วย A เป็นวงรี

บทแทรก 4.1.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $d^2 + c^2 = a^2 + b^2, ad - bc \neq 0$ และ $ac + bd\ = 0$

จะได้ว่า 1) ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้นด้วย A เป็นวงกลมรัศมี $\sqrt{\frac{(ad-bc)^2}{d^2+c^2}}$

2) ถ้า $(ad - bc)^2 = d^2 + c^2$ ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงด้วย A เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย

โดยบทตั้ง 4.1.4, 4.1.6 และ 4.1.7 เราจึงสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

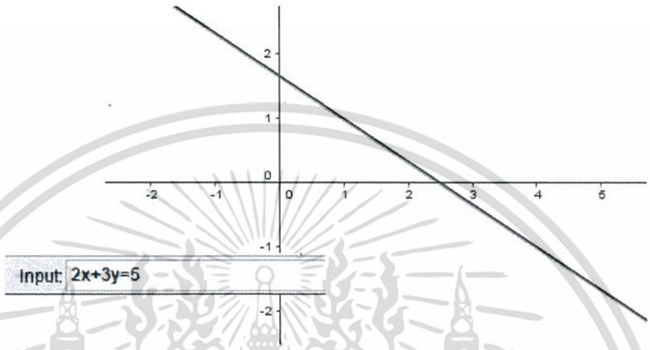
ทฤษฎีบท 4.1.9 ให้ $T : R^2 \to R^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น T เป็นจุด, ส่วนของเส้นตรง หรือวงรี

4.2 การประยุกต์ใช้ GeoGebra ในปัญหาพิเศษ

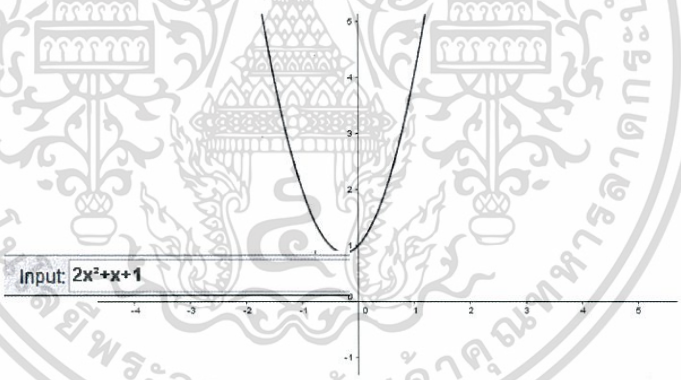
1. การวาดกราฟ

การวาดกราฟในโปรแกรม GeoGebra เป็นการวาดกราฟจากสมการหรือฟังก์ชันที่เรา Input เข้าไป ซึ่งเราสามารถ Input ได้ทั้งสมการหรือฟังก์ชันที่สัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรหรือไม่เป็นตัวแปรก็ได้

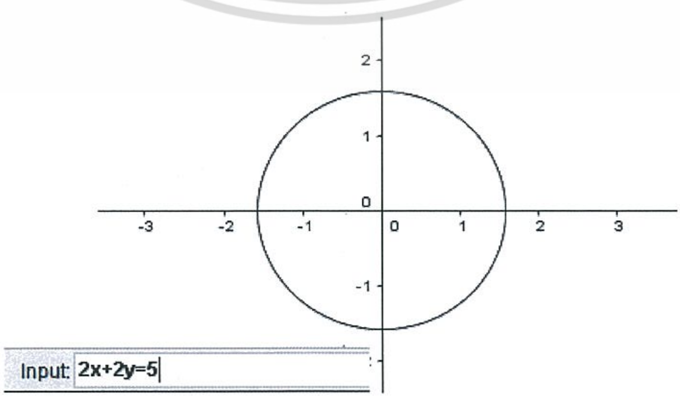
- การ Input ที่สัมประสิทธิ์ไม่เป็นตัวแปร



ส่วนของเส้นตรง



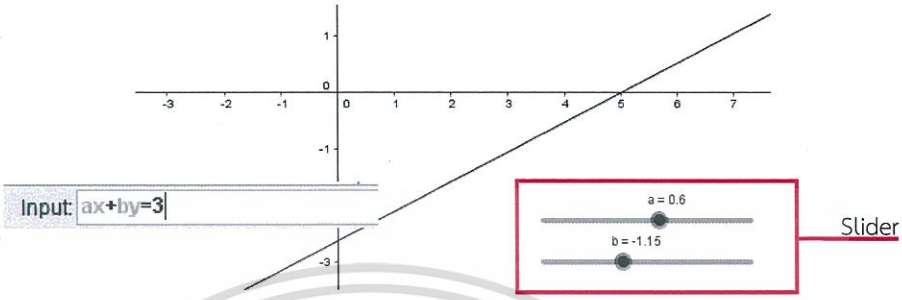
พาราโบลา



วงกลม

- การ Input ที่สัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

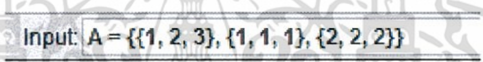
  การ Input ที่สัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ตัวโปรแกรมจะสร้างเครื่องมือ Slider เพื่อกำหนดค่าของตัวแปรให้เรา



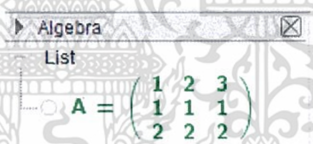
2. การสร้างเมทริกซ์

การสร้างเมทริกซ์ในโปรแกรม GeoGebra สามารถสร้างได้ 2 วิธีด้วยกัน

- การสร้างเมทริกซ์จากการ Input ค่าเข้าไปในแถบ Input

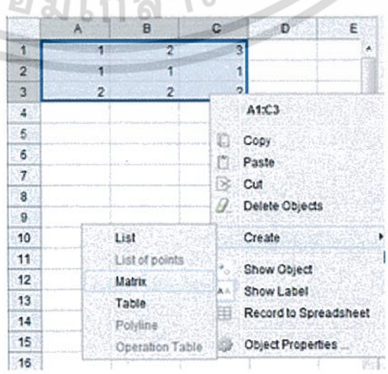


เราจะได้เมทริกซ์ A ในลักษณะดังรูป



- การสร้างเมทริกซ์จาก Spreadsheet View

  สร้างเมทริกซ์ A โดยเราจะใช้ Spreadsheet View ในการสร้าง เราจะกำหนดตัวเลขที่เราต้องการลงในตาราง จากนั้นคลุมดำคลิกขวาเลือก Create > Matrix



เราจะได้เมทริกซ์ A ในลักษณะข้างต้น

3. การหาค่าพื้นฐานต่างๆของเมทริกซ์

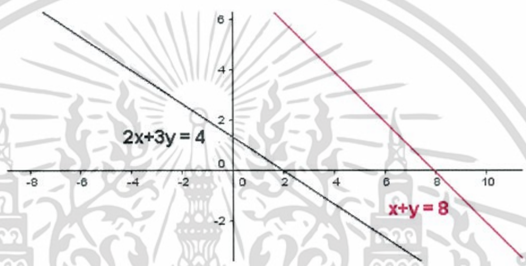
- คำสั่ง ApplyMatrix เป็นคำสั่งที่แสดงให้เห็นว่ามีเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์การแปลง ซึ่งจะแปลงอ็อบเจกต์ผ่านเมทริกซ์ โดยเราจะป้อนคำสั่งในแถบ Input

Input: **ApplyMatrix[<Matrix>, <Object>]**

ตัวอย่าง 1

Input: **ApplyMatrix[A, a]**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $a: 2x + 3y = 4$

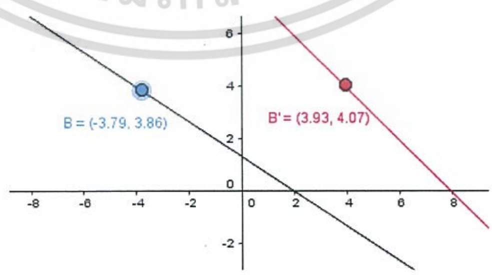


จากรูปจะเห็นได้ว่า ส่วนของเส้นตรง a ผ่านการแปลงของเมทริกซ์ A เราจะได้ส่วนของเส้นตรงใหม่ในสมการ $a': x + y = 8$

ตัวอย่าง 2

Input: **ApplyMatrix[A, B]**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, B คือจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง a



จะเห็นได้ว่าจุด B ผ่านการแปลงของเมทริกซ์ A จึงได้จุดใหม่คือ B' ที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง a'

- คำสั่ง Determinant เราสามารถป้อนคำสั่งในแถบ Input

Input: **Determinant[<Matrix>]**

ตัวอย่าง 3

Input: Determinant[C]

เราจะได้ ค่า det ใน มุมมอง Algebra โดยที่ $C = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 8 \\ 13 & 5 & 23 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 8 \\ 13 & 5 & 23 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Number

detC = 675

$\det C = 675$

- คำสั่งหาเอกลักษณ์ของเมทริกซ์ เราสามารถป้อนคำสั่ง Identity ซึ่งเอกลักษณ์ของเมทริกซ์สามารถหาได้เฉพาะเมทริกซ์ที่เป็นจัตุรัสเท่านั้น ดังนั้น คำสั่ง Identity จึงตามด้วยตัวเลขที่เป็นขนาดของเมริกซ์ แทนที่จะเป็นเมทริกซ์

Input: Identity[<Number>]

ตัวอย่าง 4

Input: Identity[4]

เราจะได้เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 4×4 ในมุมมอง Algebra

$$\text{matrix2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

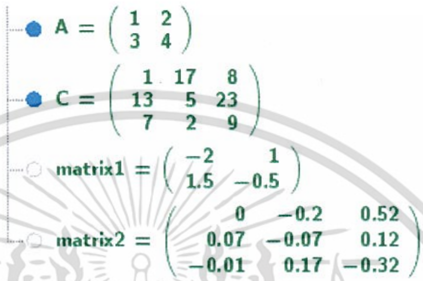
- คำสั่ง Invert เราสามารถป้อนคำสั่งในแถบ Input

Input: Invert[<Matrix>]

ตัวอย่าง 5

เราจะได้เมทริกซ์อินเวอร์สของ A และ C ในมุมมอง Algebra

โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 8 \\ 13 & 5 & 23 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$



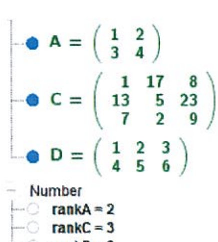
$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0.52 \\ 0.07 & -0.07 & 0.12 \\ -0.01 & 0.17 & -0.32 \end{bmatrix}$

- คำสั่งหาค่าลำดับชั้น โดยเราจะป้อนคำสั่ง MatrixRank ลงในแถบ Input เหมือนคำสั่งอื่นๆ

ตัวอย่าง 6

เราจะได้ค่าลำดับชั้น ในมุมมอง Algebra โดยที่

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 8 \\ 13 & 5 & 23 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$



ค่าลำดับชั้นของ $A = 2$

ค่าลำดับชั้นของ $C = 3$

ค่าลำดับชั้นของ $D = 2$

- คำสั่งรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถวของเมทริกซ์ เราป้อนคำสั่ง ReducedRowEchelonForm

Input: ReducedRowEchelonForm[<Matrix>]

ตัวอย่าง 7

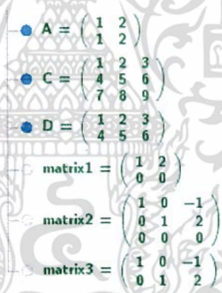
Input: ReducedRowEchelonForm[A]

Input: ReducedRowEchelonForm[C]

Input: ReducedRowEchelonForm[D]

เราจะได้เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถว ในมุมมอง Algebra โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$



$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- คำสั่งการหาเมทริกซ์ทรานสโพส โดยเราสามารถป้อนคำสั่ง Transpose

Input: Transpose[<Matrix>]

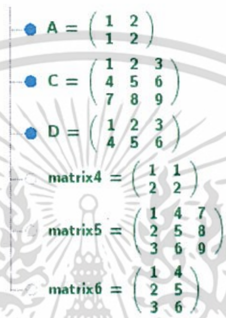
ตัวอย่าง 8

Input: **Transpose[A]**

Input: **Transpose[C]** Input: **Transpose[D]**

เราจะได้เมทริกซ์ทรานสโพสของ A, C และ D โดยที่

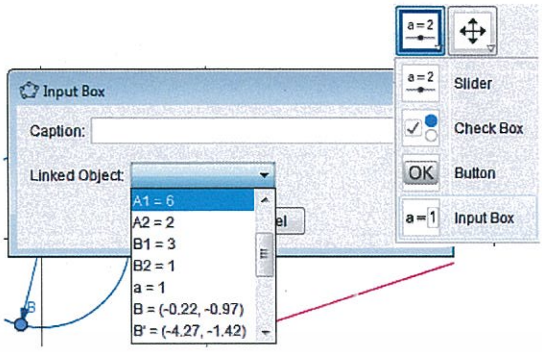
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$



$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, D^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

4. วิธีการใช้ GeoGebra สร้างแบบการแปลงเชิงเส้น

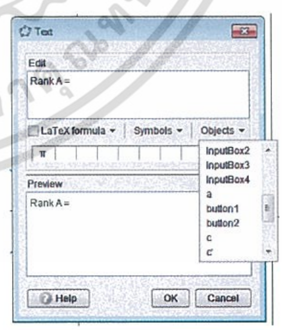
- สร้างเมทริกซ์ A โดยเราจะใช้ Spreadsheet View ในการสร้าง
- สร้างกล่อง Input เพื่อรับค่าเมทริกซ์ต่างๆจากผู้ใช้งาน โดยที่เราจะเชื่อมมันเข้ากับเมทริกซ์ที่เรามีอยู่ก่อนแล้วนั่นก็คือ เมทริกซ์ A เราคลิกที่ Input Box ในจะขึ้นหน้าต่างมาดังรูป แล้วเราจึงเลือกอ็อบเจกต์ที่เราต้องการเชื่อม



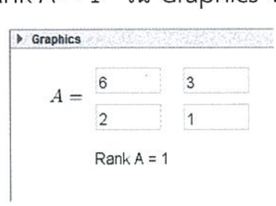
ทำจนครบขนาดของเมทริกซ์ที่เราต้องการจะได้ ในที่นี้เราสนใจเมทริกซ์ขนาด 2×2 ดังรูป

- เราจะตรวจสอบค่าลำดับชั้น ของเมทริกซ์ที่ผู้ใช้งาน Input เข้ามา เราป้อนคำสั่ง MatrixRank[] ลงในช่องแถบ Input ข้างล่าง

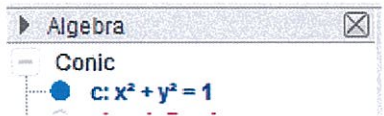
ค่าที่ได้จะไปแสดงอยู่ใน Algebra View และถ้าเราต้องการใช้มันแสดงใน Graphics View เราคลิกเลือก Text และใส่ข้อความที่เราต้องการลงไปและกดเชื่อมกับอ็อบเจกต์ที่เป็นค่าของ Rank ใน Algebra View



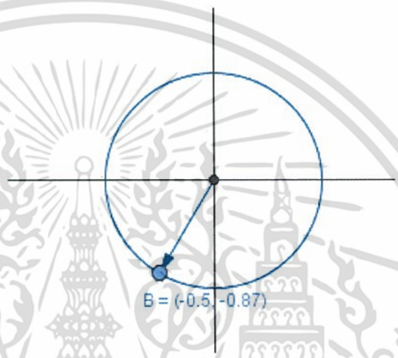
เราจะได้ข้อความ “Rank A = 1” ใน Graphics View



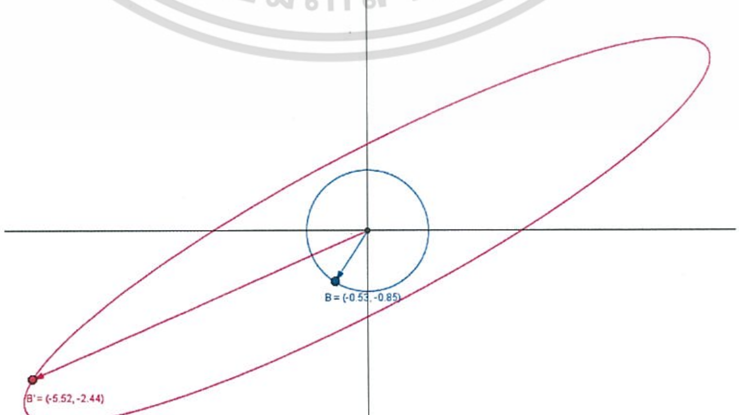
- สร้างวงกลมหนึ่งหน่วยเพื่อเป็นรูปภาพต้นแบบ โดยเราจะป้อนสมการของวงกลมลงในแถบ Input ข้างล่าง สมการที่เรา Input เข้าไปจะไปแสดงอยู่ที่ Algebra View



ส่วนใน Graphics View จะแสดงรูปวงกลมหนึ่งหน่วย โดยเราสามารถกำหนดจุดลงไปบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้ ดังรูป



- ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่เราทำการแปลงรูปวงกลมหนึ่งหน่วยของเราผ่านเมทริกซ์ A ที่ผู้ใช้ได้ Input เข้ามา โดยเราจะป้อนคำสั่ง ApplyMatrix โดยในที่นี้เราจะทำการ ApplyMatrix สองค่า คือ เมทริกซ์ A กับ อ็อบเจกต์ c (วงกลมหนึ่งหน่วย) และเมทริกซ์ A กับ B (จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย)



เราจะได้รูปของวงกลม c และจุด B ที่เปลี่ยนไป ดังนี้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลปัญหาพิเศษ

เราทราบว่าภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น สามารถจำแนกได้โดย ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ ดังนี้

1) กรณีที่ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ เท่ากับ 0

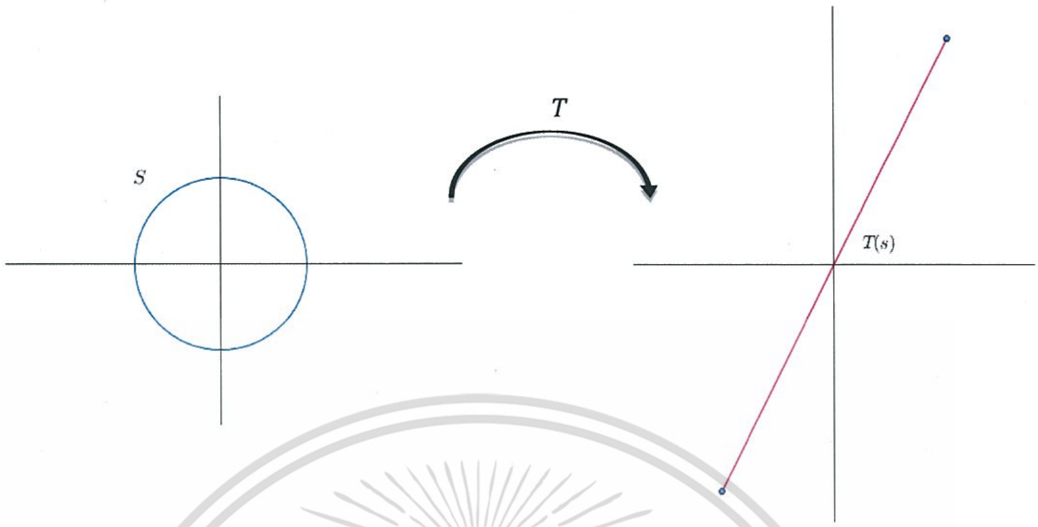
ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น เป็นจุด (0,0)

2) กรณีที่ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ เท่ากับ 1

ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ที่เท่ากับ 1 นั้นสามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ในรูปของ

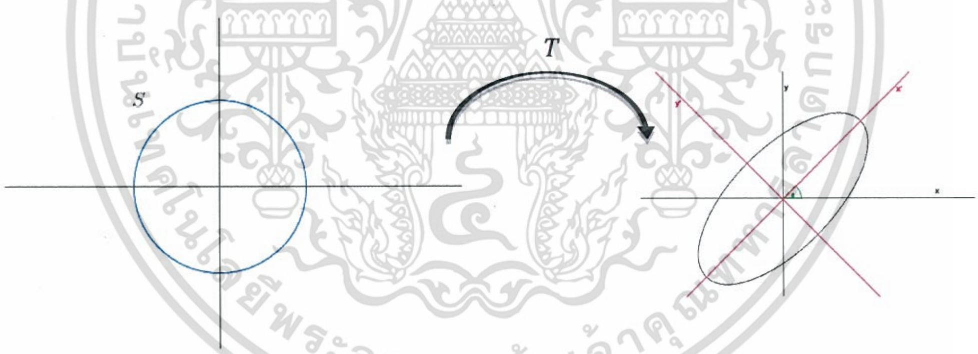
$\begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}$ โดยที่ a, b และ k เป็นจำนวนจริง

จะได้ว่า ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น เป็น ส่วนของเส้นตรง



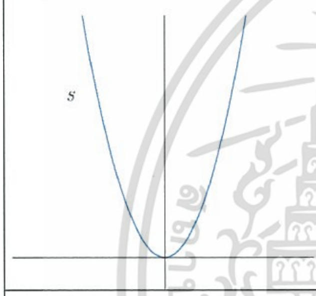
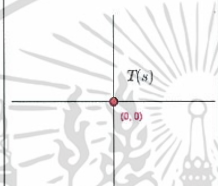
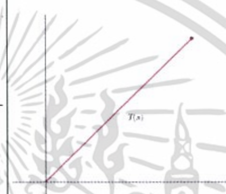
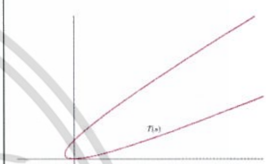
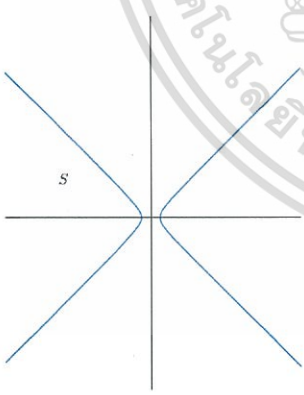
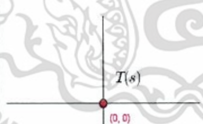
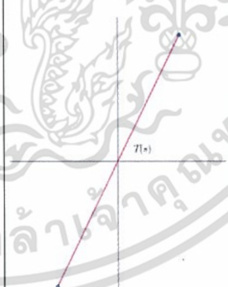
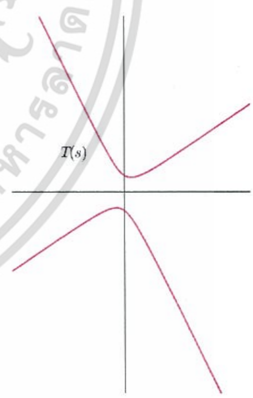
3) กรณีที่ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ เท่ากับ 2

ภาพของวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การแปลงเชิงเส้น จะเป็น วงรี



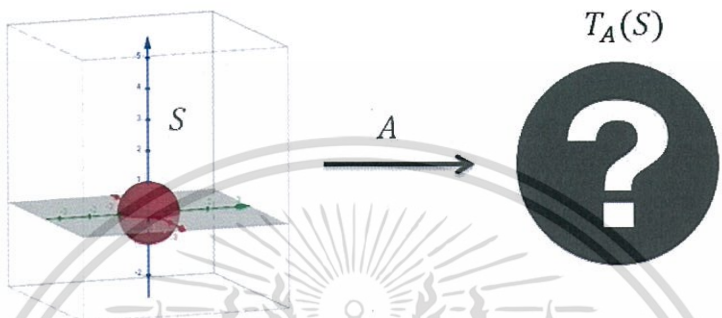
5.2 ข้อเสนอแนะ

1) นำไปศึกษาต่อโดยเปลี่ยนจากวงกลมหนึ่งหน่วย เป็นรูปเรขาคณิตรูปอื่น
ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

	ค่าลำดับชั้นของ A เท่ากับ 0	ค่าลำดับชั้นของ A เท่ากับ 1	ค่าลำดับชั้นของ A เท่ากับ 2
$S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle\vert\, y = ax^2 + bx + c\right\}$ 			
$S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle\vert\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ 			

2) นำไปศึกษาต่อบน $R^{3\times3}$

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ และ $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$



เอกสารอ้างอิง

[1] John Wermer & Thomas Banchoff, Liner Algebra Through Geometry,2nd ed., 1983, Springer-verlag, New York.

[2] Pratibha Ghatage and Sally Shao, Linear Transformation of the Unit circle in R^2, The College Mathematics Journal, 2001 (32)

[3] Steven J. Leon, Liner Algebra With Applications, 5th ed., 1998, Prentice Hall, United States.

[4] Thomas Yuster, The Reduced Row Echelon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof. Mathematics Magazine, Vol. 57, 1984 (57), 93-94