การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ โดยการแปลงเชิงอนุพันธ์

ON SOLVING THE QUANTUM OSCILLATOR EQUATION BY USING THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION

กนกวรรณ ปานช่วย
กมลทิพย์ องอาจยุทธนากร
จุฑารัตน์ พิมสุด

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ โดยการแปลงเชิงอนุพันธ์

ON SOLVING THE QUANTUM OSCILLATOR EQUATION BY USING THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION

กนกวรรณ ปานช่วย
กมลทิพย์ องอาจยุทธนากร
จุฑารัตน์ พิมสุด

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

ON SOLVING THE QUANTUM OSCILLATOR EQUATION BY USING THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION

KANOKVON PANCHUAY

KAMONTHIP ONGARTYUTHANAKORN

JUTARAT PIMSUD

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์โดยการแปลงเชิงอนุพันธ์

On Solving the Quantum Oscillator Equation by Using the Differential Transformation

ชื่อนักศึกษา นางสาวกนกวรรณ ปานช่วย รหัสนักศึกษา 55050004

นางสาวกมลทิพย์ องอาจยุทธนากร รหัสนักศึกษา 55050008

นางสาวจุฑารัตน์ พิมสุด รหัสนักศึกษา 55050035

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2558

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฏฐ์ แจ่มศรี ประธานกรรมการ	
ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก กรรมการ	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ โดยการแปลงเชิงอนุพันธ์
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ ปานช่วย รหัสนักศึกษา 55050004
	นางสาวกมลทิพย์ องอาจยุทธนากร รหัสนักศึกษา 55050008
	นางสาวจุฑารัตน์ พิมสุด รหัสนักศึกษา 55050035
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าผลเฉลย ของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ซึ่งเป็นปัญหาค่าเจาะจงด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ โดยแสดงตัวอย่างของแต่ละปัญหาภายใต้เงื่อนไขขอบที่มีสัมประสิทธิ์แตกต่างกันและแสดงฟังก์ชันเจาะจงและค่าเจาะจงในรูปของกราฟ โดยภาพรวม เราพบว่าผลลัพธ์ที่หาได้มีค่าใกล้เคียงเป็นจุดๆ กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

คำสำคัญ : การแปลงเชิงอนุพันธ์ ปัญหาค่าเจาะจง สมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์

Title	On Solving the Quantum Oscillator Equation by Using the Differential Transformation
Students	Miss Kanokvon Panchuay 55050004 Miss Kamonthip Ongartyuthanakorn 55050008 Miss Jutarat Pimsud 55050035
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2015
Advisor	Asst.Prof.Dr.Jaipong Kasemsuwan

Abstract

This paper deals with the approximation of the solutions of quantum oscillator equation which is eigenvalue problems by using the differential transformation method (DTM). We illustrate the problems under the different coefficients of the boundary conditions. Eigenfunctions and eigenvalues are shown graphically. Overall, we found that the obtained results are in good agreement with the analytical discrete solution.

Keywords : Differential Transformation Method, Eigenvalue Problem, Equation Quantum Oscillator

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้ ข้าพเจ้าได้ศึกษาในหัวข้อเรื่อง การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์โดยการแปลงเชิงอนุพันธ์ (On Solving the Quantum Oscillator Equation by Using the Differential Transformation)

ข้าพเจ้าขอกราบขอบคุณ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ อาจารย์ที่ปรึกษางานวิจัย ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฏฐ์ แจ่มศรี และดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก เป็นอย่างสูงที่ได้ให้คำปรึกษา แนะนำแนวทางตลอดจนช่วยตรวจสอบ และแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ อีกทั้งยังให้ความรู้แก่ข้าพเจ้า ทำให้งานวิจัยฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบคุณบิดามารดาที่คอยสั่งสอนอบรม เป็นกำลังใจให้แก่ข้าพเจ้า และสนับสนุนด้านการศึกษามาตั้งแต่ต้นจนถึงทุกวันนี้ และความดีอันเกิดจากการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ ข้าพเจ้าขอมอบแด่บิดามารดาครูอาจารย์และผู้มีพระคุณทุกท่าน ที่มีส่วนงานและเป็นกำลังใจ ซึ่งข้าพเจ้าซาบซึ้งในความกรุณาอันยิ่งใหญ่จากท่านและขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

กนกวรรณ ปานช่วย
กมลทิพย์ องอาจยุทธนากร
จุฑารัตน์ พิมสุด

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation Method: DTM) เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และสมการปริพันธ์ เริ่มต้นจาก Zhou [1] ในปี 1986 ได้นำวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้มาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์มากมาย เช่น ปัญหาค่าเริ่มต้น ทั้งเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า ซึ่งในปี 1996 Chen และ Ho [2] ได้นำวิธีดังกล่าวนี้ไปใช้แก้ปัญหาค่าเจาะจงเป็นครั้งแรก ต่อมาในปี 2002 I.H. Abdel [3] ได้ศึกษาและปรับปรุงเงื่อนไขขอบเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงให้ครอบคลุมมากขึ้น

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ถูกพัฒนามาจากอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และผลเฉลยจะออกมาในรูปของพหุนาม วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้เป็นการแปลงฟังก์ชัน $y(x)$ หรือฟังก์ชันเดิม (Original function) เป็นฟังก์ชัน $Y(k)$ หรือฟังก์ชันการแปลง (Transformed function) โดยกำหนดให้การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation) ของฟังก์ชัน $y(x)$ คือ

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \tag{1.1}$$

และการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse Transformation) ของ $Y(k)$ คือ

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kY(k) \tag{1.2}$$

ซึ่งในงานวิจัยฉบับนี้จะศึกษาเกี่ยวกับวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับหาผลเฉลยโดยประมาณ (Approximated Solution) ของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ [3] ซึ่งในบางกรณีมีวิธีการคิดหาผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ได้ยากและซับซ้อน โดยบทที่ 2 ได้กล่าวถึงบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติพื้นของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ซึ่งสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์เป็นคลาสหนึ่งของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ และวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ส่วนในบทที่ 3 จะเป็นการอธิบายขั้นตอนในการใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ไขปัญหาค่าเจาะจงของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ และในบทที่ 4 ได้ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ โดยตัวอย่างของแต่ละปัญหาภายใต้เงื่อนไขขอบที่จะมีสัมประสิทธิ์แตกต่างกัน และแสดงฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน และค่าเจาะจงในรูปของกราฟ ซึ่งวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้จะช่วยหาผลเฉลยได้ง่ายกว่าและมีลำดับขั้นตอนที่แน่นอน รูปทั่วไปของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์เขียนอยู่ในรูปของปัญหาค่าเจาะจงดังนี้

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]y(x)=0 \tag{1.3}$$

และเงื่อนไขขอบ

$$\alpha_1 y(0)-\beta_1 y'(0)=0 \tag{1.4}$$

$$\alpha_2 y(1)+\beta_2 y'(1)=0 \tag{1.5}$$

โดยที่ $p(x)>0, r(x)>0$ และ $q(x)\geq 0$ และ $p(x), r(x), q(x)$ และ $p'(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [0, 1] และ $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ และ $\alpha_i+\beta_i>0$ สำหรับ $i=1,2$

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) เพื่อศึกษาเกี่ยวกับ บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการแก้ไขปัญหาค่าเจาะจง

2) เพื่อปรับปรุงและพัฒนาทฤษฎีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ที่เหมาะสมกับการนำไปใช้แก้ไขปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์

3) เพื่อเขียนโปรแกรมหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ที่ศึกษาในงานวิจัยฉบับนี้ จะศึกษากรณีที่ $p(x), r(x), q(x)$ ถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันต่าง ๆ

2) การหาผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์จะหาผลเฉลยได้ ในบางกรณีเท่านั้น

3) ในงานวิจัยนี้จะศึกษาในกรณีที่ $q(x)\geq 0$

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ศึกษาคุณสมบัติและชนิดของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์รวมถึงวิธีการหาผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง สำหรับบางกรณี

2) ศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation Method: DTM) เกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไปในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

3) ศึกษาและรวบรวมทฤษฎีการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์และนำมาปรับปรุงพัฒนาให้ใช้หาผลเฉลยได้

4) พัฒนาและปรับปรุงสูตรการแปลงเชิงอนุพันธ์ ให้สอดคล้องกับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์

5) เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณ (Approximated Solution) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ กับผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) สำหรับบางกรณี

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าผลเฉลยของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ โดยการแปลงเชิง ซึ่งได้ทำการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตามหัวข้อต่อไปนี้

2.1 สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Sturm-Liouville Equation)

2.2 การแปลงเชิงอนุพันธ์ (The differential transformation)

2.2.1 การดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ (Some basic mathematical operations)

2.2.2. การใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ไขปัญหาค่าเจาะจง (Using differential transformation to solve eigenvalue problems)

2.2.3. การแก้ไขปัญหาและหาคำตอบ (Solving problems and main results)

2.3 สมการชโรดิงเจอร์ (Schrödinger equation)

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Sturm-Liouville Equation)

บทนิยามที่ 1 [4] กำหนดให้ $p(x), p'(x), q(x)$ และ $r(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] และ $p(x)>0$ และ $r(x)>0$ ที่ทุกจุด บนช่วง [a, b] และ $\lambda \in \mathbb{R}$ เราจะเรียกปัญหาค่าขอบ 2 จุด (two-point boundary value problem)

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y=0 \tag{2.1}$$

$$\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0 \tag{2.2}$$

$$\alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \tag{2.3}$$

ว่าเป็น ปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Sturm-Lioville's problem) โดยที่จะสมมุติว่าสัมประสิทธิ์ใน (2.2) และ (2.3) เป็นจำนวนจริงและไม่ขึ้นกับ λ นอกจากนั้น โดยที่ α_1 และ β_1 ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ α_2 และ β_2 ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

บางครั้งปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ใน (2.1)-(2.3) จะเรียกว่า ปรกติ (regular) ถ้าปัญหานี้สอดคล้องกับ สมมุติฐานตามบทนิยามที่ 1 ถ้าไม่เช่นนั้นจะเรียกว่า เอกฐาน (singular) ในที่นี้เราจะสนใจเฉพาะปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ปรกติเท่านั้น

ทฤษฎีบทที่ 1 สมบัติของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ปกติ

1. จะมีค่าเจาะจงจำนวนจริงเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งสามารถจัดเรียงในลักษณะอันดับเพิ่ม $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_{n-1}<\lambda_n<\ldots$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$

2. ถ้า $q(x)\ge 0$ บน [a, b] และสัมประสิทธิ์ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ และ β_2 ใน (2.2) และ (2.3)

มีค่าไม่เป็นลบแล้วค่าเจาะจงทั้งหมดจะมีค่าไม่เป็นลบ

3. สำหรับแต่ละค่าเจาะจง จะมีฟังก์ชั่นเจาะจงเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้น (ยกเว้นพหุคูณที่ไม่เป็นศูนย์)

4. ฟังก์ชันเจาะจงที่สมในกับค่าเจาะจงที่ต่างกันจะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

5. เซตของฟังก์ชันเจาะจงที่สมในกับเซตของค่าเจาะจงเป็นเซตเชิงตั้งฉากเทียบกับฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนัก $r(x)$ บนช่วง [a, b]

ปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Sturm-Liouville problem: S-L problem) จะครอบคลุมทั้งปัญหาค่าเจาะจง (eigenvalue problem) ต่าง ๆ ในวิชากลศาสตร์ควอนตัมและวิชาฟิสิกส์แบบฉบับ ดังเช่นตารางที่ 1.1 ซึ่งจะแสดงตัวอย่างของสมการที่เป็นคลาสหนึ่งของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

ตารางที่ 2.1 [5] ตัวอย่างของสมการซึ่งเป็นคลาสหนึ่งของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

สมการ	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	λ
Legendre, $P_n(x)$	$1-x^2$	0	1	$n(n+1)$
Associated Legendre, $P_n^m(x)$	$1-x^2$	$\frac{m^2}{1-x^2}$	1	$n(n+1)$
Laguerre, $L_n(x)$	xe^{-x}	0	e^{-x}	n
Associated Laguerre, $L_n^k(x)$	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$x^k e^{-x}$	$n-k$
Bessel, $J_n(x), Y_n(x), H_n(x), \ldots$	x	$\frac{n^2}{x}$	x	1
Hermite, $H_n(x)$	e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	$2n$
Quantum Oscillator, $\Psi_n(x)$	1	x^2	1	λ
Chebyshev, $T_n(x)$	$(1-x^2)^{1/2}$	0	$(1-x^2)^{1/2}$	n^2
Gegenbauer, $C_n^\alpha(x); \alpha > -1/2$	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$	$n(n+2\alpha)$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

GE : $y''(x)+\lambda y(x)=0$

B.C.s : $y'(0)=0$

$y(1)=0$

<u>วิธีทำ</u> แบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ $\lambda=0$, $\lambda<0$ และ $\lambda>0$

กรณีที่ 1 $\lambda=0$; $y''(x)=0$

นั่นคือ $y'(x)=c_1$

$\therefore y(x)=c_1x+c_2$

จาก $y'(0)=0$ ได้ $y'(0)=c_1=0$ $\therefore c_1=0$

จาก $y(1)=0$ ได้ $y(1)=c_1(1)+c_2$

$$0=c_1+c_2$$

จาก $c_1=0$ ได้ $c_2=0$

เนื่องจาก $y(x)=c_1x+c_2$ และ $c_1,c_2=0$

$\therefore y(x)=0$

กรณีที่ 2 $\lambda<0$;
$$y''(x)-\lambda y(x)=0$$
$$r^2-\lambda=0$$
$$r=\pm\sqrt{\lambda}$$
$$\therefore y(x)=a_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+a_2e^{\sqrt{\lambda}x}$$
$$=a_1\left(\cosh\sqrt{\lambda}x-\sinh\sqrt{\lambda}x\right)+a_2\left(\cosh\sqrt{\lambda}x+\sinh\sqrt{\lambda}x\right)$$
$$=(a_1+a_2)\cosh\sqrt{\lambda}x+(a_2-a_1)\sinh\sqrt{\lambda}x$$

$y(x)=c_1\cosh\sqrt{\lambda}x+c_2\sinh\sqrt{\lambda}x$ เมื่อ $c_1=a_1+a_2, c_2=a_2-a_1$

$$y'(x)=c_1\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}x+c_2\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}x$$

จาก $y'(0)=0$

ได้ $y'(0)=c_1\sqrt{\lambda}\cancel{\sinh(0)}^{0}+c_2\sqrt{\lambda}\cosh(0)=0$

$c_2\sqrt{\lambda}\cosh(0)=0$ แต่ $\sqrt{\lambda}\cosh(0)\neq 0$

$\therefore c_2=0$

จาก $y(1)=0$

ได้ $y(1)=c_1\cosh\sqrt{\lambda}+\cancel{c_2}^{0}\sinh\sqrt{\lambda}=0$

$c_1\cosh\sqrt{\lambda}=0$ แต่ $\cosh\sqrt{\lambda}\neq 0$

$\therefore c_1=0$

เนื่องจาก $y(x)=c_1\cosh\sqrt{\lambda}x+c_2\sinh\sqrt{\lambda}x$ และ $c_1,c_2=0$

$\therefore y(x)=0$

กรณีที่ 3 $\lambda>0$;
$$y''(x)+\lambda y(x)=0$$
$$r^2+\lambda=0$$
$$r=\pm\sqrt{-\lambda}=\pm\sqrt{\lambda}i$$
$$\therefore y(x)=a_1e^{-\sqrt{\lambda}ix}+a_2e^{\sqrt{\lambda}ix}$$
$$=a_1\left(\cos\sqrt{\lambda}x-i\sin\sqrt{\lambda}x\right)+a_2\left(\cos\sqrt{\lambda}x+i\sin\sqrt{\lambda}x\right)$$
$$=(a_1+a_2)\cos\sqrt{\lambda}x+(a_2-a_1)i\sin\sqrt{\lambda}x$$

$y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$ เมื่อ $c_1=a_1+a_2,\ c_2=(a_2-a_1)i$

$$y'(x)=-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$

จาก $y'(0)=0$

ได้ $y'(0)=-c_1\sqrt{\lambda}\cancel{\sin(0)}^{0}+c_2\sqrt{\lambda}\cancel{\cos(0)}^{1}=0$

$$c_2\sqrt{\lambda}=0 \text{ แต่ } \sqrt{\lambda}\neq 0$$
$$\therefore c_2=0$$

จาก $y(1)=0$ ได้ $y(1)=c_1\cos\sqrt{\lambda}+\cancel{c_2}^{0}\sin\sqrt{\lambda}=0$

$$c_1\cos\sqrt{\lambda}=0$$

ถ้า $c_1\neq 0 \rightarrow \cos\sqrt{\lambda}=0$

$$\sqrt{\lambda}=\frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \text{เมื่อ } n=1,2,3,\ldots$$
$$\therefore \lambda=\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \quad \text{เมื่อ } n=1,2,3,\ldots$$

เนื่องจาก $y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$ และ $c_2=0$

$$\therefore y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x$$

ดังนั้น เมื่อ $n=1;\ \lambda_1=\left(\frac{(2(1)-1)\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}=2.46939\approx 2.47$

$$\therefore y_1(x)=c_1\cos\sqrt{2.47}x=c_1\cos(1.57162x)$$

เมื่อ $n=2;\ \lambda_2=\left(\frac{(2(2)-1)\pi}{2}\right)^2=\frac{9\pi^2}{4}=22.2066\approx 22.21$

$$\therefore y_2(x)=c_1\cos\sqrt{22.21}x=c_1\cos(4.71275x)$$

เมื่อ $n=3;\ \lambda_3=\left(\frac{(2(3)-1)\pi}{2}\right)^2=\frac{25\pi^2}{4}=61.685028\approx 61.69$

$$\therefore y_3(x)=c_1\cos\sqrt{61.69}x=c_1\cos(7.854298x)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2=\frac{25\pi^2}{4}=61.685028\approx 61.69$$
$$\therefore y_n(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda_n}x$$

2.2 การแปลงเชิงอนุพันธ์ (The differential transformation)

บทนิยามที่ 2 [3] การแปลงเชิงอนุพันธ์ (differential transformation) ของฟังก์ชัน $y(x)$ ถูกกำหนดให้ ดังต่อไปนี้

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \tag{2.4}$$

เมื่อ $y(x)$ เป็นฟังก์ชันเดิม (original function) และ $Y(k)$ เป็นฟังก์ชันการแปลง (transformed function)

การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (The differential inverse transformation) สำหรับ $Y(k)$ ถูกกำหนดให้ ดังต่อไปนี้

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kY(k) \tag{2.5}$$

จาก (2.4) และ (2.5) เราจะได้ว่า

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \tag{2.6}$$

สมการ (2.6) ทำให้เห็นแนวคิดของการแปลงเชิงอนุพันธ์ ซึ่งได้มาจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series expansion)

ในการใช้งานจริง ฟังก์ชัน $y(x)$ ใน (2.5) ถูกแสดงโดยอนุกรมจำกัด และสามารถเขียนได้เป็น

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}x^kY(k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}x^kY(k)$$

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}x^kY(k) \tag{2.7}$$

เมื่อ $\sum_{k=n+1}^{\infty}x^kY(k)$ มีขนาดเล็กมาก และ n เป็นค่าคงที่โดยการลู่เข้าของค่าเจาะจง (eigenvalue)

2.2.1 การดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ (Some basic mathematical operations)

ทฤษฎีบทที่ 2 [6] ให้ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R},\ \Phi:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R},$ $k=0,1,2,\ldots,$ λ คือ ค่าคงที่ และ $\Phi(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\right]_{x=0}$

ถ้า $y(x)=\lambda\varphi(x)$ แล้ว $Y(k)=\lambda\Phi(k)$ (2.8)

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า ถ้า $y(x)=\lambda\varphi(x)$ แล้ว $Y(k)=\lambda\Phi(k)$ เป็นจริง

จากนิยาม (2.4) $Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $y(x)=\lambda\varphi(x)$ ในนิยาม (2.4) จะได้ว่า

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\lambda\varphi(x)\right]_{x=0}$$
$$=\lambda\cdot\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $Y(k)=\lambda\Phi(k)$

สรุปได้ว่า ถ้า $y(x)=\lambda\varphi(x)$ แล้ว $Y(k)=\lambda\Phi(k)$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 3 [6] ให้ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, Y:\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R},$

$\Phi:\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R},\ \Theta:\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R}, x\in\mathbb{R},\ k=0,1,2,\dots,\ \Phi(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\right]_{x=0}$

และ $\Theta(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\theta(x)\right]_{x=0}$

ถ้า $y(x)=\varphi(x)\pm\theta(x)$ แล้ว $Y(k)=\Phi(k)\pm\Theta(k)$ (2.9)

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า ถ้า $y(x)=\varphi(x)\pm\theta(x)$ แล้ว $Y(k)=\Phi(k)\pm\Theta(k)$ เป็นจริง

จากนิยาม (2.4) $Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $y(x)=\varphi(x)\pm\theta(x)$ ในนิยาม (2.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}Y(k)&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\pm\theta(x)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\right]_{x=0}\pm\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\theta(x)\right]_{x=0}\end{aligned}$$

ดังนั้น $Y(k)=\Phi(k)\pm\Theta(k)$

สรุปได้ว่า ถ้า $y(x)=\varphi(x)\pm\theta(x)$ แล้ว $Y(k)=\Phi(k)\pm\Theta(k)$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 4 [6] ให้ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, Y:\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R}, \Phi:\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R},$

$x\in\mathbb{R},\ k=0,1,2,\dots$ และ $\Phi(k+1)=\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\varphi(x)\right]_{x=0}$

ถ้า $y(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}$ แล้ว $Y(k)=(k+1)\Phi(k+1)$ (2.10)

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า ถ้า $y(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}$ แล้ว $Y(k)=(k+1)\Phi(k+1)$ เป็นจริง

จากนิยาม (2.4) $Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $y(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}$ ในนิยาม (2.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}Y(k)&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\varphi(x)\right]_{x=0}\\&=\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\varphi(x)\right]_{x=0}\end{aligned}$$

$$=\frac{(k+1)\cancel{k!}}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{\cancel{k!}}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\varphi(x)\right]_{x=0}$$

$$=(k+1)\cdot\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\varphi(x)\right]_{x=0}$$

$$=(k+1)\Phi(k+1)$$

ดังนั้น $Y(k)=(k+1)\Phi(k+1)$

สรุปได้ว่า ถ้า $y(x)=\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ แล้ว $Y(k)=(k+1)\Phi(k+1)$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 5 [6] ให้ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R},\ \Phi:\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R},$ $k=0,1,2,\ldots$ และ $\Phi(k+2)=\dfrac{1}{(k+2)!}\left[\dfrac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}\varphi(x)\right]_{x=0}$

ถ้า $y(x)=\dfrac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ แล้ว $Y(k)=(k+1)(k+2)\Phi(k+2)$ (2.11)

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า ถ้า $y(x)=\dfrac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ แล้ว $Y(k)=(k+1)(k+2)\Phi(k+2)$ เป็นจริง

จากนิยาม (2.4) $Y(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $y(x)=\dfrac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ ในนิยาม (2.4) จะได้ว่า

$$Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}\varphi(x)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{(k+2)!}{(k+2)!}\cdot\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}\varphi(x)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)\cancel{k!}}{(k+2)!}\cdot\frac{1}{\cancel{k!}}\left[\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}\varphi(x)\right]_{x=0}$$

$$=(k+1)(k+2)\cdot\frac{1}{(k+2)!}\left[\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}\varphi(x)\right]_{x=0}$$

$$=(k+1)(k+2)\Phi(k+2)$$

นั้นคือ $Y(k)=(k+1)(k+2)\Phi(k+2)$

สรุปได้ว่า ถ้า $y(x)=\dfrac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ แล้ว $Y(k)=(k+1)(k+2)\Phi(k+2)$ เป็นจริง

บทแทรกที่ 1 [6] สูตรของไลน์นิตซ์ สำหรับการหาอนุพันธ์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

$$D^k(uv) = \binom{k}{k} uv^{(k)} + \binom{k}{k-1} u'v^{(k-1)} + \binom{k}{k-2} u''v^{(k-2)} + \ldots + u^{(k)}v \quad (2.12)$$

พิสูจน์ โดยใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ บน k

ให้ $P(k)$ แทนสมการที่ (2.12)

จะได้ $P(1)$ คือ $D(uv) = u'v + uv'$ เป็นจริง

และ ถ้า $P(m)$ เป็นจริง นั้นคือ

$$D^m(uv) = u^{(m)}v + \binom{m}{1} u^{(m-1)}v' + \binom{m}{2} u^{(m-2)}v'' + \ldots + \binom{m}{m} uv^{(m)}$$ จะได้

$$D^{m+1}(uv) = u^{(m+1)}v + u^m v' + \binom{m}{1} u^{(m)}v' + \binom{m}{2} u^{(m-1)}v'' + \ldots + \binom{m}{m} uv^{(m+1)}$$

$$\vdots$$

$$= u^{(m+1)}v + \binom{m+1}{1} u^m v' + \binom{m+1}{2} u^{(m-1)}v'' + \ldots + \binom{m+1}{m+1} uv^{(m+1)}$$

ดังนั้น $\left[\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} = \binom{m+1}{r+1}\right]$

นั้นคือ $P(m+1)$ จริง เมื่อ $P(m)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ 6 [6] ให้ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, Y:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R},$

$\Phi:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R},\ \Theta:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R},\ k=0,1,2,\ldots,\ \Phi(l) = \frac{1}{l!}\left[\frac{d^l}{dx^l}\varphi(x)\right]_{x=0}$ และ

$$\Theta(k-l) = \frac{1}{(k-l)!}\left[\frac{d^{k-l}}{dx^{k-l}}\theta(x)\right]_{x=0}$$

ถ้า $y(x) = \varphi(x)\theta(x)$ แล้ว $Y(k) = \sum_{l=0}^{k} \Phi(l)\Theta(k-l)$ (2.13)

พิสูจน์ จะแสดงว่า ถ้า $y(x) = \varphi(x)\theta(x)$ แล้ว $Y(k) = \sum_{l=0}^{k} \Phi(l)\Theta(k-l)$ เป็นจริง

จากนิยาม (2.4) $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} y(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $y(x) = \varphi(x)\theta(x)$ ในนิยาม (2.4) จะได้ว่า

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\big(\varphi(x)\theta(x)\big)\right]_{x=0}$$

จาก บทแทรกที่ 1 สูตรไลน์นิตซ์

$$D^k(uv) = \binom{k}{k} uv^{(k)} + \binom{k}{k-1} u' v^{(k-1)} + \binom{k}{k-2} u'' v^{(k-2)} + \ldots + u^{(k)} v$$

จะได้ว่า $D^k(uv) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} u^{(l)} v^{(k-l)}$ โดยที่ $\binom{k}{l} = \frac{k!}{(k-l)!l!}$

$$Y(k) = \frac{1}{\cancel{k!}} \left[\sum_{l=0}^{k} \frac{\cancel{k!}}{(k-l)!l!} \varphi^{(l)}(x) \theta^{(k-l)}(x) \right]_{x=0}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \left[\frac{1}{l!} \varphi^{(l)}(x) \cdot \frac{1}{(k-l)!} \theta^{(k-l)}(x) \right]_{x=0}$$

นั้นคือ $Y(k) = \sum_{l=0}^{k} \Phi(l) \Theta(k-l)$

สรุปได้ว่า ถ้า $y(x) = \varphi(x)\theta(x)$ แล้ว $Y(k) = \sum_{l=0}^{k} \Phi(l)\Theta(k-l)$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 7 [6] ให้ $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y:\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \{0,1\}$, $\delta:\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \{0,1\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k = 0,1,2,\ldots$ และ $m = 0,1,2,\ldots$

ถ้า $y(x) = x^m$ แล้ว $Y(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 \ ; k = m \\ 0 \ ; k \neq m \end{cases}$ (2.14)

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า ถ้า $y(x) = x^m$ แล้ว $Y(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 \ ; k = m \\ 0 \ ; k \neq m \end{cases}$ เป็นจริง

จากนิยาม (2.4) $Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0}$

แทนค่า $y(x) = x^m$ ในนิยาม (2.4) จะได้ว่า

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0}$$

แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณี $m = k$; $Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^k \right]_{x=0}$

$$= \frac{1}{\cancel{k!}} \cdot \cancel{k!}$$

$$Y(k) = 1$$

กรณี $m \neq k$; แบ่งเป็นสองกรณีย่อยคือ

กรณี $m < k$; $Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0}$

$$= \frac{1}{k!} \cdot (0)$$

$$Y(k) = 0$$

กรณี $m > k;$ $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m\right]_{x=0}$

$$= \frac{1}{k!}\left[m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k) \cdot x^{m-k-1}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k) \cdot (0)^{m-k-1}\right]$$

$$Y(k) = 0$$

สรุปได้ว่า ถ้า $y(x) = x^m$ แล้ว $Y(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 \; ; \; k = m \\ 0 \; ; \; k \neq m \end{cases}$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 8 [6] ให้ $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Y : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \delta : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \{0,1\},$ $\Phi : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ k = 0,1,2,\ldots$ และ $\Phi(k-l) = \frac{1}{(k-l)!}\left[\frac{d^{k-l}\varphi(x)}{dx^{k-l}}\right]_{x=0}$

ถ้า $y(x) = x^2\varphi(x)$ แล้ว $Y(k) = \sum_{l=0}^{k} \delta(l-2)\Phi(k-l)$ และ $\delta(l-2) = \begin{cases} 1 \; ; \; l = 2 \\ 0 \; ; \; l \neq 2 \end{cases}$

(2.15)

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า ถ้า $y(x) = x^2\varphi(x)$ แล้ว $Y(k) = \sum_{l=0}^{k} \delta(l-2)\Phi(k-l)$

จากนิยาม (2.4) $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} y(x)\right]_{x=0}$

แทน $y(x) = x^2\varphi(x)$ ในนิยาม (2.4) จะได้ว่า

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2\varphi(x)\right)\right]_{x=0}$$

จาก บทแทรกที่ 1 สูตรไลบ์นิตซ์

$$D^k(uv) = \binom{k}{k} uv^{(k)} + \binom{k}{k-1} u' v^{(k-1)} + \binom{k}{k-2} u'' v^{(k-2)} + \ldots + u^{(k)} v$$

จะได้ว่า $D^k(uv) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} u^{(l)} v^{(k-l)}$ โดยที่ $\binom{k}{l} = \frac{k!}{(k-l)!l!}$

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2\varphi(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{(k-l)!l!}\left[\frac{d^l}{dx^l}x^2\cdot\frac{d^{k-l}}{dx^{k-l}}\varphi(x)\ \right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{\cancel{k}!}\sum_{l=0}^{k}\frac{\cancel{k}!}{l!}\left[\frac{d^l x^2}{dx^l}\right]\cdot\frac{1}{(k-l)!}\left[\frac{d^{k-l}\varphi(x)}{dx^{k-l}}\ \right]_{x=0}$$

นั้นคือ $Y(k)=\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)\Phi(k-l)$

สรุปได้ว่า ถ้า $y(x)=x^2\varphi(x)$ แล้ว $Y(k)=\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)\Phi(k-l)$ โดยที่

$\delta(l-2)=\begin{cases}1\ ;\ l=2\\0\ ;\ l\neq 2\end{cases}$ เป็นจริง

2.2.2. การใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ไขปัญหาค่าเจาะจง (Using differential transformation to solve eigenvalue problems)

ในที่นี้เราจะพิจารณาปัญหาค่าเจาะจงของสตูร์ม-ลีอูวิลล์แบบปรกติ (the regular Sturm-Liouville eigenvalue problems)

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]y(x)=0 \qquad (2.16)$$

พร้อมกับเงื่อนไขขอบ

$$\alpha_1 y(0)-\beta_1 y'(0)=0 \qquad (2.17)$$

$$\alpha_2 y(1)+\beta_2 y'(1)=0 \qquad (2.18)$$

เมื่อ $p(x)>0, r(x)>0$ และ $q(x)\geq 0$ และ $p(x), r(x), q(x)$ และ $p'(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [0, 1] และ $\alpha_i\geq 0, \beta_i\geq 0$ และ $\alpha_i+\beta_i>0$ สำหรับ $i=1,2$

แปลงสมการ (2.16) โดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.8)-(2.15) เราจะได้

$$\sum_{l=0}^{k}(l+1)P(l+1)(k-l+1)Y(k-l+1)+\sum_{l=0}^{k}P(l)(k-l+1)(k-l+2)Y(k-l+2)$$
$$+\sum_{l=0}^{k}\left[\lambda R(l)-Q(l)\right]Y(k-l)=0 \qquad (2.19)$$

เมื่อ $P(k), Q(k), R(k)$ และ $Y(k)$ เป็นฟังก์ชันการแปลง (transformed function) ของ $p(x), q(x), r(x)$ และ $y(x)$ ตามลำดับ

ใช้นิยาม (2.4) ในเงื่อนไขขอบ (2.17) จะได้

$$\alpha_1 Y(0)-\beta_1 Y(1)=0 \qquad (2.20)$$

และใช้นิยาม (2.7) ในเงื่อนไขขอบ (2.18) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_2+\beta_2 k)Y(k)=0 \tag{2.21}$$

แทน $Y(0)=c$ (2.22)

จาก (2.20) เราจะพบว่า

$$Y(1)=\frac{\alpha_1 c}{\beta_1} \tag{2.23}$$

ที่ $k=0$ และแทนค่าจาก (2.22) และ (2.23) ลงใน (2.19) เราจะได้

$$Y(2)=-\frac{c}{2P(0)}\left[\frac{\alpha_1 P(1)}{\beta_1}+\lambda R(0)-Q(0)\right] \tag{2.24}$$

ที่ $k=1$ และแทนค่าจาก (2.22) ถึง (2.24) ลงใน (2.19) เราจะได้

$$Y(3)=\frac{c}{6P(0)}\left\{\begin{aligned}&-\frac{2\alpha_1 P(2)}{\beta_1}+\frac{2\alpha_1 P^2(1)}{P(0)\beta_1}+\lambda\left[\frac{2P(1)R(0)}{P(0)}-\frac{\alpha_1 R(0)}{\beta_1}-R(1)\right]\\&-\frac{2P(1)Q(1)}{P(0)}+\frac{\alpha_1 Q(0)}{\beta_1}+Q(1)\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะคำนวณ $Y(n)$ อันดับที่ n และแทนค่าจาก $Y(1)$ ถึง $Y(n)$ ลงใน (2.21) เราจะได้

$$c\left[f^{(n)}(\lambda)\right]=0 \tag{2.26}$$

เมื่อ $f^{(n)}(\lambda)$ เป็นพหุนามของ λ ที่สอดคล้องกับ n และสำหรับ $c\neq 0$ เราจะได้

$$f^{(n)}(\lambda)=0 \tag{2.27}$$

การแก้ (2.27) เราจะได้ $\lambda=\lambda_i^{(n)}, i=1,2,3,\ldots,$ โดย $\lambda_i^{(n)}$ เป็นค่าเจาะจงโดยประมาณ (eigenvalue) อันดับ n ที่สอดคล้องกับ n และจะแสดงโดย

$$\left|\lambda_i^{(n)}-\lambda_i^{(n-1)}\right|\le\xi \tag{2.28}$$

เมื่อ $\lambda_i^{(n-1)}$ เป็นค่าเจาะจงโดยประมาณ (eigenvalue) อันดับ i ที่สอดคล้อง $n-1$ และ ξ เป็นค่าเล็ก ๆ ที่เราตั้งขึ้น นอกจากนั้นเรามีสองกรณี

กรณีที่ 1 ถ้า (2.28) เป็นจริง แล้ว $\lambda_i^{(n)}$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) λ_i ค่าที่ i, แทนค่า λ_i ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(n)$ และใช้ (2.7) เราจะได้

$$y_i(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k y_{\lambda_i}(k) \tag{2.29}$$

เมื่อ $y_{\lambda_i}(k)=Y(k)$ ที่ $\lambda=\lambda_i$ และ $y_i(x)$ เป็นฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง (eigenvalue) λ_i สำหรับการเปรียบเทียบกับการแก้ปัญหาการวิเคราะห์ดังที่

จะแสดงต่อมา ซึ่งฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน (normalized eigenfunction) ค่าที่ i ถูกกำหนดให้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_i(x) = \frac{y_i(x)}{\int_0^1 |y_i(x)|\,dx} \tag{2.30}$$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า (2.28) ไม่เป็นจริง จากนั้นหาค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่ i และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน (normalized eigenfunction) ค่าที่ i ทำซ้ำต่อไปนี้ถึง จะพบว่า

(i) แทน $(n+1)$ ใน n

(ii) ทำตามขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ใน (2.26)-(2.30)

2.2.3. การแก้ไขปัญหาและหาคำตอบ (Solving problems and main results)

ตัวอย่างที่ 2

ใช้โจทย์จาก ตัวอย่างที่ 1

GE : $$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \tag{2.31}$$

B.C.s : $$y'(0) = 0 \tag{2.32}$$

$$y(1) = 0 \tag{2.33}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (2.31) เราจะได้

$$Y(k+2) = -\frac{\lambda}{(k+1)(k+2)}Y(k) \tag{2.34}$$

ใช้ (2.4), กับเงื่อนไขขอบ (2.32) จะได้

$$Y(1) = 0 \tag{2.35}$$

ใช้ (2.7), กับเงื่อนไขขอบ (2.33) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n} Y(k) = 0 \tag{2.36}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0) = c$ (2.37)

แทนค่า (2.35) และ (2.37) ที่ $k = 0$ ลงใน (2.34) เราจะได้ว่า

$$Y(2) = -\frac{c}{2}\lambda \tag{2.38}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k+1) = 0, k = 1, 2, 3, \ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n = 8$ ดังนี้

$$Y(4) = \frac{c}{24}\lambda^2 \tag{2.39}$$

$$Y(6) = -\frac{c}{720}\lambda^3 \tag{2.40}$$

$$Y(8) = \frac{c}{40320}\lambda^4 \tag{2.41}$$

แทนค่า (2.35), (2.37) - (2.41) ลงใน (2.36) จะได้

$$\sum_{k=0}^{8} Y(k) = c\left[f^{(8)}(\lambda)\right] = c - \frac{c\lambda}{2} + \frac{c\lambda^2}{24} - \frac{c\lambda^3}{720} + \frac{c\lambda^4}{40320} = 0$$

$$f^{(8)}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{24} - \frac{\lambda^3}{720} + \frac{\lambda^4}{40320} = 0 \tag{2.42}$$

แก้สมการ (2.42) จะได้

$$\lambda = 2.467,\ 17.984,\ 17.77 \pm 24.345i \tag{2.43}$$

เลือก $\lambda_1^{(8)} = 2.47$ (2.44)

เมื่อ $n = 6$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda = 2.4646,\ 13.7677 \pm 10.1285i \tag{2.45}$$

เลือก $\lambda_1^{(6)} = 2.46$ (2.46)

จาก (2.44) และ (2.46) เราจะได้

$$\left|\lambda_1^{(8)} - \lambda_1^{(6)}\right| = 0.01 \le \xi \tag{2.47}$$

จาก (2.47) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 2.47$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน (2.35), (2.37)-(2.41) และใช้ (2.29) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x) = \left(1 - 1.235x^2 + 0.254204x^4 - 0.0209294x^6 + 9.23139 \times 10^{-4} x^8\right)c \tag{2.48}$$

โดย (2.30) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x) = 1.57162\left(1 - 1.235x^2 + 0.254204x^4 - 0.0209294x^6 + 9.23139 \times 10^{-4} x^8\right) \tag{2.49}$$

โดยวิธีการวิเคราะห์ จากตัวอย่างที่ 1 เราจะมีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรกและฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก ดังต่อไปนี้

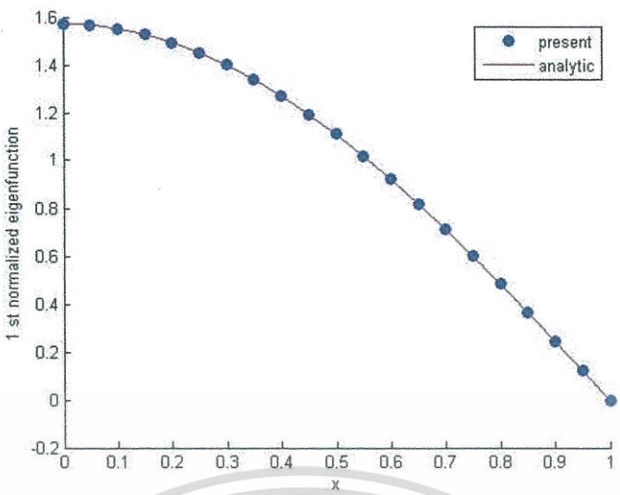
$$\lambda_1^{(a)} = 2.47 \tag{2.50}$$

$$y_1^{(a)}(x) = \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2.47}x\right) \tag{2.51}$$

หลังจากทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalize) แล้ว จาก (2.51) จะได้

$$\hat{y}_1^{(a)}(x) = 1.57162\cos(1.57162x) \tag{2.52}$$

จาก (2.44) และ (2.50) เราสรุปได้ว่า $\lambda_1 = \lambda_1^{(a)}$ และนำผลลัพธ์จาก (2.49) เปรียบเทียบกับผลลัพธ์การวิเคราะห์จาก (2.52) แสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (2.49) กับผลการวิเคราะห์ (2.52) หลังจากทำให้เป็นมาตรฐานแล้ว

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=18$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$f^{(18)}(\lambda)=1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{24}-\frac{\lambda^3}{720}+\frac{\lambda^4}{40320}-\frac{\lambda^5}{3628800}+\frac{\lambda^6}{479001600}-\frac{\lambda^7}{87178291200}+\frac{\lambda^8}{20922789888000}-\frac{\lambda^9}{6402373705728000}=0 \tag{2.53}$$

เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(18)}=2.47 \tag{2.54}$$

$$\lambda_2^{(18)}=22.21 \tag{2.55}$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(8)}$ และ $\left|\lambda_2^{(18)}-\lambda_2^{(16)}\right|=|22.21-22.20|=0.01\le\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=22.21$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

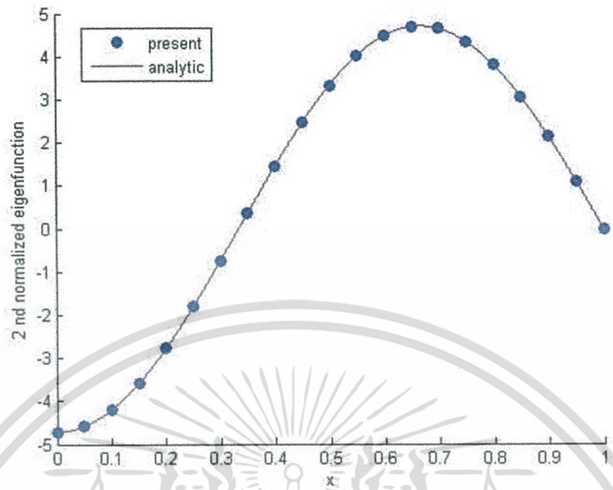
$$\hat{y}_2(x)=-4.79862\begin{pmatrix}1-11.1x^2+20.535x^4-15.1959x^6+6.02408x^8\\-1.48594x^{10}+0.299908x^{12}-0.0304833x^{14}\\+0.00281970x^{16}-2.04567\times10^{-4}x^{18}\end{pmatrix} \tag{2.56}$$

โดยวิธีการวิเคราะห์ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\lambda_2^{(a)}=22.21 \tag{2.57}$$

$$\hat{y}_2^{(a)}(x)=-4.71275\times\cos(4.71275x) \tag{2.58}$$

จาก (2.55) และ (2.57) เราจะได้ข้อสรุปว่า $\lambda_2 = \lambda_2^{(a)}$ และผลการคำนวณจาก (2.55) เป็นการเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์จาก (2.58) เหมือนที่แสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 เหมือนรูปที่ 2.1 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (2.56) กับ (2.58)

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(28)}(\lambda) = 0$ และใส่รากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(28)} = 2.47 \tag{2.59}$$

$$\lambda_2^{(28)} = 22.21 \tag{2.60}$$

$$\lambda_3^{(28)} = 61.69 \tag{2.61}$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(28)} = \lambda_1^{(18)} = \lambda_1^{(8)}$ และ $\lambda_2^{(28)} = \lambda_2^{(18)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(28)} - \lambda_3^{(26)}\right| \le \xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3 = 61.69$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

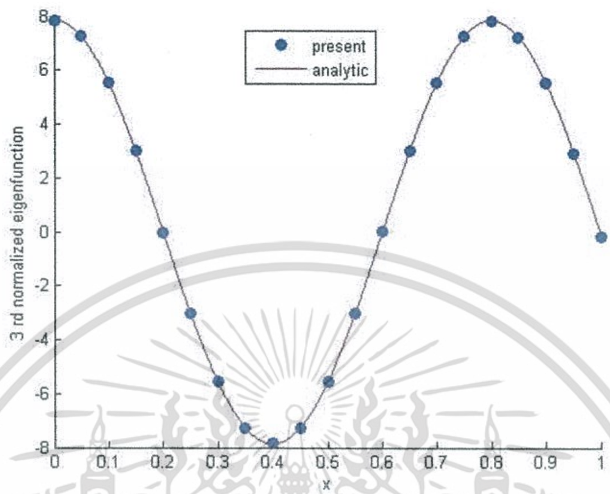
$$\hat{y}_3(x) = 7.8689\begin{pmatrix} 1 - 30.845x^2 + 158.568x^4 - 326.070x^6 + 359.2014x^8 \\ -246.212x^{10} + 115.067x^{12} - 39.0027x^{14} + 10.0253x^{16} \\ -2.02111x^{18} + 0.328112x^{20} - 0.0438122x^{22} \\ +0.00489634x^{24} - 4.64700\times10^{-4}x^{26} + 3.79197\times10^{-5}x^{28} \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

โดยวิธีการวิเคราะห์ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สาม และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน (normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\lambda_3^{(a)} = 61.69 \tag{2.63}$$

$$\hat{y}_3^{(a)}(x) = 7.85398\cos(7.85398x) \tag{2.64}$$

จาก (2.61) และ (2.63) เราสรุปได้ว่า $\lambda_3 = \lambda_3^{(a)}$ และนำผลการคำนวณจาก (2.62) มาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์การวิเคราะห์จาก (2.64) แสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 เหมือนรูปที่ 2.1 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (2.62) กับ (2.64)

2.3 สมการชโรดิงเจอร์ (Schrödinger equation) [7]-[9]

เออร์วิน ชโรดิงเจอร์ได้ศึกษาและพัฒนา ทวิภาคของคลื่นและอนุภาค (wave particular duality) โดยใช้คณิตศาสตร์และอธิบายอิเล็กตรอนด้วยฟังก์ชันคลื่น (wave function, Ψ) ซึ่งสมการคลื่นที่เขาพบ เรียกว่า สมการชโรดิงเจอร์ (Schrödinger equation) เป็นสมการที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคลื่นนิ่งของอะตอมไฮโดรเจน การเคลื่อนที่ของวัตถุในระดับควอนตัม (quantum mechanics) เช่นระดับอิเล็กตรอนในอะตอม หรือการเคลื่อนที่ของอนุภาคองค์ประกอบพื้นฐานของวัตถุในจักรวาล ซึ่งภายหลังเรียกว่าเป็นกลศาสตร์คลื่น สมการชโรดิงเจอร์ เป็นสมการที่อธิบายถึงสภาวะควอนตัมในเวลาที่เปลี่ยนแปลงไปของระบบเชิงฟิสิกส์ โดยเป็นสมการหลักของกลศาสตร์ควอนตัม ซึ่งตรงกับกฎของนิวตันที่เป็นกลศาสตร์ขั้นพื้นฐานกลศาสตร์คลื่นพิจารณาคลื่นที่มีสมการเป็น

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{2.65}$$

เมื่อ A เป็นแอมพลิจูดของคลื่น

ω เป็นความถี่เชิงมุมของคลื่น

k เป็นเลขคลื่น (Wave number)

ในการหารูปแบบทั่วไปของสมการชโรดิงเจอร์ จะเริ่มจากหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการ (2.65) เทียบกับ t จะได้

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-i\omega Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-i\omega\Psi \text{ หรือ } i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\omega\Psi$$

หาอนุพันธ์อันดับที่สองของสมการ (2.65) เทียบกับ t จะได้

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-ikAe^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-ik\Psi$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=-k^2\Psi \text{ หรือ } -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=k^2\Psi$$

จากสมการของไอน์สไตน์

$$E=hf=\frac{h}{2\pi}\left(2\pi f\right)=\hbar\omega$$

เมื่อ f เป็นความถี่ของการแผ่รังสี

h เป็นค่าคงที่ของแพลงค์

ω เป็นความถี่เชิงมุมของคลื่น

จากสมการของเดอร์บรอยล์

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}=\hbar k$$

เมื่อ λ เป็นความยาวคลื่น

k เป็นเลขคลื่น (Wave number)

h เป็นค่าคงที่ของแพลงค์

เนื่องจาก พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์ = พลังงานทั้งหมด

$$T\left(p\right)+V\left(x\right)=E$$

$$\Psi\left(x,t\right)=Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad (2.66)$$

เมื่อ $T\left(p\right)$ คือพลังงานจลน์

$V\left(x\right)$ คือพลังงานศักย์

นำ Ψ คูณสมการ (2.66) ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{p^2}{2m}\Psi+V\Psi=E\Psi \qquad (2.67)$$

แทน $E=\hbar\omega$ และ $p=\hbar k$ ลงในสมการ (2.67) จะได้

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}\Psi+V\Psi=\hbar\omega\Psi \qquad (2.68)$$

แทนค่า $\omega\Psi$ และ $k^2\Psi$ ในสมการ (2.68) ด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นจะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi\left(x,t\right)}{\partial x^2}+V\Psi\left(x,t\right)=i\hbar\frac{\partial\Psi\left(x,t\right)}{\partial t} \qquad (2.69)$$

สมการ (2.69) คือ สมการชโรดิงเจอร์แบบขึ้นกับเวลาในกรณี 1 มิติ (Time dependent Schrödinger wave equation in one dimensional)
เมื่อกำหนดให้ $\Psi(x,t)=\Psi(x)f(t)$ จะได้ว่า

$$f(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}+V\Psi(x)\right]=\Psi(x)i\hbar\frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\Psi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}+V\Psi(x)\right]=\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

เมื่อฝั่งขวามือเป็นฟังก์ชัน t และฝั่งซ้ายมือเป็นฟังก์ชัน x และทั้งสองฝั่งมีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง เราจะกำหนดให้ค่าคงนั้นเป็น E เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 2 สมการ คือ

$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t}=-\frac{iE}{\hbar} \text{ และ}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}+V\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{2.70}$$

สมการ (2.70) คือ สมการชโรดิงเจอร์แบบไม่ขึ้นกับเวลาในกรณี 1 มิติ (Time independent Schrödinger wave equation in one dimensional)

บทนิยามที่ 3 [7] กำหนดให้ ฮาร์โมนิกออสซิเลเตอร์ (harmonic oscillator)

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{2.71}$$

เมื่อ m และ ω แทน มวลของ อนุภาค และความถี่ของออสซิเลเตอร์
แทนค่า (2.71) ในสมการชโรดิงเจอร์แบบไม่ขึ้นกับเวลาในกรณี 1 มิติ จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{2.72}$$

ซึ่งเราจะจัดสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวให้ง่ายขึ้น ด้วยการเขียนใหมในรูปแบบไม่มีขนาด (Dimensionless Form) โดยจะกำหนดพารามิเตอร์ต่อไปนี้

$$\xi=\alpha x,\tau=\frac{2E}{\hbar\omega},\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \tag{2.73}$$

จากสมการที่ (2.72) ใช้พารามิเตอร์ใน (2.73) จัดรูปจะได้

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+E\Psi(x)-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\Psi(x)=0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d^2\Psi(\xi)}{dx^2}+E\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\Psi(\xi)-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\Psi(\xi)=0$$

$$\frac{d^2\Psi(\xi)}{dx^2}+\frac{2E}{\hbar\omega}\Psi(\xi)-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\Psi(\xi)=0$$

$$\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2}+(\tau-\xi^2)\Psi(\xi)=0 \tag{2.74}$$

สมการ (2.74) คือ สมการควอนตัมออสซิเลเตอร์ (Quantum Oscillator Equation) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง ถูกนำมาประยุกต์ใช้ไปหลายด้านในวิชาฟิสิกส์ เช่น การสั่นของอะตอมในโมเลกุลหรือในคริสตอล ไมโครสโคปิคฟิกสิกต์ (microscopic physics) และสนามพลังแม่เหล็ก (Electromagnetic Field) เป็นต้น

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Chen Chao Kuang, Ho Shing Huei [2] ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการแก้ปัญหาค่าเจาะจงด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ซึ่งขั้นตอนการแก้ไขปัญหามี 3 ขั้นตอนหลัก คือ การแปลงปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Strum-Liouville problem) ให้เป็นสมการพีชคณิต (Algebraic equations) จากนั้นก็ทำการแก้สมการพีชคณิต สุดท้ายแปลงคำตอบของสมการพีชคณิตเพื่อให้ได้ ค่าเจาะจง และ ฟังก์ชันเจาะจง ด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์เราจะสามารถหาค่าเจาะจงและ ฟังก์ชันเจาะจง อันดับที่ I ได้ เมื่อนำผลเฉลยดังกล่าวมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ พบว่าผลเฉลยมีความใกล้เคียงกันมาก

I.H. Abdel-Halim Hassan [3] ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการแก้ปัญหาค่าเจาะจงด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ โดยงานวิจัยฉบับนี้ได้ประยุกต์วิธีการของการแปลงเชิงอนุพันธ์ สำหรับการแก้ปัญหาค่าเจาะจง 3 ปัญหา ซึ่งได้ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้การประยุกต์วิธีการของการแปลงเชิงอนุพันธ์กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์อย่างชัดเจนในรูปของกราฟ และแสดงการลู่เข้าของค่าเจาะจง

บุญญาพร เกิดผล [6] ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนาทฤษฎีวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อนำมาใช้หาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลอันดับ ν และสมการเลอจองด์อันดับ α และเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยแม่นตรงโดยหาค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์และใช้กราฟซึ่งการหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์หาจากวิธีของโฟรเบนิอุสและวิธีอนุกรมกำลังตามลำดับ ผลเฉลยที่ได้ด้วยวิธีนี้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังมีค่าเช่นเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้มีขั้นตอนการคำนวณที่ง่ายกว่าและได้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องแม่นยำ

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 การใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อแก้ปัญหาค่าเจาะจง (Using differential transformation to solve eigenvalue problems)

ในที่นี้เราจะพิจารณาปัญหาค่าเจาะจงของสตูร์ม-ลีอูวิลล์แบบปรกติ (The regular Sturm-Liouville eigenvalue problems)

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]y(x)=0 \tag{3.1}$$

พร้อมกับเงื่อนไขขอบ

$$\alpha_1 y(0)-\beta_1 y'(0)=0 \tag{3.2}$$

$$\alpha_2 y(1)+\beta_2 y'(1)=0 \tag{3.3}$$

เมื่อ $p(x)=1, r(x)=1$ และ $q(x)=x^2$ และ $p(x), r(x), q(x)$ และ $p'(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [0, 1] และ $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ และ $\alpha_i+\beta_i>0$ สำหรับ $i=1,2$

โดยในงานวิจัยฉบับนี้ จะแก้ปัญหาสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ (Quantum oscillator) ตารางที่ 1 [5] คือเราจะพิจารณาปัญหาค่าเจาะจงของสตูร์ม-ลีอูวิลล์แบบปรกติ (The regular Sturm-Liouville eigenvalue problems) ในกรณีที่ $p(x)=1, r(x)=1$ และ $q(x)=x^2$ ลงในสมการที่ (3.1) จะได้ว่า

$$y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0 \tag{3.4}$$

<u>ขั้นตอนการดำเนินการ</u>

ขั้นตอนที่ 1) ใช้ทฤษฎีบทที่ได้จากบทที่ 2 แปลง (3.4) โดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์

$$y''(x)+\lambda y(x)-x^2y(x)=0$$

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)+\lambda Y(k)-\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)=0$$

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{3.5}$$

เมื่อ $Y(k)$ และ $\delta(k)$ เป็นฟังก์ชันการแปลง (transformed function) ของ $y''(x)$ และ $x^2y(x)$ ตามลำดับ

ขั้นตอนที่ 2) ใช้ทฤษฎีบทที่ได้จากบทที่ 2 และสมการเงื่อนไขขอบ (3.2), (3.3) โดยใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4), นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) เพื่อให้ได้ค่า $Y(0)$, $Y(1)$

เนื่องจาก k เป็นอันดับของการอนุพันธ์

จาก $y(0)$ นั่นคือ $k=0$

$$Y(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{dx^0}y(0)\right]$$

$$Y(0)=y(0)$$

จาก $y'(0)$ นั่นคือ $k=1$

$$Y(1)=\frac{1}{1!}\left[\frac{d^1}{dx^1}y(0)\right]$$

$$Y(1)=y'(0)$$

และใช้นิยาม (2.4) ในเงื่อนไขขอบ (3.2)

จากขั้นตอนข้างต้น จะได้ว่า

$$\alpha_1 Y(0)-\beta_1 Y(1)=0 \tag{3.6}$$

และใช้นิยาม (2.7) ในเงื่อนไขขอบ (3.3)

จาก $y(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k Y(k)$

เมื่อ $x=1$ จะได้ $y(1)=\sum_{k=0}^{n}1^k Y(k)$

และจาก $y'(x)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot x^{k-1}Y(k)$

เมื่อ $x=1$ จะได้ $y'(1)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot 1^{k-1}Y(k)$

จากขั้นตอนข้างต้น จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_2+\beta_2 k)Y(k)=0 \tag{3.7}$$

แทน $Y(0)=c$ (3.8)

แทน (3.8) ลงใน (3.6) จะได้ว่า

$$Y(1)=\frac{\alpha_1 c}{\beta_1} \tag{3.9}$$

ขั้นตอนที่ 3) แทนค่า k ลงใน (3.5) เพื่อหา $Y(n)$ อันดับที่ n และแทนค่าจาก $Y(1)$ ถึง $Y(n)$ ลงใน (3.7)

ที่ $k=0$ และแทนค่า $Y(0)$ จาก (3.8), $Y(1)$ จาก (3.9) ลงใน (3.5) และจากทฤษฎีบทที่ 8 ของ δ เราจะได้

$$Y(2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{0}\delta(l-2)Y(0-l)\right)-\lambda Y(0)}{(0+1)(0+2)}$$

$$=\frac{\left(\cancel{\delta(0-2)}^{0}\,Y(0-0)\right)-\lambda Y(0)}{(1)(2)}$$

$$=\frac{-c\lambda}{2} \tag{3.10}$$

ที่ $k=1$ และแทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(2)$ จาก (3.8) ถึง (3.10) ลงใน (3.5) เราจะได้

$$Y(3)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{1}\delta(l-2)Y(1-l)\right)-\lambda Y(1)}{(0+2)(0+3)}$$

$$=\frac{\left(\cancel{\delta(0-2)}^{0}\,Y(1-0)+\cancel{\delta(1-2)}^{0}\,Y(1-1)\right)-\lambda Y(1)}{(2)(3)}$$

$$=\frac{-\alpha_1 c\lambda}{6\beta_1} \tag{3.11}$$

ที่ $k=2$ และแทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(3)$ จาก (3.8) ถึง (3.11) ลงใน (3.5) เราจะได้

$$Y(4)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{2}\delta(l-2)Y(2-l)\right)-\lambda Y(2)}{(0+3)(0+4)}$$

$$=\frac{\left(\cancel{\delta(0-2)}^{0}\,Y(2-0)+\cancel{\delta(1-2)}^{0}\,Y(2-1)+\cancel{\delta(2-2)}^{1}\,Y(2-2)\right)-\lambda Y(2)}{(3)(4)}$$

$$=\frac{\left(2-\lambda^2\right)c}{24} \tag{3.12}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะคำนวณ $Y(n)$ อันดับที่ n และแทนค่าจาก $Y(1)$ ถึง $Y(n)$ ลงใน (3.7) เราจะได้

$$\sum_{k=0}^{n}Y(k)=c\left[f^{(n)}(\lambda)\right]=0 \tag{3.13}$$

เมื่อ $f^{(n)}(\lambda)$ เป็นพหุนามของ λ ที่สอดคล้องกับ n และสำหรับ $c\neq 0$ เราจะได้

$$f^{(n)}(\lambda)=0 \tag{3.14}$$

ขั้นตอนที่ 4) หาค่าเจาะจง λ และฟังก์ชันเจาะจง $y(x)$

การแก้ (3.14) เราจะได้ $\lambda=\lambda_i^{(n)}, i=1,2,3,\ldots,$ โดย $\lambda_i^{(n)}$ เป็นค่าเจาะจงโดยประมาณ (eigenvalue) อันดับ n ที่สอดคล้องกับ n ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$\left|\lambda_i^{(n)}-\lambda_i^{(n-1)}\right|\leq\xi \tag{3.15}$$

เมื่อ $\lambda_i^{(n-1)}$ เป็นค่าเจาะจงโดยประมาณ (eigenvalue) อันดับ i ที่สอดคล้อง $n-1$ เมื่อกำหนดให้ $\xi = 0.01$ ที่เราตั้งขึ้น นอกจากนั้นเรามีสองกรณี

<u>**กรณีที่ 1**</u> ถ้า (3.15) เป็นจริง แล้ว $\lambda_i^{(n)}$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) λ_i ค่าที่ i, แทนค่า λ_i ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(n)$ และใช้ (2.7) เราจะได้

$$y_i(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k y_{\lambda_i}(k) \tag{3.16}$$

เมื่อ $y_{\lambda_i}(k) = Y(k)$ ที่ $\lambda = \lambda_i$ และ $y_i(x)$ เป็นฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง (eigenvalue) λ_i ซึ่งฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน (normalized eigenfunction) ค่าที่ i ถูกกำหนดให้ ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_i(x) = \frac{y_i(x)}{\int_0^1 |y_i(x)|\,dx} \tag{3.17}$$

<u>**กรณีที่ 2**</u> ถ้า (3.15) ไม่เป็นจริง จากนั้นหาค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่ i และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน (normalized eigenfunction) ค่าที่ i ทำซ้ำต่อไปนี้ถึง จะพบว่า

(i) แทน $(n+1)$ ใน n

(ii) ทำตามขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ใน (3.13)-(3.17)

ขั้นตอนที่ 5) นำฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน (normalized eigenfunction) และค่าเจาะจง (eigenvalue) ที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 มาแสดงเป็นกราฟ

บทที่ 4
ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

งานวิจัยฉบับนี้ ได้ศึกษานิยาม ทฤษฎีบท รวมถึงคุณสมบัติที่เป็นความรู้พื้นฐานของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์และนำมาใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ (Quantum oscillator) ที่มีเงื่อนไขขอบ

ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) ของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ (Quantum oscillator) ถูกนำมาแสดงเป็นกราฟ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (Mathematica) ซึ่งความหมายของเส้นทึบ (—) และจุด (●) จะใช้ตลอดทั้งงานวิจัยฉบับนี้ จากขั้นตอนในบทที่ 3 ได้ใช้วิธีการแปลงอนุพันธ์ (DTM) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ (Quantum oscillator) ที่มีเงื่อนไขขอบ

ผลเฉลยโดยประมาณได้ถูกอนุกรมอนันต์แต่ในตัวอย่างนี้เราจะหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงทั้งหมด 3 ค่า โดยที่จะประมาณผลเฉลยตามสมการ (2.27)

4.1 ตัวอย่างการหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจง

ตัวอย่างที่ 4.1

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.1)

B.C.s : $y'(0)=0$ (4.2)

$y(1)=0$ (4.3)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.1) เราจะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)+\lambda Y(k)-\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)=0$$

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.4}$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.2) จะได้

เนื่องจาก $k=1$

นั่นคือ $Y(1)=\frac{1}{1!}\left[\frac{d^1}{dx^1}y(0)\right]=y'(0)=0$

$$\therefore\ Y(1)=0 \tag{4.5}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.3) จะได้

เนื่องจาก $x=1$

นั่นคือ $y(1)=\sum_{k=0}^{n}1^k Y(k)=0$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n}Y(k)=0 \tag{4.6}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$ (4.7)

ที่ $k=0$ แทนค่า $y(0)$ จาก (4.7) ลงใน (4.4) เราจะได้ว่า

$$Y(0+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{0}\delta(l-2)Y(0-l)\right)-\lambda Y(0)}{(0+1)(0+2)}$$

$$=\frac{\cancel{\delta(0-2)}^{0}Y(0-0)-\lambda Y(0)}{(1)(2)}$$

$$=\frac{-\lambda Y(0)}{2}$$

$$\therefore\ Y(2)=-\frac{c\lambda}{2} \tag{4.8}$$

ที่ $k=1$ แทนค่า $Y(1)$ จาก (4.5) และ $Y(0)$ จาก (4.7) ลงใน (4.4) เราจะได้ว่า

$$Y(1+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{1}\delta(l-2)Y(1-l)\right)-\lambda Y(1)}{(1+1)(1+2)}$$

$$=\frac{\left(\cancel{\delta(0-2)}^{0}Y(1-0)+\cancel{\delta(1-2)}^{0}Y(1-1)\right)-\lambda Y(1)}{(2)(3)}$$

$$=\frac{-\lambda Y(1)}{6}$$

$$\therefore\ Y(3)=0 \tag{4.9}$$

ที่ $k=2$ แทน $Y(1)$ จาก (4.5) และ $Y(0)$ ถึง $Y(2)$ จาก (4.7) ถึง (4.8) ลงใน (4.4) เราจะได้ว่า

$$Y(2+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{2}\delta(l-2)Y(2-l)\right)-\lambda Y(2)}{(2+1)(2+2)}$$

$$=\frac{\left(\begin{array}{l}\cancel{\delta(0-2)}^{0}Y(2-0)+\cancel{\delta(1-2)}^{0}Y(2-1)\\+\cancel{\delta(2-2)}^{1}Y(2-2)\end{array}\right)-\lambda Y(2)}{(3)(4)}$$

$$=\frac{Y(0)-\lambda Y(2)}{12}$$

$$\therefore\ Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24} \tag{4.10}$$

ที่ $k=3$ แทนค่า $Y(1)$ จาก (4.5) และ $Y(0)$ ถึง $Y(3)$ จาก (4.7) ถึง (4.9) ลงใน (4.4) เราจะได้ว่า

$$Y(3+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{3}\delta(l-2)Y(3-l)\right)-\lambda Y(3)}{(3+1)(3+2)}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}\cancel{\delta(0-2)}^{0}Y(3-0)+\cancel{\delta(1-2)}^{0}Y(3-1)\\+\cancel{\delta(2-2)}^{1}Y(3-2)+\cancel{\delta(3-2)}^{0}Y(3-3)\end{pmatrix}-\lambda Y(3)}{(4)(5)}$$

$$=\frac{-\lambda Y(3)}{20}$$

$$\therefore\ Y(5)=0$$

จากขั้นตอนข้างต้นจะได้ว่า $Y(2k+1)=0, k=1,2,3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=10$ ดังนี้

$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720} \quad (4.11)$$

$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320} \quad (4.12)$$

$$Y(10)=-\frac{c\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800} \quad (4.13)$$

แทนค่า $Y(1)$ จาก (4.5) และ $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ จาก (4.7) ถึง (4.13) ลงใน (4.6) จะได้

$$\sum_{k=0}^{10}Y(k)=c[f^{(10)}(\lambda)]=0$$

$$f^{(10)}(\lambda)=1-\frac{\lambda}{2}+\frac{2+\lambda^2}{24}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{720}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{40320}-\frac{\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}=0 \quad (4.14)$$

แก้สมการ (4.14) จะได้

$$\lambda=2.597,\ 19.081\pm45.154i,\ 24.621\pm4.972i$$

เลือก $\lambda_1^{(10)}=2.597$ (4.15)

เมื่อ $n=8$ แทนค่า $Y(1)$ จาก (4.5) และ $Y(0)$ ถึง $Y(8)$ จาก (4.7) ถึง (4.12) ลงใน (4.6) จะได้

$$\sum_{k=0}^{8}Y(k)=c[f^{(8)}(\lambda)]=0$$

$$f^{(8)}(\lambda)=1-\frac{\lambda}{2}+\frac{2+\lambda^2}{24}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{720}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{40320}=0$$

และแก้สมการจะได้

$$\lambda = 2.60,\ 17.621,\ 17.89 \pm 25.193i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)} = 2.60$ (4.16)

จาก (4.15) และ (4.16) เราจะแทน ลงใน (2.27) จะได้ว่า

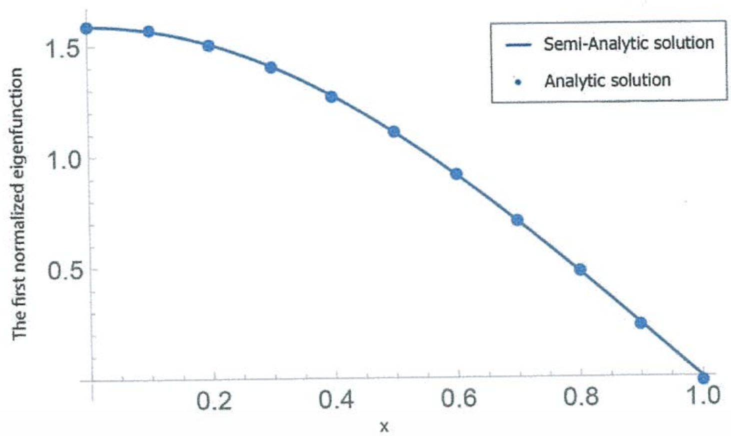
$$\left|\lambda_1^{(10)} - \lambda_1^{(8)}\right| = \left|2.597 - 2.60\right| = 0.003 \le \xi \tag{4.17}$$

จาก (4.17) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 2.60$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(1)$ จาก (4.5) และ $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ จาก (4.7) ถึง (4.13) และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k Y(k) \\
&= Y(0) + x^2 Y(2) + x^4 Y(4) + x^6 Y(6) + x^8 Y(8) + x^{10} Y(10) \\
&= c - \frac{c\lambda}{2}x^2 + \frac{c(2+\lambda^2)}{24}x^4 - \frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}x^6 + \frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}x^8 \\
&\quad - \frac{c\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}x^{10} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 1.3x^2 + 0.365x^4 - 0.0749667\,x^6 \\ +9.99845\times 10^{-3}x^8 - 1.12181\times 10^{-3}x^{10} \end{pmatrix} c
\end{aligned}$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1(x) &= \frac{y_i(x)}{\int_0^1 \left|y_i(x)\right| dx} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 1 - 1.3x^2 + 0.365x^4 - 0.0749667x^6 \\ +9.99845\times 10^{-3}x^8 - 1.12181\times 10^{-3}x^{10} \end{pmatrix} c}{\left.\begin{pmatrix} x - \dfrac{1.3x^3}{3} + \dfrac{0.365x^5}{5} - \dfrac{0.0749667x^7}{7} \\ + \dfrac{9.99845\times 10^{-3}x^9}{9} - \dfrac{1.12181\times 10^{-3}x^{19}}{19} \end{pmatrix}\right|_0^1 \cdot c} \\
&= 1.58739 \begin{pmatrix} 1 - 1.3x^2 + 0.365x^4 - 0.0749667x^6 \\ +9.99845\times 10^{-3}x^8 - 1.12181\times 10^{-3}x^{10} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.18}$$



รูปที่ 4.1 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของค่าฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.18) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

<u>หมายเหตุ</u> ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน จะแสดงในรูปแบบของเส้นทึบ (—)

และผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ จะแสดงในรูปแบบของจุด (●)

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=18$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f^{(18)}(\lambda) = {} & 1-\frac{\lambda}{2}+\frac{2+\lambda^2}{24}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{720}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{40320} \\
& -\frac{\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}+\frac{5400+4804\lambda^2+190\lambda^4+\lambda^6}{479001600} \\
& -\frac{\lambda(116808+18004\lambda^2+322\lambda^4+\lambda^6)}{87178291200} \\
& +\frac{982800+991136\lambda^2+52584\lambda^4+504\lambda^6+\lambda^8}{20922789888000} \\
& -\frac{\lambda(29016720+5312096\lambda^2+129864\lambda^4+744\lambda^6+\lambda^8)}{6402373705728000}=0
\end{aligned}
$$

เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(18)} = 2.60$$

$$\lambda_2^{(18)} = 22.52$$

<u>***Note***</u> เพราะ $\lambda_1^{(18)} = \lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(18)} - \lambda_2^{(16)}\right| = \left|22.52 - 22.51\right| = 0.01 \le \xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2 = 22.52$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k Y(k) \\
&= Y(0) + x^2 Y(2) + x^4 Y(4) + x^6 Y(6) + x^8 Y(8) + x^{10} Y(10) + x^{12} Y(12) \\
&\quad + x^{14} Y(14) + x^{16} Y(16) + x^{18} Y(18) \\
&= c - \frac{c\lambda}{2} x^2 + \frac{c(2+\lambda^2)}{24} x^4 - \frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720} x^6 + \frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320} x^8 \\
&\quad - \frac{c\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800} x^{10} + \frac{c(5400+4804\lambda^2+190\lambda^4+\lambda^6)}{479001600} x^{12} \\
&\quad - \frac{c\lambda(116808+18004\lambda^2+322\lambda^4+\lambda^6)}{87178291200} x^{14} \\
&\quad + \frac{c(982800+991136\lambda^2+52584\lambda^4+504\lambda^6+\lambda^8)}{20922789888000} x^{16} \\
&\quad - \frac{c\lambda(29016720+5312096\lambda^2+129864\lambda^4+744\lambda^6+\lambda^8)}{6402373705728000} x^{18}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ y_2(x) = \begin{pmatrix} 1 - 11.26x^2 + 21.2146x^4 - 16.3004x^6 + 6.93393x^8 \\ -1.91614x^{10} + 0.379435x^{12} - 0.0574781x^{14} \\ +0.00697434x^{16} - 7.01112\times10^{-4} x^{18} \end{pmatrix} c
$$

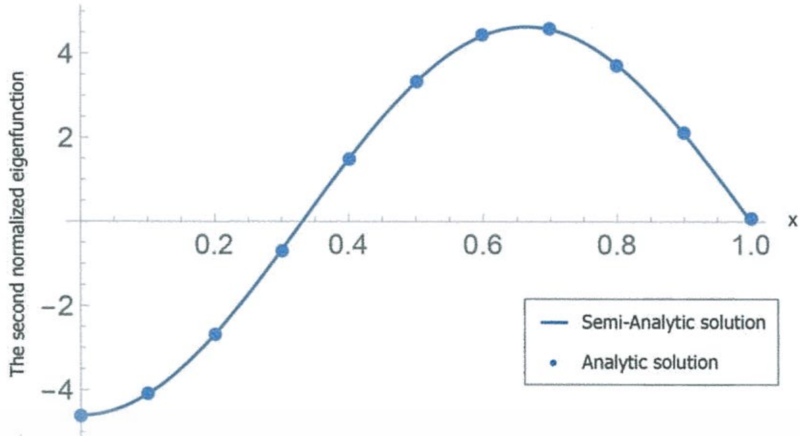
โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$
\hat{y}_2(x) = \frac{y_i(x)}{\int_0^1 \left| y_i(x) \right| dx}
$$

$$
= \frac{\begin{pmatrix} 1 - 11.26x^2 + 21.2146x^4 - 16.3004x^6 + 6.93393x^8 \\ -1.91614x^{10} + 0.379435x^{12} - 0.0574781x^{14} \\ +0.00697434x^{16} - 7.01112\times10^{-4} x^{18} \end{pmatrix} c}{\left. \begin{pmatrix} x - \frac{11.26x^3}{3} + \frac{21.2146x^5}{5} - \frac{16.3004x^7}{7} + \frac{6.93393x^9}{9} \\ - \frac{1.91614x^{11}}{11} + \frac{0.379435x^{13}}{13} - \frac{0.0574781x^{15}}{15} \\ + \frac{0.00697434x^{17}}{17} - \frac{7.01112\times10^{-4} x^{19}}{19} \end{pmatrix} \right|_0^1 \cdot c}
$$

$$
\therefore\ \hat{y}_2(x) = -4.60671 \begin{pmatrix} 1 - 11.26x^2 + 21.2146x^4 - 16.3004x^6 + 6.93393x^8 \\ -1.91614x^{10} + 0.379435x^{12} - 0.0574781x^{14} \\ +0.00697434x^{16} - 7.01112\times10^{-4} x^{18} \end{pmatrix}
$$

(4.19)



รูปที่ 4.2 เหมือนรูปที่ 4.1 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.19) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(28)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

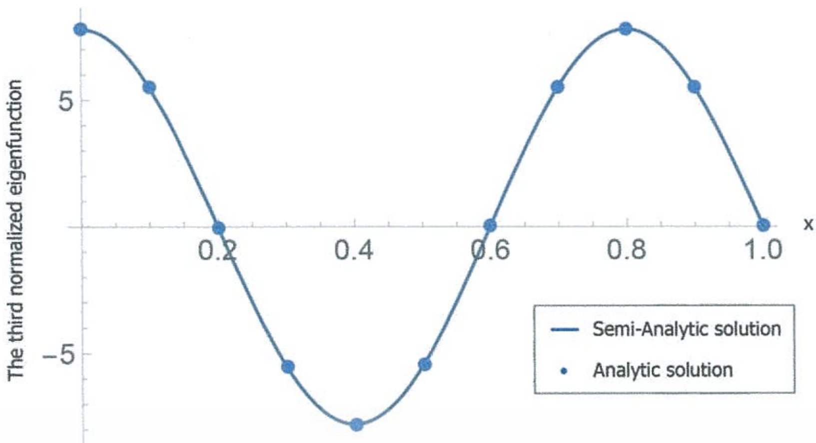
$\lambda_1^{(28)}=2.60$

$\lambda_2^{(28)}=22.52$

$\lambda_3^{(28)}=62.01$

Note เพราะ $\lambda_1^{(28)}=\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(28)}=\lambda_2^{(18)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(28)}-\lambda_3^{(26)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=62.01$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=7.78311\begin{pmatrix}1-31.005x^2+160.302x^4-332.377x^6+370.911x^8-259.251x^{10}\\+124.599x^{12}-43.877x^{14}+11.8559x^{16}-2.54595x^{18}\\+0.446659x^{20}-0.0654616x^{22}+0.00816292x^{24}\\-8.79453\times10^{-4}x^{26}+8.29336\times10^{-5}x^{28}\end{pmatrix} \tag{4.20}$$



รูปที่ 4.3 เหมือนรูปที่ 4.1 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.20) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.2

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.21)

B.C.s : $y(0)=0$ (4.22)

$y(1)=0$ (4.23)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.21) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.24}$$

ใช้ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.22) จะได้

$$Y(0)=0 \tag{4.25}$$

ใช้ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.23) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}Y(k)=0 \tag{4.26}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(1)=c$ (4.27)

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.25) และ $Y(1)$ จาก (4.27) ที่ $k=0$ ลงใน (4.24) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=0 \tag{4.28}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k)=0, k=1,2,3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=13$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{6}$$

$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{120}$$

$$Y(7) = -\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{5040}$$
$$Y(9) = \frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$
$$Y(11) = -\frac{c\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800}$$
$$Y(13) = \frac{c(27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6)}{6227020800} \quad (4.29)$$

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.25) และ $Y(1)$ ถึง $Y(13)$ จาก (4.27) ถึง (4.29) ลงใน (4.26) จะได้

$$\sum_{k=0}^{13} Y(k) = c[f^{(13)}(\lambda)] = 0$$

$$f^{(13)}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{6} + \frac{6+\lambda^2}{120} - \frac{\lambda(26+\lambda^2)}{5040} + \frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{362880} - \frac{\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800} + \frac{27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6}{6227020800} = 0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda = 10.1524,\ 35.3044,\ 13.634 \pm 83.939i,\ 41.637 \pm 28.116i$$

เลือก $\lambda_1^{(13)} = 10.15$ (4.30)

เมื่อ $n = 11$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda = 10.137,\ 18.282 \pm 56.94i,\ 31.649 \pm 12.456i$$

เลือก $\lambda_1^{(11)} = 10.14$ (4.31)

จาก (4.30) และ (4.31) เราจะแทนลงใน (2.27) เราจะได้ว่า

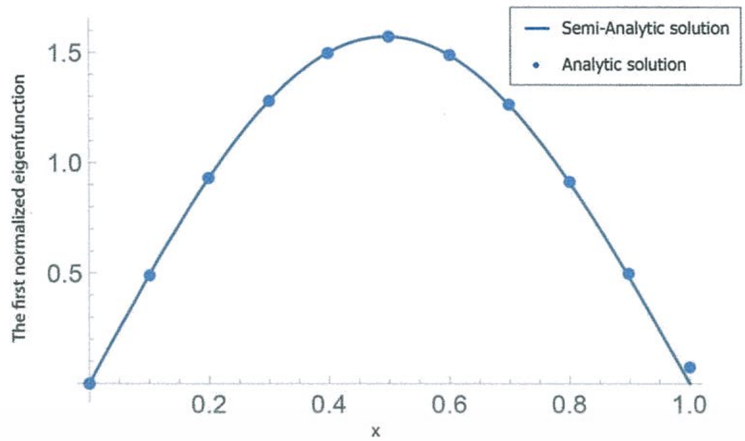
$$\left|\lambda_1^{(13)} - \lambda_1^{(11)}\right| = |10.15 - 10.14| = 0.01 \le \xi \quad (4.32)$$

จาก (4.32) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 10.15$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(1)$ จาก (4.25) และ $Y(0)$ ถึง $Y(13)$ จาก (4.27) ถึง (4.29) และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 - 1.69x^3 + 0.9085x^5 - 0.2598x^7 + 0.0492481x^9 \\ -6.90641\times10^{-3}x^{11} + 7.65053\times10^{-4}x^{13} \end{pmatrix} c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x) = 4.98933 \begin{pmatrix} 1 - 1.69x^3 + 0.9085x^5 - 0.2598x^7 + 0.0492481x^9 \\ -6.90641\times10^{-3}x^{11} + 7.65053\times10^{-4}x^{13} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$



รูปที่ 4.4 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.33) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=23$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะหาคำตอบ ดังนี้

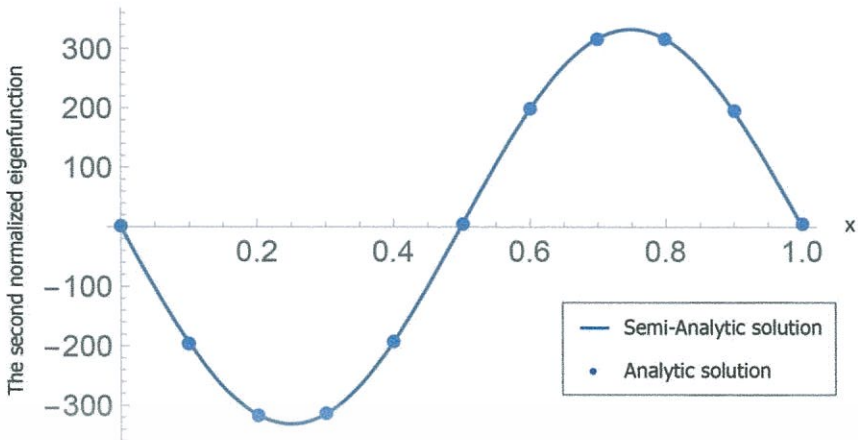
$$\begin{aligned}
f^{(23)}(\lambda) &= 1-\frac{\lambda}{6}+\frac{6+\lambda^2}{120}-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{5040}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{362880}-\frac{\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800} \\
&+\frac{27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6}{6227020800}-\frac{\lambda(359064+31444\lambda^2+406\lambda^4+\lambda^6)}{1307674368000} \\
&+\frac{5821200+2375904\lambda^2+83944\lambda^4+616\lambda^6+\lambda^8}{355687428096000} \\
&-\frac{\lambda(103486608+10928672\lambda^2+194376\lambda^4+888\lambda^6+\lambda^8)}{121645100408832000} \\
&+\frac{1990850400+916045776\lambda^2+39637520\lambda^4+405048\lambda^6+1230\lambda^8+\lambda^{10}}{51090942171709440000} \\
&-\frac{\lambda(45455225760+5506088016\lambda^2+121275440\lambda^4+778008\lambda^6+1650\lambda^8+\lambda^{10})}{25852016738884976640000}=0
\end{aligned}$$

เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(23)}=10.15$$
$$\lambda_2^{(23)}=39.7996$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(23)}=\lambda_1^{(13)}$ และ $\left|\lambda_2^{(23)}-\lambda_2^{(21)}\right|=\left|39.7996-39.7967\right|=0.0029\le\xi$ นอกจากนั้น เรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=39.80$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-2088.48\begin{pmatrix} x-6.633x^3+13.25x^5-12.7142x^7+7.21216x^9-2.72508x^{11} \\ +0.741475x^{13}-0.153504x^{15}+0.0251872x^{17}-3.37999\times10^{-3}x^{19} \\ +3.80264\times10^{-4}x^{21}-3.65899\times10^{-5}x^{23} \end{pmatrix} \tag{4.34}$$



รูปที่ 4.5 เหมือนรูปที่ 4.4 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.34) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

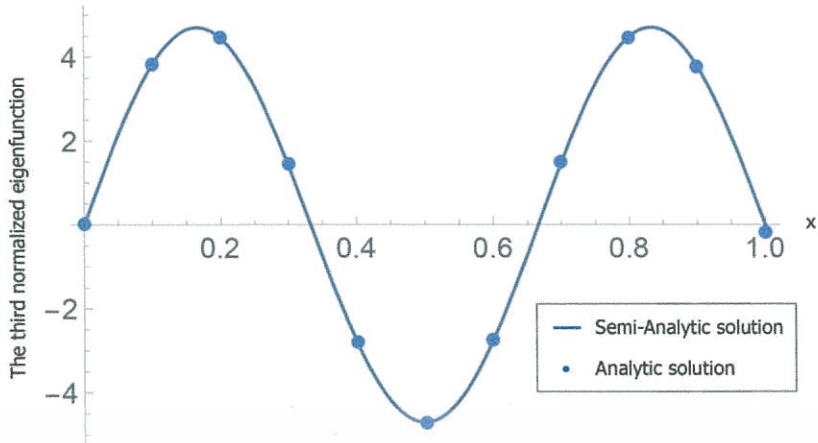
ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(31)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(31)}=10.15$$
$$\lambda_2^{(31)}=39.80$$
$$\lambda_3^{(31)}=89.15$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(31)}=\lambda_1^{(23)}=\lambda_1^{(13)}$ และ $\lambda_2^{(31)}=\lambda_2^{(23)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(31)}-\lambda_3^{(29)}\right|\le\xi$ เราจะได้ ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=89.15$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=44.3981\begin{pmatrix} x-14.8583x^3+66.281x^5-141.043x^7+175.559x^9-143.565x^{11} \\ +83.1692x^{13}-35.9909x^{15}+12.1021x^{17}-3.25991x^{19}+0.720769x^{21} \\ -0.1334326x^{23}+0.021027x^{25}-2.86039\times10^{-3}x^{27}+3.39939\times10^{-4}x^{29} \\ -3.56623\times10^{-5}x^{31} \end{pmatrix}$$

(4.35)



รูปที่ 4.6 เหมือนรูปที่ 4.4 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.35) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.3

GE : $$y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0 \tag{4.36}$$

B.C.s : $$y'(0)=0 \tag{4.37}$$

$$y'(1)=0 \tag{4.38}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.36) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.39}$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.37) จะได้

$$Y(1)=0 \tag{4.40}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.38) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}kY(k)=0 \tag{4.41}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$ (4.42)

แทนค่า $Y(1)$ จาก (4.40) และ $Y(0)$ จาก (4.42) ที่ $k=0$ ลงใน (4.39) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2} \tag{4.43}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k+1)=0, k=1,2,3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=10$ ดังนี้

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$

$$Y(6) = -\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$Y(8) = \frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$
$$Y(10) = -\frac{c\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800} \qquad (4.44)$$

แทนค่า $Y(1)$ จาก (4.40) และ $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ จาก (4.42) ถึง (4.44) ลงใน (4.41) จะได้

$$\sum_{k=0}^{10} kY(k) = c[f^{(10)}(\lambda)] = 0$$
$$f^{(10)}(\lambda) = -\lambda + \frac{2+\lambda^2}{6} - \frac{\lambda(14+\lambda^2)}{120} + \frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{5040} - \frac{\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{362880} = 0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda = 0.3248,\ 10.4414,\ 23.4497,\ 18.8921 \pm 34.9058i$$

เลือก $\lambda_1^{(10)} = 0.32$ (4.45)

เมื่อ $n = 8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda = 0.33,\ 9.44,\ 16.1168 \pm 17.5034i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)} = 0.33$ (4.46)

จาก (4.45) และ (4.46) เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

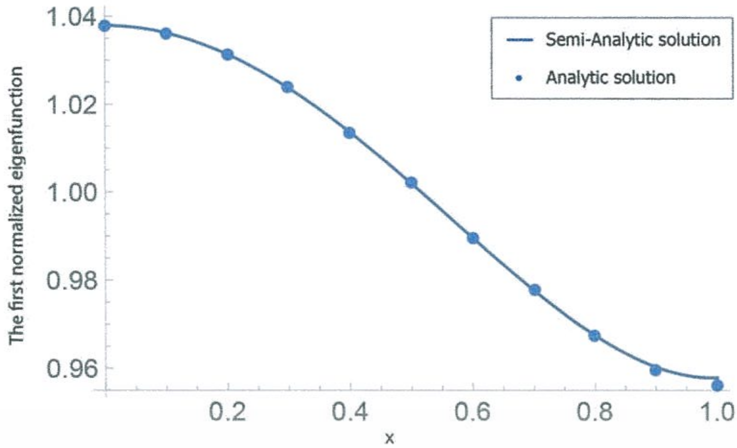
$$\left|\lambda_1^{(10)} - \lambda_1^{(8)}\right| = |0.33 - 0.32| = 0.01 \le \xi \qquad (4.47)$$

จาก (4.47) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 0.32$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(1)$ จาก (4.40) และ $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ จาก (4.42) ถึง (4.44) และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x) = \left(1 - 0.16x^2 + 0.08759x^4 - 0.00627x^6 + 0.0016x^8 - 7.53307 \times 10^{-5}x^{10}\right)c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x) = 1.03792\begin{pmatrix} 1 - 0.16x^2 + 0.08759x^4 - 0.00627x^6 \\ +0.0016x^8 - 7.53307 \times 10^{-5}x^{10} \end{pmatrix} \qquad (4.48)$$



รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.48) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=16$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$f^{(16)}(\lambda)=-\lambda+\frac{2+\lambda^2}{6}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{120}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{5040}-\frac{\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$
$$+\frac{5400+4804\lambda^2+190\lambda^4+\lambda^6}{39916800}-\frac{\lambda(116808+18004\lambda^2+322\lambda^4+\lambda^6)}{6227020800}$$
$$+\frac{982800+991136\lambda^2+52584\lambda^4+504\lambda^6+\lambda^8}{1307674368000}=0$$

เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$\lambda_1^{(16)}=0.32$

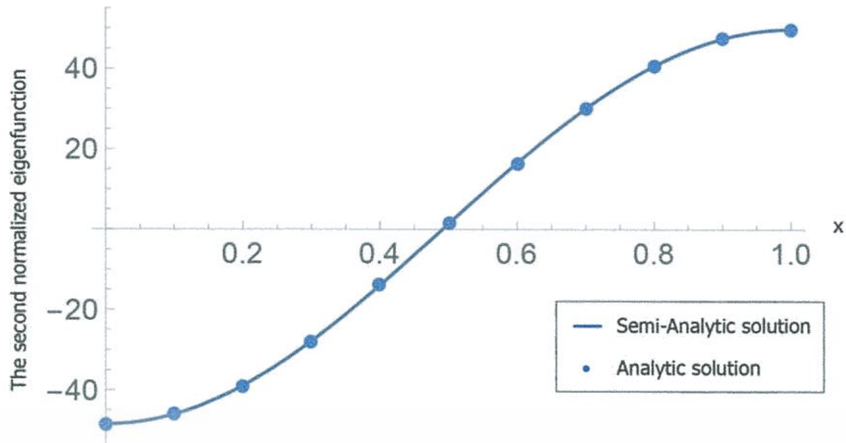
$\lambda_2^{(16)}=10.2599$

Note เพราะ $\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(16)}-\lambda_2^{(14)}\right|=|10.2599-10.262|=0.0021\le\xi$

นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=10.26$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-48.43965\begin{pmatrix}1-5.13x^2+4.46948x^4-1.69956x^6+0.3912x^8-0.06348x^{10}\\+0.007898x^{12}-0.00079x^{14}+6.68517\times10^{-5}x^{16}\end{pmatrix}$$

(4.49)



รูปที่ 4.8 เหมือนรูปที่ 4.7 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.49) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

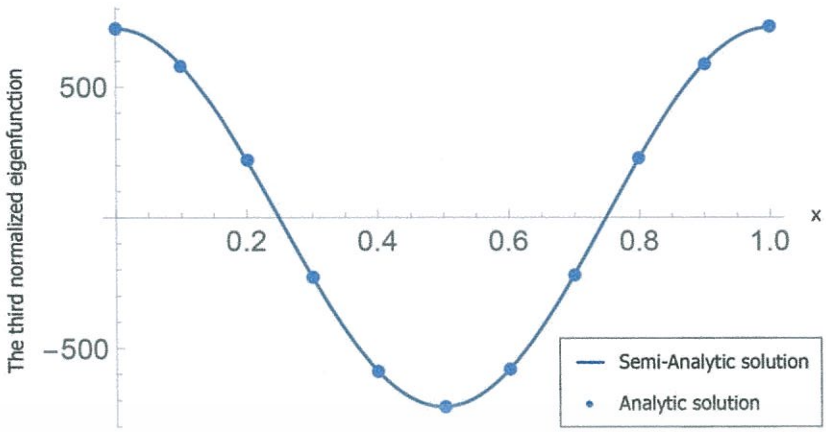
(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(24)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(24)}=0.32$$
$$\lambda_2^{(24)}=10.26$$
$$\lambda_3^{(24)}=39.83$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(24)}=\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(24)}=\lambda_2^{(16)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(24)}-\lambda_3^{(22)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=39.83$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=723.4549\begin{pmatrix}1-19.915x^2+66.1845x^4-88.5348x^6+64.1523x^8\\-29.37466x^{10}+9.34958x^{12}-2.20752x^{14}+0.4053x^{16}\\-0.05997x^{18}+0.00735x^{20}-0.00076x^{22}+6.8424\times10^{-5}x^{24}\end{pmatrix} \tag{4.50}$$



รูปที่ 4.9 เหมือนรูปที่ 4.7 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.50) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.4

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.51)

B.C.s : $y(0)=0$ (4.52)

$y'(1)=0$ (4.53)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.51) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.54}$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.52) จะได้

$$Y(0)=0 \tag{4.55}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.53) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}kY(k)=0 \tag{4.56}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(1)=c$ (4.57)

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.55) และ $Y(1)$ จาก (4.57) ที่ $k=0$ ลงใน (4.54) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=0 \tag{4.58}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k)=0, k=1,2,3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=11$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{6}$$

$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{120}$$

$$Y(7) = -\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{5040}$$
$$Y(9) = \frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$
$$Y(11) = -\frac{c\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800} \tag{4.59}$$

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.55) และ $Y(1)$ ถึง $Y(11)$ จาก (4.57) ถึง (4.59) ลงใน (4.56) จะได้

$$\sum_{k=0}^{11} kY(k) = c[f^{(11)}(\lambda)] = 0$$

$$f^{(11)}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{6} + \frac{6+\lambda^2}{120} - \frac{\lambda(26+\lambda^2)}{5040} + \frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{362880} - \frac{\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800} = 0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda = 2.99917,\ 19.0747 \pm 45.4536i,\ 24.4257 \pm 5.37807i$$

เลือก $\lambda_1^{(11)} = 2.99917$

เมื่อ $n = 9$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda = 3.00839,\ 17.3561,\ 17.8178 \pm 25.5463i$$

เลือก $\lambda_1^{(9)} = 3.00839$

จาก $\lambda_1^{(11)}$ และ $\lambda_1^{(9)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

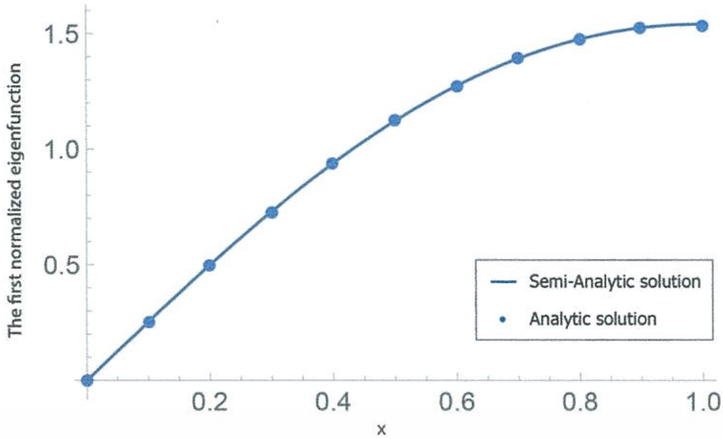
$$\left|\lambda_1^{(11)} - \lambda_1^{(9)}\right| = 0.00922 \le \xi \tag{4.60}$$

จาก (4.60) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 3.00$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ จาก (4.55) และ $Y(1)$ ถึง $Y(11)$ จาก (4.57) ถึง (4.59) และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x) = \left(x - 0.5x^3 + 0.125x^5 - 0.02083x^7 + 0.002604cx^9 - 0.0002604x^{11}\right)c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x) = 2.5415\begin{pmatrix} x - 0.5x^3 + 0.125x^5 - 0.02083x^7 \\ +0.002604x^9 - 2.60417\times10^{-4}x^{11} \end{pmatrix} \tag{4.61}$$



รูปที่ 4.10 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.61) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n = 21$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะหาคำตอบ ดังนี้

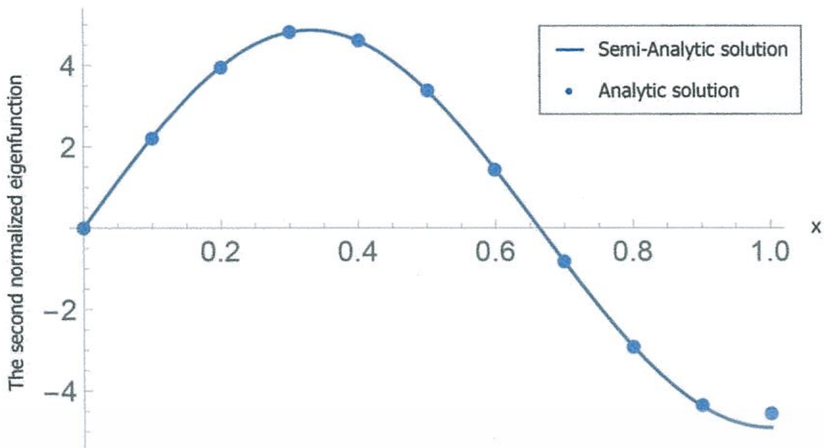
$$\begin{aligned}
f^{(21)}(\lambda) = 1 &- \frac{\lambda}{6} + \frac{6+\lambda^2}{120} - \frac{\lambda(26+\lambda^2)}{5040} + \frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{362880} \\
&- \frac{\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800} + \frac{27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6}{6227020800} \\
&- \frac{\lambda(359064+31444\lambda^2+406\lambda^4+\lambda^6)}{1307674368000} \\
&+ \frac{5821200+2375904\lambda^2+83944\lambda^4+616\lambda^6+\lambda^8}{355687428096000} \\
&- \frac{\lambda(103486608+10928672\lambda^2+194376\lambda^4+888\lambda^6+\lambda^8)}{121645100408832000} \\
&+ \frac{1990850400+916045776\lambda^2+39637520\lambda^4+405048\lambda^6+1230\lambda^8+\lambda^{10}}{51090942171709440000} = 0
\end{aligned}$$

เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(21)} = 3.00$$
$$\lambda_2^{(21)} = 22.56$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(21)} = \lambda_1^{(11)}$ และ $\left|\lambda_2^{(21)} - \lambda_2^{(19)}\right| = |22.56 - 22.57| = 0.01 \le \xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2 = 22.56$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x) = 23.0989\begin{pmatrix} x - 3.76x^3 + 4.2913x^5 - 2.3946x^7 + 0.809895x^9 \\ -0.18788x^{11} + 0.03236x^{13} - 0.00437x^{15} + 0.00048x^{17} \\ -4.4544\times10^{-5}x^{19} + 3.48331\times10^{-5}x^{21} \end{pmatrix} \qquad (4.62)$$



รูปที่ 4.11 เหมือนรูปที่ 4.10 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.62) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(27)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

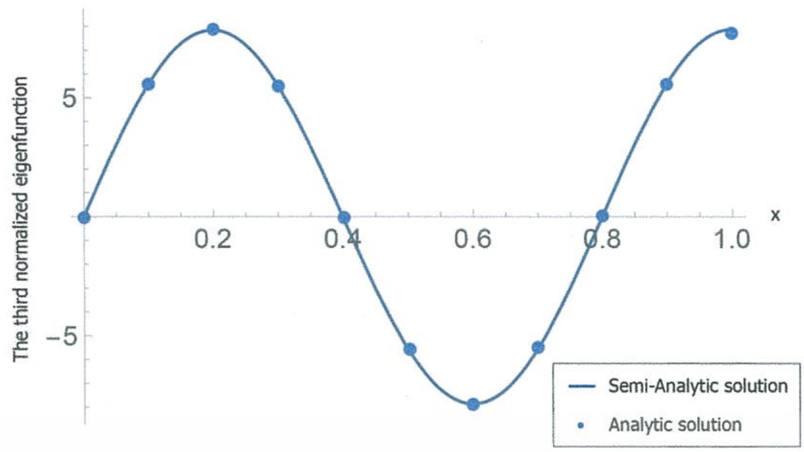
$\lambda_1^{(27)}=3$

$\lambda_2^{(27)}=22.56$

$\lambda_3^{(27)}=62.03$

Note เพราะ $\lambda_1^{(27)}=\lambda_1^{(21)}=\lambda_1^{(11)}$ และ $\lambda_2^{(27)}=\lambda_2^{(21)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(27)}-\lambda_3^{(25)}\right|\le\xi$ เราจะได้ ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=62.03$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=61.789\begin{pmatrix} x-10.3383x^3+32.11434x^5-47.67597x^7+41.5202x^9 \\ -23.847x^{11}+9.7484x^{13}-2.99305x^{15}+0.7184x^{17}-0.13905x^{19} \\ +0.02224x^{21}-0.003002x^{23}+0.0003474x^{25}-3.4977\times10^{-5}x^{27} \end{pmatrix} \tag{4.63}$$



รูปที่ 4.12 เหมือนรูปที่ 4.10 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.63) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.5

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.64)

B.C.s : $2y(0)-y'(0)=0$ (4.65)

$3y(1)+y'(1)=0$ (4.66)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.64) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.67}$$

ใช้ นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.65) จะได้

$$2Y(0)-Y(1)=0 \tag{4.68}$$

ใช้ นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.66) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}(3+k)Y(k)=0 \tag{4.69}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$ (4.70)

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.70) ลงใน (4.68) เราจะได้ว่า

$$Y(1)=2c \tag{4.71}$$

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.70) และ $Y(1)$ จาก (4.71) ที่ $k=0$ ลงใน (4.67) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2} \tag{4.72}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม ซึ่งจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=11$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{3}$$

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$
$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{60}$$
$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$Y(7)=-\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{2520}$$
$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$
$$Y(9)=\frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{181440}$$
$$Y(10)=-\frac{c\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}$$
$$Y(11)=-\frac{c\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{19958400} \tag{4.73}$$

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.70) ถึง $Y(11)$ จาก (4.73) ลงใน (4.69) จะได้

$$\begin{aligned} f^{(11)}(\lambda) &= 11-\frac{5\lambda}{2}-2\lambda+\frac{7(2+\lambda^2)}{24}+\frac{2(6+\lambda^2)}{15}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{80} \\ &\quad -\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{252}+\frac{11(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{15120} \\ &\quad -\frac{13\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}-\frac{\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{1425600}=0 \end{aligned}$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda = 3.685,\ 17.323\pm 39.109i,\ 20.3956\pm 3.7289i$$

เลือก $\lambda_1^{(11)} = 3.685$

เมื่อ $n=10$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda = 3.69,\ 17.8957,\ 29.6899,\ 21.6698\pm 36.0299i$$

เลือก $\lambda_1^{(10)} = 3.69$

จาก $\lambda_1^{(11)}$ และ $\lambda_1^{(10)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

$$\left|\lambda_1^{(11)}-\lambda_1^{(10)}\right| = 0.005 \le \xi \tag{4.74}$$

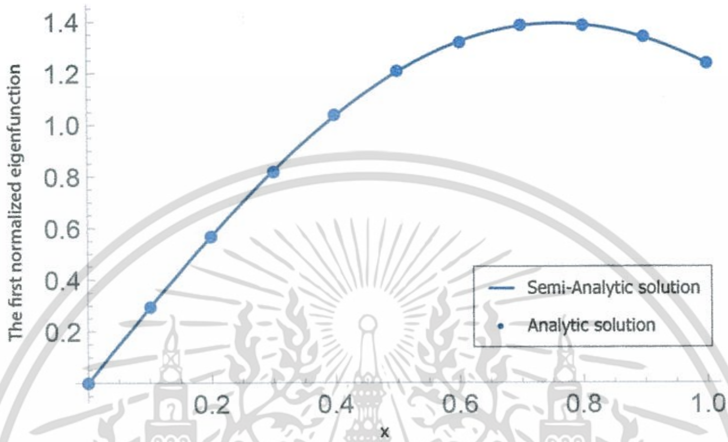
จาก (4.74) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 3.69$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ จาก (4.70) ถึง $Y(11)$ จาก (4.73) และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\begin{pmatrix} 1+2x-1.845x^2-1.23x^3+0.650671x^4+0.326935x^5 \\ -0.141533x^6-0.0580093x^7+0.0209451x^8 \\ +0.00751374x^9-0.00243133x^{10}-7.79409\times 10^{-4}x^{11} \end{pmatrix} c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x) = 0.808116\begin{pmatrix} 1+2x-1.845x^2-1.23x^3+0.650671x^4+0.326935x^5 \\ -0.141533x^6-0.0580093x^7+0.0209451x^8 \\ +0.00751374x^9-0.00243133x^{10}-7.79409\times10^{-4}x^{11} \end{pmatrix}$$

(4.75)



รูปที่ 4.13 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.75) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=18$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(18)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

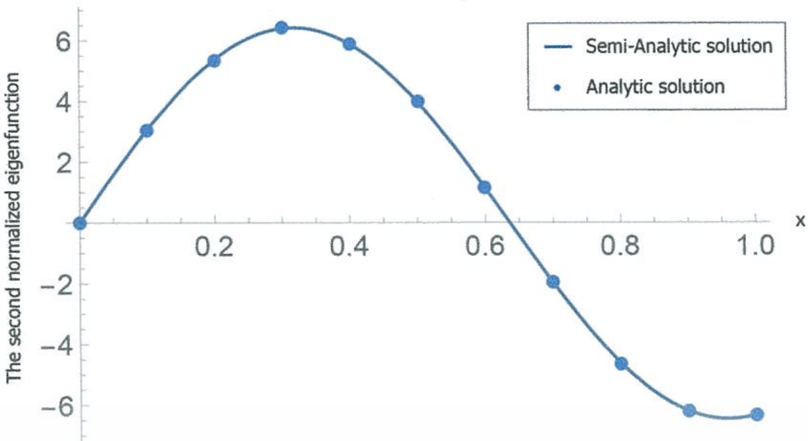
$\lambda_1^{(18)} = 3.69$

$\lambda_2^{(18)} = 18.06$

Note เพราะ $\lambda_1^{(18)} = \lambda_1^{(11)}$ และ $\left|\lambda_2^{(18)} - \lambda_2^{(17)}\right| = |18.05-18.06| = 0.01 \le \xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2 = 18.06$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x) = -18.6613\begin{pmatrix} 1+2x-9.03x^2-6.02x^3+13.6735x^4+5.53606x^5-8.53244x^6 \\ -2.52384x^7+2.99588x^8+0.709953x^9-0.695978x^{10}-0.13951x^{11} \\ +0.117919x^{12}+0.0207014x^{13}-0.0155252x^{14}-0.00244463x^{15} \\ +0.0016596x^{16}+2.38424\times10^{-4}x^{17}-148685\times10^{-4}x^{18} \end{pmatrix}$$

(4.76)



รูปที่ 4.14 เหมือนรูปที่ 4.13 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.76) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

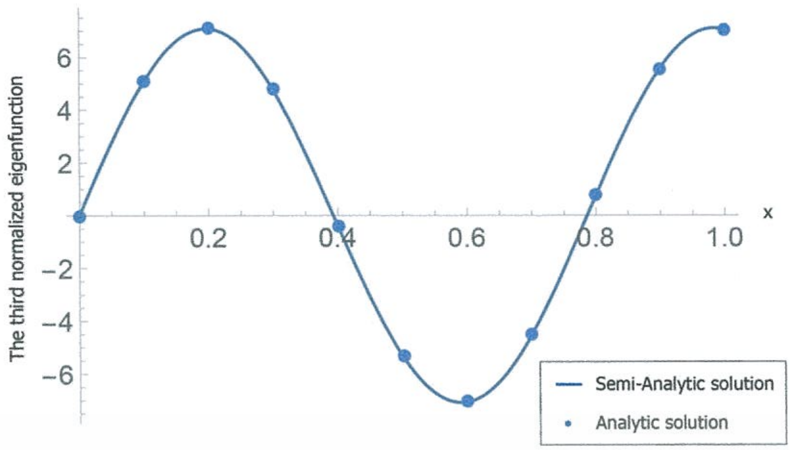
(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(25)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(25)}=3.69$$
$$\lambda_2^{(25)}=18.06$$
$$\lambda_3^{(25)}=48.93$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(25)}=\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(11)}$ และ $\lambda_2^{(25)}=\lambda_2^{(18)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(25)}-\lambda_3^{(24)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=48.93$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=9.83913\begin{pmatrix}1+2x-24.465x^2-16.31x^3+99.8394x^4+40.0024x^5-163.654x^6\\-46.9911x^7+144.775x^8+32.49x^9-80.5278x^{10}-14.8793x^{11}\\+30.947x^{12}+4.87523x^{13}-8.76243x^{14}-1.20678x^{15}+1.91539x^{16}\\+0.235011x^{17}-0.334909x^{18}-0.0371517x^{19}+0.0481645x^{20}\\+0.00488773x^{21}-0.00582597x^{22}-5.46063\times10^{-4}x^{23}\\+6.03676\times10^{-4}x^{24}+5.26777\times10^{-5}x^{25}\end{pmatrix}\tag{4.77}$$



รูปที่ 4.15 เหมือนรูปที่ 4.13 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.77) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.6

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.78)

B.C.s : $y(0)=0$ (4.79)

$y(1)+y'(1)=0$ (4.80)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.78) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.81}$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.79) จะได้

$$Y(0)=0 \tag{4.82}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.80) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)=0 \tag{4.83}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(1)=c$ (4.84)

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.82) และ $Y(1)$ จาก (4.84) ที่ $k=0$ ลงใน (4.81) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=0 \tag{4.85}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k)=0, k=1,2,3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=13$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{6}$$

$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{120}$$

$$Y(7) = -\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{5040}$$
$$Y(9) = \frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$
$$Y(11) = -\frac{c\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800}$$
$$Y(13) = \frac{c(27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6)}{6227020800} \tag{4.86}$$

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.82) และ $Y(1)$ ถึง $Y(13)$ จาก (4.84) ถึง (4.86) ลงใน (4.83) จะได้

$$\sum_{k=0}^{13}(1+k)Y(k) = c[f^{(13)}(\lambda)] = 0$$
$$f^{(13)}(\lambda) = 2 - \frac{4\lambda}{6} + \frac{6(6+\lambda^2)}{120} - \frac{8\lambda(26+\lambda^2)}{5040} + \frac{10(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$
$$-\frac{12\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800} + \frac{14(27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6)}{6227020800} = 0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda = 4.59712,\ 23.742,\ 15.8785 \pm 71.0484i,\ 36.8091 \pm 20.4685i$$

เลือก $\lambda_1^{(13)} = 4.59712$

เมื่อ $n = 11$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda = 4.59468,\ 18.5722 \pm 46.3836i,\ 24.9638 \pm 6.77079i$$

เลือก $\lambda_1^{(11)} = 4.59468$

จาก $\lambda_1^{(13)}$ และ $\lambda_1^{(11)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

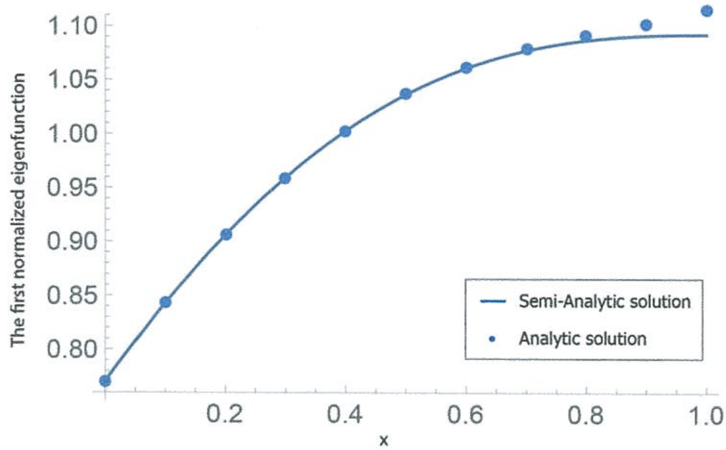
$$\left|\lambda_1^{(13)} - \lambda_1^{(11)}\right| = 0.0044 \le \xi \tag{4.87}$$

จาก (4.87) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 4.60$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ จาก (4.82) และ $Y(1)$ ถึง $Y(13)$ จาก (4.84) ถึง (4.86) และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} x - 0.76667x^3 + 0.2263x^5 - 0.04304x^7 + 0.00589x^9 \\ -6.37753\times10^{-4}x^{11} + 5.65843\times10^{-5}x^{13} \end{pmatrix} c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x) = 2.9307 \begin{pmatrix} x - 0.76667x^3 + 0.2263x^5 - 0.04304x^7 + 0.00589x^9 \\ -6.37753\times10^{-4}x^{11} + 5.65843\times10^{-5}x^{13} \end{pmatrix} \tag{4.88}$$



รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.88) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

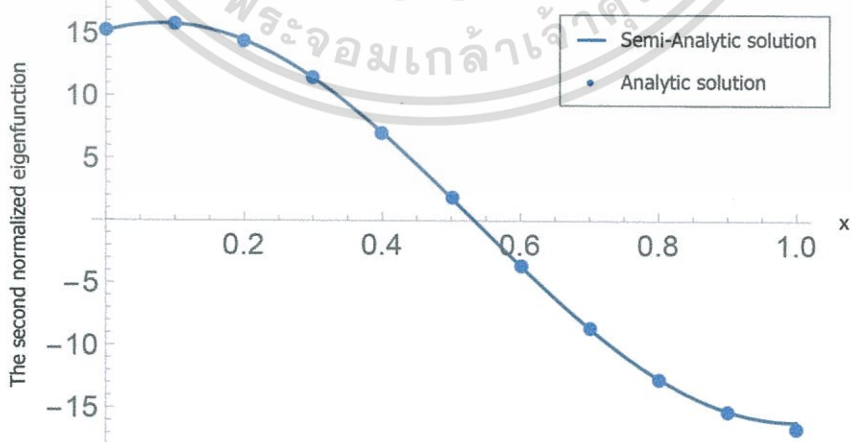
กรณี $n = 21$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(21)}(\lambda) = 0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_2^{(21)} = 4.60$

$\lambda_2^{(21)} = 24.5176$

<u>Note</u> เพราะ $\lambda_1^{(21)} = \lambda_1^{(13)}$ และ $\left|\lambda_2^{(21)} - \lambda_2^{(19)}\right| = |24.5176 - 24.5189| = 0.0013 \le \xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2 = 24.52$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x) = 31.7605\begin{pmatrix} x - 4.08667x^3 + 5.06025x^5 - 3.05153x^7 + 1.1095x^9 \\ -0.275058x^{11} + 0.0503456x^{13} - 0.00718824x^{15} \\ +8.33093\times10^{-4}x^{17} - 8.07476\times10^{-5}x^{19} + 6.69768\times10^{-6}x^{21} \end{pmatrix} \tag{4.89}$$



รูปที่ 4.17 เหมือนรูปที่ 4.16 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.89) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

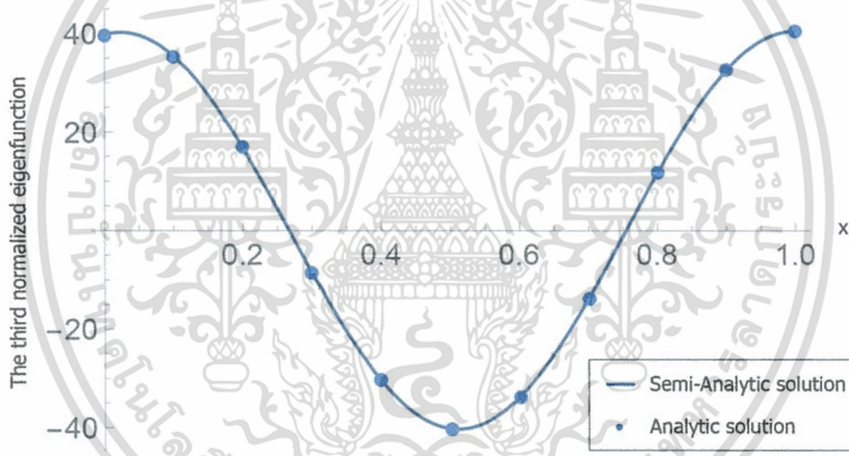
(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(29)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(29)}=4.60$$
$$\lambda_2^{(29)}=24.52$$
$$\lambda_3^{(29)}=64.01$$

<u>**Note**</u> เพราะ $\lambda_1^{(29)}=\lambda_1^{(21)}=\lambda_1^{(13)}$ และ $\lambda_2^{(29)}=\lambda_2^{(21)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(29)}-\lambda_3^{(27)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=64.01$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=56.6528\begin{pmatrix} x-10.6683x^3+34.194x^5-52.3673x^7+47.0309x^9-27.8438x^{11} \\ +11.7264x^{13}-3.70689x^{15}+0.91546x^{17}-0.18218x^{19}+0.02995x^{21} \\ -0.004148x^{23}+0.00049x^{25}-5.08109\times10^{-5}x^{27}+4.61188\times10^{-6}x^{29} \end{pmatrix}$$
(4.90)



รูปที่ 4.18 เหมือนรูปที่ 4.16 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.90) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.7

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.91)

B.C.s : $3y(0)=0$ (4.92)

$y(1)+y'(1)=0$ (4.93)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.91) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)}$$ (4.94)

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.92) จะได้

$$3Y(0)=0 \tag{4.95}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.93) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)=0 \tag{4.96}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(1)=c$ (4.97)

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.95) และ $Y(1)$ จาก (4.97) ที่ $k=0$ ลงใน (4.157) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=0 \tag{4.98}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k)=0, k=1,2,3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=13$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
Y(3)&=-\frac{c\lambda}{6}\\
Y(5)&=\frac{c(6+\lambda^2)}{120}\\
Y(7)&=-\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{5040}\\
Y(9)&=\frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}\\
Y(11)&=-\frac{c\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800}\\
Y(13)&=\frac{c(27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6)}{6227020800}
\end{aligned} \tag{4.99}$$

แทนค่า $Y(0)$ จาก (4.95) และ $Y(1)$ ถึง $Y(13)$ จาก (4.97) ถึง (4.99) ลงใน (4.96) จะได้

$$f^{(13)}(\lambda)=2-\frac{4\lambda}{6}+\frac{6(6+\lambda^2)}{120}-\frac{8\lambda(26+\lambda^2)}{5040}+\frac{10(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}-\frac{12\lambda(2124+140\lambda^2+\lambda^4)}{39916800}+\frac{14(27720+9604\lambda^2+250\lambda^4+\lambda^6)}{6227020800}=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=4.59712,\ 23.742,\ 15.8785\pm 71.0484i,\ 36.8091\pm 20.4685i$$

เลือก $\lambda_1^{(13)}=4.59712$

เมื่อ $n=11$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=4.59468,\ 18.5722\pm 46.3836i,\ 24.9638\pm 6.77079i$$

เลือก $\lambda_1^{(11)}=4.59468$

จาก $\lambda_1^{(13)}$ และ $\lambda_1^{(11)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

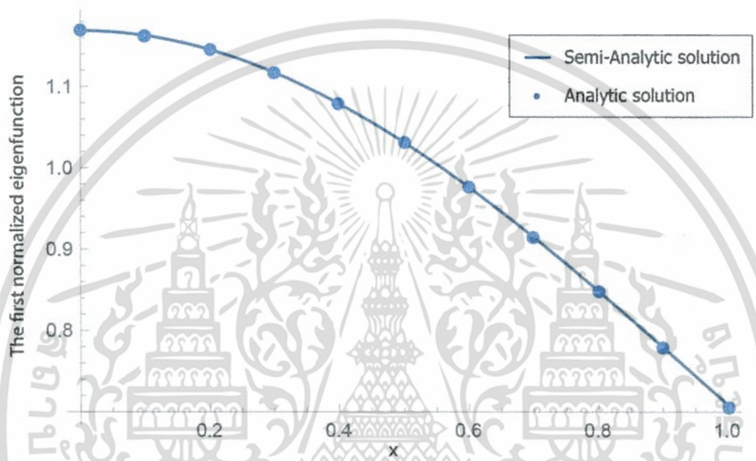
$$\left|\lambda_1^{(13)}-\lambda_1^{(11)}\right|=0.0044\le\xi \tag{4.100}$$

จาก (4.100) เราจะได้ว่า $\lambda_1 = 4.60$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ จาก (4.95) และ $Y(1)$ ถึง $Y(13)$ จาก (4.97) ถึง (4.99) และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} x - 0.76667x^3 + 0.2263x^5 - 0.04304x^7 + 0.00589x^9 \\ -6.37753\times10^{-4}x^{11} + 5.65843\times10^{-5}x^{13} \end{pmatrix} c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x) = 2.9307 \begin{pmatrix} x - 0.76667x^3 + 0.2263x^5 - 0.04304x^7 + 0.00589x^9 \\ -6.37753\times10^{-4}x^{11} + 5.65843\times10^{-5}x^{13} \end{pmatrix} \qquad (4.101)$$



รูปที่ 4.19 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.101) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

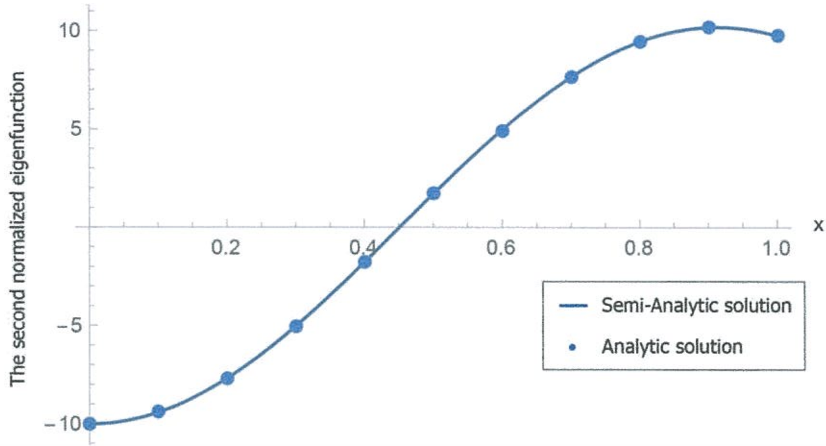
กรณี $n = 21$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(21)}(\lambda) = 0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_2^{(21)} = 4.60$

$\lambda_2^{(21)} = 24.5176$

<u>Note</u> เพราะ $\lambda_1^{(21)} = \lambda_1^{(13)}$ และ $\left|\lambda_2^{(21)} - \lambda_2^{(19)}\right| = |24.5176 - 24.5189| = 0.0013 \le \xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2 = 24.52$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x) = 31.7605 \begin{pmatrix} x - 4.08667x^3 + 5.06025x^5 - 3.05153x^7 + 1.1095x^9 \\ -0.275058x^{11} + 0.0503456x^{13} - 0.00718824x^{15} \\ +8.33093\times10^{-4}x^{17} - 8.07476\times10^{-5}x^{19} + 6.69768\times10^{-6}x^{21} \end{pmatrix} \qquad (4.102)$$



รูปที่ 4.20 เหมือนรูปที่ 4.19 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.102) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

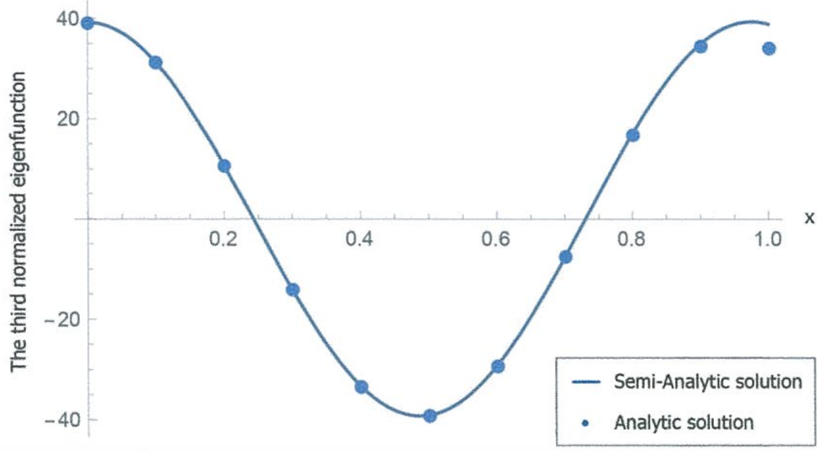
ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(29)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(29)}=4.60$$
$$\lambda_2^{(29)}=24.52$$
$$\lambda_3^{(29)}=64.01$$

<u>Note</u> เพราะ $\lambda_1^{(29)}=\lambda_1^{(21)}=\lambda_1^{(13)}$ และ $\lambda_2^{(29)}=\lambda_2^{(21)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(29)}-\lambda_3^{(27)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=64.01$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=56.6528\begin{pmatrix} x-10.6683x^3+34.194x^5-52.3673x^7+47.0309x^9-27.8438x^{11} \\ +11.7264x^{13}-3.70689x^{15}+0.91546x^{17}-0.18218x^{19}+0.02995x^{21} \\ -0.004148x^{23}+0.00049x^{25}-5.08109\times10^{-5}x^{27}+4.61188\times10^{-6}x^{29} \end{pmatrix}$$

(4.103)



รูปที่ 4.21 เหมือนรูปที่ 4.19 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.103) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.8

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.104)

B.C.s : $y(0)-y'(0)=0$ (4.105)

$y'(1)=0$ (4.106)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.104) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.107}$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.105) จะได้

$$Y(0)-Y(1)=0 \tag{4.108}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.106) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}kY(k)=0 \tag{4.109}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$

แทนค่า $Y(0)$ ลงใน (4.108) เราจะได้ว่า

$$Y(1)=c$$

แทนค่า $Y(0)$ และ $Y(1)$ ที่ $k=0$ ลงใน (4.107) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม ซึ่งจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=9$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{6}$$

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$
$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{120}$$
$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$Y(7)=-\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{5040}$$
$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$
$$Y(9)=\frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$

แทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ ลงใน (4.109) จะได้

$$f^{(9)}(\lambda)=1-\lambda-\frac{\lambda}{2}+\frac{2+\lambda^2}{6}+\frac{6+\lambda^2}{24}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{120}-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{720}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{5040}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{40320}=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=1.12959,\ 10.7291,\ 15.8485\pm18.4614i$$

เลือก $\lambda_1^{(9)}=1.12959$

เมื่อ $n=8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=1.12255,\ 11.5305,\ 18.1735\pm17.0552i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)}=1.12255$

จาก $\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_1^{(8)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

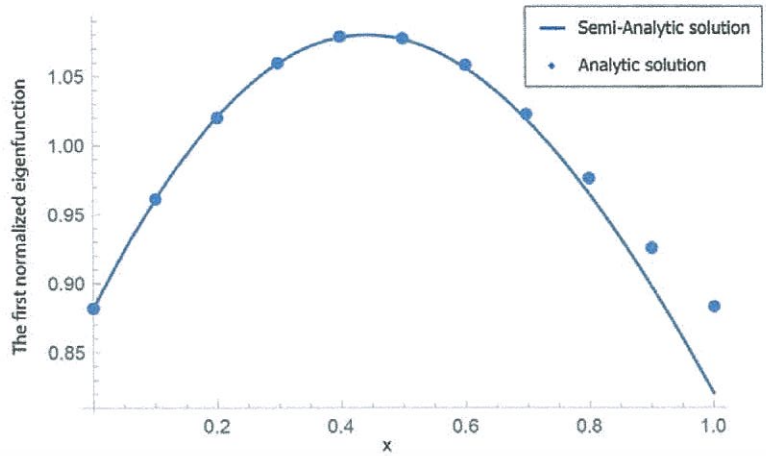
$$\left|\lambda_1^{(9)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.00704\le\xi \tag{4.110}$$

จาก (4.110) เราจะได้ว่า $\lambda_1=1.13$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\begin{pmatrix}1+x-0.565x^2-0.188333x^3+0.136537x^4\\ +0.0606408x^5-0.0239762x^6-0.00611565x^7\\ +0.00292198x^8+9.38216\times10^{-4}x^9\end{pmatrix}c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=0.770282\begin{pmatrix}1+x-0.565x^2-0.188333x^3+0.136537x^4\\ +0.0606408x^5-0.0239762x^6-0.00611565x^7\\ +0.00292198x^8+9.38216\times10^{-4}x^9\end{pmatrix} \tag{4.111}$$



รูปที่ 4.22 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.111) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=15$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(15)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

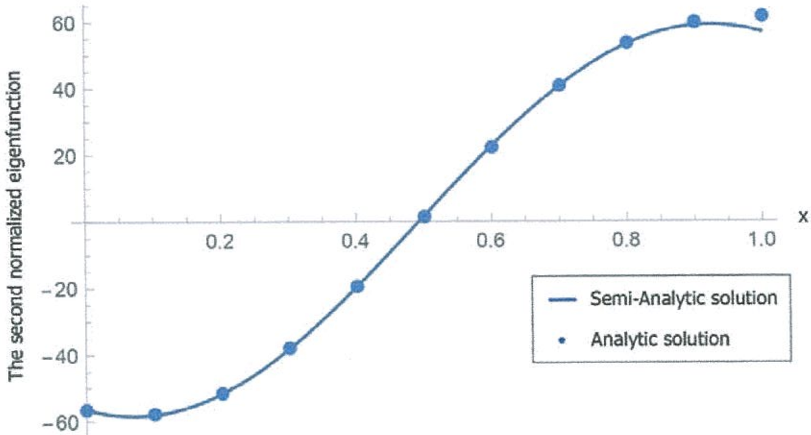
$\lambda_1^{(15)}=1.13$

$\lambda_2^{(15)}=12.0905$

__Note__ เพราะ $\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\left|\lambda_2^{(15)}-\lambda_2^{(14)}\right|=|12.0905-12.0864|=0.0041\leq\xi$

นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=12.09$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=15.1648\begin{pmatrix}1+x-6.045x^2-2.015x^3+6.17367x^4+1.26807x^5-2.68949x^6\\-0.412998x^7+0.69089x^8+0.08696x^9-0.12269x^{10}-0.0133124x^{11}\\+0.0165715x^{12}+0.00158915x^{13}-0.00176831x^{14}-1.54882\times10^{-4}x^{15}\end{pmatrix}\tag{4.112}$$



รูปที่ 4.23 เหมือนรูปที่ 4.22 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.112) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

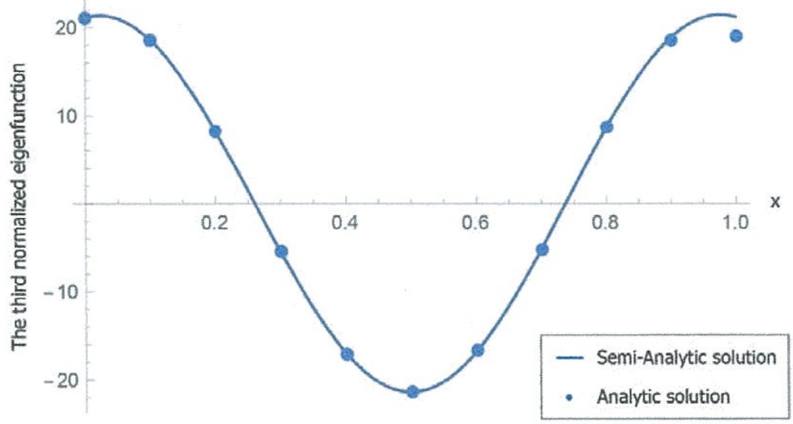
ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(24)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(24)}=1.13$$
$$\lambda_2^{(24)}=12.09$$
$$\lambda_3^{(24)}=41.78$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(24)}=\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_2^{(24)}=\lambda_2^{(15)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(24)}-\lambda_3^{(23)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=41.78$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=39.7438\begin{pmatrix}1+x-20.89x^2-6.96333x^3+72.8154x^4+14.5964x^5-102.104x^6\\-14.6857x^7+77.477x^8+8.72454x^9-37.101x^{10}-3.44724x^{11}\\+12.33x^{12}+0.979169x^{13}-3.03433x^{14}-0.211223x^{15}+0.579601x^{16}\\+0.03604x^{17}-0.0891x^{18}-0.00502x^{19}+0.0113x^{20}+5.8528\times10^{-4}x^{21}\\-1.21613\times10^{-3}x^{22}-5.82492\times10^{-5}x^{23}+1.12547\times10^{-4}x^{24}\end{pmatrix}$$

(4.113)



รูปที่ 4.24 เหมือนรูปที่ 4.22 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.113) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.9

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.114)

B.C.s : $y(0)-y'(0)=0$ (4.115)

$3y'(1)=0$ (4.116)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.114) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (4.117)$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.115) จะได้

$$Y(0)-Y(1)=0 \quad (4.118)$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.116) จะได้

$$3\sum_{k=0}^{n}kY(k)=0 \quad (4.119)$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$

แทนค่า $Y(0)$ ลงใน (4.118) เราจะได้ว่า

$$Y(1)=c$$

แทนค่า $Y(0)$ และ $Y(1)$ ที่ $k=0$ ลงใน (4.117) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม ซึ่งจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=9$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{6}$$

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$
$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{120}$$
$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$Y(7)=-\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{5040}$$
$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$
$$Y(9)=\frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$

แทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ ลงใน (4.119) จะได้

$$3\sum_{k=0}^{9}kY(k)=c[f^{(9)}(\lambda)]=0$$

$$f^{(9)}(\lambda)=3\left[\begin{array}{l}1-\lambda-\frac{\lambda}{2}+\frac{2+\lambda^2}{6}+\frac{6+\lambda^2}{24}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{120}\\-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{720}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{5040}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{40320}\end{array}\right]=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=1.12959,\ 10.7291,\ 15.8485\pm18.4614i$$

เลือก $\lambda_1^{(9)}=1.12959$

เมื่อ $n=8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=1.12255,\ 11.5305,\ 18.1735\pm17.0552i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)}=1.12255$

จาก $\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_1^{(8)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

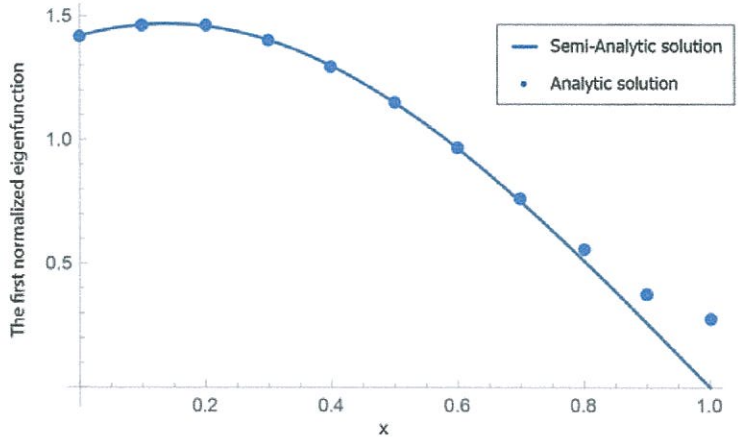
$$\left|\lambda_1^{(9)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.00704\le\xi \tag{4.120}$$

จาก (4.120) เราจะได้ว่า $\lambda_1=1.13$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\begin{pmatrix}1+x-0.565x^2-0.188333x^3+0.136537x^4\\+0.0606408x^5-0.0239762x^6-0.00611565x^7\\+0.00292198x^8+9.38216\times10^{-4}x^9\end{pmatrix}c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=0.770282\begin{pmatrix}1+x-0.565x^2-0.188333x^3+0.136537x^4\\+0.0606408x^5-0.0239762x^6-0.00611565x^7\\+0.00292198x^8+9.38216\times10^{-4}x^9\end{pmatrix} \tag{4.121}$$



รูปที่ 4.25 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.121) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=15$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(15)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_1^{(15)}=1.13$

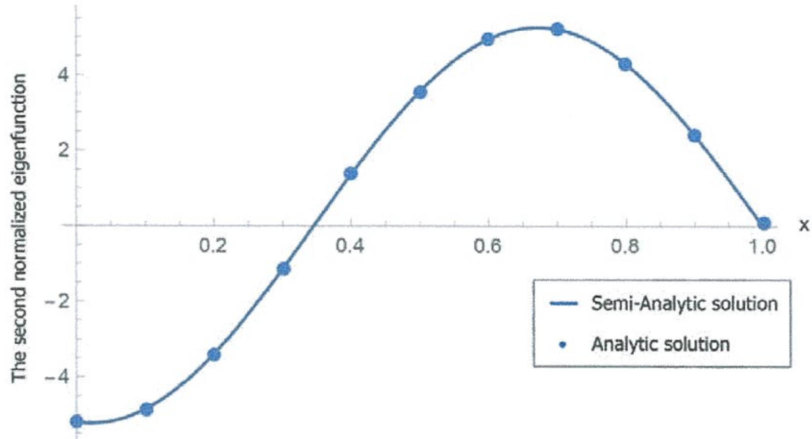
$\lambda_2^{(15)}=12.0905$

__Note__ เพราะ $\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\left|\lambda_2^{(15)}-\lambda_2^{(14)}\right|=\left|12.0905-12.0864\right|=0.0041\le\xi$

นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=12.09$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=15.1648\begin{pmatrix}1+x-6.045x^2-2.015x^3+6.17367x^4+1.26807x^5-2.68949x^6\\-0.412998x^7+0.69089x^8+0.08696x^9-0.12269x^{10}-0.0133124x^{11}\\+0.0165715x^{12}+0.00158915x^{13}-0.00176831x^{14}-1.54882\times10^{-4}x^{15}\end{pmatrix}$$

(4.122)



รูปที่ 4.26 เหมือนรูปที่ 4.25 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.122) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(24)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$\lambda_1^{(24)}=1.13$

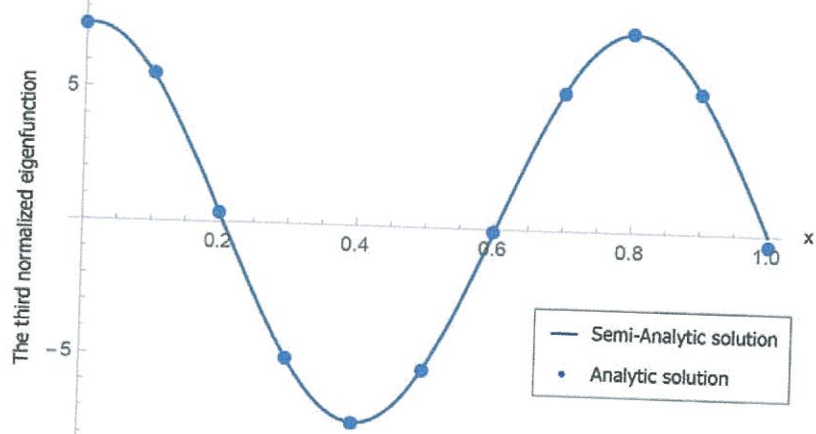
$\lambda_2^{(24)}=12.09$

$\lambda_3^{(24)}=41.78$

Note เพราะ $\lambda_1^{(24)}=\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_2^{(24)}=\lambda_2^{(15)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(24)}-\lambda_3^{(23)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=41.78$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=39.7438\begin{pmatrix}1+x-20.89x^2-6.96333x^3+72.8154x^4+14.5964x^5-102.104x^6\\-14.6857x^7+77.477x^8+8.72454x^9-37.101x^{10}-3.44724x^{11}\\+12.33x^{12}+0.979169x^{13}-3.03433x^{14}-0.211223x^{15}+0.579601x^{16}\\+0.03604x^{17}-0.0891x^{18}-0.00502x^{19}+0.0113x^{20}+5.8528\times10^{-4}x^{21}\\-1.21613\times10^{-3}x^{22}-5.82492\times10^{-5}x^{23}+1.12547\times10^{-4}x^{24}\end{pmatrix}$$

(4.123)



รูปที่ 4.27 เหมือนรูปที่ 4.25 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.123) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.10

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.124)

B.C.s : $y'(0)=0$ (4.125)

$y(1)+y'(1)=0$ (4.126)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.124) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (4.127)$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.125) จะได้

$$Y(1)=0 \quad (4.127)$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.126) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)=0 \quad (4.128)$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$

แทนค่า $Y(1)$ และ $Y(0)$ ที่ $k=0$ ลงใน (4.127) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k+1)=0, k=1, 2, 3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=10$ ดังนี้

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$

$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$

$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$

$$Y(10)=-\frac{c\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}$$

แทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ ลงใน (4.96) จะได้

$$f^{(10)}(\lambda)=1-\frac{3\lambda}{2}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}-\frac{11\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=0.999789,\ 12.5468,\ 23.132,\ 18.4789\pm 35.8377i$$

เลือก $\lambda_1^{(10)}=0.999789$

เมื่อ $n=8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=1.00212,\ 10.806,\ 15.8737\pm 18.4297i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)}=1.00212$

จาก $\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_1^{(8)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

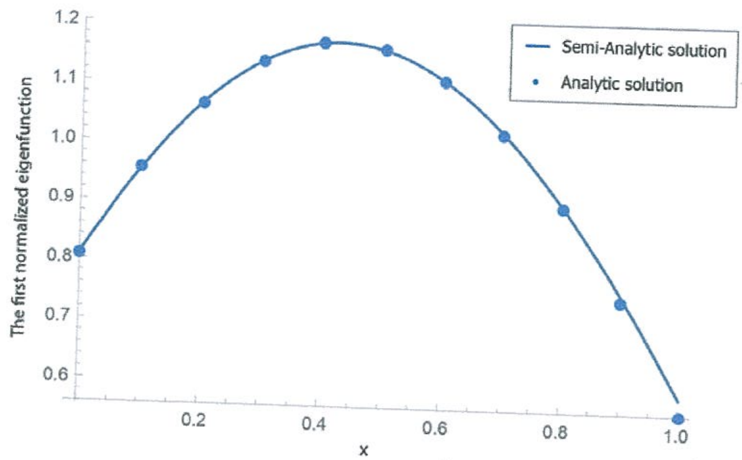
$$\left|\lambda_1^{(10)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.002331\le\xi \qquad (4.129)$$

จาก (4.129) เราจะได้ว่า $\lambda_1=1.00$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\left(1-0.5x^2+0.125x^4-0.020833x^6+0.00260417x^8-2.60417\times10^{-4}x^{10}\right)c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=1.16874\begin{pmatrix}1-0.5x^2+0.125x^4-0.020833x^6\\+0.00260417x^8-2.60417\times10^{-4}x^{10}\end{pmatrix} \qquad (4.130)$$



รูปที่ 4.28 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.130) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

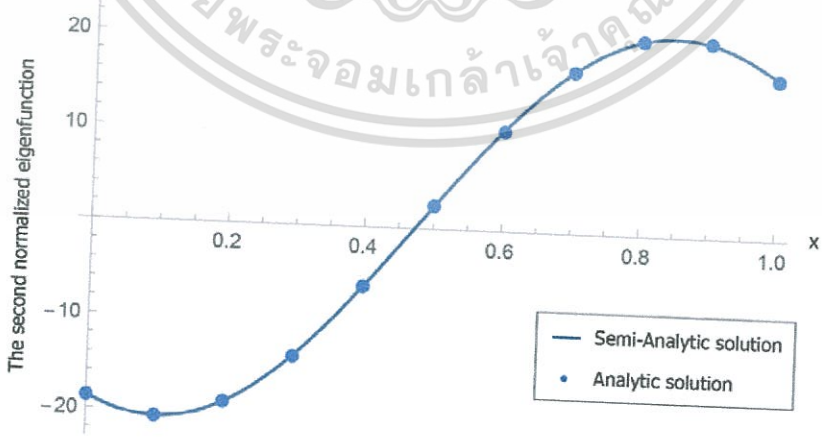
กรณี $n=16$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(16)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_1^{(16)}=1.00$

$\lambda_2^{(16)}=12.1508$

Note เพราะ $\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(16)}-\lambda_2^{(14)}\right|=|12.1508-12.1556|=0.0048\le\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=12.15$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-10.0149\begin{pmatrix}1-6.075x^2+6.23427x^4-2.72738x^6+0.70307x^8-0.125219x^{10}\\+0.0168521x^{12}-0.001813x^{14}+1.62002\times10^{-4}x^{16}\end{pmatrix} \tag{4.131}$$



รูปที่ 4.29 เหมือนรูปที่ 4.28 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.131) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

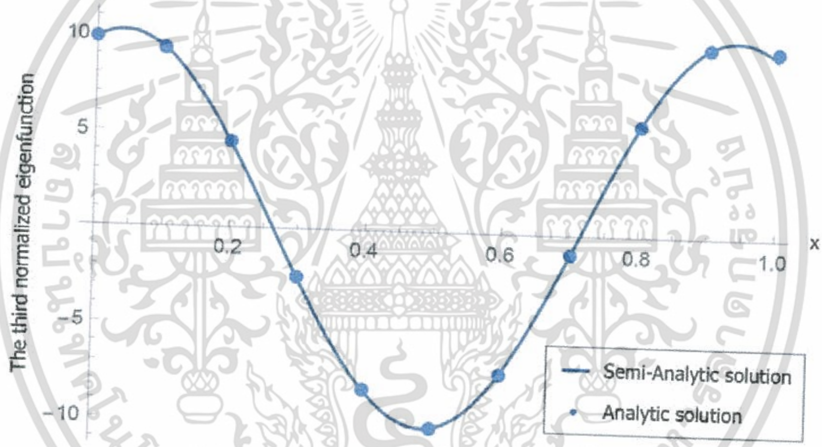
(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(24)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(24)}=1.00$$
$$\lambda_2^{(24)}=12.15$$
$$\lambda_3^{(24)}=41.7998$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(24)}=\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(24)}=\lambda_2^{(16)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(24)}-\lambda_3^{(22)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=41.80$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=39.2079\begin{pmatrix}1-20.9x^2+72.885x^4-102.25x^6+77.6237x^8-37.188x^{10}\\+12.3643x^{12}-3.04403x^{14}+0.58169x^{16}-0.089407x^{18}\\+0.01136x^{20}-0.0012218x^{22}+1.13112\times10^{-4}x^{24}\end{pmatrix} \quad (4.132)$$



รูปที่ 4.30 เหมือนรูปที่ 4.28 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.132) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.11

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.133)

B.C.s : $9y'(0)=0$ (4.134)

$y(1)+y'(1)=0$ (4.135)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.133) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (4.136)$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.134) จะได้

$$Y(1)=0$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.135) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)=0 \tag{4.137}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$

แทนค่า $Y(1)$ และ $Y(0)$ ที่ $k=0$ ลงใน (4.136) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม เราจะหา $Y(2k+1)=0, k=1,2,3,\ldots$ และจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=10$ ดังนี้

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$

$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$

$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$

$$Y(10)=-\frac{c\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}$$

แทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ ลงใน (4.137) จะได้

$$f^{(10)}(\lambda)=1-\frac{3\lambda}{2}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}-\frac{11\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=0.999789,\ 12.5468,\ 23.132,\ 18.4789\pm 35.8377i$$

เลือก $\lambda_1^{(10)}=0.999789$

เมื่อ $n=8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=1.00212,\ 10.806,\ 15.8737\pm 18.4297i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)}=1.00212$

จาก $\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_1^{(8)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

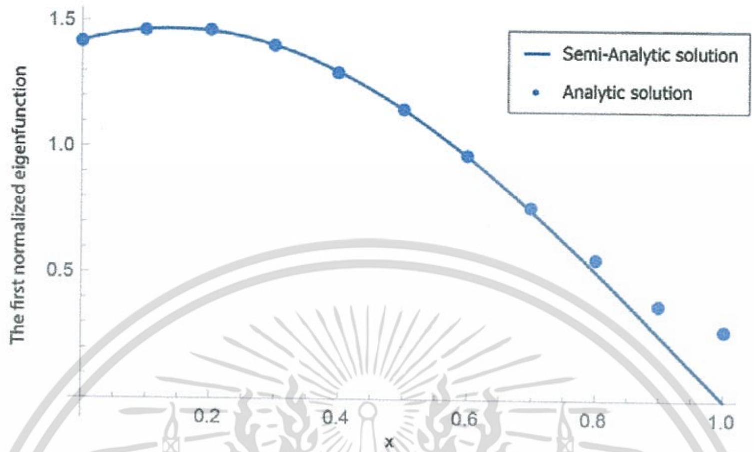
$$\left|\lambda_1^{(10)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.002331\le\xi \tag{4.138}$$

จาก (4.138) เราจะได้ว่า $\lambda_1=1.00$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(10)$ และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\left(1-0.5x^2+0.125x^4-0.020833x^6+0.00260417x^8-2.60417\times10^{-4}x^{10}\right)c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=1.16874\begin{pmatrix}1-0.5x^2+0.125x^4-0.020833x^6\\+0.00260417x^8-2.60417\times10^{-4}x^{10}\end{pmatrix} \tag{4.139}$$



รูปที่ 4.31 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.139) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=16$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(16)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

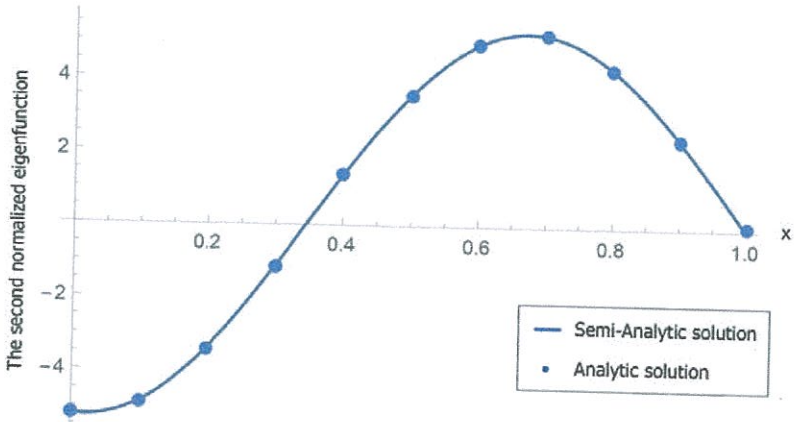
$\lambda_1^{(16)}=1.00$

$\lambda_2^{(16)}=12.1508$

Note เพราะ $\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(16)}-\lambda_2^{(14)}\right|=\left|12.1508-12.1556\right|=0.0048\le\xi$

นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=12.15$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-10.0149\begin{pmatrix}1-6.075x^2+6.23427x^4-2.72738x^6+0.70307x^8-0.125219x^{10}\\+0.0168521x^{12}-0.001813x^{14}+1.62002\times10^{-4}x^{16}\end{pmatrix} \tag{4.140}$$



รูปที่ 4.32 เหมือนรูปที่ 4.31 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.140) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

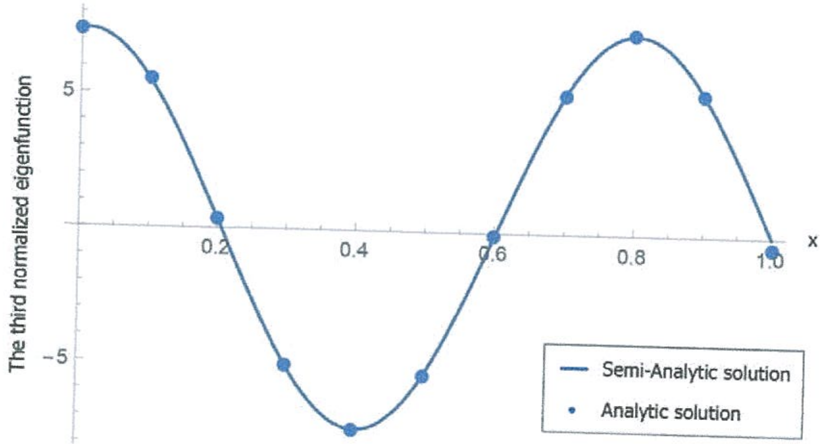
(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(24)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(24)}=1.00$$
$$\lambda_2^{(24)}=12.15$$
$$\lambda_3^{(24)}=41.80$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(24)}=\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(24)}=\lambda_2^{(16)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(24)}-\lambda_3^{(22)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=41.80$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=39.2079\begin{pmatrix}1-20.9x^2+72.885x^4-102.25x^6+77.6237x^8-37.188x^{10}\\+12.3643x^{12}-3.04403x^{14}+0.58169x^{16}-0.089407x^{18}\\+0.01136x^{20}-0.0012218x^{22}+1.13112\times10^{-4}x^{24}\end{pmatrix}\tag{4.141}$$



รูปที่ 4.33 เหมือนรูปที่ 4.31 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.141) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.12

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.142)

B.C.s : $y(0)-2y'(0)=0$ (4.143)

$5y(1)=0$ (4.144)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.142) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.145}$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.143) จะได้

$$Y(0)-2Y(1)=0 \tag{4.146}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.144) จะได้

$$5\sum_{k=0}^{n}Y(k)=0 \tag{4.147}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$

แทนค่า $Y(0)$ ลงใน (4.146) เราจะได้ว่า

$$Y(1)=\frac{c}{2}$$

แทนค่า $Y(0)$ และ $Y(1)$ ที่ $k=0$ ลงใน (4.145) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม ซึ่งจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=9$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{12}$$

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$
$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{240}$$
$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$Y(7)=-\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{10080}$$
$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$
$$Y(9)=\frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{725760}$$

แทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ ลงใน (4.147) จะได้

$$f^{(9)}(\lambda)=5\begin{bmatrix}1+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{12}+\frac{2+\lambda^2}{24}+\frac{6+\lambda^2}{240}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{720}\\ -\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{10080}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{40320}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{725760}\end{bmatrix}=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=3.523,\ 17.9309,\ 17.694\pm 25.7008i$$

เลือก $\lambda_1^{(9)}=3.523$

เมื่อ $n=8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=3.518,\ 18.6976,\ 18.892\pm 25.0979i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)}=3.518$

จาก $\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_1^{(8)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

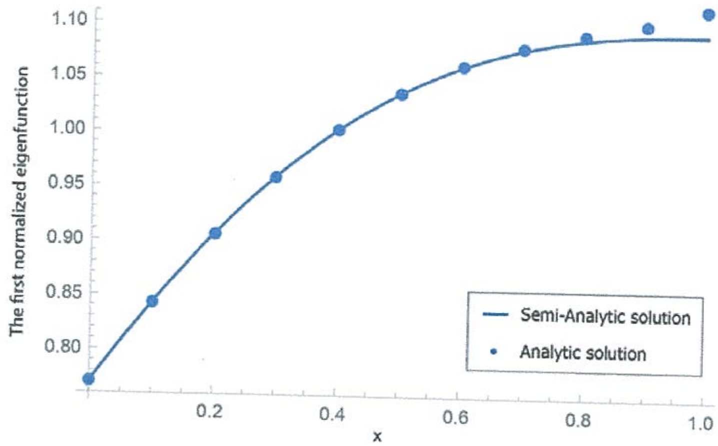
$$\left|\lambda_1^{(9)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.005\le\xi \qquad (4.148)$$

จาก (4.148) เราจะได้ว่า $\lambda_1=3.52$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\begin{pmatrix}1+0.5x-1.76x^2-0.293333x^3+0.5996x^4+0.0766267x^5\\ -0.12902x^6-0.0134062x^7+0.018817x^8+1.71967\times 10^{-3}x^9\end{pmatrix}c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=1.41875\begin{pmatrix}1+0.5x-1.76x^2-0.293333x^3+0.5996x^4+0.0766267x^5\\ -0.12902x^6-0.0134062x^7+0.018817x^8+1.71967\times 10^{-3}x^9\end{pmatrix} \qquad (4.149)$$



รูปที่ 4.34 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.149) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

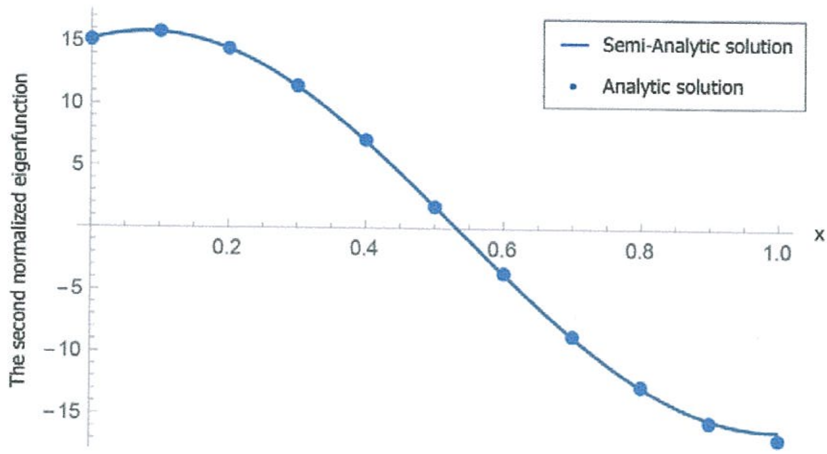
กรณี $n=18$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(18)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_1^{(18)}=3.52$

$\lambda_2^{(18)}=23.50$

Note เพราะ $\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\left|\lambda_2^{(18)}-\lambda_2^{(17)}\right|=\left|23.49-23.50\right|=0.01\le\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=23.50$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-5.20297\begin{pmatrix}1+0.5x-11.75x^2-1.9583x^3+23.0938x^4+2.326x^5-18.4818x^6\\-1.3481x^7+8.16813x^8+0.472312x^9-2.33814x^{10}-0.113158x^{11}\\+0.47814x^{12}+0.0200739x^{13}-0.0745848x^{14}-2.78522\times10^{-3}x^{15}\\+9.29535\times10^{-3}x^{16}+3.14436\times10^{-4}x^{17}-9.57599\times10^{-4}x^{18}\end{pmatrix} \quad (4.150)$$



รูปที่ 4.35 เหมือนรูปที่ 4.34 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.150) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(26)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

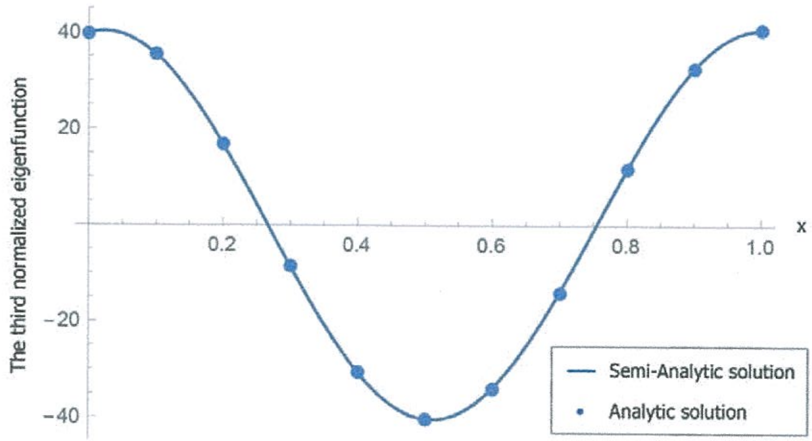
$\lambda_1^{(26)}=3.52$

$\lambda_2^{(26)}=23.50$

$\lambda_3^{(26)}=63.00$

Note เพราะ $\lambda_1^{(26)}=\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_2^{(26)}=\lambda_2^{(18)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(26)}-\lambda_3^{(25)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=63.00$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=7.37301\begin{pmatrix}1+0.5x-31.5x^2-5.25x^3+165.458x^4+16.5625x^5-348.513x^6\\ -24.9688x^7+395.031x^8+22.0777x^9-280.394x^{10}-12.8715x^{11}\\ +136.817x^{12}+5.33962x^{13}-48.9004x^{14}-1.66318x^{15}+13.4064x^{16}\\ +0.404853x^{17}-2.91995x^{18}-0.0794412x^{19}+0.519377x^{20}\\ +0.01288x^{21}-0.077144x^{22}-1.76065\times10^{-3}x^{23}+974543\times10^{-3}x^{24}\\ +2.06335\times10^{-4}x^{25}-1.06324\times10^{-3}x^{26}\end{pmatrix}\tag{4.151}$$



รูปที่ 4.36 เหมือนรูปที่ 4.34 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.151) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.13

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.152)

B.C.s : $y(0)-2y'(0)=0$ (4.153)

$2y(1)=0$ (4.154)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.152) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.155}$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.153) จะได้

$$Y(0)-2Y(1)=0 \tag{4.156}$$

ใช้นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.154) จะได้

$$2\sum_{k=0}^{n}Y(k)=0 \tag{4.157}$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$

แทนค่า $Y(0)$ ลงใน (4.156) เราจะได้ว่า

$$Y(1)=\frac{c}{2}$$

แทนค่า $Y(0)$ และ $Y(1)$ ที่ $k=0$ ลงใน (4.155) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม ซึ่งจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=9$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{12}$$

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$
$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{240}$$
$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$Y(7)=-\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{10080}$$
$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$
$$Y(9)=\frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{725760}$$

แทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ ลงใน (4.157) จะได้

$$f^{(9)}(\lambda)=2\begin{bmatrix}1+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{12}+\frac{2+\lambda^2}{24}+\frac{6+\lambda^2}{240}-\frac{\lambda(14+\lambda^2)}{720}\\ -\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{10080}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{40320}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{725760}\end{bmatrix}=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=3.523,\ 17.9309,\ 17.694\pm 25.7008i$$

เลือก $\lambda_1^{(9)}=3.523$

เมื่อ $n=8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=3.518,\ 18.6976,\ 18.892\pm 25.0979i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)}=3.518$

จาก $\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_1^{(8)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

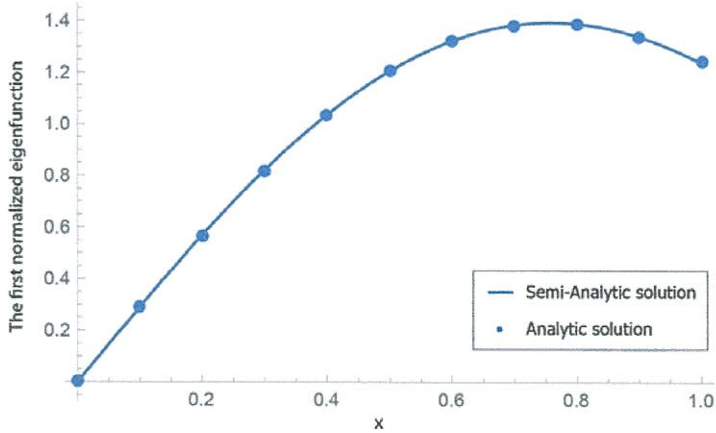
$$\left|\lambda_1^{(9)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.005\le\xi \qquad (4.158)$$

จาก (4.158) เราจะได้ว่า $\lambda_1=3.52$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\begin{pmatrix}1+0.5x-1.76x^2-0.293333x^3+0.5996x^4+0.0766267x^5\\ -0.12902x^6-0.0134062x^7+0.018817x^8+1.71967\times10^{-3}x^9\end{pmatrix}c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=1.41875\begin{pmatrix}1+0.5x-1.76x^2-0.293333x^3+0.5996x^4+0.0766267x^5\\ -0.12902x^6-0.0134062x^7+0.018817x^8+1.71967\times10^{-3}x^9\end{pmatrix} \qquad (4.159)$$



รูปที่ 4.37 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.159) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=18$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(18)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

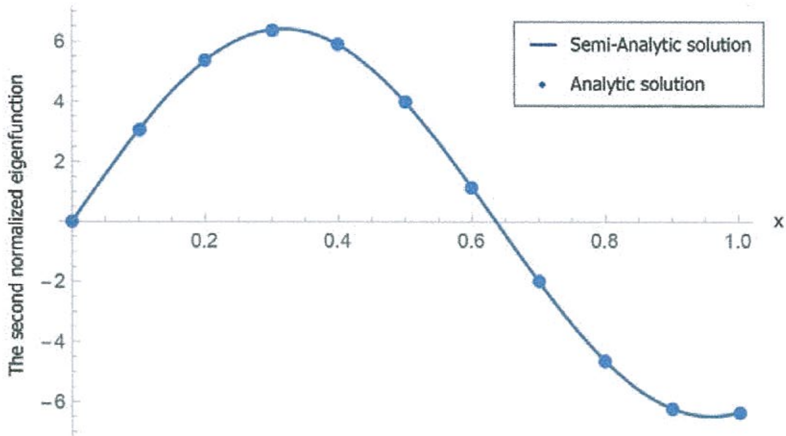
$\lambda_1^{(18)}=3.52$

$\lambda_2^{(18)}=23.50$

Note เพราะ $\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\left|\lambda_2^{(18)}-\lambda_2^{(17)}\right|=|23.49-23.50|=0.01\le\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=23.50$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-5.20297\begin{pmatrix}1+0.5x-11.75x^2-1.9583x^3+23.0938x^4+2.326x^5-18.4818x^6\\-1.3481x^7+8.16813x^8+0.472312x^9-2.33814x^{10}-0.113158x^{11}\\+0.47814x^{12}+0.0200739x^{13}-0.0745848x^{14}-2.78522\times10^{-3}x^{15}\\+9.29535\times10^{-3}x^{16}+3.14436\times10^{-4}x^{17}-9.57599\times10^{-4}x^{18}\end{pmatrix}$$

(4.160)



รูปที่ 4.38 เหมือนรูปที่ 4.37 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.160) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

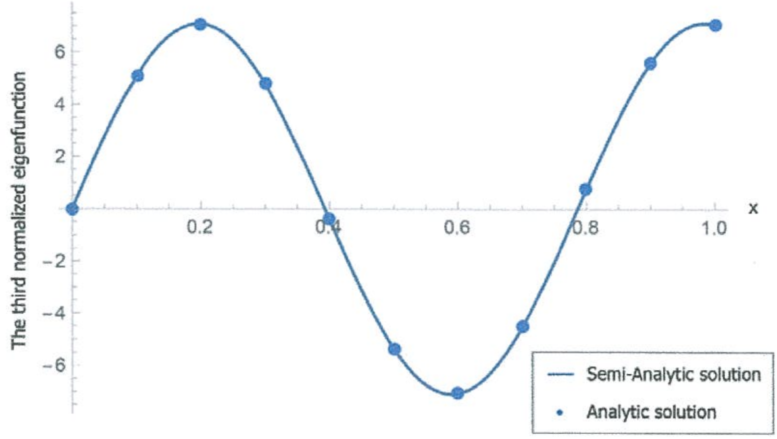
(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(26)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(26)} = 3.52$$
$$\lambda_2^{(26)} = 23.50$$
$$\lambda_3^{(26)} = 63.00$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(26)} = \lambda_1^{(18)} = \lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_2^{(26)} = \lambda_2^{(18)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(26)} - \lambda_3^{(25)}\right| \le \xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3 = 63.00$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x) = 7.37301\begin{pmatrix} 1+0.5x-31.5x^2-5.25x^3+165.458x^4+16.5625x^5-348.513x^6 \\ -24.9688x^7+395.031x^8+22.0777x^9-280.394x^{10}-12.8715x^{11} \\ +136.817x^{12}+5.33962x^{13}-48.9004x^{14}-1.66318x^{15}+13.4064x^{16} \\ +0.404853x^{17}-2.91995x^{18}-0.0794412x^{19}+0.519377x^{20} \\ +0.01288x^{21}-0.077144x^{22}-1.76065\times10^{-3}x^{23}+974543\times10^{-3}x^{24} \\ +2.06335\times10^{-4}x^{25}-1.06324\times10^{-3}x^{26} \end{pmatrix} \tag{4.161}$$



รูปที่ 4.39 เหมือนรูปที่ 4.37 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.161) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.14

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$ (4.162)

B.C.s : $y(0)-y'(0)=0$ (4.163)

$y(1)+y'(1)=0$ (4.164)

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับ (4.162) เราจะได้

$$Y(k+2)=\frac{\left(\sum_{l=0}^{k}\delta(l-2)Y(k-l)\right)-\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (4.165)$$

ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ (2.4) กับเงื่อนไขขอบ (4.163) จะได้

$$Y(0)-Y(1)=0 \quad (4.166)$$

ใช้ นิยามการแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (2.7) กับเงื่อนไขขอบ (4.164) จะได้

$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)=0 \quad (4.167)$$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

ให้ $Y(0)=c$

แทนค่า $Y(0)$ ลงใน (4.166) เราจะได้ว่า

$$Y(1)=c$$

แทนค่า $Y(0)$ และ $Y(1)$ ที่ $k=0$ ลงใน (4.165) เราจะได้ว่า

$$Y(2)=-\frac{c\lambda}{2}$$

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิม ซึ่งจะได้ผลการคำนวณที่สัมพันธ์กับ $n=9$ ดังนี้

$$Y(3)=-\frac{c\lambda}{6}$$

$$Y(4)=\frac{c(2+\lambda^2)}{24}$$
$$Y(5)=\frac{c(6+\lambda^2)}{120}$$
$$Y(6)=-\frac{c\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$Y(7)=-\frac{c\lambda(26+\lambda^2)}{5040}$$
$$Y(8)=\frac{c(60+44\lambda^2+\lambda^4)}{40320}$$
$$Y(9)=\frac{c(252+68\lambda^2+\lambda^4)}{362880}$$

แทนค่า $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ ลงใน (4.167) จะได้

$$f^{(9)}(\lambda)=3-\frac{3\lambda}{2}-\frac{2\lambda}{3}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}+\frac{6+\lambda^2}{20}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}$$
$$-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{630}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{36288}=0$$

แก้สมการ จะได้

$$\lambda=2.0307,\ 11.846,\ 15.611\pm 19.385i$$

เลือก $\lambda_1^{(9)}=2.03$

เมื่อ $n=8$ โดยวิธีการเดียวกัน เราจะได้

$$\lambda=2.0198,\ 12.8778,\ 17.8845\pm 17.9609i$$

เลือก $\lambda_1^{(8)}=2.02$

จาก $\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_1^{(8)}$ เราจะแทนลงใน (2.27) จะได้ว่า

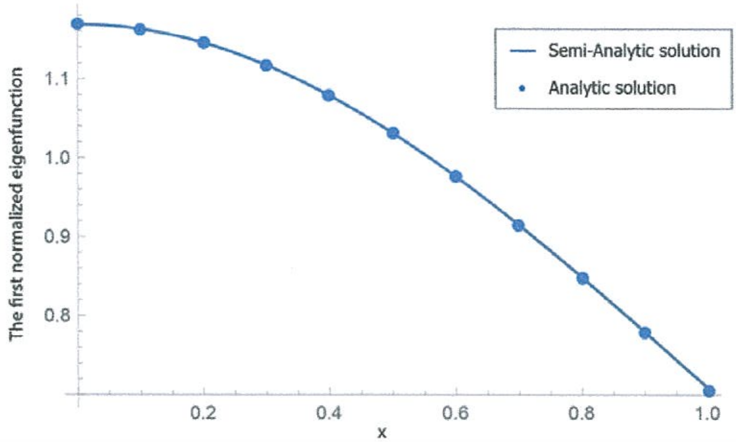
$$\left|\lambda_1^{(9)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.01\le\xi \tag{4.168}$$

จาก (4.168) เราจะได้ว่า $\lambda_1=2.03$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก จากนั้นแทน λ_1 ลงใน $Y(0)$ ถึง $Y(9)$ และใช้ (2.28) เราจะได้ฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ฟังก์ชันแรก

$$y_1(x)=\begin{pmatrix}1+x-1.015x^2-0.33833x^3+0.255x^4+0.0843x^5-0.05109x^6\\ -0.012132x^7+6.40629\times10^{-3}x^8+1.51346\times10^{-3}x^9\end{pmatrix}c$$

โดย (2.29) ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=0.881682\begin{pmatrix}1+x-1.015x^2-0.3383x^3+0.255x^4+0.0843x^5-0.05109x^6\\ -0.012132x^7+6.40629\times10^{-3}x^8+1.51346\times10^{-3}x^9\end{pmatrix} \tag{4.169}$$



รูปที่ 4.40 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.169) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=15$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(15)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

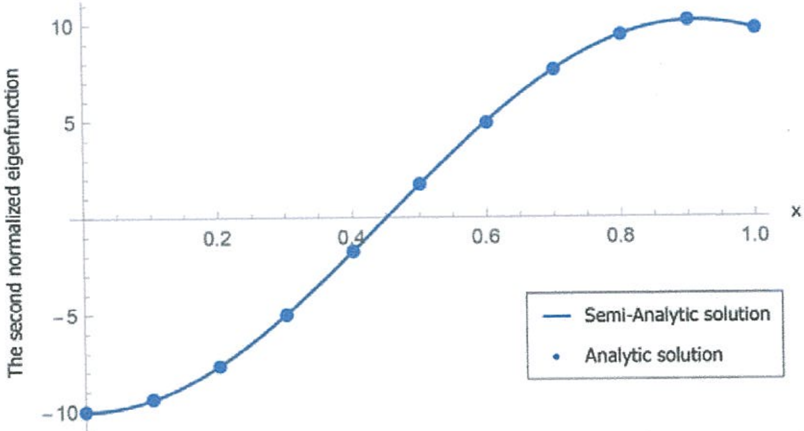
$\lambda_1^{(15)}=2.03$

$\lambda_2^{(15)}=13.883$

Note เพราะ $\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\left|\lambda_2^{(15)}-\lambda_2^{(14)}\right|=|13.883-13.875|=0.007\leq\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=13.88$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-56.3342\begin{pmatrix}1+x-6.94x^2-2.3133x^3+8.1106x^4+1.65545x^5\\-3.9838x^6-0.602167x^7+1.13225x^8+0.13907x^9\\-0.218884x^{10}-0.0230232x^{11}+0.0315936x^{12}\\+2.93999\times10^{-3}x^{13}-3.61211\times10^{-3}x^{14}-3.03954\times10^{-4}x^{15}\end{pmatrix}$$

(4.170)



รูปที่ 4.41 เหมือนรูปที่ 4.40 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.170) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(23)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

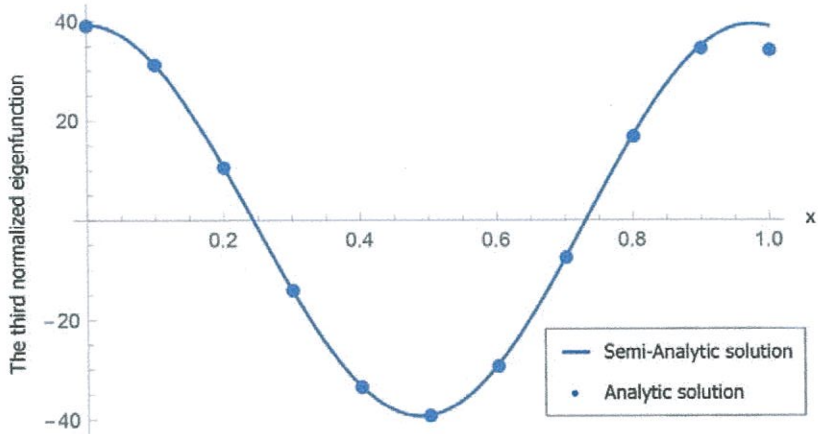
$\lambda_1^{(23)}=2.03$

$\lambda_2^{(23)}=13.88$

$\lambda_3^{(23)}=43.70$

Note เพราะ $\lambda_1^{(23)}=\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_2^{(23)}=\lambda_2^{(15)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(23)}-\lambda_3^{(22)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=43.70$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=21.1172\begin{pmatrix}1+x-21.85x^2-7.2833x^3+79.6538x^4+15.9641x^5-116.757x^6\\-16.7837x^7+92.5348x^8+10.4085x^9-46.2281x^{10}-4.28758x^{11}\\+16.0053x^{12}+1.26779x^{13}-4.09704x^{14}-0.284239x^{15}+0.81269x^{16}\\+0.0503273x^{17}-0.12945x^{18}-7.26182\times10^{-3}x^{19}+0.0170254x^{20}\\+8.75402\times10^{-4}x^{21}-1.8906\times10^{-3}x^{22}-8.99543\times10^{-5}x^{23}\end{pmatrix} \tag{4.171}$$



รูปที่ 4.42 เหมือนรูปที่ 4.40 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.171) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.15

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$

B.C.s : $2y(0)-y'(0)=0$

$y(1)+y'(1)=0$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

กรณี $n=10$ เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$f^{(10)}(\lambda)=5-\frac{3\lambda}{2}-\frac{4\lambda}{3}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}+\frac{6+\lambda^2}{10}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{315}$$
$$+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{18144}-\frac{11\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}=0$$

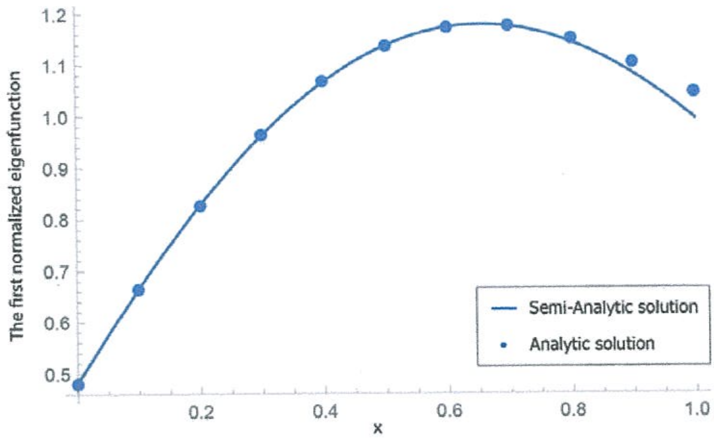
เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(10)}=2.63612$$

เพราะ $\left|\lambda_1^{(10)}-\lambda_1^{(9)}\right|=0.0079\le\xi$ ดังนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก $\lambda_1=2.64$ และจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=0.695924\begin{pmatrix}1+2x-1.32x^2-0.88x^3+0.373733x^4+0.21616x^5\\ -0.0768885x^6-0.0345396x^7+0.0102986x^8\\ +4.26867\times10^{-3}x^9-1.15641\times10^{-3}x^{10}\end{pmatrix}$$

(4.172)



รูปที่ 4.43 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.172) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=17$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(17)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_1^{(17)}=2.64$

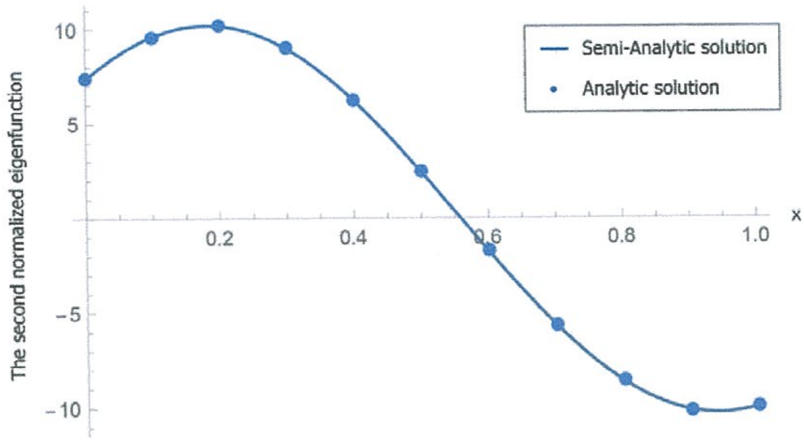
$\lambda_2^{(17)}=15.3481$

<u>*Note*</u> เพราะ $\lambda_1^{(17)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(17)}-\lambda_2^{(16)}\right|=\left|15.3481-15.3506\right|=0.0025\leq\xi$

นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=15.35$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-23.0605\begin{pmatrix}1+2x-7.675x^2-5.11667x^3+9.90094x^4+4.02704x^5\\ -5.32181x^6-1.59361x^7+1.63555x^8+0.395681x^9\\ -0.338083x^{10}-0.0697028x^{11}+0.0517055x^{12}\\ +9.39499\times10^{-3}x^{13}-6.21848\times10^{-3}x^{14}-1.01865\times10^{-3}x^{15}\\ +6.13163\times10^{-4}x^{16}+9.20266\times10^{-5}x^{17}\end{pmatrix}$$

(4.173)



รูปที่ 4.44 เหมือนรูปที่ 4.43 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.173) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(25)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

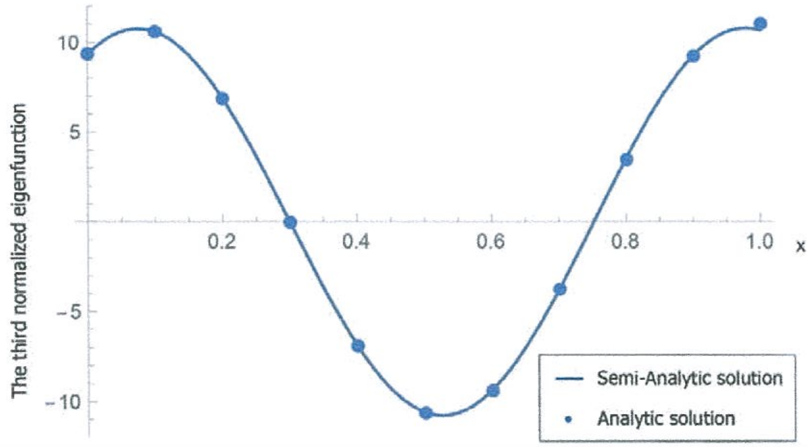
$\lambda_1^{(25)} = 2.64$

$\lambda_2^{(25)} = 15.35$

$\lambda_3^{(25)} = 45.51$

<u>*Note*</u> เพราะ $\lambda_1^{(25)} = \lambda_1^{(17)} = \lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(25)} = \lambda_2^{(17)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(25)} - \lambda_3^{(24)}\right| \le \xi$ เราจะได้ ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3 = 45.51$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x) = 14.6463\begin{pmatrix} 1+2x-22.755x^2-15.17x^3+86.3817x^4+34.6193x^5-131.799x^6 \\ -37.8737x^7+108.653x^8+24.4202x^9-56.4067x^{10}-10.4476x^{11} \\ +20.2706x^{12}+3.20442x^{13}-5.3787x^{14}-0.744195x^{15}+1.1044x^{16} \\ +0.136297x^{17}-0.181829x^{18}-0.0203131x^{19}+0.0246828x^{20} \\ +2.52558\times10^{-3}x^{21}-2.82498\times10^{-3}x^{22}-2.67297\times10^{-4}x^{23} \\ +2.77623\times10^{-4}x^{24}+2.44838\times10^{-5}x^{25} \end{pmatrix} \tag{4.174}$$



รูปที่ 4.45 เหมือนรูปที่ 4.43 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.174) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.16

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$

B.C.s : $4y(0)-y'(0)=0$

$y(1)+y'(1)=0$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

กรณี $n=10$ เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$f^{(10)}(\lambda)=9-\frac{3\lambda}{2}-\frac{8\lambda}{3}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}+\frac{6+\lambda^2}{5}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}-\frac{3\lambda(26+\lambda^2)}{315}$$
$$+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{9072}-\frac{11\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}=0$$

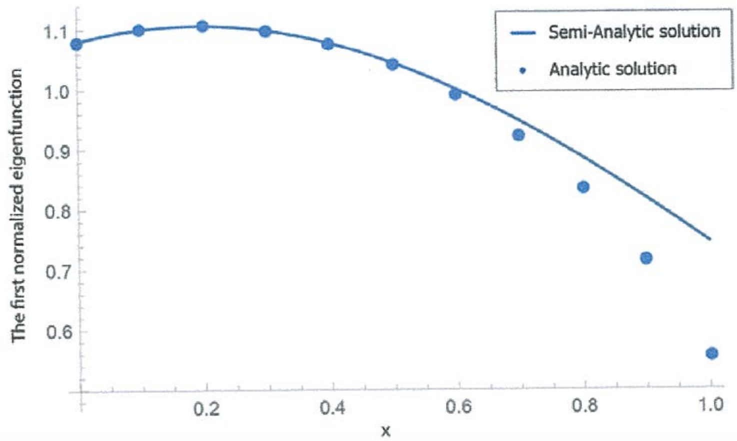
เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(10)}=3.30$$

เพราะ $\left|\lambda_1^{(10)}-\lambda_1^{(9)}\right|=0.01\le\xi$ ดังนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก $\lambda_1=3.30$ และจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=0.481755\begin{pmatrix}1+4x-1.65x^2-2.2x^3+0.537083x^4+0.563x^5\\-0.114079x^6-0.0966167x^7+0.0163133x^8\\+0.0122477x^9-1.8657\times10^{-3}x^{10}\end{pmatrix}$$

(4.175)



รูปที่ 4.46 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.175) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=18$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(18)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_1^{(18)}=3.30$

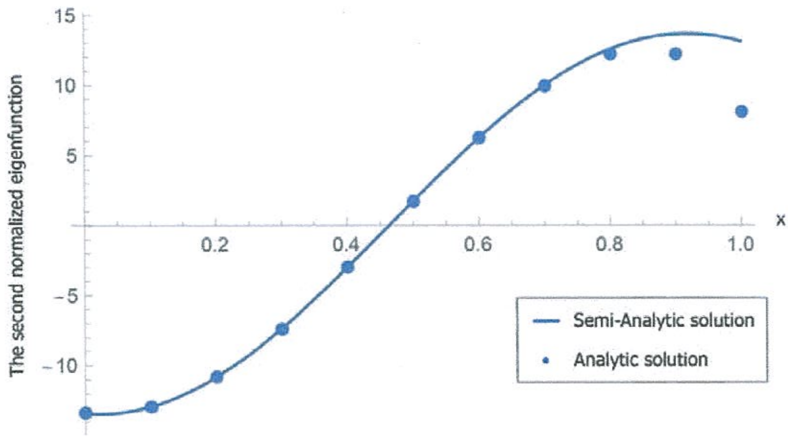
$\lambda_2^{(18)}=17.5383$

Note เพราะ $\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(18)}-\lambda_2^{(17)}\right|=|17.5383-17.5355|=0.0028\le\xi$

นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=17.54$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=7.37354\begin{pmatrix}1+4x-8.77x^2-11.6933x^3+12.9021x^4+10.4551x^5\\ -7.83579x^6-4.64464x^7+2.68468x^8+1.2767x^9\\ -0.610278x^{10}-0.245799x^{11}+0.101431x^{12}+0.0358206x^{13}\\ -0.0131285x^{14}-4.16234\times10^{-3}x^{15}+1.38211\times10^{-3}x^{16}\\ +4.00103\times10^{-4}x^{17}-1.22126\times10^{-4}x^{18}\end{pmatrix}$$

(4.176)



รูปที่ 4.47 เหมือนรูปที่ 4.46 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.176) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(25)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

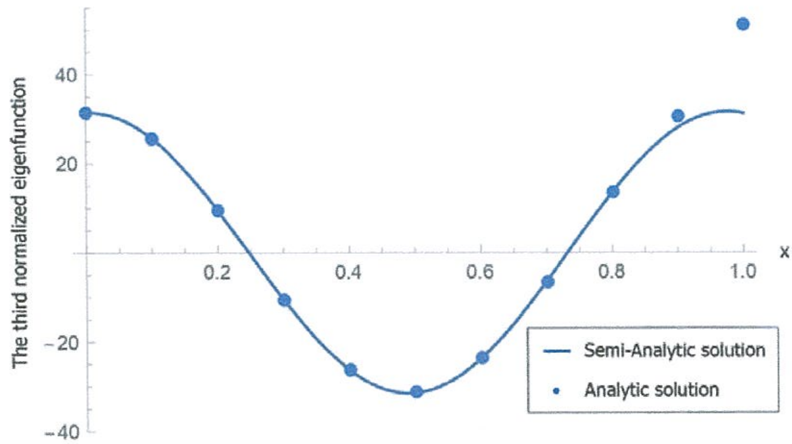
$\lambda_1^{(25)}=3.30$

$\lambda_2^{(25)}=17.54$

$\lambda_3^{(25)}=48.62$

Note เพราะ $\lambda_1^{(25)}=\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(25)}=\lambda_2^{(18)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(25)}-\lambda_3^{(24)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=48.62$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=9.31939\begin{pmatrix}1+4x-24.31x^2-32.4133x^3+98.5793x^4+78.9968x^5-160.575x^6\\-92.22x^7+141.174x^8+63.3713x^9-78.0492x^{10}-28.8485x^{11}\\+29.8176x^{12}+9.39733x^{13}-8.39441x^{14}-2.31308x^{15}+1.82481x^{16}\\+0.448012x^{17}-0.317374x^{18}-0.0704544x^{19}+0.0454093x^{20}\\+9.22264\times10^{-3}x^{21}-5.46575\times10^{-3}x^{22}-1.02541\times10^{-3}x^{23}\\+5.63685\times10^{-4}x^{24}+9.84637\times10^{-5}x^{25}\end{pmatrix} \tag{4.177}$$



รูปที่ 4.48 เหมือนรูปที่ 4.46 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.177) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.17

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$

B.C.s : $6y(0)-y'(0)=0$

$y(1)+y'(1)=0$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

กรณี $n=10$ เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$f^{(10)}(\lambda)=13-\frac{3\lambda}{2}-4\lambda+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}+\frac{3(6+\lambda^2)}{10}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{105}$$
$$+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{6048}-\frac{11\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}=0$$

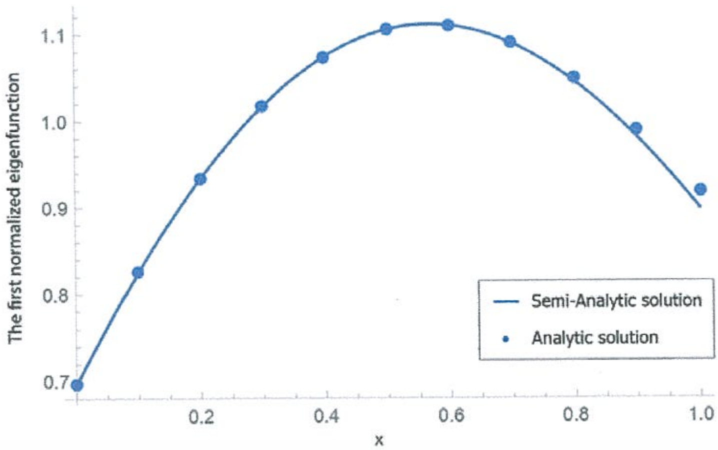
เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(10)}=3.63$$

เพราะ $\left|\lambda_1^{(10)}-\lambda_1^{(9)}\right|=0.01\le\xi$ ดังนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก $\lambda_1=3.63$ และจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=0.365329\begin{pmatrix}1+6x-1.815x^2-3.63x^3+0.632371x^4+0.958845x^5\\-0.137017x^6-0.1693x^7+0.020174x^8\\+0.0218528x^9-2.33609\times10^{-3}x^{10}\end{pmatrix}$$

(4.178)



รูปที่ 4.49 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.178) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=18$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(18)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_1^{(18)}=3.63$

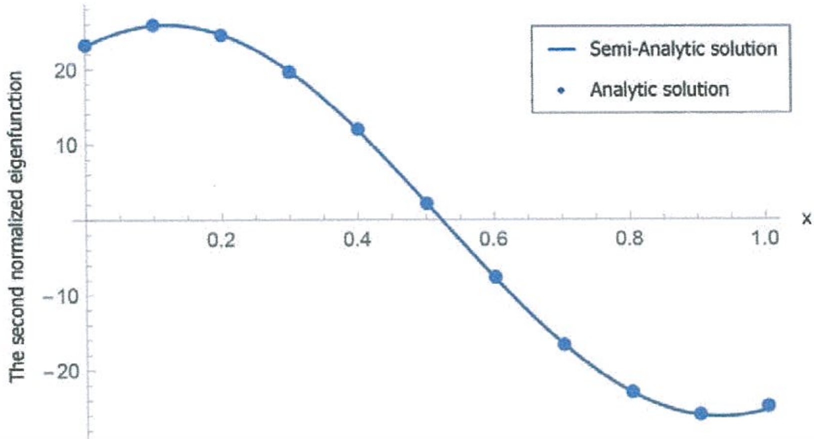
$\lambda_2^{(18)}=18.9812$

Note เพราะ $\lambda_1^{(18)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(18)}-\lambda_2^{(17)}\right|=\left|18.9812-18.9773\right|=0.0039\leq\xi$

นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=18.98$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=4.71478\begin{pmatrix}1+6x-9.49x^2-18.98x^3+15.0934x^4+18.312x^5-9.86539x^6\\-8.72719x^7+3.61319x^8+2.55492x^9-0.871597x^{10}\\-0.520178x^{11}+0.152698x^{12}+0.079666x^{13}-0.0207132x^{14}\\-9.67732\times10^{-3}x^{15}+2.27431\times10^{-3}x^{16}+9.68168\times10^{-4}x^{17}\\-2.08757\times10^{-4}x^{18}\end{pmatrix}$$

(4.179)



รูปที่ 4.50 เหมือนรูปที่ 4.49 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.179) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(25)}(\lambda) = 0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

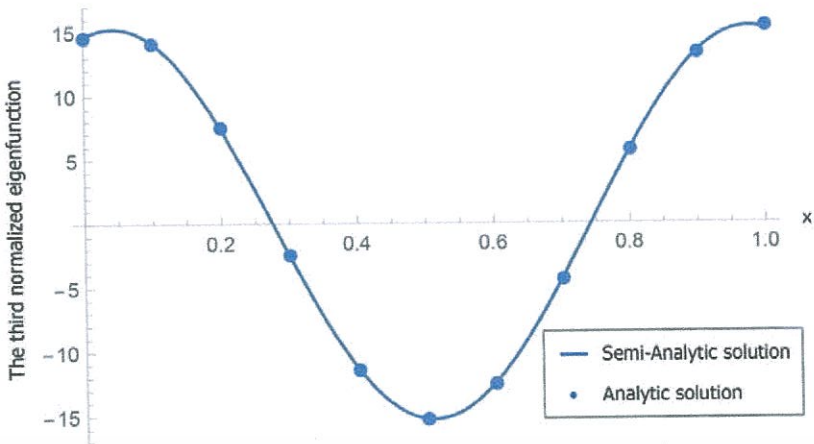
$\lambda_1^{(25)} = 3.63$

$\lambda_2^{(25)} = 18.98$

$\lambda_3^{(25)} = 51.07$

Note เพราะ $\lambda_1^{(25)} = \lambda_1^{(18)} = \lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(25)} = \lambda_2^{(18)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(25)} - \lambda_3^{(24)}\right| \le \xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3 = 51.07$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x) = 6.92473 \begin{pmatrix} 1 + 6x - 25.535x^2 - 51.07x^3 + 108.756x^4 + 130.707x^5 - 185.99x^6 \\ -160.15x^7 + 171.558x^8 + 115.41x^9 - 99.4165x^{10} - 55.0378x^{11} \\ +39.7633x^{12} + 18.7576x^{13} - 11.704x^{14} - 4.82377x^{15} + 2.6562x^{16} \\ +0.97466x^{17} - 0.481555x^{18} - 0.159648x^{19} + 0.0717085x^{20} \\ +0.0217331x^{21} - 8.96906 \times 10^{-3} x^{22} - 2.509 \times 10^{-3} x^{23} \\ +9.59707 \times 10^{-4} x^{24} + 24978 \times 10^{-4} x^{25} \end{pmatrix} \tag{4.180}$$



รูปที่ 4.51 เหมือนรูปที่ 4.49 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.180) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.18

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$

B.C.s : $y(0)-2y'(0)=0$

$y(1)+y'(1)=0$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

กรณี $n=9$ เราจะหาคำตอบ ดังนี้

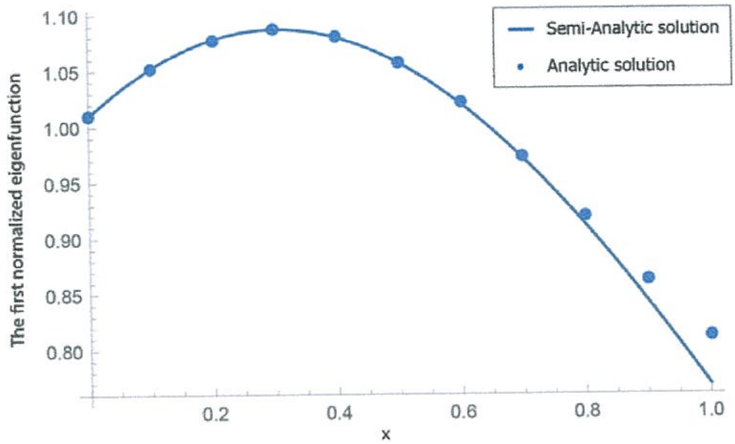
$$f^{(9)}(\lambda)=2-\frac{3\lambda}{2}-\frac{\lambda}{3}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}+\frac{6+\lambda^2}{40}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{1260}+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{72576}=0$$

เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(9)}=1.59$$

เพราะ $\left|\lambda_1^{(9)}-\lambda_1^{(8)}\right|=0.01\le\xi$ ดังนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก $\lambda_1=1.59$ และจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=1.00979\begin{pmatrix}1+0.5x-0.795x^2-0.1325x^3+0.188671x^4\\+0.0355338x^5-0.0364996x^6-4.49997\times10^{-3}x^7\\+4.40545\times10^{-3}x^8+5.92899\times10^{-4}x^9\end{pmatrix} \quad (4.181)$$



รูปที่ 4.52 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.181) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

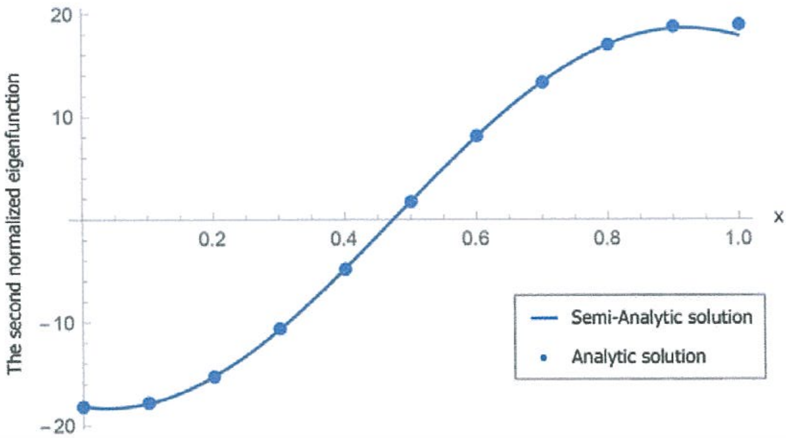
กรณี $n=15$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(15)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$\lambda_1^{(15)}=1.59$

$\lambda_2^{(15)}=13.0444$

Note เพราะ $\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\left|\lambda_2^{(15)}-\lambda_2^{(14)}\right|=\left|13.0444-13.0414\right|=0.003\le\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=13.04$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-18.1203\begin{pmatrix}1+0.5x-6.52x^2-1.08667x^3+7.1684x^4+0.733507x^5\\-3.3332x^6-0.253609x^7+0.904166x^8+0.0561191x^9\\-0.168039x^{10}-8.9582\times10^{-3}x^{11}+0.02345x^{12}\\+1.10855\times10^{-3}x^{13}-2.60344\times10^{-3}x^{14}-1.11494\times10^{-4}x^{15}\end{pmatrix}\tag{4.182}$$



รูปที่ 4.53 เหมือนรูปที่ 4.52 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.182) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(23)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$\lambda_1^{(23)}=1.59$

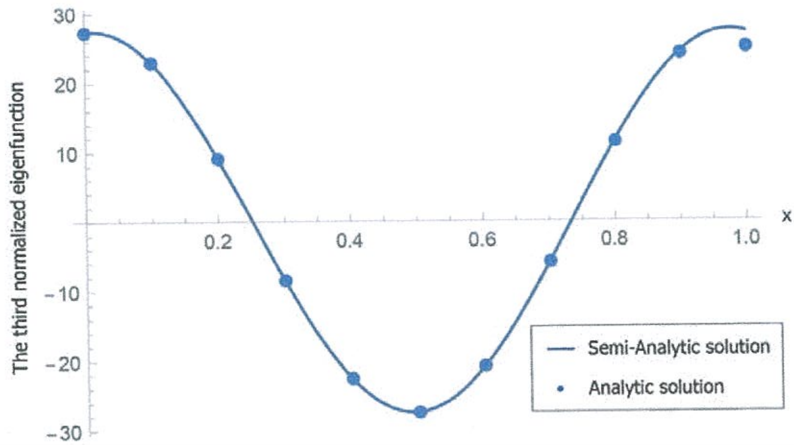
$\lambda_2^{(23)}=13.04$

$\lambda_3^{(23)}=42.76$

Note เพราะ $\lambda_1^{(23)}=\lambda_1^{(15)}=\lambda_1^{(9)}$ และ $\lambda_2^{(23)}=\lambda_2^{(15)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(23)}-\lambda_3^{(22)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=42.76$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=27.3271\begin{pmatrix}1+0.5x-21.38x^2-3.56333x^3+76.2674x^4+7.64341x^5-109.419x^6\\-7.86656x^7+84.9112x^8+4.77802x^9-41.558x^{10}-1.92886x^{11}\\+14.1056x^{12}+0.559334x^{13}-3.54237x^{14}-0.123076x^{15}+0.689906x^{16}\\+0.0214047x^{17}-0.107983x^{18}-3.03608\times10^{-3}x^{19}+0.0139664x^{20}\\+3.60065\times10^{-4}x^{21}-1.52638\times10^{-3}x^{22}-3.642783\times10^{-5}x^{23}\end{pmatrix}$$

(4.183)



รูปที่ 4.54 เหมือนรูปที่ 4.52 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.183) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.19

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$

B.C.s : $y(0)-4y'(0)=0$

$y(1)+y'(1)=0$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

กรณี $n=7$ เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$f^{(7)}(\lambda)=\frac{3}{2}-\frac{3\lambda}{2}-\frac{\lambda}{6}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}+\frac{6+\lambda^2}{80}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{2520}=0$$

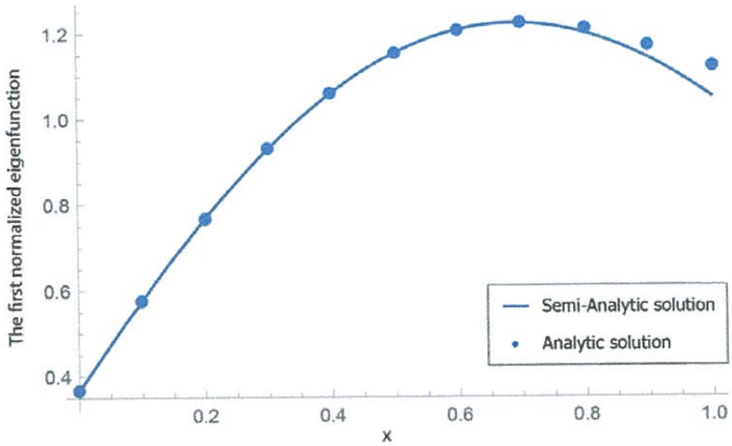
เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(7)}=1.29$$

เพราะ $\left|\lambda_1^{(7)}-\lambda_1^{(6)}\right|=0.01\le\xi$ ดังนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก $\lambda_1=1.29$

และจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=1.08047\begin{pmatrix}1+0.25x-0.645x^2-0.05375x^3+0.152671x^4\\+0.0159669x^5-0.0280648x^6-1.77017\times10^{-3}x^7\end{pmatrix}\qquad(4.184)$$



รูปที่ 4.55 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.184) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

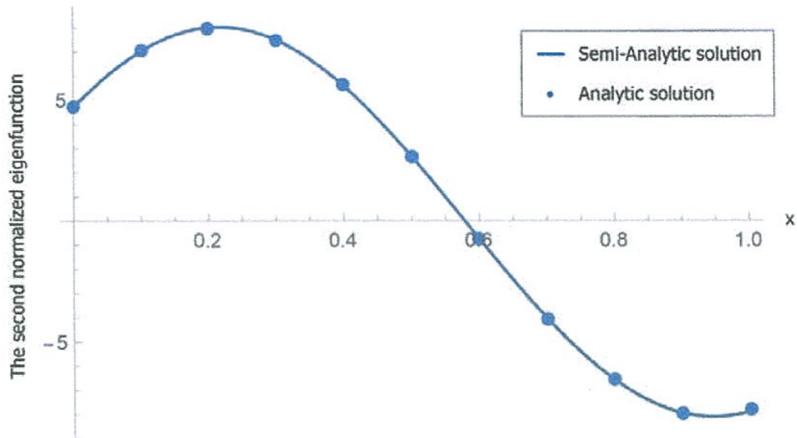
(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=13$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(13)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$\lambda_1^{(13)}=1.29$$
$$\lambda_2^{(13)}=12.55$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(13)}=\lambda_1^{(7)}$ และ $\left|\lambda_2^{(13)}-\lambda_2^{(12)}\right|=|12.55-12.59|=0.01\le\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=12.55$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-13.4265\begin{pmatrix}1+0.25x-6.275x^2-0.522917x^3+6.64594x^4+0.34063x^5\\-2.98938x^6-0.114234x^7+0.78862x^8+0.0246426x^9\\-0.14318x^{10}-3.85\times10^{-3}x^{11}+0.01959x^{12}+4.6769\times10^{-4}x^{13}\end{pmatrix}\tag{4.185}$$



รูปที่ 4.56 เหมือนรูปที่ 4.55 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.185) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

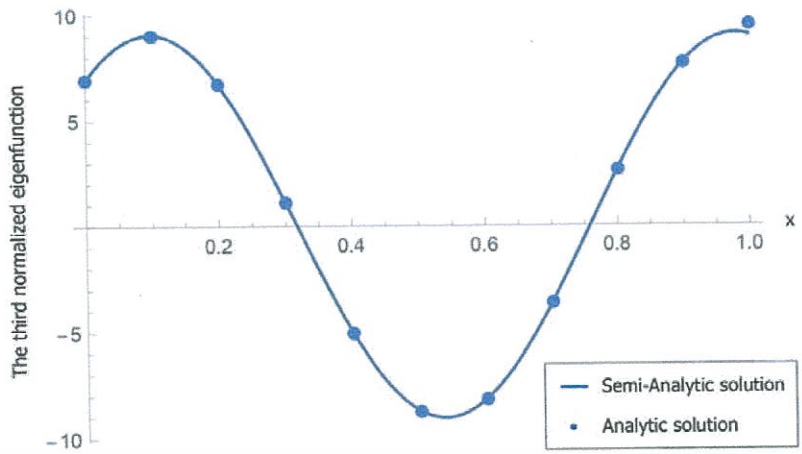
ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(21)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(21)}=1.29$$
$$\lambda_2^{(21)}=12.55$$
$$\lambda_3^{(21)}=42.34$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(21)}=\lambda_1^{(13)}=\lambda_1^{(7)}$ และ $\lambda_2^{(21)}=\lambda_2^{(13)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(21)}-\lambda_3^{(20)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=42.34$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=31.4242\begin{pmatrix}1+0.25x-21.17x^2-1.76417x^3+74.7782x^4+3.74724x^5-106.243x^6\\-3.8196x^7+81.6623x^8+2.2982x^9-39.598x^{10}-0.9193x^{11}+13.32x^{12}\\+0.2642x^{13}-3.3163x^{14}-0.05765x^{15}+0.6406x^{16}+9.94598\times10^{-3}x^{17}\\-0.099468x^{18}-1.3999\times10^{-3}x^{19}+0.0127685x^{20}+1.64804\times10^{-4}x^{21}\end{pmatrix}$$

(4.186)



รูปที่ 4.57 เหมือนรูปที่ 4.55 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.186) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 4.20

GE : $y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0$

B.C.s : $y(0)-6y'(0)=0$

$y(1)+y'(1)=0$

(I) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 1

กรณี $n=10$ เราจะหาคำตอบ ดังนี้

$$f^{(10)}(\lambda)=1.3333-\frac{3\lambda}{2}-\frac{\lambda}{9}+\frac{5(2+\lambda^2)}{24}+\frac{6+\lambda^2}{120}-\frac{7\lambda(14+\lambda^2)}{720}-\frac{\lambda(26+\lambda^2)}{3780}$$
$$+\frac{60+44\lambda^2+\lambda^4}{4480}+\frac{252+68\lambda^2+\lambda^4}{217728}-\frac{11\lambda(844+100\lambda^2+\lambda^4)}{3628800}=0$$

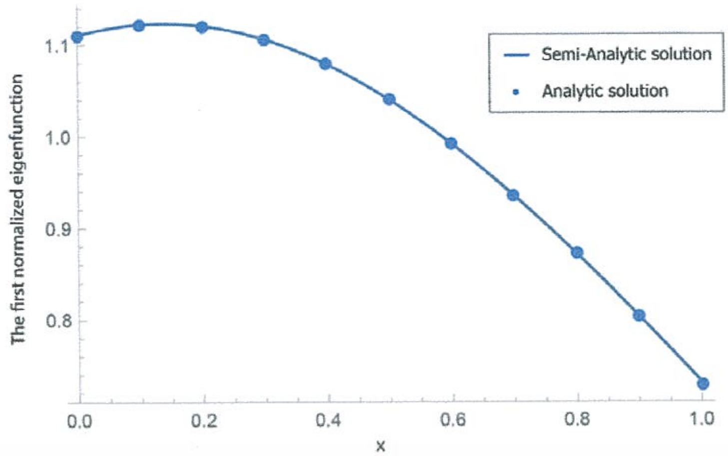
เลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(10)}=1.21264$$

เพราะ $\left|\lambda_1^{(10)}-\lambda_1^{(9)}\right|=0.00293\le\xi$ ดังนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าแรก $\lambda_1=1.21$ และจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_1(x)=1.11069\begin{pmatrix}1+0.166667x-0.605x^2-0.0336111x^3+0.144338x^4\\ +0.0103668x^5-0.0259883x^6-1.09893\times10^{-3}x^7\\ +3.13899\times10^{-3}x^8+1.62451\times10^{-4}x^9-3.30961\times10^{-4}x^{10}\end{pmatrix}$$

(4.187)



รูปที่ 4.58 การเปรียบเทียบผลการคำนวณของฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันแรก (The first normalized eigenfunction) (4.187) จากค่าเจาะจงค่าแรก (λ_1) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(II) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 2

กรณี $n=16$ ทำตามขั้นตอนเดียวกับข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(16)}(\lambda)=0$ และเลือกรากจำนวนจริง (real root) เราจะได้เราจะหาคำตอบ ดังนี้

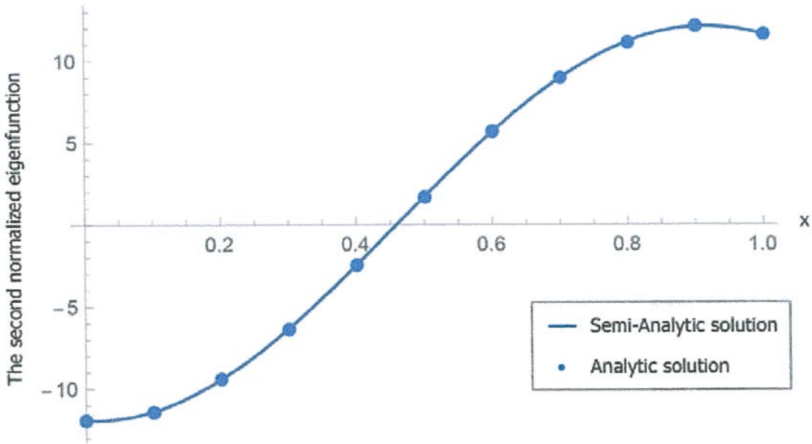
$\lambda_1^{(16)}=1.21$

$\lambda_2^{(16)}=12.45$

Note เพราะ $\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\left|\lambda_2^{(16)}-\lambda_2^{(15)}\right|=\left|12.45-12.46\right|=0.01\le\xi$ นอกจากนั้นเรามีค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สอง $\lambda_2=12.45$ ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นเราจะได้ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) ดังต่อไปนี้

$$\hat{y}_2(x)=-11.9078\begin{pmatrix}1+0.166667x-6.225x^2-0.345833x^3+6.54177x^4\\+0.223615x^5-2.92233x^6-0.0745199x^7+0.766515x^8\\+0.0159915x^9-0.138505x^{10}-2.4874\times10^{-3}x^{11}\\+0.0188705x^{12}+3.01023\times10^{-4}x^{13}-2.05188\times10^{-3}x^{14}\\-2.96911\times10^{-5}x^{15}+1.85068\times10^{-4}x^{16}\end{pmatrix}$$

(4.188)



รูปที่ 4.59 เหมือนรูปที่ 4.58 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สอง (The second normalized eigenfunction) (4.188) จากค่าเจาะจงค่าที่สอง (λ_2) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

(III) : การหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงครั้งที่ 3

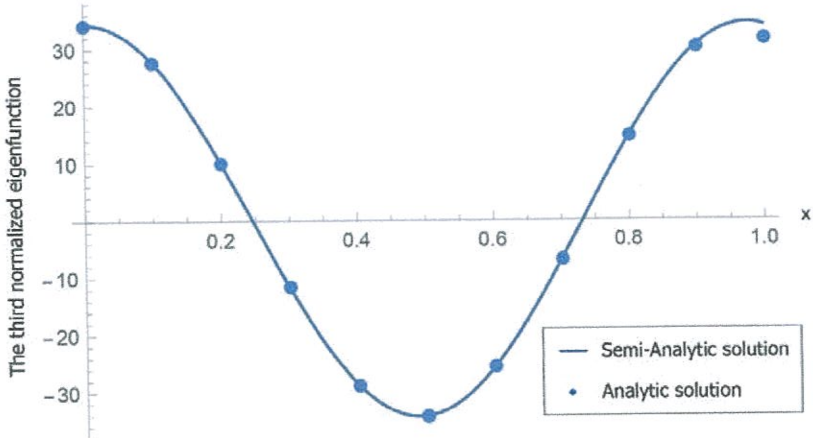
ทำขั้นตอนต่อไปแบบเดิมดังที่แสดงไว้ข้างต้น เราจะแก้สมการ $f^{(23)}(\lambda)=0$ และเลือกราก จำนวนจริง (real root) เราจะได้

$$\lambda_1^{(23)}=1.21$$
$$\lambda_2^{(23)}=12.45$$
$$\lambda_3^{(23)}=42.12$$

Note เพราะ $\lambda_1^{(23)}=\lambda_1^{(16)}=\lambda_1^{(10)}$ และ $\lambda_2^{(23)}=\lambda_2^{(16)}$ เนื่องจาก $\left|\lambda_3^{(23)}-\lambda_3^{(22)}\right|\le\xi$ เราจะได้ค่าเจาะจง (eigenvalue) ค่าที่สามคือ $\lambda_3=42.12$ และฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) ในแบบฟอร์ม

$$\hat{y}_3(x)=34.2192\begin{pmatrix}1+0.166667x-21.06x^2-1.17x^3+74.0039x^4+2.47235x^5\\ -104.604x^6-2.50727x^7+79.9983x^8+1.50109x^9-38.6015x^{10}\\ -0.597576x^{11}+12.9234x^{12}+0.170968x^{13}-3.20295x^{14}\\ -0.0371369x^{15}+0.615964x^{16}+6.37931\times10^{-3}x^{17}-0.0952528x^{18}\\ -8.9425\times10^{-4}x^{19}+0.012179x^{20}+1.04869\times10^{-4}x^{21}\\ -1.31652\times10^{-3}x^{22}-1.04967\times10^{-5}x^{23}\end{pmatrix}$$

(4.189)



รูปที่ 4.60 เหมือนรูปที่ 4.58 แต่เป็นฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานฟังก์ชันที่สาม (The third normalized eigenfunction) (4.189) จากค่าเจาะจงค่าที่สาม (λ_3) กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

4.2 การลู่เข้าของค่าเจาะจง

การลู่เข้าของค่าเจาะจงของตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นแสดงถึงสิ่งต่อไปนี้

ในปัญหาที่ 1 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 2.60, 22.52 และ 62.01 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.61

ในปัญหาที่ 2 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 10.15, 39.80 และ 89.15 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.62

ในปัญหาที่ 3 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 0.32, 10.26 และ 39.83 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.63

ในปัญหาที่ 4 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.00, 22.56 และ 62.03 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.64

ในปัญหาที่ 5 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.69, 18.06 และ 48.93 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.65

ในปัญหาที่ 6 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 4.60, 24.52 และ 64.01 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.66

ในปัญหาที่ 7 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 4.60, 24.52 และ 64.01 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.67

ในปัญหาที่ 8 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.13, 12.09 และ 41.78 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.68

ในปัญหาที่ 9 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.13, 12.09 และ 41.78 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.69

ในปัญหาที่ 10 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.00, 12.15 และ 41.80 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.70

ในปัญหาที่ 11 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.00, 12.15 และ 41.80 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.71

ในปัญหาที่ 12 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.52, 23.50 และ 63.00 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.72

ในปัญหาที่ 13 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.52, 23.50 และ 63.00 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.73

ในปัญหาที่ 14 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 2.03, 13.88 และ 43.70 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.74

ในปัญหาที่ 15 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 2.64, 15.35 และ 45.51 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.75

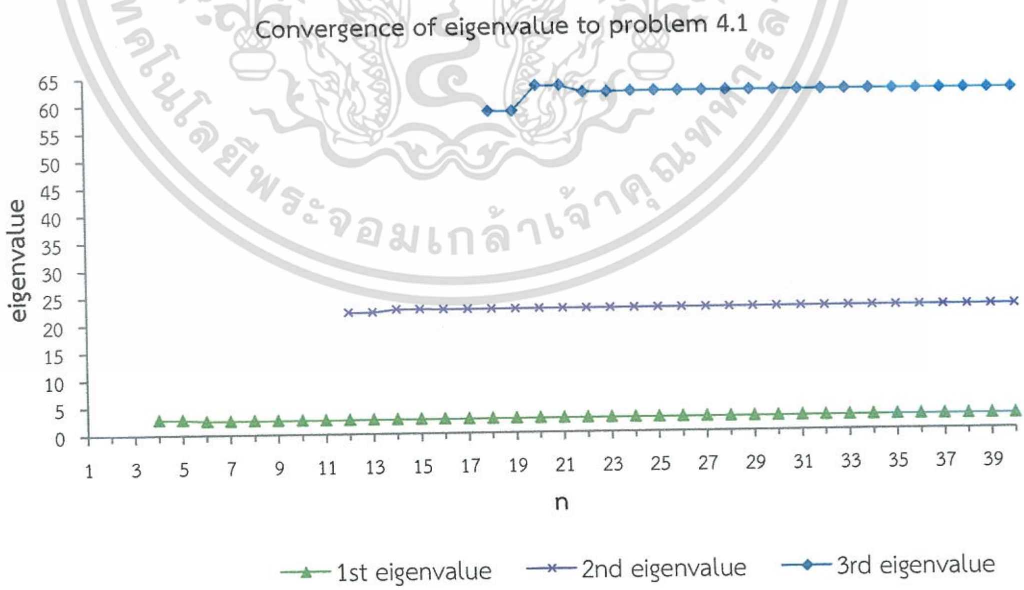
ในปัญหาที่ 16 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.30, 17.54 และ 48.62 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.76

ในปัญหาที่ 17 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.63, 18.98 และ 51.07 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.77

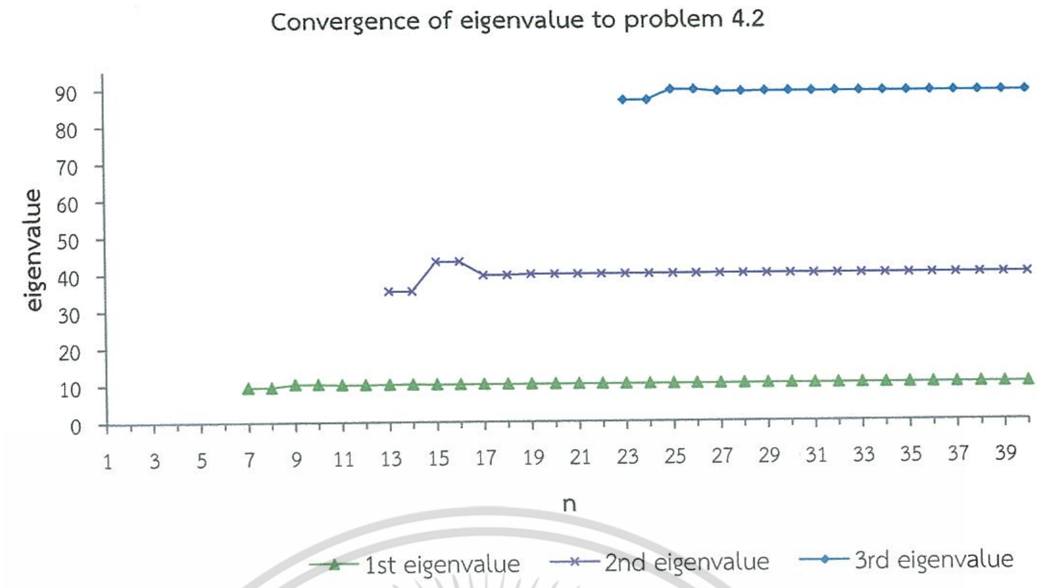
ในปัญหาที่ 18 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.59, 13.04 และ 42.76 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.78

ในปัญหาที่ 19 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.29, 12.55 และ 42.34 ตามลำดับ อย่างที่แสดงในรูปที่ 4.79

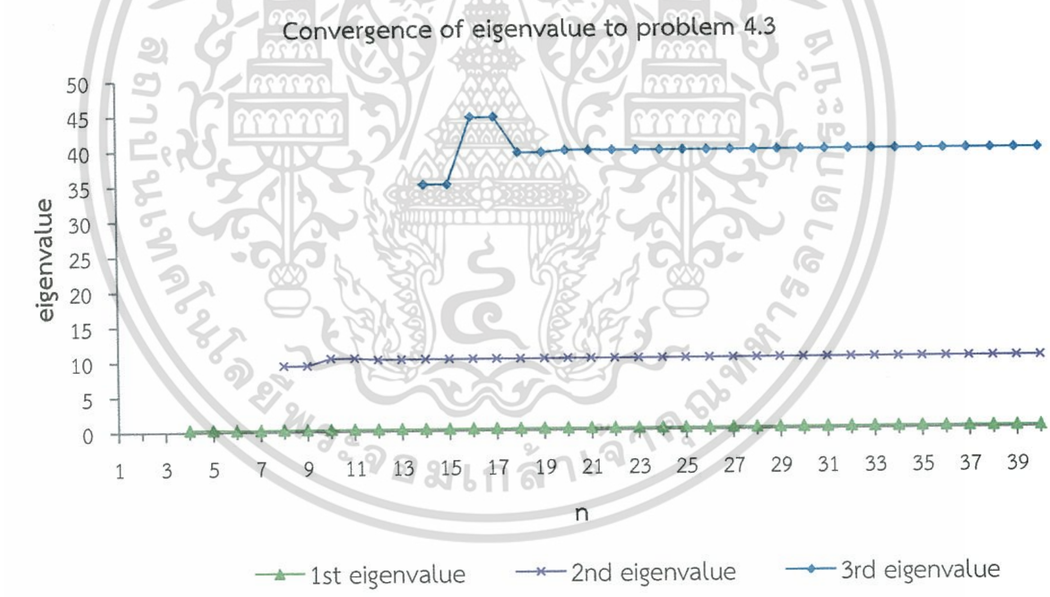
และในปัญหาที่ 20 ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.21, 12.45 และ 42.12 ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4.80



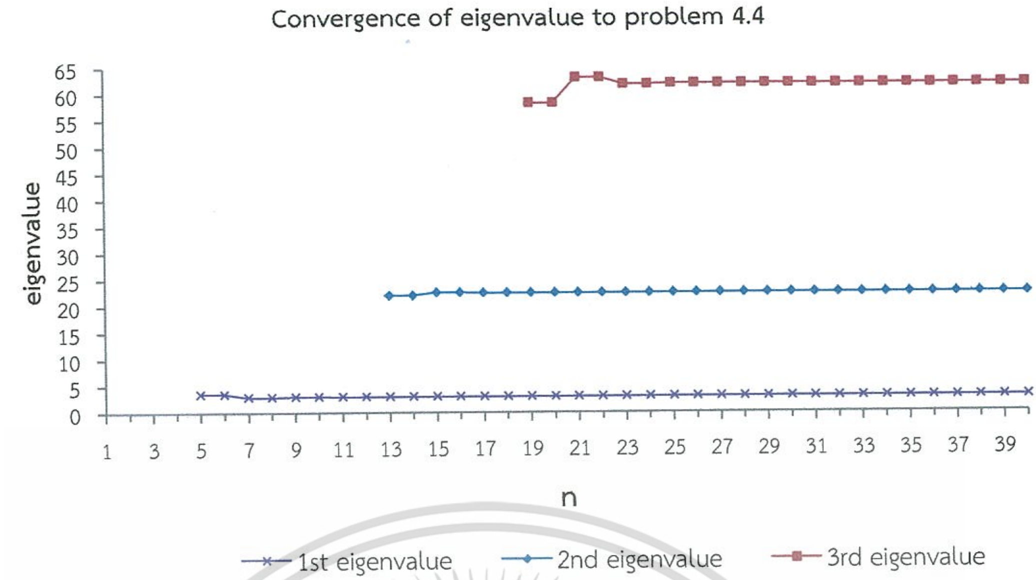
รูปที่ 4.61 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 2.60, 22.52 และ 62.01 ตามลำดับ



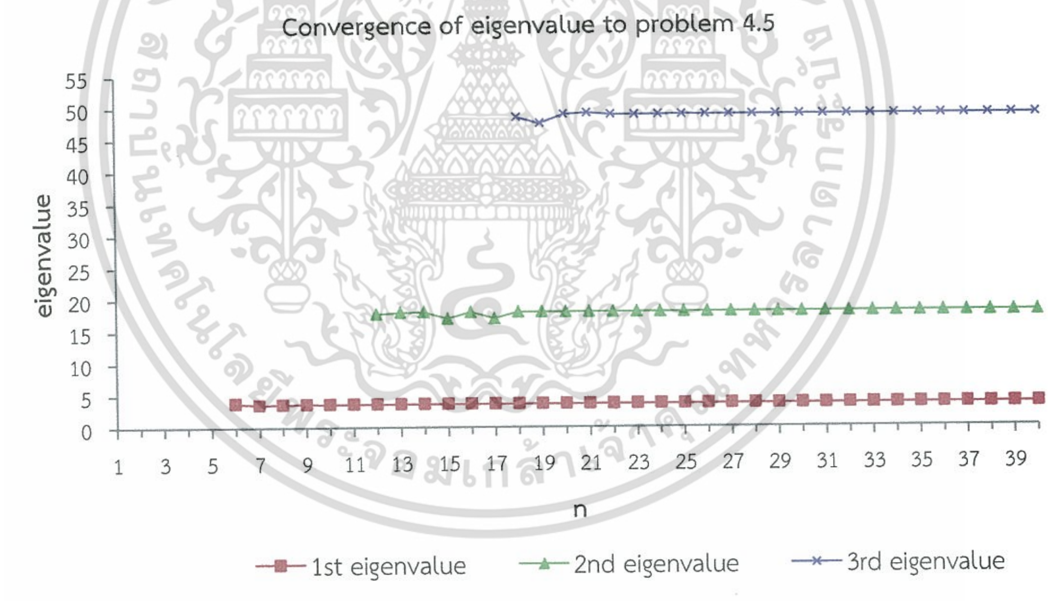
รูปที่ 4.62 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 10.15, 39.80 และ 89.15 ตามลำดับ



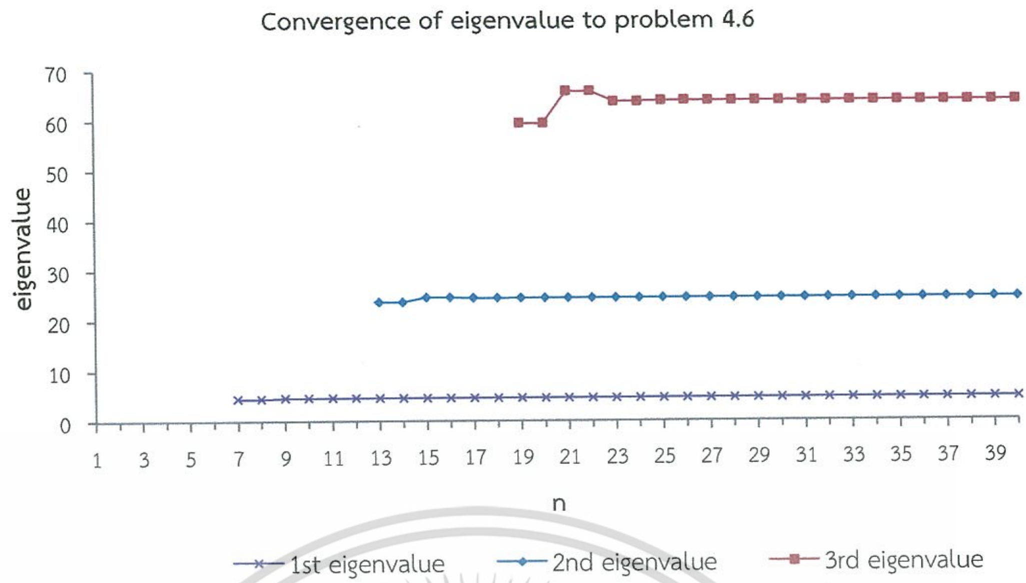
รูปที่ 4.63 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 0.32, 10.26 และ 39.83 ตามลำดับ



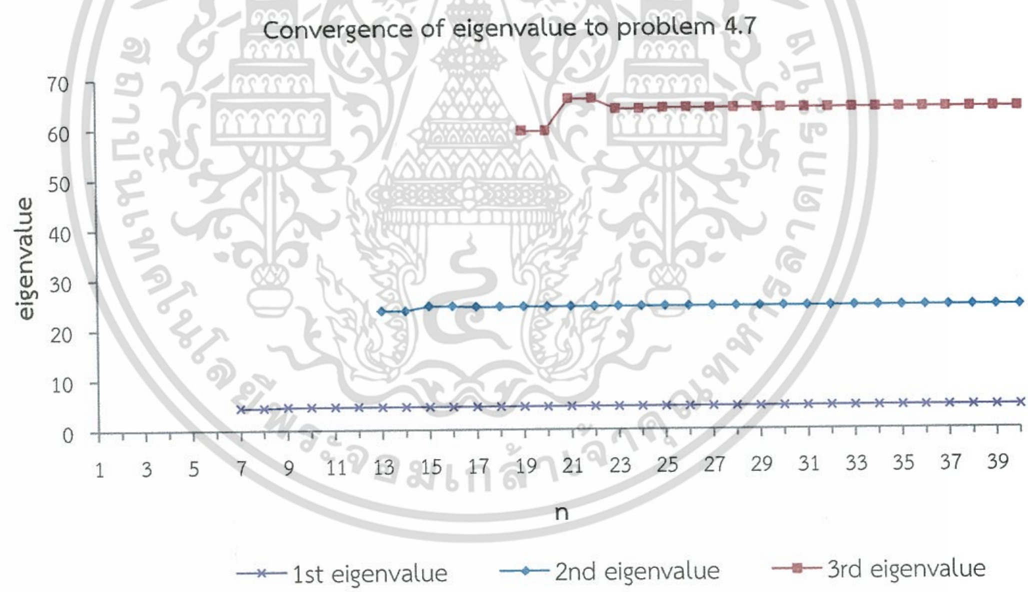
รูปที่ 4.64 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1-\lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.00, 22.56 และ 62.03 ตามลำดับ



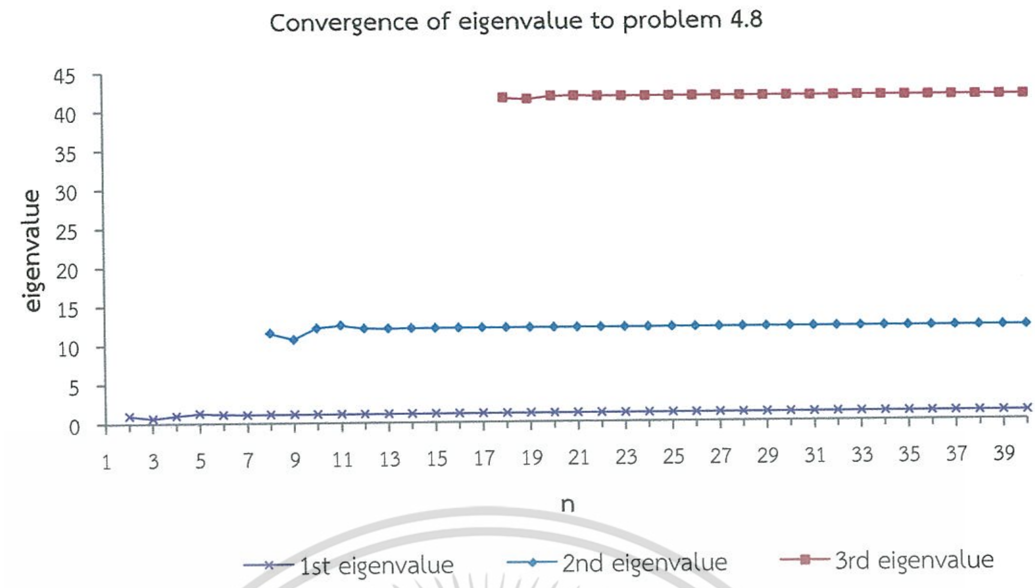
รูปที่ 4.65 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1-\lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.69, 18.06 และ 48.93 ตามลำดับ



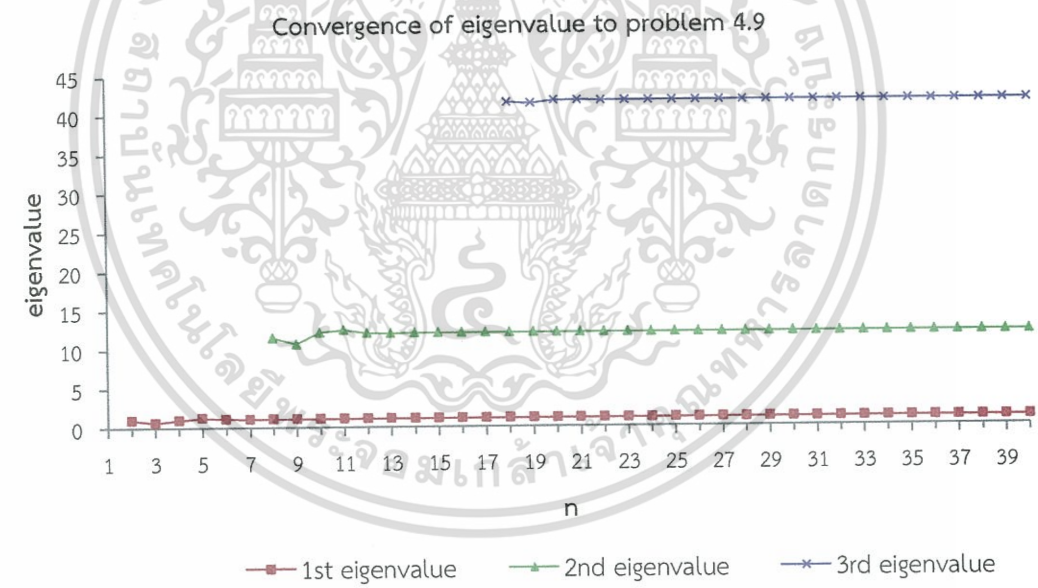
รูปที่ 4.66 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 4.60, 24.52 และ 64.01 ตามลำดับ



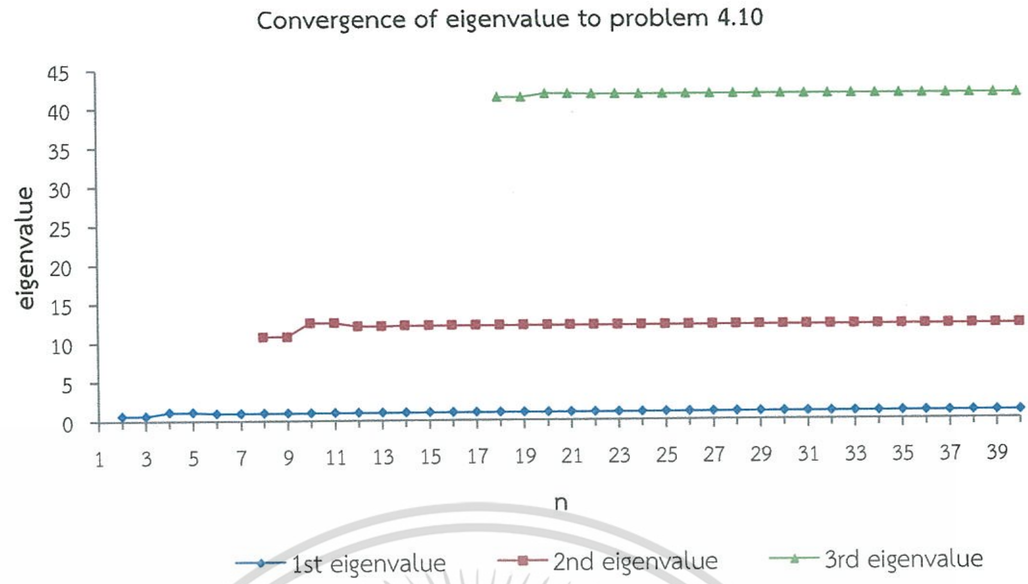
รูปที่ 4.67 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 4.60, 24.52 และ 64.01 ตามลำดับ



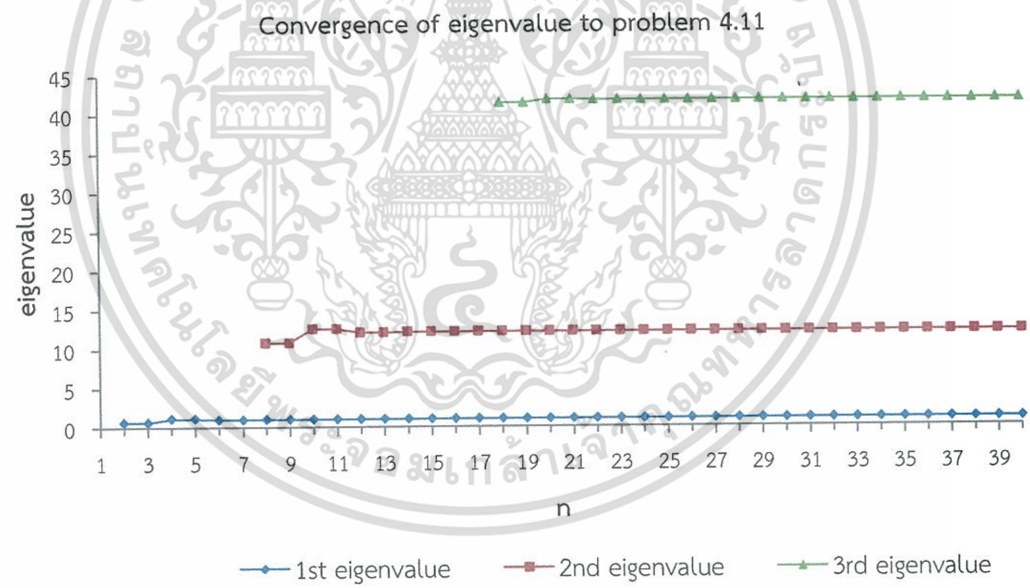
รูปที่ 4.68 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.13, 12.09 และ 41.78 ตามลำดับ



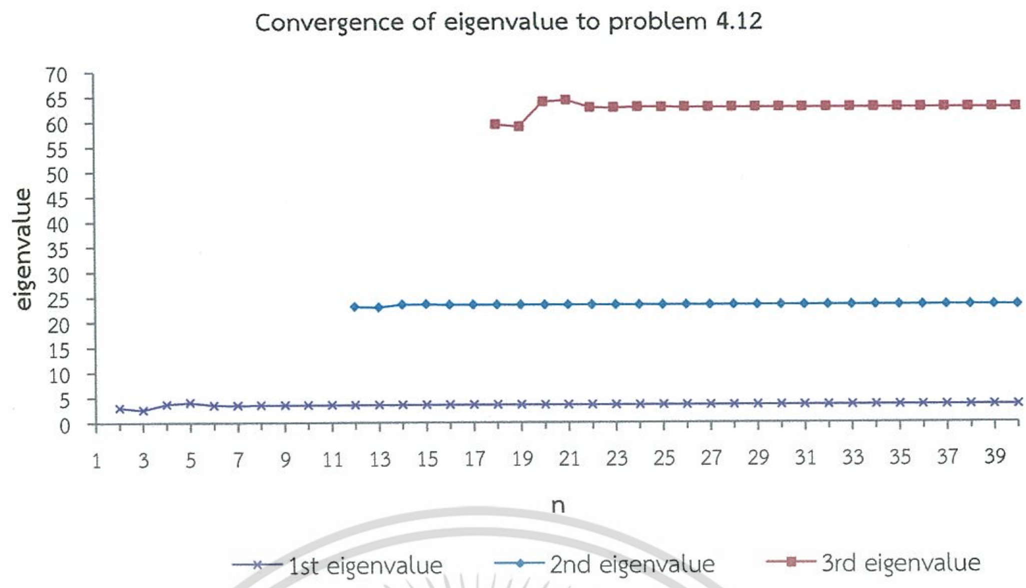
รูปที่ 4.69 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.13, 12.09 และ 41.78 ตามลำดับ



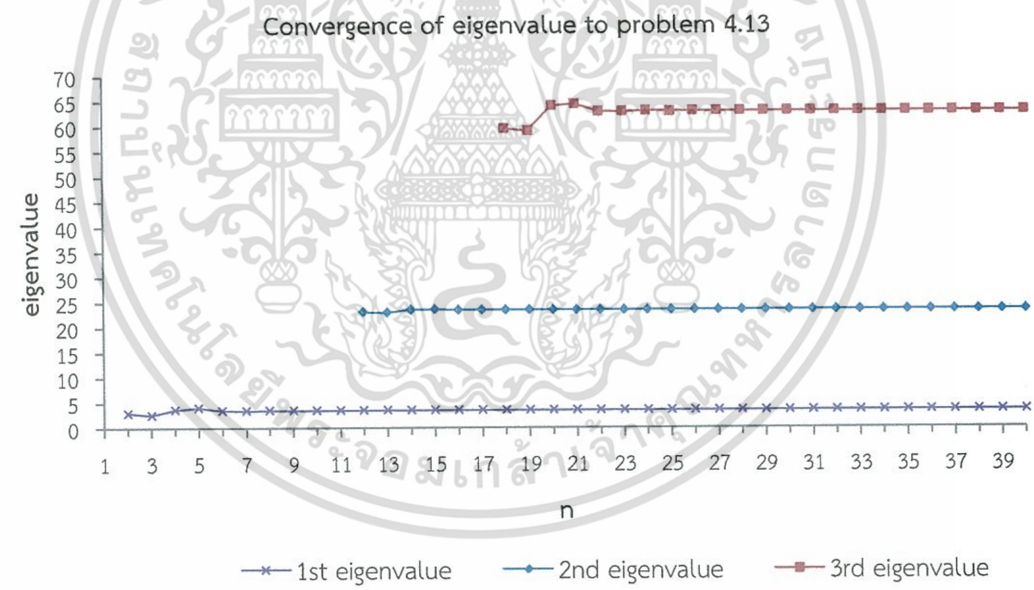
รูปที่ 4.70 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.00, 12.15 และ 41.80 ตามลำดับ



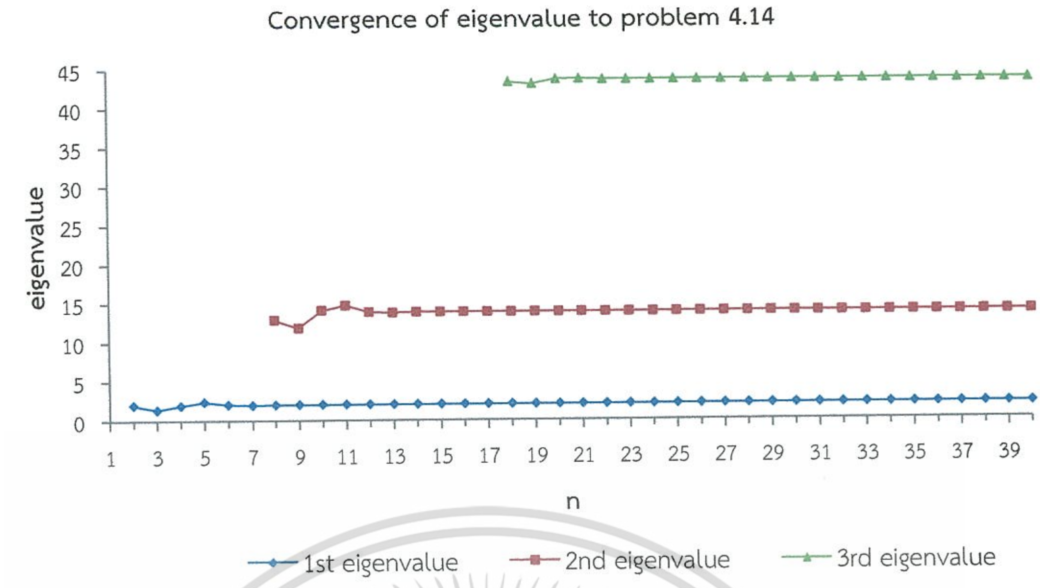
รูปที่ 4.71 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.00, 12.15 และ 41.80 ตามลำดับ



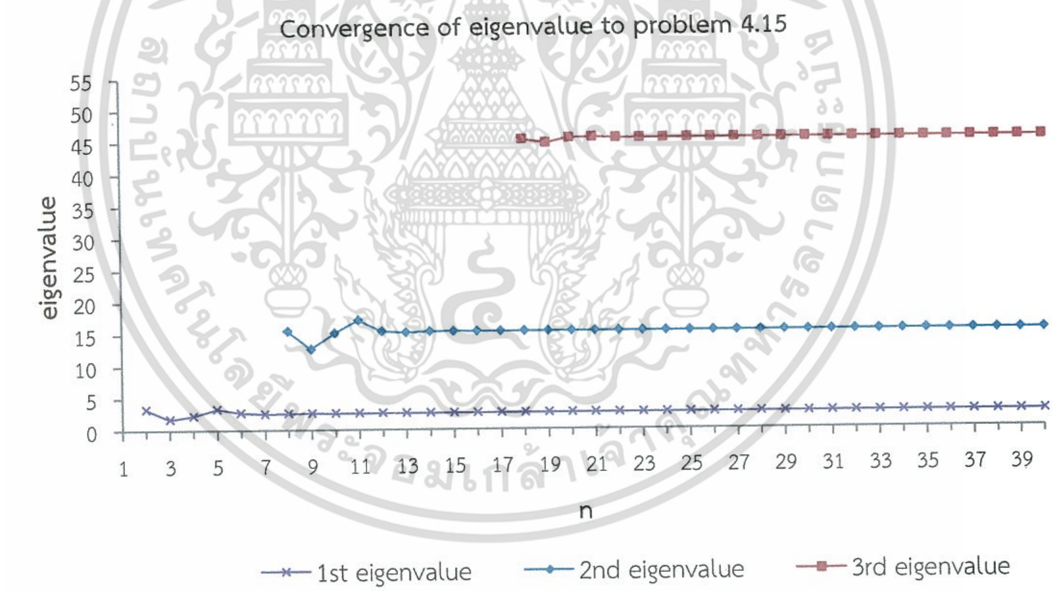
รูปที่ 4.72 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.52, 23.50 และ 63.00 ตามลำดับ



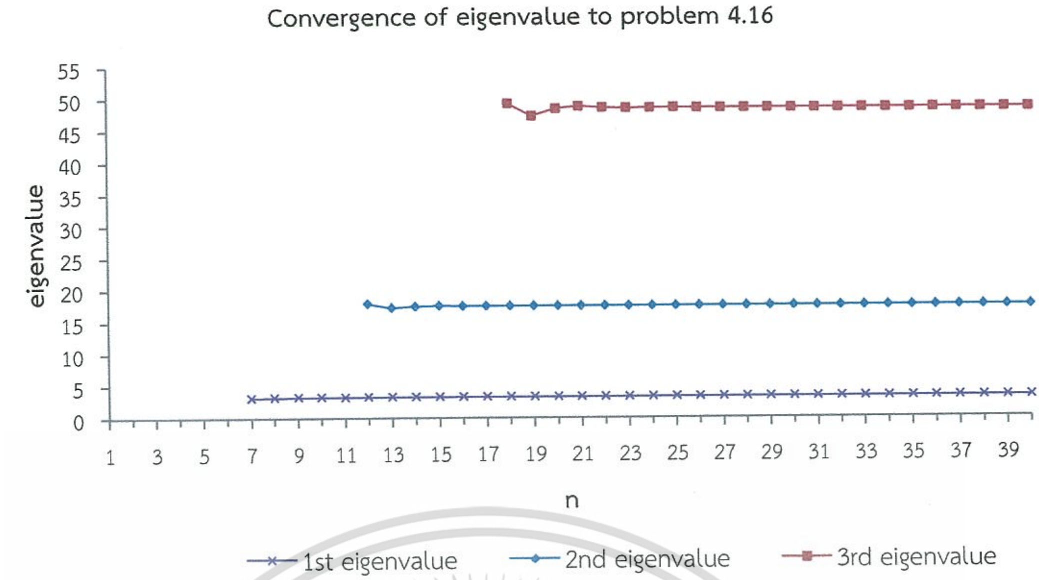
รูปที่ 4.73 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.52, 23.50 และ 63.00 ตามลำดับ



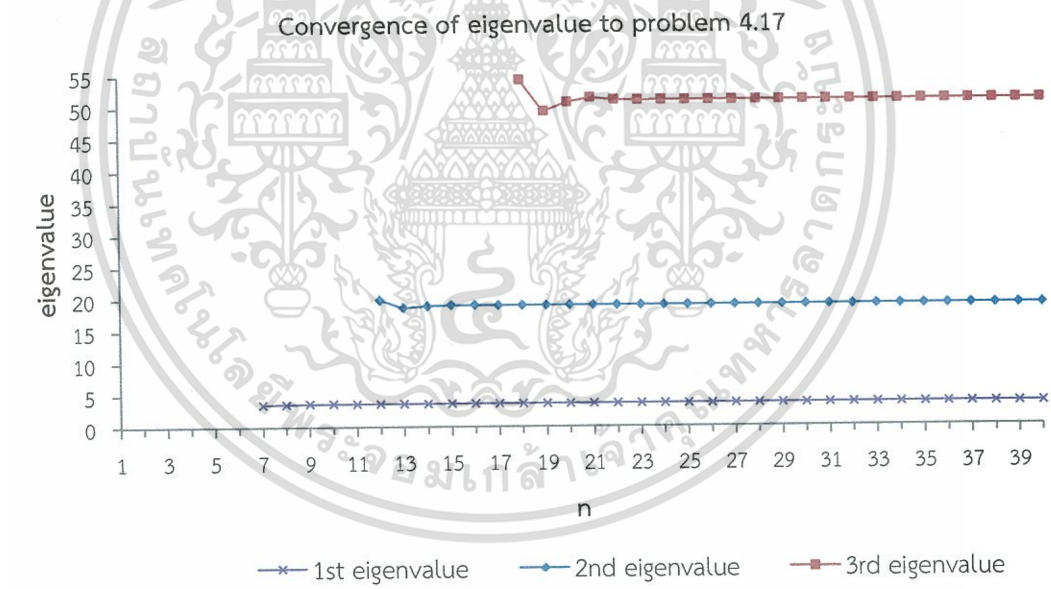
รูปที่ 4.74 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 2.03, 13.88 และ 43.70 ตามลำดับ



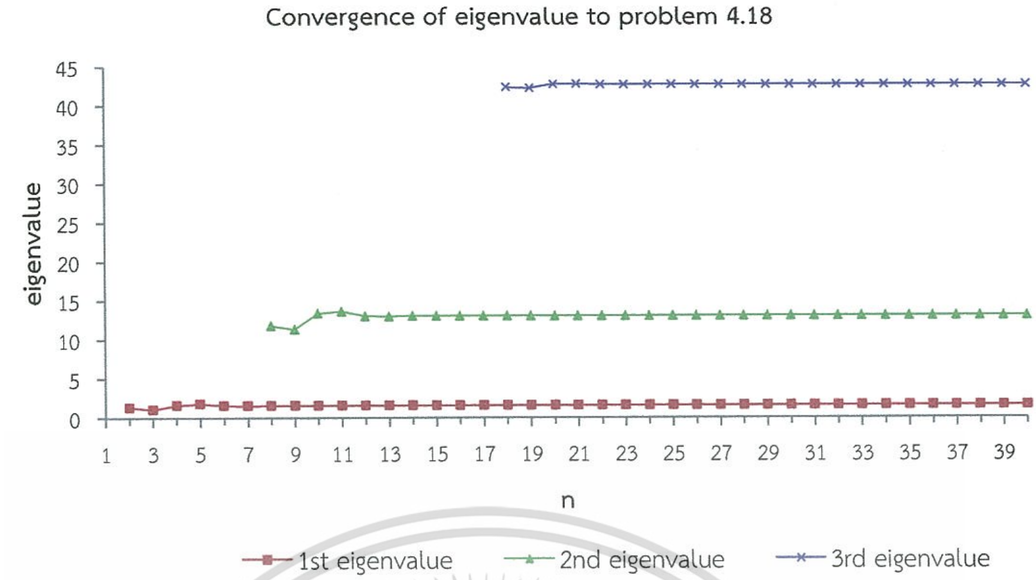
รูปที่ 4.75 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 2.64, 15.35 และ 45.51 ตามลำดับ



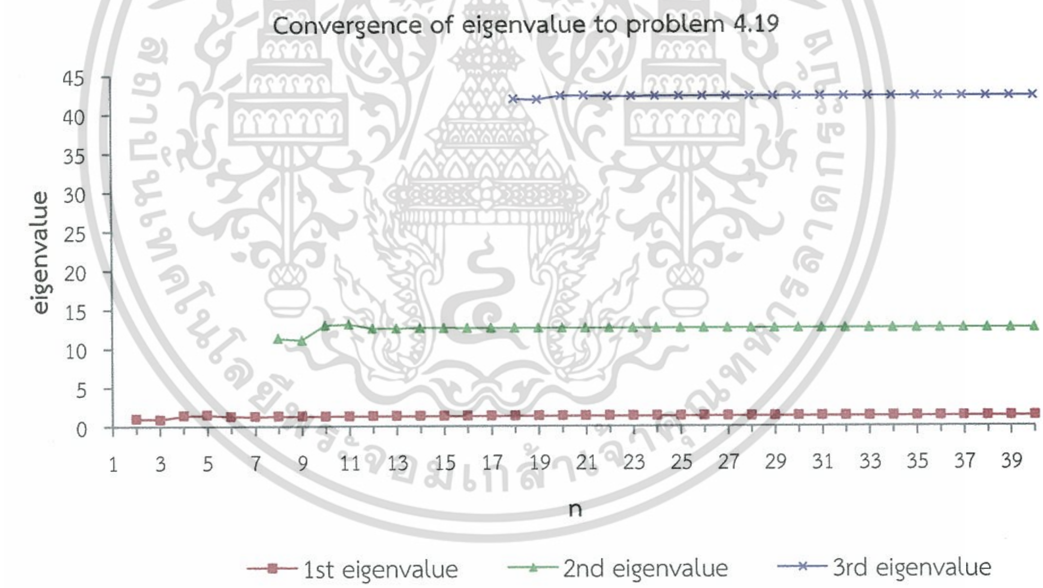
รูปที่ 4.76 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.30, 17.54 และ 48.62 ตามลำดับ



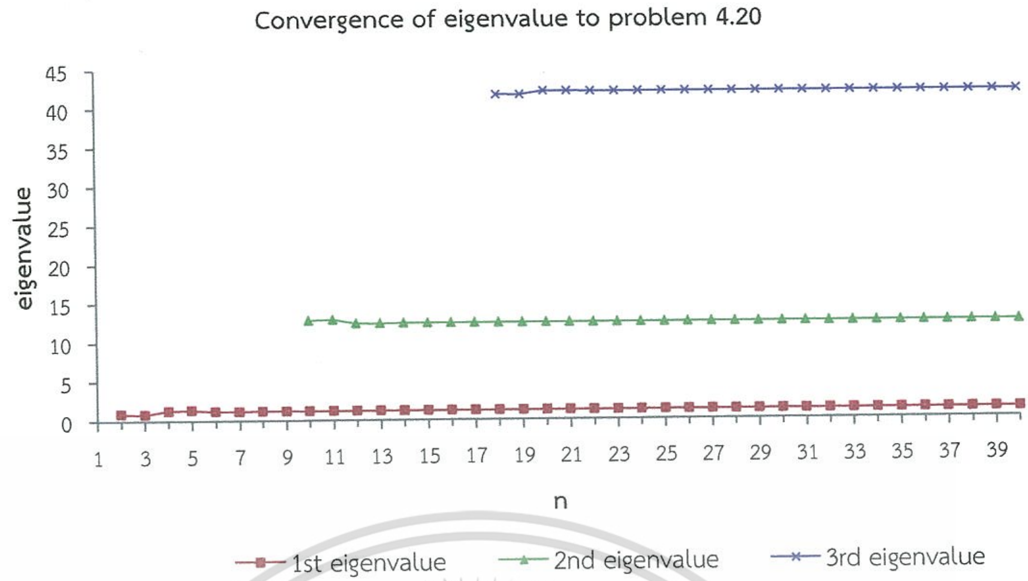
รูปที่ 4.77 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 3.63, 18.98 และ 51.07 ตามลำดับ



รูปที่ 4.78 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.59, 13.04 และ 42.76 ตามลำดับ



รูปที่ 4.79 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.29, 12.55 และ 42.34 ตามลำดับ



รูปที่ 4.80 การลู่เข้าของค่าเจาะจง $\lambda_1 - \lambda_3$ เมื่อค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 ลู่เข้าสู่ค่า 1.21, 12.45 และ 42.12 ตามลำดับ

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าผลเฉลยของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ซึ่งเป็นปัญหาค่าเจาะจงด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ และตัวอย่างของแต่ละปัญหาภายใต้เงื่อนไขขอบที่มีสัมประสิทธิ์แตกต่างกัน ซึ่งจะสามารถสรุปผลการวิจัยได้ ดังนี้

ตารางที่ 5.1 แสดงเงื่อนไขขอบและค่าเจาะจงของตัวอย่างที่ 4.1-4.20

ตัวอย่างที่	เงื่อนไขขอบ	ค่าเจาะจงค่าที่ 1 (λ_1)	ค่าเจาะจงค่าที่ 2 (λ_2)	ค่าเจาะจงค่าที่ 3 (λ_3)
4.1	$y'(0)=0$ $y(1)=0$	2.60	22.52	62.01
4.2	$y(0)=0$ $y(1)=0$	10.15	39.80	89.15
4.3	$y'(0)=0$ $y'(1)=0$	0.32	10.26	39.83
4.4	$y(0)=0$ $y'(1)=0$	3.00	22.56	62.03
4.5	$2y(0)-y'(0)=0$ $3y(1)+y'(1)=0$	3.69	18.06	48.93
4.6	$y(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	4.60	24.52	64.01
4.7	$3y(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	4.60	24.52	64.01
4.8	$y(0)-y'(0)=0$ $y'(1)=0$	1.13	12.09	41.78
4.9	$y(0)-y'(0)=0$ $3y'(1)=0$	1.13	12.09	41.78
4.10	$y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	1.00	12.15	41.80
4.11	$9y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	1.00	12.15	41.80

ตารางที่ 5.1 (ต่อ) แสดงเงื่อนไขขอบและค่าเจาะจงของตัวอย่างที่ 4.1-4.20

ตัวอย่างที่	เงื่อนไขขอบ	ค่าเจาะจงค่าที่ 1 (λ_1)	ค่าเจาะจงค่าที่ 2 (λ_2)	ค่าเจาะจงค่าที่ 3 (λ_3)
4.12	$y(0)-2y'(0)=0$ $5y(1)=0$	3.52	23.50	63.00
4.13	$y(0)-2y'(0)=0$ $2y(1)=0$	3.52	23.50	63.00
4.14	$y(0)-y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	2.03	13.88	43.70
4.15	$2y(0)-y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	2.64	15.35	45.51
4.16	$4y(0)-y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	3.30	17.54	48.62
4.17	$6y(0)-y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	3.63	18.98	51.07
4.18	$y(0)-2y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	1.59	13.04	42.76
4.19	$y(0)-4y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	1.29	12.55	42.34
4.20	$y(0)-6y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	1.21	12.45	42.12

เงื่อนไขขอบ :

$\alpha_1 y(0)-\beta_1 y'(0)=0$

$\alpha_2 y(1)+\beta_2 y'(1)=0$

จากตัวอย่างที่ 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 และ 4.5 จะเห็นได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\alpha_1 \neq 0$ และ $\beta_1 = 0$ จะทำให้ $Y(2k)=0, k=1,2,3,\ldots$ และเมื่อแสดงฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน บรรทัดฐาน $\hat{y}(x)$ ในรูปกราฟ ฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานจะมีค่าเริ่มต้นที่จุด (0,0) เมื่อกำหนดให้ $\alpha_1 = 0$ และ $\beta_1 \neq 0$ จะทำให้ $Y(2k+1)=0, k=1,2,3,\ldots$ และเมื่อแสดงฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน ในรูปกราฟฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน $\hat{y}(x)$ จะไม่เริ่มต้นที่จุด (0,0) เช่นเดียวกับกรณีที่กำหนดให้ $\alpha_1 \neq 0$ และ $\beta_1 \neq 0$ จะทำให้สามารถหาค่า $Y(k)$ ได้ทุกค่า และค่าเจาะจงกับฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานของแต่ละตัวอย่างมีค่าแตกต่างกันไป

จากตัวอย่างที่ 4.6 และ 4.7 จะเห็นได้ว่า เมื่อ α_1 มีค่าไม่เท่ากัน, $\beta_1 = 0$ และ α_2, β_2 มีค่าเท่ากัน พบว่าค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานของทั้งสองตัวอย่างเท่ากัน และเมื่อ α_1 มากขึ้นหรือลดลงก็ไม่ส่งผลต่อค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน

จากตัวอย่างที่ 4.8 และ 4.9 จะเห็นได้ว่า เมื่อ α_1 และ β_1 มีค่าเท่ากัน, $\alpha_2 = 0$ และ β_2 มีค่าไม่เท่ากัน พบว่าค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานของทั้งสองตัวอย่างเท่ากัน และเมื่อ β_2 มากขึ้นหรือลดลงก็ไม่ส่งผลต่อค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน

จากตัวอย่างที่ 4.10 และ 4.11 จะเห็นได้ว่า เมื่อ $\alpha_1 = 0$, β_1 มีค่าไม่เท่ากัน และ α_2, β_2 มีค่าเท่ากัน พบว่าค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานของทั้งสองตัวอย่างเท่ากัน และเมื่อ β_1 มากขึ้นหรือลดลงก็ไม่ส่งผลต่อค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน

จากตัวอย่างที่ 4.12 และ 4.13 จะเห็นได้ว่า เมื่อ α_1 และ β_1 มีค่าเท่ากัน, α_2 มีค่าไม่เท่ากัน และ $\beta_2 = 0$ ดังนั้น จึงทำให้ได้ค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานของทั้งสองตัวอย่างเท่ากัน และเมื่อ α_2 มากขึ้นหรือลดลงก็ไม่ส่งผลต่อค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน

จากตัวอย่างที่ 4.14, 4.15, 4.16 และ 4.17 จะเห็นได้ว่า เมื่อ α_1 มีค่าไม่เท่ากัน และ β_1, α_2, β_2 มีค่าเท่ากัน พบว่าค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานของทั้งสองตัวอย่างมีค่าที่แตกต่างกันไป และเมื่อ α_1 มีค่ามากขึ้น ค่าเจาะจงจะมีค่ามากขึ้นเช่นกัน

จากตัวอย่างที่ 4.14, 4.18, 4.19 และ 4.20 จะเห็นได้ว่า เมื่อ β_1 มีค่าไม่เท่ากัน และ α_1, α_2, β_2 มีค่าเท่ากัน พบว่าค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานของทั้งสองตัวอย่างมีค่าที่แตกต่างกันไป และเมื่อ β_1 มีค่ามากขึ้น ค่าเจาะจงจะมีค่าน้อยลง

จากกราฟการลู่เข้าของค่าเจาะจงในบทที่ 4 จะเห็นว่า ค่าเจาะจง λ_1, λ_2 และ λ_3 จะค่อยๆ ลู่เข้าสู่ค่าค่าหนึ่ง นั่นคือ เมื่อ n มากขึ้นจะทำให้ค่าเจาะจงมีค่าใกล้เคียงกันมาก และเมื่อ $\left|\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(n-1)}\right| \le \xi$ จะได้ว่าค่าเจาะจงลำดับที่ n ที่มีความแม่นยำ โดยที่ $\xi = 0.01$

จากตัวอย่างทั้งหมดเราพบว่าวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์เป็นวิธีที่ง่าย มีขั้นตอนที่แน่นอน และได้ผลเฉลยที่มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ซึ่งสามารถแสดงฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐานและค่าเจาะจงในรูปของกราฟ

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาที่เราได้ดำเนินการแล้วนั้น เราสามารถสรุปปัญหาที่เกิดขึ้นและข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษาต่อในงานนี้ ดังต่อไปนี้

1. วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นอกจากจะใช้กับปัญหาสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสมการอื่นๆ ที่อยู่ในคลาสของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์
2. เนื่องจากนิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่เราศึกษาจะพิจารณากรณีที่ $x = 0$ เท่านั้น แต่ในบางปัญหาอาจจะต้องใช้วิธีนี้ในกรณีที่ $x_0 \ne 0$ ด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] J.K. Zhou. 1986. **Differential transformation and its application for electrical circuits.** Wuuhahn, China : Huarjung University Press (in Chinese)

[2] C.K. Chen, S.H. Ho. 1996. **Application of differential transformation to eigenvalue problems.** Appl. Math. Comput., 79, p. 173–188

[3] I.H. Abdel-Halim Hassan. 2002. **On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation.** Appl. Math. Comput., 127, p. 1–22

[4] พรชัย สาตรวาหา. 2550. **สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations).** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : พิทักษ์การพิมพ์.

[5] **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.** มปป. ฟิสิกส์ราชมงคล. [Online]. Available: http://www.neutron.rmutphysics.com/physicsboard/forum/index.php?action=dlattach;topic=803.0;attach=3725. เข้าถึงเมื่อวันที่ 18 ต.ค. 2558.

[6] บุญญาพร เกิดผล. 2558. **ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Approximated Solutions of Bessel's Equation and Legendre's Equation by Differential Transform Method).** กรุงเทพฯ : สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[7] Shi Hai Dong, Alwyn Van Der Merwe (eds.). 2007. **Harmonic Oscillator; In, Factorization Method in Quantum Mechanics.** Netherlands: Springer. p. 35-37.

[8] R. M. Eisberg. 1959. **Fundamentals of Modern Physics.** New York : John Wiley and Sons, Inc.

[9] David Sherrill. 2006. **The Time-Dependent Schrödinger Equation.** [Online]. Available: http://vergil.chemistry.gatech.edu/notes/quantrev/node9.html. เข้าถึงเมื่อวันที่ 3 เม.ย. 2559.