

# การวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนที่มี ความสมมาตรรอบแกนด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

## Analysis of Axisymmetric Heat Conduction Problems Using Finite Element Method

ภาสกร เวสสะโกศล<sup>1</sup>      จารุวัตร เจริญสุข<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

<sup>2</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

### บทคัดย่อ

การวิเคราะห์ปัญหาทางความร้อนภายในวัตถุที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกนำเสนอไว้ในบทความนี้ วิธีการที่ใช้ในการหาค่าการกระจายอุณหภูมิในของแข็งคือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีพื้นฐานมาจากเอลิเมนต์รูปร่างสามเหลี่ยม วิธีการคำนวณเชิงเลขนี้ที่เหมาะสมสำหรับความหลากหลายของเงื่อนไขขอบเขตและรูปร่างมากกว่าวิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์ การประเมินความแม่นยำของวิธีคำนวณปัจจุบันกระทำโดยการเปรียบเทียบกับการคำนวณจากวิธีเชิงวิเคราะห์หรือผลการคำนวณจากโปรแกรมสำเร็จรูปในปัญหาทดสอบเดียวกัน จำนวนปัญหาทดสอบในบทความนี้คือสามปัญหา ได้แก่ แท่งทรงกระบอกตันที่สามารถผลิตความร้อนได้ แท่งทรงกระบอกสองชั้นและแท่งทรงกระบอกกลวงที่ไม่มีแหล่งผลิตความร้อนแต่มีฟลักซ์ความร้อนที่ผนังด้านใน

คำสำคัญ: วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, วัตถุรูปร่างสมมาตรรอบแกน, การนำความร้อน

### Abstract

Heat transfer analysis for axisymmetric solid by using the finite element method is presented in this article. The method used to find the temperature distribution in solid is the Finite Element Method based on triangular element. This numerical method is more suitable than the analytical method in dealing with various types of boundary conditions and various shapes of solid. The accuracy of present method is assessed by comparing the calculation results of present method with the results from analytical method or commercial. Three test problems are presented in this article, namely the solid cylinder with uniform heat generation, the fuel cladding composite and the hollow cylinder with heat flux on inner surface.

**Keywords :** Finite element method, Axisymmetric solid, Heat conduction

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 1. บทนำ

ความต้องการในการพัฒนาวิธีคำนวณเชิงตัวเลขที่มีความแม่นยำและรวดเร็วสำหรับการจำลองระบบกายภาพเช่น ความแข็งแรงของโครงสร้างอาคารเมื่อได้รับภาระทางกล และภาระทางความร้อน การออกแบบของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ใช้งานด้านการแพทย์ การไหลของอากาศผ่านอากาศยาน การระบายอากาศและความร้อนในที่พักอาศัย เป็นต้น เป็นสิ่งที่ได้รับความสนใจทั้งในสังคมของนักคณิตศาสตร์ วิศวกร และผู้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยเหลืองานด้านวิศวกรรมนับตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน

ตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา วิธีคำนวณเชิงตัวเลขได้รับการคิดค้นและเพิ่มสมรรถนะให้สูงขึ้นเรื่อยๆ เริ่มต้นจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method) ซึ่งใช้ได้สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างสอดคล้องกับระบบพิกัดแต่มีข้อจำกัดค่อนข้างมากหากปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนหรือรูปร่างที่ไม่สอดคล้องกับระบบพิกัดนั่นเองเช่น ถ้าใช้ระบบพิกัดฉากสองมิติ  $(x - y)$  รูปร่างที่เหมาะสมที่สุดกับวิธี Finite Difference Method คือรูปร่างสี่เหลี่ยมเพราะจุดกริดอยู่บนแนวเส้นที่กำหนดโดยพิกัด  $x$  และ  $y$  ด้วยเหตุนี้จึงเกิดการพัฒนาคิดค้นวิธีคำนวณที่สามารถเอาชนะข้อจำกัดนี้เช่น วิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) ซึ่งมีจุดเริ่มต้นมาจากปัญหาด้านพลศาสตร์ของไหลและการถ่ายเทความร้อน วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ซึ่งเริ่มต้นมาจากปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็ง

ทางผู้วิจัยต้องการนำเสนอทฤษฎีของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็งสามมิติที่มีความสมมาตรรอบแกน [1, 2] ซึ่งถือว่าสามารถหาคำตอบได้ง่ายกว่าและรวดเร็วกว่าการคำนวณแบบสามมิติจริงๆ การศึกษาถูกจำกัดอยู่ที่ปัญหาที่สภาวะคงตัวหรือปัญหาที่อุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาซึ่งสมการบังคับและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาจะกล่าวไว้ในหัวข้อที่ 2 สมการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อยู่ในหัวข้อที่ 3 ได้มาจากหลักการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของการ์เลอคิน เอลิเมนต์ที่เลือกใช้เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อที่มีจำนวนตัวแปรน้อยที่สุดในการหนึ่งเอลิเมนต์ทำให้ง่ายต่อการตรวจสอบ

ความถูกต้องของการคำนวณแต่มีความแม่นยำน้อยกว่า เอลิเมนต์อันดับสูง หัวข้อที่ 4 เป็นหัวข้อเกี่ยวกับการทดสอบผลการคำนวณที่ได้จากวิธีปัจจุบันกับกับผลการคำนวณจากวิธีเชิงวิเคราะห์ และคำตอบจากโปรแกรมสำเร็จรูป หัวข้อสุดท้ายนำเสนอทศรูปของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมา

## 2. สมการบังคับของปัญหาการนำความร้อน

พิจารณาของแข็งที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกน

$z$  ดังรูปที่ 1 สมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ การกระจายอุณหภูมิในระนาบ  $r - z$  ที่มีโมดูลุมหนึ่งของแกนสมมาตรสามารถแทนการกระจายอุณหภูมิของแข็งที่ระนาบของมุมอื่นๆรอบแกนสมมาตรได้ทั้งหมดเพราะเป็นคำตอบเดียวกัน ในบทความนี้พิจารณาเฉพาะของแข็งที่มี คุณสมบัติเชิงความร้อนแบบไอโซทรอปิก (Isotropic) เท่านั้น ดังนั้นสมการของปัญหาการนำความร้อน สำหรับแบบจำลองสมมาตรรอบแกนที่สภาวะคงตัวคือ [3]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q} = 0 \quad (1)$$

โดย  $\dot{Q}$  คืออัตราการผลิตความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัตถุ  $T$  คืออุณหภูมิ  $k$  คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของแข็งซึ่งในบทความนี้ยังไม่พิจารณาคูสมบัติของวัตถุที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งและอุณหภูมิ

คำตอบของปัญหาการนำความร้อนคือ อุณหภูมิที่กระจายตามตำแหน่ง  $(r, z)$  ต่างๆภายในของแข็งต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของโดเมน (domain) เงื่อนไขขอบของปัญหาการนำความร้อนทั่วไปแบ่งออกเป็น 3 รูปแบบได้แก่ เงื่อนไขที่ระบุอุณหภูมิ (Dirichlet) บนขอบ  $\Gamma_1$ , เงื่อนไขที่ระบุฟลักซ์ความร้อน (Neumann) บนขอบ  $\Gamma_2$  และเงื่อนไขที่ระบุการพาความร้อน (Robin) บนขอบ  $\Gamma_3$  แสดงอยู่ในสมการที่ (2), (3) และ (4) ตามลำดับ

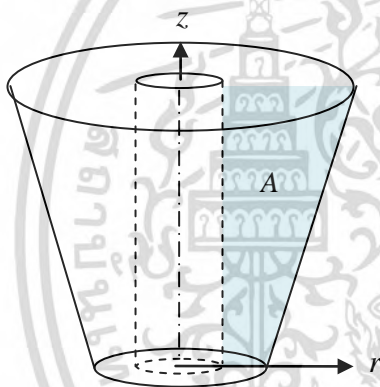
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับการใช้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$T = \bar{T} \tag{2}$$

$$-k \left( \frac{\partial T}{\partial r} n_r + \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) = \bar{q} \tag{3}$$

$$-k \left( \frac{\partial T}{\partial r} n_r + \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) = h(T - T_\infty) \tag{4}$$

โดย  $\bar{T}$  คืออุณหภูมิที่กำหนดขึ้นมา,  $\bar{q}$  คือฟลักซ์ความร้อนที่กำหนดขึ้นมา,  $h$  คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉลี่ยของของไหลที่สัมผัสกับขอบ  $\Gamma_3$ ,  $T_\infty$  คืออุณหภูมิของของไหลที่สัมผัสกับขอบ  $\Gamma_3$ , เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งออกจากขอบของโดเมนมีองค์ประกอบตามแนวรัศมี ( $r$ ) และแนวแกนสมมาตร ( $z$ ) เท่ากับ  $n_r$  และ  $n_z$  ตามลำดับ



รูปที่ 1 การจำลองปัญหาสามมิติด้วยแบบจำลองสองมิติชนิดสมมาตรรอบแกน

ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) สำหรับ node หมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับดังนี้

$$N_1 = (a_1 + b_1 r + c_1 z)/(2A) \tag{6}$$

$$N_2 = (a_2 + b_2 r + c_2 z)/(2A) \tag{7}$$

$$N_3 = (a_3 + b_3 r + c_3 z)/(2A) \tag{8}$$

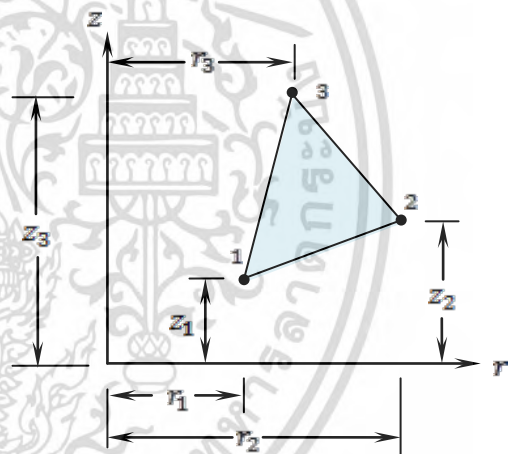
โดย  $A$  คือขนาดของพื้นที่สามเหลี่ยมในขณะที่  $a_1, a_2$  และ  $a_3$  คือตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับพิกัด  $r$  และ  $z$  ของ node ทั้งสามของสามเหลี่ยมดังสมการ

$$a_1 = r_2 z_3 - r_3 z_2, b_1 = z_2 - z_3, c_1 = r_3 - r_2 \tag{9}$$

$$a_2 = r_3 z_1 - r_1 z_3, b_2 = z_3 - z_1, c_2 = r_1 - r_3 \tag{10}$$

$$a_3 = r_1 z_2 - r_2 z_1, b_3 = z_1 - z_2, c_3 = r_2 - r_1 \tag{11}$$

$$2A = (r_2 z_3 - r_3 z_2) + (r_3 z_1 - r_1 z_3) + (r_1 z_2 - r_2 z_1) \tag{12}$$



รูปที่ 2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมชนิดสามจุดต่อ

### 3. วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

#### 3.1 ฟังก์ชันประมาณค่าภายในเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่ใช้ในบทความนี้คือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมชนิดสามจุดต่อ (three-noded triangular element) แสดงอยู่ในรูปที่ 2 เป็นเอลิเมนต์ที่กำหนดให้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์เป็นฟังก์ชันเส้นตรงดังนี้

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 \tag{5}$$

โดย  $T_1, T_2$  และ  $T_3$  คืออุณหภูมิที่ node หมายเลข 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในขณะที่  $N_1, N_2$  และ  $N_3$  คือ

#### 3.2 การสร้างสมการคำนวณ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บนหลักการของกาลเลอร์กิน (Galerkin method) [1, 2] ถูกนำมาใช้เพื่อนำมาหาอุณหภูมิโดยประมาณโดยไม่ใช้การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยเทคนิคต่างๆของแคลคูลัส การหาคำตอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นจากการเลือกใช้อิเล็กเมนต์ในการประมาณค่าเพื่อให้ได้สมการของเอลิเมนต์ ต่อจากนั้นนำสมการของเอลิเมนต์ต่างๆมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นสมการของระบบในรูปแบบของเมทริกซ์และเวกเตอร์ ขั้นตอนต่อไปคือการระบุเงื่อนไขให้กับปัญหาดังสมการที่ (2) ถึง (4) แล้วนำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมตริกซ์และเวกเตอร์ต่างๆที่ได้ทำการระบุเงื่อนไขขอบเขตแล้วไปทำการหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงเมตริกซ์เช่น วิธี Gauss Elimination, LU Decomposition หรือ Gauss Seidel เป็นต้น คำตอบจะนำมาแสดงในรูปของกราฟ  $x - y$  หรือระดับชั้นของอุณหภูมิ (temperature contour) ในลำดับต่อไป รายละเอียดของการสร้างสมการคำนวณไม่สามารถนำมาแสดงได้ทั้งหมด ดังนั้นจึงเลือกนำเสนอเฉพาะสมการอินทิเกรตบนหลักการของกาเลอร์กินและสมการของเอลิเมนต์ดังนี้

$$\int N_1 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q} \right\} 2\pi r dA = 0 \quad (13)$$

$$\int N_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q} \right\} 2\pi r dA = 0 \quad (14)$$

$$\int N_3 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q} \right\} 2\pi r dA = 0 \quad (15)$$

หลังจากใช้ค่าโดยประมาณของอุณหภูมิแทนลงในสมการที่ (13) ถึง (15) ต่อจากนั้นคือการใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) เพื่อสร้างเป็นระบบเมตริกซ์รูปแบบกะทัดรัด (compact form) ดังนี้

$$[k^e] \{T^e\} = \{f^e\} \quad (16)$$

โดย

$$k_{ij}^e = \int \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} k \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) 2\pi r dA + \int h N_i N_j 2\pi r d\Gamma, \quad (i=1,2,3; j=1,2,3) \quad (17)$$

$$f_{ij}^e = \int N_i \dot{Q} 2\pi r dA + \int h N_i N_j 2\pi r d\Gamma + \int \bar{q} N_i 2\pi r d\Gamma, \quad (i=1,2,3; j=1,2,3) \quad (18)$$

$$\{T^e\} = [T_1 \ T_2 \ T_3]^T \quad (19)$$

พจน์ที่มี  $h$  และ  $\bar{q}$  จะถูกนำมาคำนวณเมื่อด้านใดด้านหนึ่งของเอลิเมนต์เป็นขอบเขตโดเมนที่มีการระบุเงื่อนไขการพาความร้อนและฟลักซ์ความร้อนเท่านั้น

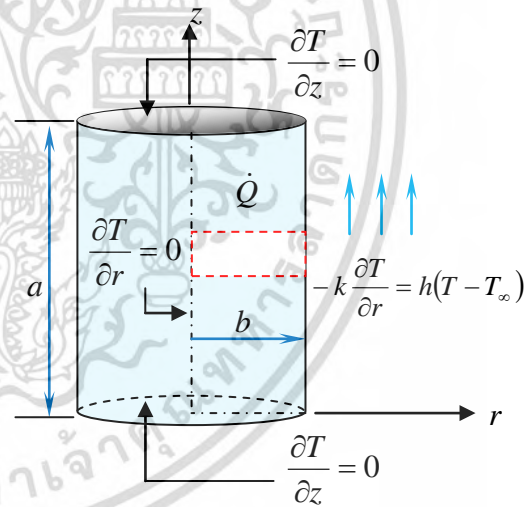
#### 4. การทดสอบ

หลักการทางทฤษฎีในหัวข้อที่ 3 ถูกเปลี่ยนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งพัฒนาขึ้นจากภาษาฟอร์แทรน 90 ให้ชื่อว่า FEM\_AXIS เพื่อให้สามารถคำนวณได้หลายปัญหา

ผ่านทางกรอ่านข้อมูลทางไฟล์นำเข้าที่เป็นไฟล์รหัส ASCII และส่งข้อมูลออกมาทางไฟล์ส่งออกซึ่งเป็นไฟล์รหัส ASCII

#### 4.1 แท่งทรงกระบอกตันที่สามารถผลิตความร้อนได้

โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแสดงอยู่ในรูปที่ 3 (a) กริดที่เลือกใช้คือ grid1 (กริดหยาบ) และ grid2 (กริดที่ละเอียดขึ้น) ดังรูปที่ 3 (b) แท่งทรงกระบอกตันมีรัศมีเท่ากับ  $b = 5\text{ m}$  และความสูงเท่ากับ  $a = 5\text{ m}$  สัมประสิทธิ์การนำความร้อนของแท่งโลหะมีค่าเท่ากับ  $k = 15.1\text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  การผลิตความร้อนด้วยอัตรา  $\dot{Q} = 2.4\text{ W}/\text{m}^3$  เกิดขึ้นในแท่งทรงกระบอก ผิวด้านบนและล่างของทรงกระบอกไม่มีไหลผ่านของความร้อน ผิวด้านข้างของวัสดุมีการพาความร้อนไปสู่ของไหลอุณหภูมิ  $T_\infty = 4^\circ\text{C}$  สัมประสิทธิ์การพาความร้อนคือ  $h = 10\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  รูปที่ 4 แสดงการกระจายอุณหภูมิจาก FEM\_AXIS และวิธีเชิงวิเคราะห์ [3]



(a)

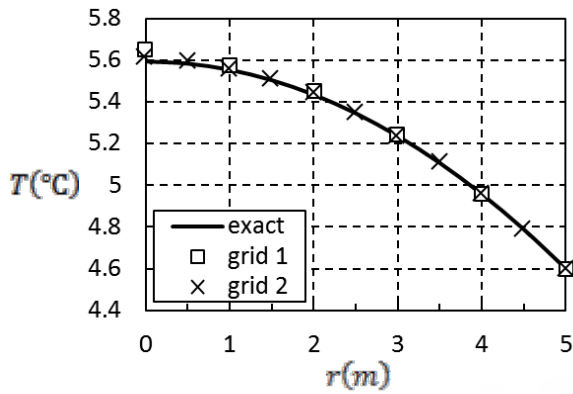


(b)

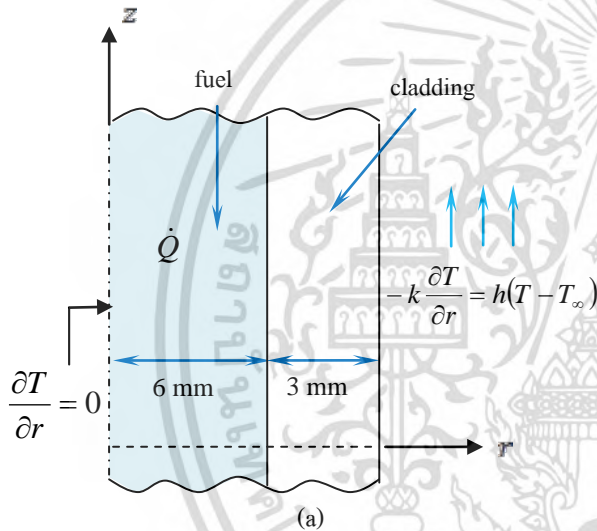
รูปที่ 3 (a) รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่ 1

(b) กริดสามเหลี่ยมที่ใช้ในการคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4 การกระจายอุณหภูมิตามแนวรัศมีของทรงกระบอกตันที่ได้จาก FEM\_AXIS ซึ่งใช้กริดหยาบ (grid1), กริดที่ละเอียดขึ้น (grid2) และคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์



(b)

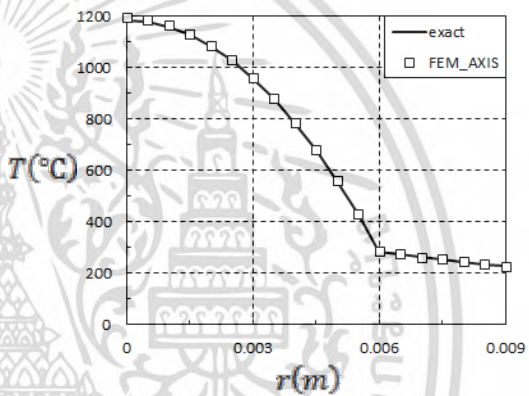
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

รูปที่ 5 (a) รูปร่างและเงื่อนไขขอบของปัญหาที่ 2  
(b) กริดสามเหลี่ยมที่ใช้ในการคำนวณ

4.2 แท่งทรงกระบอกสองชั้น (fuel-cladding composite)

ปัญหานี้เกี่ยวข้องกับแท่งทรงกระบอกที่ซ้อนกันสองชั้น แท่งทรงกระบอกชั้นในคือแท่งทรงกระบอกตันที่ทำจากยูเรเนียมออกไซด์ (UO<sub>2</sub>) เรียกว่า fuel element ขนาดรัศมีเท่ากับ 6 mm มีสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k_f = 2W/(m \cdot ^\circ C)$  อัตราการผลิตความร้อนของ fuel element คือ  $\dot{Q} = 2 \times 10^8 W/m^3$  แท่งทรงกระบอกชั้นนอกที่นำมาหุ้มชื่อว่า cladding ทำจากวัสดุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k_c = 25W/(m \cdot ^\circ C)$  ไม่

สามารถการผลิตความร้อนได้ ความหนาของ cladding คือ 3 mm ผิวด้านบน ( $z = 6m$ ) และผิวด้านล่าง ( $z = 0m$ ) ของทรงกระบอกทั้งสองได้รับการหุ้มฉนวนเป็นอย่างดี ผิวด้านนอกของ cladding สัมผัสกับของไหลที่มีอุณหภูมิ  $T_\infty = 27^\circ C$  และมีสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉลี่ย  $h = 2000W/(m^2 \cdot ^\circ C)$  รูปร่างโดเมนและเงื่อนไขของปัญหาที่ 2 แสดงอยู่ในรูปที่ 5 (a) กริดที่ใช้ในการคำนวณแสดงอยู่ในรูปที่ 5 (b) การกระจายอุณหภูมิจาก FEM\_AXIS ถูกนำมาเปรียบเทียบกับอุณหภูมิที่คำนวณจากวิธีเชิงวิเคราะห์ในรูปที่ 6

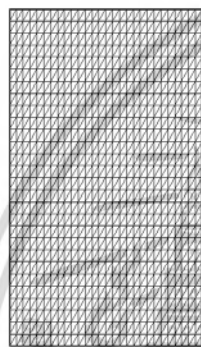
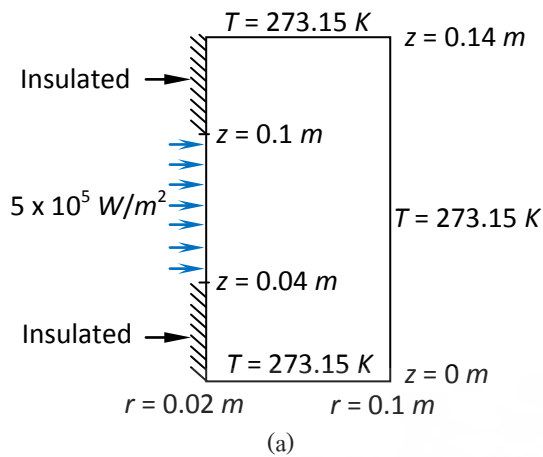


รูปที่ 6 การกระจายอุณหภูมิตามแนวรัศมีของทรงกระบอกซ้อนกันสองชั้นที่ได้จาก FEM\_AXIS และคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

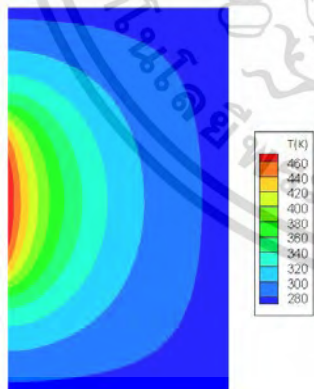
4.3 แท่งทรงกระบอกกลวงไม่มีแหล่งผลิตความร้อนแต่มีฟลักซ์ความร้อนที่ผนังด้านใน

พิจารณาทรงกระบอกกลวง ซึ่งมีขนาดรัศมีด้านในและด้านนอกเท่ากับ 2 cm และ 10 cm ตามลำดับ ขนาดความสูงของทรงกระบอกคือ 14 cm ดังรูปที่ 7 (a) ทรงกระบอกไม่มีการผลิตความร้อน ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุคือ  $k = 52W/(m \cdot K)$  อุณหภูมิที่ผิวด้านนอก ผิวด้านบนและผิวด้านล่างของทรงกระบอกมีค่าคงที่เท่ากับ  $273.15 K$  ผิวด้านในบางส่วนของทรงกระบอกได้รับฟลักซ์ความร้อน  $5 \times 10^5 W/m^2$  ในขณะที่ผิวด้านในบางส่วนได้รับการหุ้มฉนวน จำนวนจุดต่อและเอลิเมนต์ที่ใช้ใน FEM\_AXIS คือ 841 และ 1568 ตามลำดับดังรูปที่ 7 (b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ประกอบการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7 (a) รูปร่างสามมิติ, โดเมนสองมิติที่ใช้ในการจำลอง และเงื่อนไขขอบของปัญหาที่ 3 (b) กริดสามเหลี่ยมที่ใช้ในการคำนวณ



รูปที่ 8 การกระจายอุณหภูมิตามแนวรัศมีของทรงกระบอก กลวงที่ได้จาก FEM\_AXIS

การกระจายอุณหภูมิจาก FEM\_AXIS แสดงอยู่ในรูปที่ 8 อุณหภูมิที่ตำแหน่ง  $r = 0.04 \text{ m}$  และ  $z = 0.04 \text{ m}$  ใช้สำหรับการเปรียบเทียบคำตอบระหว่างโปรแกรม FEM\_AXIS กับโปรแกรม COMSOL [5] ซึ่งใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม และจำนวน node เท่ากับโปรแกรม FEM\_AXIS อุณหภูมิที่ได้จาก FEM\_AXIS คือ  $332.97 \text{ K}$  และอุณหภูมิที่ได้จาก COMSOL คือ  $332.88 \text{ K}$  เห็นได้ว่าอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งดังกล่าวที่ได้จากโปรแกรม FEM\_AXIS ใกล้เคียงกับคำตอบที่ได้จากโปรแกรม COMSOL

## 5. สรุป

บทความนี้อธิบายทฤษฎีและการประยุกต์ใช้การคำนวณเชิงตัวเลขชื่อว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการนำความร้อนชนิดสมมาตรรอบแกน ที่สภาวะคงตัว องค์ประกอบสำคัญของเนื้อหาได้แก่ การนำเสนอเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อเพื่อการคำนวณอย่างง่าย คำอธิบายเกี่ยวกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนการพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การเปรียบเทียบผลการคำนวณกับวิธีอื่น พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำ และเหมาะที่จะใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ ผู้เขียนคาดหวังว่าเนื้อหาในบทความนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัยท่านอื่นที่ต้องการหาคำตอบเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาการนำความร้อนในโดเมนสมมาตรรอบแกนได้โดยไม่ต้องอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูปราคาแพงจากต่างประเทศ อย่างไรก็ตาม การศึกษาในครั้งนี้ไม่ได้สนใจผลกระทบของความไม่แม่นยำเชิงเส้นใดๆ เนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุ เงื่อนไขขอบเขตการศึกษาในครั้งนี้อาจใช้ข้อมูลเบื้องต้นให้กับปัญหาอื่นๆ ได้แก่ ปัญหาการนำความร้อนภายในวัสดุประกอบ (composite material) ที่สภาวะไม่คงตัว ปัญหาเกี่ยวกับพลศาสตร์ของไหลร่วมกับการถ่ายเทความร้อน เป็นต้น

## 6. เอกสารอ้างอิง

- [1] M. J., Fagan, Finite Element Analysis Theory and Practice, Pearson Education Limited, 1992.
- [2] L.J., Segerlind, Applied Finite Element Analysis, Wiley, 1984.

- [3] M.N., Ozisik, Heat Transfer A Basic Approach, McGraw-Hill, 1985.
- [4] F.P., Incropera, and D.P., Dewitt, Fundamental of Heat and Mass Transfer, Wiley, 1996.
- [5] R.W., Pryor, Multiphysics modeling using COMSOL: a first approach, Jones and Barlett Publishers, 2011.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้