# การประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่าง โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง

# Estimation of Probability and Examination of Sample Size using Chebyshev's Inequality and Known Distribution Methods

สายชล สินสมบูรณ์ทอง

Saichon Sinsomboonthong

สาขาวิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ

**บทคัดย่อ**

ในการศึกษาเรื่องการประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง พร้อมทั้งหาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ได้แก่ การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี การแจกแจงแบบทวินาม การแจกแจงแบบปัวส์ซอง การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบแกมม่า การแจกแจงแบบไค-สแควร์ การแจกแจงแบบทีและการแจกแจงแบบเอฟ เป็นต้น โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB version 7.6 ช่วยในการคำนวณ ผลของการศึกษาพบว่าเมื่อ k มีค่าน้อย ๆ (k = 1, 2 และ 3) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก แต่เมื่อ k มีค่าเพิ่ม มากขึ้น (k = 4 และ 5) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น โดยที่ความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟเทียบกับความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก สำหรับ k = 4, 5 ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง นอกจากนี้ ขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากอสมการเชฟบีเชฟจะมากกว่าขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงค่อนข้างมาก ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

**คำสำคัญ :** อสมการเชฟบีเชฟ, ค่าขอบเขตล่าง

**Abstract**

In this study, the estimation of probability and the examination of sample size were carried out using the application of Chebyshev's inequality and known distribution methods. In addition, the comparison of Chebyshev's inequality and known distribution for discrete and continuous distributions, namely Bernoulli, Binomial, Poisson, Exponential, Normal, Gamma, Chi-square, t, and F distributions, were applied for the examination of lower bound error of the probability using MATLAB 7.6 The results demonstrated that when the k value was lower, the lower bound of the Chebyshev's inequality was significantly diffirent from the real probability. on the other hand the lower bound was significantly related to the real probability when the k value was higher (k = 4 and 5). In addition, when comparing to the real probability, the lower bound errors of Chebyshev's inequality decreased drastically when k = 2 and 3, and smaller errors were found when k = 4 and 5 either in discrete or continuous distributions. Moreover, it was found that the sample size calculated by Chebyshev's inequality method was much greater than the one calculated by the real probability either in discrete or continuous distributions

**Keywords :** Chebyshev's inequality , Lower bound

## 1. บทนำ

โดยทั่วไปแล้วเราใช้ความแปรปรวนเป็นเครื่องมือวัดการกระจายของข้อมูล ซึ่งถ้าความแปรปรวนยิ่งมีค่าน้อยเท่าใด ความน่าจะเป็นที่ X แต่ละค่าจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าเฉลี่ยก็จะมากขึ้นเท่านั้น ถ้าทราบว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบใด ก็จะใช้การแจกแจงแบบนั้น ๆ มาคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าต่าง ๆ ได้ แต่ถ้าทราบแต่เพียงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่านั้น แต่ไม่ทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ก็จะไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นของ X ที่ค่าต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง แต่สามารถใช้อสมการเชฟบีเชฟมาประมาณค่าความน่าจะเป็นดังกล่าวได้

อสมการเชฟบีเชฟสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลายอย่าง โดยเฉพาะสามารถใช้หาความน่าจะเป็นที่ค่าของตัวแปรสุ่มใด ๆ จะคลาดเคลื่อนไปจากค่าเฉลี่ย โดยไม่ต้องมีข้อจำกัดว่าตัวแปรสุ่มจะต้องมีการแจกแจงแบบใด และไม่มีความจำเป็นต้องทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้นด้วย ขอเพียงแต่ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มนั้นก็เพียงพอแล้ว แต่ไม่ได้หมายความว่าถ้าทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้นด้วยแล้ว จะใช้อสมการเชฟบีเชฟไม่ได้ การที่ทราบข้อสนเทศเพิ่มเติมเกี่ยวกับตัวแปรสุ่มที่สนใจ จะทำให้การคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นถูกต้องมากยิ่งขึ้น เราควรทราบว่าอสมการเชฟบีเชฟสามารถให้ค่าความน่าจะเป็นได้เพียงค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างเท่านั้น ไม่สามารถให้ค่าที่แน่นอนได้ คำตอบที่ได้จากอสมการเชฟบีเชฟจึงเป็นคำตอบอย่างกว้าง ๆ หรือให้ข้อเท็จจริงได้อย่างกว้าง ๆ เท่านั้น [1]

นอกจากจะใช้อสมการเชฟบีเชฟคำนวณหาค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มใด ๆ จะมีค่าคลาดเคลื่อนไปจากค่าเฉลี่ยแล้ว ยังสามารถใช้อสมการเชฟบีเชฟคำนวณหาขนาดตัวอย่างเพื่อใช้ในการสุ่มตัวอย่างอีกด้วย ขนาดตัวอย่างที่ได้จะอยู่ในรูปของขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างเช่นเดียวกัน แต่ขนาดตัวอย่างที่ได้โดยวิธีนี้ค่อนข้างหยาบ และมีขนาดใหญ่กว่า

ที่คำนวณได้จากวิธีอื่น ๆ เนื่องจากอสมการเชฟบีเชฟให้ค่าต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นค่าของความน่าจะเป็นหรือขนาดตัวอย่าง โดยอาศัยข้อสนเทศจากตัวแปรสุ่มที่ศึกษานั้นค่อนข้างน้อยมาก เมื่อได้รับข้อสนเทศน้อย คำตอบที่ได้จึงเป็นลักษณะกว้าง ๆ ไม่กระชับรัดกุม ไม่ใช่ว่าอสมการเชฟบีเชฟจะใช้ไม่ได้ดี แต่จะใช้ได้ดีก็ต่อเมื่อมีข้อสนเทศของตัวแปรที่สนใจศึกษาค่อนข้างน้อย เมื่อมีข้อสนเทศของตัวแปรที่สนใจศึกษามากขึ้นก็ควรใช้วิธีการอื่นแทน เช่น ทฤษฎีขีดจำกัดสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) [2]

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้ ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะทำการศึกษาถึงการประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง พร้อมทั้งหาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

## 2. วิธีการวิจัย

### 2.1 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่องดังนี้

สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง ศึกษา 3 การแจกแจง คือ

1. การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี
2. การแจกแจงแบบทวินาม
3. การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

สำหรับการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ศึกษา 6 การแจกแจง คือ

1. การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล
2. การแจกแจงแบบปกติ
3. การแจกแจงแบบแกมม่า
4. การแจกแจงแบบไค-สแควร์
5. การแจกแจงแบบที
6. การแจกแจงแบบเอฟ

วิธีการดำเนินงานกระทำได้ดังนี้

1. หาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่องในกรณีที่ $k$ ตั้งแต่ 1 ถึง 10

2. หาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ในกรณีต่อไปนี้

2.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

2.1.1 การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี ศึกษาในกรณีที่ $p = 0.1$ ถึง 0.9 และ $k = 1$ ถึง 5

2.1.2 การแจกแจงแบบทวินาม ศึกษาในกรณีที่ $n = 5, 10, 15, 20$ ; $p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ และ $k = 1$ ถึง 5

2.1.3 การแจกแจงแบบปัวส์ซอง ศึกษาในกรณีที่ $\lambda = 1$ ถึง 10 และ $k = 1$ ถึง 5

2.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

2.2.1 การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ศึกษาในกรณีที่ $k = 1$ ถึง 10

2.2.2 การแจกแจงแบบปกติ ศึกษาในกรณีที่ $k = 1$ ถึง 10

2.2.3 การแจกแจงแบบแกมม่า ศึกษาในกรณีที่ค่า $\alpha$ และ $\beta = 1$ ถึง 5 และ $k = 1$ ถึง 5

2.2.4 การแจกแจงแบบไค-สแควร์ ศึกษาในกรณีที่ $r = 1$ ถึง 5 และ $k = 1$ ถึง 5 โดยที่ $r$ เป็นจำนวนองศาอิสระของการแจกแจง

2.2.5 การแจกแจงแบบที ศึกษาในกรณีที่ $r = 3$ ถึง 7 และ $k = 1$ ถึง 5

2.2.6 การแจกแจงแบบเอฟ ศึกษาในกรณีที่ $r_1 = 1$ ถึง 5 $r_2 = 5, 10, 15, 20$ และ $k = 1$ ถึง 5

3. หาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

4. หาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาขนาดตัวอย่างจากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและแบบต่อเนื่องในกรณีดังนี้

4.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

การแจกแจงแบบทวินาม ศึกษาในกรณีที่ $\varepsilon = 0.01$ ถึง 0.05 และ $\varepsilon = 0.10$ และ $\theta = 0.10$ ถึง 0.90

4.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

การแจกแจงแบบปกติ ศึกษาในกรณีที่ $\varepsilon = \sigma, \dfrac{\sigma}{2}$ ถึง $\dfrac{\sigma}{50}$

**2.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล**

2.2.1 อสมการเชฟบีเชฟ (Chebyshev's inequality) [3]

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย $\mu$ และความแปรปรวน $\sigma^2$ แล้วสำหรับ $t > 0$

$$P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

ถ้าแทน $t = k\sigma$ ในอสมการเชฟบีเชฟ จะได้

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

หรือ $$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

2.2.2 ความคลาดเคลื่อน (Error)

$$\text{ความคลาดเคลื่อน} = \left|\frac{\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}}{\text{ค่าจริง}}\right| \times 100\%$$

2.2.3 การหาขนาดตัวอย่าง (Sample size) [3]

ใช้อสมการเชฟบีเชฟกับ $\overline{X}$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะได้

$$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

หรือ

$$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

## 3. ผลการวิจัย

### 3.1 การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

จากอสมการเชฟบีเชฟ

$$P\left(\left|X - \mu\right| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

**ตารางที่ 3.1** ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟที่ค่า k ตั้งแต่ 1 ถึง 10

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟ | 0 | 0.7500 | 0.8889 | 0.9375 | 0.9600 |
| k | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟ | 0.9722 | 0.9796 | 0.9844 | 0.9877 | 0.99 |

จากตารางที่ 3.1 จะพบว่าค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟที่ค่า k = 1 จะเป็น 0 หลังจากนั้นค่าขอบเขตล่างจะเพิ่มขึ้นอย่างมาก จนถึง k = 5 เป็นต้นไป ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะใกล้เคียง 1

### 3.2 การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นเมื่อทราบการแจกแจงที่แท้จริง

#### 3.2.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

##### 3.2.1.1 การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี

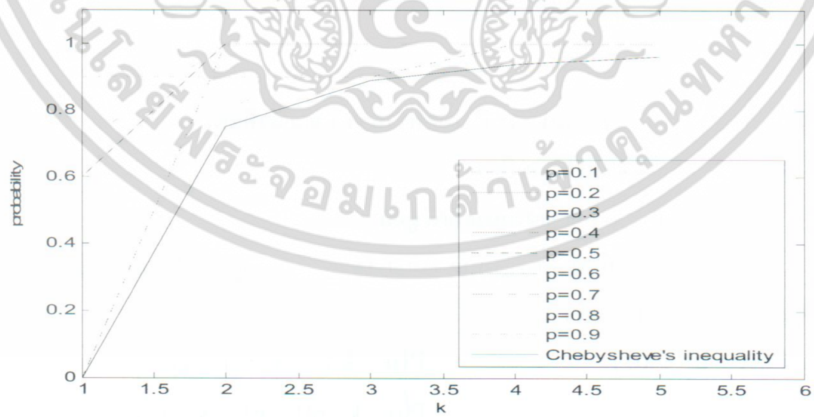
ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีค่าเฉลี่ย $p$ และความแปรปรวน $p(1-p)$ แล้ว

$$\begin{aligned} P\left(\left|X - \mu\right| < k\sigma\right) &= P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \\ &= P\left(p - k\sqrt{p(1-p)} < X < p + k\sqrt{p(1-p)}\right) \end{aligned}$$

**ตารางที่ 3.2** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบเบอร์นูลลีที่ค่า p = 0.1 ถึง 0.9 และ k = 1 ถึง 5

| p | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) | p | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1, 0.9 | 1 | 0.9 | 100.0000 | 0.4, 0.6 | 1 | 0.6 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9 | 16.6667 | | 2 | 1 | 25.0000 |
| | 3 | 0.9 | 1.2333 | | 3 | 1 | 11.1100 |
| | 4 | 1 | 6.2500 | | 4 | 1 | 6.2500 |
| | 5 | 1 | 4.0000 | | 5 | 1 | 4.0000 |
| 0.2, 0.8 | 1 | 0.8 | 100.0000 | 0.5 | 1 | 0 | หาค่าไม่ได้ |
| | 2 | 0.8 | 6.2500 | | 2 | 1 | 25.0000 |
| | 3 | 1 | 11.1100 | | 3 | 1 | 11.1100 |
| | 4 | 1 | 6.2500 | | 4 | 1 | 6.2500 |
| | 5 | 1 | 4.0000 | | 5 | 1 | 4.0000 |
| 0.3, 0.7 | 1 | 0.7 | 100.0000 | | | | |
| | 2 | 1 | 25.0000 | | | | |
| | 3 | 1 | 11.1100 | | | | |
| | 4 | 1 | 6.2500 | | | | |
| | 5 | 1 | 4.0000 | | | | |

จากตารางที่ 3.2 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ p ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 สำหรับ p ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5




**รูปที่ 3.1** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเบอร์นูลลีที่ค่า p = 0.1 ถึง 0.9 และ k = 1 ถึง 5

จากรูปที่ 3.1 จะพบว่าเมื่อ k = 1 ถึง 4 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าต่ำกว่าค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก ยกเว้นที่ p = 0.5 และ k = 1, 2 ซึ่งค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ k > 4 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง

**3.2.1.2 การแจกแจงแบบทวินาม**

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีค่าเฉลี่ย $np$ และความแปรปรวน $np(1-p)$ แล้ว

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$$
$$= P\left(np - k\sqrt{np(1-p)} < X < np + k\sqrt{np(1-p)}\right)$$

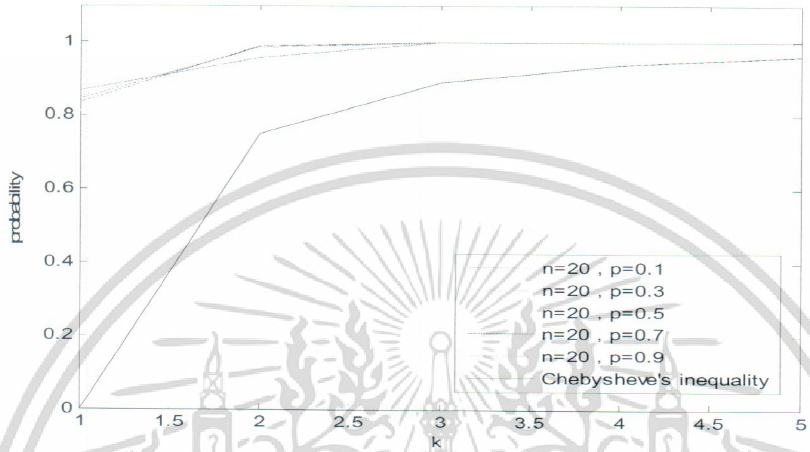
**ตารางที่ 3.3** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบทวินาม ที่ค่า n = 5, 10, 15, 20 p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 และ k = 1 ถึง 5

| n | p | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) | n | p | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.1 | 1 | 0.9185 | 100.0000 | 5 | 0.7 | 1 | 0.8011 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9185 | 18.3487 | | | 2 | 0.9976 | 24.8173 |
| | | 3 | 0.9914 | 10.3425 | | | 3 | 1.0000 | 11.1100 |
| | | 4 | 0.9995 | 6.2069 | | | 4 | 1.0000 | 6.2500 |
| | | 5 | 0.9995 | 3.9558 | | | 5 | 1.0000 | 4.0000 |
| 5 | 0.3 | 1 | 0.8369 | 100.0000 | 5 | 0.9 | 1 | 0.9914 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9692 | 22.6182 | | | 2 | 0.9914 | 24.3525 |
| | | 3 | 0.9976 | 10.8935 | | | 3 | 0.9995 | 11.0691 |
| | | 4 | 1.0000 | 6.2500 | | | 4 | 1.0000 | 6.2491 |
| | | 5 | 1.0000 | 4.0000 | | | 5 | 1.0000 | 3.9990 |
| 5 | 0.5 | 1 | 0.7812 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9687 | 22.5806 | | | | | |
| | | 3 | 1.0000 | 11.1100 | | | | | |
| | | 4 | 1.0000 | 6.2500 | | | | | |
| | | 5 | 1.0000 | 4.0000 | | | | | |
| 10 | 0.1 | 1 | 0.7361 | 100.0000 | 10 | 0.7 | 1 | 0.8033 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9298 | 19.3383 | | | 2 | 0.9612 | 21.9693 |
| | | 3 | 0.9872 | 9.9579 | | | 3 | 0.9999 | 11.0972 |
| | | 4 | 0.9984 | 6.0965 | | | 4 | 1.0000 | 6.2494 |
| | | 5 | 0.9999 | 3.9859 | | | 5 | 1.0000 | 4.0000 |
| 10 | 0.3 | 1 | 0.8215 | 100.0000 | | 0.9 | 1 | 0.5811 | 100.0000 |

**ตารางที่ 3.3 (ต่อ)**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 0.9527 | 21.2723 | 1 | | 2 | 0.9872 | 24.0279 |
| | | 3 | 0.9984 | 10.9684 | 0 | | 3 | 0.9984 | 10.9644 |
| | | 4 | 0.9999 | 6.2365 | | | 4 | 0.9999 | 6.2362 |
| | | 5 | 1.0000 | 4.0000 | | | 5 | 1.0000 | 3.9991 |
| 10 | 0.5 | 1 | 0.7734 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9883 | 24.1107 | | | | | |
| | | 3 | 0.9990 | 11.0231 | | | | | |
| | | 4 | 1.0000 | 6.2500 | | | | | |
| | | 5 | 1.0000 | 4.0000 | | | | | |
| 15 | 0.1 | 1 | 0.8159 | 100.0000 | 1 | 0.7 | 1 | 0.8232 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9444 | 20.5882 | 5 | | 2 | 0.9916 | 24.3647 |
| | | 3 | 0.9873 | 9.9647 | | | 3 | 0.9993 | 11.0502 |
| | | 4 | 0.9997 | 6.2209 | | | 4 | 1.0000 | 6.2492 |
| | | 5 | 1.0000 | 3.9968 | | | 5 | 1.0000 | 4.0000 |
| 15 | 0.3 | 1 | 0.8336 | 100.0000 | 1 | 0.9 | 1 | 0.7386 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9848 | 23.8391 | 5 | | 2 | 0.9873 | 24.0337 |
| | | 3 | 0.9963 | 10.7841 | | | 3 | 0.9978 | 10.9096 |
| | | 4 | 0.9999 | 6.2414 | | | 4 | 1.0000 | 6.2468 |
| | | 5 | 1.0000 | 4.0000 | | | 5 | 1.0000 | 3.9997 |
| 15 | 0.5 | 1 | 0.7899 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9787 | 23.3700 | | | | | |
| | | 3 | 0.9995 | 11.0639 | | | | | |
| | | 4 | 1.0000 | 6.2500 | | | | | |
| | | 5 | 1.0000 | 4.0000 | | | | | |
| 20 | 0.1 | 1 | 0.8670 | 100.0000 | 2 | 0.7 | 1 | 0.8450 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9568 | 21.6158 | 0 | | 2 | 0.9872 | 24.0294 |
| | | 3 | 0.9976 | 10.8974 | | | 3 | 0.9997 | 11.0868 |
| | | 4 | 0.9996 | 6.2110 | | | 4 | 1.0000 | 6.2495 |
| | | 5 | 0.9999 | 3.9943 | | | 5 | 1.0000 | 4.0000 |
| 20 | 0.3 | 1 | 0.8512 | 100.0000 | | 0.9 | 1 | 0.8352 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9821 | 23.6297 | 2 | | 2 | 0.9887 | 24.1464 |
| | | 3 | 0.9987 | 10.9962 | 0 | | 3 | 0.9996 | 11.0730 |
| | | 4 | 1.0000 | 6.2460 | | | 4 | 0.9999 | 6.2444 |
| | | 5 | 1.0000 | 3.9999 | | | 5 | 1.0000 | 3.9993 |
| 20 | 0.5 | 1 | 0.8108 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9734 | 22.9502 | | | | | |
| | | 3 | 0.9985 | 10.9774 | | | | | |
| | | 4 | 1.0000 | 6.2480 | | | | | |
| | | 5 | 1.0000 | 4.0000 | | | | | |

จากตารางที่ 3.3 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ p ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 สำหรับ p ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5




**รูปที่ 3.2** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริงสำหรับการแจกแจงแบบทวินามที่ n = 20 และ p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9

จากรูปที่ 3.2 จะพบว่าที่ k = 1 ถึง 3 และ p = 0.1 ถึง 0.9 เมื่อ n มีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่าที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น และเมื่อ k = 1 ถึง 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก แต่เมื่อ k > 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

**3.2.1.3 การแจกแจงแบบปัวส์ซอง**

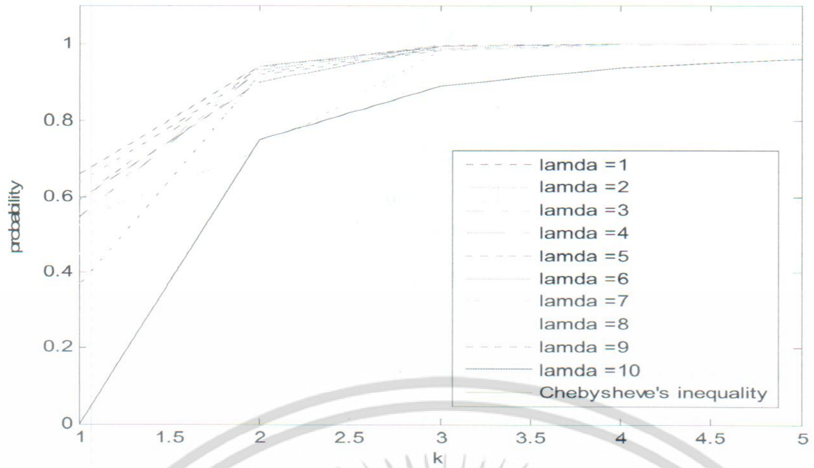
ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง โดยมีค่าเฉลี่ย $\lambda$ และความแปรปรวน $\lambda$ แล้ว

$$P(|X-\mu|<k\sigma) = P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)$$
$$= P(\lambda-k\sqrt{\lambda}<X<\lambda+k\sqrt{\lambda})$$

**ตารางที่ 3.4** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบปัวส์ซอง ที่ค่า $\lambda$ = 1 ถึง 10 และ k = 1 ถึง 5

| $\lambda$ | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) | $\lambda$ | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.3679 | 100.0000 | 6 | 1 | 0.5928 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9197 | 18.4515 | | 2 | 0.8987 | 16.5484 |
| | 3 | 0.9810 | 9.3895 | | 3 | 0.9912 | 10.3183 |
| | 4 | 0.9963 | 5.9056 | | 4 | 0.9986 | 6.1185 |
| | 5 | 0.9994 | 3.9429 | | 5 | 0.9999 | 3.9945 |
| 2 | 1 | 0.5413 | 100.0000 | 7 | 1 | 0.5561 | 100.0000 |
| | 2 | 0.7218 | 3.9086 | | 2 | 0.9394 | 20.1580 |
| | 3 | 0.9834 | 9.6129 | | 3 | 0.9863 | 9.8732 |
| | 4 | 0.9955 | 5.8230 | | 4 | 0.9990 | 6.1601 |
| | 5 | 0.9998 | 3.9772 | | 5 | 1.0000 | 3.9957 |
| 3 | 1 | 0.4481 | 100.0000 | 8 | 1 | 0.5254 | 100.0000 |
| | 2 | 0.8663 | 13.4244 | | 2 | 0.9224 | 18.6947 |
| | 3 | 0.9881 | 10.0391 | | 3 | 0.9914 | 10.3419 |
| | 4 | 0.9962 | 5.8921 | | 4 | 0.9993 | 6.1890 |
| | 5 | 0.9997 | 3.9719 | | 5 | 1.0000 | 3.9968 |
| 4 | 1 | 0.5470 | 100.0000 | 9 | 1 | 0.5962 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9306 | 19.4026 | | 2 | 0.9373 | 19.9835 |
| | 3 | 0.9919 | 10.3812 | | 3 | 0.9946 | 10.6235 |
| | 4 | 0.9991 | 6.1641 | | 4 | 0.9996 | 6.2088 |
| | 5 | 0.9999 | 3.9927 | | 5 | 1.0000 | 3.9976 |
| 5 | 1 | 0.6375 | 100.0000 | 10 | 1 | 0.6614 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9252 | 18.9337 | | 2 | 0.9409 | 20.2911 |
| | 3 | 0.9863 | 9.8757 | | 3 | 0.9928 | 10.4625 |
| | 4 | 0.9980 | 6.0603 | | 4 | 0.9993 | 6.1844 |
| | 5 | 0.9999 | 3.9934 | | 5 | 1.0000 | 3.9955 |

จากตารางที่ 3.4 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ $\lambda$ เกือบทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 สำหรับ $\lambda$ ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5




**รูปที่ 3.3** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบปัวส์ซองที่ $\lambda = 1$ ถึง 10 และ $k = 1$ ถึง 5

จากรูปที่ 3.3 จะพบว่าที่ $k = 1$ ถึง 3 เมื่อ $\lambda$ มีค่าน้อย ๆ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง แต่ที่ $\lambda = 2$, $k = 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะต่ำกว่าค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟ และเมื่อ $k > 3$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก และค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

**3.2.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง**

**3.2.2.1 การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล**

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล โดยมีพารามิเตอร์ $\beta$ และ $E(X) = \beta, V(X) = \beta^2$ แล้ว

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \int_{\beta-k\beta}^{\beta+k\beta} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\beta(1-k)}^{\beta(1+k)} e^{-\frac{x}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) & ; \quad 0 \le k \le 1 \\ \displaystyle\int_{0}^{\beta(1+k)} e^{-\frac{x}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) & ; \quad k \ge 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[ -e^{-\frac{x}{\beta}} \right]_{\beta(1-k)}^{\beta(1+k)} & ; \quad 0 \le k \le 1 \\ \left[ -e^{-\frac{x}{\beta}} \right]_{0}^{\beta(1+k)} & ; \quad k \ge 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-(1-k)} - e^{-(1+k)} & ; \quad 0 \le k \le 1 \\ 1 - e^{-(1+k)} & ; \quad k \ge 1 \end{cases}$$

**ตารางที่ 3.5** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ที่ค่า k ตั้งแต่ 1 ถึง 10

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| ความน่าจะเป็น | 0.8647 | 0.9502 | 0.9817 | 0.9933 | 0.9975 |
| ความคลาดเคลื่อน (%) | 100.0000 | 21.0692 | 9.4530 | 5.6176 | 3.7594 |
| k | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ความน่าจะเป็น | 0.9991 | 0.9997 | 0.9999 | 1.0000 | 1.0000 |
| ความคลาดเคลื่อน (%) | 2.6924 | 2.0106 | 1.5502 | 1.2300 | 1.0000 |

จากตารางที่ 3.5 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4 ถึง 10

**3.2.2.2 การแจกแจงแบบปกติ**

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ย $\mu$ และความแปรปรวน $\sigma^2$ แล้ว

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = P\left(-k < \frac{X-\mu}{\sigma} < k\right)$$

$$= P(-k < Z < k) = 2P(Z < k) - 1$$

**ตารางที่ 3.6** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบปกติ ที่ค่า k = 1 ถึง 10

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| ความน่าจะเป็น | 0.6826 | 0.9546 | 0.9974 | 1.0000 | 1.0000 |
| ความคลาดเคลื่อน (%) | 100.0000 | 21.4331 | 10.8783 | 6.2500 | 4.0000 |
| k | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ความน่าจะเป็น | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| ความคลาดเคลื่อน (%) | 2.7800 | 2.0400 | 1.5600 | 1.2300 | 1.0000 |

จากตารางที่ 3.6 จะพบว่าเมื่อ $k \geq 4$ ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4 ถึง 10


**รูปที่ 3.4** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริงสำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลและการแจกแจงแบบปกติที่ k = 1 ถึง 10

จากรูปที่ 3.4 จะพบว่าที่ k = 1 ถึง 2 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงสำหรับการแจกแจงแบบปกติมากกว่าการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล แต่ที่ k = 2 ถึง 5 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงสำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลมากกว่าการแจกแจงแบบปกติ

นอกจากนี้ เมื่อ k มีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

**3.2.2.3 การแจกแจงแบบแกมม่า**

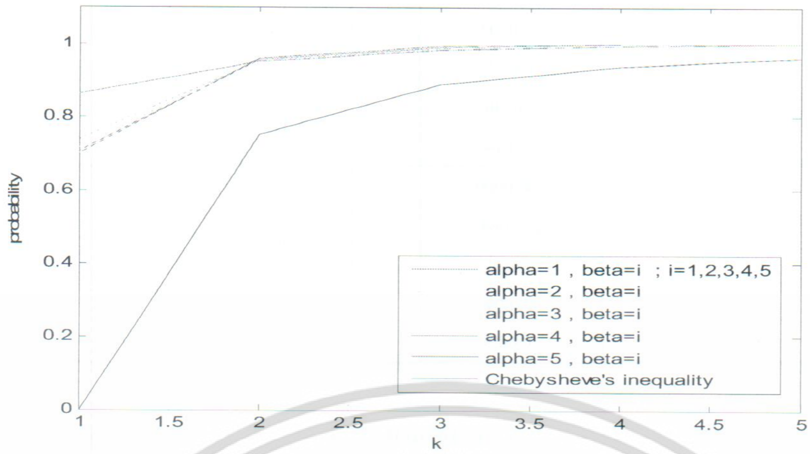
ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า โดยมีค่าเฉลี่ย $\alpha\beta$ และความแปรปรวน $\alpha\beta^2$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<k\sigma) &= P(-k\sigma<X-\mu<k\sigma) = P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma) \\
&= P(\alpha\beta-k\beta\sqrt{\alpha}<X<\alpha\beta+k\beta\sqrt{\alpha}) \\
&= P(X<\alpha\beta+k\beta\sqrt{\alpha})-P(X\le\alpha\beta-k\beta\sqrt{\alpha})
\end{aligned}
$$

**ตารางที่ 3.7** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบแกมม่า ที่ค่า $\alpha$ และ $\beta$ = 1 ถึง 5 และ k = 1 ถึง 5

| $\alpha$ | $\beta$ | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) | $\alpha$ | $\beta$ | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 3, 4, 5 | 1 | 0.8647 | 100.0000 | 4 | 1, 2, 3, 4, 5 | 1 | 0.7059 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9502 | 21.0703 | | | 2 | 0.9576 | 21.6808 |
| | | 3 | 0.9817 | 9.4515 | | | 3 | 0.9897 | 10.1816 |
| | | 4 | 0.9933 | 5.6140 | | | 4 | 0.9977 | 6.0347 |
| | | 5 | 0.9975 | 3.7614 | | | 5 | 0.9995 | 3.9545 |
| 2 | 1, 2, 3, 4, 5 | 1 | 0.7375 | 100.0000 | 5 | 1, 2, 3, 4, 5 | 1 | 0.7007 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9534 | 21.3323 | | | 2 | 0.9588 | 21.7775 |
| | | 3 | 0.9859 | 9.8401 | | | 3 | 0.9907 | 10.2747 |
| | | 4 | 0.9959 | 5.8647 | | | 4 | 0.9981 | 6.0733 |
| | | 5 | 0.9988 | 3.8887 | | | 5 | 0.9997 | 3.9665 |
| 3 | 1, 2, 3, 4, 5 | 1 | 0.7153 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9558 | 21.5325 | | | | | |
| | | 3 | 0.9882 | 10.0489 | | | | | |
| | | 4 | 0.9971 | 5.9738 | | | | | |
| | | 5 | 0.9993 | 3.9331 | | | | | |

จากตารางที่ 3.7 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ $\alpha$ และ $\beta$ ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5




**รูปที่ 3.5** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริงสำหรับการแจกแจงแบบแกมม่า ที่ $k = 1$ ถึง 5

จากรูปที่ 3.5 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ และ $\alpha = 2, 3, 4, 5$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าที่ $\alpha = 1$ และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

**3.2.2.4 การแจกแจงแบบไค-สแควร์**

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ โดยมีค่าเฉลี่ย $r$ และความแปรปรวน $2r$ แล้ว

$$P(|X-\mu|<k\sigma) = P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma) = P(r-k\sqrt{2r}<X<r+k\sqrt{2r})$$
$$= P(X<r+k\sqrt{2r}) - P(X\le r-k\sqrt{2r})$$

**ตารางที่ 3.8** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบไค-สแควร์ ที่ค่า $r = 1$ ถึง 5 และ $k = 1$ ถึง 5

| r | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) | r | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.8798 | 100.0000 | 4 | 1 | 0.7375 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9496 | 21.0202 | | 2 | 0.9534 | 21.3323 |
| | 3 | 0.9780 | 9.1067 | | 3 | 0.9859 | 9.8401 |
| | 4 | 0.9901 | 5.3147 | | 4 | 0.9959 | 5.8647 |
| | 5 | 0.9955 | 3.5663 | | 5 | 0.9988 | 3.8887 |

**ตารางที่ 3.8 (ต่อ)**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0.8647 | 100.0000 | 5 | 1 | 0.7236 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9502 | 21.0703 | | 2 | 0.9547 | 21.4403 |
| | 3 | 0.9817 | 9.4515 | | 3 | 0.9872 | 9.9579 |
| | 4 | 0.9933 | 5.6140 | | 4 | 0.9966 | 5.9283 |
| | 5 | 0.9975 | 3.7614 | | 5 | 0.9991 | 3.9155 |
| 3 | 1 | 0.7660 | 100.0000 | | | | |
| | 2 | 0.9519 | 21.2064 | | | | |
| | 3 | 0.9842 | 9.6807 | | | | |
| | 4 | 0.9949 | 5.7699 | | | | |
| | 5 | 0.9984 | 3.8445 | | | | |

จากตารางที่ 3.8 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5


**รูปที่ 3.6** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบไค-สแควร์ ที่ r = 1 ถึง 5 และ k = 1 ถึง 5

จากรูปที่ 3.6 จะพบว่าที่ k = 1, 2 เมื่อ r มีค่ามาก ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ k > 2 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก นอกจากนี้เมื่อ k > 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้นคล้ายกับในการแจกแจงแบบแกมม่า

**3.2.2.5 การแจกแจงแบบที**

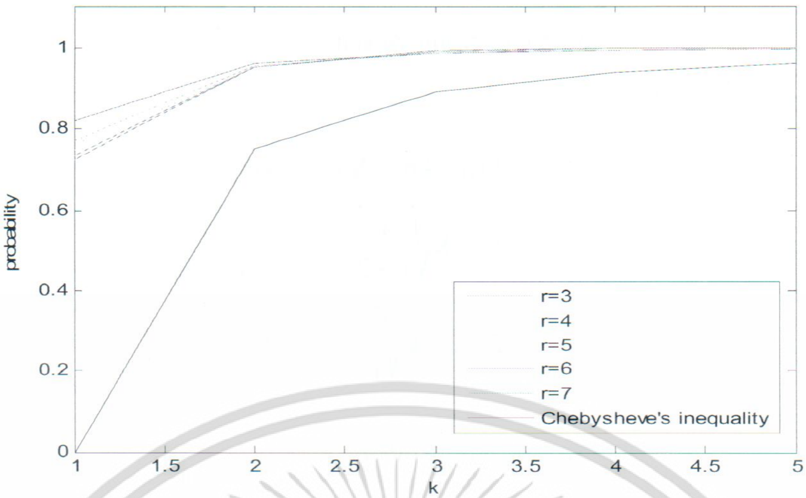
ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบที โดยมีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน $\frac{r}{r-2}$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<k\sigma) &= P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma) \\
&= P\left(-k\sqrt{\frac{r}{r-2}}<X<k\sqrt{\frac{r}{r-2}}\right) \\
&= P\left(X<k\sqrt{\frac{r}{r-2}}\right)-P\left(X\le -k\sqrt{\frac{r}{r-2}}\right)
\end{aligned}
$$

**ตารางที่ 3.9** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบที ที่ค่า r ตั้งแต่ 3 ถึง 7 และ k ตั้งแต่ 1 ถึง 5

| r | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) | r | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0.8183 | 100.0000 | 6 | 1 | 0.7334 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9595 | 21.8327 | | 2 | 0.9502 | 21.0672 |
| | 3 | 0.9862 | 9.8619 | | 3 | 0.9896 | 10.1757 |
| | 4 | 0.9938 | 5.6684 | | 4 | 0.9973 | 5.9949 |
| | 5 | 0.9968 | 3.6880 | | 5 | 0.9991 | 3.9168 |
| 4 | 1 | 0.7698 | 100.0000 | 7 | 1 | 0.7247 | 100.0000 |
| | 2 | 0.9526 | 21.2664 | | 2 | 0.9501 | 21.0637 |
| | 3 | 0.9868 | 9.9177 | | 3 | 0.9907 | 10.2712 |
| | 4 | 0.9952 | 5.7966 | | 4 | 0.9979 | 6.0503 |
| | 5 | 0.9979 | 3.7969 | | 5 | 0.9994 | 3.9433 |
| 5 | 1 | 0.7468 | 100.0000 | | | | |
| | 2 | 0.9507 | 21.1097 | | | | |
| | 3 | 0.9883 | 10.0554 | | | | |
| | 4 | 0.9964 | 5.9138 | | | | |
| | 5 | 0.9987 | 3.8723 | | | | |

จากตารางที่ 3.9 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5




**รูปที่ 3.7** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบที ที่ r = 3 ถึง 7 และ k = 1 ถึง 5

จากรูปที่ 3.7 จะพบว่าที่ k = 1, 2 เมื่อ r มีค่ามาก ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ k > 2 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกัน นอกจากนี้เมื่อ k > 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น คล้ายกับในการแจกแจงแบบแกมม่า และการแจกแจงแบบไค-สแควร์

**3.2.2.6 การแจกแจงแบบเอฟ**

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอฟ โดยมีค่าเฉลี่ย $\frac{r_2}{r_2-2}$ และความแปรปรวน $\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}$ แล้ว

$$P(|X-\mu|<k\sigma) = P(-k\sigma < X-\mu < k\sigma)$$
$$= P(\mu-k\sigma < X < \mu+k\sigma)$$
$$= P\left(\frac{r_2}{r_2-2}-k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}} < X < \frac{r_2}{r_2-2}+k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}}\right)$$
$$= P\left(X < \frac{r_2}{r_2-2}+k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}}\right) - P\left(X \le \frac{r_2}{r_2-2}-k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}}\right)$$

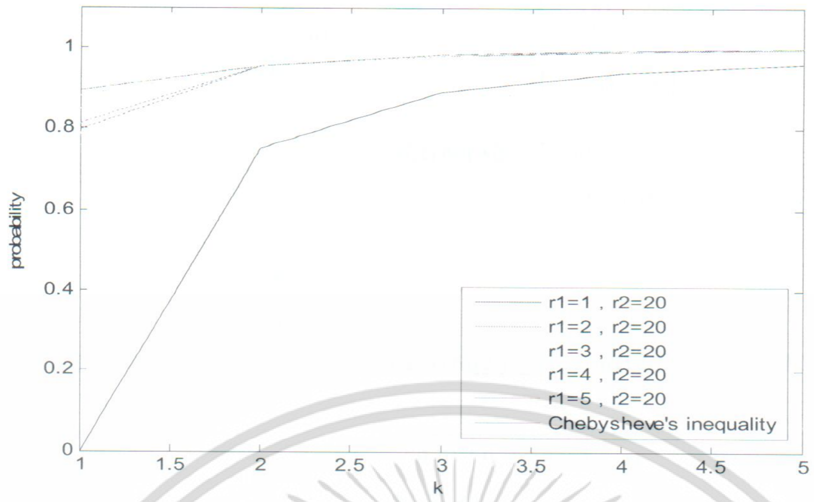
**ตารางที่ 3.10** ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย $\mu$ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ สำหรับการแจกแจงแบบเอฟ ที่ค่า $r_1 = 1$ ถึง 5 $r_2 = 5, 10, 15, 20$ และ k = 1 ถึง 5

| $r_1$ | $r_2$ | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) | $r_1$ | $r_2$ | k | ความน่าจะเป็น | ความคลาดเคลื่อน (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 0.9472 | 100.0000 | 4 | 5 | 1 | 0.9418 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9792 | 23.4101 | | | 2 | 0.9782 | 23.3308 |
| | | 3 | 0.9894 | 10.1602 | | | 3 | 0.9893 | 10.1442 |
| | | 4 | 0.9938 | 5.6628 | | | 4 | 0.9938 | 5.6652 |
| | | 5 | 0.9960 | 3.6123 | | | 5 | 0.9961 | 3.6194 |
| 2 | 5 | 1 | 0.9435 | 100.0000 | 5 | 5 | 1 | 0.9415 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9785 | 23.3545 | | | 2 | 0.9782 | 23.3270 |
| | | 3 | 0.9893 | 10.1477 | | | 3 | 0.9892 | 10.1438 |
| | | 4 | 0.9938 | 5.6633 | | | 4 | 0.9938 | 5.6656 |
| | | 5 | 0.9960 | 3.6163 | | | 5 | 0.9961 | 3.6200 |
| 3 | 5 | 1 | 0.9423 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9783 | 23.3380 | | | | | |
| | | 3 | 0.9893 | 10.1451 | | | | | |
| | | 4 | 0.9938 | 5.6644 | | | | | |
| | | 5 | 0.9960 | 3.6183 | | | | | |
| 1 | 10 | 1 | 0.9056 | 100.0000 | 4 | 10 | 1 | 0.8906 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9602 | 21.8911 | | | 2 | 0.9590 | 21.7968 |
| | | 3 | 0.9806 | 9.3560 | | | 3 | 0.9822 | 9.4961 |
| | | 4 | 0.9896 | 5.2679 | | | 4 | 0.9913 | 5.4268 |
| | | 5 | 0.9940 | 3.4233 | | | 5 | 0.9954 | 3.5526 |
| 2 | 10 | 1 | 0.8961 | 100.0000 | 5 | 10 | 1 | 0.8823 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9591 | 21.8043 | | | 2 | 0.9591 | 21.8004 |
| | | 3 | 0.9814 | 9.4236 | | | 3 | 0.9824 | 9.5145 |
| | | 4 | 0.9906 | 5.3565 | | | 4 | 0.9915 | 5.4432 |
| | | 5 | 0.9948 | 3.4990 | | | 5 | 0.9955 | 3.5645 |
| 3 | 10 | 1 | 0.8925 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9590 | 21.7949 | | | | | |
| | | 3 | 0.9819 | 9.4681 | | | | | |
| | | 4 | 0.9910 | 5.4012 | | | | | |
| | | 5 | 0.9952 | 3.5335 | | | | | |

ตารางที่ 3.10 (ต่อ)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 1 | 0.8960 | 100.0000 | 4 | 15 | 1 | 0.8425 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9560 | 21.5499 | | | 2 | 0.9557 | 21.5246 |
| | | 3 | 0.9792 | 9.2262 | | | 3 | 0.9822 | 9.5030 |
| | | 4 | 0.9894 | 5.2465 | | | 4 | 0.9922 | 5.5134 |
| | | 5 | 0.9943 | 3.4455 | | | 5 | 0.9963 | 3.6439 |
| 2 | 15 | 1 | 0.8845 | 100.0000 | 5 | 15 | 1 | 0.8244 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9552 | 21.4858 | | | 2 | 0.9559 | 21.5438 |
| | | 3 | 0.9807 | 9.3611 | | | 3 | 0.9827 | 9.5410 |
| | | 4 | 0.9909 | 5.3933 | | | 4 | 0.9925 | 5.5427 |
| | | 5 | 0.9954 | 3.5607 | | | 5 | 0.9965 | 3.6630 |
| 3 | 15 | 1 | 0.8767 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9554 | 21.5023 | | | | | |
| | | 3 | 0.9816 | 9.4474 | | | | | |
| | | 4 | 0.9917 | 5.4687 | | | | | |
| | | 5 | 0.9960 | 3.6138 | | | | | |
| 1 | 20 | 1 | 0.8916 | 100.0000 | 4 | 20 | 1 | 0.8125 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9542 | 21.3999 | | | 2 | 0.9546 | 21.4303 |
| | | 3 | 0.9787 | 9.1800 | | | 3 | 0.9827 | 9.5464 |
| | | 4 | 0.9895 | 5.2509 | | | 4 | 0.9929 | 5.5821 |
| | | 5 | 0.9945 | 3.4674 | | | 5 | 0.9969 | 3.7021 |
| 2 | 20 | 1 | 0.8792 | 100.0000 | 5 | 20 | 1 | 0.7949 | 100.0000 |
| | | 2 | 0.9537 | 21.3552 | | | 2 | 0.9550 | 21.4625 |
| | | 3 | 0.9807 | 9.3577 | | | 3 | 0.9833 | 9.5984 |
| | | 4 | 0.9913 | 5.4318 | | | 4 | 0.9933 | 5.6195 |
| | | 5 | 0.9959 | 3.6037 | | | 5 | 0.9971 | 3.7249 |
| 3 | 20 | 1 | 0.8486 | 100.0000 | | | | | |
| | | 2 | 0.9541 | 21.3918 | | | | | |
| | | 3 | 0.9819 | 9.4717 | | | | | |
| | | 4 | 0.9923 | 5.5256 | | | | | |
| | | 5 | 0.9965 | 3.6665 | | | | | |

จากตารางที่ 3.10 จะพบว่าเมื่อ $k$ มีค่ามาก สำหรับ $r_1$ และ $r_2$ ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ $k = 4, 5$




**รูปที่ 3.8** ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเอฟ ที่ $r_1 = 1$ ถึง 5, $r_2 = 20$ และ $k = 1$ ถึง 5

จากรูปที่ 3.8 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ เมื่อ $r_2$ มีค่าน้อย ๆ ได้แก่ $r_2 = 5, 10$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าเมื่อ $r_2$ มีค่ามาก แต่ที่ $r_2$ มีค่าน้อย ๆ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าที่ $r_2$ มีค่ามาก ๆ และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก

นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้นเช่นเดียวกับในการแจกแจงแบบแกมม่า การแจกแจงแบบไค-สแควร์ และการแจกแจงแบบที

### 3.3 การหาขนาดตัวอย่าง

#### 3.3.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

**การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ**

ในการทดลองแบบเบอร์นูลลีซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง โดยที่ผลลัพธ์ในการทดลองที่ i, $X_i$ มีค่าเป็น 1 ด้วยความน่าจะเป็น $\theta$ และมีค่าเป็น 0 ด้วยความน่าจะเป็น $1-\theta$ ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ มีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ $\theta$ เราทราบว่า $E(X_i) = \theta$ และ $V(X_i) = \theta(1-\theta)$

ใช้กฎของเลขจำนวนมากแบบอ่อน (Weak law of large number) กับตัวแปรสุ่ม $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะได้ว่า

$$P\left(\left|\overline{X}-\theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}$$

หรือ
$$P\left(\left|\overline{X}-\theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1-\frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}$$

ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นนี้มีค่าอย่างน้อย 0.95

จะได้
$$1-\frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2} \geq 0.95$$

ดังนั้น
$$n \geq \frac{20\,\theta(1-\theta)}{\varepsilon^2}$$

**ตารางที่ 3.11** ขนาดตัวอย่างที่ควรใช้สำหรับการแจกแจงแบบทวินามโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ เมื่อ $\varepsilon$ = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.10 และ $\theta$ = 0.1 ถึง 0.9

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon = 0.01$ | $\theta$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| | n | 18,000 | 32,000 | 42,000 | 48,000 | 50,000 | 48,000 | 42,000 | 32,000 | 18,000 |
| $\varepsilon = 0.02$ | $\theta$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| | n | 4,500 | 8,000 | 10,500 | 12,000 | 12,500 | 12,000 | 10,500 | 8,000 | 4,500 |
| $\varepsilon = 0.03$ | $\theta$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| | n | 2,000 | 3,556 | 4,667 | 5,334 | 5,556 | 5,334 | 4,667 | 3,556 | 2,000 |
| $\varepsilon = 0.04$ | $\theta$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| | n | 1,125 | 2,000 | 2,625 | 3,000 | 3,125 | 3,000 | 2,625 | 2,000 | 1,125 |
| $\varepsilon = 0.05$ | $\theta$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| | n | 720 | 1,280 | 1,680 | 1,920 | 2,000 | 1,920 | 1,680 | 1,280 | 720 |
| $\varepsilon = 0.10$ | $\theta$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| | n | 180 | 320 | 420 | 480 | 500 | 480 | 420 | 320 | 180 |

จากตารางที่ 3.11 จะพบว่า ณ $\varepsilon$ ระดับหนึ่ง ๆ เมื่อ $\theta$ มีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้นจนถึง $\theta$ = 0.50 หลังจากนั้นขนาดตัวอย่างที่ได้จะลดลง และณ $\theta$ ระดับหนึ่ง ๆ เมื่อ $\varepsilon$ มีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดตัวอย่างที่ได้จะลดลง

นอกจากนี้ ณ $\theta$ = 0.10 และ 0.90, $\theta$ = 0.20 และ 0.80, $\theta$ = 0.30 และ 0.70, $\theta$ = 0.40 และ 0.60 ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเท่ากัน

**3.3.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง**

**3.3.2.1 การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ**

สมมติว่าสุ่มตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระกันแบบปกติ $N(\mu,\sigma^2)$ จะได้ว่า $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

ใช้กฎของเลขจำนวนมากแบบอ่อนกับตัวแปรสุ่ม $\overline{X}$ จะได้ว่า

$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \geq \varepsilon\right) \quad \leq \quad \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

หรือ $$P\left(\left|\overline{X}-\theta\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นนี้มีค่าอย่างน้อย 0.95

จะได้ $$1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \geq \quad 0.95$$

ดังนั้น $$n \quad \geq \quad \frac{\sigma^2}{0.05\,\varepsilon^2} \quad = \quad \frac{20\,\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

**ตารางที่ 3.12** ขนาดตัวอย่างที่ควรใช้โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟสำหรับการแจกแจงแบบปกติ เมื่อ $\varepsilon = \sigma$ ถึง $\frac{\sigma}{50}$

| $\varepsilon$ | $\sigma$ | $\frac{\sigma}{2}$ | $\frac{\sigma}{3}$ | $\frac{\sigma}{4}$ | $\frac{\sigma}{5}$ | $\frac{\sigma}{6}$ | $\frac{\sigma}{7}$ | $\frac{\sigma}{8}$ | $\frac{\sigma}{9}$ | $\frac{\sigma}{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 20 | 80 | 180 | 320 | 500 | 720 | 980 | 1,280 | 1,620 | 2,000 |
| $\varepsilon$ | $\frac{\sigma}{15}$ | $\frac{\sigma}{20}$ | $\frac{\sigma}{25}$ | $\frac{\sigma}{30}$ | $\frac{\sigma}{35}$ | $\frac{\sigma}{40}$ | $\frac{\sigma}{45}$ | $\frac{\sigma}{50}$ | | |
| n | 4,500 | 8,000 | 12,500 | 18,000 | 24,500 | 32,000 | 40,500 | 50,000 | | |

จากตารางที่ 3.12 จะพบว่า เมื่อ $\varepsilon$ มีค่าลดลง ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้น

**3.3.2.2 การหาขนาดตัวอย่างจากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง**

สมมติว่าสุ่มตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระกันแบบปกติ $N(\mu, \sigma^2)$ จะได้ว่า $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X}-\theta\right| < \varepsilon\right) &= P\left(-\varepsilon < \overline{X}-\mu < \varepsilon\right) \\
&= P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} < Z < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 2P\left(Z < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1
\end{aligned}$$

ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นนี้มีค่าอย่างน้อย 0.95

จะได้ $$2P\left(Z < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.95$$

$$P\left(Z < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq 0.975$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq 1.96$$

ดังนั้น $$n \geq \frac{(1.96)^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{3.8416\,\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

**ตารางที่ 3.13** ขนาดตัวอย่างที่ควรใช้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง สำหรับการแจกแจงแบบปกติ เมื่อ $\varepsilon = \sigma$ ถึง $\frac{\sigma}{50}$

| $\varepsilon$ | $\sigma$ | $\frac{\sigma}{2}$ | $\frac{\sigma}{3}$ | $\frac{\sigma}{4}$ | $\frac{\sigma}{5}$ | $\frac{\sigma}{6}$ | $\frac{\sigma}{7}$ | $\frac{\sigma}{8}$ | $\frac{\sigma}{9}$ | $\frac{\sigma}{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 4 | 16 | 35 | 62 | 97 | 139 | 189 | 246 | 312 | 385 |
| $\varepsilon$ | $\frac{\sigma}{15}$ | $\frac{\sigma}{20}$ | $\frac{\sigma}{25}$ | $\frac{\sigma}{30}$ | $\frac{\sigma}{35}$ | $\frac{\sigma}{40}$ | $\frac{\sigma}{45}$ | $\frac{\sigma}{50}$ | | |
| n | 865 | 1,537 | 2,401 | 3,458 | 4,706 | 6,147 | 7,780 | 9,604 | | |

จากตารางที่ 3.13 จะพบว่า เมื่อ $\varepsilon$ มีค่าลดลง ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้น และจากการเปรียบเทียบตารางที่ 3.12 และ 3.13 จะพบว่าขนาดตัวอย่างที่ได้จากอสมการเชฟบีเชฟจะมากกว่าขนาดตัวอย่างที่ได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงค่อนข้างมาก

## 4. สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

### 4.1 สรุปผลการวิจัย

1. เมื่อ k มีค่าน้อย ๆ (k = 1, 2 และ 3) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก แต่เมื่อ k มีค่าเพิ่มมากขึ้น (k = 4 และ 5) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น โดยที่ความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟเทียบกับความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก สำหรับ k = 4, 5 ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ดังนั้นการประมาณค่าความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟควรใช้เมื่อ k มีค่ามาก

2. ขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากอสมการเชฟบีเชฟจะมากกว่าขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงค่อนข้างมาก ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

**4.2 ข้อเสนอแนะ**

1. การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเมื่อ $k$ มีค่ามากนั้น ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น แต่ช่วงที่ได้จะกว้างมากเกินไป ซึ่งไม่ค่อยจะมีประโยชน์มากนักที่จะหา

2. ควรศึกษาการหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบอื่น ๆ เช่น การแจกแจงแบบเรขาคณิต การแจกแจงแบบทวินามลบ การแจกแจงแบบเบต้า การแจกแจงแบบไวบูล การแจกแจงแบบคอชี เป็นต้น

3. ควรศึกษาการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง ณ ระดับ $n$, $p$, $\lambda$, $k$, $\alpha$, $\beta$, $r$, $r_1$ และ $r_2$ ที่อื่น ๆ

4. ควรศึกษาการหาค่าความน่าจะเป็นโดยใช้ทฤษฎีขีดจำกัดสู่ส่วนกลางเพื่อเปรียบเทียบกับการหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ และการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

5. ควรศึกษาการหาขนาดตัวอย่างที่ควรใช้โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับโดยใช้การแจกแจงเพิ่มเติม

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้ทุนสนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้ ขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นักศึกษาปริญญาตรี ชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

**เอกสารอ้างอิง**

[1] Blake, I. F. 1979. An Introduction to Applied Probability. New York : John Wiley and Sons.

[2] Beaumont, G. P. 1986. Probability and Random Variables. New York : Ellis Horwood.

[3] Ghahramani, S. 2005. Fundamentals of Probability. 3rd ed. London : Prentice Hall.