ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุด และตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด ภายใต้การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

The minimum variance bound unbiased estimators and the minimum variance unbiased estimators under a Poisson distribution.

สายชล สินสมบูรณ์ทอง

อาจารย์ประจำภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุด และตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของพารามิเตอร์ $\theta, \theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง พบว่า $\overline{X}$ จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ θ โดยมีความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\theta}{n}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับขอบเขตล่างของคราเมอร์ - ราว ดังนั้น $\overline{X}$ จึงเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุด เมื่อมีตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ θ แล้วจะไม่มีตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดสำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ ของ θ อีก ดังนั้นในกรณีนี้จึงไม่มีตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ $\theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$ แต่สามารถหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดได้ โดยที่ความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดเหล่านี้มีค่ามากกว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์ - ราว เสมอ

Abstract

The minimum variance bound unbiased estimators (MVBUE) and the minimum variance unbiased estimators (MVUE) of parameters θ, θ^2, θ^3, $e^{-\theta}$, $\theta e^{-\theta}$, $\theta^2 e^{-\theta}$ and $e^{-\theta}(1+\theta)$ for a Poisson distribution. It is said that $\overline{X}$ is the MVBUE of θ and the variance of $\overline{X}$ is $\frac{\theta}{n}$ which is equal to the Cramer - Rao lower bound, and hence $\overline{X}$ is the most efficient estimator. If $\overline{X}$ has the MVBUE of θ, there will be no MVBUE for the other functions of θ. Therefore, in this case there is no MVBUE of θ^2, θ^3, $e^{-\theta}$, $\theta e^{-\theta}$, $\theta^2 e^{-\theta}$ and $e^{-\theta}(1+\theta)$. However, we can find the MVUE estimators whose variances are always greater than the Cramer-Rao lower bound.

1. บทนำ

ถ้า $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ แล้ว **ตัวประมาณ (Estimator)** ของ θ คือฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $\hat{\theta} = t(X_1,\ldots,X_n)$ โดยที่ตัวประมาณเป็นสูตรที่ใช้ในการประมาณค่า

คุณสมบัติของตัวประมาณของ θ มีหลายประการด้วยกัน คือ

1. ความไม่เอนเอียง (Unbiasedness)
2. ความคงเส้นคงวา (Consistency)
3. ความพอเพียง (Sufficiency)
4. ความมีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum variance)
5. ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency)
6. ความมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (Minimum mean square error)

ในที่นี้ขออ้างถึงคุณสมบัติของตัวประมาณเกี่ยวกับความไม่เอนเอียง ความมีความแปรปรวนต่ำสุดและความมีประสิทธิภาพ ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ และให้ $t(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของฟังก์ชัน $\tau(\theta)$ ของพารามิเตอร์ θ จะได้

$$V(t) \geq -\frac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right)} = -\frac{[\tau'(\theta)]^2}{nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right)}$$

เรียกอสมการเหล่านี้ว่า **อสมการของคราเมอร์-ราว (Cramer - Rao inequality)** และด้านขวามือของอสมการ เรียกว่า **ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราวของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta)$ (Cramer-Rao lower bound for the variance of unbiased estimators of $\tau(\theta)$)**

ตัวประมาณของ $\tau(\theta)$ ที่มีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว เรียกว่า **ตัวประมาณที่มีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุด (Minimum variance bound estimator : MVBE) ของ $\tau(\theta)$**

ให้ $t(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta)$ สถิติ $t(X_1,\ldots,X_n)$ **จะเป็นตัวประมาณที่มีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ $\tau(\theta)$** ถ้าเขียน $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$ ได้ในรูปของ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = A(\theta)[t(X_1,\ldots,X_n) - \tau(\theta)]$$

โดยที่ L คือฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ $X_1,\ldots,X_n$ และ $A(\theta)$ เป็นฟังก์ชันของ θ ที่ไม่ขึ้นอยู่กับ $X_1,\ldots,X_n$

ถ้า $t(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัวประมาณที่มีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ $\tau(\theta)$ แล้ว ความแปรปรวนของ $t(X_1,\ldots,X_n)$ คือ

$$V(t) = \frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}$$

ถ้า $t(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta)$ และมีความแปรปรวน $V(t)$ เท่ากับขอบเขตล่างของคราเมอร์ - ราว แสดงว่า $t(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัวประมาณที่**ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุด (Minimum variance bound unbiased estimator : MVBUE) ของ $\tau(\theta)$**

เมื่อมีตัวประมาณที่มีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ $\tau(\theta)$ แล้ว จะมีได้เฉพาะฟังก์ชัน $\tau(\theta)$ เพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้น แต่สำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ ของ θ แล้วจะไม่มีตัวประมาณที่มีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดอีก

2. วัตถุประสงค์

1. เพื่อหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ $\theta, \theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$

2. เพื่อหาขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราวของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\theta, \theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$

3. เพื่อหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta, \theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$

4. เพื่อหาความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$

5. เพื่อหาประสิทธิภาพของตัวประมาณของ θ, θ^2 และ θ^3

3. ผลการศึกษา

3.1 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ θ

ให้ $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปัวส์ซองฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ $X_1, \ldots, X_n$ คือ

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} X_i!}$$

$$\ln L = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} X_i \ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i!$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta}$$

$$= \frac{n}{\theta}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \theta\right)$$

เปรียบเทียบกับสมการ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = A(\theta)\left[t(X_1, \ldots, X_n) - \tau(\theta)\right]$$

เมื่อ $A(\theta) = \frac{n}{\theta}$, $t(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$

และ $\tau(\theta) = \theta$

ดังนั้น ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ θ คือ

$$t(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$$

และความแปรปรวนของ $\overline{X}$ คือ

$$V(\overline{X}) = \frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)} = \frac{1}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta}{n}$$

เมื่อมีตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ θ แล้ว จะไม่มีตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดสำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ ของ θ อีก

ดังนั้น จึงไม่มีตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ $\theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$ อีก

3.2 การหาขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ θ , θ^2, θ^3 , $e^{-\theta}$, $\theta e^{-\theta}$, $\theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$

จาก $\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta} = -n + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta}$ (ในหัวข้อ 3.1)

จะได้ $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta^2}$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{\theta^2} n\theta = \frac{n}{\theta}$$

3.2.1 ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ θ

ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta) = \theta$ คือ

$$-\frac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)} = \frac{1}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta}{n}$$

ประสิทธิภาพของ $\overline{X}$

$$= \frac{-\dfrac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)}}{V(\overline{X})} = \frac{\theta/n}{\theta/n} = 1$$

จะพบว่า $\overline{X}$ มีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตล่างของคราเมอร์ – ราว เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ θ และมีประสิทธิภาพเท่ากับ 1 แสดงว่า $\overline{X}$ เป็น**ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุด (Most efficient estimator)**

3.2.2 ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของฟังก์ชันอื่น ๆ ของ θ

ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta) = \theta^2$ คือ $-\dfrac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)} = \dfrac{(2\theta)^2}{\frac{n}{\theta}} = \dfrac{4\theta^3}{n}$

ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta) = \theta^3$ คือ $-\dfrac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)} = \dfrac{(3\theta^2)^2}{\frac{n}{\theta}} = \dfrac{9\theta^5}{n}$

ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta) = e^{-\theta}$ คือ

$$-\frac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)} = \frac{(-e^{-\theta})^2}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta e^{-2\theta}}{n}$$

ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta) = \theta e^{-\theta}$ คือ

$$-\frac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)} = \frac{(-\theta e^{-\theta} + e^{-\theta})^2}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta e^{-2\theta}(1-\theta)^2}{n}$$

ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta) = \theta^2 e^{-\theta}$ คือ

$$-\frac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)} = \frac{(\theta e^{-\theta}(2-\theta))^2}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta^3 e^{-2\theta}(2-\theta)^2}{n}$$

ขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว ของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\tau(\theta) = e^{-\theta}(1+\theta)$ คือ

$$-\frac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)} = \frac{(-\theta e^{-\theta})^2}{\frac{n}{\theta}} = \frac{\theta^3 e^{-2\theta}}{n}$$

3.3 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}$, $\theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$

เมื่อไม่มีตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุดของ $\theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}, \theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$ แล้ว แต่สามารถหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}$, $\theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$ ได้ดังนี้

3.3.1 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ θ^2 และการหาความแปรปรวนและประสิทธิภาพของตัวประมาณ

จาก $f(x;\theta) = e^{-\theta}\frac{1}{x!}e^{(\ln\theta)x}$

เทียบกับ $f(x;\theta) = a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$

โดยที่ $a(\theta) = e^{-\theta}$, $b(x) = \frac{1}{x!}$

$c(\theta) = \ln\theta$, $d(x) = x$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็นสถิติที่สมบูรณ์และพอเพียงของ θ

จาก $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^2$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + n^2\theta^2$$

ดังนั้น $E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}\right] = \theta^2$

นั่นคือ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ θ^2 คือ

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2} = \frac{\bar{X}(n\bar{X} - 1)}{n}$$

การหาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}$$

$$V\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n^4}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\right]^2 - \left[E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\right]\right]^2\right\}$$

พิจารณา $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\right]$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!}$$

$$= (n\theta)^2\sum_{y=2}^{\infty}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^{y-2}}{(y-2)!} = (n\theta)^2$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right)\right]$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)(y-2)\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!}$$

$$= (n\theta)^3\sum_{y=3}^{\infty}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^{y-3}}{(y-3)!} = (n\theta)^3$$

ในทำนองเดียวกัน

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 3\right)\right] = (n\theta)^4$$

จะได้ $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\right]^2$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3 + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 3\right)\right.$$

$$\left. + 4\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right) + 2\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\right]$$

$$= (n\theta)^4 + 4(n\theta)^3 + 2(n\theta)^2$$

ดังนั้น $V\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}\right]$

$$= \frac{1}{n^4}\left[(n\theta)^4 + 4(n\theta)^3 + 2(n\theta)^2 - (n\theta)^4\right]$$

$$= \frac{4\theta^3}{n} + \frac{2\theta^2}{n^2} > \frac{4\theta^3}{n} \quad \left(\because \frac{2\theta^2}{n^2} > 0\right)$$

นั่นคือความแปรปรวนของตัวประมาณ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}$ มีค่ามากกว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว

การหาประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}$

$$= \frac{\dfrac{[\tau'(\theta)]^2}{-E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right)}}{V\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{4\theta^3}{n}}{\dfrac{4\theta^3}{n} + \dfrac{2\theta^2}{n^2}}$$

$$= \frac{2n\theta}{2n\theta + 1}$$

ตารางที่ 1 ประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{n^2}$ ที่ค่า n และ θ ต่าง ๆ

θ \ n	20	40	60	80	100
0.1	0.8000	0.8889	0.9231	0.9412	0.9524
0.2	0.8889	0.9412	0.9600	0.9697	0.9756
0.3	0.9231	0.9600	0.9730	0.9796	0.9836
0.4	0.9412	0.9697	0.9796	0.9846	0.9877
0.5	0.9524	0.9756	0.9836	0.9877	0.9901
0.6	0.9600	0.9796	0.9863	0.9897	0.9917
0.7	0.9655	0.9825	0.9882	0.9912	0.9929
0.8	0.9697	0.9846	0.9897	0.9922	0.9938
0.9	0.9730	0.9863	0.9908	0.9931	0.9945

3.3.2 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ θ^3 และการหาความแปรปรวนและประสิทธิภาพของตัวประมาณ

หาได้ในทำนองเดียวกับ θ^2

จาก $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right)\right] = (n\theta)^3$

ดังนั้น $E\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right)}{n^3}\right] = \theta^3$

นั่นคือ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ θ^3 คือ

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right)}{n^3} = \frac{\overline{X}(n\overline{X} - 1)(n\overline{X} - 2)}{n^2}$$

การหาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)}{n^3}$$

$$V\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)}{n^3}\right]$$

$$= \frac{1}{n^6}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\right]^2 - \left[E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\right]\right]^2\right\}$$

เราทราบว่า $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\right] = (n\theta)^2$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\right] = (n\theta)^3$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-3\right)\right] = (n\theta)^4$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-4\right)\right] = (n\theta)^5$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-5\right)\right] = (n\theta)^6$$

จะได้ $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\right]^2$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3 - 3\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^6 - 6\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^5 + 13\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 - 12\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3 + 4\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned} = E\Bigg[&\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-5\right) \\ &+9\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-4\right) \\ &+18\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-3\right) \\ &+6\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)\Bigg] \end{aligned}$$

$$= (n\theta)^6 + 9(n\theta)^5 + 18(n\theta)^4 + 6(n\theta)^3$$

ดังนั้น $V\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)}{n^3}\right]$

$$= \frac{1}{n^6}\left[(n\theta)^6 + 9(n\theta)^5 + 18(n\theta)^4 + 6(n\theta)^3 - (n\theta)^6\right]$$

$$= \frac{9\theta^5}{n} + \frac{18\theta^4}{n^2} + \frac{6\theta^3}{n^3} > \frac{9\theta^5}{n}$$

$$\left(\because \frac{18\theta^4}{n^2} + \frac{6\theta^3}{n^3} > 0\right)$$

นั่นคือ ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)}{n^3}$ มีค่ามากกว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว

หาประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)}{n^3}$

$$= \frac{-\dfrac{[\tau'(\theta)]^2}{E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)}}{V\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-2\right)}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{9\theta^5}{n}}{\dfrac{9\theta^5}{n} + \dfrac{18\theta^4}{n^2} + \dfrac{6\theta^3}{n^3}}$$

$$= \frac{3n^2\theta^2}{3n^2\theta^2 + 6n\theta + 2}$$

ตารางที่ 2 ประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\right)}{n^3}$ ที่ค่า n และ θ ต่าง ๆ

θ \ n	20	40	60	80	100
0.1	0.4615	0.6486	0.7397	0.7934	0.8287
0.2	0.4800	0.7934	0.8538	0.8868	0.9077
0.3	0.7397	0.8538	0.8983	0.9221	0.9368
0.4	0.7934	0.8868	0.9221	0.9406	0.9520
0.5	0.8287	0.9077	0.9368	0.9520	0.9613
0.6	0.8538	0.9221	0.9469	0.9597	0.9676
0.7	0.8724	0.9326	0.9542	0.9653	0.9721
0.8	0.8868	0.9406	0.9597	0.9695	0.9755
0.9	0.8983	0.9469	0.9641	0.9729	0.9782

จากตารางทั้งสอง พบว่าเมื่อ n และ θ มีค่าเพิ่มมากขึ้น ประสิทธิภาพของตัวประมาณจะมีค่าเข้าใกล้ 1

3.3.3 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $e^{-\theta}$ และการหาความแปรปรวนและประสิทธิภาพของตัวประมาณ

$$P(X_1 = 0) = \frac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} = e^{-\theta}$$

ให้ $$Y = \begin{cases} 1 & ; \quad X_1 = 0 \\ 0 & ; \quad X_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{1} y \cdot P(Y = y) \\ &= 0.P(Y=0) + 1.P(Y=1) \\ &= P(Y = 1) \\ &= P(X_1 = 0) = e^{-\theta} \end{aligned}$$

ดังนั้น Y เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $e^{-\theta}$

ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $e^{-\theta}$ คือ $E(Y|t)$

$$\begin{aligned} E(Y|t) &= \sum_{y=0}^{1} y\, P(Y = y|t) \\ &= 0.P(Y = 0|t) + 1.P(Y = 1|t) \\ &= P(Y = 1|t) = P(X_1 = 0|t) \\ &= P(X_1 = 0 | X_1 + \ldots + X_n = t) \\ &= \frac{P(X_1 = 0, X_1 + \ldots + X_n = t)}{P(X_1 + \ldots + X_n = t)} \\ &= \frac{P(X_1 = 0)\, P(X_2 + \ldots + X_n = t)}{P(X_1 + \ldots + X_n = t)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบปัวส์ซองที่มีพารามิเตอร์เป็น $n\theta$

$$\therefore\ E(Y|t) = \frac{e^{-\theta}\frac{e^{-(n-1)\theta}[(n-1)\theta]^t}{t!}}{\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t$$

นั่นคือ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $e^{-\theta}$ คือ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}$$

การหาความแปรปรวนของตัวประมาณ $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X}$

$$\begin{aligned} V\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] &= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]^2 - \left[E\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]^2 \\ &= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] - e^{-2\theta} \end{aligned}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - e^{-2\theta}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-n\theta}}{y!} - e^{-2\theta}$$

$$= e^{-n\theta}e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}}{y!} - e^{-2\theta}$$

$$= e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta} - e^{-2\theta}$$

$$= e^{-2\theta+\frac{\theta}{n}} - e^{-2\theta}$$

$$= e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}}-1\right) > \frac{\theta e^{-2\theta}}{n}$$

$$\left(\because\ e^{\frac{\theta}{n}}-1 > \frac{\theta}{n}\right)$$

นั่นคือ ความแปรปรวนของตัวประมาณ $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ มีค่ามากกว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว

การหาประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X}$

$$= \frac{\frac{\theta e^{-2\theta}}{n}}{e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}}-1\right)} = \frac{\theta}{n\left(e^{\frac{\theta}{n}}-1\right)}$$

3.3.4 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta e^{-\theta}$ และการหาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$P(X_1 = 1) = \frac{e^{-\theta}\theta^1}{1!} = \theta e^{-\theta}$$

ให้ $Z = \begin{cases} 1 & ; \quad X_1 = 1 \\ 0 & ; \quad X_1 \neq 1 \end{cases}$

$$E(Z) = \sum_{z=0}^{1} z\, P(Z = z)$$

$$= 0.P(Z=0) + 1.P(Z=1)$$

$$= P(Z=1)$$

$$= P(X_1 = 1) = \theta e^{-\theta}$$

ดังนั้น Z เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\theta e^{-\theta}$

ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta e^{-\theta}$ คือ $E(Z|t)$

$$E(Z|t) = \sum_{z=0}^{1} z\, P(Z = z|t)$$

$$= 0.P(Z=0|t) + 1.P(Z=1|t)$$

$$= P(Z=1|t) = P(X_1 = 1|t)$$

$$= P(X_1 = 1 | X_1+\ldots+X_n = t)$$

$$= \frac{P(X_1 = 1, X_1+\ldots+X_n = t)}{P(X_1+\ldots+X_n = t)}$$

$$= \frac{P(X_1 = 1)\,P(X_2+\ldots+X_n = t-1)}{P(X_1+\ldots+X_n = t)}$$

$$= \frac{\theta e^{-\theta}\,\frac{e^{-(n-1)\theta}\left[(n-1)\theta\right]^{t-1}}{(t-1)!}}{\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^t \frac{t}{n-1}$$

นั่นคือ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta e^{-\theta}$ คือ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}\left(\frac{n\bar{X}}{n-1}\right)$$

การหาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)$$

$$V\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n}X_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n-1}\right)\right]^2 - \left[E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n}X_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n-1}\right)\right]\right]^2$$

$$= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2\sum_{i=1}^{n}X_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n-1}\right)^2\right] - \left(\theta e^{-\theta}\right)^2$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\left(\frac{y}{n-1}\right)^2\right]\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - \theta^2 e^{-2\theta}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\frac{(n-1)^{2y-2}y^2}{n^{2y}}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - \theta^2 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{e^{-n\theta}e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}}}{(n-1)^2}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^2 e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y}{y!} - \theta^2 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{(n-1)^2}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n} + \frac{(n-1)^4\theta^2}{n^2}\right] - \theta^2 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{\theta e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n} + \frac{(n-1)^2\theta^2 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^2} - \theta^2 e^{-2\theta} > \frac{\theta e^{-2\theta}(1-\theta)^2}{n}$$

$$= \frac{\theta e^{-2\theta}}{n}\left[e^{\frac{\theta}{n}} + \frac{(n-1)^2\theta e^{\frac{2\theta^2(1-2n)}{n}}}{n} - n\theta\right] > \frac{\theta e^{-2\theta}(1-\theta)^2}{n}$$

$$= \frac{\theta e^{-2\theta}}{n}\left[e^{\frac{\theta}{n}}\left\{1+\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right\} - n\theta\right] > \frac{\theta e^{-2\theta}(1-\theta)^2}{n}$$

$$\left(\because e^{\frac{\theta}{n}}\left\{1+\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right\} - n\theta > (1-\theta)^2\right)$$

นั่นคือความแปรปรวนของตัวประมาณ

$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n}X_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n-1}\right)$ มีค่ามากกว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว

3.3.5 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta^2 e^{-\theta}$ และการหาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$P(X_1 = 2) = \frac{e^{-\theta}\theta^2}{2}$$

ให้ $W = \begin{cases} 1 & ; \quad X_1 = 2 \\ 0 & ; \quad X_1 \neq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{w=0}^{1} w\,P(W = w) \\ &= 0.P(W = 0) + 1.P(W = 1) \\ &= P(W = 1) = P(X_1 = 2) \\ &= \frac{e^{-\theta}\theta^2}{2} \end{aligned}$$

$$E(2W) = \theta^2 e^{-\theta}$$

ดังนั้น 2W เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\theta^2 e^{-\theta}$

ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta^2 e^{-\theta}$ คือ $E(2W|t)$

$$\begin{aligned} E(2W|t) &= \sum_{w=0}^{1} 2w\,P(W = w|t) \\ &= 0.P(W = 0|t) + 2.P(W = 1|t) \\ &= 2P(W = 1|t) = 2P(X_1 = 2|t) \\ &= 2P(X_1 = 2|X_1+\ldots+X_n = t) \\ &= \frac{2P(X_1 = 2, X_1+\ldots+X_n = t)}{P(X_1+\ldots+X_n = t)} \\ &= \frac{2P(X_1 = 2)\,P(X_2+\ldots+X_n = t-2)}{P(X_1+\ldots+X_n = t)} \\ &= \frac{\frac{2\theta^2 e^{-\theta}}{2}\,\frac{e^{-(n-1)\theta}[(n-1)\theta]^{t-2}}{(t-2)!}}{\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}} \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^t \frac{t(t-1)}{(n-1)^2} \end{aligned}$$

นั่นคือ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $\theta^2 e^{-\theta}$ คือ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n}X_i}\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i\left(\sum_{i=1}^{n}X_i - 1\right)}{(n-1)^2}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}\frac{n\bar{X}(n\bar{X}-1)}{(n-1)^2}$$

การหาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{(n-1)^2}$$

$$V\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{(n-1)^2}\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{(n-1)^2}\right]^2 - \left[E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)}{(n-1)^2}\right]\right]^2$$

$$= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)^2}{(n-1)^4}\right] - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y} \frac{y^2(y-1)^2}{(n-1)^4}\right]\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y} \frac{y^2(y^2-2y+1)}{(n-1)^4}\right]\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^4}\left[\sum_{y=0}^{\infty} y^4\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - 2\sum_{y=0}^{\infty} y^3\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} + \sum_{y=0}^{\infty} y^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!}\right] - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^4}\left[\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^4\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-n\theta}}{y!} - 2\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^3\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-n\theta}}{y!} + \sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^2\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-n\theta}}{y!}\right] - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^4}\left[e^{-n\theta}e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^4 e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y}{y!} - 2e^{-n\theta}e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^3 e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y}{y!} + e^{-n\theta}e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y^2 e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y}{y!}\right] - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^4}\left[e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}\left\{\frac{(n-1)^8\theta^4}{n^4} + \frac{6(n-1)^6\theta^3}{n^3} + \frac{7(n-1)^4\theta^2}{n^2} + \frac{(n-1)^2\theta}{n}\right\} - 2e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}\left\{\frac{(n-1)^6\theta^3}{n^3} + \frac{3(n-1)^4\theta^2}{n^2} + \frac{(n-1)^2\theta}{n}\right\} + e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}\left\{\frac{(n-1)^2\theta}{n} + \frac{(n-1)^4\theta^2}{n^2}\right\}\right] - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{(n-1)^4\theta^4 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^4} + \frac{6(n-1)^2\theta^3 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^3} + \frac{7\theta^2 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^2} + \frac{\theta e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n(n-1)^2} - \frac{2(n-1)^2\theta^3 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^3} - \frac{6\theta^2 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^2} - \frac{2\theta e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n(n-1)^2} + \frac{\theta e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n(n-1)^2} + \frac{\theta^2 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^2} - \theta^4 e^{-2\theta}$$

$$= \frac{(n-1)^4\theta^4 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^4} + \frac{4(n-1)^2\theta^3 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^3} + \frac{2\theta^2 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}-n\theta}}{n^2} - \theta^4 e^{-2\theta} > \frac{\theta^3 e^{-2\theta}(2-\theta)^2}{n}$$

$$= \frac{\theta^3 e^{-2\theta}}{n}\left[e^{\frac{\theta}{n}}\left\{\frac{(n-1)^4\theta}{n^3} + \frac{4(n-1)^2}{n^2} + \frac{2}{n\theta}\right\} - n\theta\right] > \frac{\theta^3 e^{-2\theta}(2-\theta)^2}{n}$$

$$\left(\because e^{\frac{\theta}{n}}\left\{\frac{(n-1)^4\theta}{n^3} + \frac{4(n-1)^2}{n^2} + \frac{2}{n\theta}\right\} - n\theta > (2-\theta)^2\right)$$

นั่นคือ ความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-1\right)}{(n-1)^2}$$ มีค่ามาก

กว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว

3.3.6 การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $e^{-\theta}(1+\theta)$ และการหาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0 \text{ หรือ } X_1 = 1) &= P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) \\ &= e^{-\theta} + \theta e^{-\theta} = e^{-\theta}(1+\theta) \end{aligned}$$

ให้ $U = \begin{cases} 1 & ; \quad X_1 = 0,1 \\ 0 & ; \quad X_1 \neq 0,1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{u=0}^{1} u\,P(U=u) \\ &= 0.P(U=0) + 1.P(U=1) = P(U=1) \\ &= P(X_1 = 0 \text{ หรือ } X_1 = 1) = e^{-\theta}(1+\theta) \end{aligned}$$

ดังนั้น U เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $e^{-\theta}(1+\theta)$

ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $e^{-\theta}(1+\theta)$ คือ $E(U|t)$

$$E(U|t) = \sum_{u=0}^{1} u\,P(U = u|t)$$

$$= 0.P(U=0|t) + 1.P(U=1|t)$$

$$= P(U=1|t) = P(X_1=0|t) + P(X_1=1|t)$$

$$= P(X_1=0|X_1+\ldots+X_n=t) + P(X_1=1|X_1+\ldots+X_n=t)$$

$$= \frac{P(X_1=0 \cap X_1+\ldots+X_n=t)}{P(X_1+\ldots+X_n=t)} + \frac{P(X_1=1 \cap X_1+\ldots+X_n=t)}{P(X_1+\ldots+X_n=t)}$$

$$= \frac{P(X_1=0)P(X_2+\ldots+X_n=t)}{P(X_1+\ldots+X_n=t)} + \frac{P(X_1=1)P(X_2+\ldots+X_n=t-1)}{P(X_1+\ldots+X_n=t)}$$

$$= \frac{e^{-\theta}\,\dfrac{e^{-(n-1)\theta}[(n-1)\theta]^t}{t!}}{\dfrac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}} + \frac{\theta e^{-\theta}\,\dfrac{e^{-(n-1)\theta}[(n-1)\theta]^{t-1}}{(t-1)!}}{\dfrac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^t \left(1 + \frac{t}{n-1}\right)$$

นั่นคือ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ $e^{-\theta}(1+\theta)$ คือ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}\left(1+\frac{n\bar{X}}{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}\left(\frac{n-1}{n}+\bar{X}\right)\frac{n}{n-1}$$

ถ้า n มีค่ามาก

จะได้ $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$ และ $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}}\left(\frac{n-1}{n}+\bar{X}\right)\frac{n}{n-1} = e^{\bar{X}}(1+\bar{X})$

ซึ่งเป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

หาความแปรปรวนของตัวประมาณ

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)$$

$$V\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)\right]^2 - \left[E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)\right]\right]^2$$

$$= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)^2\right] - \left[e^{-\theta}(1+\theta)\right]^2$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\left(1+\frac{y}{n-1}\right)^2\right]\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\left\{1+\frac{2y}{n-1}+\frac{y^2}{(n-1)^2}\right\}\right]\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} + \frac{2}{n-1}\sum_{y=0}^{\infty} y\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{y=0}^{\infty} y^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2y}\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^y}{y!} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-n\theta}}{y!} + \frac{2}{n-1} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-n\theta}}{y!}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y^2\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y e^{-n\theta}}{y!} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= e^{-n\theta} e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y}{y!} + \frac{2e^{-n\theta} e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}}}{n-1} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y}{y!}$$

$$+ \frac{e^{-n\theta} e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n}}}{(n-1)^2} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y^2 e^{-\frac{(n-1)^2\theta}{n}}\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right]^y}{y!} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta} + \frac{2(n-1)\theta e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta}}{n} + \frac{\theta e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta}}{n}$$

$$+ \frac{(n-1)^2\theta^2 e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta}}{n^2} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= \left[1 + \frac{2(n-1)\theta}{n} + \frac{\theta}{n} + \frac{(n-1)^2\theta^2}{n^2}\right] e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= \left[\frac{n^2 + 2n(n-1)\theta + n\theta + (n-1)^2\theta^2}{n^2}\right] e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta}$$

$$= \left[\frac{n^2 + 2n^2\theta - n\theta + (n-1)^2\theta^2}{n^2}\right] e^{\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta} - (1+\theta)^2 e^{-2\theta} > \frac{\theta^3 e^{-2\theta}}{n}$$

$$= \frac{e^{-2\theta}}{n}\left[e^{\frac{\theta}{n}}\left\{\frac{n^2 + 2n^2\theta - n\theta + (n-1)^2\theta^2}{n}\right\} - n(1+\theta)^2\right] > \frac{\theta^3 e^{-2\theta}}{n}$$

$$\left(\because\ e^{\frac{\theta}{n}}\left\{\frac{n^2 + 2n^2\theta - n\theta + (n-1)^2\theta^2}{n}\right\} - n(1+\theta)^2 > \theta^3\right)$$

ความแปรปรวนของตัวประมาณ

$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1}\right)$ มีค่ามากกว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์-ราว

<u>หมายเหตุ</u> ในบทความนี้ไม่ได้แสดงวิธีการหาประสิทธิภาพของตัวประมาณของ $e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}$, $\theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$ เนื่องจากอยู่ในรูปฟังก์ชันที่ซับซ้อน

4. สรุปผล

การหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนเท่ากับขอบเขตต่ำสุด (MVBUE) และตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด (MVUE) เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง พบว่า $\overline{X}$ เป็น MVBUE ของ θ เมื่อมี MVBUE ของ θ แล้ว จะไม่มีตัวประมาณเช่นนั้นสำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ ของ θ อีก จึงไม่มี MVBUE ของ $\theta^2, \theta^3, e^{-\theta}, \theta e^{-\theta}$, $\theta^2 e^{-\theta}$ และ $e^{-\theta}(1+\theta)$ แต่สามารถหา MVUE ได้ โดยที่ความแปรปรวนของตัวประมาณเหล่านี้มีค่ามากกว่าขอบเขตล่างของคราเมอร์ - ราว

5. เอกสารอ้างอิง

[1] ประชุม สุวัตถี. ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ. กรุงเทพ ฯ, โอเดียนสโตร์, 2527.

[2] Dudewicz, E. J. and Mishra, S. N. Modern Mathematical Statistics. John Wiley and Sons, New York, 1988.

[3] Larsen, R. J. and Marx, M. L. An Introduction to Mathematical Statistics and Its Application. 2 nd. ed., Prentice - Hall, New Jersey, 1986.

[4] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. Introduction to the Theory of Statistics. 3 rd. ed., McGraw Hill, Tokyo, 1974.

[5] Roussas, G. G. A Course in Mathematical Statistics. 2 nd. ed., Academic Press, San Diego, 1997.

[6] Wackerly, D. D., Mendenhall, W. III, and Scheaffer, R. L. Mathematical Statistics with Applications. 5 th. ed., Duxbury Press, Belmont, 1996.