วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 20 ฉบับที่ 2 เดือนกรกฎาคม-ธันวาคม 2554

แคลคูลัสเชิงเศษส่วน: อนุพันธ์เชิงเศษส่วนและการประยุกต์

Fractional Calculus : Fractional Derivative and Application

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

Wichai Witayakiattilerd

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร

บทคัดย่อ

อนุพันธ์เชิงเศษส่วน เป็นส่วนหนึ่งของ แคลคูลัสเชิงเศษส่วนซึ่งกำลังเป็นที่สนใจกันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน ในบทความนี้นำเสนอ แนวความคิดในการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนโดยเริ่มจากนิยามของอนุพันธ์อันดับที่เป็นจำนวนนับ และได้ยกตัวอย่างเพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้น

คำสำคัญ : แคลคูลัสเชิงเศษส่วน อนุพันธ์เชิงเศษส่วน ฟังก์ชันแกมมา การกระจายทวินาม

Abstract

Fractional derivative is a part of fractional calculus which has been extensively interested in recent year. In this paper, we introduce the definition of fractional derivative extending from the definition of the derivative by which its order is given by the positive integer and some examples are provided for more understanding.

Keywords: fractional calculus, fractional derivative, gamma function, binomial distribution.

1. บทนำ

ผู้อ่านคงคุ้นหูกันเป็นอย่างดี กับคำว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่ง อนุพันธ์อันดับสอง น้อยนักที่จะได้ยิน คำว่าอนุพันธ์อันดับครึ่ง อันดับเศษหนึ่งส่วนสาม ทำไมถึงเป็นเช่นนั้น ก็เพราะว่าการพูดถึงอันดับมักจะใช้จำนวนนับแทนอันดับ แต่ถึงกระนั้นก็เชื่อว่ามีคนอีกไม่น้อยที่สงสัยว่า อนุพันธ์อันดับครึ่งนั้นมีหรือไม่ ถ้ามี แล้วอนุพันธ์อนุพันธ์อันดับครึ่งนิยามอย่างไร และ อนุพันธ์อันดับครึ่ง ของอนุพันธ์อันดับครึ่งของ x จะเท่ากับ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ x หรือไม่

การอธิบายความหมายของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนให้เข้าใจอย่างลึกซึ้งโดยผ่านสัญลักษณ์และบทนิยามต่างๆทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นเรื่องยาก ดังนั้นผู้เขียนขอเริ่มจากอนุพันธ์อันดับที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

2. อนุพันธ์อันดับ n

ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถอธิบายได้ด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลง ของค่าของฟังก์ชัน ที่จุดใดๆ เมื่อ จุดนั้น มีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย

ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ x เป็นจุดที่พิจารณาและเปลี่ยนแปลงไปเป็น $x+h$

จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด x เมื่อ x มีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย คือ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

ซึ่งถ้าลิมิตนี้มีค่า แล้วจะ เรียก ค่าลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ ของ f ที่จุด x** หรือ **อนุพันธ์อันดับหนึ่ง ของ f ที่จุด x** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x)$ หรือ $\frac{df(x)}{dx}$ หรือ $Df(x)$

ถ้าให้ $g(x)=Df(x)$ เมื่อ g หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$Dg(x)=D(Df(x))=\lim_{h\to 0}\frac{Df(x+h)-Df(x)}{h} \tag{2}$$

โดย (1) จะได้ว่า

$$D^2f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{2}(-1)^m\binom{2}{m}f(x+(2-m)h)}{h^2} \tag{3}$$

เมื่อ $D^2f(x)=D(Df(x))$ และ $\binom{m}{n}=\frac{m!}{m!(m-n)!}$ สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ m และ n ซึ่ง $m\geq n$

ซึ่งถ้าลิมิตนี้มีค่า แล้วจะเรียก $D^2f(x)$ ว่าอนุพันธ์อันดับสอง ของ f

โดยกระบวนการทำซ้ำ สำหรับการหาอนุพันธ์อันดับ n ของ f จะได้ว่า

$$D^nf(x)=D(D^{n-1}f(x)) \tag{4}$$

หรือ

$$D^nf(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}f(x+(n-m)h)}{h^n} \tag{5}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนนับซึ่งรวมกรณีที่ $n = 0$ ด้วย โดยที่ D^0 คือตัวดำเนินการเอกลักษณ์

สำหรับพจน์ทางขวามือของสมการ (5) ถ้านิยามตัวดำเนินการการกระจัด (displacement operator)

$$d_h f(x) \coloneqq f(x+h) \tag{6}$$

แล้วโดยใช้กระบวนการทำซ้ำ จะได้

$$d_h^n f(x) = f(x+nh) \tag{7}$$

และ

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x+(n-m)h)$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} d_h^{m-n} f(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{d_h - 1}{h}\right)^n f(x)$$

ดังนั้นสามารถเขียนอนุพันธ์อันดับ n ในรูป

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{d_h - 1}{h}\right)^n f(x) \tag{8}$$

3. อนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูปสูตรทวินาม

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนโดยใช้แนวความคิดในรูปแบบเช่นเดียวกับสูตร (8) ซึ่งอาศัยรูปวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบททวินาม

บทนิยาม 3.1 นิยามฟังก์ชันแกมมา ดังนี้

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

และ

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)} \qquad \text{เมื่อ } -k < x < 0$$

สำหรับ จำนวนเต็มบวก k ใดๆ

โดยที่มีข้อตกลงว่า $\frac{1}{\Gamma(-x)} = 0$ เมื่อ $x = 0,1,2,\ldots$

บทนิยาม 3.2 สำหรับจำนวนจริง x นิยาม รูปวางนัยทั่วไปสำหรับแฟคทอเรียล ดังต่อไปนี้

1. $x! = \Gamma(x+1)$ สำหรับทุกๆ $x \neq 1,2,\ldots$
2. $\frac{1}{(-x)!} = 0$ เมื่อ $x = 1,2,\ldots$

บทนิยาม 3.3 รูปวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบททวินาม กำหนดโดย

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} x^m y^{\alpha-m} \tag{9}$$

ซึ่งจะลู่เข้าเมื่อ $|y| < |x|$ โดยที่ $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$

เมื่อใช้แนวความคิดจากสูตร (8) และใช้รูปวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบททวินาม สามารถนิยามอนุพันธ์อันดับ α เมื่อ α เป็นจำนวนจริง ดังนี้

$$D^{\alpha} f(x) := \lim_{h \to 0} \left(\frac{d_h - 1}{h}\right)^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x + (\alpha - m)h) \tag{10}$$

เมื่อ ลิมิตในสมการ (10) มีค่า

ถึงแม้ว่า α จะเป็นจำนวนจริงใดๆ แต่ก็ยังคงเรียก ว่าอนุพันธ์เชิงเศษส่วน (fractionalderivative)

นอกจากนี้จากสูตร (10) แสดงได้โดยไม่เป็นการยากว่าตัวดำเนินอนุพันธ์เชิงเศษส่วนมีสมบัติเชิงเส้น

นั่นคือ $$\mathrm{D}^{\alpha}[af(x) + bg(x)] = a\mathrm{D}^{\alpha} f(x) + b\mathrm{D}^{\alpha} g(x) \tag{11}$$

อนุพันธ์เชิงเศษส่วนของฟังก์ชันเอกโปเนนเซียล

สำหรับอนุพันธ์อันดับ α $(\alpha \in \mathbb{R})$ ของฟังก์ชันเอกโปเนนเซียล e^{ax} $(a \in \mathbb{C})$

จากสูตร (10) ได้ว่า

$$D^{\alpha}e^{ax} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{\alpha}{m}e^{a(x+(\alpha-m)h)}}{h^{\alpha}}$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}(-1)^m(e^{ah})^{(\alpha-m)}}{h^{\alpha}}$$

$$= e^{ax}\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{h}\right)^{\alpha} = a^{\alpha}e^{ax} \qquad (12)$$

นอกจากนี้ สามารถประยุกต์อนุพันธ์เชิงเศษส่วนของฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลกับฟังก์ตรีโกณมิติ ดังนี้

$$D^{\alpha}\sin ax = D^{\alpha}\left(\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2}\right) = \frac{D^{\alpha}e^{iax}-D^{\alpha}e^{-iax}}{2}$$

$$= \frac{(ia)^{\alpha}e^{iax}-(-ia)^{\alpha}e^{-iax}}{2} = \frac{a^{\alpha}e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}e^{iax}-a^{\alpha}e^{-\frac{i\alpha\pi}{2}}e^{-iax}}{2}$$

$$= a^{\alpha}\left[\frac{e^{\left(\frac{\alpha\pi}{2}+ax\right)i}-e^{-\left(\frac{\alpha\pi}{2}+ax\right)i}}{2}\right] = a^{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}+ax\right) \qquad (13)$$

และในทำนองเดียวกัน $D^{\alpha}\cos ax = a^{\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}+ax\right)$

4. อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโดยรีมันน์ ลียูวิลล์ (Riemann-Liouville)

รีมันน์ และลียูวิลล์ได้นิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูปของอินทิกรัลซึ่งจะขออธิบายแนวคิดผ่านตัวดำเนินการผกผันของอนุพันธ์อันดับ n เมื่อ n เป็นจำนวนนับ โดยที่รวมกรณีที่ $n = 0$ ด้วย และกำหนดให้ D^0 เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้

$$D^{-1}f(x) := \int_0^x f(t)dt \qquad (14)$$

พิจารณา ตัวดำเนินการผกผันของอนุพันธ์อันดับ 2 ของฟังก์ชัน f โดยการเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตได้

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x \int_0^{t_2} f(t_1)dt_1dt_2 = \int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)dt_2dt_1$$

$$= \int_0^x f(t_1) \int_{t_1}^x dt_2dt_1 = \int_0^x (x-t)f(t)dt \quad (15)$$

และกระบวนการทำซ้ำ จะได้ตัวดำเนินการผกผันของอนุพันธ์อันดับ n เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ในรูป

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \quad (16)$$

หรือ

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \quad (17)$$

ดังนั้นรีมันน์ และลียูวิลล์จึงได้นิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α $(\alpha \in \mathbb{R})$ โดยรูปวางในทั่วไปของสูตร (17) ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1 ให้ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน (ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้) และ h เป็นจำนวนจริงบวก นิยาม ผลต่างเชิงเศษส่วนอันดับ α $(\alpha \in \mathbb{R})$ ของ f โดย

$$\Delta^\alpha f(x) := \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x+(\alpha-m)h) \quad (18)$$

เมื่อ $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ สำหรับจำนวนจริง a และ b

และนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α $(\alpha \in \mathbb{R})$ โดย

$$D^\alpha f(x) := \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^\alpha f(x)}{h^\alpha} \quad (19)$$

ถ้าลิมิตของสมการ (19) หาค่าได้

ทฤษฎีบท 4.2 [1-4] (อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโดยรีมันน์ ลียูวิลล์) ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีสมบัติตามบทนิยาม 4.1 จะได้ว่า

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha-1}f(t)dt \qquad \text{เมื่อ } \alpha < 0 \quad (20)$$

และ $$\mathrm{D}^\alpha f(x) = D^n(D^{\alpha-n}f(x)) \quad \text{เมื่อ } \alpha > 0 \quad (21)$$

โดยที่ n เป็นจำนวนนับซึ่ง $0 < n-\alpha < 1$

โดยใช้ ทฤษฎีบท 4.2 และการอินทิเกรตทีละส่วน สามารถหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนอันดับ α ได้เป็น

$$D^{\alpha}x^{r} = \frac{r!}{(r-\alpha)!}x^{r-\alpha} \tag{22}$$

เช่น $D^{1/2}x = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)!}x^{1-1/2} = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}!} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$

ปัญหาที่น่าสนใจประการหนึ่งคือ $D^{1/2}(D^{1/2}x) = Dx$ หรือไม่ พิจารณา

$$D^{1/2}(D^{1/2}x) = D^{1/2}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}D(x^{1/2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1/2!}{(1/2-1/2)!}x^{1/2-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

และ เนื่องจาก $Dx = 1$ ดังนั้นจึงได้ว่า $D^{1/2}(D^{1/2}x) = Dx$

คำตอบของคำถามนี้สนับสนุน สมบัติที่สำคัญประการหนึ่ง คือ

$$D^{\alpha}\left(D^{\beta}f(x)\right) = D^{\alpha+\beta}f(x) \tag{23}$$

เรียกสมบัตินี้ว่า สมบัติกึ่งกลุ่ม (semigroup property) ซึ่งจะแสดงให้เห็นในหัวข้อถัดไป

5. อนุพันธ์เชิงเศษส่วนนิยามโดยผลการแปลงลาปลาซ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วน โดยผลการแปลงลาปลาซ

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ตัวดำเนินการการแปลงลาปลาซ กำหนดโดย

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-tx}f(x)dx \tag{24}$$

ซึ่งมีตัวดำเนินการผกผันการแปลงลาปลาซ คือ

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tx}f(x)dx \tag{25}$$

เมื่อ a เป็นจำนวนที่เลือกให้มีค่ามากกว่าส่วนจริงของจุดซิงกูลาร์ของ f

เป็นที่ทราบกันว่า ผลการแปลงลาปลาซของ อนุพันธ์อันดับ m ของฟังก์ชัน f คือ

$$\mathcal{L}\{D^{m}f(x)\} = t^{m}\mathcal{L}\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{m-1} t^{k}(D^{m-k-1}f)(0) \tag{26}$$

ถ้าสมมติว่า $(D^{m-k-1}f)(0) = 0$ ทุกๆ $k = 0,1,\ldots,m-1$ แล้วจะได้ว่า

$$\mathcal{L}\{D^m f(x)\} = t^m \mathcal{L}\{f(x)\} \tag{27}$$

โดยอาศัยการวางนัยทั่วไปของสมการ (27) สามารถนิยาม อนุพันธ์เชิงเศษส่วน อันดับ α โดย

$$D^\alpha f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{t^\alpha \mathcal{L}\{f(x)\}\right\} \tag{28}$$

ภายใต้เงื่อนไขคือ $(D^k f)(0) = 0$ ทุกๆ $k = 0,1,\ldots,m-1$ เมื่อ m เป็นจำนวนนับซึ่ง $0 < m-\alpha < 1$

ผู้เขียนย้อนกลับไปที่สมบัติกึ่งกลุ่มของตัวดำเนินการอนุพันธ์เชิงเศษส่วนที่กล่าวในตอนท้ายของหัวข้อ 4 โดยใช้สูตร (28)

$$\mathcal{L}\left\{D^\alpha\left(D^\beta f(x)\right)\right\} = t^\alpha \mathcal{L}\{D^\beta f(x)\} = t^\alpha t^\beta \mathcal{L}\{f(x)\}$$
$$= t^{\alpha+\beta}\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{D^{\alpha+\beta} f(x)\}$$

ดังนั้น $D^\alpha\left(D^\beta f(x)\right) = D^{\alpha+\beta} f(x)$

6. การประยุกต์อนุพันธ์เชิงเศษส่วน

ในปัจจุบันได้มีการประยุกต์อนุพันธ์เชิงเศษส่วนกับบางปัญหาทางวิทยาศาสตร์มากขึ้นอาทิเช่น ปัญหาทางฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ ชีววิทยา เคมี เป็นต้น เนื่องจากบางปัญหาไม่สามารถอธิบายหรืออธิบายได้ไม่เสมือนจริงด้วยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และบางปัญหาผู้ศึกษาต้องการทราบแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันสถานะตามอันดับของอัตราการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง เช่น แบบจำลองที่อธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -\omega x(t) \ ; t > 0 \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1 \end{cases} \tag{29}$$

สำหรับ $0 < \alpha < 1$ จะมีผลเฉลยในรูป [ดู [4]]

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \tag{30}$$

และ สำหรับ $1 < \alpha < 2$ จะมีผลเฉลยในรูป

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + x_1 t E_{\alpha,2}(-\omega t^\alpha) \tag{31}$$

เมื่อ $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$ สำหรับทุกๆ $\alpha, \beta > 0$ และ $z \in \mathbb{C}$

ผู้ศึกษาบางท่านสนใจระบบสมการ (29) เมื่อ α เข้าใกล้ 0 และ α เข้าใกล้ 1 เป็นต้น

สำหรับในบทความนี้ผู้เขียนขอยกตัวอย่างการประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนซึ่งอธิบายเชิงพลศาสตร์ของโปรตีน

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนเชิงพลศาสตร์ของโปรตีน

Glöckle และ Nonnenmacher [ดู[5]] ได้อธิบายการเข้าจับกันใหม่ของ ลิแกนด์ไปยัง ฮีมไอรอน ของ ไมโอโกบิน (Mb) หลังจากที่เกิดปรากฏารณ์ แฟลช ดิสโซคิเอชัน ผ่านสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเศษส่วนเชิงพลศาสตร์ของโปรตีน

$$\tau_0{}^{-\alpha} D^\alpha N(t) + N(t) - 1 = 0 \tag{32}$$

เมื่อ $N(t)$ แทนจำนวนลิแกนด์อิสระ ที่เวลา t และ τ_0 แทนเวลาเริ่มต้นที่ไม่เท่ากับศูนย์

ซึ่งมีผลเฉลย คือ

$$N(t) = E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^\alpha\right) \tag{33}$$

จากผลเฉลยเห็นชัดว่า จำนวนลิแกนด์อิสระน้อยลงเมื่อเวลาผ่านไปนานขึ้นและผลเฉลยนั้นยังขึ้นกับอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์อีกด้วย

7. สรุป

สำหรับบทความนี้ ผู้เขียนได้นำเสนอแนวความคิดเบื้องต้นสำหรับการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วน ยังมีการนิยามอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบอื่นอีกซึ่งไม่ได้นำเสนอในบทความนี้ เช่น อนุพันธ์เชิงเศษส่วนโดยคาปูโต (Caputo) เป็นต้น ผู้เขียนได้นำเสนอตัวอย่างและการประยุกต์บางส่วนโดยละเว้นการแสดงที่มาของแบบจำลองนั้นเพื่อให้ผู้อ่านได้เห็นภาพการนำไปใช้ในปัญหาโลกจริง

กิติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ สาขาคณิตศาสตร์ และ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่เปิดโอกาสพื้นที่สำหรับการนำเสนองานวิชาการและงานวิจัยสำหรับอาจารย์และนักวิจัยรุ่นใหม่

เอกสารอ้างอิง

[1] Jumarie, G., 2007. Fractional Partial Differential Equations and Modified Riemann -*Lio*uville Derivative new Methods for Solution. *J. Appl. Math and Computing,* 24(1-2), 31-48.

[2] Miller, K. S. and Ross, B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Willey, New York.

[3] Witayakiattilerd, W. and Chonwerayuth, A., 2011. Fractional Integro-Differential Equations of Mixed Type with Solution Operator and Optimal Controls. *Journal of Mathematics Research (JMR)*, 3(3), 140-152.

[4] Witayakiattilerd, W., 2010. Optimal control of systems governed by impulsive fractional integro- differential equations. Chulalongkorn, Bangkok.

[5] 7Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, USA.