การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยล็อก-นอร์มัลบนพื้นฐานการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด
Interval estimation for a log-normal mean based on an asymptotic normal distribution of maximum likelihood estimator

จุฬารัตน์ ชุมนวล
Jularat Chumnaul
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ สงขลา 90110

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงล็อก-นอร์มัลบนพื้นฐานการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าแบบช่วงที่เสนอกับวิธีเดิม 4 วิธี ได้แก่ วิธีพื้นฐาน วิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟ และวิธีค็อกซ์ เกณฑ์ที่ใช้ในการตรวจสอบความผิดพลาดและความน่าเชื่อถือของวิธีการประมาณค่าแบบช่วงแต่ละวิธีจะพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น โดยใช้เทคนิคการจำลองข้อมูลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปทางสถิติ (Minitab 14.0) และทำการทดลองซ้ำจำนวน 1,000 รอบ ผลการจำลองข้อมูล พบว่า เมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าน้อย ($\sigma = 0.1$) ช่วงความเชื่อมั่นวิธีพื้นฐาน วิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธีค็อกซ์ และวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยสำหรับทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเพิ่มขึ้นเป็น 0.50 ($\sigma = 0.50$) ช่วงความเชื่อมั่นวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธีค็อกซ์ และวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 30 ขึ้นไป โดยวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีการประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพดีที่สุดเนื่องจากให้ช่วงความเชื่อมั่นที่น้อยที่สุด และเมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเพิ่มขึ้นเป็น 1.0 ($\sigma = 1.0$) มีเพียงการประมาณค่าแบบช่วงวิธีค็อกซ์และวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดยังคงเป็นวิธีการประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด เนื่องจากให้ช่วงความเชื่อมั่นที่น้อยที่สุด

คำสำคัญ: การประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติ, ตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด, ความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง, ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

E-mail address : jularat.c@psu.ac.th โทรศัพท์ : 0866724468

Abstract

The purpose of this research is to propose the interval estimation for the mean of a log-normal distribution based on an asymptotic normal distribution of maximum likelihood estimator, and to compare the coverage probability and average length with four methods: the naïve method, large-sample approach, Angus's conservative method and Cox's method. The criteria to evaluate an error and reliability of each estimation method is determined by the coverage probability and average length of the confidence interval, using data simulation with statistical software (Minitab 14.0) and the experiment repeats 1,000 times for each situation. The simulation study shows that when the standard deviation is small ($\sigma = 0.1$), the naïve method, large-sample approach, Cox's method, and asymptotic normal distribution of MLE method gives the coverage probability close to the nominal confidence of the interval and short average length for all sample sizes. When the standard deviation increase to 0.5 ($\sigma = 0.5$), the large-sample approach, Cox's method, and asymptotic normal distribution of MLE method gives the coverage probability close to the nominal confidence of the interval when the sample size is 30 or more, and the asymptotic normal distribution of MLE method has the best performance because of the shortest average length. When the standard deviation increase to 1.0 ($\sigma = 1.0$), only the Cox's method and asymptotic normal distribution of MLE method gives the coverage probability close to the nominal confidence of the interval, and the asymptotic normal distribution of MLE method still has better performance than the Cox's method because of the shorter average length.

Keyword: asymptotic normal distribution, maximum likelihood estimator, coverage probability, average length

1. บทนำ

การแจกแจงล็อก-นอร์มัล (Log-Normal Distribution) เป็นการแจกแจงหนึ่งที่ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับงานในด้านต่างๆอย่างกว้างขวาง ไม่ว่าจะเป็นงานทางด้านวิทยาศาสตร์การแพทย์และสาธารณสุข งานทางด้านเศรษฐศาสตร์และบริหารธุรกิจ หรืองานทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง งานที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลชั่วชีวิต (Lifetime Data) หรืออายุการใช้งาน (Failure Time) ตัวอย่างเช่น ในทางการแพทย์และสาธารณสุข การแจกแจงล็อก-นอร์มัลใช้ในการอธิบายระยะเวลาที่ใช้ในการผ่าตัดคนไข้ ระยะเวลาการเติบโตของเซลล์มะเร็ง ระยะเวลาการแพร่ระบาดของโรค ระยะเวลาที่รอดชีวิตของผู้ป่วยจากการได้รับการรักษาทางการแพทย์ ฯลฯ ในทางเศรษฐศาสตร์และบริหารธุรกิจ การแจกแจงล็อก-นอร์มัลใช้อธิบายการกระจายรายได้ อธิบายจำนวนเงินผลตอบแทนที่บริษัทประกันภัยต้องจ่ายให้กับลูกค้าในแต่ละปี

ฯลฯ หรือในทางวิศวกรรมศาสตร์ การแจกแจงล็อก-นอร์มัลใช้อธิบายระยะเวลาที่ชิ้นส่วนอุปกรณ์จะหมดอายุการใช้งาน ระยะเวลาที่ใช้สำหรับการซ่อมแซมทางอากาศ เป็นต้น โดยค่าที่ได้จากการวัดดังกล่าวอาจจะอยู่ในรูปของระยะเวลาซึ่งมีหน่วยเป็นวินาที นาที หรือชั่วโมง หรืออยู่ในรูปของจำนวนเงินซึ่งมีหน่วยเป็นสตางค์หรือบาท ค่าเหล่านี้ในทางสถิติศาสตร์เรียกว่า ค่าของตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ซึ่งเกิดจากกลไกที่เรียกว่า การทดลองสุ่ม (Random Experiment) เมื่อทำการสมมติว่า กลไกนี้มีการทำงานซ้ำเหมือนเดิมและต่อเนื่องอย่างไม่มีที่สิ้นสุด และการทำงานซ้ำๆของแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน กระบวนการดังกล่าวจึงเปรียบเสมือนการจำลองการเกิดขึ้นของประชากรอนันต์ (Infinite Population) ดังนั้น การจัดทำข้อสรุปเกี่ยวกับประชากรที่มีการแจกแจงล็อก-นอร์มัลที่ต้องการ จึงดำเนินการโดยใช้ตัวแบบความน่าจะเป็น (Probability Models) ที่กำกับการเกิดขึ้นของการทดลองสุ่ม ภายใต้การศึกษาพารามิเตอร์ (Parameter) ที่กำกับตัวแบบความน่าจะเป็นนั้น ซึ่งจะทำให้สามารถอธิบายลักษณะของประชากรได้อย่างครบถ้วน โดยในการศึกษาเพื่อหาข้อสรุปเกี่ยวกับพารามิเตอร์ จำเป็นต้องอาศัยระเบียบวิธีทางสถิติที่สำคัญ 2 ประเภท คือ การประมาณค่า (Estimation) และการทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis Testing)

ในการศึกษาครั้งนี้จะพัฒนาตัวประมาณแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล ซึ่ง วิธีการสร้างตัวประมาณแบบช่วงนั้นมีอยู่ด้วยกันหลายวิธี แต่วิธีที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในทางสถิติศาสตร์ มีอยู่ 2 วิธี คือ การใช้ส่วนกลับของสถิติทดสอบ (Inverting a Test Statistics) และการใช้ปริมาณหมุน (Pivotal Quantity) โดยทั้งสองวิธีนี้ส่วนใหญ่นำเอาผลจากทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) มาประยุกต์ใช้ การสร้างตัวประมาณแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล ด้วยวิธีการทั้ง 2 วิธีดังกล่าวยังเกิดปัญหาคือ การสร้างตัวประมาณแบบช่วงโดยใช้ส่วนกลับของตัวสถิติทดสอบไม่สามารถทำได้ เนื่องจากยังไม่มีการสร้างตัวสถิติทดสอบที่ชัดเจนสำหรับทดสอบค่าเฉลี่ยของการแจกแจงล็อก- นอร์มัล ทำได้เพียงอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณค่า p-value สำหรับการทดสอบสมมติฐานเท่านั้น ซึ่งมีวิธีดำเนินการที่ค่อนข้างยุ่งยากซับซ้อน ส่วนการสร้างตัวประมาณแบบช่วงโดยใช้ปริมาณหมุน คำถามที่เกิดขึ้นคือปริมาณหมุนใดจะให้ตัวประมาณแบบช่วงที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด [1] ดังนั้น ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจึงได้เสนอวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงล็อก-นอร์มัลที่สร้างโดยอาศัยพื้นฐานการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าแบบช่วงวิธีที่เสนอกับวิธีเดิม ซึ่งได้แก่ วิธีพื้นฐาน (Naïve Method) วิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ (Large-Sample Approach) วิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟ (Angus's Conservative Method) และวิธีค็อกซ์ (Cox's Method) โดยเกณฑ์ที่ใช้ในการตรวจสอบความผิดพลาดและความเชื่อถือได้ของวิธีการประมาณค่าแบบช่วงแต่ละวิธีจะพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง (Coverage Probability) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length)

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 การแจกแจงล็อก-นอร์มัล (Log-Normal Distribution)

2.1.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function: PDF) ของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงล็อก-นอร์มัลแล้ว ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ คือ

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{1}$$

สำหรับ $\sigma > 0$, $-\infty < \mu < \infty$ และ $0 \le x < \infty$ เมื่อ μ และ σ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล โดยที่ μ เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Scale Parameter) และ σ เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape Parameter) ของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น [2]

หมายเหตุ ถ้าให้ $Y_i = \ln X_i$ จะได้ว่า $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

2.1.2 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงล็อก-นอร์มัลด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ แล้ว ค่าเฉลี่ย $E(X)$ และความแปรปรวน $V(X)$ ของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล คือ

$$E(X) = \psi = \exp\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right] \tag{2}$$

$$Var(X) = \left[\exp(\sigma^2) - 1\right]\left[\exp(2\mu + \sigma^2)\right] \tag{3}$$

2.2 การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล

2.2.1 วิธีพื้นฐาน (Naïve method)

การประมาณค่าแบบช่วงวิธีพื้นฐาน เสนอโดย Patterson ในปี ค.ศ. 1969 [3] การประมาณค่าแบบช่วงวิธีนี้ประกอบด้วย 2 ขั้นตอนที่สำคัญคือ ขั้นตอนแรก เป็นขั้นตอนของการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ μ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่แปลงโดยใช้ฟังก์ชันลอการิทึม $Y = \ln X$ สำหรับขั้นตอนนี้อาศัยทฤษฎีการแจกแจงปกติ (Normal Theory) มาแปลงตัวแปรสุ่ม $\bar{Y}$ ให้เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (Z) จากนั้นนำตัวแปรสุ่มใหม่ที่ได้มาใช้เป็นปริมาณหมุน (Pivotal Quantity หรือ Pivot) เนื่องจากในการสร้างช่วงความเชื่อมั่น ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ μ คือ

$$\bar{y} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s_y}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

ส่วนขั้นตอนที่สอง เป็นขั้นตอนของการแปลงขีดจำกัดของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ μ กลับไปเป็นขีดจำกัดของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ ψ โดยใช้ฟังก์ชันแอนติลอการิทึม (Anti-Logarithm Transformation) ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ ψ คือ

$$\exp\left(\bar{y} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s_y}{\sqrt{n}}\right) \tag{5}$$

2.2.2 วิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ (Large-Sample Approach)

การประมาณค่าแบบช่วงวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ เสนอโดย Aitchison และ Brown ในปี ค.ศ. 1957 [4] หลักการในการประมาณค่าแบบช่วงวิธีนี้อาศัยผลจากทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง $\dfrac{\bar{X}-E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})/n}} \sim N(0,1)$ เมื่อขนาดตัวอย่างเข้าใกล้อนันต์ ($n \to \infty$) มาใช้เป็นปริมาณหมุนในการสร้างช่วงความเชื่อมั่น ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ ψ คือ

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s_x}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

2.2.3 วิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟ (Angus's Conservative Method)

การประมาณค่าแบบช่วงวิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟเสนอโดย Angus ในปี ค.ศ. 1988 [5] หลักการในการประมาณค่าแบบช่วงวิธีนี้อาศัยการลู่เข้าสู่การแจกแจงปกติมาตรฐานของตัวประมาณ $\bar{Y}+\dfrac{S_Y^2}{2}$ ตามทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง เมื่อ n มีขนาดใหญ่ ดังนั้น จะได้ปริมาณหมุนในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ $\ln\psi$ คือ

$$T(\psi)=\frac{\left(\bar{Y}+\dfrac{S_Y^2}{2}-\ln\psi\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\left\{S_Y^2\left(1+\dfrac{S_Y^2}{2}\right)\right\}}} \tag{7}$$

สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ปริมาณหมุนข้างต้นจะมีการแจกแจงเช่นเดียวกับ

$$T(\sigma)=\frac{N+\sigma\dfrac{\sqrt{n}}{2}\left(\dfrac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}-1\right)}{\sqrt{\left\{\dfrac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}\left(1+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}\right)\right\}}} \tag{8}$$

เมื่อ N และ $\chi^2_{(n-1)}$ เป็นอิสระกัน โดยที่ N คือ การแจกแจงปกติมาตรฐาน และ $\chi^2_{(n-1)}$ คือ การแจกแจงไค-สแควร์ ที่มีองศาเสรีเท่ากับ $n-1$

ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $\ln\psi$ คือ

$$\bar{y}+\frac{s_y^2}{2}-\frac{t_{1-\alpha/2,n-1}}{\sqrt{n}}\sqrt{s_y^2\left(1+\frac{s_y^2}{2}\right)} \le \ln\psi \le \bar{y}+\frac{s_y^2}{2}+\frac{q_{\alpha/2,n-1}}{\sqrt{n}}\sqrt{s_y^2\left(1+\frac{s_y^2}{2}\right)}$$

เมื่อ $t_{1-\alpha,(n-1)}$ คือ เปอร์เซ็นไทล์ที่ $1-\alpha$ ของการแจกแจงที (t-Distribution) ที่มีองศาเสรีเท่ากับ $n-1$

และ $q_{\alpha,(n-1)}=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha,(n-1)}}-1\right)}$ และจะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ ψ

คือ

$$\exp\left(\bar{y}+\frac{s_y^2}{2}-\frac{t_{1-\alpha/2,n-1}}{\sqrt{n}}\sqrt{s_y^2\left(1+\frac{s_y^2}{2}\right)}\right) \le \psi \le \exp\left(\bar{y}+\frac{s_y^2}{2}+\frac{q_{\alpha/2,n-1}}{\sqrt{n}}\sqrt{s_y^2\left(1+\frac{s_y^2}{2}\right)}\right)$$

2.2.4 วิธีค็อกซ์ (Cox's Method)

การประมาณค่าแบบช่วงวิธีค็อกซ์ ถูกสร้างขึ้นตามแนวคิดของ Cox ซึ่งอาศัยข้อสังเกตจากการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติที่เสนอขึ้นโดย Land ในปี 1971 [6] โดยหลักการในการประมาณค่าแบบช่วงวิธีค็อกซ์อาศัยการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานของ $\bar{Y}+\frac{S_Y^2}{2}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่มีคุณสมบัติ UMVU (Uniformly Minimum Variance Unbiased) ของ $\ln\psi$ ตามคำจำกัดความของ Lehmann [7] โดยที่มีความแปรปรวนของตัวประมาณ คือ $\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^4}{2(n-1)}$ มาใช้เป็นปริมาณหมุนในการสร้างช่วงความเชื่อมั่น กล่าวคือ

$$\frac{\left(\bar{Y}+\frac{S_Y^2}{2}\right)-\ln\psi}{\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^4}{2(n-1)}\right)}} \sim N(0,1)$$

ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $\ln\psi$ ตามวิธีของค็อกซ์ คือ

$$\left(\bar{y}+\frac{s_y^2}{2}\right)\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{s_y^2}{2}+\frac{s_y^4}{2(n-1)}\right)}$$

และจะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ ψ คือ

$$\exp\left(\bar{y}+\frac{s_y^2}{2}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n}+\frac{s_y^4}{2(n-1)}}\right) \le \psi \le \exp\left(\bar{y}+\frac{s_y^2}{2}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n}+\frac{s_y^4}{2(n-1)}}\right)$$

2.2.5 วิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Asymptotic Normal Distribution of MLE Method)

ให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเดียวกัน คือ การแจกแจงล็อก-นอร์มัล (Log-normal Distribution) ภายใต้พารามิเตอร์ μ และ σ^2 และเป็นอิสระกันต่อกัน จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2\right]$$

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) ของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ คือ

$$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i}\right)\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\right]$$

และลอการิทึมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Log Likelihood Function) ของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ คือ

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)+\ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2$$

$$\therefore \ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+n\mu^2\right) \qquad (9)$$

การแจกแจงโดยประมาณของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ^2

การหาการแจกแจงโดยประมาณของตัวประมาณสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ^2 อาศัยคุณสมบัติตัวอย่างขนาดใหญ่ของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Large Sample Properties of Maximum Likelihood Estimators) โดยกำหนดให้ $R(\mu,\sigma^2)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}$ แทน สารสนเทศฟิชเชอร์ (Fisher Information) โดยที่

$$r_{11}=-E\left[\frac{\partial^2\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu^2}\right],\ r_{12}=r_{21}=-E\left[\frac{\partial^2\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu\,\partial\sigma^2}\right],\ r_{22}=-E\left[\frac{\partial^2\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^4}\right]$$

และความแปรปรวนของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ^2 คือ

$$V(\mu,\sigma^2)=\left[R(\mu,\sigma^2)\right]^{-1}$$

ดังนั้น สำหรับการหาการแจกแจงโดยประมาณของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล สามารถดำเนินการได้ดังนี้

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left[-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\mu\right) \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\mu\right)\right]$$

$$= -\frac{n}{\sigma^2} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left[-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\mu^2\right)\right]$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\mu^2\right) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^4} = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^4}\left[-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\mu^2\right) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu\,\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\mu\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\mu\right) \qquad (14)$$

จากสมการ (11), (13) และ (14) จะได้ $r_{11} = \frac{n}{\sigma^2}$, $r_{12} = r_{21} = 0$, $r_{22} = \frac{n}{2\sigma^4}$ และจะได้สารสนเทศฟิชเชอร์

$$R(\mu,\sigma^2) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

และความแปรปรวนของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ μ และ σ^2

$$V(\mu,\sigma^2) = \left[R(\mu,\sigma^2)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ภายใต้คุณสมบัติตัวอย่างขนาดใหญ่ของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ S^2 \end{bmatrix} \sim AN\left(\begin{bmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{bmatrix}\right)$$

นั่นคือ $\bar{Y} \sim AN\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ และ $S_Y^2 \sim AN\left(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n}\right)$

ถ้าให้ ψ แทนค่าเฉลี่ยของการแจกแจงล็อก-นอร์มัล นั่นคือ $\psi = E(X) = \exp\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right]$ จะได้

$$\ln\psi = \ln\exp\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right] = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$$

ให้ $U = \frac{S_Y^2}{2}$ สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function) ของ U ได้ดังนี้

$$M_U(t) = E(e^{tU}) = E\left(e^{t\frac{S_Y^2}{2}}\right) \tag{15}$$

เนื่องจาก $S_Y^2 \sim AN\left(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n}\right)$ จะได้ว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ S_Y^2 คือ

$$M_{S_Y^2}(t) = \exp\left(\sigma^2 t + \frac{2\sigma^4 t^2}{2n}\right)$$

ดังนั้น จากสมการ (22) จะได้

$$E\left(e^{t\frac{S_Y^2}{2}}\right) = \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{2} + \frac{2\sigma^4\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2n}\right)$$

นั่นคือ $\frac{S_Y^2}{2} \sim AN\left(\frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^4}{2n}\right)$ ดังนั้น จะได้ว่า $\bar{Y} + \frac{S_Y^2}{2} \sim AN\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \left(\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^4}{2n}\right)\right)$

เมื่อทำการแปลงตัวแปรสุ่ม $\bar{Y} + \frac{S_Y^2}{2}$ ให้เป็น Z จะได้

$$Z = \frac{\left(\bar{Y} + \frac{S_Y^2}{2}\right) - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^4}{2n}}} \sim N(0,1)$$

การสร้างตัวประมาณแบบช่วงสำหรับ $\mu + \frac{\sigma^2}{2}$ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ $(n \to \infty)$ สามารถสร้างได้โดยให้

$$Q(X;\mu,\sigma^2) = \frac{\left(\bar{Y} + \frac{S_Y^2}{2}\right) - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^4}{2n}}}$$

จะได้ว่า $E(Q(X;\mu,\sigma^2))=0$ และ $Var(Q(X;\mu,\sigma^2))=1$ ดังนั้น $Q(X;\mu,\sigma^2)$ มีคุณสมบัติเป็นปริมาณหมุน โดยการ แจกแจงของ $Q(X;\mu,\sigma^2)$ ไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่สนใจ ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ $\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}$ ที่สร้างโดยใช้ปริมาณหมุน $Q(X;\mu,\sigma^2)$ จะได้จากการแก้สมการ

$$\Pr(z_{\alpha/2}\le Q(X;\mu,\sigma^2)\le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha \tag{16}$$

เมื่อแทน $Q(X;\mu,\sigma^2)=\dfrac{\left(\overline{Y}+\dfrac{S_Y^2}{2}\right)-\left(\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^4}{2n}}}$ จะได้

$$\Pr\left(z_{\alpha/2}\le\frac{\left(\overline{y}+\dfrac{s_y^2}{2}\right)-\left(\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^4}{2n}}}\le z_{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha \tag{17}$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}$ คือ

$$\left(\overline{y}+\frac{s_y^2}{2}\right)-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n}+\frac{s_y^4}{2n}}\le\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\le\left(\overline{y}+\frac{s_y^2}{2}\right)+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n}+\frac{s_y^4}{2n}}$$

และจะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับค่าเฉลี่ยล็อก-นอร์มัล ψ คือ

$$\exp\left[\left(\overline{y}+\frac{s_y^2}{2}\right)-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n}+\frac{s_y^4}{2n}}\right]\le\psi\le\exp\left[\left(\overline{y}+\frac{s_y^2}{2}\right)+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n}+\frac{s_y^4}{2n}}\right]$$

3. วิธีการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้การจำลองข้อมูล (Simulation Study) ในการตรวจสอบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าแบบช่วงทั้ง 5 วิธี ซึ่งได้แก่ วิธีพื้นฐาน วิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟ วิธีค็อกซ์ และวิธีการประมาณด้วย การแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยผู้วิจัยได้กำหนดขอบเขตและขั้นตอนการดำเนินการวิจัยดังนี้

3.1 ขอบเขตการวิจัย

1. ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบล็อก-นอร์มัล (2 พารามิเตอร์) มีพารามิเตอร์ $\mu=0$ และ $\sigma=0.01,0.50,1.00$
2. ขนาดตัวอย่าง (n) ที่ศึกษา จำแนกเป็น

ตัวอย่างขนาดเล็ก คือ $n = 10,20$

ตัวอย่างขนาดกลาง คือ $n =$ 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

ตัวอย่างขนาดใหญ่ คือ $n =$ 500, 1,000

3. ระดับความเชื่อมั่น (1-α)100% ที่ศึกษา เท่ากับ 95%
4. ทำการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด

3.2 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

1. สร้างข้อมูลตามสถานการณ์ต่างๆที่กำหนดไว้ในขอบเขตการวิจัย

สร้างข้อมูลสำหรับใช้ในการวิจัยตามสถานการณ์ต่างๆที่กำหนดไว้ในขอบเขตการวิจัย

2. คำนวณช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีการประมาณทั้ง 5 วิธี

นำข้อมูลที่ได้ในข้อ 1 มาคำนวณช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีการประมาณทั้ง 5 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 วิธีพื้นฐาน

$$\exp\left(\bar{y} - z_{1-\alpha/2}\frac{s_y}{\sqrt{n}}\right) \le \psi \le \exp\left(\bar{y} + z_{1-\alpha/2}\frac{s_y}{\sqrt{n}}\right) \text{ เมื่อ } Y = \ln X$$

วิธีที่ 2 วิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\left(e^{s_x^2}-1\right)\left(e^{2\bar{x}+s_x^2}\right)} \le \psi \le \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\left(e^{s_x^2}-1\right)\left(e^{2\bar{x}+s_x^2}\right)}$$

วิธีที่ 3 วิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟ

$$\exp\left(\bar{y} + \frac{s_y^2}{2} - \frac{t_{1-\alpha/2,n-1}}{\sqrt{n}}\sqrt{s_y^2\left(1+\frac{s_y^2}{2}\right)}\right) \le \psi \le \exp\left(\bar{y} + \frac{s_y^2}{2} + \frac{q_{\alpha/2,n-1}}{\sqrt{n}}\sqrt{s_y^2\left(1+\frac{s_y^2}{2}\right)}\right) \text{ เมื่อ}$$

$Y = \ln X$ และ $q_{\alpha/2,n-1} = \sqrt{\frac{n}{2}\left(\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} - 1\right)}$

วิธีที่ 4 วิธีค็อกซ์

$$\exp\left(\bar{y} + \frac{s_y^2}{2} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n} + \frac{s_y^2}{2(n-1)}}\right) \le \psi \le \exp\left(\bar{y} + \frac{s_y^2}{2} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n} + \frac{s_y^2}{2(n-1)}}\right) \text{ เมื่อ}$$

$Y = \ln X$

วิธีที่ 5 วิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

$$\exp\left[\left(\bar{y} + \frac{s_y^2}{2}\right) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n} + \frac{s_y^4}{2n}}\right] \le \psi \le \exp\left[\left(\bar{y} + \frac{s_y^2}{2}\right) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_y^2}{n} + \frac{s_y^4}{2n}}\right] \text{ เมื่อ } Y = \ln X$$

3. พิจารณาว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ หรือไม่

การพิจารณาว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้ในข้อ 2 คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ หรือไม่นั้น เราจะสรุปว่า ช่วงความเชื่อมั่น $[L(\psi),U(\psi)]$ คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ก็ต่อเมื่อ $L(\psi)\le\psi\le U(\psi)$ และจะสรุปว่า ช่วงความเชื่อมั่น $[L(\psi),U(\psi)]$ ไม่คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ก็ต่อเมื่อ $\psi < L(\psi)$ หรือ $\psi > U(\psi)$ ถ้าช่วงความเชื่อมั่นใดคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ จะกำหนดให้จำนวนครั้งของการคลุมค่า ψ = 1 และถ้าช่วงความเชื่อมั่นใดไม่คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ จะกำหนดให้จำนวนครั้งของการคลุมค่า ψ = 0

4. คำนวณความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น

การคำนวณความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีการประมาณทั้ง 5 วิธีจะคำนวณจากผลต่างระหว่างขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่นที่คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\text{ความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น} = U(\psi)-L(\psi)$$

เมื่อ $U(\psi)$ และ $L(\psi)$ แทน ขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น

5. ดำเนินการตามข้อ 1-4 ซ้ำ จำนวน 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

6. คำนวณค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ (Coverage Probability) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length)

การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ทำได้โดยนับจำนวนครั้งที่ช่วงสุ่ม $[L(\psi),U(\psi)]$ คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ หรือ $L(\psi)\le\psi\le U(\psi)$ (จากข้อ 3) แล้วทำการบวกสะสมค่าเมื่อทำครบทุกช่วงความเชื่อมั่นแล้ว จึงนำค่าสะสมที่ได้ของช่วงความเชื่อมั่นที่คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ มาหารด้วยจำนวนรอบของการทดลอง ส่วนการคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจะคำนวณจากผลรวมของผลต่างระหว่างขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างในข้อ 4 หารด้วยจำนวนช่วงความเชื่อมั่นที่คลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ทั้งหมด

7. การเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ กับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

สำหรับการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ได้จากวิธีการประมาณทั้ง 5 วิธีกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดนั้น ผู้วิจัยได้กำหนดให้

P_0 แทน ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

P แทน ความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ

$\hat{P}$ แทน ค่าประมาณความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ซึ่งได้จากการจำลองข้อมูล

se $(\hat{P})$ แทน ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าประมาณความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง ψ ซึ่งประมาณได้จาก

$$\text{se}(\hat{P}) = \sqrt{[P_0(1-P_0)]/1{,}000}$$

สำหรับการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ กับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดนั้น เราจะสรุปว่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ให้ค่าใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด [8] ถ้า

$$P_0 - z_{1-\alpha/2}\, se(\hat{P}) \le P \le P_0 + z_{1-\alpha/2}\, se(\hat{P})$$

ทั้งนี้ เนื่องจากช่วงความเชื่อมั่นที่ดีควรจะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ไม่ควรจะน้อยเกินไปหรือมากเกินไป การที่ช่วงความเชื่อมั่นให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงน้อยกว่าหรือมากกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แสดงว่า ช่วงความเชื่อมั่นนั้นแคบหรือกว้างเกินไปจนทำให้การครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงเกิดความผิดพลาดขึ้น

ดังนั้น กรณีที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 95% เราจะสรุปว่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ให้ค่าใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ถ้า

$$0.95 - (1.96)\sqrt{[0.95(1-0.95)]/1{,}000} \le P \le 0.95 + (1.96)\sqrt{[0.95(1-0.95)]/1{,}000}$$

$$0.936 \le P \le 0.964$$

8. การเปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

ถ้าในแต่ละสถานการณ์มีวิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดหลายวิธี จะนำความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมาพิจารณาด้วย โดยวิธีการประมาณค่าแบบช่วงวิธีใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด จะถือว่าวิธีการประมาณค่าแบบช่วงวิธีนั้นเหมาะสมที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้นๆ

9. การสรุปผลการวิจัย

เราจะสรุปว่าวิธีการประมาณค่าแบบช่วงที่เหมาะสมที่สุดสำหรับแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดไว้ในแผนการวิจัย คือวิธีการประมาณที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด

4. ผลการวิจัย

ผลการตรวจสอบความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ (Coverage Probability) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length) ที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบช่วงทั้ง 5 วิธี ได้แก่ วิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ (วิธีที่ 1) วิธีพื้นฐาน (วิธีที่ 2) วิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟ (วิธีที่ 3) วิธีค็อกซ์ (วิธีที่ 4) และวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (วิธีที่ 5) ดังแสดงในตารางที่ 1-3 พบว่า กรณี $\sigma = 0.01$ การประมาณค่าแบบช่วงวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธีพื้นฐาน วิธีค็อกซ์ และวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีประสิทธิภาพที่ใกล้เคียงกัน โดยให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ใกล้เคียงกัน ส่วนวิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟเป็นเพียงวิธีเดียวที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่สูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดสำหรับทุกขนาดตัวอย่าง

เมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีขนาดเพิ่มขึ้นเป็น 0.50 ($\sigma = 0.50$) การประมาณค่าแบบช่วงวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธีค็อกซ์ และวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ต่างให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 30 ขึ้นไป ($n \geq 30$) และเมื่อพิจารณาความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น พบว่า วิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีการประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด เนื่องจากให้ช่วงความเชื่อมั่นที่น้อยที่สุด

เมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีขนาดเพิ่มขึ้นเป็น 1.00 ($\sigma = 1.00$) มีเพียงการประมาณค่าแบบช่วงวิธีค็อกซ์ และวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 30 ขึ้นไป ($n \geq 30$) และเมื่อพิจารณาความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น พบว่า วิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ยังคงเป็นวิธีการประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด เนื่องจากให้ช่วงความเชื่อมั่นที่น้อยที่สุด

ตารางที่ 1. ความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ (Coverage Probability) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length) ที่ได้จากวิธีการประมาณทั้ง 5 วิธี จำแนกตามขนาดตัวอย่าง กรณี $\sigma = 0.01$

n	Coverage Probability					Average Length				
	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4	วิธีที่ 5	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4	วิธีที่ 5
10	0.9150	0.9140	**0.9640**	0.9150	0.9150	0.0119	0.0120	**0.0175**	0.0120	0.0120
20	**0.9360**	**0.9360**	0.9760	**0.9360**	**0.9360**	0.0088	**0.0087**	0.0121	**0.0087**	**0.0087**
30	0.9220	0.9230	0.9730	0.9250	0.9250	0.0071	0.0072	0.0101	0.0071	0.0071
40	0.9350	0.9330	**0.9610**	0.9300	0.9300	0.0061	0.0062	**0.0087**	0.0061	0.0061
50	**0.9470**	**0.9420**	0.9680	**0.9410**	**0.9410**	0.0056	**0.0055**	0.0079	**0.0055**	**0.0055**
60	**0.9410**	0.9320	**0.9630**	0.9320	0.9320	**0.0050**	0.0050	0.0075	0.0051	0.0051
70	**0.9490**	**0.9480**	0.9730	**0.9480**	**0.9480**	0.0047	0.0047	0.0070	**0.0046**	**0.0046**
80	**0.9450**	**0.9430**	0.9720	**0.9460**	**0.9460**	**0.0043**	0.0044	0.0066	**0.0043**	**0.0043**
90	0.9350	**0.9460**	0.9680	**0.9460**	**0.9460**	0.0041	0.0042	0.0064	**0.0041**	**0.0041**
100	**0.9430**	**0.9490**	0.9700	**0.9510**	**0.9510**	**0.0039**	**0.0039**	0.0061	**0.0039**	**0.0039**
500	**0.9460**	**0.9520**	0.9760	**0.9530**	**0.9530**	**0.0016**	0.0018	0.0035	0.0017	0.0017
1000	**0.9450**	**0.9450**	0.9670	**0.9380**	**0.9380**	0.0013	**0.0012**	0.0028	0.0013	**0.0012**

ตารางที่ 2. ความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ (Coverage Probability) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length) ที่ได้จากวิธีการประมาณทั้ง 5 วิธี จำแนกตามขนาดตัวอย่าง กรณี $\sigma = 0.50$

n	Coverage Probability					Average Length				
	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4	วิธีที่ 5	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4	วิธีที่ 5
10	0.8870	0.8530	0.9770	0.9240	0.9220	0.6970	0.6297	1.2827	0.7847	0.6481
20	0.9220	0.7710	0.9820	0.9350	0.9350	0.5085	0.4359	0.8045	0.5315	0.4571
30	0.9280	0.7150	0.9830	**0.9410**	**0.9410**	0.4216	0.3566	0.6580	0.4321	**0.3753**
40	**0.9380**	0.6350	0.9810	**0.9400**	**0.9400**	0.3658	0.3106	0.5741	0.3766	**0.3285**
50	**0.9360**	0.5600	0.9810	**0.9500**	**0.9500**	0.3279	0.2768	0.5187	0.3346	**0.2926**
60	0.9350	0.5180	0.9850	**0.9530**	**0.9530**	0.3015	0.2546	0.4851	0.3076	**0.2687**
70	0.9280	0.4560	0.9710	0.9330	0.9330	0.2793	0.2334	0.4504	0.2810	0.2463
80	**0.9420**	0.3910	0.9790	**0.9520**	**0.9520**	0.2626	0.2188	0.4282	0.2635	**0.2309**
90	**0.9460**	0.3530	0.9770	**0.9510**	**0.9510**	0.2468	0.2068	0.4099	0.2491	**0.2183**
100	**0.9530**	0.3070	0.9780	**0.9420**	**0.9420**	0.2372	0.1965	0.3946	0.2371	**0.2080**
500	**0.9480**	0.0000	0.9870	0.9660	0.9660	**0.1058**	0.0876	0.2206	0.1053	0.0929
1000	**0.9510**	0.0000	0.9790	**0.9560**	**0.9560**	0.0747	0.0620	0.1750	0.0745	**0.0657**

ตารางที่ 3. ความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ (Coverage Probability) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length) ที่ได้จากวิธีการประมาณทั้ง 5 วิธี จำแนกตามขนาดตัวอย่าง กรณี $\sigma = 1.0$

n	Coverage Probability					Average Length				
	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4	วิธีที่ 5	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4	วิธีที่ 5
10	0.7910	0.6270	0.9780	0.9170	0.9130	2.1021	1.3592	7.4921	3.4290	1.4901
20	0.8560	0.3950	0.9840	0.9190	0.9190	1.6476	0.9168	3.5147	2.0033	1.0510
30	0.8760	0.2120	0.9940	**0.9450**	**0.9450**	1.4086	0.7388	2.7528	1.5920	**0.8774**
40	0.8840	0.1050	0.9860	**0.9360**	**0.9360**	1.2075	0.6310	2.2685	1.3288	**0.7561**
50	0.9000	0.0490	0.9910	**0.9570**	**0.9570**	1.0852	0.5622	2.0085	1.1664	**0.6730**
60	0.9110	0.0220	0.9860	**0.9430**	**0.9430**	1.0135	0.5104	1.8510	1.0612	**0.6192**
70	0.9030	0.0120	0.9870	**0.9520**	**0.9520**	0.9312	0.4746	1.7321	0.9804	**0.5739**
80	0.9240	0.0070	0.9850	**0.9480**	**0.9480**	0.8992	0.4411	1.6086	0.9021	**0.5322**
90	0.9060	0.0020	0.9860	**0.9470**	**0.9470**	0.8487	0.4149	1.5247	0.8466	**0.5023**
100	0.9260	0.0010	0.9850	**0.9400**	**0.9400**	0.8102	0.3935	1.4697	0.8077	**0.4796**
500	0.9280	0.0000	0.9750	**0.9440**	**0.9440**	0.3731	0.1755	0.7943	0.3552	**0.2145**
1000	**0.9430**	0.0000	0.9820	**0.9540**	**0.9540**	0.2670	0.1242	0.6243	0.2510	**0.1518**

5. อภิปรายผลการวิจัย

การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยล็อก-นอร์มัลวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ตามแนวคิดของ Aitchison และ Brown นั้น เป็นการสร้างช่วงความเชื่อมั่นภายใต้การใช้ปริมาณหมุนที่ประมาณด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานตามทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง ซึ่งเมื่อนำปริมาณหมุนดังกล่าวมาใช้ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่น ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจึงเกิดจากปัจจัยของการลู่เข้าสู่การแจกแจงปกติมาตรฐานตามทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง โดยถ้าการลู่เข้าดังกล่าวเป็นจริงตามทฤษฎี ช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นจะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่ถ้าการลู่เข้าไม่เป็นจริงตามทฤษฎี ช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นจะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ไม่ตรงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดหรือผิดเพี้ยนไป ซึ่งผลจากการศึกษาแสดงให้เห็นว่า กรณีที่ตัวอย่างขนาดเล็ก ($n < 30$) ช่วงความเชื่อมั่นตามวิธีของ Aitchison และ Brown ส่วนใหญ่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ไม่ตรงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด นั่นย่อมแสดงว่า ขนาดตัวอย่างส่งผลต่อการลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติมาตรฐานตามทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง ซึ่งถือเป็นข้อด้อยของวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ นอกจากนี้ ผลการวิจัยยังพบว่า สำหรับตัวอย่างขนาดปานกลาง ($30 \le n \le 100$) ช่วงความเชื่อมั่นตามวิธีของ Aitchison และ Brown ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่แกว่งอยู่ตลอดเวลา ยกตัวอย่างเช่น กรณี $\sigma = 0.01$ เมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 80$ ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ได้มีค่าเท่ากับ 0. 9450 ในขณะที่ขนาดตัวอย่าง $n = 90$ ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ได้มีค่าลดลงเป็น 0.9350 และเมื่อขนาดตัวอย่าง $n = 100$ ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ได้มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 0.9430 เป็นต้น

การประมาณค่าแบบช่วงวิธีพื้นฐานสามารถแก้ไขข้อด้อยอันเนื่องมาจากขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมของการลู่เข้าสู่การ แจกแจงปกติมาตรฐานตามทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลางได้ เนื่องจาก การสร้างช่วงความเชื่อมั่นตามแนวคิดของ Patterson นั้น อาศัยปริมาณหมุน $Z = (\bar{Y} - E(\bar{Y}))\big/\sqrt{Var(\bar{Y})}$ เมื่อ $Y = \ln X,\ E(\bar{Y}) = \mu$ และ $Var(\bar{Y}) = \sigma^2/n$ ซึ่งพบว่า ปริมาณหมุนดังกล่าว มีการแจกแจงปกติมาตรฐานอย่างแท้จริง (Exact Distribution) ตามทฤษฎีของการแจกแจงปกติ ดังนั้น ความผิดพลาดที่เกิดจากปัจจัยของการลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติมาตรฐานตามทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลางจึงไม่เกิดขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม การสร้างช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้ปริมาณหมุน $(\bar{Y} - E(\bar{Y}))\big/\sqrt{Var(\bar{Y})}$ เป็นเพียงการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ μ เท่านั้น เมื่อทำการแปลงช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ μ กลับไปเป็นช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ ψ โดยใช้ฟังก์ชันแอนติลอการิทึมตามแนวคิดของ Patterson พบว่า ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการแปลงกลับดังกล่าว เป็นช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ $\exp(\mu)$ ไม่ใช่สำหรับ $\exp(\mu + \sigma^2/2)$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยล็อก-นอร์มัล ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการแปลงกลับจึงไม่สามารถที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ตรงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งผลที่ได้สอดคล้องกับงานวิจัยของ Zhou และ Gao [9] และ Olsson [10]

สำหรับการประมาณค่าแบบช่วงวิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟ ผลการศึกษาพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นวิธีแองกัสคอนเซอร์เวทีฟให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่สูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเสมอ ทั้งนี้ เนื่องจาก การหาช่วงความเชื่อมั่นตามแนวคิดของ Angus มีวัตถุประสงค์ที่จะให้ค่าความผิดพลาดของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง (Coverage Error) น้อยกว่าหรือเท่ากับ α เท่านั้น ดังนั้น จึงส่งผลให้ช่วงความเชื่อมั่นตามแนวคิดของ Angus ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ สูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

การประมาณค่าแบบช่วงวิธีค็อกซ์ ซึ่งมีแนวคิดในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้ตัวประมาณที่มีคุณสมบัติไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำที่สุดของ $\ln\psi$ มาใช้ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่น ภายใต้การใช้ปริมาณหมุนที่ประมาณด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานตามทฤษฎีบทขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง แต่เนื่องจากการลู่เข้าดังกล่าว มีข้อจำกัดในขนาดตัวอย่าง ดังนั้น จึงส่งผลให้ช่วงความเชื่อมั่นวิธีค็อกซ์ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ไม่ตรงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดหรือผิดเพี้ยนไปเช่นเดียวกับวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ตามแนวคิดของ Aitchison และ Brown

การประมาณค่าแบบช่วงวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่นำเสนอ โดยอาศัยคุณสมบัติของตัวอย่างขนาดใหญ่ในการหาการแจกแจงโดยประมาณของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ยังคงมีข้อจำกัดในเรื่องของขนาดตัวอย่างเช่นเดียวกับวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่และวิธีค็อกซ์ โดยส่งผลให้ช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ คลาดเคลื่อนไปจากระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 30$) สำหรับกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 30 ขึ้นไป ($n \geq 30$) การประมาณค่าแบบช่วงทั้ง 3 วิธีจะมีประสิทธิภาพดีขึ้น ซึ่งสังเกตได้จากค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ψ ที่ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด อย่างไรก็ตาม ช่วงความเชื่อมั่นวิธีอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่จะมีประสิทธิภาพดีก็ต่อเมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าน้อยหรือเข้าใกล้ 0 ซึ่งต่างจากช่วงความเชื่อมั่นวิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีค็อกซ์ที่ยังคงให้ประสิทธิภาพดีถึงแม้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะเพิ่มขึ้นเป็น 1.0 และเมื่อพิจารณาความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น พบว่า วิธีการประมาณด้วยการแจกแจงปกติของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ความกว้างเฉลี่ยของช่วงที่น้อยกว่าวิธีค็อกซ์ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความแม่นยำในการประมาณค่า ทั้งนี้เนื่องจาก วิธีการประมาณค่าแบบช่วงที่นำเสนออาศัยคุณสมบัติของตัวอย่างขนาดใหญ่ในการหาการแจกแจงโดยประมาณของตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดซึ่งให้ความแปรปรวนของตัวประมาณค่าที่น้อยกว่าวิธีค็อกซ์ (ในกรณีที่ $\sigma \leq 1.0$) ดังนั้น จึงส่งผลให้ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยกว่าตามไปด้วย

เอกสารอ้างอิง (References)

[1] จุฬารัตน์ ชุมนวล. 2553. การประมาณค่าแบบช่วงวิธีใหม่สำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบ ล็อก-นอร์มัลบนพื้นฐานอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต, สาขาสถิติประยุกต์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. [Jularat Chumnaul. 2010. Interval Estimation Method for the Mean

of a Log-Normal Distribution Based on Likelihood Ratio. Master of Science Thesis, Applied Statistics, Chiangmai University. (in Thai)]

[2] Casella, G. and Berger, R.L. 2002. Statistical Inference. 2nd Edition, Advanced Series. Duxbury.

[3] Patterson, R.L. 1969. Difficulties involve in the estimation of a population mean using transformed sample data. *Technometrics*, 8, 535-537.

[4] Aitchison, J. and Brown, J.A.C. 1957. The Log-normal Distribution. Cambridge University Press. Cambridge (UK).

[5] Angus, J.E. 1988. Inferences on the lognormal mean for complete samples. *Communications in Statistics-Simulation and Computatio,* 17, 1307-1331.

[6] Land, C.E. 1971. Confidence intervals for linear functions of the normal mean and variance. *Annals of Mathematical Statistics*, 42, 1187-1205.

[7] Lehmann, E.L. 1983. The Theory of Point Estimation. Wiley, New York. 75-80.

[8] Doganaksoy, N. and Schmee, J. 1993. Comparisons of Approximate Confidence Interval for Distributions Used in Life-Data. *Technometrics*, 35, 175-184.

[9] Zhou, X-H. and Gao, S. 1997. Confidence Intervals for the Lognormal Mean. *Statistics in Medicine,* 16, 783-790.

[10] Olsson, U. 2005. Confidence Intervals for the Mean of a Log-normal Distribution. *Journal of Statistics Education,* 13, 5-6.