วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 21 ฉบับที่ 2 เดือนกรกฎาคม-ธันวาคม 2555

การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงทวินามลบ

Statistical Hypotheses Testing under Negative Binomial Distribution

บุญญสิทธิ์ วรจันทร์[1] และสายชล สินสมบูรณ์ทอง[2]
Boonyasit Warachan and Saichon Sinsomboonthong
สาขาวิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จ (r) เท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05 ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใดๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ) จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น สลับกันไปเรื่อยๆ ส่วนค่าวิกฤต (c_1) และกำลังของการทดสอบ $(1-\beta)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ ให้ผลเหมือนกับการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดข้างต้น ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25,\ \theta_2 = 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ_1, γ_2) จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25,\ \theta_2 = 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ และ r = 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$ เมื่อ $\theta_0 = 0.25$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า r = 3 จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้

คำสำคัญ : การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด, การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย,การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการแจกแจงทวินามลบ

E-mail address : kwboonya@kmitl.ac.th[1] , kssaicho@kmitl.ac.th[2]

Abstract

In this study, the most powerful test, uniformly most powerful test and uniformly most powerful unbiased test were investigated under Negative binomial distribution with r of 1, 2, 3, 4 and 5, and the test size of 0.05. The result of the most powerful test for $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ showed that at $\alpha = 0.05$ for any θ_1 and $\theta_0 = 0.5$ when r increased from 1 to 5, γ showed an certain decrease and increase value, while c_1 and $1-\beta$ had an increase. In the uniformly most powerful test for $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$ showed that the results same as the most powerful test above. In the uniformly most powerful test for $H_0 : \theta \le \theta_1$ or $\theta \ge \theta_2$ versus $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta_1 = 0.25$ and $\theta_2 = 0.75$, for $\alpha = 0.05$ if r had an increase from 1 to 5 then γ_1, γ_2 showed an uncertain value, while c_1 and c_2 increased. The result of the uniformly most powerful unbiased test for $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ versus $H_1 : \theta < \theta_1$ or $\theta > \theta_2$, $\theta_1 = 0.25$ and $\theta_2 = 0.75$ showed that $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ could not be found when $\alpha = 0.05$ and r = 10. However, when there was an increase of r from 20 to 50, γ_1, γ_2 had uncertain value, and there was an increase for c_1 and c_2. In addition, the result of the uniformly most powerful unbiased test for $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \ne \theta_0$, $\theta_0 = 0.25$ showed that $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ could be found when $\alpha = 0.05$ with r = 3.

Keywords : Most powerful test, Uniformly most powerful test , Uniformly most powerful unbiased test and Negative binomial distribution

1. บทนำ

ในเรื่องของการอนุมานเชิงสถิตินั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วนสำคัญ ๆ คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ และการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ จุดประสงค์ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติคือ หาข้อสรุปเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่ผู้วิจัยสนใจศึกษา ในการดำเนินการทดสอบเมื่อกำหนดขนาดของการทดสอบ (size of the test) α ให้ และขนาดตัวอย่าง n คงที่ ผู้วิจัยจะหาการทดสอบ (test) ที่มีกำลังของการทดสอบ (power of the test) สูงที่สุด อย่างไรก็ตาม การทดสอบมีชื่อเรียกต่างกันไปขึ้นอยู่กับการตั้งสมมติฐานเชิงสถิติที่ต้องการทดสอบ [1] มีผู้วิจัยหาการทดสอบแบบต่าง ๆ เช่น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่

เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายภายใต้การแจกแจงทวินาม [2] การแจกแจงปัวส์ซง [3] และการแจกแจงเบอร์นูลลี [4] ในบทความนี้ผู้วิจัยมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ โดยการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ

จากการศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินาม โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.3$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 10, 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง n = 30 หลังจากนั้น ค่าจะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.3$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง n = 30 หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.3$ หรือ $\theta \ge 0.7$ เทียบกับ $H_1 : 0.3 < \theta < 0.7$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ n = 10, 20, 30 จะไม่สามารถหา ค่าได้ ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 10 จะไม่สามารถหาค่าได้ สำหรับการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.3 \le \theta \le 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01,\ 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c_1(\gamma_1)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และ $X = c_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง

n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c_1(\gamma_1)$ และ $X = c_2(\gamma_2)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c_1(\gamma_1)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก และ $X = c_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 10 จะไม่สามารถหาค่าได้ [2]

การศึกษาการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสองด้าน ภายใต้การแจกแจงปัวส์ซง โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.2$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.2 < \theta < 0.75$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่า γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยตลอด ยกเว้นที่ n = 20 จะไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 จะไม่สามารถหาค่าได้ ในการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลง ยกเว้นที่ n = 20 และ 50 จะไม่สารถหาค่าได้ และการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne 0.5$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก ค่า γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงโดยตลอด และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดเช่นเดียวกัน [3]

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05 ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า

n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ค่าวิกฤต c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ค่าวิกฤต c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ค่าวิกฤต c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่าวิกฤต γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ค่าวิกฤต c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น [4]

ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาถึงการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย โดยมีวิธีในการดำเนินงานดังนี้

1) สมมติฐานที่สนใจทดสอบ

1.1 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

1.2 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

1.3 $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$

1.4 $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$

1.5 $H_0 : \theta = \theta_0$ เที่ยบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$

2) จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จและขนาดการทดสอบ

สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ จะพิจารณาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จ (r) เท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05

3) เขียนโปรแกรม

เขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

3. ผลการวิจัย

3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test)

ให้ $X_1,\dots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x;r,\theta) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1}\theta^{r}(1-\theta)^{x-r} & ; \quad x = r, r+1, r+2,\dots \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

โดย X คือ จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จครบ r ครั้ง และ θ คือ ความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จของการทดลองสุ่มแต่ละครั้ง

3.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

ในที่นี้ $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; r_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n}\binom{x_i - 1}{r_i - 1}\theta^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} r_i}$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < \ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 < 1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < 0$

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad > \quad \frac{\ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} \quad = \quad c_1$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1, \theta_1<\theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta=\theta_0\right] \le \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta=\theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta=\theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta=\theta_0\right] < \alpha,\qquad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 - 1 \middle| \theta=\theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta=\theta_0\right] = \alpha$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1-\beta &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| \theta=\theta_1\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta=\theta_1\right] + \gamma\, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta=\theta_1\right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r = 1$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_0 = 0.50$ และ $\theta_1 = 0.25$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_1 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = 0.50\right]} \qquad \text{.....}\ (1)$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบได้จากสมการ

$$1 - \beta = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = 0.25\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = 0.25\right] \qquad \text{.....}\ (2)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (1) พบว่า $c_1 = 4$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 4 \middle| \theta = 0.50\right] = 0.03125\ ,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 4 \middle| \theta = 0.50\right] = 0.03125$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 4 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.2373046875,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 4 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0791015625$$

แทนค่าลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.03125}{0.03125} = 0.6$$

และ

$$1 - \beta = 0.2373046875 + 0.6(0.0791015625) = 0.284765625$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.50$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.25,\ \theta_1 < \theta_0$ เมื่อ $r = 1$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 4 \\ 0.60 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 4 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.1 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0{:}\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1{:}\theta=\theta_1, \theta_1<\theta_0$

α	r	θ_0	θ_1	γ	c_1	$1-\beta$
0.05	1	0.5	0.1	0.6000000000	4	0.6298560000
			0.2	0.6000000000	4	0.3768320000
			0.3	0.6000000000	4	0.2112880000
			0.4	0.6000000000	4	0.1088640000
	2	0.5	0.1	0.5428571429	6	0.8332994880
			0.2	0.5428571429	6	0.5431623680
			0.3	0.5428571429	6	0.2955342880
			0.4	0.5428571429	6	0.1347425280
	3	0.5	0.1	0.7866666667	8	0.9256766884
			0.2	0.7866666667	8	0.6649146245
			0.3	0.7866666667	8	0.3678404222
			0.4	0.7866666667	8	0.1569701929
	4	0.5	0.1	0.1436363636	9	0.9670635278
			0.2	0.1436363636	9	0.7541103578
			0.3	0.1436363636	9	0.4309345550
			0.4	0.1436363636	9	0.1767321516
	5	0.5	0.1	0.5566300366	11	0.9853803346
			0.2	0.5566300366	11	0.8191306651
			0.3	0.5566300366	11	0.4864117803
			0.4	0.5566300366	11	0.1947942724

จากตารางที่ 3.1 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.4 แล้ว γ และ c_1 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นสลับกันไปเรื่อย ๆ ส่วน c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาการทดสอบสำหรับสมมติฐานต่าง ๆ ถ้าสามารถหาการทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อย ๆ แล้วไม่ได้ทำให้การทดสอบเปลี่ยนแปลงไป แต่ยังคงเหมือนเดิม สามารถใช้การทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นการทดสอบที่

ดีมาก กล่าวคือการทดสอบที่มีรูปแบบเดียว (Uniform) และสามารถใช้ทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกเป็น 2 กรณี

3.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

เหมือนกับในหัวข้อที่ 3.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

3.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$

ในที่นี้ $f(x;\theta) = \binom{x-1}{r-1}\theta^r(1-\theta)^{x-r} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r \binom{x-1}{r-1} e^{x\ln(1-\theta)}$

เปรียบเทียบกับ $f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$

โดยที่ $c(\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r, \quad h(x) = \binom{x-1}{r-1}$

$p(\theta) = \ln(1-\theta), \quad q(x) = x$

ดังนั้น $T(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} q(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็นสถิติที่พอเพียงของ θ

การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n) | \theta = \theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n) | \theta = \theta_2] = \alpha$$

จะได้

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_1\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_1\right] = \alpha$$

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_2\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_2\right] = \alpha$$

ในกรณีที่ $r = 2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_1 = 0.25$ และ $\theta_2 = 0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_1\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_1\right] = \alpha \quad \text{.....} (3)$$

$$P\left[c_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_2\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_2\right] = \alpha \quad \text{.....} (4)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (3) และ (4) พบว่า $c_1 = 1$ และ $c_2 = 2$ โดยที่

$$P\left[1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0, \quad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.09375,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.10546875, \quad P\left[1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.75\right] = 0,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.28125, \quad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.10546875$$

แทนค่าลงในสมการ (3) และ (4) จะได้

$$0.09375\gamma_1 + 0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \text{.....} (5)$$

$$0.28125\gamma_1 + 0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \text{.....} (6)$$

จะได้ $\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0.4740740741$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.25$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad 1 < \sum x_i < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 1 \\ 0.4740740741 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 2 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.2 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก $\gamma_1,\ \gamma_2$ และค่าวิกฤต $c_1,\ c_2$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.25$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.05	1	0.2666666667	0	1	2
	2	0	0.4740740741	1	2
	2	0.4740740741	0	2	3
	3	0.7585185185	0	3	4
	4	0.0511342593	0.0973985891	3	5
	5	0.2404188713	0.4274113267	4	6

จากตารางที่ 3.2 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว $\gamma_1,\ \gamma_2$ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

3.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

(Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

3.3.1 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1,\ c_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_2] = \alpha$$

จะได้
$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_1\right]$$
$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_1\right] = \alpha$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_2\right]$$
$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_2\right] = \alpha$$

ในกรณีที่ $r = 2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_1 = 0.25$ และ $\theta_2 = 0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right]$$

$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha \quad .....(7)$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_2\right]$$

$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha \quad .....(8)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (7) และ (8) พบว่า $c_1 = 1$ และ $c_2 = 17$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 1 | \theta = 0.25\right] = 0,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 17 | \theta = 0.25\right] = 0.0310074056,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 | \theta = 0.25\right] = 0.0937500000,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 17 | \theta = 0.25\right] = 0.0084565652,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 1 | \theta = 0.75\right] = 0,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 17 | \theta = 0.75\right] = 0.0000000002,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 | \theta = 0.75\right] = 0.2812500000,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 17 | \theta = 0.75\right] = 0.0000000006,$$

แทนค่าลงในสมการ (7) และ (8) จะได้

$$0.0937500000\gamma_1 + 0.0084565652\gamma_2 = 0.0189925944 \quad .....(9)$$

$$0.2812500000\gamma_1 + 0.0000000006\gamma_2 = 0.0499999998 \quad .....(10)$$

จะได้ $\gamma_1 = 0.1777777765,\ \gamma_2 = 0.2750440381$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.75$ คือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 17 \\ 0.1777777765 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.2750440381 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 17 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 17 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.3 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.75$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.05	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.7441404008	0.1842836997	2	87
	30	0.0186838107	0.4244293898	5	123
	40	0.3670394774	0.5795329060	7	158
	50	0.9150615627	0.3152571418	9	192

จากตารางที่ 3.3 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ และ r = 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยที่ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก

3.3.2 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,...,X_n) | \theta = \theta_0] = \alpha$$

และ

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\phi(X_1,...,X_n) \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| \theta = \theta_0\right]$$

$$= n\theta_0\alpha$$

จะได้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$

$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = 0}^{c_1-1} \binom{r+\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} + \sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2+1}^{\infty} \binom{r+\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$+\sum_{i=1}^{2} \gamma_i \binom{r+\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \alpha \qquad \text{..... (11)}$$

และ $\sum_{i=1}^{n} X_i \, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^{n} X_i \, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$

$$+c_1\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + c_2\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = 0}^{c_1-1} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \binom{r+\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] + \sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2+1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \binom{r+\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{2} c_i \gamma_i \binom{r+\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} = n\theta_0\alpha \qquad \text{..... (12)}$$

ในกรณีที่ $r = 3$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta = 0.25$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$$

$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha \qquad \text{.....(13)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta=\theta_0\right] + \sum_{i=1}^{n} X_i \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta=\theta_0\right]$$

$$+ c_1\gamma_1 \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + c_2\gamma_2 \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha \qquad .....(14)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า $c_1 = 2$ และ $c_2 = 9$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0156250000, \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0000527741,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0351562500, \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0000150429,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0000000000, \ \sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0028216622,$$

$$c_1 \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0351562500, \ c_2 \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0007371080$$

แทนค่าลงในสมการ (13) และ (14) จะได้

$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0000150429\gamma_2 = 0.0343222259 \qquad ..... (15)$$

$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0007371030\gamma_2 = 0.0346783378 \qquad ..... (16)$$

จะได้ $\gamma_1 = 0.9760656186$, $\gamma_2 = 0.4931886847$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.25$ คือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 49 \\ 0.9760656186 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.4931886847 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 49 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 49 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.4 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.25$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.05	1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.9760656186	0.4931886847	1	49
	4	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

จากตารางที่ 3.4 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า r = 3 จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ โดยที่ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก

4. สรุปผลการวิจัย

1) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.4 แล้ว γ และ c_1 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นสลับกันไปเรื่อย ๆ ส่วน c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

2) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25,\ \theta_2 = 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว $\gamma_1,\ \gamma_2$ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

3) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25,\ \theta_2 = 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ และ r = 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยที่ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2

4) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$ เมื่อ $\theta_0 = 0.25$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า r = 3 จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ โดยที่ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเรื่องนี้ได้รับทุนจากคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นักศึกษาปริญญาโท ชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

เอกสารอ้างอิง

[1] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C., 1974. Introduction to the Theory of Statistics. 3rd ed. Auckland : McGraw Hill.

[2] บรรทม สุระพร. 2541. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินาม. *วารสารพัฒนบริหารศาสตร์*, 38(3), 78-86. [Buntoom Suraporn, 1998. Statistical hypotheses testing under Binomial distribution. *NIDA Journal*, 38(3), 78-86. (in Thai)]

[3] รุจิเรข ดีเสียง. 2541. การทดสอบสมมติฐานสองด้านเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง. *วารสารพัฒนบริหารศาสตร์*, 38(2), 125-132. [Rujirek Deesaeng, 1998. Statistical hypotheses testing under Poisson distribution. *NIDA Journal*, 38(2), 125-132. (in Thai)]

[4] สายชล สินสมบูรณ์ทอง. 2554. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี. *วารสารวิทยาศาสตร์ลาดวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง,* 20(2), 72-93. [Saichon Sinsomboonthong, 2011. Statistical hypotheses testing under Bernoulli distribution. *Journal of Ladkrabang Sciences,* 20(2), 72-93. (in Thai)]