การเปรียบเทียบวิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์อันดับหนึ่งของความคลาดเคลื่อนในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

Comparison of Remedial Methods of First-Order Autoregressive Error in Simple Linear Regression

ยุภาวดี สำราญฤทธิ์ และ สมศรี บัณฑิตวิไล
ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์อันดับหนึ่งของความคลาดเคลื่อนในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายโดยใช้ 3 วิธี ได้แก่ วิธีที่ 1 Cochrane – Orcutt วิธีที่ 2 Prais – Winsten และ วิธีที่ 3 Hildreth – Lu และตรวจสอบความเหมาะสมของการพยากรณ์ที่ได้จากแต่ละวิธี โดยกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10, 30 และ100 และระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เป็น 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 และ 1.0 ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษานี้เป็นข้อมูลที่ได้จากการจำลองแบบด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล รวม 30 กรณี แต่ละกรณีทำการจำลองซ้ำ 2,000 ครั้ง โดยใช้สถิติทดสอบเดอร์บิน - วัตสันในการตรวจสอบว่าความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์หรือไม่ โดยเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหา คือ วิธีที่มีจำนวนชุดข้อมูลที่ยอมรับสมมติฐานหลัก H_0: $\rho = 0$ (ค่าความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน) มากที่สุดจะเป็นวิธีที่แก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนที่ดีที่สุด ส่วนเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบความเหมาะสมในการพยากรณ์ คือ การพิจารณาค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน วิธีใดที่ให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ยต่ำที่สุด จะเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์

ผลการวิจัยพบว่า

1. เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 10 ความสามารถในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของวิธี Cochrane – Orcutt ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9 และ 1.0 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 68.65 และวิธี Hildreth – Lu ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 69.65

2. เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 30 ความสามารถในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของวิธี Cochrane – Orcutt ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 ถึง 1.0 สามารถ

แก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 88.00 และ วิธี Prais – Winsten ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 99.6

3. เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 100 ความสามารถในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของวิธี Cochrane – Orcutt ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8 และ 1.0 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 90.05 และ วิธี Prais – Winsten ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 0.9 และ 1.0 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 90.05

4. วิธี Cochrane – Orcutt เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์ เมื่อขนาดตัวอย่าง 10 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.2, 0.3 และ 0.8 ส่วนวิธี Prais – Winsten เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์เมื่อขนาดตัวอย่าง 10 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.5, 0.7 และ 0.9 เมื่อขนาดตัวอย่าง 30 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.1 ถึง 0.4 และวิธี Hildreth – Lu เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์ เมื่อขนาดตัวอย่าง 10 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.1, 0.4, 0.6 และ 1.0 เมื่อขนาดตัวอย่าง 30 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.5 ถึง 1.0 และเมื่อขนาดตัวอย่าง 100 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.1 ถึง 1.0

คำสำคัญ วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten วิธี Hildreth – Lu อัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง

Abstract

The purpose of this study is to compare the remedial methods of first-order autoregressive error in simple linear regression by three methods : 1. Cochrane – Orcutt, 2. Prais – Winsten , 3. Hildreth – Lu . By using three different sample sizes of 10, 30 and 100 and in 10 levels of autocorrelation : 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 and 1.0. The data of this study are generated through the Monte Carlo simulation technique in 30 different cases. Each case repeats 2,000 times. The Durbin - Watson statistic is employed for detecting autocorrelation. The method which gives highest percentage of data sets that show nonsignificant result of testing $H_0: \rho = 0$ is considered to be the best method for solving autocorrelation. While the minimum average MSE is used as a criterion for choosing the method that gives best forecast.

The results of this research are as followed:

1. For n = 10; the best method for solving autocorrelation problem is Cochrane – Orcutt method, when ρ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9 ,and 1.0, which can solve more than 68.65% and Hildreth – Lu method , when ρ = 0.8, which can solve more than 69.65%

2. For n = 30; the best method for solving autocorrelation problem is Cochrane – Orcutt method ,when ρ = 0.2 to 1.0, which can solve more than 88.00% and Prais – Winsten method ,when ρ = 0.1, which can solve more than 99.6%

3. For n = 100; the best method for solving autocorrelation problem is Cochrane – Orcutt method ,when ρ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8 and 1.0, which can solve more than 90.05% and Prais – Winsten method, when ρ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 0.9 and 1.0, which can solve more than 90.05%

4. Cochrane – Orcutt method gives the best forecast for n=10, when ρ = 0.2, 0.3 and 0.8. Prais – Winsten method gives the best forecast for n = 10, when ρ = 0.5, 0.7, 0.9,and for n=30 , when ρ = 0.1 to 0.4. Hildreth – Lu gives the best forecast for n = 10, when ρ = 0.1, 0.4, 0.6, 1.0,and for n = 30, when ρ = 0.5 to 1.0,and for n=100 , when ρ = 0.1 to 1.0.

Keywords Cochrane – Orcutt method Prais – Winsten method Hildreth – Lu method First-order autoregressive error (AR1)

1. บทนำ

ในปัจจุบันการพยากรณ์มีบทบาทสำคัญอย่างมากต่อหน่วยงานราชการหรือองค์กรเอกชน ข้อมูลทางเศรษฐศาสตร์มักจะเก็บรวบรวมตามลำดับเวลา หรือเรียกว่า ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series Data) ลักษณะของข้อมูลมักจะเกิดปัญหาเกี่ยวกับค่าความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กัน[7] การศึกษาข้อมูลอนุกรมเวลามีหลายวัตถุประสงค์ด้วยกันแต่ที่นิยม คือนำมาใช้ในการวิเคราะห์เพื่อการประมาณค่าหรือการพยากรณ์

ในการวิจัยนี้สนใจศึกษาการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ซึ่งมีรูปแบบดังนี้ คือ

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , t = 1, 2, \ldots, n$$

โดยที่ Y_t คือ ค่าของตัวแปรตาม Y ณ เวลาที่ t

X_t คือ ค่าตัวแปรอิสระ X ณ เวลาที่ t

β_0 และ β_1 คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย

ε_t คือเป็นตัวแปรสุ่มแทนความคลาดเคลื่อน(Error Term) ของค่าสังเกต ณ เวลาที่ t

โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ผู้วิจัยนิยมใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด(Ordinary Least Squares: OLS) ซึ่งเป็นวิธีที่ทำให้ได้ตัวประมาณที่มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด (Best Linear Unbiased Estimator: BLUE) ตามทฤษฎีเกาส์ – มาร์คอฟ (Gauss – Markov Theorem) ทั้งนี้มีข้อสมมติเบื้องต้นของความคลาดเคลื่อน (ε_t)[8] ดังนี้

1. มีค่าคาดหวัง (Expected Value) เป็น 0 หรือ $E(\varepsilon_t) = 0$

2. ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่ $\sigma^2_{\varepsilon_t} = \sigma^2$

3. ε_i และ ε_j ไม่มีอัตตสหสัมพันธ์กัน (เป็นอิสระกัน) หรือความแปรปรวนร่วมเป็น 0 หรือ $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ สำหรับ $i \neq j$

ในทางปฏิบัติปัญหาที่พบมาก โดยเฉพาะเมื่อตัวแปรเป็นอนุกรมเวลาพบว่า ข้อสมมติข้อที่ 3 ไม่เป็นจริง นั่นคือ ความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์กัน การเกิดอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนมักจะเกิดกับกรณีที่ค่าของตัวแปรตามและตัวแปรอิสระมีการเก็บข้อมูลตามลำดับเวลา ข้อมูลส่วนใหญ่ที่นำมาวิเคราะห์มักจะเป็นข้อมูลทางเศรษฐศาสตร์และธุรกิจ และลักษณะอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนที่พบโดยทั่วไปจะเป็นอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง (First Order Autoregressive Model: AR (1)) ซึ่งจะเกิดขึ้นกับข้อมูลรายปี เช่น GNP ดัชนีราคา (Price Index) การผลิต (Production) การจ้างงาน (Employment) และการว่างงาน (Unemployment) เป็นต้น

การเกิดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน จะทำให้ตัวประมาณของพารามิเตอร์ β_i ไม่เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด เนื่องจากไม่เป็นไปตามข้อสมมติเบื้องต้นทำให้ค่าความแปรปรวนของตัวประมาณไม่ต่ำที่สุด และผลการอนุมานเกิดความผิดพลาดร้ายแรง มีผลให้การประมาณหรือการพยากรณ์จากสมการถดถอยไม่มีประสิทธิภาพและขาดความแม่นยำ

การแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง AR(1) มี 3 วิธี คือ (1) เพิ่มตัวแปรอิสระที่มีความสำคัญต่อตัวแปรตามเข้าในสมการถดถอย (2) วิธีการแปลงข้อมูล และ (3) วิธีการประมาณค่า [4] ซึ่งงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการแปลงข้อมูลในการแก้ไขปัญหา

ในปี พ.ศ. 2544 โชติรส เทียนถาวร [1] ได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยที่มีอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง (AR(1)) โดยใช้การแปลงข้อมูล 3 วิธี คือ วิธี Cochrane-Orcutt วิธี Durbin และวิธี Prais – Winsten พบว่า วิธี Prais – Winsten ให้ประสิทธิภาพสูงสุด กรณีที่มีขนาดตัวอย่าง 20 และ 50 เมื่อ $\rho \geq 0.2$

ในปี พ.ศ. 2547 อรจิรา คำหงส์สา [5] ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนที่มีสาเหตุมาจากธรรมชาติของข้อมูล ในการวิเคราะห์ถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย จากข้อมูลอนุกรมเวลาทางเศรษฐกิจที่สำคัญๆ โดยการแปลงข้อมูล 3 วิธี คือ วิธี Generalized differencing วิธี Durbin's Two-step และวิธี Cochrane-Orcutt iteration พบว่า วิธี Cochrane-Orcutt iteration เป็นวิธีที่เหมาะสมในแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ กรณีที่มีขนาดตัวอย่าง 10 และ 50 เมื่อ $\rho = 0.5 - 0.99$ ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อ $\rho = 0.1 - 0.49$ แต่วิธี Durbin's Two-step เป็นวิธีที่แก้ปัญหาที่ให้ค่าพยากรณ์ดีกว่า วิธี Cochrane-Orcutt iteration เมื่ออัตตสหสัมพันธ์อยู่ในระดับต่ำและกลาง

ในปี พ.ศ. 2548 ปิยดา พฤกสวัสดิ์นนท์ [3] ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในสมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ที่มีอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่1, 2 และ 3 โดยใช้วิธีการประมาณค่า 4 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธี Cochrane-Orcutt วิธี

Hildreth – Lu และวิธีผลต่างอันดับที่หนึ่ง พบว่า เมื่อเกิดความคลาดเคลื่อนอันดับที่ 1 ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อ $\rho = 0.1 - 0.7$ วิธี Hildreth – Lu จะให้ค่า MSE ต่ำที่สุด เมื่อเกิดความคลาดเคลื่อนอันดับที่ 2 ตัวอย่างขนาดเล็ก วิธี Hildreth – Lu จะให้ค่า MSE ต่ำที่สุดทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์ เมื่อเกิดความคลาดเคลื่อนอันดับที่ 3 ตัวอย่างขนาดเล็ก วิธี Hildreth – Lu จะให้ค่า MSE ต่ำที่สุด ทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์ ตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธี Cochrane-Orcutt จะให้ค่า MSE ต่ำที่สุด ทุกค่าอัตตสหสัมพันธ์

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาวิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง (AR (1)) ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายด้วยวิธีการแปลงข้อมูล 3 วิธี คือ วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu งานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะศึกษาเพื่อหาวิธีการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่งที่ดีที่สุดและวิธีการแก้ปัญหาที่ให้ค่าพยากรณ์ที่ดีที่สุด

2.วิธีการวิจัย

2.1 ขอบเขตของการศึกษา

2.1.1 ตัวแบบการถดถอยที่ใช้ในการศึกษาเป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

2.1.2 กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์กัน โดยมีรูปแบบความสัมพันธ์เป็นอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR(1))

2.1.3 กำหนดให้ตัวแปรอิสระ X และค่าความคลาดเคลื่อน V_t มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง

2.1.4 เนื่องจาก Tse [10] ได้ทำการทดลอง ณ ค่าต่าง ๆ ของ β_0 และ β_1 พบว่า ไม่ว่า β_0 และ β_1 จะเป็นค่าใดก็ตาม ได้ผลสรุปไม่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงกำหนดค่าให้กับ $\beta_0 = 0$ และ $\beta_1 = 1$ เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์

2.1.5 งานวิจัยนี้จะศึกษาเฉพาะปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนทางบวก เนื่องจากจะมีผลให้การอนุมานเกิดความผิดพลาดร้ายแรงกว่าอัตตสหสัมพันธ์ทางลบ โดยจำลองข้อมูลให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์กันในรูปแบบ AR(1) ซึ่งมีระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ (ρ) 10 ระดับ (ρ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 และ 1.0) และขนาดตัวอย่าง 3 ขนาด (n = 10, 30 และ 100) สถานการณ์ที่นำมาศึกษาจึงมีทั้งสิ้น 30 สถานการณ์

โดยกำหนดให้ n = 10 ตัวอย่างขนาดเล็ก

n = 30 ตัวอย่างขนาดกลาง

n = 100 ตัวอย่างขนาดใหญ่

2.1.6 โดยใช้การแปลงข้อมูล 3 วิธี คือ วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu

2.1.7 ในแต่ละสถานการณ์ทำการจำลองซ้ำ 2,000 ครั้ง

2.2. ขั้นตอนการวิจัย

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยแบ่งเป็น 5 ขั้นตอนหลักคือ

2.2.1. สร้างข้อมูลที่มีอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนในระดับต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรม MATLAB ตามขั้นตอนดังนี้

2.2.1.1 สร้างความคลาดเคลื่อน (ε_t) ที่มีอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR(1)) โดยความสัมพันธ์

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$$

โดยที่ ρ คือ สัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์

(ρ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 และ 1.0)

V_t คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่ไม่มีอัตตสหสัมพันธ์กัน $V_t \sim N(0,1)$

$t = 1, \ldots, n$

$n = 10, 30, 100$

2.2.1.2 สร้างข้อมูล (X_t, Y_t) ให้มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง (เนื่องจาก $\beta_0 = 0$ และ $\beta_1 = 1$) จึงได้รูปแบบเป็น $Y_t = X_t + \varepsilon_t$

2.2.1.3 นำข้อมูลที่สร้างไปทดสอบด้วยสถิติทดสอบเดอร์บิน – วัตสัน [2]

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

โดยที่ e_t คือ เศษตกค้าง (residual) ที่ t หรือ $Y_t - \hat{Y}_t$, $t = 1,2,\ldots,n$

n คือ จำนวนค่าสังเกต

เกณฑ์การตัดสินใจเพื่อสรุปผลการทดสอบ โดยนำค่า d ไปเทียบกับค่า $d_{L,\alpha}$ และ $d_{U,\alpha}$ ดังนี้

- ถ้าค่า $d < d_{L,\alpha}$ แสดงว่ามีอัตตสหสัมพันธ์ทางบวก เกิดขึ้นในความคลาดเคลื่อน
- ถ้าค่า $d > d_{U,\alpha}$ แสดงว่าไม่มีอัตตสหสัมพันธ์กันเกิดขึ้นในความคลาดเคลื่อน
- ถ้าค่า $d_{L,\alpha} < d < d_{U,\alpha}$ ไม่สามารถสรุปได้ เมื่อ $d_{L,\alpha}$ และ $d_{U,\alpha}$ เป็นค่าวิกฤตที่ได้จากการเปิดตารางค่าสถิติเดอร์บินและวัตสัน ที่ระดับนัยสำคัญ α
- ถ้าทดสอบแล้วพบว่าไม่มีอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน ก็กลับไปทำขั้นตอนที่ 2.2.1.1 และ 2.2.1.2 ใหม่ และ ถ้าทดสอบแล้วพบว่ามีอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน ไปทำขั้นตอนที่ 2.2.2 ต่อไป

2.2.2 นำข้อมูลที่สร้างขึ้นมาแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนด้วยวิธีการแก้ปัญหา 3 วิธี ได้แก่

2.2.2.1 วิธี Cochrane – Orcutt [6] มีขั้นตอนดังนี้

2.2.2.1.1 ทำการประมาณค่า $\hat{\rho}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จาก

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}e_t}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

2.2.2.1.2 ทำการแปลงข้อมูลใหม่เป็น

$$Y_t' = Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}$$
$$X_t' = X_t - \hat{\rho}X_{t-1}$$

2.2.2.1.3 สร้างสมการถดถอยโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากข้อมูลของตัวแปรที่แปลงแล้ว ได้สมการ $\hat{Y}_t' = b_0' + b_1'X_t'$

2.2.2.1.4 คำนวณค่าเศษตกค้างจากสมการถดถอยที่สร้างขึ้นจากข้อมูลที่แปลงแล้ว โดย $e_t = Y_t - \hat{Y}_t'$ และนำมาทำการตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนว่า มีอัตตสหสัมพันธ์หรือไม่ โดยใช้สถิติทดสอบเดอร์บิน–วัตสันและทำการแปลงสมการ $\hat{Y}_t' = b_0' + b_1'X_t'$ กลับไปเป็นสมการ $\hat{Y}_t = b_0 + b_1X_t$ โดย $b_0 = \dfrac{b_0'}{1-\hat{\rho}}$ และ $b_1 = b_1'$

- ถ้าทดสอบแล้วพบว่าค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ ทำการประมาณค่า $\hat{\rho}$ ใหม่ ตามขั้นตอน 2.2.2.1.1 – 2.2.2.1.4

- ถ้าทดสอบแล้วพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนไม่มีอัตตสหสัมพันธ์ ก็จะสิ้นสุดวิธี Cochrane-Orcutt

2.2.2.2 วิธี Prais – Winsten [6] ทำคล้ายกับวิธี Cochrane – Orcutt โดย

$$Y_1' = \sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,Y_1 \quad \text{และ} \quad X_1' = \sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,X_1 \quad \text{เมื่อ } t = 1$$
$$Y_t' = Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} \quad \text{และ} \quad X_t' = X_t - \hat{\rho}X_{t-1} \quad \text{เมื่อ } t = 2,\ldots,n$$

2.2.2.3 วิธี Hildreth – Lu [9] ทำคล้ายกับวิธี Cochrane – Orcutt แต่เพิ่มเติมขั้นตอนการหาค่า $\hat{\rho}$ ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) ที่มีค่าน้อยที่สุด โดยจะทำการแปลงข้อมูลเพียง 1 รอบเท่านั้น

2.2.3. เมื่อทดสอบค่าความคลาดเคลื่อนหลังจากทำการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของแต่ละวิธี ในกรณีที่แก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนได้ จะคำนวณค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (MSE) [2] โดยสมการ

$$MSE = \frac{\sum_{t-1}^{n} e_t^2}{n}$$

2.2.4. สรุปผลการวิจัย โดยมีเกณฑ์การตัดสินใจ คือ การเปรียบเทียบวิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง พิจารณาโดยใช้เกณฑ์นับความสามารถในการ

แก้ไขปัญหาโดยวิธีที่มีจำนวนชุดข้อมูลที่ยอมรับสมมติฐานหลักมากที่สุดจะเป็นวิธีที่แก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนที่ดีที่สุด

การเปรียบเทียบความเหมาะสมในการพยากรณ์ พิจารณาโดยใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน โดยวิธีใดที่ให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ยต่ำที่สุด จะเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์

2.2.5. นำข้อมูลจริงทางเศรษฐศาสตร์มาเป็นกรณีศึกษา โดยให้สินค้านำเข้าเป็นตัวแปรอิสระ และข้อมูลผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศ เป็นตัวแปรตาม (หน่วย : ล้านบาท) มาแก้ปัญหาด้วยทั้ง 3 วิธี

3. ผลการดำเนินการวิจัย

3.1 ผลจากการจำลองข้อมูล ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) ขนาดกลาง (n = 30) และขนาดใหญ่ (n = 100) ซึ่งแบ่งระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ (ρ) เป็น 3 ระดับ คือ ระดับต่ำ(ρ = 0.1, 0.2, 0.3 และ 0.4) ระดับกลาง(ρ = 0.5, 0.6 และ 0.7) และระดับสูง(ρ = 0.8, 0.9 และ 1.0)

ตารางที่ 1 แสดงร้อยละของชุดข้อมูลที่สามารถแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของทั้ง 3 วิธี ที่จำแนกตามขนาดตัวอย่าง (n) และระดับอัตตสหสัมพันธ์ (ρ)

ρ	วิธี Cochrane – Orcutt			วิธี Prais – Winsten			วิธี Hildreth – Lu		
	n=10	n=30	n=100	n=10	n=30	n=100	n=10	n=30	n=100
0.1	77.80 %	99.50 %	100.0 %	68.60 %	99.60 %	100.0 %	77.10 %	27.70 %	20.60 %
0.2	77.00 %	99.35 %	100.0 %	65.70 %	99.30 %	100.0 %	75.85 %	22.30 %	19.70 %
0.3	77.20 %	99.30 %	99.95 %	65.95 %	99.00 %	99.95 %	75.45 %	21.15 %	19.75 %
0.4	73.50 %	98.60 %	100.00 %	61.05 %	98.35 %	99.95 %	72.95 %	18.05 %	18.20 %
0.5	73.85 %	97.70 %	99.60 %	62.20 %	97.65 %	99.55 %	72.95 %	16.65 %	15.00 %
0.6	72.55 %	96.40 %	98.25 %	62.20 %	95.80 %	98.45 %	72.15 %	11.55 %	13.70 %
0.7	70.50 %	94.75 %	97.00 %	60.90 %	93.75 %	96.70 %	70.15 %	7.35 %	11.75 %
0.8	68.65 %	92.05 %	94.55 %	60.05 %	90.85 %	94.25 %	69.65 %	4.55 %	8.05 %
0.9	69.10 %	89.60 %	91.70 %	61.05 %	88.85 %	92.00 %	68.95 %	2.65 %	4.90 %
1.0	68.65 %	88.00 %	90.05 %	65.90 %	87.60 %	90.05 %	67.20 %	0.85 %	18.75 %

จากตารางที่ 1 จะพบว่า วิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง (AR(1)) ได้ผลดังนี้

เมื่อ n = 10 และ ρ = 0.1 วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu สามารถแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ได้ร้อยละ 77.80, 68.60 และ 77.10 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าวิธี Cochrane – Orcutt เป็นวิธีที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์

เมื่อ n = 30 และ ρ = 0.1 วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu สามารถแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ได้ร้อยละ 99.50, 99.60 และ 27.70 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า วิธี Prais – Winsten เป็นวิธีที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์

เมื่อ n = 100 และ ρ = 0.1 วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu สามารถแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ได้ร้อยละ 100.0, 100.0 และ 20.60 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าวิธี Cochrane – Orcutt และวิธี Prais – Winsten เป็นวิธีที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์

ตารางที่ 2 แสดงค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด เมื่อแก้ปัญหาด้วย 3 วิธี จำแนกตามขนาดตัวอย่าง (n) และระดับอัตตสหสัมพันธ์ (ρ)

ρ	**วิธี Cochrane – Orcutt**			**วิธี Prais – Winsten**			**วิธี Hildreth – Lu**		
	n=10	**n=30**	**n=100**	**n=10**	**n=30**	**n=100**	**n=10**	**n=30**	**n=100**
0.1	20.358	0.991	1.016	22.802	**0.986**	1.025	**9.210**	1.026	**0.993**
0.2	**6.702**	1.058	1.043	7.474	**1.053**	1.053	8.882	1.129	**1.027**
0.3	**9.861**	1.118	1.081	**10.818**	**1.112**	1.09	14.884	1.169	**1.05**
0.4	225.746	1.199	1.157	270.82	**1.193**	1.166	**21.344**	1.217	**1.121**
0.5	4.08	1.26	1.285	**4.055**	1.253	1.293	21.078	**1.25**	**1.245**
0.6	996.135	1.381	1.479	1161	1.371	1.488	**30.666**	**1.306**	**1.388**
0.7	6.609	1.634	1.821	**6.569**	1.618	1.829	40.100	**1.423**	**1.739**
0.8	**35.394**	1.989	2.468	39.746	1.967	2.473	68.074	**1.588**	**2.253**
0.9	83.731	15.76	4.209	**42.26**	15.459	4.209	94.288	**1.681**	**3.776**
1.0	482.908	145.981	3019.3	501.68	146.94	3028.8	**253.424**	**1.61**	**125.729**

จากตารางที่ 2 จะพบว่า ความสามารถในการพยากรณ์ของค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ได้ผลดังนี้

เมื่อ n = 10 และ ρ = 0.1 วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu มีค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 20.358,22.802 และ 9.210 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า วิธี Hildreth – Lu เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์

เมื่อ n = 30 และ ρ = 0.1 วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu มีค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.991, 0.986 และ 1.026 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า วิธี Prais – Winsten เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์

เมื่อ n = 100 และ ρ = 0.1 วิธี Cochrane – Orcutt วิธี Prais – Winsten และวิธี Hildreth – Lu มีค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 1.016, 1.025 และ 0.993 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า วิธี Hildreth – Lu เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์

3.2 ผลจากการใช้ข้อมูลจริง ทางเศรษฐศาสตร์มาเป็นกรณีศึกษา กำหนดให้ ข้อมูลสินค้านำเข้า เป็นตัวแปรอิสระ และข้อมูลผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศ เป็นตัวแปรตาม (หน่วย : ล้านบาท) มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 มี $\rho = 0.37$ ทำการแก้ปัญหาด้วย 3 วิธี พบว่า วิธี Cochrane – Orcutt และวิธี Prais – Winsten สามารถแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนได้ โดยแต่ละวิธีทำการวนซ้ำ 2 รอบ แต่วิธี Hildreth – Lu ไม่สามารถแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนได้ โดยวิธี Cochrane – Orcutt และวิธี Prais – Winsten มีค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดเท่ากับ $5.47\text{x}10^{-12}$ และ $5.04\text{x}10^{-12}$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นวิธี Cochrane - Orcutt และวิธี Prais – Winsten จึงเป็นวิธีที่เหมาะสมในการพยากรณ์

จะเห็นว่า ผลจากกรณีศึกษาสอดคล้องกับผลที่ได้จากข้อมูลจำลอง

4.สรุปผลการวิจัย

ผลจากการวิจัย สามารถสรุปวิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนอันดับที่หนึ่ง (AR(1)) และวิธีที่เหมาะสมในการพยากรณ์ที่ดีที่สุด ได้ดังตารางที่ 3

เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 10 ความสามารถในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของวิธี Cochrane – Orcutt ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9 และ 1.0 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 68.65 และวิธี Hildreth – Lu ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ 0.8 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 69.65

เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 30 ความสามารถในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของวิธี Cochrane – Orcutt ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.2 ถึง 1.0 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 88.00 และ วิธี Prais – Winsten ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 99.6

เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 100 ความสามารถในการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของวิธี Cochrane – Orcutt ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8 และ 1.0 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 90.05 และ วิธี Prais – Winsten ดีที่สุดที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 0.9 และ 1.0 สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่าร้อยละ 90.0

วิธี Cochrane – Orcutt เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์ เมื่อขนาดตัวอย่าง 10 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.2, 0.3 และ 0.8 ส่วนวิธี Prais – Winsten เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์เมื่อขนาดตัวอย่าง 10 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.5, . 0.7 และ 0.9 เมื่อขนาดตัวอย่าง 30 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.1 ถึง 0.4 และวิธี Hildreth – Lu เป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการพยากรณ์ เมื่อขนาดตัวอย่าง 10 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.1, 0.4, 0.6 และ 1.0 เมื่อขนาดตัวอย่าง 30 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.5 ถึง 1.0 และเมื่อขนาดตัวอย่าง 100 ที่ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์ 0.1 ถึง 1.0

ตารางที่ 3 แสดงวิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์และวิธีที่เหมาะสมในการพยากรณ์ที่ดีที่สุด จำแนกตามขนาดตัวอย่าง (n) และระดับอัตตสหสัมพันธ์ (ρ)

ระดับสัมประสิทธิ์อัตตสหสัมพันธ์		ขนาดเล็ก(10)	ขนาดกลาง(30)	ขนาดใหญ่(100)
ระดับต่ำ	0.1	*วิธี Cochrane – Orcutt (77.80%) **วิธี Hildreth – Lu	วิธี Prais – Winsten (99.60%)	*วิธี Cochrane – Orcutt (100.0%) *วิธี Prais – Winsten (100.0%) **วิธี Hildreth – Lu
	0.2	วิธี Cochrane – Orcutt (77.00%)	*วิธี Cochrane – Orcutt (99.35%) **วิธี Prais – Winsten	*วิธี Cochrane – Orcutt (100.0%) *วิธี Prais – Winsten (100.0%) **วิธี Hildreth – Lu
	0.3	วิธี Cochrane – Orcutt (77.20%)	*วิธี Cochrane – Orcutt (99.30%) **วิธี Prais – Winsten	*วิธี Cochrane – Orcutt (99.95%) *วิธี Prais – Winsten (99.95%) **วิธี Hildreth – Lu
	0.4	*วิธี Cochrane – Orcutt (73.50%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Cochrane – Orcutt (98.60%) **วิธี Prais – Winsten	*วิธี Cochrane – Orcutt (100.0%) **วิธี Hildreth – Lu
ระดับกลาง	0.5	*วิธี Cochrane – Orcutt (73.85%) **วิธี Prais – Winsten	*วิธี Cochrane – Orcutt (97.70%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Cochrane – Orcutt (99.60%) **วิธี Hildreth – Lu
	0.6	*วิธี Cochrane – Orcutt (72.55%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Cochrane – Orcutt (96.40%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Prais – Winsten (98.45%) **วิธี Hildreth – Lu
	0.7	*วิธี Cochrane – Orcutt (70.50%) **วิธี Prais – Winsten	*วิธี Cochrane – Orcutt (94.75%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Cochrane – Orcutt (97.00%) **วิธี Hildreth – Lu
ระดับสูง	0.8	*วิธี Hildreth – Lu (69.65%) **วิธี Cochrane – Orcutt	*วิธี Cochrane – Orcutt (92.05%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Cochrane – Orcutt (94.55%) **วิธี Hildreth – Lu
	0.9	*วิธี Cochrane – Orcutt (69.10%) **วิธี Prais – Winsten	*วิธี Cochrane – Orcutt (89.60%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Prais – Winsten (92.00%) **วิธี Hildreth – Lu
	1.0	*วิธี Cochrane – Orcutt (68.65%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Cochrane – Orcutt (88.00%) **วิธี Hildreth – Lu	*วิธี Cochrane – Orcutt (90.05%) *วิธี Prais – Winsten (87.4%) **วิธี Hildreth – Lu

หมายเหตุ **ถ้ามีเครื่องหมาย** * คือ วิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์

ถ้ามีเครื่องหมาย ** คือ วิธีที่เหมาะสมในการพยากรณ์

ถ้ามีเครื่องหมาย ___ คือ วิธีการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์และวิธีที่เหมาะสมในการพยากรณ์

5. ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน โดยกำหนดรูปแบบการถดถอยที่ใช้เป็นรูปแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และระดับความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR(1)) ดังนั้นผู้วิจัยที่สนใจดำเนินการวิจัยเรื่องนี้ต่อไป

อาจทำการแก้ไขปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบอื่นๆ หรือทำการศึกษากรณีรูปแบบการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุที่ความคลาดเคลื่อนเกิดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์กันในอันดับที่สูงขึ้นเช่น AR(2), AR(3) และอื่นๆ

เอกสารอ้างอิง

[1] โชติรส เทียนถาวร . 2544. **"การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยที่มีความคลาดเคลื่อนแบบอัตตสหสัมพันธ์ "**. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร.

[2] ทรงศิริ แต้สมบัติ. 2548. **การวิเคราะห์การถดถอย.** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

[3] ปิยดา พฤกสวัสดิ์นนท์ . 2548. **"การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ที่มีเทอมความเคลื่อนแบบออโตรีเกรซซีฟอันดับที่ 1, 2 และ 3"**. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[4] วิรัชช พานิชวงศ์. 2549. **การวิเคราะห์การถดถอย.** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: ศูนย์ผลิตตำราเรียนสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

[5] อรจิรา คำหงส์สา . 2547. **"การเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนที่มีสาเหตุมาจากธรรมชาติของข้อมูล"** . วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

[6] Damodar N. Gujarati. 1995. **Basic Econometrics**, 3rd ed. New York: McGraw-Hell.

[7] George G.Judge. 1985. **The Theory and practice of econometrics**. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons.

[8] Michael H. Kunter, Christopher J. Nachtsheim, John Neter. 2004. **Applied Linear Statistical Model.** 4th ed., McGraw-Hill/Irwin. New York.

[9] Ramu Ramanathan.1995. **Introductory econometrics with applications**. 3rd ed. Fort worth: Dryden Press.

[10] Tse Yiu Kuen. 1984 .**"An Empirical Comparison of Small Sample Distributions of Estimators of the First Order Autoregression"**. Journal of Statistical Computation and Simulation., 19: 227-236.