

รายงานการวิจัย

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ Gross-Pitaevskii equation
Einstein condensation (BEC)

Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation for Bose
Condensation (BEC)



นางสาวธนภรณ์ ลีลาวัฒนานนท์

นายวรการ นียากร

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินงบประมาณแผ่นดินหรือราย
งบประมาณ 2553

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

รายงานการวิจัย

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ Gross-Pitaevskii equation สำหรับ Bose-Einstein condensation (BEC)

Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation for Bose-Einstein Condensation (BEC)



นางสาวชนภรณ์ ธิลาวัฒนานนท์
นายวรการ นียากร

RCN
QA
297
ธ 151ก
ด. 2

สงพญ.....
เลขทะเบียน 115589
วัน,เดือน,ปี 21 ส.ค. 2554

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินงบประมาณแผ่นดินหรือรายได้ ประจำปี
งบประมาณ 2553

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้ง
12/31/2011

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ Gross-Pitaevskii equation สำหรับ Bose- Einstein condensation (BEC)
(ภาษาอังกฤษ) Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation for Bose-Einstein Condensation (BEC)

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจาก งบประมาณเงินรายได้

ประจำปี 2553 จำนวนเงิน 50,000 บาท

ระยะเวลาการทำวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2552 ถึง 30 กันยายน 2553

คณะผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการวิจัย

ชื่อ-สกุล (ภาษาไทย)

นส. ธนภรณ์ ลีลาวัฒนานนท์

ชื่อ-สกุล (ภาษาอังกฤษ)

Miss Tanaporn Leelawattananon

ตำแหน่งทางวิชาการ อาจารย์

สัดส่วนการวิจัย 70 %

ภาควิชา ฟิสิกส์ประยุกต์

คณะ วิทยาศาสตร์

โทรศัพท์ 02-7373000 ต่อ 6212

โทรสาร 02-3264413

ผู้ร่วมวิจัย

ชื่อ-สกุล (ภาษาไทย)

นายวรการ นียากร

ชื่อ-สกุล (ภาษาอังกฤษ)

Mr. Worakarn Neeyakorn

ตำแหน่งทางวิชาการ อาจารย์ ดร.

สัดส่วนการวิจัย 30 %

ภาควิชา ฟิสิกส์ประยุกต์

คณะ วิทยาศาสตร์

โทรศัพท์ 02-3264339-52 ต่อ

โทรสาร 02-3264413

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทคัดย่อ

เราได้ศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่ออธิบายสภาวะพื้นของ Bose-Einstein Condensation (BEC) โดยการลดรูปสมการ Gross-Pitaevskii equation ใน 3 มิติ (3D GPE) ภายใต้ค่าจำกัดค่าหนึ่งของความถี่กักกัน (trapping frequency) โดยในขั้นแรกจะนำสมการ 3D GPE มาทำการลดรูปจนได้พารามิเตอร์หลักๆ 3 ตัวออกมา และแสดงวิธีการลดรูปสมการลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE ของการควบแน่นแบบ disk-shaped condensation และแสดงการลดรูปสมการจนได้เป็นสมการ 1D GPE ของการควบแน่นแบบ cigar-shaped condensation. จากนั้นจึงการคำนวณสภาวะพื้นของสมการ 3D GPE โดยวิธีการประมาณแบบ backward Euler finite difference discretization ผลเฉลยโดยประมาณที่วิเคราะห์ได้นั้น ค่า relative errors ของอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบต่างๆ ทำให้เราเห็นอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ที่เท่ากับ $\frac{1}{4}$ ซึ่งตอบสนองต่อค่า γ_Z ต่างๆของการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE และเห็นอัตราการลู่เข้าที่เท่ากับ $\frac{1}{3}$ ซึ่งตอบสนองต่อค่า γ_T ต่างๆของการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE โดยมีอัตราส่วนระหว่างค่าความถี่กักกัน (ratio between trapping frequencies) เท่ากับค่านั้นต์ นอกจากนี้เราจะใช้วิธีการประมาณแบบ Thomas-fermi approximation และการประมาณแบบ first order approximation คำนวณพลังงานและศักย์เคมีที่สภาวะพื้นของสมการ d-dimension GPE ที่มีค่า $d=1,2$ และ 3. จากนั้นเราจะทำการประมาณสภาวะพื้นของสมการ 3D GPE ในกรณีที่มีสถานะการควบแน่นแบบ isotropic condensation, สถานะการควบแน่นแบบ disk-shaped condensation และสถานะการควบแน่นแบบ cigar-shaped condensation. นอกจากนี้เรายังได้ประมาณพลังงานและศักย์เคมีที่สภาวะพื้นของกรณีที่เกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อนและกรณีที่เกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลัดกันอย่างแรงด้วย จากผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณได้ออกมานั้น เราได้รายงานผลของอัตราการลู่เข้าภายใต้ relative error ของการเกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบต่างๆ ด้วย

และในส่วนสุดท้ายของรายงาน เราได้ศึกษาผลเฉลยโดยประมาณจากการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE เพื่ออธิบาย BEC โดยใช้วิธี the-fourth-order time-splitting sine-spectral method (TSSP). ผลเฉลยที่ประมาณได้โดยวิธี TSSP นี้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างมากกับผลเฉลยโดยประมาณจากการลดรูปสมการ GPE แบบขึ้นกับเวลาที่วิเคราะห์ได้ด้วยวิธีที่กล่าวไว้ในตอนแรก และเราได้แสดงให้เห็นอัตราการลู่เข้าภายใต้ค่าจำกัดค่าหนึ่งของอัตราส่วนความถี่กักกัน (trapping frequency ratios) ด้วย.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Abstract

we study numerically and asymptotically dimension reduction of three-dimensional (3D) Gross-Pitaevskii equation (GPE) for Bose-Einstein condensates (BEC) in certain limiting trapping frequency regimes. As preparation steps, we take the 3D GPE, scale it to get a three parameters model, and review how to reduce it to 2D GPE in disk-shaped condensation or 1D GPE in cigar-shaped condensation. Then we compute the ground state of 3D GPE numerically by a normalized gradient flow under backward Euler finite difference discretization and verify numerically the formal dimension reduction for ground state. From our numerical results, for relative errors of the interaction parameter, we observe numerically the convergence rate of $3/4$ with respect to γ_z for dimension reduction from 3D to 2D, and respectively, of $1/3$ with respect to γ_r for reduction from 3D to 1D, when the ratio between trapping frequencies goes to infinity. Furthermore, we obtain Thomas-Fermi and first order approximations for energy and chemical potential of the ground state for d -dimension GPE with $d = 1; 2; 3$. Then we classify approximations of the ground state of 3D GPE in three cases based on the ratios between the trapping frequencies: i). isotropic condensation; ii). disk-shaped condensation; iii). cigar-shaped condensation. Approximate ground states as well as their energy and chemical potential are provided explicitly in weakly, intermediate repulsive and strongly repulsive interaction regimes. These results are fully confirmed by our 3D numerical results. Also, convergence rates in relative error for all interacting quantities are observed and reported.

Finally, we study dimension reduction of time-dependent GPE from 3D to 2D numerically by a fourth-order time-splitting sine-spectral method. Our numerical results confirm the formal dimension reduction for time-dependent GPE and also suggest convergence rates in limiting trapping frequency ratios.

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยเล่มนี้เป็นการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ Gross-Pitaevskii equation สำหรับ Bose-Einstein condensation (BEC) เป็นการศึกษาทฤษฎีที่มีความยากและต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณค่าประมาณของผลเฉลยต่างๆที่สภาวะพื้นของ BEC ซึ่งต้องใช้อุปกรณ์ที่เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์ที่เกี่ยวข้องหลายตัว ดังนั้นคณะผู้วิจัยขอขอบคุณผู้ให้ความสนับสนุนทางด้านทุนการวิจัยทุกท่าน ซึ่งเป็นทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินงบประมาณแผ่นดินหรือรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2553 เป็นอย่างมาก จึงทำให้โครงการวิจัยเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ดี

หากโครงการวิจัยเล่มนี้มีข้อผิดพลาดประการใดก็ขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย

คณะผู้วิจัย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	ข
ABSTRACT	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญ	จ
สารบัญตาราง	ช
สารบัญรูป	ญ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของโครงการวิจัย	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	3
1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย	3
1.4 วิธีดำเนินงานวิจัย	4
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
บทที่ 2 ทฤษฎี	6
2.1 การที่จะทำให้สมการ GPE ไร้มิติทาง (dimensionless GPE)	7
2.2 สภาวะพื้น	8
2.3 การคำนวณสภาวะพื้นด้วยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข	9
บทที่ 3 การลดรูปสมการ 3D GPE	12
3.1 สมการ 2D GPE สำหรับการควบแน่นแบบ disk-shaped condensation	12
3.2 สมการ 1D GPE สำหรับการควบแน่นแบบ cigar-shaped condensation	21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.3 การประมาณสถานะพื้นของ GPE	29
บทที่ 4 การประมาณสถานะพื้นของกรณีที่มีอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาค	33
4.1 กรณีที่เป็นสถานะของการควบแน่นแบบ isotropic- shaped condensation	33
4.1.1 กรณีของการเกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อน	33
4.1.2 กรณีของการเกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลักรันอย่างแรง	33
4.2 กรณีที่เป็นสถานะของการควบแน่นแบบ disk- shaped condensation	34
4.2.1 กรณีของการเกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อน	34
4.2.2 กรณีของการเกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลักรันในระดับกลาง	35
4.2.3 กรณีของการเกิดอันตรกริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลักรันอย่างแรง	40
บทที่ 5 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่เป็น dynamic GPE	46
5.1 วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข	46
วิธี fourth-order time splitting sine-spectral method (TSSP)	47
5.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการลดรูปสมการ GPE แบบขึ้นกับเวลา	48
ด้วยวิธี fourth-order time splitting sine-spectral method (TSSP)	
บทที่ 6 สรุปและวิเคราะห์ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณ	52
เอกสารอ้างอิง	53

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 3.1: ค่า R และ a ; (R, a) สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ จากการคำนวณ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE	14
ตารางที่ 3.2 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $ \beta_2^{ho} - \beta_2 $ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE	15
ตาราง 3.3 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $\left \frac{\beta_2^{ho} - \beta_2}{\beta_2} \right $ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE	16
ตารางที่ 3.4 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $\max (\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2 $ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE	17
ตารางที่ 3.5 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $\ (\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2\ _{L_1}$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE	18
ตารางที่ 3.6 ค่า R และ a ; (R, a) สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ จากการคำนวณ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE	23
ตารางที่ 3.7 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $ \beta_1 - \beta_1^{ho} $ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE	24
ตารางที่ 3.8 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $\left \frac{\beta_1 - \beta_1^{ho}}{\beta_1} \right $ สำหรับค่าต่างๆของ β และ $1/\gamma$ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE	25
ตารางที่ 3.9 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $\max \phi_{23} - \phi_{23}^{ho} $ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE	26

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง (ต่อ)

	หน้า
ตารางที่ 3.10 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $\ (\phi_{23})^2 - (\phi_{23}^{ho})^2\ _{L^1}$ สำหรับค่า ต่างๆของ β และ $1/\gamma$, เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE	27
ตารางที่ 4.1 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $\max \phi_g - \phi_g^{DS} $ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ <i>disk-shaped trap</i>	36
ตารางที่ 4.2 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $\max \ (\phi_g)^2 - (\phi_g^{DS})^2\ _{L^1}$ สำหรับ กรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ <i>disk-shaped trap</i>	37
ตารางที่ 4.3 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $ E_g - E_g^{DS} $ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะ พื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ <i>disk-shaped trap</i>	38
ตารางที่ 4.4 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $ \mu_g - \mu_g^{DS} $ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะ พื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ <i>disk-shaped trap</i>	39
ตารางที่ 4.5 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $\ (\phi_g)^2 - (\phi_g^{TF1})^2\ _{L^1}$ สำหรับกรณีการ คำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ <i>disk-shaped trap</i>	42
ตารางที่ 4.6 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $ E_g - E_g^{TF1} $ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะ พื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ <i>disk-shaped trap</i>	43
ตารางที่ 4.7 แสดงการวิเคราะห์ค่า <i>error</i> ของ $ \mu_g - \mu_g^{TF1} $ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะ พื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ <i>disk-shaped trap</i>	44
ตารางที่ 5.1 ค่าของ R_x และ R_z สำหรับค่าต่างๆกันของ γ_z	49

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

หน้า

รูปที่ 3.1 แสดง *convergence rate* ของ $|\beta_2^{ho} - \beta_2|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 15

รูปที่ 3.2 แสดง *convergence rate* ของ $\left| \frac{\beta_2^{ho} - \beta_2}{\beta_2} \right|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 16

รูปที่ 3.3 แสดง *convergence rate* ของ $|(\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 17

รูปที่ 3.4 แสดง *convergence rate* ของ $\|(\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2\|_{L1}$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 18

รูปที่ 3.5 แสดงค่าความ error ของ $\phi_3^{ho}(z) - \phi_3(z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันตามแนวแกน z สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ_r 20

รูปที่ 3.6 แสดง *convergence rate* ของ $|\beta_1 - \beta_1^{ho}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 24

รูปที่ 3.7 แสดง *convergence rate* ของ $\left| \frac{\beta_1 - \beta_1^{ho}}{\beta_1} \right|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 25

รูปที่ 3.8 แสดง *convergence rate* ของ $|\phi_{23} - \phi_{23}^{ho}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 26

รูปที่ 3.9 แสดง *convergence rate* ของ $\|(\phi_{23})^2 - (\phi_{23}^{ho})^2\|_{L1}$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β 27

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.10 แสดงค่าความ error ของ $(\phi_{23}(y, z) - \phi_{23}^{ho}(y, z)) = (\phi_{23}(r) - \phi_{23}^{ho}(r))$ 28
 ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ r สำหรับค่าต่างๆของ β และ $\gamma_z = \gamma_r$

รูปที่ 4.1 แสดง convergence rate ของ $|\phi_g - \phi_g^{DS}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z 36
 และ b) ค่าต่างๆของ β

รูปที่ 4.2 แสดง convergence rate ของ $\|(\phi_a)^2 - (\phi_a^{DS})^2\|_{L^1}$ ที่ตอบสนองต่อ 37
 a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

รูปที่ 4.3 แสดง convergence rate ของ $|E_g - E_g^{DS}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z 38
 และ b) ค่าต่างๆของ β

รูปที่ 4.4 แสดง convergence rate ของ $|\mu_g - \mu_g^{DS}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z 39
 และ b) ค่าต่างๆของ β

รูปที่ 4.5 แสดง convergence rate ของ $|E_g - E_g^{TF}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z 43
 และ b) ค่าต่างๆของ β

รูปที่ 4.6 แสดง convergence rate ของ $|\mu_g - \mu_g^{TF1}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z 44
 และ b) ค่าต่างๆของ β

รูปที่ 5.1 แสดงผลของการคำนวณด้วยวิธี TSSP และเปรียบเทียบกันระหว่างสมการ 3D GPE 50
 และสมการ 2D GPE ที่มาจากการลดรูปของสมการ 3D GPE

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของโครงการวิจัย

แนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับสถานะควบแน่นของโบสซ์และไอสไตน์ (Bose-Einstein condensation) ได้ถูกทำนายไว้ทางทฤษฎีโดยโบสซ์และไอสไตน์ตั้งแต่ ค.ศ. 1924 และมีการศึกษาเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1995 โดยแอนเดอสันได้ทดลองกับกลุ่มก๊าซรูบิเดียม (rubidium)[11] และเดวิสได้ทดลองกับกลุ่มก๊าซโซเดียม (sodium) [12]. การทดลองที่เกี่ยวกับสถานะ BEC ของทั้งสองคนนี้กระทำในแถบกักกันแม่เหล็ก (magnetic trap) และปล่อยให้ก๊าซเย็นตัวลงในอุณหภูมิระดับไมโครเคลวิน และถ่ายภาพของอะตอมในสถานะ BEC ที่เกิดขึ้นด้วยวิธีการทางแสง เราจะสังเกตเห็นยอดแหลมที่เกิดขึ้นในกราฟการกระจายความเร็วของอะตอม (velocity distribution) ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต ซึ่งแสดงถึงสัญญาณที่ชัดเจนของสถานะ BEC. นอกจากนี้ในปีเดียวกันยังพบการทดลองของแบรดลีย์ที่เกี่ยวกับสถานะ BEC ของกลุ่มก๊าซลิเทียม (lithium) อีกด้วย [13].

ถึงแม้ว่าจะมีการทดลองมากมายของสถานะ BEC ที่เกิดกับกับกลุ่มธาตุอัลคาไลส์ แต่ก็ยังมีการทดลองและการศึกษาทางทฤษฎีเกี่ยวกับปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์อย่างอื่นจากการทำนายด้วยวิธีสถิติกลศาสตร์ด้วย โดยเฉพาะการศึกษาปรากฏการณ์ของไหลยิ่งยวด (superfluidity) ของก๊าซฮีเลียมของลอนดอน [14] ซึ่งมีความเกี่ยวข้องโดยตรงกับสถานะ BEC ของก๊าซ หลักฐานที่ยืนยันสถานะ BEC ของก๊าซฮีเลียมนั้นดูจากกราฟการกระจายโมเมนตัมของอะตอมที่วัดได้จากการทดลองการกระเจิงของนิวตรอน (neutron-scattering experiments) ของโซโคล [15]. ช่วงระยะหลังมานี้ได้มีการศึกษาสถานะ BEC ของกลุ่มก๊าซพาราแมกเนติกในสารกึ่งตัวนำด้วย [16] แต่ยังไม่ปรากฏสัญญาณของสถานะ BEC อย่างแน่ชัด.

การประพุดตัวของสสาร BEC เนื่องจากอันตรกิริยาภายในอะตอม BEC นั้นเกี่ยวข้องกับศักย์ไฟฟ้ากักกันภายนอก (external trapping potential) เราสามารถวิเคราะห์ได้จากการทำนายทางทฤษฎีเกี่ยวกับคุณสมบัติต่างๆของ BEC เช่น density profiles [17], collective excitations และรูปร่างวอริซ (vortices) ซึ่งมีความสอดคล้องกับผลการทดลอง [11] ที่มีการปรับพารามิเตอร์หลักภายนอก เช่น ความถี่กักกัน (trap frequency) และ/หรือ aspect ratio. จากความสำเร็จในการทดลอง BEC นี้เองทำให้เกิดการผลักดันงานวิจัยทางด้าน BEC ทั้งการทดลองและการคำนวณทางทฤษฎีเป็นจำนวนมากจนถึงปัจจุบัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คุณสมบัติของ BEC ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตหลายๆสามารถอธิบายได้จากสมการชโรดิงเงอร์แบบไม่เชิงเส้น (NLSE) ซึ่งใช้อธิบายสมการคลื่นมหภาคและเป็นที่รู้จักในนามของ Gross-Pitaevskii equation (GPE) [17] โดยเกี่ยวข้องกับศักย์ไฟฟ้ากักกัน (trap potential) และอันตรกิริยาระหว่างอะตอม. ผลเฉลยที่ได้จากสมการ GPE มีความสอดคล้องกันดีกับผลที่ได้จากการทดลองส่วนมาก. จนถึงปัจจุบันพบว่าการทดลองเพียงส่วนน้อยเท่านั้นที่เกี่ยวกับ ultracold dilute bosonic gases ที่ยังไม่สามารถอธิบายผลที่ได้ด้วยวิธีคำนวณทางทฤษฎีของ GPE.

ผลของอันตรกิริยาภายในระหว่างอะตอม BEC สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎี mean field ซึ่งนำไปสู่เทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นในสมการ GPE นั่นเอง ทั้งกรณีที่เป็นอันตรกิริยาแบบผลักกันและอันตรกิริยาแบบดึงดูดกันของอะตอมนั้นซึ่งสามารถเห็นได้จากการทดลอง มีความสอดคล้องกันดีกับกรณีที่เป็น defocusing และ focusing nonlinearities GPE ตามลำดับ และสมการที่เกิดขึ้นทั้งกรณีอันตรกิริยาแบบผลักกันและอันตรกิริยาแบบดึงดูดกันของอะตอม ซึ่งมีความเหมือนกันอย่างมากกับสมการ GPE นั้น มันยังมีความคล้ายกันอย่างมากกับเทอมที่แสดงความเป็น nonlinear optics ซึ่งกล่าวว่า ดัชนีหักเหขึ้นอยู่กับความเข้มแสง ก็คือส่วนที่แสดงความเป็นเชิงเส้นที่พบในสมการ GPE นั่นเอง

ด้วยเหตุนี้จึงมีงานวิจัยจำนวนมากในระยะหลังๆนี้ทางด้านการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการทั้งแบบไม่ขึ้นกับเวลาและแบบขึ้นกับเวลาของสมการ GPE เพื่ออธิบายสภาวะ dynamics ของ BEC. เช่น ผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่อคำนวณผลเฉลยที่สภาวะพื้นและสภาวะถูกกระตุ้นของ GPE โดยใช้วิธี Crank-Nicolson finite difference ของ Ruprecht [19], ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่สภาวะพื้นของ GPE โดยใช้วิธี Runge-Kutta method ของ Edward [18] เพื่อแก้ปัญหาทั้งใน 1 มิติ และ 3 มิติด้วยสมการ GPE แบบขึ้นกับเวลา ในกรณีสมมาตรทรงกลม (spherical symmetry time-dependent GPE) และ Adhikari ซึ่งใช้วิธีเดียวกันนี้คำนวณผลเฉลยที่สภาวะพื้นของ GPE ใน 2 มิติด้วยการพิจารณาแบบ radial symmetry . รวมไปถึงวิธีอื่นๆ เช่น explicit imaginary-time algorithm ที่ถูกใช้โดยเชริเมล , วิธี direct inversion ใน iterated subspace (DIIS) ที่ถูกใช้โดยชไนเดอร์ หรือวิธีวิเคราะห์แบบง่ายที่ถูกใช้โดยคอคค์ .

การทดลองจำนวนมากที่เกี่ยวกับ BEC จะมีการใช้ความถี่กักกัน (trapping frequency) ในหลายรูปแบบ ทั้งการทดลองเพื่อศึกษาสถานะควบแน่นแบบ disk-shaped condensate และ cigar-shaped condensate . ในกรณีทั้งสองแบบนี้ นักฟิสิกส์จะเริ่มจากการศึกษาผลดั้งเดิมที่เป็น GPE ใน 3 มิติก่อน จากนั้นจึงทำการลดรูปสมการลงจนได้เป็น GPE ใน 2 มิติ และเหลือเป็น GPE ใน 1 มิติ โดยใช้เหตุผลว่ามีพลังงาน

ในบางทิศทางที่มากกว่าทิศทางอื่น จนส่งผลต่อสมการคลื่นในทิศทางนั้นถูกกระตุ้นให้เกิดขึ้นได้ยาก ด้วยไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สาเหตุนี้จึงทำให้นักฟิสิกส์แก้ปัญหาสมการคลื่นที่เกิดขึ้นได้ใน 2 มิติ และ 1 มิติ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มาแทนที่ผลเฉลยสมการ GPE ใน 3 มิตินั้นเอง นอกจากนี้สิ่งที่สำคัญอีกประการคือยังช่วยลดเวลาในการคำนวณลงและลดการใช้หน่วยความจำลงได้เป็นอย่างมาก แต่เนื่องจากการลดรูปสมการ GPE ลงจาก 3 มิติ นี้ได้กระทำขึ้นจากการกำหนดเงื่อนไขบางอย่างทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องขึ้นมา ดังนั้นจึงยังไม่สามารถยืนยันความแม่นยำของผลเฉลยทางคณิตศาสตร์นี้ได้ว่าร้อยเปอร์เซ็นต์ อย่างไรก็ตามเราก็ยังมีวิธีที่สามารถตรวจสอบความผิดพลาดของผลเฉลยที่คำนวณได้หลังจากลดรูปสมการ 3 มิติของ GPE ลงมา ในงานวิจัยฉบับนี้เราศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสถานะ BEC จากการลดรูปสมการ GPE ใน 3 มิติ ลงมาภายใต้ความถี่กักกัน (trapping frequency) จำกัดค่าหนึ่ง และคำนวณอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ของปริมาณต่างๆที่เราสนใจ ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่ออัตราส่วนระหว่างความถี่กักกัน (ratio between trapping frequencies) มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ต้องการทราบสำหรับทุกกรณีศึกษาของ BEC เราจะเริ่มต้นจากผลเฉลยแบบประมาณที่สภาวะพื้นของ BEC และพลังงานที่สภาวะพื้น ศักย์เคมีที่สภาวะพื้นที่เราหามาได้จากสมการ GPE ใน 3 มิติ

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของ Bose – Einstein condensation ที่ถูกพัฒนาขึ้นมาในช่วงหลายสิบปีที่ผ่านมา
2. เพื่อศึกษาวิธีคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ time-dependent Gross – Pitaevskii equation (GPE)
3. เพื่อศึกษาวิธีคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้เทคนิค time – splitting spectral method (TSSP) สำหรับการ discretization สมการ time-dependent Gross – Pitaevskii equation (GPE)
4. เพื่อศึกษาและคำนวณสภาวะพื้นของ Bose – Einstein condensates ด้วยการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE และ 1D GPE ด้วยวิธี backward Euler finite difference discretization (BEFD) และวิธี TSSP ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นต่างๆกัน

1.3 ขอบเขตโครงการวิจัย

1. ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของ Bose – Einstein condensation ในอะตอมก๊าซ ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับสถานะทางควอนตัมของก๊าซในเงื่อนไขที่เป็น high degeneracy
2. ศึกษาวิธีคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ time-dependent Gross – Pitaevskii equation (GPE) ซึ่งใช้สำหรับอธิบาย BEC ที่อุณหภูมิต่ำมากหรือศูนย์เคลวิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- ศึกษาวิธีคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้เทคนิค time – splitting spectral method สำหรับทำการ discretization สมการ time-dependent Gross – Pitaevskii equation (GPE) โดยรวมไปถึงการศึกษา perturbation theory ซึ่งนำไปใช้ในการทำความเข้าใจ discretization scheme และเลือก กริด (Grid) ที่เหมาะสม
- ศึกษาและคำนวณค่าประมาณของผลเฉลยที่สถานะพื้นของ GPE เพื่ออธิบายการควบแน่น BEC ภายใต้เงื่อนไขการเกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอะตอมก๊าซแบบอ่อนและแบบผลักรันอย่างแรง

1.4 วิธีดำเนินงานวิจัย

1. ศึกษาสมการ 3 มิติของ GPE เมื่อถูกลดรูปลงจนได้ข้อมูลของพารามิเตอร์หลัก 3 ตัว และสถานะพื้นของสมการ GPE ใน 3 มิติ ที่มีการนำวิธี backward Euler finite difference (BEFD) มาใช้ในการ คำนวณที่สถานะพื้น

2. แสดงการลดรูป 3D GPE ลงเหลือ 2D GPE ซึ่งมีรูปร่างแบบ disk-shaped condensate และลดรูปลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE ซึ่งมีรูปร่างแบบ cigar-shaped condensate. จากนั้นเราจะแสดงการคำนวณที่สถานะพื้นของ 3D GPE โดยวิธี BEFD และคำนวณ relative errors เพื่อยืนยันผลเฉลยที่ได้จากการลดรูปสมการ GPE เราจะสังเกตผลเฉลยที่เกิดขึ้นเมื่อ convergence rate เป็น $\frac{3}{4}$ ซึ่งตอบสนองกับค่า V_z ต่างๆของการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือ 2D GPE และสังเกตผลเฉลยที่เกิดขึ้นเมื่อ convergence rate เป็น $\frac{1}{3}$ ซึ่งตอบสนองกับค่า V_r ต่างๆของการลดรูปจาก 3D เหลือเป็น 1D ซึ่งเกิดขึ้นในขณะที่ ratio between trapping frequencies มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์และเราจะใช้วิธีการประมาณแบบ first order ของ Thomas-Fermi เพื่อประมาณพลังงานและศักย์เคมีที่สถานะพื้น ของสมการ GPE ทั้งใน 1,2 และ 3 มิติ

3. แสดงการประมาณที่สถานะพื้นของสมการ 3D GPE ในกรณี isotropic condensation , กรณี disk-shaped condensation และกรณี cigar-shaped condensation รวมไปถึงค่าประมาณของพลังงานและศักย์เคมีที่สถานะพื้นของกรณีที่มีอันตรกิริยาภายในระหว่างอะตอมทั้งแบบอ่อนและแบบผลักรันอย่างแรง. พร้อมทั้งแสดงค่า relative error ที่เกิดขึ้นจาก convergence rate ของแต่ละกรณี

4. แสดงการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือ 2D GPE โดยวิธี time-splitting spectral method ซึ่งผลเฉลยที่ประมาณได้จากวิธีนี้เหมือนกันกับผลเฉลยที่ประมาณได้จากสมการ GPE แบบขึ้นกับเวลาโดยวิธีอื่นที่กล่าวในบทที่ 4 และบทที่ 5 ภายใต้เงื่อนไขของ convergence rate ที่เกิดขึ้นเมื่อ trapping frequency ratios มีค่าจำกัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. สรุปผลที่ได้จากการคำนวณ โดยใช้วิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขดังที่กล่าวมาในงานวิจัยนี้

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. คณะผู้วิจัยได้รับความรู้ความเข้าใจมากขึ้น เกี่ยวกับทฤษฎีพื้นฐาน Bose – Einstein condensation (BEC) และคุณสมบัติที่สภาวะพื้นของอะตอมก๊าซที่ถูกทำให้เย็นตัวลง รวมไปถึงความรู้และความเข้าใจที่มากขึ้นเกี่ยวกับการนำ BEC atomic gas ไปใช้งาน
2. คณะผู้วิจัยได้รับความรู้ความเข้าใจที่มากขึ้นเกี่ยวกับวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขทางทฤษฎี ที่ชื่อว่า time-dependent Gross – Pitaevskii equation (GPE) และ time-splitting spectral method (TSSP) เพื่ออธิบายและทำนายคุณสมบัติทางฟิสิกส์ของ BEC ที่สภาวะเงื่อนไขเริ่มต้นต่างๆ
3. ได้พัฒนางานวิจัยทางด้านการคำนวณทางฟิสิกส์ (computational physics) ที่เกี่ยวกับงานทางด้านฟิสิกส์อะตอม



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

สมการ Gross-Pitaevskii equation (GPE)

ที่อุณหภูมิ T ใดๆซึ่งต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมากๆ สถานะ BEC จะเกิดขึ้นและสามารถอธิบายได้ด้วยสมการคลื่นมหภาค $\varphi = \varphi(x, t)$ ซึ่งมีคุณสมบัติ self-consistent ที่ตรงกับสมการ mean field nonlinear schrodinger equation (NLSE) ที่รู้จักในชื่อของสมการ Gross-Pitaevskii equation (GPE) ถ้าศักย์ไฟฟ้ากักกันเป็นศักย์ไฟฟ้ากักกันชนิดฮาร์มอนิก (harmonic trap potential) สมการอธิบายอนุภาคเดี่ยว (single particle equation) จะมีรูปสมการดังต่อไปนี้

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{x})\psi + NU_0|\psi|^2\psi, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \dots\dots\dots (2.1)$$

- โดยที่ t คือ เวลา
- $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ คือ spatial coordinate vector
- m คือ มวลอะตอม
- \hbar คือ ค่าคงที่ของพลังค์
- N คือ จำนวนอะตอมในสถานะควบแน่น
- $V(\mathbf{x})$ คือ ค่าจริงของศักย์ไฟฟ้ากักกันภายนอก
- U_0 คือ อันตรกิริยาระหว่างอะตอมที่อยู่ในสถานะควบแน่น

เมื่อเราใช้ศักย์ไฟฟ้ากักกันแบบฮาร์มอนิก มีผลทำให้ $V(\mathbf{x}) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$ โดยที่ $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ คือความถี่กักกัน (trap frequencies) ในแนวแกน x,y และ z ตามลำดับและให้ $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ โดยที่ a คือ s-wave scattering length (จะเป็นค่าบวกถ้าเป็นอันตรกิริยาแบบผลึกกันอย่างแรง และจะเป็นค่าลบถ้าเป็นอันตรกิริยาแบบดึงดูด) จากนั้นเราจะทำการ normalize สมการคลื่นดังนี้

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 1. \dots\dots\dots (2.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1 การทำให้สมการ GPE ไร้มวล

จากงานวิจัยที่ผ่านมาจำนวนมาก [1,4,8] ถ้าจะทำการปรับสเกลของสมการ (2.1) ใหม่ภายใต้การทำการนอร์มอลไลเซชันตามสมการ (2.2) จะกำหนดความสัมพันธ์บางอย่างใหม่ดังต่อไปนี้

$$\bar{t} = \frac{t}{t_s}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{a_0}, \quad \tilde{\psi}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = a_0^{3/2} \psi(\mathbf{x}, t), \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

และกำหนดให้ a_0 เรียกว่า length of harmonic oscillator ground state ในแนวแกน x . ส่วนเวลา t_s ถูกกำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_x}}, \quad t_s = \frac{1}{\omega_x}. \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

เมื่อแทนที่สมการ (2.3) เข้าไปในสมการ (2.1) และตามด้วยการคูณด้วยค่า $\frac{1}{m\omega_x^2 a_0^2}$ จากนั้นจึงถอดเครื่องหมาย ~ ออก เราจะได้สมการ GPE แบบไร้มวลซึ่งทำการนอร์มอลไลซ์แล้ว ดังนี้

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, t) + \beta |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \psi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \dots \dots \dots (2.5)$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x^2 + \gamma_y^2 y^2 + \gamma_z^2 z^2), \quad \gamma_y = \frac{\omega_y}{\omega_x}, \quad \gamma_z = \frac{\omega_z}{\omega_x} \text{ and } \beta = \frac{4\pi a N}{a_0}.$$

ค่าบวกหรือค่าลบของ β ขึ้นอยู่กับว่าเป็นกรณีของ defocusing NLSE หรือ focusing NSLE ตามลำดับ และมีกฎการอนุรักษ์สำหรับสมการ GPE อยู่ด้วยกัน 2 ข้อ นั่นคือ สมการคลื่นสามารถถูกนอร์มอลไลซ์ได้ตามสมการนี้

$$\begin{aligned} N(\psi(\cdot, t)) &= \|\psi(\cdot, t)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 dx \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, 0)|^2 dx = N(\psi(\cdot, 0)), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (2.6)$$

และสมการพลังงาน จะเป็นไปตามสมการนี้

$$\begin{aligned} E(\psi(\cdot, t)) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{2} |\nabla \psi(\mathbf{x}, t)|^2 + V(\mathbf{x}) |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{x}, t)|^4 \right] dx \\ &\equiv E(\psi(\cdot, 0)), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

..... (2.7)

2.2 สถานะพื้น

เพื่อที่จะหาผลเฉลยในสถานะคงตัวของสมการ (1.5) เราจะเขียนสมการคลื่นมหภาคใหม่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mu t} \phi(\mathbf{x}), \quad \text{..... (2.8)}$$

โดยที่ μ คือค่าศักย์ไฟฟ้าเคมีของสถานะควมแน่น และ ϕ คือค่าจริงของฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับเวลา เมื่อเราแทนที่สมการ (2.8) เข้าไปในสมการ (2.5) และสมการ (2.2) จะทำให้เกิดสมการ $\phi(\mathbf{x})$ ดังต่อไปนี้ขึ้นมา

$$\mu\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\Delta\phi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + \beta|\phi(\mathbf{x})|^2\phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{..... (2.9)}$$

ภายใต้เงื่อนไขของการนอร์มอลไลเซชัน ดังต่อไปนี้

$$N(\phi) \triangleq \|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 1. \quad \text{..... (2.10)}$$

นี่คือปัญหาของ nonlinear eigenvalue ภายใต้เงื่อนไขที่ถูกกำหนดไว้ และค่า eigenvalue μ สามารถถูกคำนวณได้จากค่า eigenfunction ϕ ที่สอดคล้องกัน โดยที่

$$\begin{aligned} \mu = \mu(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{2} |\nabla\phi(\mathbf{x})|^2 + V(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{x})|^2 + \beta|\phi(\mathbf{x})|^4 \right] d\mathbf{x} \\ &= E(\phi) + E_{\text{int}}(\phi), \end{aligned} \quad \text{..... (2.11)}$$

ค่า $E_{\text{int}}(\phi)$ หมายถึงพลังงานที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่าง 2 อนุภาค (two-body interaction energy) ดังนี้

$$E_{\text{int}}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\beta}{2} |\phi(\mathbf{x})|^4 d\mathbf{x}. \quad \text{..... (2.12)}$$

ในความเป็นจริง ค่า eigenfunction ในสมการ (2.9) ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดไว้ในสมการ (2.10) มีความสมมูลกับฟังก์ชันพลังงาน $E(\phi)$ ที่จุดวิกฤต (critical point) บนทรงกลมสมมาตร ตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$S = \{ \phi \mid \|\phi\|^2 = 1, \quad E(\phi) < \infty \}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยของสมการ (2.9) จึงสมมูลกับผลเฉลยที่สถานะคงตัวตามการวิเคราะห์ด้วยวิธีต่อเนื่องของ continuous normalized gradient flow (CNGF) ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta \phi - V(\mathbf{x})\phi - \beta |\phi|^2 \phi + \frac{\mu(\phi)}{\|\phi(\cdot, t)\|^2} \phi, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \dots\dots\dots(2.13)$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{with} \quad \|\phi_0\| = 1. \dots\dots\dots(2.14)$$

ค่า eigenfunction $\phi_g(\mathbf{x})$ ที่สถานะพื้นของ BEC เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าจริงบวกตามสมการ (2.10) ที่ได้จากการทำ minimizing พลังงาน $E(\phi)$ บนทรงกลมสมมาตร S ซึ่งพบว่า $(\mu_g, \phi_g \in S)$

$$E(\phi_g) = \min_{\phi \in S} E(\phi), \quad \mu_g = \mu(\phi_g) = E(\phi_g) + E_{\text{int}}(\phi_g), \dots\dots\dots(2.15)$$

ซึ่งโดยปกติแล้ว ในงานวิจัยที่ผ่านๆมาอื่นๆ จะเรียกค่า eigenfunction $\phi(x)$ ของสมการ (2.9) ภายใต้งื่อนไขที่กำหนดไว้ในสมการ (2.10) โดยที่มีพลังงาน $E(\phi) > E(\phi_g)$ ว่าเป็นค่าในสถานะถูกกระตุ้น

2.3 การคำนวณสถานะพื้นด้วยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข

มีวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่สถานะพื้นของ BEC อยู่เป็นจำนวนมากในงานวิจัยที่ผ่านมา แต่ในโครงการวิจัยนี้จะอธิบายสถานะพื้นด้วยวิธี backward Euler finite difference (BEFD) ของการทดลองภายใต้ศักย์กักกันแบบ cylindrical symmetric trap [2] โดยกำหนดให้ค่า $\gamma_y=1$ ในสมการ (2.5) และกำหนด time step โดยให้ $k = \Delta t > 0$ และนิยาม time step โดย $t_n \triangleq nk, n = 0, 1, 2, \dots$

ในกรณีที่เป็น cylindrical symmetric trap ผลเฉลยของ $\phi(x, t) = \phi(r, z, t)$ และเราสามารถลดรูปปัญหา 3D ให้กลายเป็นปัญหา 2D ด้วยค่า $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty]$ และ $-\infty < z < +\infty$ [2] ดังนั้น

$$\frac{\partial \phi(r, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} (\gamma_r^2 r^2 + \gamma_z^2 z^2) \phi - \beta |\phi|^2 \phi, \dots\dots\dots(2.16)$$

$$0 < r < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty, \quad t_n < t < t_{n+1},$$

$$\frac{\partial \phi(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \phi(r, z, t) = 0, \quad t \geq 0, \dots\dots\dots(2.17)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\phi(r, z, t_{n+1}) \triangleq \frac{\phi(r, z, t_{n+1}^-)}{\|\phi(\cdot, t_{n+1}^-)\|}, \quad n \geq 0, \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

$$\phi(r, z, 0) = \phi_0(r, z) \geq 0. \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

ที่เงื่อนไขของการทำนอร์มอลไลเซชัน ทำให้ได้ว่า

$$\|\phi\|^2 = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(r, z, t) r dr dz. \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

เราจะเลือกให้ $R > 0$, $a < b$ และ time step $k > 0$ โดยที่ $|a|$, b , R มีค่าใหญ่มากพอ และเราจะกำหนดให้ mesh size $h_r = (R-0)/M$ และ $h_z = (b-a)/N$ โดยที่ M และ N เป็นค่าจำนวนเต็มบวก. กำหนดให้ grid point เป็น $r_j = jh_r$, $j = 0, 1, 2, \dots, M$ และให้ $z_l = a + lh_z$, $l = 0, 1, \dots, N$ และกำหนดให้ $\phi_{j-\frac{1}{2}, l}^n$ เป็นค่าประมาณของ $\phi(r_{j-\frac{1}{2}}, z_l, t_n)$ เราจะกำหนดให้ BEFD discretization สำหรับปัญหา 3D ที่มีสมมาตรแบบ cylindrical symmetry [2] เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{j-\frac{1}{2}, l}^* - \phi_{j-\frac{1}{2}, l}^n}{k} &= \frac{1}{2h_r^2 r_{j-\frac{1}{2}}} \left[r_j \phi_{j+\frac{1}{2}, l}^* - (r_j + r_{j-1}) \phi_{j-\frac{1}{2}, l}^* + r_{j-1} \phi_{j-\frac{3}{2}, l}^* \right] \\ &+ \frac{1}{2h_z^2} \left[\phi_{j-\frac{1}{2}, l+1}^* - 2\phi_{j-\frac{1}{2}, l}^* + \phi_{j-\frac{1}{2}, l-1}^* \right] - \frac{1}{2} (\gamma_r^2 r_{j-\frac{1}{2}}^2 + \gamma_z^2 z_l^2) \phi_{j-\frac{1}{2}, l}^* \\ &- \beta (\phi_{j-\frac{1}{2}, l}^n)^2 \phi_{j-\frac{1}{2}, l}^*, \quad j = 1, \dots, M-1, \quad l = 1, \dots, N-1, \\ \phi_{-\frac{1}{2}, l}^* &= \phi_{\frac{1}{2}, l}^*, \quad \phi_{M-\frac{1}{2}, l}^* = 0, \quad l = 1, \dots, N-1, \\ \phi_{j-\frac{1}{2}, 0}^* &= \phi_{j-\frac{1}{2}, N}^* = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

$$\begin{aligned} \phi_{j-\frac{1}{2}, l}^{n+1} &= \frac{\phi_{j-\frac{1}{2}, l}^*}{\|\phi^*\|}, \quad j = 0, \dots, M, \quad l = 0, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \phi_{j-\frac{1}{2}, l}^0 &= \phi_0(r_{j-\frac{1}{2}}, z_l) \quad j = 0, \dots, M, \quad l = 0, \dots, N, \\ \phi_{-\frac{1}{2}, l}^0 &= \phi_{\frac{1}{2}, l}^0, \quad l = 0, 1, \dots, N, \end{aligned}$$

และการทำนอร์มอลไลเซชันจะถูกนิยามดังสมการนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
\|\phi^*\|^2 &= 2\pi h_r h_z \sum_{j=1}^M r_{j-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{l=1}^{N-1} (\phi_{j-\frac{1}{2},l}^*)^2 + \frac{1}{2}(\phi_{j-\frac{1}{2},0}^*)^2 + \frac{1}{2}(\phi_{j-\frac{1}{2},N}^*)^2 \right\} \\
&= 2\pi h_r h_z \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{N-1} (\phi_{j-\frac{1}{2},l}^*)^2 r_{j-\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

..... (2.22)

เราจะใช้อัลกอริทึมนี้คำนวณสถานะพื้นของสมการ GPE ใน 3 มิติ จากนั้นจะทำการลดรูปสมการนี้ให้เหลือเป็นสมการ 2D GPE และ สมการ 1D GPE.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การลดรูปสมการ 3D GPE

ในบทนี้เราจะแสดงให้เห็นถึงวิธีการลดรูปสมการ 3D GPE ลงจนกลายเป็นสมการ 2D GPE และสมการ 1D GPE ภายใต้ค่าจำกัดของความถี่กักกันค่าหนึ่ง จากนั้นเราจะใช้สมการของ Thomas-Fermi และการประมาณแบบ first order approximation สำหรับประมาณค่าพลังงานและศักย์เคมีที่สภาวะพื้นของสมการ GPE ทั้งใน 1 มิติ, 2 มิติ และ 3 มิติ ของกรณีที่เป็น defocusing NLSE

3.1 สมการ 2D GPE สำหรับการควบแน่นแบบ disk-shaped condensate

ในกรณีที่เป็น disk-shaped condensate ความถี่กักกันจะถูกกำหนดไว้ดังนี้

$$\omega_x \approx \omega_y, \omega_z \gg \omega_x \iff \gamma_y \approx 1, \gamma_z \gg 1, \dots\dots\dots (3.1)$$

สมการ 3D GPE ที่ (2.5) สามารถถูกลดรูปลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE โดยกรกำหนดให้ค่าประมาณของพลังงาน $\hbar\omega_z$ มีขนาดใหญ่มาก เมื่อเทียบกับค่าประมาณของพลังงานในแนวแกน x และแกน y ซึ่งเท่ากับ $\hbar\omega_x$ จนไม่สามารถกระตุ้นอะตอมตามแนวแกน z ได้ ซึ่งเป็นการประมาณแบบเดียวกับที่ทำกันในงานวิจัยอื่นที่ผ่านมา [1,2,5,7] เมื่อเรากำหนดค่าให้กับ β โดยที่ $\beta \geq 0$ และ $\gamma_z \gg 1$ เราจะสมมุติว่าสมการคลื่นของการควบแน่นตามแนวแกน z สามารถถูกอธิบายได้ด้วยสมการคลื่นที่สภาวะพื้นซึ่งประมาณจาก harmonic oscillator ตามแนวแกน z และกำหนดให้

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_{12}(x, y, t)\phi_3(z), \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\phi_3(z) = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\phi_g(x, y, z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \approx \phi_3^{ho}(z) = \left(\frac{\gamma_z}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\gamma_z z^2/2}, \dots\dots(3.3)$$

โดยที่ $\phi_g(x, y, z)$ เป็นสมการคลื่นที่สภาวะพื้นซึ่งอยู่ในรูปของสมการ 3D GPE . เมื่อเราแทนที่สมการ (3.2) ลงในสมการ (2.5) จะทำให้ได้ว่า

$$i \frac{\partial \psi_{12}}{\partial t} \phi_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{12}}{\partial y^2} \right) \phi_3 - \frac{1}{2} \psi_{12} \frac{d^2 \phi_3}{dz^2} + V(\mathbf{x})\psi_{12}\phi_3 + \beta |\psi_{12}|^2 \psi_{12} |\phi_3|^2 \phi_3,$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อคูณสมการทั้งสองข้างด้วยคาสคอนจูเกตของ ψ_3 และทำการอินทิเกรตด้วยขอบเขตในแกน z ตั้งแต่ค่า $-\infty$ ถึง $+\infty$ เราจะได้ว่า

$$i \frac{\partial \psi_{12}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi_{12} + \frac{1}{2} (x^2 + \gamma_y^2 y^2 + C) \psi_{12} + \left(\beta \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_3|^4 dz \right) |\psi_{12}|^2 \psi_{12}, \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

$$C = \gamma_z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 |\phi_3(z)|^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\phi_3}{dz} \right|^2 dz$$

เนื่องจากสมการ (3.4) เป็น time-transverse invariant เราจึงสามารถแทนที่ $\psi_{12} \rightarrow \varphi e^{-i\frac{ct}{z}}$ หากเราละทิ้งค่าคงที่ C ซึ่งอยู่ในเทอมของศักย์ไฟฟ้าก็กัน เราจะได้สมการ GPE ใน 2 มิติ ดังนี้

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi + \frac{1}{2} (x^2 + \gamma_y^2 y^2) \psi + \beta_2 |\psi|^2 \psi, \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\beta_2 = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_3^4(z) dz \approx \beta \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_3^{\text{ho}}|^4 dz = \beta_2^{\text{ho}} = \beta \sqrt{\frac{\gamma_z}{2\pi}}. \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

เพื่อจะยืนยันผลเฉลยเชิงตัวเลขในสมการ (3.3) และสมการ (3.6) เราจะคำนวณสภาวะพื้นของ 3D GPE โดยใช้วิธีแบบต่อเนื่องของ BEFD discretization ดังที่กล่าวมาแล้วในสมการ (2.21) และสมการ (2.22) จากนั้นเราจะได้ฟังก์ชัน $\psi_g(r, z)$ ออกมา ซึ่งจะถูกนำไปใช้คำนวณฟังก์ชัน $\psi_3(z)$ อีกทีด้วยสมการ (3.3) และคำนวณค่า β_2 ด้วยสมการ (3.6)

การคำนวณนี้จะอยู่บนโดเมนของ $(r, z) \in [0, R] \times [-a, a]$ โดยใช้อัลกอริทึมในสมการ (2.21) และสมการ (2.22) และใช้ค่า R และ a สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ_z ตามที่กำหนดในตารางที่ 3.1 ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.1: ค่า R และ a ; (R,a) สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ_z จากการคำนวณโดยใช้อัลกอริทึมในสมการ

(2.21) และสมการ (2.22)

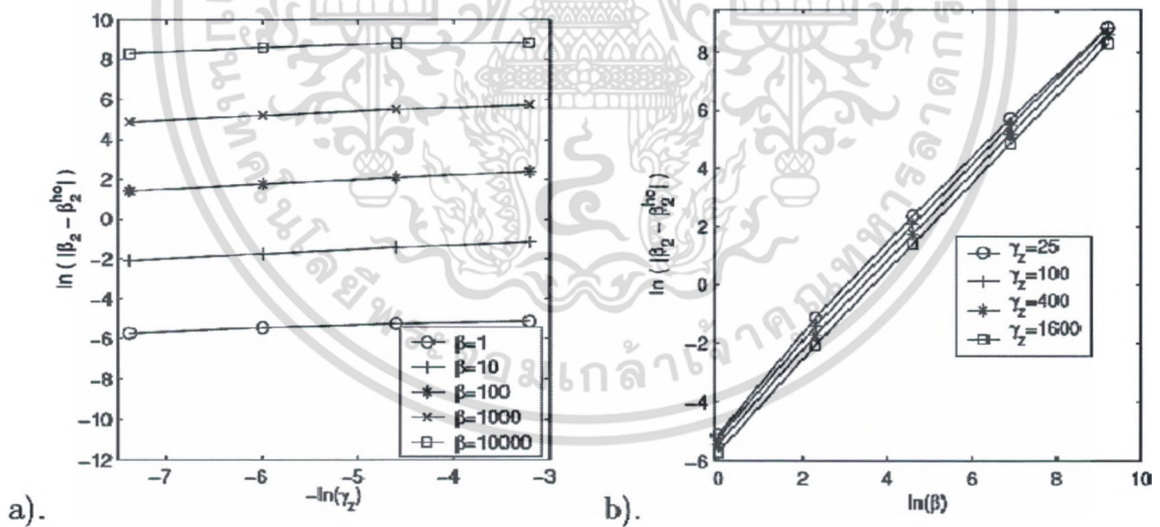
γ_z	25	100	400	1600
$\beta = 1$	(7,1.6)	(7,0.8)	(8,0.4)	(8,0.2)
$\beta = 10$	(8,1.6)	(8,0.8)	(8,0.4)	(8,0.2)
$\beta = 100$	(7.8,1.4)	(8.8,0.7)	(9.8,0.35)	(10.6,0.17)
$\beta = 1000$	(10.8,1.4)	(12,0.7)	(13.5,0.35)	(15,0.17)
$\beta = 10000$	(15,1.6)	(18,0.8)	(21,0.4)	(25,0.2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 แสดงการวิเคราะห์ค่า $error$ ของ $|\beta_2^{ho} - \beta_2|$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ_z เมื่อลดรูป

สมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	0.59499×10^{-2}	0.52553×10^{-2}	0.43266×10^{-2}	0.32628×10^{-2}
$\beta_3 = 10$ rate	0.31876	0.24116	0.17620	0.12545
$\beta_3 = 100$ rate	0.10897×10^2	0.80575×10^1	0.57919×10^1	0.4113×10^1
$\beta_3 = 1000$ rate	0.30959×10^3	0.24654×10^3	0.18164×10^3	0.13020×10^3
$\beta_3 = 10000$ rate	0.68895×10^4	0.67926×10^4	0.54789×10^4	0.40470×10^4



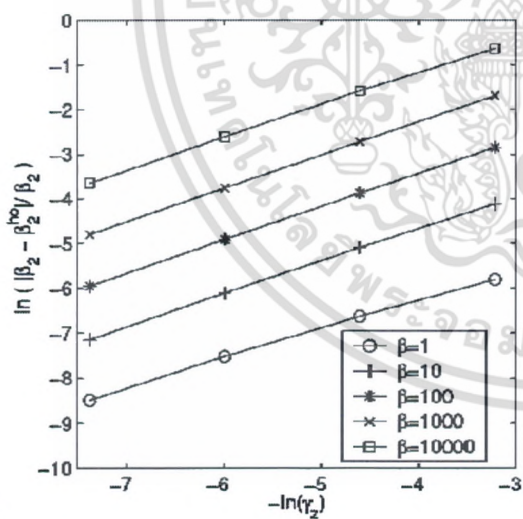
รูปที่ 3.1 แสดง convergence rate ของ $|\beta_2^{ho} - \beta_2|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

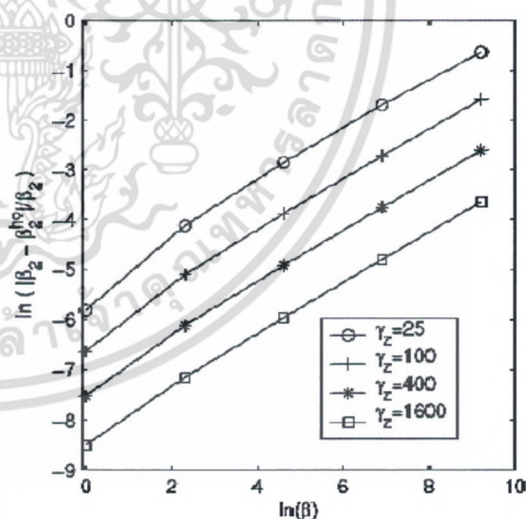
ตาราง 3.3 แสดงการวิเคราะห์ค่า *error* ของ $\left| \frac{\beta_2^{ho} - \beta_2}{\beta_2} \right|$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ_z เมื่อลดรูป

สมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	0.29918×10^{-2}	0.13190×10^{-2} 0.59	0.54255×10^{-3} 0.64	0.20451×10^{-3} 0.70
$\beta_3 = 10$ rate	0.16240×10^{-1}	0.60817×10^{-2} 0.71	0.22133×10^{-2} 0.73	0.78676×10^{-2} 0.75
$\beta_3 = 100$ rate	0.57785×10^{-1}	0.20613×10^{-1} 0.74	0.73122×10^{-2} 0.75	0.25843×10^{-2} 0.75
$\beta_3 = 1000$ rate	0.18372	0.65869×10^{-1} 0.74	0.23295×10^{-1} 0.75	0.82260×10^{-2} 0.75
$\beta_3 = 10000$ rate	0.52762	0.20520 0.68	0.73731×10^{-1} 0.74	0.26021×10^{-1} 0.75



a).



b).

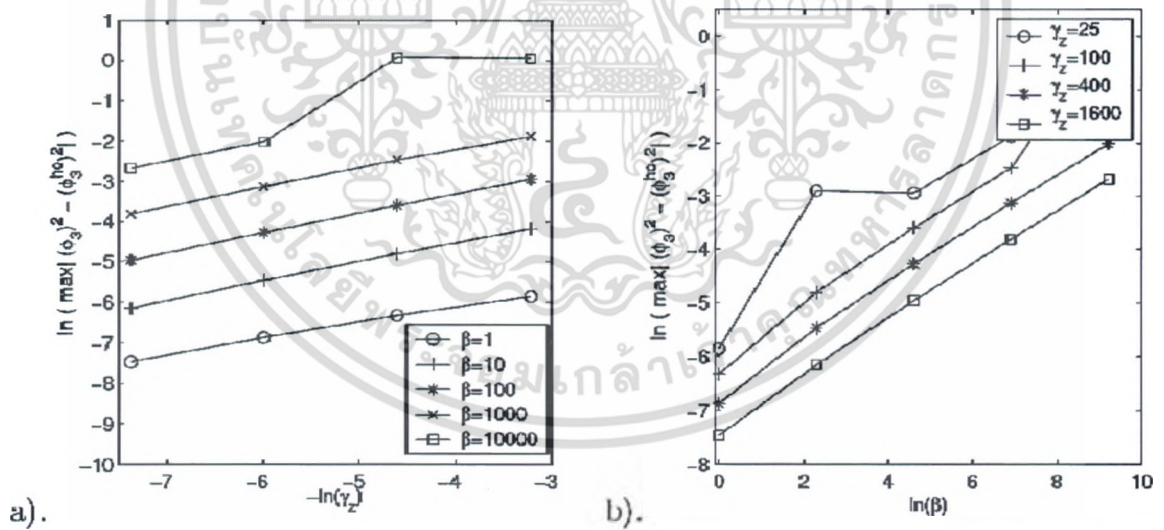
รูปที่ 3.2 แสดง *convergence rate* ของ $\left| \frac{\beta_2^{ho} - \beta_2}{\beta_2} \right|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.4 แสดงการวิเคราะห์ค่า error ของ $\max |(\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2|$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ

γ_z เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	2.8612×10^{-3}	1.7872×10^{-3}	1.0409×10^{-3}	5.7183×10^{-4}
$\beta_3 = 10$ rate	1.5352×10^{-2}	8.2049×10^{-3}	4.2377×10^{-3}	2.1350×10^{-3}
$\beta_3 = 100$ rate	5.2868×10^{-2}	2.7489×10^{-2}	1.3941×10^{-2}	6.9970×10^{-3}
$\beta_3 = 1000$ rate	0.15315	8.4788×10^{-2}	4.3850×10^{-2}	2.2165×10^{-2}
$\beta_3 = 10000$ rate	1.0622	1.0758	0.13343	6.9129×10^{-2}
		-0.01	1.5	0.47

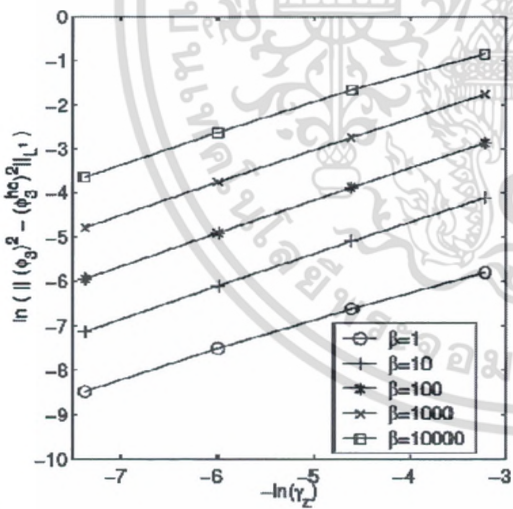


รูปที่ 3.3 แสดง convergence rate ของ $|(\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

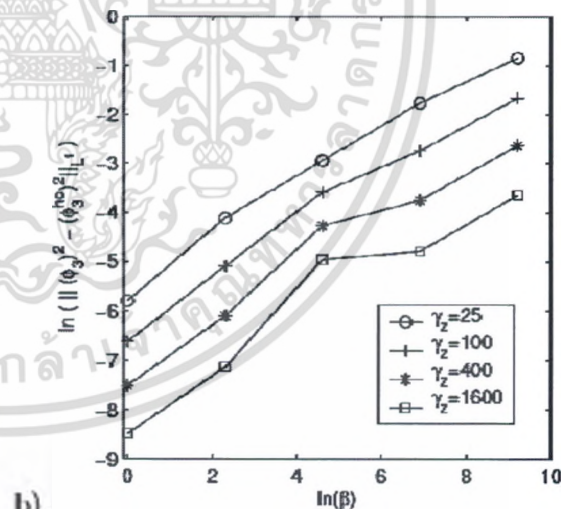
ตารางที่ 3.5 แสดงการวิเคราะห์ค่า error ของ $\|(\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2\|_{L^1}$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ

γ_z เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	3.0181×10^{-3}	1.3317×10^{-3} 0.59	5.4797×10^{-4} 0.64	2.0752×10^{-4} 0.70
$\beta_3 = 10$ rate	1.6287×10^{-2}	6.1274×10^{-3} 0.71	2.2337×10^{-3} 0.73	7.9524×10^{-4} 0.75
$\beta_3 = 100$ rate	5.6975×10^{-2}	2.0643×10^{-2} 0.73	7.3640×10^{-3} 0.74	2.6087×10^{-3} 0.75
$\beta_3 = 1000$ rate	0.17205	6.4757×10^{-2} 0.70	2.3305×10^{-2} 0.74	8.2826×10^{-3} 0.75
$\beta_3 = 10000$ rate	0.43027	0.19054 0.59	7.2256×10^{-2} 0.70	2.6000×10^{-2} 0.74



a).



b).

รูปที่ 3.4 แสดง convergence rate ของ $\|(\phi_3)^2 - (\phi_3^{ho})^2\|_{L^1}$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z

และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 3.2 ถึงตารางที่ 3.5 รวมไปถึงรูปที่ 3.1 ถึงรูปที่ 3.4 เมื่อกำหนดให้ $\beta \geq 0, \gamma_z \gg 1$ และ $\beta \gamma_z^{-3/2} = o(1)$ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\beta_2 = \beta \sqrt{\frac{\gamma_z}{2\pi}} \left(1 + O\left(\frac{\beta^{1/2} \ln \gamma_z}{\gamma_z^{3/4}}\right) \right), \quad \frac{|\beta_2 - \beta_2^{\text{ho}}|}{\beta_2} = O\left(\frac{\beta^{1/2} \ln \gamma_z}{\gamma_z^{3/4}}\right),$$

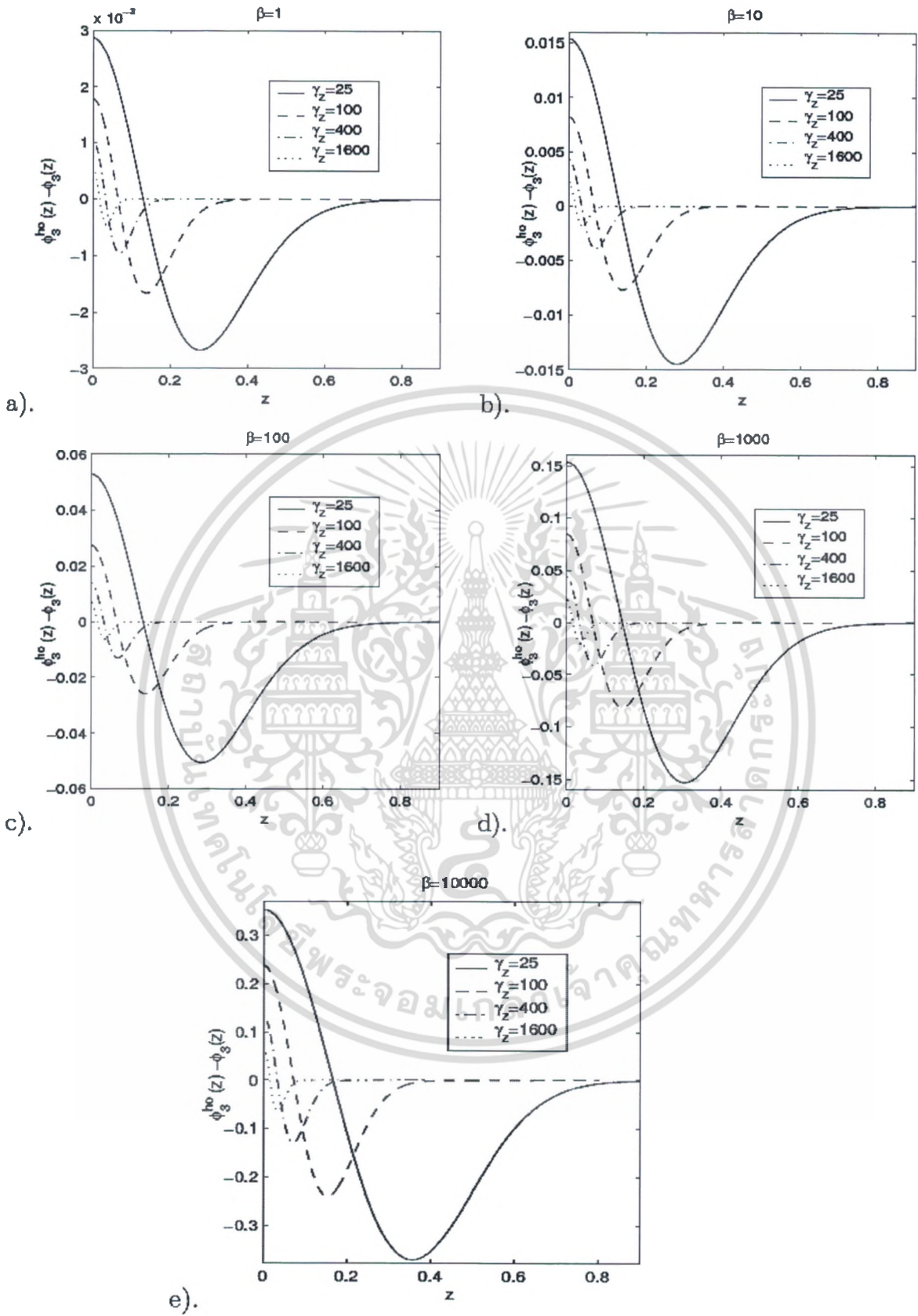
$$\|\phi_3(z) - \phi_3^{\text{ho}}(z)\|_{L^2} = O\left(\frac{\beta^{1/2} \ln \gamma_z}{\gamma_z^{3/4}}\right),$$

$$\|(\phi_3(z))^2 - (\phi_3^{\text{ho}}(z))^2\|_{L^\infty} = O\left(\frac{\beta^{1/2} \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right),$$

$$\|(\phi_3(z))^2 - (\phi_3^{\text{ho}}(z))^2\|_{L^1} = O\left(\frac{\beta^{1/2} \ln \gamma_z}{\gamma_z^{3/4}}\right).$$

นอกจากนี้รูปที่ 3.5 ทำให้เราเห็นได้ว่า ค่าที่กำหนดไว้ของ β ส่งผลให้ $\phi_3(z)$ มีการลู่เข้าหาค่า $\phi_3^{\text{ho}}(z)$ เมื่อ $\gamma_z \rightarrow +\infty$ ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.5 แสดงค่าความ error ของ $\phi_3^{ho}(z) - \phi_3(z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันตามแนวแกน z สำหรับค่าต่างๆของ β

และ γ_z เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 สมการ 2D GPE สำหรับการควบแน่นแบบ cigar-shaped condensate

สำหรับสถานะควบแน่นแบบ cigar-shaped condensate จะกำหนดให้มีความถี่กักกัน (trapping frequency) ดังนี้

$$\omega_y \gg \omega_x, \omega_z \gg \omega_x \iff \gamma_y \gg 1, \gamma_z \gg 1, \dots\dots\dots(3.7)$$

สมการ 3D GPE ที่ (2.5) สามารถถูกลดรูปลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE ได้ เมื่อเรากำหนดค่าใดๆค่าหนึ่งให้กับ β โดย $\beta \geq 0$ และเมื่อ $\gamma_y \rightarrow \infty$ และ $\gamma_z \rightarrow \infty$ เราจะกำหนดให้

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_1(x, t)\phi_{23}(y, z), \dots\dots\dots(3.8)$$

และ

$$\begin{aligned} \phi_{23}(y, z) &= \left(\int_{\mathbf{R}} |\phi_g(x, y, z)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\approx \phi_{23}^{ho}(y, z) = \left(\frac{\gamma_y \gamma_z}{\pi^2} \right)^{1/4} e^{-(\gamma_y y^2 + \gamma_z z^2)/2}, \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

โดยที่ $\phi_g(x, y, z)$ คือสถานะพื้นของสมการ 3D GPE ที่ (2.5)

หากเราแทนที่สมการ (3.8) ลงไปในสมการ (2.5) เราจะได้ว่า

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \phi_{23} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \phi_{23} - \frac{1}{2} \psi_1 \Delta \phi_{23} + V(x) \psi_1 \phi_{23} + \beta |\psi_1|^2 \psi_1 |\phi_{23}|^2 \phi_{23} .$$

เมื่อเราคูณทั้งสองข้างด้วยคอนจูเกตของ $\phi_{23}(y, z)$ ถัดจากนั้นทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างในระนาบ yz ตลอด R^2 เราจะได้ว่า

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (x^2 + C) \psi_1 + \left(\beta \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_{23}|^4 dy dz \right) |\psi_1|^2 \psi_1 , \dots\dots\dots(3.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla\phi_{23}|^2 dydz + \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma_y^2 y^2 + \gamma_z^2 z^2) |\phi_{23}|^2 dydz .$$

สมการ(3.10) จัดเป็นสมการ *time-transverse invariant* ทำให้เราสามารถแทนที่ $\phi_1 \rightarrow \varphi e^{-i\frac{ct}{2}}$ และสามารถละทิ้งค่าคงที่ C ซึ่งอยู่ในส่วนของศักย์ไฟฟ้ากักกัน (*trap potential*) ได้ ซึ่งส่งผลให้เราได้สมการ *ID GPE* ดังนี้

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + \frac{x^2}{2}\psi + \beta_1|\psi|^2\psi , \tag{3.11}$$

โดยที่

$$\beta_1 = \beta \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{23}^4(y, z) dydz \approx \beta \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_{23}^{ho}|^4 dydz = \beta_1^{ho} = \beta \frac{\sqrt{\gamma_y \gamma_z}}{2\pi} \tag{3.12}$$

เพื่อจะแสดงการยืนยันสมการที่ (3.9) และสมการที่ (3.12) จากการกำหนดให้ $\gamma_r \triangleq \gamma_y = \gamma_z$ เราจะแสดงการคำนวณสถานะพื้นของสมการ *ID GPE* โดยการวิเคราะห์ด้วยวิธี *BEFD* กับสมการที่ (1.5) จะทำให้เราได้ $\phi_g(r, z)$ ซึ่งสามารถนำไปใช้คำนวณค่า $\phi_{23}(z)$ ด้วยสมการ (3.9) และคำนวณค่า β , ด้วยสมการที่ (3.12) ต่อได้

โดยโดเมนของการคำนวณจะกำหนดให้เป็นโดเมน $(r, x) \in [0, R] \times [-a, a]$ ในอัลกอริทึมที่ (2.21) ถึง (2.22) และกำหนดให้ใช้ค่า R และ a ต่างๆสำหรับแต่ละค่าของ β และ γ_r ตามที่กำหนดในตารางที่ 3.6

ตารางที่ 3.6 ค่า R และ a ; (R,a) สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ , จากการคำนวณโดยใช้อัลกอริทึมในสมการ

(2.21) และสมการ (2.22)

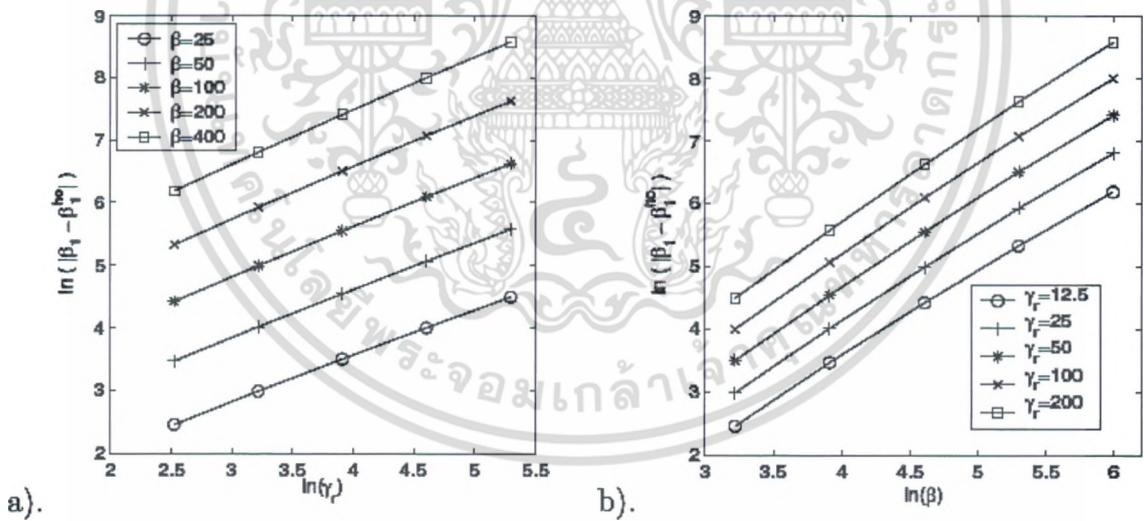
γ_r	12.5	25	50	100	200
$\beta = 25$	(2.0,8.5)	(1.4,9.5)	(1.0,10.5)	(0.7,12.0)	(0.5,14.0)
$\beta = 50$	(2.0,9.0)	(1.4,10.5)	(1.0,12.5)	(0.7,14.0)	(0.5,16.5)
$\beta = 100$	(2.0,10.0)	(1.4,11.5)	(1.0,13.5)	(0.7,16.0)	(0.5,19.0)
$\beta = 200$	(2.0,11.0)	(1.4,13.0)	(1.0,15.5)	(0.7,18.5)	(0.5,23.0)
$\beta = 400$	(2.0,12.0)	(1.5,14.5)	(1.0,17.5)	(0.7,21.5)	(0.48,27.0)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.7 แสดงการวิเคราะห์ค่า error ของ $|\beta_1 - \beta_1^{ho}|$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ γ_r เมื่อลด

รูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE

γ_r	12.5	25	50	100	200
$\beta = 25$ rate	11.62	19.66	32.85	54.40	89.37
$\beta = 50$ Rate	31.86	54.97	93.66	157.8	263.3
$\beta = 100$ Rate	83.00	146.7	255.8	440.5	749.8
$\beta = 200$ Rate	205.4	371.9	665.0	1174	2047
$\beta = 400$ rate	484.8	897.7	1644	2976	5321



รูปที่ 3.6 แสดง convergence rate ของ $|\beta_1 - \beta_1^{ho}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่า

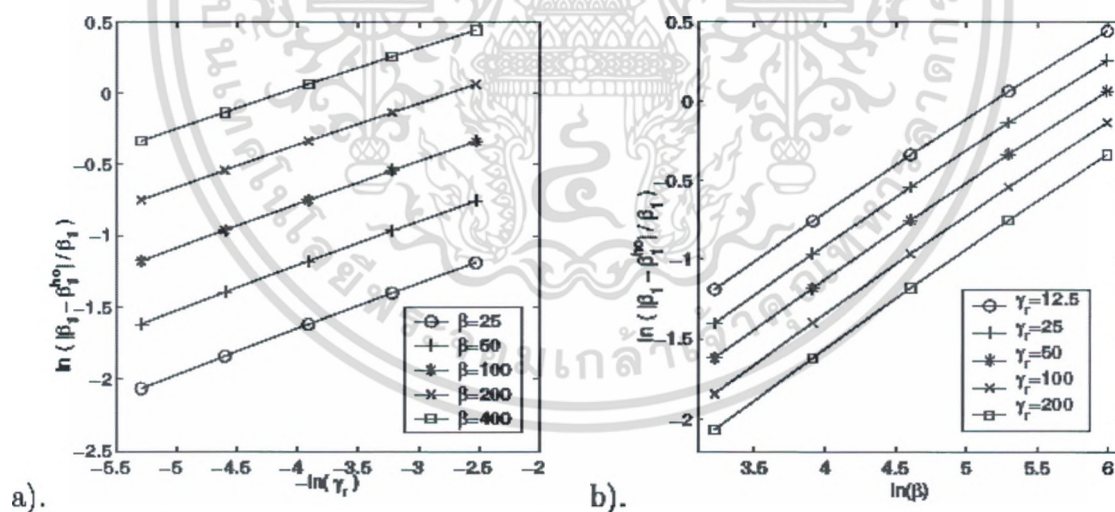
ต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตาราง 3.8 แสดงการวิเคราะห์ค่า *error* ของ $\left| \frac{\beta_1 - \beta_1^{ho}}{\beta_1} \right|$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ $1/\gamma_r$, เมื่อลดรูป

สมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE

$\frac{1}{\gamma_r}$	$\frac{1}{12.5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$
$\beta = 25$ rate	0.3048	0.2463	0.1978	0.1584	0.1265
$\beta = 50$ Rate	0.4712	0.3818	0.3078	0.2474	0.1982
$\beta = 100$ Rate	0.7158	0.5838	0.4736	0.3827	0.3082
$\beta = 200$ Rate	1.067	0.8773	0.7177	0.5844	0.4738
$\beta = 400$ rate	1.559	1.294	1.068	0.8778	0.7179



รูปที่ 3.7 แสดง *convergence rate* ของ $\left| \frac{\beta_1 - \beta_1^{ho}}{\beta_1} \right|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b) ค่า

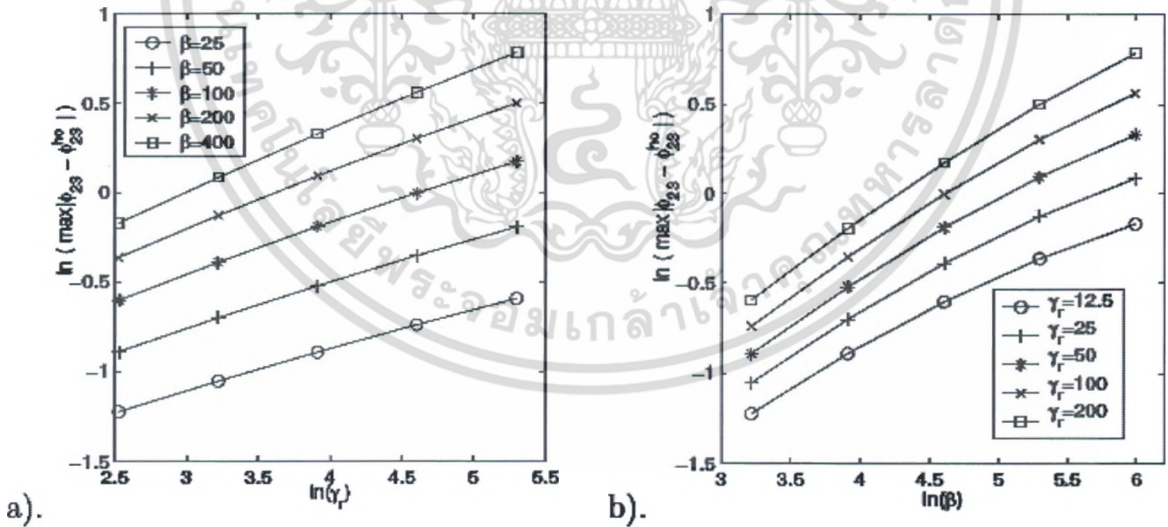
ต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.9 แสดงการวิเคราะห์ค่า error ของ $\max |\phi_{23} - \phi_{23}^{ho}|$ สำหรับค่าต่างๆของ β และ

γ_r , เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE

γ_r	12.5	25	50	100	200
$\beta = 25$ rate	0.2937	0.3490	0.4098	0.4772	0.5517
$\beta = 50$ Rate	0.4105	0.4963	0.5928	0.7010	0.8214
$\beta = 100$ Rate	0.5469	0.6759	0.8248	0.9949	1.187
$\beta = 200$ Rate	0.6938	0.8776	1.096	1.353	1.651
$\beta = 400$ rate	0.8406	1.087	1.389	1.756	2.194



รูปที่ 3.8 แสดง convergence rate ของ $|\phi_{23} - \phi_{23}^{ho}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_r และ b)

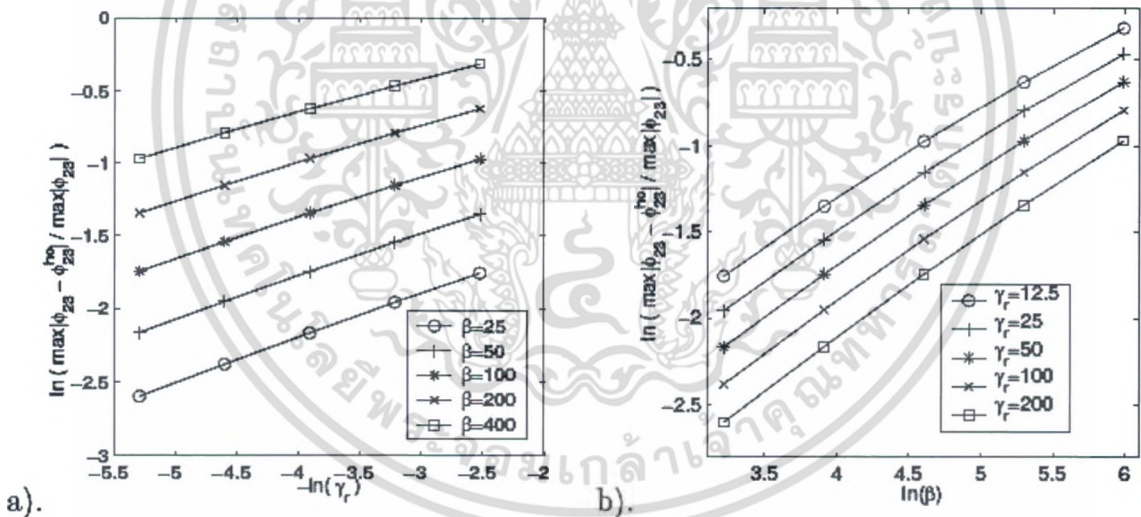
ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.10 แสดงการวิเคราะห์ค่า error ของ $\|(\phi_{23})^2 - (\phi_{23}^{ho})^2\|_{L1}$ สำหรับค่าต่างๆของ β

และ $1/\gamma_r$, เมื่อลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE

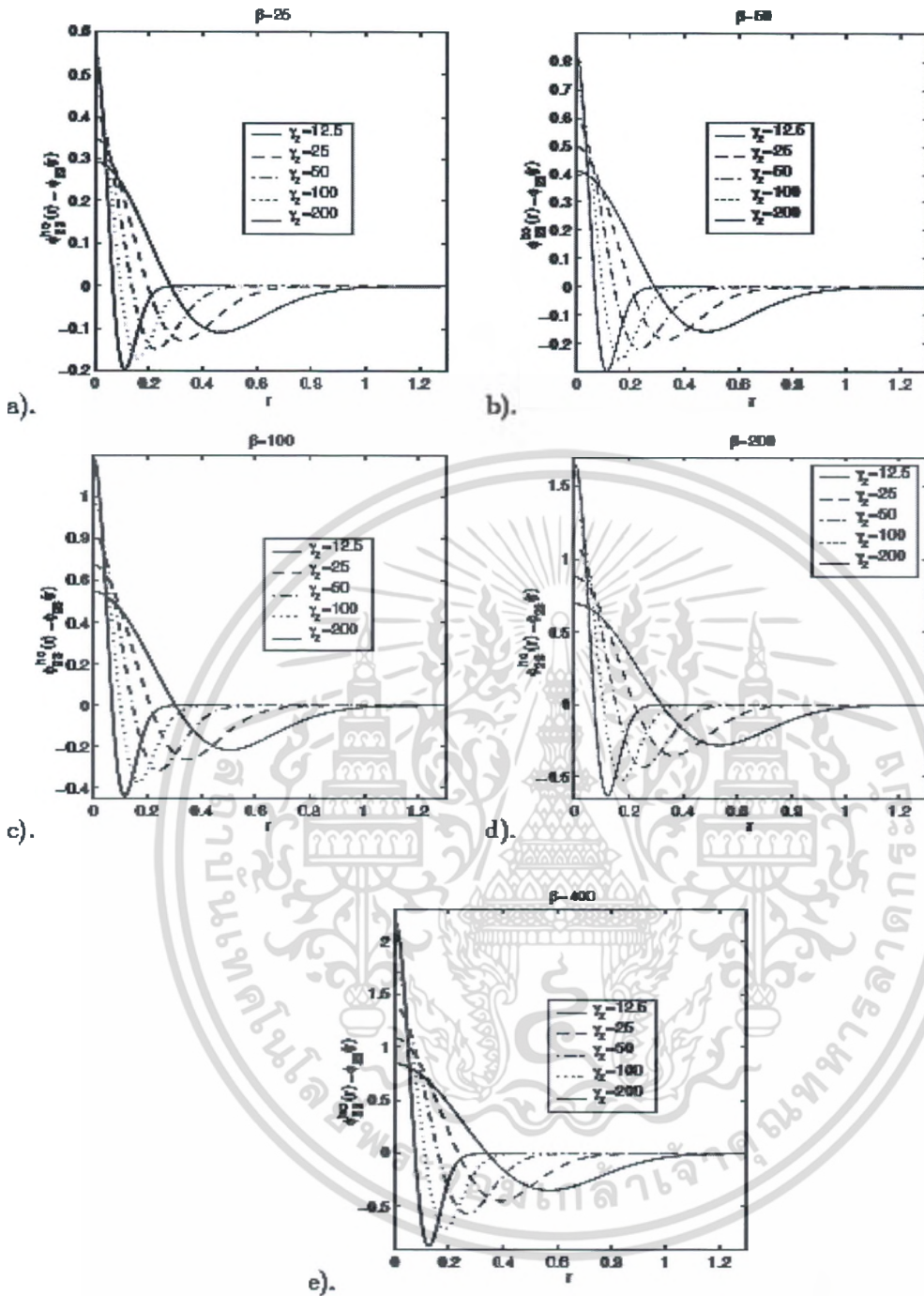
$\frac{1}{\gamma_r}$	$\frac{1}{12.5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$
$\beta = 25$ rate	0.1727	0.1412	0.1145	0.09240	0.07428
$\beta = 50$ Rate	0.2591	0.2135	0.1746	0.1419	0.1148
$\beta = 100$ Rate	0.3778	0.3151	0.2606	0.2141	0.1748
$\beta = 200$ Rate	0.5334	0.4517	0.3791	0.3156	0.2608
$\beta = 400$ rate	0.7285	0.6266	0.5345	0.4521	0.3792



รูปที่ 3.9 แสดง convergence rate ของ $\|(\phi_{23})^2 - (\phi_{23}^{ho})^2\|_{L1}$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆ

ของ γ_r และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.10 แสดงค่าความ error ของ $(\phi_{23}(y, z) - \phi_{23}^{ho}(y, z)) = (\phi_{23}(r) - \phi_{23}^{ho}(r))$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ r สำหรับค่าต่างๆของ β และ $\gamma_z = \gamma$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 3.6 ถึงตารางที่ 3.10 และรูปที่ 3.6 ถึงรูปที่ 3.10 เมื่อเรากำหนดให้ $\beta \geq 0, \gamma_r := \gamma_y = \gamma_z \gg 1$ และ $\beta\gamma_r^{-1} = o(1)$ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta \frac{\gamma_r}{2\pi} \left(1 + O\left(\frac{\beta^{1/3} \ln \gamma_r}{\gamma_r^{1/3}}\right) \right), & \frac{|\beta_1 - \beta_1^{ho}|}{\beta_1} &= O\left(\frac{\beta^{1/3} \ln \gamma_r}{\gamma_r^{1/3}}\right), \\ \|\phi_{23}(y, z) - \phi_{23}^{ho}(y, z)\|_{L^\infty} &= O(\beta^{1/3} \gamma_r^{1/3} \ln \gamma_r), \\ \frac{\|\phi_{23}(y, z) - \phi_{23}^{ho}(y, z)\|_{L^\infty}}{\|\phi_{23}(y, z)\|_{L^\infty}} &= O\left(\frac{\beta^{1/3} \ln \gamma_r}{\gamma_r^{1/3}}\right), \\ \|\phi_{23}^2(y, z) - (\phi_{23}^{ho})^2(y, z)\|_{L^1} &= O(\beta^{1/3} \gamma_r^{1/3} \ln \gamma_r), \\ \frac{\|\phi_{23}^2(y, z) - (\phi_{23}^{ho})^2(y, z)\|_{L^1}}{\|\phi_{23}^2(y, z)\|_{L^1}} &= O\left(\frac{\beta^{1/3} \ln \gamma_r}{\gamma_r^{1/3}}\right). \end{aligned}$$

นอกจากนี้เรายังสามารถเห็นได้จากรูปที่ (3.11) ว่าเมื่อเรากำหนดค่าที่แน่นอนให้กับ β แล้วฟังก์ชัน $\phi_{23}(y, z)$ จะไม่ลู่เข้าหาฟังก์ชัน $\phi_{23}^{ho}(y, z)$ เมื่อ $\gamma_r \rightarrow +\infty$

3.3 การประมาณสถานะพื้นของ GPE

ในความเป็นจริง สมการ 3D GPE (สมการที่ 2.5), 2D GPE (สมการที่ 3.5) และสมการ 1D GPE (สมการที่ 3.11) สามารถถูกเขียนในรูปแบบทั่วไปได้ว่า

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi(\mathbf{x}, t) + V_d(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) + \beta_d |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \psi(\mathbf{x}, t), \tag{3.13}$$

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, 3, \tag{3.14}$$

โดยที่ $\beta_d = \beta$ และ

$$V_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2, & d=1, \\ (x^2 + \gamma_y^2 y^2), & d=2, \\ (x^2 + \gamma_y^2 y^2 + \gamma_z^2 z^2), & d=3. \end{cases}$$

เมื่อทำการนอร์มอลไลเซชันกับสมการคลื่น จะเป็นดังนี้

$$N(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 dx \equiv N(\psi_0) = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(\mathbf{x})|^2 dx = 1, \quad t \geq 0, \tag{3.15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และจะได้พลังงานเป็นดังนี้

$$E(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + V_d(\mathbf{x}) |\psi|^2 + \frac{\beta_d}{2} |\psi|^4 \right] d\mathbf{x} \equiv E(\psi_0), \quad t \geq 0. \quad \dots\dots\dots(3.16)$$

เพื่อที่จะหาผลเฉลยที่สภาวะคงตัว เราจะเขียนสมการคลื่นใหม่ดังนี้

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mu t} \phi(\mathbf{x}), \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

โดยที่ μ คือศักย์เคมีของสถานะควมแน่น และ ϕ คือฟังก์ชันจริงที่ไม่ขึ้นกับเวลา เมื่อเราแทนที่สมการ (3.17) เข้าไปในสมการที่ (3.13) และสมการ (3.15) จะทำให้ได้สมการคลื่น $\phi(\mathbf{x})$ ดังนี้

$$\mu \phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \Delta \phi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) + \beta_d |\phi(\mathbf{x})|^2 \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad \dots\dots\dots(3.18)$$

และภายใต้เงื่อนไขการทำงานออร์มัลไลเซชัน

$$N(\phi) \triangleq \|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 1. \quad \dots\dots\dots(3.19)$$

สมการนี้จัดว่าเป็นปัญหาของ *nonlinear eigenvalue problem* ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดไว้และค่า *eigenvalue* μ สามารถถูกคำนวณได้จาก *eigenfunction* ϕ ของมัน ดังนี้

$$\begin{aligned} \mu = \mu(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 + V(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x})|^2 + \beta_d |\phi(\mathbf{x})|^4 \right] d\mathbf{x} \\ &= E(\phi) + E_{\text{int}}(\phi), \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.20)$$

โดยที่ $E_{\text{int}}(\phi)$ หมายถึงพลังงานของอันตรกิริยาระหว่าง 2 อนุภาค ดังนี้

$$E_{\text{int}}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\beta_d}{2} |\phi(\mathbf{x})|^4 d\mathbf{x}. \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

สำหรับอันตรกิริยาแบบอ่อน (*weakly interacting condensate*), $\beta_d = o(1)$ เราจะละทิ้งเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งก็คือเทอมสุดท้ายด้านขวามือของสมการ (3.18) และพิจารณาโดยใช้การประมาณแบบ *harmonic oscillator approximation* จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mu_g^{\text{ho}} \phi_g^{\text{ho}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \Delta \phi_g^{\text{ho}}(\mathbf{x}) + V_d(\mathbf{x}) \phi_g^{\text{ho}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

ดังนั้นผลเฉลยที่สภาวะพื้นของสมการที่ (3.22) จะเป็นดังนี้

$$\mu_g^{\text{ho}} = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, \\ 1 + \gamma_y, \\ 1 + \gamma_y + \gamma_z, \end{cases} \quad \phi_g^{\text{ho}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi)^{d/4}} \begin{cases} e^{-x^2/2}, & d=1, \\ \gamma_y^{1/4} e^{-(x^2 + \gamma_y y^2)/2}, & d=2, \\ (\gamma_y \gamma_z)^{1/4} e^{-(x^2 + \gamma_y y^2 + \gamma_z z^2)/2}, & d=3. \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

ผลเฉลยนี้สามารถถูกมองว่าเป็นผลเฉลยโดยประมาณที่สภาวะพื้นของสมการ (3.13) ในการมีอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อนได้ โดยค่าความ *error* จะเท่ากับ $o(\beta)$

สำหรับกรณีที่เป็นอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลักกันอย่างแรง (*strong repulsive interactions*), $\beta \gg 1$ เราจะละทิ้ง diffusion term ซึ่งก็คือเทอมแรกทางขวามือของสมการที่ (3.13) และใช้การประมาณแบบ Thomas-Fermi (TF) เราจะได้ว่า

$$\mu_g^{\text{TF}} \phi_g^{\text{TF}}(\mathbf{x}) = V_d(\mathbf{x}) \phi_g^{\text{TF}}(\mathbf{x}) + \beta_d |\phi_g^{\text{TF}}(\mathbf{x})|^2 \phi_g^{\text{TF}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

และเมื่อแก้สมการที่ (3.24) เราจะได้ผลเฉลยโดยประมาณแบบ TF ที่สภาวะพื้น ดังนี้

$$\phi_g^{\text{TF}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{(\mu_g^{\text{TF}} - V_d(\mathbf{x})) / \beta_d}, & V_d(\mathbf{x}) \leq \mu_g^{\text{TF}}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.25) เข้าไปในสมการที่ (3.19) ด้วย $\phi = \phi_g^{\text{TF}}$ ทำให้เราได้ว่า [7]

$$\mu_g^{\text{TF}} = \frac{1}{2} \begin{cases} \left(\frac{3\beta_1}{2}\right)^{2/3}, & d = 1, \\ \left(\frac{8\beta_2\gamma_y}{2\pi}\right)^{1/2}, & d = 2, \\ \left(\frac{15\beta_3\gamma_y\gamma_z}{4\pi}\right)^{2/5}, & d = 3. \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

เนื่องจาก $\phi_g^{\text{TF}}(\mathbf{x})$ ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ (*differentiable*) ได้ที่ $V_d(\mathbf{x}) = \mu_g^{\text{TF}}$ ตามที่กล่าวไว้ในเอกสาร [2]

และ $E\phi_g^{\text{TF}} = \infty$ ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้นิยามในสมการ (3.16) ในการอธิบายพลังงานจากการประมาณเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบ TF ในสมการที่ (3.25) ได้ ดังนั้นตามสมการ (3.20) และสมการ (3.21) พลังงานที่เราสามารถคำนวณได้เป็นดังนี้

$$E_g^{TF} \approx E_g = E(\phi_g) = \mu(\phi_g) - E_{\text{int}}(\phi_g) \approx \mu_g^{TF} - E_{\text{int}}(\phi_g^{TF}) = \frac{d+2}{d+4} \mu_g^{TF}. \quad \dots\dots\dots (3.27)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การประมาณที่สภาวะพื้นของกรณีที่มีอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาค

ในบทนี้จะเป็นการกล่าวถึงการคำนวณพลังงานและศักย์เคมีที่สภาวะพื้น ด้วยสมการ $3D$ GPE โดยให้ $d=3$ และศักย์ภายนอก $V(x) = \frac{1}{2}(x^2 + \gamma_y^2 y^2 + \gamma_z^2 z^2)$ โดยที่ $x = (x, y, z)$ สำหรับทุกค่าของ β , γ_y และ γ_z และเราจะใช้ข้อมูลบางส่วนจากบทที่แล้วมาประยุกต์หาผลเฉลยต่างๆในบทนี้

4.1 กรณีที่เป็นสถานะของการควบแน่นแบบ *isotropic shaped condensation*

ในกรณีที่เป็น *isotropic shaped condensation* เราจะกำหนดให้ $\gamma_y = O(1)$ และ $\gamma_z = O(1)$ โดยที่ $\omega_y \approx \omega_x$ และ $\omega_z \approx \omega_x$ ภายใต้เงื่อนไขของการเกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคต่างๆดังนี้

4.1.1 กรณีของการเกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อน

เมื่อเรากำหนดให้ $\beta = o(1)$ สำหรับอันตรกิริยาแบบอ่อน เราสามารถหาผลเฉลยโดยประมาณแบบ *harmonic oscillator* ที่สภาวะพื้น ได้ดังนี้

$$\phi_g(x) \approx \phi_g^{ho}(x, y, z) = \frac{(\gamma_y \gamma_z)^{1/4}}{\pi^{3/4}} e^{-(x^2 + \gamma_y y^2 + \gamma_z z^2)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

$$E_g \approx \frac{1}{2}(1 + \gamma_y + \gamma_z) + O(\beta), \quad |\beta| \ll 1, \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

$$\mu_g \approx \frac{1}{2}(1 + \gamma_y + \gamma_z) + O(\beta). \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

4.1.2 กรณีของการเกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคชนิดผลึกกันอย่างแรง

เมื่อเรากำหนดให้ $\beta \gg 1$ สำหรับอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลึกกันอย่างแรง เราสามารถหาผลเฉลยโดยประมาณแบบ *TF* ที่สภาวะพื้นได้ดังนี้

$$\mu_g^{TF} = \frac{1}{2} \left(\frac{15\beta\gamma_y\gamma_z}{4\pi} \right)^{2/5}, \quad \phi_g(x) \approx \begin{cases} \sqrt{(\mu_g^{TF} - V(x))/\beta}, & V(x) < \mu_g^{TF}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

$$E_g \approx \frac{5}{7}\mu_g^{TF} + \frac{H_3}{\beta^{2/5}}(\ln \beta + G_3) = \frac{5}{7}\mu_g^{TF} + O\left(\frac{\ln \beta}{\beta^{2/5}}\right), \quad \beta \gg 1, \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mu_g \approx \mu_g^{\text{TF}} + \frac{H_3}{\beta^{2/5}} (\ln \beta + G_3) = \mu_g^{\text{TF}} + O\left(\frac{\ln \beta}{\beta^{2/5}}\right). \quad \dots\dots\dots(4.6)$$

สำหรับกรณีของ $\gamma_y = \gamma_z = 1$ สมการที่ (4.5) และสมการที่ (4.6) สามารถยืนยันได้จากวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขในเอกสาร[1]

4.2 กรณีที่เป็นสถานะของการควบแน่นแบบ **disked-shaped condensation**

ในกรณีที่เป็นการควบแน่นแบบ *disk-shaped condensation* โดยที่ $\gamma_y = O(1)$ และ $\gamma_z \gg 1 (\Leftrightarrow \omega_y \approx \omega_x$ และ $\omega_z \approx \omega_x)$ และกำหนดให้

$$\mu_g \approx \mu + \frac{\gamma_z}{2}, \quad \phi_g(\mathbf{x}) \approx \phi_{12}(x, y) \phi_3^{\text{ho}}(z) \quad \text{with} \quad \phi_3^{\text{ho}}(z) = \frac{\gamma_z^{1/4}}{\pi^{1/4}} e^{-\gamma_z z^2/2}. \quad \dots\dots\dots(4.7)$$

หากแทนที่สมการ (4.7) ลงไปในสมการ (2.9) และคูณทั้งสองข้างด้วย $\phi_3^{\text{ho}}(z)$ จากนั้นอินทิเกรตตลอดขอบเขตของ z โดย $Z \in (-\infty, \infty)$ เราจะได้ว่า

$$\mu \phi(x, y) = -\frac{1}{2} \Delta \phi + V_2(x, y) \phi + \beta_2 |\phi|^2 \phi, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dots\dots\dots(4.8)$$

โดยที่ $V_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + \gamma_y^2 y^2)$ และ $\beta_2 = \beta \sqrt{\frac{\gamma_z}{2\pi}}$ และเมื่อเราใช้ผลเฉลยของสมการ 2D GPE ในบทที่แล้ว เราจะสามารถหาผลเฉลยโดยประมาณที่สถานะพื้นที่มีอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคกรณีต่างๆกันได้ดังนี้

4.2.1 กรณีที่มีอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อน

เมื่อเราให้ $\beta_2 = o(1)$ สำหรับกรณีที่มีอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อน ผลเฉลยโดยประมาณแบบ *harmonic oscillator* ที่สถานะพื้นเป็นดังนี้

$$\phi_g(\mathbf{x}) \approx \phi_{12}^{\text{ho}}(x, y) \phi_3^{\text{ho}}(z) = \phi_{\text{ho}}^{\text{ho}}(x, y, z), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \dots\dots\dots(4.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_g \approx \frac{\gamma_z}{2} + \frac{1 + \gamma_y}{2} + O(\beta_2^{ho}) = \frac{\gamma_z}{2} + \frac{1 + \gamma_y}{2} + O(\beta \gamma_z^{1/2}), \dots\dots\dots(4.10)$$

$$\mu_g \approx \frac{\gamma_z}{2} + \frac{1 + \gamma_y}{2} + O(\beta_2^{ho}) = \frac{\gamma_z}{2} + \frac{1 + \gamma_y}{2} + O(\beta \gamma_z^{1/2}), \quad \gamma_z \gg 1 \& \beta_2^{ho} \ll 1. \dots\dots\dots(4.11)$$

4.2.2 กรณีที่มีอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลึกกันในระดับกลาง

เมื่อเราให้ $\beta_2 \gg 0$ สำหรับกรณีที่มีอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบผลึกกันในระดับกลาง เราจะได้ผลเฉลยโดยประมาณที่สภาวะพื้นเป็นดังนี้

$$\phi_g(\mathbf{x}) \approx \phi_g^{DS}(\mathbf{x}) := \phi_g^{2D}(x, y) \phi_3^{ho}(z), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \dots\dots\dots(4.12)$$

$$E_g \approx E_g^{DS} := E(\phi_g^{2D}(x, y) \phi_3^{ho}(z)) = \frac{\gamma_z}{2} + E_{2D}(\phi_g^{2D}) := \frac{\gamma_z}{2} + E_g^{2D}, \dots\dots\dots(4.13)$$

$$\mu_g \approx \mu_g^{DS} := \mu(\phi_g^{2D}(x, y) \phi_3^{ho}(z)) = \frac{\gamma_z}{2} + \mu_{2D}(\phi_g^{2D}) := \frac{\gamma_z}{2} + \mu_g^{2D}, \dots\dots\dots(4.14)$$

โดยที่

$$E_g^{2D} = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi_g^{2D}|^2 + V_2(x, y) |\phi_g^{2D}|^2 + \frac{\beta_2^{ho}}{2} |\phi_g^{2D}|^4 \right] dx dy,$$

$$\mu_g^{2D} = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi_g^{2D}|^2 + V_2(x, y) |\phi_g^{2D}|^2 + \beta_2^{ho} |\phi_g^{2D}|^4 \right] dx dy.$$

ϕ_g^{2D}, E_g^{2D} และ μ_g^{2D} คือสมการคลื่นที่สภาวะพื้น พลังงานที่สภาวะพื้น และศักย์เคมีที่สภาวะพื้นสำหรับกรณี 2 มิติ ตามลำดับ ซึ่งการพิจารณาแบบ 2 มิติ ทำให้ประหยัดเวลาและประหยัดหน่วยความจำในการคำนวณลงเป็นอย่างมาก

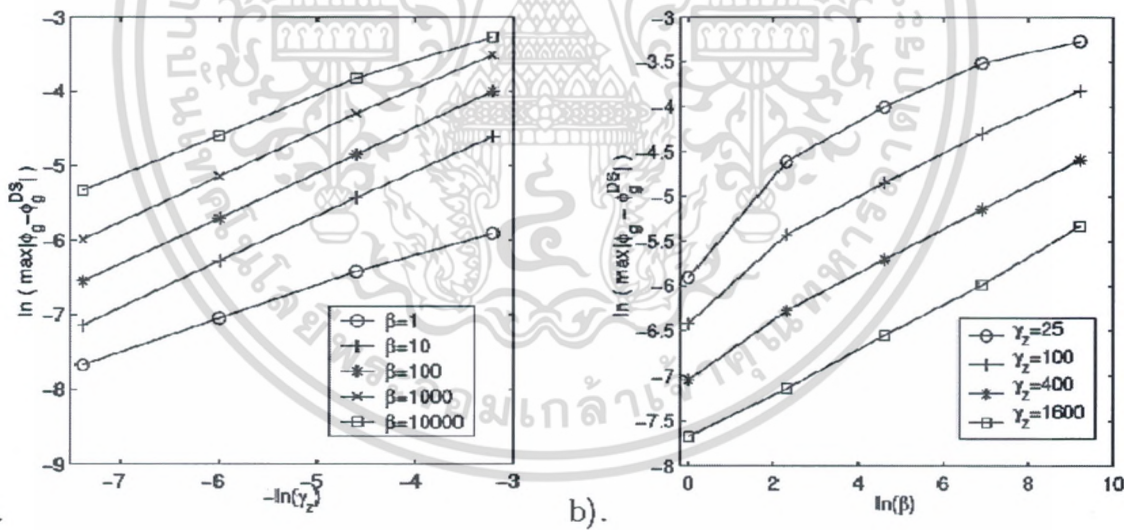
เพื่อที่จะยืนยันผลลัพธ์จากการคำนวณในสมการ (4.12), (4.13) และ (4.14) เราจะทำการแก้สมการ (4.13) โดยใช้วิธี BEFD และกำหนดโดเมนการคำนวณ $(r, z) \in [0, R] \times [-a, a]$ ลงในอัลกอริทึม(2.21) และ (2.22) โดยให้ค่าของ R และ a เป็นไปตามที่แสดงในตารางที่ 3.1 เมื่อใช้ค่า β และ γ_z ต่างๆกันสำหรับ 3D GPE แต่สำหรับการคำนวณของกรณีที่เป็น 2D GPE เราจะกำหนดให้ $r \in [0, R]$ และจะใช้ค่าของ R ตามที่กำหนดในตารางที่ 3.1 จะทำให้เราได้ $\phi_g(x, y, z)$ และ $\phi_g^{2D}(x, y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ออกมา และจาก $\phi_3^{ho}(z)$ ที่เราหาได้แล้วจากสมการ (3.3) เราจะเปรียบเทียบ $\phi_g(x, y, z)$ กับ $\phi_g^{DS}(x) := \phi_g^{2D}(x, y) \phi_3^{ho}(z)$

ตารางที่ 4.1 แสดงการวิเคราะห์ค่า *error* ของ $\max |\phi_g - \phi_g^{DS}|$ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ *disk-shaped trap*

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	2.7165×10^{-3}	1.6256×10^{-3} 0.37	8.6990×10^{-4} 0.45	4.6582×10^{-4} 0.45
$\beta_3 = 10$ rate	9.9580×10^{-3}	4.4016×10^{-3} 0.59	1.8771×10^{-3} 0.61	7.8922×10^{-4} 0.63
$\beta_3 = 100$ rate	1.8283×10^{-2}	7.8510×10^{-3} 0.61	3.3251×10^{-3} 0.62	11.4279×10^{-3} 0.61
$\beta_3 = 1000$ rate	2.9793×10^{-2}	1.3614×10^{-2} 0.56	5.8602×10^{-3} 0.61	2.5056×10^{-3} 0.61
$\beta_3 = 10000$ rate	3.8178×10^{-2}	2.1891×10^{-2} 0.40	1.0138×10^{-2} 0.56	4.8558×10^{-3} 0.53

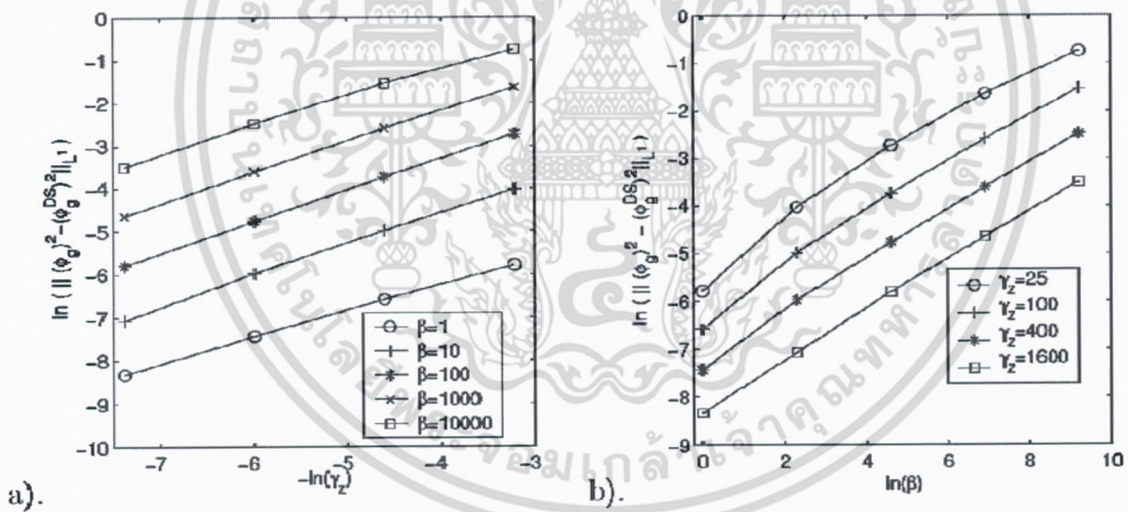


รูปที่ 4.1 แสดง convergence rate ของ $|\phi_g - \phi_g^{DS}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 แสดงการวิเคราะห์ค่า error ของ $\max \left\| (\phi_g)^2 - (\phi_g^{DS})^2 \right\|_{L^1}$ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ *disk-shaped trap*

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	3.0733×10^{-3}	1.3850×10^{-3}	5.8874×10^{-4}	2.4139×10^{-4}
$\beta_3 = 10$ rate	1.7851×10^{-2}	6.8785×10^{-3}	2.5500×10^{-3}	8.4851×10^{-4}
$\beta_3 = 100$ rate	6.5043×10^{-2}	2.3857×10^{-2}	8.5544×10^{-3}	3.0379×10^{-3}
$\beta_3 = 1000$ rate	0.19508	7.4657×10^{-2}	2.7047×10^{-2}	9.6342×10^{-3}
$\beta_3 = 10000$ rate	0.47323	0.21564	8.3192×10^{-2}	3.0162×10^{-2}

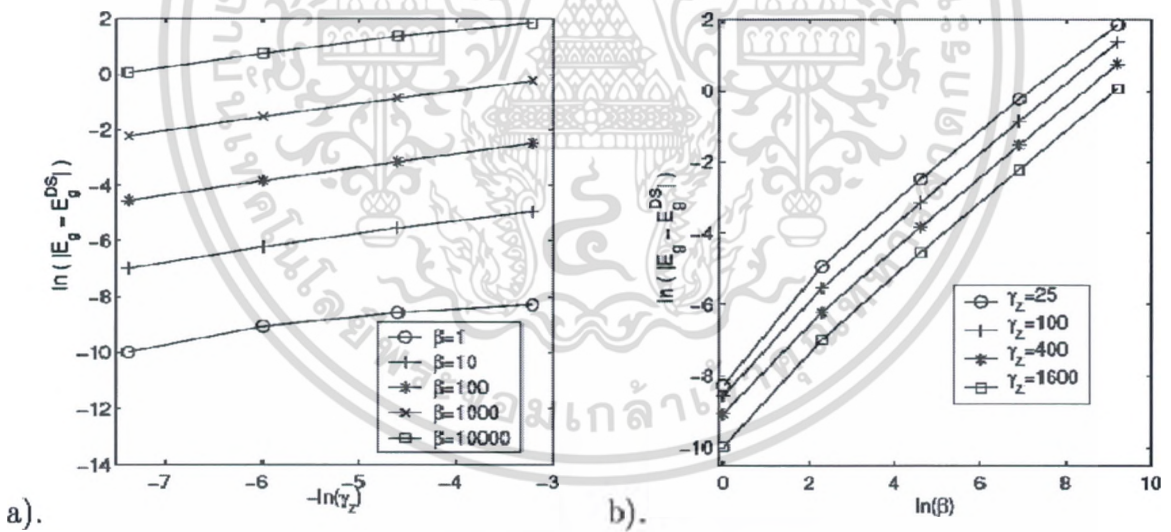


รูปที่ 4.2 แสดง convergence rate ของ $\left\| (\phi_g)^2 - (\phi_g^{DS})^2 \right\|_{L^1}$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.3 แสดงการวิเคราะห์ค่า error ของ $|E_g - E_g^{DS}|$ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ *disk-shaped trap*

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	2.5509×10^{-4}	1.9100×10^{-4} 0.21	1.1598×10^{-4} 0.36	4.6241×10^{-5} 0.66
$\beta_3 = 10$ rate	7.1493×10^{-3}	3.9211×10^{-3} 0.43	1.9933×10^{-3} 0.49	9.2032×10^{-4} 0.56
$\beta_3 = 100$ rate	8.3553×10^{-2}	4.3013×10^{-2} 0.48	2.1584×10^{-2} 0.50	1.0604×10^{-2} 0.51
$\beta_3 = 1000$ rate	0.79026	0.42380 0.45	0.21651 0.48	0.10841 0.50
$\beta_3 = 10000$ rate	6.3418	3.9073 0.35	2.1104 0.46	1.0662 0.49



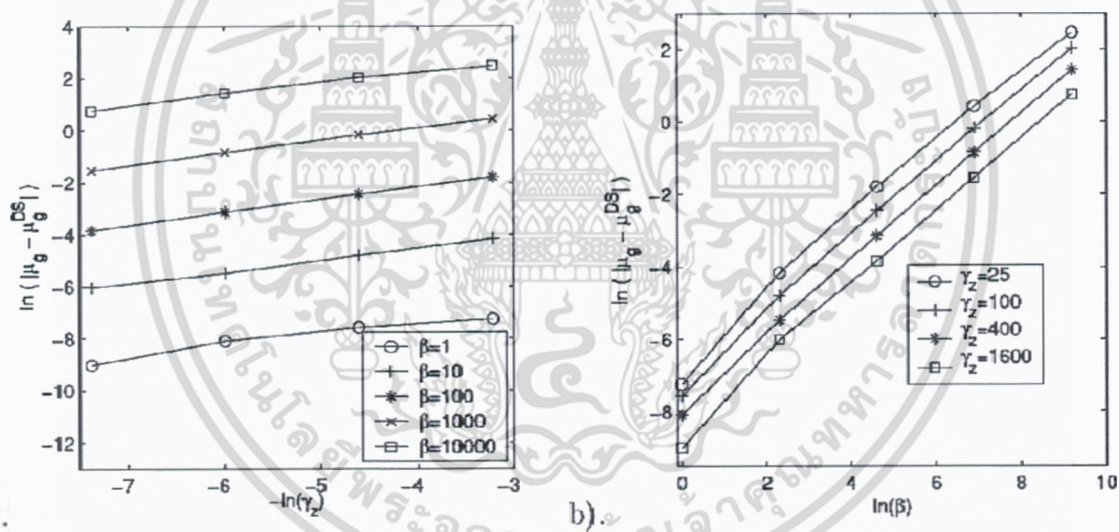
รูปที่ 4.3 แสดง convergence rate ของ $|E_g - E_g^{DS}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 แสดงการวิเคราะห์ค่า *error* ของ $|\mu_g - \mu_g^{DS}|$ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการ

กักกันแบบ *disk-shaped trap*

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	7.0581×10^{-4}	5.0744×10^{-4}	3.0116×10^{-4}	1.2072×10^{-4}
$\beta_3 = 10$ rate	1.5620×10^{-2}	8.2793×10^{-3}	4.1715×10^{-3}	2.4183×10^{-3}
$\beta_3 = 100$ rate	0.16745	8.6323×10^{-2}	4.3446×10^{-2}	2.1534×10^{-2}
$\beta_3 = 1000$ rate	1.5391	0.84043	0.43244	0.21765
$\beta_3 = 10000$ rate	11.748	7.5786	4.1793	2.1416



รูปที่ 4.4 แสดง *convergence rate* ของ $|\mu_g - \mu_g^{DS}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

จากตารางที่ 4.1 ถึงตารางที่ 4.4 และรูปที่ 4.1 ถึงรูปที่ 4.4 เมื่อเรากำหนดให้

$\beta \geq 0, \gamma_z \geq 1$ และ $\beta \gamma_z^{-3/2} = o(1)$ จะทำให้สรุปได้ว่า

$$\|\phi_g - \phi_g^{DS}\|_{L^2} = O\left(\frac{\beta^{1/2} \ln \gamma_z}{\gamma_z^{3/4}}\right), \quad \|(\phi_g)^2 - (\phi_g^{DS})^2\|_{L^1} = O\left(\frac{\beta^{1/2} \ln \gamma_z}{\gamma_z^{3/4}}\right),$$

$$|E_g - E_g^{DS}| = O\left(\frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right), \quad |\mu_g - \mu_g^{DS}| = O\left(\frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right).$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.3 กรณีที่เป็นอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบแรง

เมื่อเรากำหนดให้ $\beta_2 \gg 1$ จะตรงกับที่เป็นอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบแรง ดังนั้นผลเฉลยโดยประมาณที่สภาวะพื้นจะถูกคูณด้วยการประมาณแบบ TF ในระนาบ xy และคูณด้วยการประมาณแบบ harmonic oscillator ในแนวแกน z ดังนี้

$$\phi_g(\mathbf{x}) \approx \phi_g^{TF1}(\mathbf{x}) := \phi_{2D}^{TF}(x, y)\phi_3^{ho}(z), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{4.15}$$

โดยที่

$$\phi_{2D}^{TF}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(\mu_{2D}^{TF} - V_2(x, y)) / \beta_2^{ho}}, & V_2(x, y) < \mu_{2D}^{TF}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\mu_{2D}^{TF} = \left(\frac{\beta_2^{ho} \gamma_y}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{\beta^{1/2} \gamma_y^{1/2} \gamma_z^{1/4}}{2^{1/4} \pi^{3/4}}. \tag{4.17}$$

หากเราแทนที่สมการที่ (4.12), (4.8) และ (3.30) ด้วย $d=2$ และแทนที่สมการที่ (4.17), (3.27) ด้วย $d=2$ และ $\beta_2 = \beta_2^{ho}$ ลงในสมการที่ (3.16) เราจะได้ค่าประมาณของพลังงานเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} E_g &= E(\phi_g) = E(\phi_g^{2D}(x, y)\phi_3^{ho}(z)) + O\left(\frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right) \\ &= \frac{\gamma_z}{2} + E_{2D}(\phi_g^{2D}) + O\left(\frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right) = \frac{\gamma_z}{2} + E_g^{2D} + O\left(\frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right) \\ &\approx \frac{\gamma_z}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_2^{ho} \gamma_y}{\pi} \right)^{1/2} + \frac{H_2}{(\beta_2^{ho})^{2/4}} (\ln \beta_2^{ho} + G_2) + O\left(\frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right) \\ &\approx \frac{\gamma_z}{2} + \frac{2^{3/4} \gamma_y^{1/2} (\beta^2 \gamma_z)^{1/4}}{3\pi^{3/4}} + \frac{H_2 (2\pi)^{1/4}}{2(\beta^2 \gamma_z)^{1/4}} [\ln(\beta^2 \gamma_z) + 2G_2 - \ln 2\pi] + O\left(\frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right) \\ &= E_g^{TF1} + O\left(\frac{\ln(\beta^2 \gamma_z)}{(\beta^2 \gamma_z)^{1/4}} + \frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right), \end{aligned} \tag{4.18}$$

โดยที่

$$E_g^{TF1} = \frac{\gamma_z}{2} + \frac{2^{3/4} \gamma_y^{1/2} (\beta^2 \gamma_z)^{1/4}}{3\pi^{3/4}} = \frac{\gamma_z}{2} + \frac{2}{3} \mu_{2D}^{TF}. \tag{4.19}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

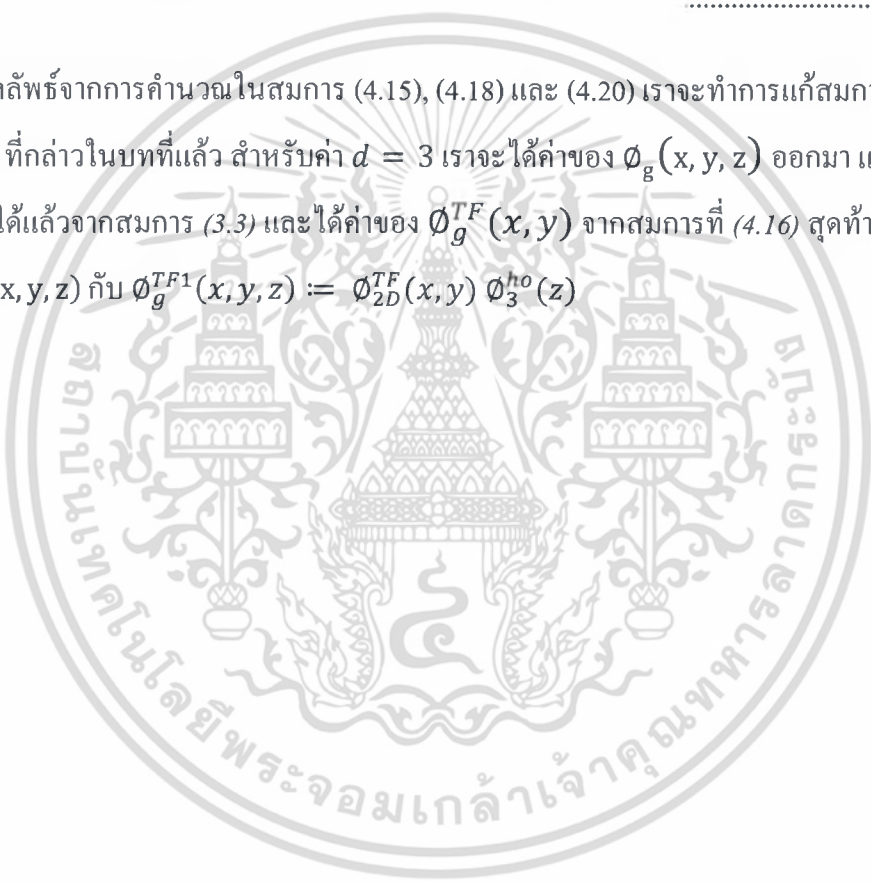
และโดยวิธีที่คล้ายคลึงกัน เราจะได้ค่าประมาณของศักย์เคมีที่สภาวะพื้นเป็นดังนี้

$$\mu_g \approx \mu_g^{TF1} + O\left(\frac{\ln(\beta^2 \gamma_z)}{(\beta^2 \gamma_z)^{1/4}} + \frac{\beta \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/2}}\right), \tag{4.20}$$

โดยที่

$$\mu_g^{TF1} = \frac{\gamma_z}{2} + \frac{\gamma_y^{1/2} (\beta^2 \gamma_z)^{1/4}}{2^{1/4} \pi^{3/4}} = \frac{\gamma_z}{2} + \mu_{2D}^{TF}. \tag{4.21}$$

เพื่อที่จะยืนยันผลลัพธ์จากการคำนวณในสมการ (4.15), (4.18) และ (4.20) เราจะทำการแก้สมการ (4.13) โดยใช้วิธี BEFD ที่กล่าวในบทที่แล้ว สำหรับค่า $d = 3$ เราจะได้ค่าของ $\phi_g(x, y, z)$ ออกมา และจาก $\phi_3^{ho}(z)$ ที่เราหาได้แล้วจากสมการ (3.3) และได้ค่าของ $\phi_g^{TF}(x, y)$ จากสมการที่ (4.16) สุดท้ายเราจะเปรียบเทียบ $\phi_g(x, y, z)$ กับ $\phi_g^{TF1}(x, y, z) := \phi_{2D}^{TF}(x, y) \phi_3^{ho}(z)$



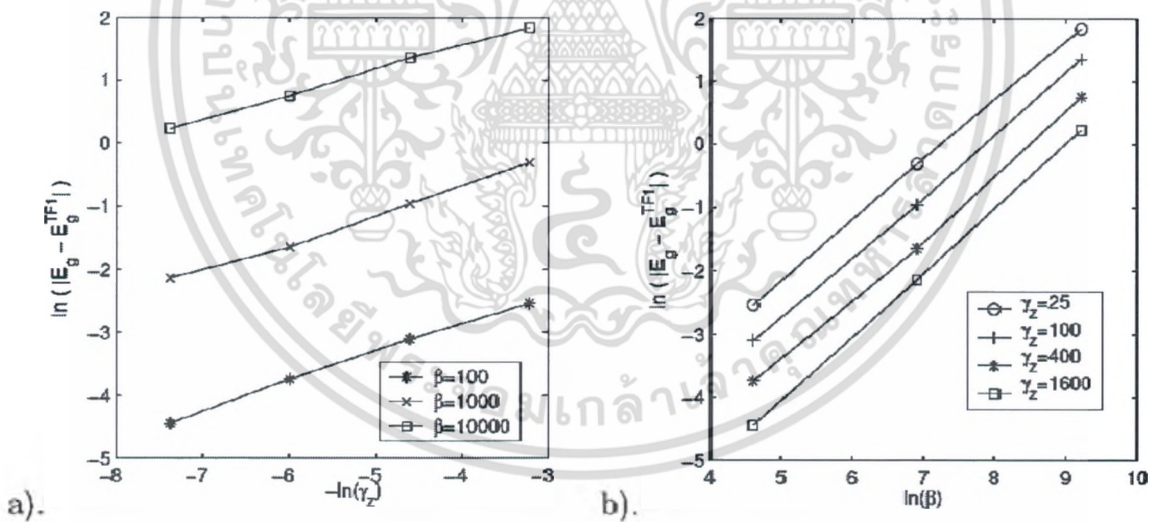
ตารางที่ 4.5 แสดงการวิเคราะห์ค่า *error* ของ $\|(\phi_g)^2 - (\phi_g^{TF1})^2\|_{L^1}$ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ *disk-shaped trap*

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	0.58819	0.41360 0.25	0.27900 0.28	0.18477 0.30
$\beta_3 = 10$ rate	0.1639	0.10752 0.30	7.1278×10^{-2} 0.30	4.7097×10^{-2} 0.30
$\beta_3 = 100$ rate	9.2648×10^{-2}	4.5162×10^{-2} 0.52	2.3347×10^{-2} 0.48	1.2906×10^{-2} 0.43
$\beta_3 = 1000$ rate	0.19484	7.5742×10^{-2} 0.68	2.8252×10^{-2} 0.71	1.0454×10^{-2} 0.72
$\beta_3 = 10000$ rate	0.47092	0.21356 0.57	8.1421×10^{-2} 0.69	2.8627×10^{-2} 0.75

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 แสดงการวิเคราะห์ค่า *error* ของ $|E_g - E_g^{TF1}|$ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ *disk-shaped trap*

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	0.61409	0.51950	0.41888	0.29887
$\beta_3 = 10$ rate	0.31540	0.24876	0.18610	0.10594
$\beta_3 = 100$ rate	7.9214×10^{-2}	4.5162×10^{-2}	2.3347×10^{-2}	1.1733×10^{-2}
$\beta_3 = 1000$ rate	0.73168	0.38127	0.19196	0.11818
$\beta_3 = 10000$ rate	6.3193	3.8930	2.1096	1.2518

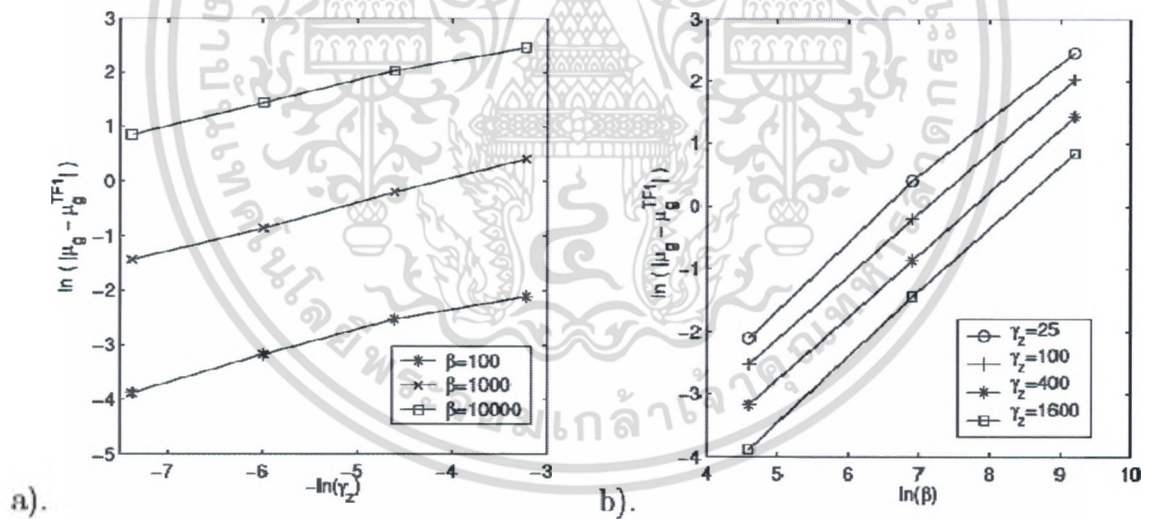


รูปที่ 4.5 แสดง *convergence rate* ของ $|E_g - E_g^{TF1}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.7 แสดงการวิเคราะห์ค่า *error* ของ $|\mu_g - \mu_g^{TF1}|$ สำหรับกรณีการคำนวณสถานะพื้นใน 3D ด้วยการกักกันแบบ *disk-shaped trap*

$\frac{1}{\gamma_z}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1600}$
$\beta_3 = 1$ rate	0.48380	0.38452	0.29107	0.18647
$\beta_3 = 10$ rate	0.20034	0.15591	0.11214	4.7083×10^{-2} 0.63
$\beta_3 = 100$ rate	0.12140	8.0114×10^{-2} 0.30	4.1908×10^{-2} 0.47	2.0630×10^{-2} 0.51
$\beta_3 = 1000$ rate	0.5039	0.81591	0.42166	0.23790
$\beta_3 = 10000$ rate	11.735	7.5715	4.1839	2.3312
		0.32	0.43	0.42



รูปที่ 4.6 แสดง *convergence rate* ของ $|\mu_g - \mu_g^{TF1}|$ ที่ตอบสนองต่อ a) ค่าต่างๆของ γ_z และ b) ค่าต่างๆของ β

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 4.5 ถึงตารางที่ 4.7 และรูปที่ 4.5 ถึงรูปที่ 4.6 เมื่อเรากำหนดให้ $\beta > 0$, $\gamma_z \geq 1$ และ $\beta\gamma_z^{-3/2} = o(1)$ เราจะสามารถสรุปได้ว่า

$$\|\phi_g - \phi^{\text{TF1}}\|_{L^2} = O\left(\frac{C(\beta) \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/4}}\right), \quad \|\phi_g^2 - (\phi^{\text{TF1}})^2\|_{L^1} = O\left(\frac{C(\beta) \ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/4}}\right)$$

$$|E_g - E_g^{\text{TF1}}| = O\left(\frac{\ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/4}} + \beta\right), \quad |\mu_g - \mu_g^{\text{TF1}}| = O\left(\frac{\ln \gamma_z}{\gamma_z^{1/4}} + \beta\right),$$

โดยที่ $C(\beta)$ ขึ้นอยู่กับค่าของ β ผลลัพธ์เหล่านี้ยืนยันผลเฉลยในสมการ (4.18) และสมการ (4.20) ได้เป็นอย่างดี และยังแสดงให้เห็นด้วยว่า $(\phi^{\text{TF1}}(x))^2$ ไม่ลู่ออกหาสถานะพื้น $\phi_g^2(x)$ เมื่อ $\gamma_z \rightarrow \infty$ และ $\beta > 0$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่เป็น dynamics GPE

ในบทนี้จะเป็นการคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ dynamics GPE โดยวิธี four-order time splitting spectral method (TSSP) โดยเราจะใช้วิธีนี้ศึกษาผลเฉลยที่ได้จากการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE

5.1 วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

เพื่อความง่าย เราจะใช้สมการ 1D GPE เป็นตัวอย่างของการวิเคราะห์ด้วยวิธี TSSP ส่วนกรณีที่เป็น 2 มิติ จะมีการนำ tensor grid มาใช้ในการวิเคราะห์ด้วย เริ่มจากสมการ 1D GPE และกำหนดให้มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet สมการจะเป็นดังนี้

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \psi_{xx} + \frac{x^2}{2} \psi + \beta_1 |\psi|^2 \psi, \quad a < x < b, \quad t \geq 0, \quad \dots \dots \dots (5.1)$$

$$\psi(a, t) = \psi(b, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \dots \dots \dots (5.2)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad a \leq x \leq b. \quad \dots \dots \dots (5.3)$$

เราจะเลือกใช้ spatial mesh size ที่มีขนาดดังนี้ $h = \Delta x > 0$ และ $h = \frac{b-a}{M}$ โดย M เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ส่วน time step $k = \Delta t > 0$ จากนั้นกำหนดให้ตัวชี้กริด (grid point) และ time step เป็นดังนี้

$$x_j \triangleq a + jh, \quad t_n \triangleq nk, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

กำหนดให้ φ^n เป็นค่าประมาณของฟังก์ชัน $\varphi(x_j, t_n)$ และให้ φ^n เป็นผลเฉลยแบบเวกเตอร์ ที่เวลา $t = t_n = nk$ โดยมี φ^n เป็นองค์ประกอบเวกเตอร์

จากเวลา $t = t_n$ จนถึงเวลา $t = t_{n+1}$ สมการ GPE ที่ (4.1) จะถูกเขียนใหม่ในรูปของ $i \partial_t \varphi = A\varphi + B\varphi$ โดยที่

$$A\psi = V_d(x)\psi(x, t) + \beta_d |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t), \quad B\psi = -\frac{1}{2} \partial_{xx} \psi(x, t). \quad \dots \dots \dots (4.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สิ่งที่ทำให้การอิมพลีเมนต์ด้วยวิธี TSSP มีประสิทธิภาพ คือการแก้ปัญหามีประสิทธิภาพของ 2 สมการต่อไปนี้เป็นสมการ

$$i\psi_t(\mathbf{x}, t) = B\psi = -\frac{1}{2}\partial_{xx}\psi(\mathbf{x}, t), \dots\dots\dots(5.5)$$

และสมการ

$$i\psi_t(\mathbf{x}, t) = A\psi = V_d(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) + \beta_d|\psi(\mathbf{x}, t)|^2\psi(\mathbf{x}, t). \dots\dots\dots(5.6)$$

สมการที่ (5.5) จะถูก *discretized* ภายในสเปซด้วยวิธี TSSP และจะถูกอินทิเกรตตามเวลาอย่าง *exactly*

ที่เวลา $t \in [t_n, t_{n+1}]$ สมการ ODE ที่ (5.6) จะกลายเป็น

$$i\psi_t(x, t) = V(x)\psi(x, t) + \beta|\psi(x, t_n)|^2\psi(x, t), \dots\dots\dots(5.7)$$

วิธี fourth-order time-splitting sine-spectral method (TSSP)

จากเวลา $t = t_n$ ถึง $t = t_{n+1}$ เราจะรวมขั้นตอน *splitting step* เข้ากับวิธี TSSP เพื่อให้ได้ fourth-order time-splitting sine-spectral method ตามที่ใช้ในเอกสาร[3,6,9] สำหรับสมการ GPE ที่ (5.1) โดยมีรายละเอียดของวิธีการเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\psi_j^{(1)} &= e^{-i2w_1k(V(x_j)+\beta|\psi_j^n|^2)}\psi_j^n, \\
\psi_j^{(2)} &= \sum_{l=1}^{M-1} e^{-iw_2k\mu_l^2}\widehat{\psi}_l^{(1)}\sin(\mu_l(x_j-a)), \\
\psi_j^{(3)} &= e^{-i2w_3k(V(x_j)+\beta|\psi_j^{(2)}|^2)}\psi_j^{(2)}, \\
\psi_j^{(4)} &= \sum_{l=1}^{M-1} e^{-iw_4k\mu_l^2}\widehat{\psi}_l^{(3)}\sin(\mu_l(x_j-a)), \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \\
\psi_j^{(5)} &= e^{-i2w_3k(V(x_j)+\beta|\psi_j^{(4)}|^2)}\psi_j^{(4)}, \\
\psi_j^{(6)} &= \sum_{l=1}^{M-1} e^{-iw_2k\mu_l^2}\widehat{\psi}_l^{(5)}\sin(\mu_l(x_j-a)), \\
\psi_j^{n+1} &= e^{-i2w_1k(V(x_j)+\beta|\psi_j^{(6)}|^2)}\psi_j^{(6)},
\end{aligned}
\tag{5.8}$$

โดยที่

$$\omega_1 = 0.33780\ 17979\ 89914\ 40851, \quad \omega_2 = 0.67560\ 35959\ 79828\ 81702$$

$$\omega_3 = -0.08780\ 17979\ 89914\ 40851, \quad \omega_4 = -0.85120\ 71979\ 59657\ 63405$$

5.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการลดรูปสมการ GPE แบบขึ้นกับเวลา

ในหัวข้อนี้จะเป็นการแสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการลดรูปสมการ GPE แบบขึ้นกับเวลาสำหรับกรณีที่เป็น *dynamics GPE* โดยเราจะกำหนดค่าให้กับ γ_z และให้ $\varphi^{3D}(x, y, z, t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ 3D GPE ที่ (2.5) ที่มีเงื่อนไข $\gamma_x = \gamma_y = 2, \beta = 100$ และให้ฟังก์ชันเริ่มต้น $\varphi_0(x, y, z)$ ในสมการที่ (3.14) ที่มี $d=3$ เป็นสมการคลื่นที่สถานะพื้นของสมการ (2.5) ที่มี $\gamma_x = \gamma_y = 1, \beta = 100$ และให้ $\varphi^{2D}(x, y, t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ 2D GPE ที่ (3.5) ที่มีเงื่อนไข $\gamma_x = \gamma_y = 2, \beta = \sqrt{\frac{\gamma_z}{2\pi}}$ และให้ฟังก์ชันเริ่มต้น $\varphi_0(x, y)$ ในสมการที่ (3.14) ที่มี $d=2$ เป็นสมการคลื่นที่สถานะพื้นของสมการ (3.5) ที่มี $\gamma_x = \gamma_y = 1$ เพื่อที่จะทำการเปรียบเทียบเราจะกำหนดให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\phi_3(z, t) = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\psi^{3D}(x, y, z, t)|^2 dx dy \right)^{1/2} \approx \phi_3^{\text{ho}}(z) = \left(\frac{\gamma_z}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\gamma_z z^2 / 2},$$

.....(5.9)

$$\phi^{3D}(\mathbf{x}, t) \approx \phi^{\text{DS}}(\mathbf{x}, t) := \psi^{2D}(x, y, t) \phi_3^{\text{ho}}(z), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \dots\dots\dots(5.10)$$

และกำหนดให้ *condensate widths* เป็นดังสมการนี้

$$\sigma_\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha^2 |\psi^{3D}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}, \quad \sigma_\alpha^2(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha^2 |\psi^{\text{DS}}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}, \quad \alpha = x, y, z.$$

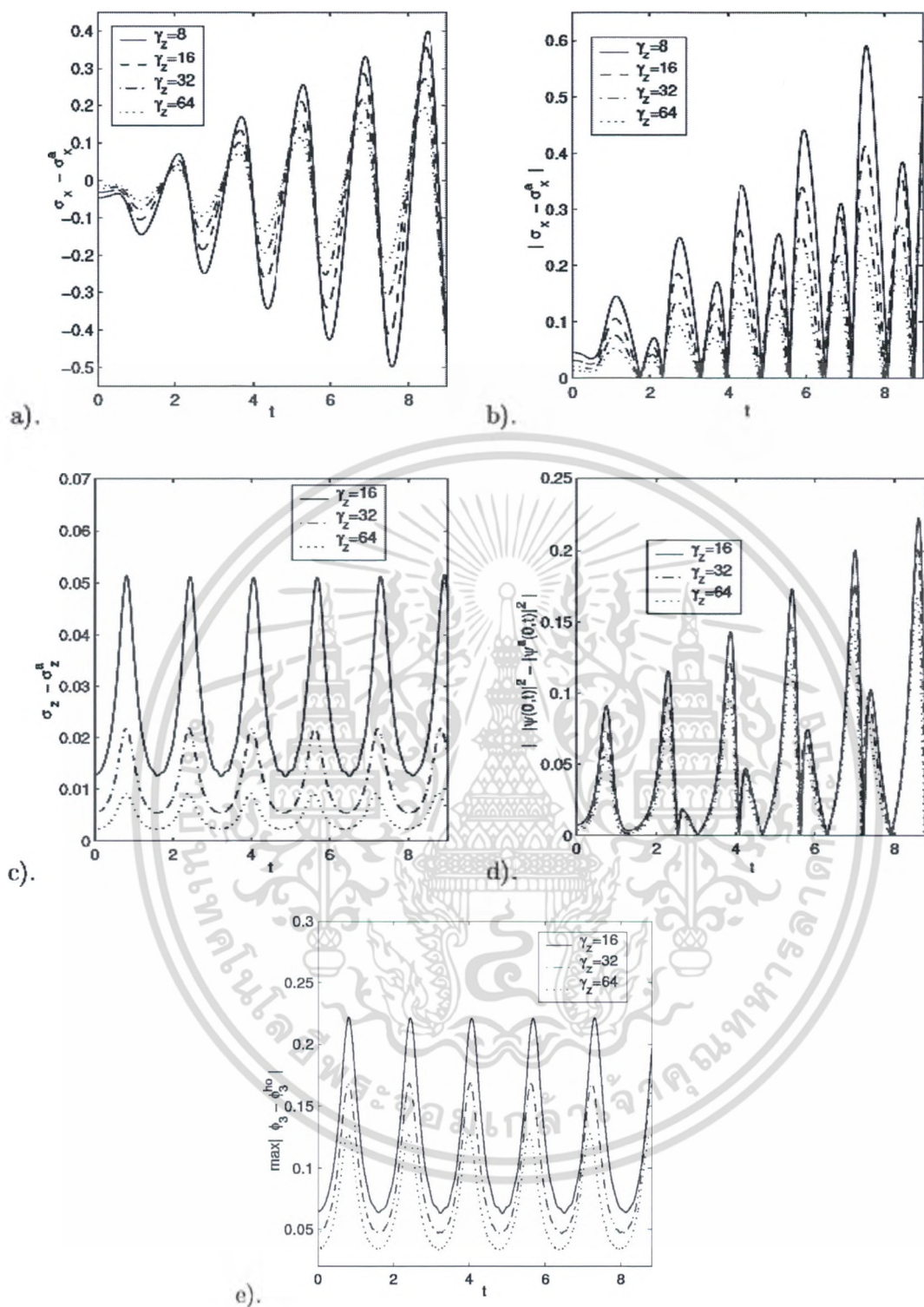
.....(5.11)

โดย φ^{2D} และ φ^{3D} ก็ฟังก์ชันที่หาได้จากวิธี *TSSP* ในหัวข้อที่แล้ว เรากำหนดให้ $k = 0.001$ และคำนวณภายใต้โดเมน $[-R_x, R_x] \times [-R_y, R_y] \times [-R_z, R_z]$ โดยที่ $R_x = R_y$ สำหรับสมการ 3D GPE และใช้โดเมน $[-R_x, R_x] \times [-R_x, R_x]$ สำหรับสมการ 2D GPE เราจะใช้ค่าของ R_x และ R_z ตามที่กำหนดในตารางที่ 5.1 สำหรับค่าต่างๆกันของ γ_z ส่วน *mesh* ที่เราเลือกไว้สำหรับสมการ 3D GPE เท่ากับ 128^3 และสำหรับสมการ 2D GPE เท่ากับ 128^2

ตารางที่ 5.1 ค่าของ R_x และ R_z สำหรับค่าต่างๆกันของ γ_z

γ_z	8	16	32	64
$\beta=100$	$R_x = 5.4, R_z = 5.4$	$R_x = 5.6, R_z = 1.8$	$R_x = 6.0, R_z = 1.3$	$R_x = 6.2, R_z = 0.9$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.1 แสดงการวิเคราะห์ค่า errors ของ $|\sigma_x - \sigma_x^a| = |\sigma_y - \sigma_y^a|$, $\sigma_z - \sigma_z^a = \sigma_z - \frac{1}{4}$, $\sigma_x - \sigma_x^a$, $||\varphi^{3D}(0,t)||^2 - ||\varphi^{DS}(0,t)||^2$ และค่า \max ของ $|\phi_3 - \phi_3^{ho}|(t)$ สำหรับค่าต่างๆกันของ γ_z

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 5.1 เป็นการลดรูปสมการแบบขึ้นกับเวลาของ 3D GPE เป็นสมการ 2D GPE เมื่อให้ $\gamma_z \gg 1$ นอกจากนี้เราสามารถคำนวณ convergence rate ได้ดังนี้

$$\|\phi_3(z, t) - \phi_3^{ho}(z)\|_{L^\infty} = O\left(\frac{1}{\gamma_z^{3/4}}\right), \quad \sigma_z(t) = \sigma_z^a(t) + O\left(\frac{1}{\gamma_z^{3/4}}\right),$$

$$\sigma_z(t) = \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{\gamma_z^{3/4}}\right), \quad |\psi^e(\mathbf{x}, t)|^2 = |\psi^a(\mathbf{x}, t)|^2 + O\left(\frac{1}{\gamma_z^{1/2}}\right).$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

เราได้ศึกษาเกี่ยวกับสมการ 3D GPE เพื่ออธิบายสถานะควบแน่นของก๊าซที่เรียกว่า BEC ภายใต้เงื่อนไขความถี่กักกันที่มีค่าจำกัดค่าหนึ่ง โดยเริ่มจากการลดรูปสมการ 3D GPE จนได้พารามิเตอร์หลัก 3 ตัวออกมา และแสดงวิธีการลดรูปสมการจนได้เป็นสมการ 2D GPE ที่อธิบายสถานะควบแน่นแบบ disk-shaped condensation จากนั้นจึงทำการลดรูปสมการอีกครั้งจนได้เป็นสมการ 1D GPE ที่อธิบายสถานะควบแน่นแบบ cigar-shaped condensation ในขั้นตอนต่อมาก็ทำการคำนวณสถานะพื้นของสมการ 3D GPE ด้วยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบ backward Euler finite difference discretization [2] จากผลเฉลยที่คำนวณได้ภายใต้ relative errors ที่กำหนดไว้ของการเกิดอันตรกิริยาแบบต่างๆ ทำให้เห็นอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ที่เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ตอบสนองต่อค่า γ_z ต่างๆ ซึ่งเกิดขึ้นในขณะที่มีการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE และทำให้เห็นอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ที่เท่ากับ $\frac{1}{4}$ ตอบสนองต่อค่า γ_r ต่างๆ ซึ่งเกิดขึ้นในขณะที่มีการลดรูปสมการ 3D GPE ลงเหลือเป็นสมการ 1D GPE เมื่อ ratio been trapping frequencies เท่ากับค่าอนันต์ และเรายังได้ทำการประมาณค่าพลังงานโดยวิธีประมาณแบบ Thomas Fermi และค่าศักย์เคมีที่สถานะพื้นของสมการ GPE ทั้งกรณีที่เป็น 1 มิติ 2 มิติ และ 3 มิติ ถัดจากนั้นจึงทำการประมาณสถานะพื้นของสมการ 3D GPE ของกรณีที่เกิดการควบแน่นแบบ isotropic condensation, การควบแน่นแบบ disk-shaped condensation และการควบแน่นแบบ cigar-shaped condensation รวมไปถึงการประมาณค่าพลังงานและศักย์เคมีที่สถานะพื้นของกรณีที่เกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบอ่อน และกรณีที่เกิดอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคแบบแรง จากนั้นจึงทำการคำนวณอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ภายใต้ relative error ของอันตรกิริยาภายในระหว่างอนุภาคชนิดต่างๆ โดยโดเมนการคำนวณได้ถูกกำหนดไว้ตามที่กล่าวไว้ในรายงาน และสุดท้ายเราได้ศึกษาการลดรูปสมการ 3D GPE แบบขึ้นกับเวลา ลงเหลือเป็นสมการ 2D GPE ด้วยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบ fourth-order time splitting sine-spectral method ซึ่งผลเฉลยที่เราคำนวณได้สอดคล้องกันเป็นอย่างมากกับผลเฉลยที่คำนวณได้ด้วยวิธีที่กล่าวไว้ในตอนแรก นอกจากนี้เรายังได้แสดงให้เห็นอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ภายใต้ trapping frequency ratio ที่มีค่าจำกัดค่าหนึ่งจากการใช้วิธีวิเคราะห์แบบ TSSP นี้ในรายงานฉบับนี้อีกด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

- [1] W.Bao and W.J. Tang, Ground state solution of Bose-einstein condensate by directly minimizing the energy functional, *J. Comput. Phys.*, Vol. 187, No. 1, pp. 230 (2003).
- [2] W.Bao and Q. Du, Computing the ground state solution of Bose-Einstein condensates by a normalized gradient flow, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.25, No. 5, pp. 1694 (2004).
- [3] W.Bao and J. Shen, A Fourth-order time splitting Laguerre-Hermite pseudo spectral method for Bose-Einstein condensates, *SIAM J. Sci. Comput.*, to appear.
- [4] M.M. Cerimele, M.L. Chiofola, F. Pistella, S. Succi and M.P. Tosi, Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation using an explicit finite-difference scheme: an application to trapped Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. E.*, Vol.62, pp. 1382(2000).
- [5] V. Dunjko, V.Lorent and M. Olshanii, Bosons in Cigar-shaped Traps: Thomas-Fermi Regime, Tonks-Girardeau Regime, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 86, pp. 5413 (2001).
- [6] B. Fornberg and T.A. Driscoll, A fast spectral algorithm for nonlinear wave equations with linear dispersion, *J. Comput. Phys.*, Vol. 155, pp.456 (1999).
- [7] P.Leboeuf and N. Pavloff, Bose-Einstein beams: coherent propagation through a guide, *Phys. Rev. A.*, Vol;. 64, pp. 033602 (2001).
- [8] L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, clarendon press, Oxford, 2003.
- [9] H. Yoshida, Construction of higher order symplectic integrators, *Phys. Lett. A.*, Vol. 150, pp. 262 (1990).
- [10] C.J. Pethick and H.Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases second edition*, Cambridge
- เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

university press, New York, 2008

- [11] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman and E.A. Cornell, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, *Science*, Vol. 269, No. 5221, pp. 198 (1995).
- [12] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn and W. Ketterle, Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 3969 (1995).
- [13] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett and R.G. Hulet, Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 1687 (1995)
- [14] F. London, *Nature*, Vol. 141, pp. 643 (1938).
- [15] P.Sokol, Bose-Einstein Condensation, edited by A. Griffin, D.W. Snoke and S. Stringari, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 51 (1995)
- [16] J.P. Wolfe, J.L. Lin and D.W. Snoke, Bose-Einstein Condensation, edited by A. Griffin, D.W. Snoke and S. Stringari, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 281 (1995).
- [17] G. Baym and C.J. Pethick, Ground state Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76, No. 1, pp. 6 (1996).
- [18] M. Edwards and K. Burnett, Numerical solution of the nonlinear Schrodinger equation for small samples of trapped neutral atoms, *Phys. Rev. A.*, Vol. 51, No.2, pp. 1382 (1995)
- [19] P.A. Ruprecht, M.J. Holland, K. Burrett and M. Edwards, Time-dependent solution of the nonlinear Schrodinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms, *Phys. Rev. A.*, Vol. 51, pp. 4704 (1995).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้