

วิธีไร้โครงตาข่ายสำหรับปัญหาการนำความร้อน

Meshless Method for Heat Conduction Problems

จารุวัตร เจริญสุข¹ ภาสกร เวสสะ โกลล์²

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

²ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์ปัญหาทางความร้อนสามารถกระทำได้ง่ายขึ้นด้วยวิธีการที่ไม่ใช้โครงตาข่าย ขั้นตอนการสร้างโครงตาข่ายเป็นขั้นตอนที่ใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในปัญหาสามมิติ บทความนี้สรุปหลักการของวิธีไร้โครงตาข่ายชื่อว่าวิธี MLPG สำหรับการแก้ปัญหาการนำความร้อนสองมิติที่สถานะไม่อยู่ตัว วิธี MLPG ไม่ต้องการเอลิเมนต์ (elements) หรือ เซลล์เบื้องตัน (background cells) เพื่อการประมาณค่าภายในสนาม หรือเพื่อการอินทิเกรต รูปแบบสมการชนิดอ่อนเฉพาะบริเวณเล็กๆ ถูกสร้างขึ้นมาจากการใช้วิธีดั่งน้ำหนักเศษคก้าง ยิ่งไปกว่านั้น บทความนี้แสดงถึงข้อเด่น ข้อด้อยและตัวอย่างการคำนวณจากวิธี MLPG

คำสำคัญ: วิธีไร้โครงตาข่าย, วิธีคำนวณเชิงตัวเลข, การนำความร้อน

Abstract

Heat transfer analysis can be simplified by using meshless method. Mesh generation process is time-consuming especially for the three dimensional problems. This paper reviews briefly the concept of a meshless method named the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) for solving the unsteady two-dimensional heat conduction problems. The MLPG does not require elements or background cells for either field interpolation or background integration. Local weak forms are constructed locally by means of the weighted residual method. Also, the advantages, disadvantages and some numerical results of MLPG are shown in this article.

Keywords : Meshless method, Numerical method, Heat conduction

1. บทนำ

การวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนที่สถานะไม่คงตัวเป็นเรื่องที่มีประโยชน์มาก เนื่องจากสามารถอธิบายการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นจริงในทางปฏิบัติ อุปสรรคสำคัญของการวิเคราะห์ คือสมการบังคับของปัญหานี้มีความซับซ้อนแฝงอยู่ ได้แก่ ความไม่เป็นเชิงเส้นของสมบัติทางกายภาพต่าง ๆ เป็นต้น การหาคำตอบด้วยวิธี

เชิงวิเคราะห์ทำได้กับปัญหาจำนวนไม่มากนัก ซึ่งสมมติให้สมบัติทางกายภาพของปัญหาเป็นค่าคงที่เท่านั้น ดังนั้นวิธีหาคำตอบด้วยกระบวนการเชิงตัวเลข จึงเป็นทางเลือกหนึ่งซึ่งสามารถใช้กับสมการบังคับ เงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้นที่ซับซ้อนของปัญหาได้มากกว่า และหลากหลายกว่า วิธีหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ วิธีเชิงตัวเลขซึ่งเป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างดี ได้แก่ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method หรือ FEM) วิธีไฟไนต์วอลุ่ม

(Finite Volume Method หรือ FVM) วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method หรือ FDM) วิธีเหล่านี้ประสบความสำเร็จในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนของแข็ง [1] ข้อเสียของวิธีเหล่านี้คือ การเตรียมข้อมูลโครงตาข่ายเป็นสิ่งที่สำคัญยิ่งต่อการคำนวณด้วยวิธีเหล่านี้ การเตรียมข้อมูลโครงตาข่ายใช้เวลานาน และสิ้นเปลืองทรัพยากรในการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ หากรูปร่างของตาข่ายมีลักษณะที่บิดเบี้ยวมากเกินไปจะทำให้ ฟังก์ชันประมาณค่าภายใน (interpolation function) ของวิธีคำนวณมีคุณภาพต่ำ และส่งผลเสียต่อสมรรถนะการคำนวณได้ ด้วยเหตุผลที่กล่าวไป ทำให้เกิดความสนใจในการพัฒนาระบบวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถคำนวณได้ โดยไม่ต้องอ้างอิงกับโครงตาข่าย ชื่อว่าวิธีไร้โครงตาข่าย (Meshless method)

ตลอดยี่สิบปีที่ผ่านมา Meshless method อยู่ในความสนใจของนักวิจัยด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยงานวิศวกรรม (Computational Aided Engineering) หลักการสำคัญของวิธีนี้คือ Meshless method ต้องการเพียงข้อมูลของกลุ่มจุดบัพ (set of scattered nodes) ซึ่งสามารถกระจายกระจายอย่างไรก็ได้ภายในโดเมน วิธีนี้ไม่ได้ต้องการข้อมูลโครงตาข่ายระหว่างจุดบัพ กับจุดบัพข้างเคียง นอกจากนี้ Meshless method สามารถจำลองรูปร่างที่ซับซ้อนของโดเมนได้อย่างแม่นยำมากยิ่งขึ้น โดยการใช้ฟังก์ชันประมาณค่าที่มีอันดับสูง แม้ว่า Meshless method ส่วนใหญ่จะมีจุดเริ่มต้นจากปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง แต่ Meshless method ก็ได้ถูกนำไปใช้กับ ปัญหาการนำความร้อนของแข็งอยู่พอสมควร ได้แก่ Cleary และ Monaghan [2] ใช้วิธี smoothed particle hydrodynamics (SPH); Chen และคณะ [3] ใช้วิธี SPH ที่ปรับแก้ใหม่แล้วทำให้ความผิดพลาดของคำตอบที่ขอบเขตของปัญหาลดลง; Singh และผู้ร่วมงาน [4-6] ใช้แนวคิดของ element free Galerkin method; Sladek และคณะ [7] ใช้วิธี Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG); Liu และคณะ [8] พัฒนาริธี meshless ตามแนวคิดของค่ายกกำลังสองของเศษตกค้างน้อยที่สุด (least-squares approach); Tan และคณะ [9] เสนอวิธี

Least squares collocation; Wang และคณะ [10,11] ประยุกต์วิธี meshless สำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็งชนิด anisotropic และ inhomogeneous; Gao [12] คิดค้นวิธี meshless ที่พัฒนามาจากวิธี boundary element (BEM); Sadat และคณะ [13] เสนอวิธี diffuse approximation meshless; Wu และคณะ [14] ใช้วิธีที่ชื่อว่า Meshless local Petrov-Galerkin collocation method

ในระยะเวลาไม่นานมานี้ meshless methods ถูกพัฒนาขึ้นอย่างมากมาย (Belytschko และคณะ [15] และ Liu และ Gu [16]) ในบทความนี้กล่าวถึงเฉพาะวิธี meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) ซึ่งถูกคิดค้นขึ้นเป็นครั้งแรกโดย Atluri และ Zhu [17] เริ่มต้นจากการเขียนสมการบังคับให้อยู่ในรูปแบบอ่อน สำหรับบริเวณเล็กๆ (local weak form) แล้วทำให้สมการบังคับสามารถใช้ได้กับโดเมนใหญ่ ด้วยการสร้างสมการคำนวณให้กับแต่ละจุดบัพ เฉพาะบริเวณเล็กๆ รอบจุดบัพเท่านั้น ด้วยการทำให้เศษตกค้างถ่วงน้ำหนักของบริเวณเล็กๆ เหล่านั้น เท่ากับศูนย์ วิธี MLPG จัดเป็น meshless method อย่างแท้จริง [17-20] เนื่องจากวิธีนี้ไม่ต้องการโครงตาข่ายเบื้องต้น (background mesh) เพื่อคำนวณสมการอินทิกรัลเฉพาะบริเวณของปัญหา นอกจากนั้น วิธี MLPG เป็นวิธีที่เป็นพื้นฐานของวิธี meshless อื่นหลายวิธี เนื่องจาก ฟังก์ชันทดลอง (trial function) และฟังก์ชันทดสอบ (test function) ภายในอินทิกรัลสามารถเลือกได้จากที่ว่างฟังก์ชัน (functional space) ซึ่งแตกต่างกันได้ ปัจจุบัน วิธีในกลุ่มของ MLPG มีความอ่อนตัว และประสิทธิภาพในการคำนวณสูงมาก สามารถเลือกใช้ร่วมกับฟังก์ชันประมาณค่าได้มากมาย เช่น moving least square approximation (MLS) [17-20] point interpolation (PI) [21] Kriging interpolation (KI) [22] natural neighbour interpolation (NNI) [23,24] ฟังก์ชัน natural neighbour interpolation (NNI) มีสมบัติของฟังก์ชันเดลตา (delta function) ทำให้สะดวกต่อการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต มีการเชื่อมโยงราบเรียบกับจุดบัพ ซึ่งอยู่ใกล้เคียง และไม่ต้องการพารามิเตอร์พิเศษจากผู้มีส่วนใหญ่ฟังก์ชัน NNI นี้ถูกใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาด้านโครงสร้าง [26-28]

ข้อเด่นของวิธี MLPG ได้แก่ 1) มีความแม่นยำมากกว่าวิธี FEM สำหรับการคำนวณตัวแปรไม่ทราบค่าและค่าอนุพันธ์ต่างๆ ในกรณีที่มีจำนวนจุดบัพเท่ากัน 2) ไม่ต้องการเทคนิคการปรับเรียบให้กับกรณคำนวณค่าอนุพันธ์ 3) สามารถกำหนดจุดบัพได้อย่างอิสระ แต่วิธี MLPG ก็มีข้อด้อยเช่นกัน ได้แก่ 1) การกำหนดเงื่อนไขทราบค่าของตัวแปร ไม่สามารถทำได้ง่ายง่ายเมื่อเปรียบเทียบกับวิธี FEM 2) ใช้เวลาและหน่วยความจำในการคำนวณมากกว่าวิธี FEM 3) ใช้เซลล์เบื้องต้นเพื่อการอินทิเกรตตัววิธี FEM ไม่ต้องใช้

2. สมการบังคับของปัญหาการนำความร้อน

สมการการนำความร้อนสองมิติ ซึ่งสามารถอธิบายการกระจายอุณหภูมิที่สถานะไม่อยู่ตัวในของแข็งที่มีโดเมน Ω เป็นสมการอนุพันธ์ย่อย [29]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1a)$$

เงื่อนไขขอบเขตได้แก่ เงื่อนไข Dirichlet (Γ_1), เงื่อนไข Neumann (Γ_2) และเงื่อนไข Robin (Γ_3)

$$T = \bar{T} \quad \text{บน } \Gamma_1 \quad (1b)$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y = \bar{q} \quad \text{บน } \Gamma_2 \quad (1c)$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y = h(T_\infty - T) \quad \text{บน } \Gamma_3 \quad (1d)$$

เงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาคือ

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad (1e)$$

เมื่อ T คืออุณหภูมิ; t คือเวลา; k_x และ k_y คือสภาพการนำความร้อนในทิศทาง x และ y ; l_x และ l_y คือ direction cosines ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของผิวขอบเขต; ρ และ c คือความหนาแน่นและค่าความจุความร้อนจำเพาะตามลำดับ; Q คือการผลิตความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร; \bar{T} และ \bar{q} คืออุณหภูมิระบุค่าและฟลักซ์ความร้อนระบุค่าบนขอบเขต Γ_1 และ Γ_2 ตามลำดับ; h คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อน; T_∞ คืออุณหภูมิของของไหลที่อยู่ใกล้กับขอบเขต; และ T_0 คืออุณหภูมิเริ่มต้น

3. วิธี MLPG

3.1 ฟังก์ชัน Natural neighbour interpolation

พิจารณากลุ่มจุดบัพจำนวน M จุดในที่ว่างสองมิติ R^2 ; $\mathbf{N} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$ Voronoi diagram คือการแบ่งที่ว่างให้เป็นหลายบริเวณย่อย T_I แต่ละบริเวณย่อย T_I เกี่ยวข้องกับจุดบัพ \mathbf{x}_I มีเฉพาะจุดบัพ \mathbf{x} ที่ใกล้กับจุดบัพ \mathbf{x}_I มากที่สุด ในรูปแบบคณิตศาสตร์ Voronoi polygon T_I มีนิยามดังนี้ [30]

$$T_I = \{\mathbf{x} \in R^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J) \forall J \neq I\} \quad (2)$$

เมื่อ $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ คือระยะทางระหว่าง \mathbf{x} และ \mathbf{x}_I Delaunay triangulation สร้างได้ด้วยการเชื่อมต่อจุดบัพต่างๆ จาก voronoi polygon ต่างๆ ที่มีขอบเขตร่วมกัน Voronoi diagram สร้างนิยามด้วยจุดบัพที่อยู่ข้างเคียง ($\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J$) โดย \mathbf{x}_I เป็นจุดบัพที่อยู่ใกล้ที่สุดกับจุดบัพใดๆ ใน T_{IJ} และ \mathbf{x}_J เป็นจุดบัพที่อยู่ใกล้เคียงเป็นอันดับที่สอง

$$T_{IJ} = \{\mathbf{x} \in R^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_K) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) \forall J \neq I \neq K\} \quad (3)$$

โดย T_{IJ} คือ เซตไม่ว่าง ถ้า \mathbf{x}_I และ \mathbf{x}_J เป็นจุดบัพข้างเคียงของกันและกัน ฟังก์ชัน Natural Neighbour หรืออีกชื่อหนึ่งคือ ฟังก์ชันรูปร่าง Sibson ของจุดบัพ \mathbf{x} เทียบกับ \mathbf{x}_I สามารถสร้างนิยาม [25] ในสองมิติว่าเป็นอัตราส่วนของพื้นที่ T_{xI} และ T_x

$$\phi_I(\mathbf{x}) = A_I(\mathbf{x}) / A(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n A_j(\mathbf{x}) \quad (5)$$

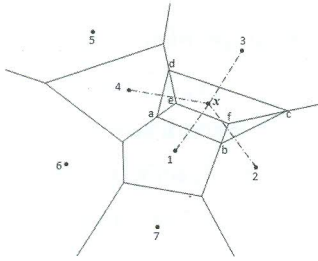
เมื่อ n คือจำนวนของจุดบัพข้างเคียงของจุดบัพ \mathbf{x} รูปที่ 1 แสดงให้เห็นจุดบัพ \mathbf{x} และจุด natural neighbours ทั้งหมด 4 จุด (หมายเลข 1-4) ฟังก์ชันรูปร่าง $\phi_I(\mathbf{x})$ สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\phi_1(\mathbf{x}) = A_1 / A_2 \quad (6)$$

เมื่อ A_1 และ A_2 หมายถึง พื้นที่สี่เหลี่ยม $abfe$ และ $abcd$ ตามลำดับสนามของอุณหภูมิ $T(\mathbf{x})$ สามารถประมาณค่าได้ด้วยการใช้นิยามฟังก์ชันรูปร่างและค่าของจุดบัพในรูปแบบผลบวกดังนี้

$$T^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) T_I \quad (7)$$

เมื่อ T_I คืออุณหภูมิของจุดบัพข้างเคียงจำนวน n จุด สมบัติของฟังก์ชันรูปร่างประเภท natural neighbour หรือ Sibson (Sukumar และคณะ [25])



รูปที่ 1 Voronoi cell อันดับที่ 1 และ 2 รอบจุดบัพ x

3.2 การสร้างสมการคำนวณ

พิจารณารูปแบบชนิดอ่อนของสมการ (1a)

$$\int_{\Omega_s} \left\{ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - Q \right\} d\Omega = 0 \quad (8)$$

โดย w คือฟังก์ชันทดสอบและ Ω_s คือโดเมนย่อย ซึ่งเป็นโดเมนขนาดเล็กของแต่ละจุดบัพ ซึ่งอยู่ภายในโดเมนใหญ่ รูปร่างและขนาดของโดเมนย่อย สามารถกำหนดได้ไม่จำกัดรูปแบบไม่ว่าจะเป็นรูปวงกลม หรือ สี่เหลี่ยม โดเมนย่อย Ω_s รอบจุดบัพ x_I สามารถสร้างขึ้นอย่างง่ายด้วยผลรวมของสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดบัพ x_I เป็นจุดยอดรวม ดังแสดงในรูปที่ 2 กฎลูกโซ่และทฤษฎี divergence จะช่วยให้เขียนสมการ (8) ใหม่ได้ดังนี้

$$\int_{\Omega_s} \left(w \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - w Q \right) d\Omega - \int_{\Gamma_s} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} I_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} I_y \right) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

เมื่อ Γ_s หมายถึงขอบเขตของโดเมนย่อย Ω_s บริเวณที่ใกล้ขอบเขตของโดเมนใหญ่มีตัดกันระหว่าง ขอบเขตโดเมนย่อยและโดเมนใหญ่เกิดเป็น ขอบเขตภายในโดเมนใหญ่ Γ_{sI} และขอบเขตอีกสามส่วน ได้แก่ Γ_{s1} , Γ_{s2} และ Γ_{s3} แต่ในบริเวณที่อยู่ภายในโดเมนใหญ่จะไม่มีการตัดกันของขอบเขตเกิดขึ้น ดังนั้น $\Gamma_{sI} = \Gamma_s$ หลังจากแทนสมการที่ (1c) และ (1d) ลงในสมการที่ (9) พบว่าพจน์ที่สองของสมการที่ (9) เปลี่ยนไปเป็น

$$\int_{\Gamma_s} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} I_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} I_y \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_{sI}} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} I_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} I_y \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{s1}} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} I_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} I_y \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{s2}} w \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_{s3}} w h (T_\infty - T) d\Gamma \quad (10)$$

การเลือกฟังก์ชันทดสอบ w ที่มีค่าเป็นศูนย์ตลอดขอบเขต Γ_s ยกเว้นกรณีที่มี Γ_s ตัดกับขอบเขตของโดเมนใหญ่ Γ จะทำให้การคำนวณง่ายขึ้น สมบัตินี้จะคล้าย

กับฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมของวิธี FEM ซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์บริเวณขอบเขตของโดเมนย่อย Ω_s สมการคำนวณของแต่ละจุดบัพ ซึ่งยังไม่ได้มีการระบุค่าอุณหภูมิที่ขอบเขตสามารถเขียนในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$C\dot{T}(t) + K T(t) = P(t) \quad (12)$$

เมื่อ C , K และ P คือเมตริกซ์ของความร้อน เมตริกซ์สภาพการนำความร้อน และเวกเตอร์ภาระความร้อน ตามลำดับ สมการสำหรับเมตริกซ์และเวกเตอร์เหล่านี้คือ

$$C_{ij} = \sum_{i=1}^M \int_{T_{ij}} \rho c w_i \phi_j d\Omega \quad (13a)$$

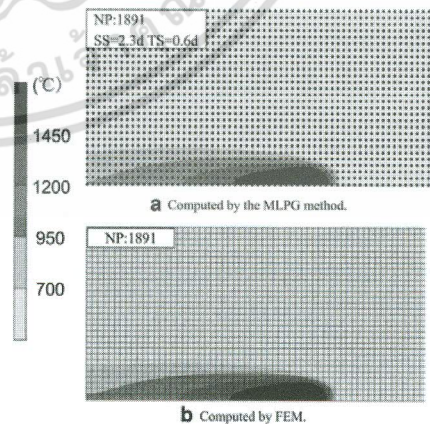
$$K_{ij} = \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_i} \left(k_x \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{s3}} w_i h \phi_j d\Gamma \quad (13b)$$

$$P_i = \int_{\Omega_s} Q d\Omega + \int_{\Gamma_{s2}} w_i \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_{s3}} w_i h T_\infty d\Gamma \quad (13c)$$

เมื่อ M คือจำนวนของ Delaunay triangles ภายในโดเมนย่อย Ω_s ซึ่งมีจุดกึ่งกลางอยู่ที่จุดบัพ x_I สมการเหล่านี้พร้อมที่จะนำไปประกอบเป็น สมการรวมของทุกจุดบัพในโดเมนใหญ่ ขั้นตอนที่เหลืออยู่ของการแก้ปัญหาการนำความร้อนคือ การกำหนดเงื่อนไขของปัญหา และหาคำตอบด้วยวิธีพื้นฐานทางเมตริกซ์

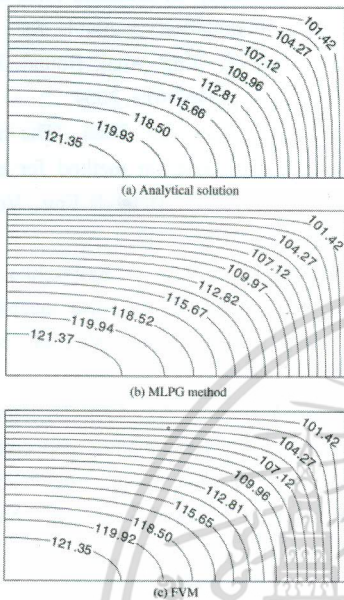
4. ตัวอย่างการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 1 การนำความร้อนสำหรับแหล่งกำเนิดความร้อนที่เคลื่อนที่ได้ (Moving heat source problem)



รูปที่ 2 การเปรียบเทียบผลการจำลองการกระจายอุณหภูมิในชิ้นงานเมื่อเวลาของการเชื่อมผ่านไป 15 นาที [31]

ตัวอย่างที่ 2 การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิผิวรอบนอกเท่ากับ 100°C และมีแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่เท่ากับ 50 W/m^2



รูปที่ 3 อุณหภูมิที่คำนวณจากวิธีต่างๆ ที่สภาวะอยู่ตัว สำหรับหนึ่งในสี่ของแผ่นสี่เหลี่ยม [32]

ตัวอย่างที่ 1 และ 2 แสดงให้เห็นถึงผลการคำนวณของวิธี MLPG ซึ่งใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำ และคำตอบจากวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้โครงตาข่าย

5. สรุป

การวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในของแข็งสองมิติที่สภาวะไม่อยู่ตัวสามารถทำได้ด้วยวิธีไร้โครงตาข่ายชื่อว่า MLPG ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของการสร้างฟังก์ชันรูปร่างด้วยเทคนิค Nearest Neighbour Interpolation (NNI) มีสมบัติของ Kronecker delta ที่จุดบัพใด ๆ ทำให้การบังคับเงื่อนไขอุณหภูมิที่ขอบเขตสำหรับวิธี MLPG ทำได้อย่างง่ายดายเช่นเดียวกับวิธี FEM วิธี MLPG มีความแม่นยำสูงที่สภาวะขึ้นอยู่กับเวลาและไม่ขึ้นอยู่กับเวลา

6. เอกสารอ้างอิง

[1] W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, G.E. Schneider, R.H. Pletcher, Handbook

of Numerical Heat Transfer, John Wiley and Sons, Inc., 1988.

- [2] P.W. Cleary, J.J. Monaghan, "Conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics," *J. Comput. Phys.*, Vol. 144, No. 1., pp. 27-264, 1999.
- [3] J.K. Chen, J.E. Beraun, T.C. Carney, "A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 46, No. 2., pp. 231-252, 1999.
- [4] I.V. Singh, K. Sandeep, R. Prakash, "The element free Galerkin method in three-dimensional steady state heat conduction," *Int. J. Comput. Eng. Sci.*, Vol. 3, No. 3., pp. 291-303, 2002.
- [5] I.V. Singh, "A numerical solution of composite heat transfer problems using meshless method," *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 47, No. 10-11., pp. 2123-2138, 2004.
- [6] A. Singh, I.V. Singh, R. Prakash, "Numerical solution of temperature-dependent thermal conductivity problems using a meshless method," *Numer. Heat Transfer, Part A* Vol. 50, No. 2., pp. 125-145, 2006.
- [7] J. Sladek, V. Sladek, S.N. Atluri, "Meshless local Petrov-Galerkin method for heat conduction problem in an anisotropic medium," *CMES-Comput. Model Eng. Sci.*, Vol. 6., pp. 309-318, 2004.
- [8] Y. Liu, X. Zhang, M.W. Lu, "A meshless method based on least squares approach for steady and unsteady state heat conduction problems," *Numer. Heat Transfer, Part B.*, Vol. 47, No. 3., pp. 257-275, 2005.
- [9] J.Y. Tan, L.H. Liu, B.X. Li, "Least squares collocation meshless approach for coupled radiative and conductive heat transfer," *Numer. Heat Transfer, Part B.*, Vol. 49, No. 2., pp. 179-195, 2006.
- [10] H. Wang, Q.H. Qin, Y.L. Kang, "A meshless model for transient heat conduction in functionally graded materials," *Comput. Mech.*, Vol. 38, No. 1., pp. 51-60, 2006.
- [11] H. Wang, Q.H. Qin, Y.L. Kang, "A new meshless method for steady-state heat conduction problems in anisotropic and

- inhomogeneous media," *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 74, No. 8., pp. 563-579, 2005.
- [12] X.W. Gao, "A meshless BEM for isotropic heat conduction problems with heat generation and spatially varying conductivity," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 66, No. 9., pp. 1131-1141, 2006.
- [13] H. Sadat, N. Dubus, L. Gbahoue, T. Sophy, "On the solution of heterogeneous heat conduction problems by a diffuse approximation meshless method," *Numer. Heat Transfer.*, Vol. 50, No. 6., pp. 491-498, 2006.
- [14] X.H. Wu, S.P. Shen, W.Q. Tao, "Meshless local Petrov-Galerkin collocation method for two-dimensional heat conduction problems," *CMES-Comput. Model Eng. Sci.*, Vol. 22, No. 1., pp. 65-76, 2007.
- [15] T. Belytschko, Y. Krogauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl, "Meshless methods: an overview and recent developments," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 139, No. 1-4., pp. 3-47, 1996.
- [16] G.R. Liu, Y.T. Gu, "An introduction to Meshfree Methods and Their Programming," Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2005.
- [17] S.N. Atluri, T. Zhu, "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics," *Comput. Mech.*, Vol. 22, No.2., pp. 17-27, 1998.
- [18] S.Y. Long, S.N. Atluri, "A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate," *CMES-Comput. Model Eng. Sci.*, Vol. 3, No. 1., pp. 53-63, 2002.
- [19] J. Sladek, V. Sladek, P. Sulek, P.H. Wen, S.N. Atluri, "Thermal analysis of Reissner-Mindlin shallow shells with FGM properties by the MLPG method," *CMES-Comput. Model Eng. Sci.*, Vol. 30, No. 2., pp.77-79, 2008.
- [20] X.H. Wu, W.Q. Tao, S.P. Shen, X.W. Zhu, "A stabilized MLPG method for steady state incompressible flow simulation," *J. Comp. Phys.*, Vol. 229, No. 22., pp.8564-8577, 2010.
- [21] G.R. Liu, Y.T. Gu, "A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids," *Struct. Eng. Mech.*, Vol. 2, No. 2., pp.221-236, 2001.
- [22] Y.T. Gu, Q.X. Wang, K.Y. Lam, "A meshless local Kriging method for large deformation analyses," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 196, No. 9-12., pp.1673-1684, 2007.
- [23] Y.C. Cai, H.H. Zhu, "A meshless local natural neighbour interpolation method for stress analysis of solids," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 28, No. 6., pp.607-613, 2004.
- [24] K. Wang, S.J. Zhou, G.J. Shan, "The natural neighbour Petrov-Galerkin method for elastostatics," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 63, No. 8., pp.1126-1145, 2005.
- [25] N. Sukumar, B. Moran, T. Belytschko, "The natural element method in solid mechanics," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 43, No. 5., pp.839-887, 1998.
- [26] S.S. Chen, Y.H. Liu, Z.Z. Cen, "A combined approach of the MLPG method and nonlinear programming for lower-bound limit analysis," *CMES-Comput. Model Eng. Sci.*, No. 1., pp.39-55, 2008.
- [27] Y.H. Liu, S.S. Chen, J. Li, Z.Z. Cen, "A meshless local natural neighbour interpolation method applied to structural dynamics analysis," *CMES-Comput. Model Eng. Sci.*, Vol. 31, No. 3., pp.145-156, 2008.
- [28] H.H. Zhu, W.J. Liu, Y.C. Cai, Y.B. Miao, "A meshless natural neighbour interpolation method for two-dimension incompressible large deformation analysis," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 31, No.10., pp.856-862, 2007.
- [29] K.H. Huebner, E.A. Thornton, T.G. Byrom, *The Finite Element Method for Engineers*, 1995.
- [30] P.J. Green, R.R. Sibson, *Computing Dirichlet tessellations in the plane*, *Comput. J.*, Vol. 21, No.2., pp.168-173, 1978.
- [31] M. Shibahara, S.N. Atluri, *The meshless local Petrov-Galerkin method for the analysis of heat conduction due to a moving heat source, in welding*, *Int. J. Thermal Sci.*, Vol. 50, No. 6., pp.984-992, 2011.
- [32] X.H.,Wu, W.Q., Tao, *Meshless method based on the local weak-forms for steady-state heat conduction problems*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 51, No. 11-12., pp.3103-3112, 2008.