



รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การคำนวณสมการสโตกส์บริงแมนในสามมิติโดยวิธีการมิกซ์ไฟไนท์

เอลเลเมนต์เมททอด

Computation of Three-Dimensional Stokes-Brinkman Equations
using a Mixed Finite Element Method

นางสาวกัญญ์ณัฏฐ์ แจ่มศรี

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2557

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การคำนวณสมการสโตกส์บริงแมนในสามมิติโดยวิธีการมิกซ์ไฟไนท์

เอลเลนเมนท์เมททอด

Computation of Three-Dimensional Stokes-Brinkman Equations
using a Mixed Finite Element Method

นางสาวกัญญ์ณภรณ์ แจ่มศรี

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2557

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

12696523

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อโครงการ การคำนวณสมการสโตกส์บริงแมนในสามมิติโดยวิธีการมิกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์เมททอด
แหล่งทุน กองทุนสนับสนุนงานวิจัยเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2557
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2557 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 50,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ ตุลาคม 2556 ถึง กันยายน 2557
ชื่อ-สกุล นางสาวกัญญณ์ณัฏฐ์ แจ่มศรี สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้มีการพัฒนาแบบจำลองแมโครสเกลทางด้านคณิตศาสตร์ (mathematical macroscale model) สำหรับของไหลที่ไหลผ่านโดเมนที่มีรูพรุน (porous medium) และของเหลวอิสระ (free-fluid) ที่อยู่ติดกันกับโดเมนที่มีรูพรุนนั้น โดยปกติแล้วน้ำไหลผ่านโดเมนต่างๆ ได้อันเนื่องมาจากความดันในโดเมนมีค่าไม่เท่ากัน สำหรับงานวิจัยนี้จะขอเสนอการเคลื่อนที่ของของไหลอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของของแข็ง ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ได้พัฒนามาจากทฤษฎีบทไฮบริดมิชเจอร์ทีโอรี (Hybrid Mixture Theory) และวิธีการนอนโดเมนชั้นไลเซชัน (nondimensionalization) ทำให้ได้สมการบริงแมน (Brinkman equation) ซึ่งจะถูกนำมาใช้ในการคำนวณหาความเร็วและความดันของของไหลในชั้นโดเมนที่มีรูพรุนแต่เนื่องจากว่าของไหลไหลช้าในบริเวณของไหลอิสระเรานำสมการสโตกส์ (Stokes equation) มาคำนวณหาผลเฉลยในโดเมนของของไหลอิสระ ซึ่งทั้งสองสมการเรียกรวมกันว่าสมการสโตกส์บริงแมน (Stokes-Brinkman equations) นอกจากนี้ผู้วิจัยได้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการสโตกส์บริงแมนโดยใช้วิธีการมิกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์ (mixed finite element method) แบบจำลองนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้จำลองการไหลของของไหลอันเนื่องมาจากการพัดโบกของขนสัตว์หรือขนเส้นเล็กๆ ได้

คำสำคัญ: วิธีการมิกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์, การกำหนดที่แตกต่างของสมการสโตกส์บริงแมน, ของแข็งที่เคลื่อนที่เองได้

Research Title: Computation of Three-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method

Researcher: Dr.Kannanut Chamsri

Faculty: Science

Department: Mathematics

ABSTRACT

A macroscale model is developed to model a porous medium and adjacent free fluid. Typically, fluid flows through a porous medium by a pressure gradient. In this problem, we introduce the model that fluid moves by the movement of solid phases. Hybrid mixture theory (HMT) and nondimensionalization are used to obtain the macroscale generalized Darcy's law called the Brinkman equation. This generalization helps to match the tangential stress acting on the fluid at the free-fluid/porous-medium interface. We apply the Stokes equation for incompressible slow flow in the adjacent free fluid domain. A variational formulation of the Stokes-Brinkman equations is provided by using a mixed finite element method for n-dimensional domain. Applications of this model include modeling fluid flow through moving solid phases such as animal hair and hairlike structures.

Keywords: Mixed finite element method, Variational formulation of Stokes-Brinkman equations, Moving solid phase

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเรื่อง การคำนวณสมการสโตกส์บริงแมนในสามมิติโดยวิธีการมิกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์เมททอด ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากกองทุนสนับสนุนงานวิจัยเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณพ.ศ.2557 ผู้วิจัยขอขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ รวมถึงคุณบิดา มารดา และผู้ที่มีส่วนร่วมให้งานชิ้นนี้สำเร็จทุกท่าน

ดร.กัญญ์ณัฐ แจ่มศรี



สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญ (ต่อ).....	V
สารบัญภาพ.....	VI
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	5
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	5
1.4 วิธีดำเนินการวิจัย.....	5
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับของโครงการวิจัย.....	6
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	7
2.1.1 วิธีมีกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์.....	7
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	13
3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	13
3.2 วิธีการดำเนินการ.....	15

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 สมการสโตกบริงแมนและผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	18
4.1 สมการบริงแมนแมคโครสเกล.....	18
4.2 รูปแบบไม่ต่อเนื่องของสมการสโตกบริงแมน.....	19
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	25
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	28
5.1 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	28
บทที่ 6 สรุปผลผลิตงานวิจัย.....	29
6.1 สรุปผลผลิตงานวิจัย.....	29
บรรณานุกรม.....	30
ภาคผนวก.....	34
ผลงานวิจัย.....	35
สรุปการใช้จ่ายเงิน.....	42
ประวัตินักวิจัย.....	43

สารบัญภาพ

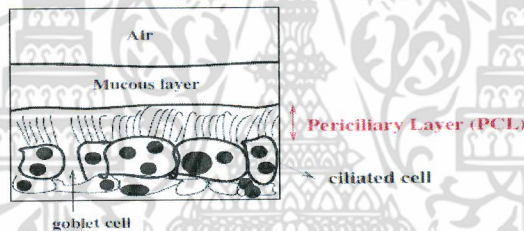
ภาพที่	หน้า
1.1 รูปภาพแสดงส่วนหนึ่งของหลอดลม.....	1
1.2 รูปภาพแสดงชั้นพีซีเอลและชั้นเมือก.....	3
1.3 ตัวอย่างเซลล์โตเมนของปัญหา.....	4
1.4 รูปภาพแสดง มุม θ ระหว่างซีเลียกับพื้นราบ.....	4
3.1 รูปภาพแสดงความเร็วคลื่นไกล.....	14
3.2 รูปภาพแสดงโตเมนแบบสามมิติ.....	15
3.3 รูปภาพแสดงโตเมนรูปกล่องแบบสามมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เปิดจีเอ็มเอสเอช.....	17
3.4 รูปภาพแสดงโตเมนรูปกล่องแบบสามมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เปิดเน็ตเจิน.....	17
4.1 รูปภาพแสดงโตเมนที่ใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	25
4.2 รูปภาพแสดงถึงทิศทางการไหลของของไหล เมื่อความเร็วของของแข็งเป็น 0.....	26
4.3 รูปภาพแสดงถึงทิศทางการไหลของของไหล เมื่อความเร็วของของแข็งเป็น 1.....	26

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในร่างกายของมนุษย์มีขนเส้นเล็กๆ ที่เรียกว่าซีเลีย (cilia) เรียงอยู่บนพื้นผิวของเซลล์เนื้อเยื่อบุผิวมีอยู่ทั่วไปในร่างกายของคนเรา มีการพัดโบกแบบเป็นจังหวะ ซึ่งการพัดโบกนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ของของเหลวที่อยู่บริเวณนั้น ในงานวิจัยนี้มุ่งศึกษาการเคลื่อนที่ของของเหลวที่อยู่บนแนวเซลล์เนื้อเยื่อบุผิวอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของซีเลียในปอด การเคลื่อนที่ของซีเลียมีประโยชน์ในการขับสิ่งแปลกปลอมที่เข้าสู่ร่างกาย ทางระบบทางเดินหายใจออกไปภาพที่ 1.1 เป็นรูปภาพแสดงส่วนหนึ่งของหลอดลมที่อยู่ในระบบทางเดินหายใจ



ภาพที่ 1.1 รูปภาพแสดงส่วนหนึ่งของหลอดลมที่ประกอบด้วยโกเบลทเซลล์ (goblet cells)

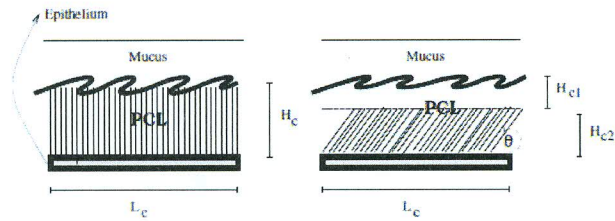
ซีเลียเต็ดเซลล์ (ciliated cells) พีซีเอล (PCL) และชั้นเมือก (mucous layer) ที่อยู่บนเนื้อเยื่อบุผิว

ซึ่งประกอบด้วยโกเบลทเซลล์ (goblet cells) และซีเลียเต็ดเซลล์ (ciliated cells) ในโกเบลทเซลล์บรรจุเม็ดแกรนูล (granule) มีหน้าที่หลั่งเมือกออกมาเมื่อมีสิ่งแปลกปลอมเข้าสู่ร่างกาย หลังจากเมือกจับสิ่งแปลกปลอมแล้วจะไปรวมตัวกันอยู่ในชั้นที่เรียกว่า ชั้นเมือกซึ่งชั้นเมือกที่มีความหนืดสูง ชั้นเมือกอยู่ข้างบนของชั้นเพอร์ริซีเลียรี (periciliary) หรือ พีซีเอล (PCL) [26,38] ซึ่งเป็นชั้นที่ประกอบด้วยซีเลียและของเหลวที่มีความหนืดต่ำ และถัดจากชั้นเมือกขึ้นไปข้างบนเป็นชั้นอากาศที่เข้าและออกจากร่างกาย เพื่อป้องกันไม่ให้เมือกสะสมในหลอดลม และในปอดมากจนเกินไป ซีเลียจะทำหน้าที่พัดโบกไปมาเพื่อขับ

เมื่อกออกจากร่างกาย ซีเลียมีการเคลื่อนที่สองแบบ คือ แบบฟอร์เวิร์ดสโตรก (forward stroke) และแบ็กเวิร์ดสโตรก (back-ward stroke) สำหรับฟอร์เวิร์ดสโตรกซีเลียจะโน้มไปข้างหน้า เส้นซีเลียจะตั้งตรงโดยที่ปลายของซีเลียได้แทรกเข้าไปในชั้นเมือกประมาณหนึ่งถึงสองไมโครมิเตอร์ (micrometer) หลังจากนั้นเคลื่อนตัวอย่างเร็วเพื่อช่วยในการขับเคลื่อนเมือกออกจากร่างกาย สำหรับแบ็กเวิร์ดสโตรกเมื่อปลายของซีเลียยังใกล้กับเซลล์เนื้อเยื่อบุผิว การเคลื่อนที่ของซีเลียยังช้าลง หลังจากนั้นได้หมุนกลับไปจุดเริ่มต้นเดิมก่อนที่จะเคลื่อนที่แบบฟอร์เวิร์ดสโตรกอีกครั้ง กูรอน และเลวิท เกอร์วิช (Gueron and Levit-Gurevich)[21] ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของซีเลีย งานที่ซีเลียทำเนื่องจากแบ็กเวิร์ดสโตรกน้อยกว่างานที่ซีเลียทำเนื่องจากฟอร์เวิร์ดสโตรกห้าเท่า

กระบวนการที่เมือกไปจับสิ่งแปลกปลอมที่เข้าสู่ร่างกายเรียกว่า มิวโคซีเลียรีเคลียร์แรน (mucociliary clearance) หรือมิวโคซีเลียรีทรานสปอร์ต (muco-ciliary transport)[28,31,37,40] ถ้าระบบมิวโคซีเลียรีเคลียร์แรนถูกทำลาย จะทำให้เมือกในร่างกายมีไม่พอ หรือไม่ก็มากเกินไป[35] เช่น ถ้าต่อมที่ผลิตเมือกทำงานไม่ปกติหรือถูกทำลาย ทำให้เมือกสะสมอยู่ในปอดซึ่งยากต่อการหายใจ ซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดโรคเกี่ยวกับระบบทางเดินหายใจขึ้น เช่น โรคหอบหืด นอกจากนี้ ยังมีโรคเกี่ยวกับปอดอื่นๆ อีกมากมายที่เกิดจากการที่ร่างกายผลิตเมือกออกมามากผิดปกติซึ่งจะไปกีดขวางทางเดินอากาศของระบบทางเดินหายใจ และยังมีผลต่อการเคลื่อนที่ของซีเลีย โรคดังกล่าวได้แก่ ซิสติกไฟโบรซิส (Cystic Fibrosis (CF)) โครนิคบรอนไคติส (Chronic Bronchitis (CB)) ไพรมารีซีเลียรีดิสคินนิเซีย (Primary Ciliary Dyskinesia (PCD)) เป็นต้น มีผลวิจัยออกมาว่า การสูบบุหรี่ทำให้มีผู้เสียชีวิตเนื่องจากโรค โครนิคบรอนไคติส ประมาณ 85-90% ส่วนโรคไพรมารีซีเลียรีดิสคินนิเซีย มีผลกระทบต่อการทำงานของซีเลียมาก เนื่องจากซีเลียถูกทำให้ผิดปกติไปและไม่สามารถเคลื่อนไหวได้ ดังนั้นการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นพีซีแอลจึงมีส่วนสำคัญที่จะช่วยในการรักษาโรคที่เกี่ยวกับปอดเหล่านี้

ในโครงการนี้ ผู้วิจัยพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เทคนิคอัปสเกล (upscaling technique) เป็นวิธีการ ที่ใช้ในการเปลี่ยนสมการที่ได้มาจากการสเกลเล็กๆ มาเป็นสมการที่มีสเกลใหญ่ขึ้น ซึ่งเป็นวิธีการที่แทนที่ผู้วิจัยจะศึกษาการเคลื่อนที่ของของเหลวเนื่องจากซีเลียเพียงเส้นเดียว ผู้วิจัยสามารถศึกษาการเคลื่อนที่ของของเหลวอันเนื่องจากซีเลียหลายๆ เส้น



ภาพที่ 1.2 รูปภาพแสดงชั้นพีซีแอลและชั้นเมือกโดยที่ $\Omega = H_c \times L_c$ เป็นโดเมนของปัญหาที่สนใจ และ $\Omega_1 = L_c \times H_{c1}$ และ $\Omega_2 = L_c \times H_{c2}$ คือโดเมนย่อยของโดเมน Ω .

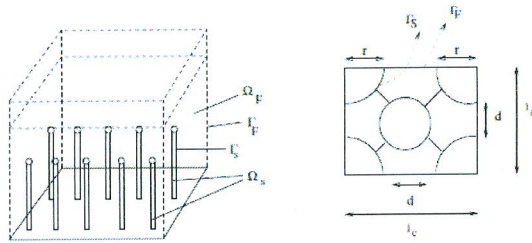
ภาพที่ 1.2 เป็นรูปภาพแสดงชั้นพีซีแอลและชั้นเมือกของโดเมน Ω แบบสองมิติของปัญหาที่ผู้วิจัยสนใจศึกษาโดยผู้วิจัยมองโดเมนที่จะศึกษาเป็นตัวกลางที่มีรูพรุน (porous medium) เพราะโดเมน Ω นั้นประกอบด้วยทั้งของเหลวพีซีแอลที่มีความหนืดต่ำ และของแข็งคือซีเลียที่มีลักษณะคล้ายรูปทรงกระบอกที่สามารถเคลื่อนที่ได้เองเรียงตัวกัน ภาพซ้ายของภาพที่ 1.2 แสดงให้เห็นว่าซีเลียตั้งฉากกับพื้นราบ ส่วนภาพขวา แสดงว่าซีเลียทำมุม θ กับพื้นราบ โดยที่ $0 < \theta < \pi/2$ ความยาวและความสูงของโดเมน Ω คือ L_c และ H_c ตามลำดับ นอกจากนี้กำหนดให้ H_{c2} คือความสูงของซีเลีย และ $H_{c1} = H_c - H_{c2}$ ดังนั้น ผู้วิจัยนิยามโดเมนย่อย Ω_1 และ Ω_2 ดังนี้

$$\Omega_1 = L_c \times H_{c1} \quad (1.1)$$

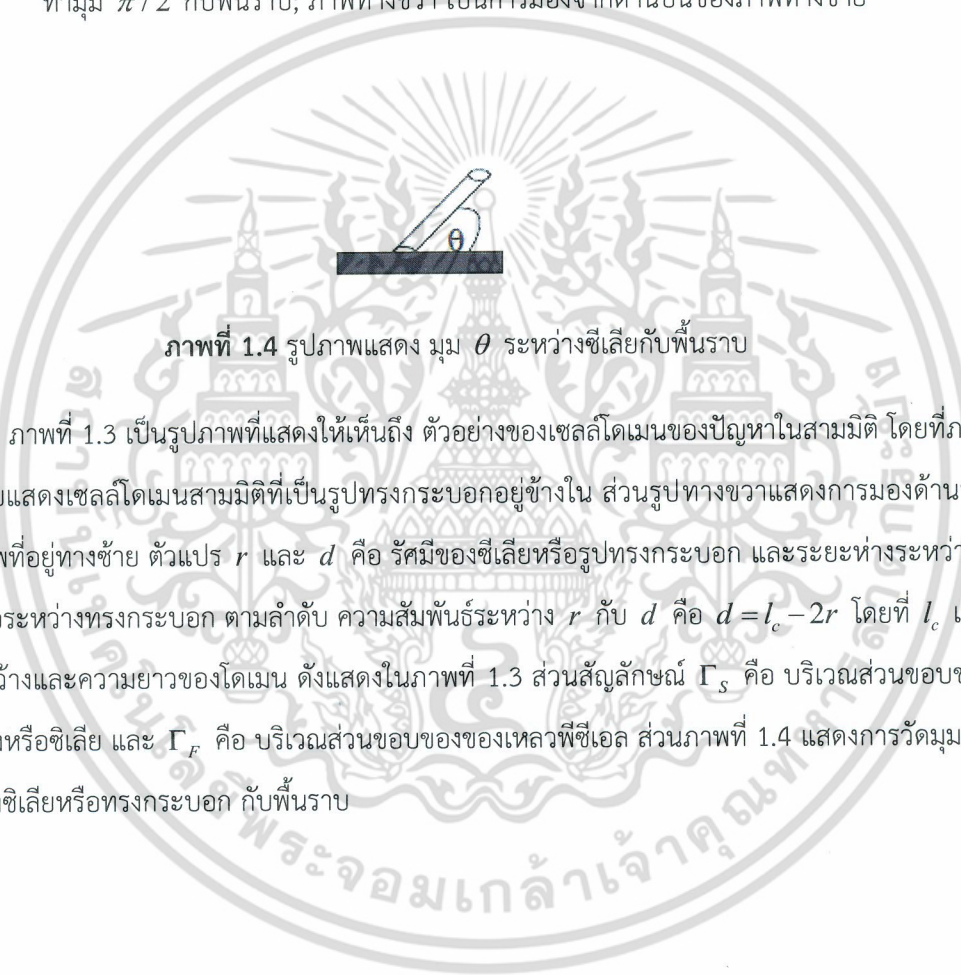
เป็นโดเมนย่อยที่มีของเหลวที่มีความหนืดต่ำโดยที่ไม่มีซีเลียในโดเมนนี้ และ

$$\Omega_2 = L_c \times H_{c2} \quad (1.2)$$

เป็นโดเมนย่อยที่มีซีเลียและของเหลวพีซีแอลที่มีความหนืดต่ำ สังเกตว่าโดเมนย่อย Ω_1 ไม่ใช่พอร์สมิเดียม แต่โดเมนย่อย Ω_2 เป็นพอร์สมิเดียมเพราะมีของแข็งอยู่ในนี้



ภาพที่ 1.3 ตัวอย่างเซลล์โดเมนของปัญหาที่ผู้วิจัยสนใจที่มีซีเลียซึ่งเป็นรูปทรงกระบอกบรรจุอยู่ข้างใน
ทำมุม $\pi/2$ กับพื้นราบ; ภาพทางขวา เป็นการมองจากด้านบนของภาพทางซ้าย



ภาพที่ 1.4 รูปภาพแสดง มุม θ ระหว่างซีเลียกับพื้นราบ

ภาพที่ 1.3 เป็นรูปภาพที่แสดงให้เห็นถึง ตัวอย่างของเซลล์โดเมนของปัญหาในสามมิติ โดยที่ภาพทางซ้ายแสดงเซลล์โดเมนสามมิติที่เป็นรูปทรงกระบอกอยู่ข้างใน ส่วนรูปทางขวาแสดงการมองด้านบนของภาพที่อยู่ทางซ้าย ตัวแปร r และ d คือ รัศมีของซีเลียหรือรูปทรงกระบอก และระยะห่างระหว่างซีเลียหรือระหว่างทรงกระบอก ตามลำดับ ความสัมพันธ์ระหว่าง r กับ d คือ $d = l_c - 2r$ โดยที่ l_c เป็นความกว้างและความยาวของโดเมน ดังแสดงในภาพที่ 1.3 ส่วนสัญลักษณ์ Γ_S คือ บริเวณส่วนขอบของของแข็งหรือซีเลีย และ Γ_F คือ บริเวณส่วนขอบของของเหลวพีซีเอล ส่วนภาพที่ 1.4 แสดงการวัดมุม θ ระหว่างซีเลียหรือทรงกระบอก กับพื้นราบ

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ต้องการหาความเร็วของของเหลวฟิซีเอล เพื่อช่วยในการหาค่าเงื่อนไขขอบ (boundary condition) ในงานวิจัยระดับสูง ซึ่งจะช่วยในการหาความเร็วของเมือกในปอดได้ เพื่อประโยชน์ในทางการแพทย์ต่อไป

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัยนี้ผู้วิจัยจะทำการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบสามมิติบนเซลล์โดเมนเป็นคาบ (periodic domain) ในส่วนของฟิซีเอล และหาความเร็วของของเหลวฟิซีเอลอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของซิเลีย

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยได้คิดค้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อให้เหมาะสมกับปัญหาที่ต้องการศึกษาดังได้กล่าวไว้แล้วในบทนำ โดยมีวิธีดำเนินการวิจัยดังต่อไปนี้

1. ใช้วิธีการมิกซ์ไฟไนต์เอลเมนต์ในการหา variational formulation ของสมการสโตกบริงแมน
2. แบ่งโดเมนออกเป็นส่วนเล็กๆ หลายๆ ส่วน เพื่อช่วยในการคำนวณหาผลเฉลยแบบการประมาณค่าโดยใช้วิธีมิกซ์ไฟไนต์เอลเมนต์ (mixed finite element method) ซึ่งโดเมนแบบสามมิติผู้วิจัยจะใช้ซอฟต์แวร์เปิด ที่เรียกว่า เน็ตเจน (Nergen)[35] หรือจีเอ็มเอสเอส (gmsh)[19] ซึ่งซอฟต์แวร์ทั้งสองเรียกอีกอย่างว่า ตัวก่อกำเนิดโครงร่างตาข่าย (mesh generator)
3. ใช้วิธีการมิกซ์ไฟไนต์เอลเมนต์ หาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดเมนที่จะใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาเป็นโดเมนแบบสามมิติ ใช้สมการสโตกในการหาความเร็วของของเหลวฟิซีเอล ขณะที่โดเมนที่มีซิเลีย ใช้สมการบริงแมนในการหาผลเฉลย

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับของโครงการวิจัย

1. ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับปัญหาจริงมากขึ้นที่ยังไม่มีนักวิจัยท่านใดได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาในลักษณะเช่นนี้ในสามมิติมาก่อน
2. ได้องค์ความรู้เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยสองโดเมนที่มีลักษณะที่แตกต่างกัน
3. ได้ซอฟต์แวร์ที่สามารถพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่หามาได้ให้สอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงของปัญหาอื่นๆ ขึ้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เมื่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้คิดค้นขึ้นมาใหม่ เพื่อให้เหมาะสมกับปัญหาที่ศึกษา และใช้วิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข (numerical method) หาผลเฉลยนั้น คำถามส่วนใหญ่มักจะเกิดขึ้นว่า ระบบสมการและค่าขอบเหล่านั้นจะสามารถหาผลเฉลยได้หรือไม่ และวิธีการประมาณค่าผลเฉลยนั้นจะได้ผลเฉลยที่ถูกต้องมาน้อยเพียงใด สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยใช้สมการสโตกบริงแมน ซึ่งได้พิสูจน์ไว้แล้วในงานวิจัยก่อนหน้า [12] ว่าเป็นสมการที่มีคำตอบ และคำตอบที่ได้มีเพียงคำตอบเดียว (unique solution) นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้สรุปวิธีการประมาณค่าหาผลเฉลยแบบมิกซ์ไฟไนท์เอลเมนต์ (mixed finite element method) ดังต่อไปนี้

2.1.1 วิธีมิกซ์ไฟไนท์เอลเมนต์ (mixed finite element method)

ผู้วิจัยได้สรุปวิธีการมิกซ์ไฟไนท์เอลเมนต์และได้เขียนไว้สำหรับผู้สนใจแบบคร่าวๆ ดังต่อไปนี้ โดยเริ่มต้นจากสมการนาเวียร์สโตก (Navier-Stokes equations) สำหรับโดเมนแบบสามมิติ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho_0 g_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

สำหรับ $j = 1, 2, 3$ โดยการซ้ำกันของ i และ j คือการบวกกัน เช่น $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ โดยที่

ρ คือความหนาแน่น μ เป็นความหนืด u_i และ P เป็นเวกเตอร์ความเร็วและความดัน ตามลำดับ และ g_i คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลก ใน f_1 คือ ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ (2.1) และ f_2 คือทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ (2.2) คุณสมบัติสมการ (2.1) ด้วยฟังก์ชันถ่วง Q และคุณสมบัติสมการ (2.2) ด้วยฟังก์ชันถ่วง w แล้วทำการปริพันธ์บนโดเมนเล็กๆ Ω^e ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_{\Omega^e} Q f_1 dx = 0 \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_2 dx = 0 \quad (2.4)$$

ใช้วิธีการปริพันธ์ที่ละส่วนกับสมการ (2.4) และแทนค่า f_1 ด้วย $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ ทำให้ได้ว่า

$$\int_{\Omega^e} Q \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dx = 0 \quad (2.6)$$

$$\int_{\Omega^e} \left[\rho_0 \left(w_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + w_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(-P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) - \rho_0 w_i g_i \right] dx - \int_{\Gamma^e} w_i T_i ds = 0 \quad (2.7)$$

โดยที่ T_i เป็นฟังก์ชันที่ขอบ

ให้ตัวแปรอิสระ u_i และ P ถูกประมาณค่าในรูปแบบต่อไปนี้

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M \psi_m(\mathbf{x}) u_i^m(t) = \Psi^T u_i \quad (2.8)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^L \phi_l(\mathbf{x}) P_l(t) = \Phi^T P \quad (2.9)$$

โดยที่ Ψ และ Φ เป็นเวกเตอร์ของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape functions) ψ_m และ ϕ_l ตามลำดับ แทนค่าฟังก์ชันถ่วง (Q, \mathbf{w}) ในสมการ (2.6) และ (2.7) ด้วย

$$Q \approx \phi_l, \mathbf{w} \approx \psi_m \quad (2.10)$$

ทำให้ได้สมการดังต่อไปนี้

$$- \left[\int_{\Omega^e} \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dx \right] u_i = 0 \quad (2.11)$$

และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\Omega^e} \rho_0 \Psi \Psi^T dx \right] \dot{u}_i + \left[\int_{\Omega^e} \rho_0 \Psi (\Psi^T u_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx \right] u_i + \left[\int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx \right] u_i \\
& + \left[\int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dx \right] u_j - \left[\int_{\Omega^e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T dx \right] P \\
& = \int_{\Omega^e} [\rho_0 \Psi f_i dx] + \left\{ \oint_{\Gamma^e} T_i \Psi ds \right\}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

โดยที่ $\dot{u}_i = \frac{du}{dt}$ สัญลักษณ์ $(\cdot)^T$ คือทรานสโพส (Transpose) ของเมทริกซ์ สมการข้างสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ในรูปแบบเมตริกซ์ ได้ดังนี้

สมการความต่อเนื่อง

$$-Q^T u = 0 \tag{2.13}$$

และสมการโมเมนตัม

$$M \dot{u} + C(u)u + Ku - QP = F \tag{2.14}$$

จุดด้านบนเป็นการแสดงอนุพันธ์เทียบกับเวลาและ $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$

สำหรับกรณี 2 มิติ สมการ (2.13) และ สมการ (2.14) เขียนในรูปแบบเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C(u) & 0 & 0 \\ 0 & C(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ P \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 2K_{11} + K_{22} & K_{21} & -Q_1 \\ K_{12} & K_{11} + 2K_{22} & -Q_2 \\ -Q_1^T & -Q_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ที่แสดงในสมการ (2.15) นิยามได้ดังนี้ สำหรับ $i, j = \{1, 2\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\Omega^e} \rho_0 \Psi \Psi^T dx, & C(u) &= \int_{\Omega^e} \rho_0 \Psi (\Psi^T u_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx, \\
K_{ij} &= \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx, & Q_i &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T dx \\
F_i &= \int_{\Omega^e} \rho_0 \Psi f_i dx + \oint_{\Gamma^e} \Psi T_i ds
\end{aligned} \tag{2.16}$$

สังเกตว่าสมการ (2.13) และ (2.14) สามารถเขียนรวมกันได้อีกดังนี้

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{C}(u) + \hat{K}(u) & -Q \\ -Q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\hat{M} &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \hat{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \hat{C}(u) = \begin{bmatrix} C(u) & 0 \\ 0 & C(u) \end{bmatrix}, \\
\hat{K}(u) &= \begin{bmatrix} 2K_{11} + K_{22} & K_{21} \\ K_{12} & K_{11+2} + K_{22} \end{bmatrix}, \hat{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\bar{M}\bar{U} + \bar{K}\bar{U} = \bar{F} \tag{2.19}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \{u_1, u_2, u_3, P\}^T, \bar{M} = \begin{bmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} \hat{C}(u) + \hat{K}(u) & -Q \\ -Q^T & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{F} &= \begin{Bmatrix} \hat{F} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มีงานวิจัยหลากหลายได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของซิเลียและของไหลที่อยู่ในปอดมนุษย์ เช่น จอห์นเบลค (John Blake) ทางการเคลื่อนที่และความเร็วของเส้นซิเลียเส้นเดียวในสิ่งมีชีวิตเล็กๆ [5, 6, 7, 8, 9] นอกจากนี้จอห์นเบลคยังหาความเร็วสูงสุดของซิเลียในปอดแต่เป็นการหาความเร็วของซิเลียเพียงเส้นเดียวโดยได้ตั้งสมมติฐานขึ้นมามากมายเพื่อช่วยในการหาคำตอบทางทฤษฎี ซึ่งยังไม่ตรงกับปัญหาจริงมากนัก [6, 9] สำหรับแถวลำดับของซิเลีย (array of cilia) หรือ ซิเลียหลายๆ เส้น จอห์นเบลคได้หาค่าเฉลี่ยของความเร็วของของเหลวพีซีเอลซึ่งเขาได้สมมติว่าเท่ากับความเร็วเฉลี่ยของซิเลีย ซึ่งยังไม่มีทฤษฎี หรืองานวิจัยใดสามารถรองรับสมมติฐานนี้ นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยอื่นๆ ที่ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของเมือกในปอดโดยวิธีการทางทฤษฎี เช่น บาร์ตันและเรย์เนอร์ (Barton and Raynor)[2] ศึกษาการไหลของเมือกเนื่องจากการเคลื่อนที่ของซิเลียเพียงเส้นเดียว ไลรอน (Liron)[27] ใช้กรีนฟังก์ชัน (Green's function) ทางการไหลของของเหลวอันเนื่องมาจากซิเลีย ถึงอย่างไรก็ตามการหาความเร็วของของเหลวในชั้นพีซีเอลและชั้นเมือกโดยวิธีการทางทฤษฎียังไม่เพียงพอเนื่องจากสมการปริพันธ์ (integral equations) ที่ใช้ในการกำหนดการกระจายของแรง (force) ที่เกิดจากซิเลียแต่ละเส้น ยังไม่สามารถถูกกำหนดหรือให้ค่าที่เป็นหนึ่งเดียวได้ (unique force)

สำหรับการทดลองเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของซิเลีย ได้เป็นที่สนใจของนักวิจัยมากมาย เช่น ราบินอวิทช์ (Rabinovitch)[24] ประยุกต์ใช้การฉายแสงเพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของซิเลีย แต่ไม่ได้หาความเร็วของของเหลวในชั้นพีซีเอล ในขณะที่ฟอรัมเมอร์และสตีล (Frommer and Steele)[19] ได้สร้างแบบจำลองขึ้นโดยวางซิเลียแต่ละเส้นเป็นแถวๆ ซึ่งเป็นซิเลียที่ได้มาจากสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม แล้วใช้ความดันช่วยในการเคลื่อนที่ของของเหลวผ่านชั้นพีซีเอลแล้วคำนวณหาความเร็วของของเหลวพีซีเอล ถึงอย่างไรก็ตามการทดลองยังใช้ความดันช่วยในการเคลื่อนที่ซึ่งไม่ใช่การเคลื่อนที่ของซิเลียเอง

งานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาความเร็วของของเหลวในชั้นพีซีแอล ได้มีนักวิจัยหลายท่านสนใจศึกษาว่าเมื่อใดควรใช้ดาร์ซีลอร์ และเมื่อใดควรให้สมการบริงแมน ควบคู่กับสมการอื่นๆ เช่น เซน กันซ์เบอร์เกอร์ และแวง (Chen, Gunzburger and Wang)[16] เปรียบเทียบสโตก-ดาร์ซี (Stokes-Darcy) กับสโตกบริงแมน (Stokes-Brinkman) โดยใช้ค่าขอบที่มีค่าเท่ากัน ซึ่งเซนและทีมงานสรุปว่า การใช้สโตก-ดาร์ซี ควบคู่กับค่าขอบบีเวอร์-โจเซฟ (Beavers-Joseph) ให้ค่าความถูกต้องมากกว่าแบบอื่น ถึงอย่างไรก็ตามการใช้ดาร์ซีลอร์ไม่ทำให้เกิดความคล่องตัวกับการเปลี่ยนแปลงค่าขอบ ซึ่งได้มีงานวิจัยเกี่ยวกับค่าขอบระหว่างสมการสโตก-บริงแมน และสมการสโตก-ดาร์ซี ได้ออกมามากมาย [1, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 29, 30]



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

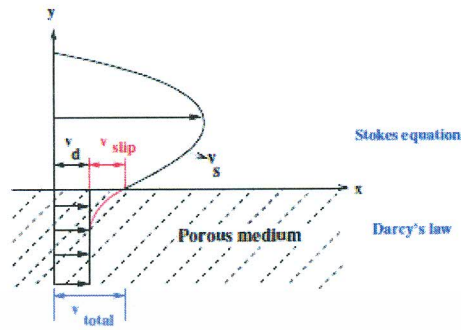
3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

วิธีการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาความเร็วของของไหลในชั้นพีซีแอล สังเกตเห็นว่า ตัวกลางหรือโดเมนที่ผู้วิจัยพิจารณามีทั้งโดเมนที่เป็นรูพรุน Ω_2 และโดเมนไม่มีรูพรุน Ω_1 งานวิจัยส่วนใหญ่ใช้ สมการสโตก หรือ นาวิเออร์-สโตก (Stokes or Navier-Stokes equations) ในการหาความเร็วของของไหลในโดเมน Ω_1 ส่วนโดเมนที่มีรูพรุน Ω_2 ดาร์ซีลอร์ (Darcy's Law) หรือ สมการบริงแมน (Brinkman equation) จะถูกนำมาใช้ [16,32,39] แต่ว่าการใช้ดาร์ซีลอร์ยังจำเป็นต้องใช้ควบคู่กับเงื่อนไขค่าขอบบีเวอร์-โจเซฟ ซึ่งเงื่อนไขนี้ก็คือการเพิ่มค่าความเร็วลื่นไถล (slip velocity) เข้าไปในตัวเอง ดังแสดงในภาพที่ 3.1 โดยที่ v_d คือความเร็วที่ได้จากดาร์ซีลอร์ v_{slip} คือความเร็วลื่นไถล v_s คือความเร็วที่ได้จากสมการสโตก v_{total} คือความเร็วทั้งหมด และเงื่อนไขค่าขอบบีเวอร์-โจเซฟ คือ

$$v_{slip} = v_{total} - v_d = \frac{\sqrt{k} dv_s}{\alpha dy} \quad (3.1)$$

โดยที่ k คือเพอร์มีเอบิลิตี (permeability) และ α เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับวัสดุของตัวกลางที่มีรูพรุน ซึ่งค่านี้หาได้จากการทดลอง

จะเห็นว่า ค่า α ต้องหามาจากการทดลองเท่านั้น นอกจากนี้ ถ้าผู้วิจัยต้องใช้ค่าขอบบีเวอร์-โจเซฟ อยู่ตลอด จะทำให้ยากต่อการปรับค่าขอบที่เข้ากับปัญหาที่ต้องการศึกษาได้อย่างแท้จริง ดังนั้น ในโครงการนี้ผู้วิจัยจะใช้สมการบริงแมน เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโดเมน Ω_2 เพราะสามารถใช้ค่าขอบอื่นได้ ซึ่งจะเอื้อต่อการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องมากขึ้น



ภาพที่ 3.1 รูปภาพแสดงความเร็วลื่นไถล (slip velocity) ที่ได้มาจากค่าขอบบีเวอร์-โจเซฟ ช่วยทำให้เกิดความต่อเนื่องขึ้นของความเร็วที่รอยต่อระหว่างชั้นที่มีรูพรุนและชั้นที่มีแต่ของเหลว

สำหรับโดเมน Ω เนื่องจากการไหลของของเหลวของปัญหาที่ผู้วิจัยศึกษาเป็นการไหลแบบช้าๆ ดังนั้นผู้วิจัยจะใช้สมการสโตก (Stokes equations) ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยจะใช้ในโครงการนี้คือ

$$\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot (\varepsilon' \mathbf{v}' - \varepsilon' \mathbf{v}^s) + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon'} \nabla \cdot (2\varepsilon' \mathbf{d}') = \rho \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon' + (1 - \varepsilon') \nabla \cdot (\varepsilon' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}^s)) = 0 \quad (3.3)$$

เรียกว่า สมการสโตกบริงแมน เป็นสมการที่ได้มาจากเทคนิคการอัปสเกล (upscaling technique) ที่เรียกว่า ไฮบริดมิกเจอร์เทียโอรีท (Hybrid Mixture Theory)[3,41] เป็นวิธีการที่ใช้ในการเปลี่ยนสมการที่ได้มาจากการสเกลเล็กๆ มาเป็นสมการที่มีสเกลใหญ่ขึ้น จะเห็นว่าในสมการมีทั้งตัวแปรส่วนที่เป็นทั้งของแข็งและของเหลว โดยที่ตัวแปร l แทนของเหลว และ s แทนของแข็ง μ คือ ความหนืดของของเหลว (dynamic viscosity) \mathbf{k}^{-1} คือส่วนกลับของเพอร์มีเอบิลิตี ε' คือพอร์ซิซิตี (porosity) หรือปริมาณของของเหลวในเซลล์โดเมนต่อปริมาตรทั้งหมดของโดเมนนั้น ดังนั้น ε' จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่งเสมอโดยที่ ε' จะมีค่าเป็นหนึ่งในได้ก็ต่อเมื่อในเซลล์โดเมนที่ผู้วิจัยศึกษาไม่มีของแข็งอยู่เลย \mathbf{v}' คือความเร็วของของเหลวฟิซิคัล ซึ่งเป็นตัวแปรที่ผู้วิจัยต้องการหา \mathbf{v}^s คือความเร็วของซีเลีย p คือความดัน (pressure) $\mathbf{d}' = 1/2 (\nabla \mathbf{v}' + (\nabla \mathbf{v}')^T)$ คืออัตราการเปลี่ยนรูป (rate of deformation) โดยที่ T หมายถึง ทรานสโพส $\varepsilon' = \partial \varepsilon' / \partial t + \mathbf{v}^s \cdot \nabla \varepsilon'$ คืออนุพันธ์ของพอร์ซิซิตีเทียบกับเวลาเชิงวัตถุ (material time derivative) ρ คือความหนาแน่นของของเหลวฟิซิคัล และ \mathbf{g} คือความเร่งเนื่องจาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

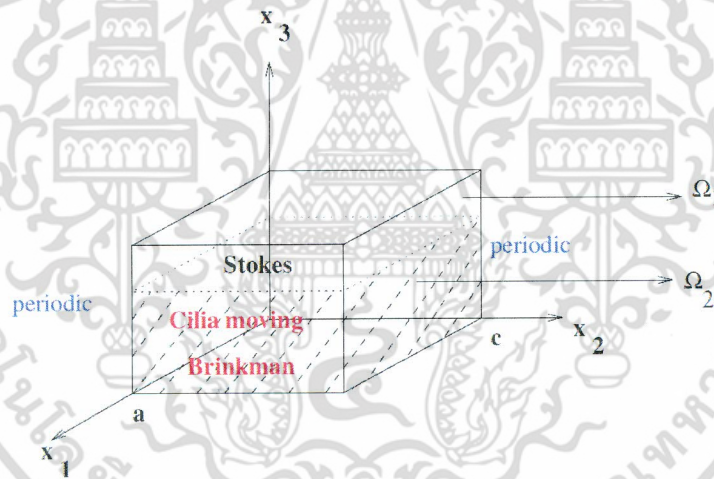
แรงโน้มถ่วง ส่วนสมการ (3.3) คือสมการที่บอกว่าของเหลวฟิซึเอลเป็นของเหลวที่อัดไม่ได้ สังเกตว่าสมการสโตก คือสมการ (3.2) ที่ไม่มีพจน์ที่มี \mathbf{k}^{-1} และ $\varepsilon' = 1$ นั่นเอง

3.2 วิธีการดำเนินการ

ในงานวิจัยนี้ได้มีวิธีการดำเนินการดังนี้

3.2.1 ประยุกต์ใช้วิธีการมิกซ์ไฟไนท์เอลเมนต์เมททอดกับสมการ (3.2)-(3.3) เพื่อหารูปแบบเมตริกซ์ในทำนองเดียวกับสมการ (2.15)

3.2.2 กำหนดโดเมนที่จะใช้ในการหาผลเฉลยแบบประมาณค่าของปัญหา ซึ่งเป็นโดเมนแบบสามมิติ ดังแสดงในภาพที่ 3.2 โดยที่ค่าขอบเป็นคาบที่ด้านข้างทั้งสองด้านของโดเมนโดยที่ Ω คือโดเมนที่ไม่มีซีเลีย ใช้สมการสโตกในการหาความเร็วของของเหลวฟิซึเอล ขณะที่ Ω_c คือโดเมนที่มีซีเลีย ใช้สมการบริงแมนในการหาผลเฉลย



ภาพที่ 3.2 รูปภาพแสดงโดเมนแบบสามมิติที่อยู่บนแกน x_1, x_2 และ x_3 เส้นขอบค่าขอบเป็นคาบ (periodic) ที่ด้านข้างของโดเมน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากเงื่อนไขค่าขอบข้างต้น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้อธิบายไว้ข้างต้น สามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

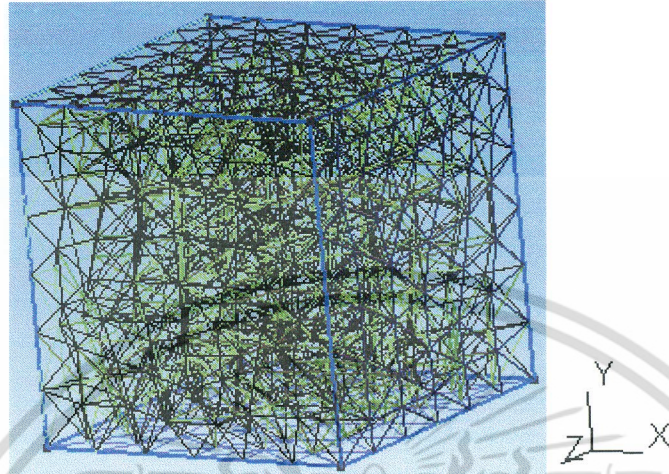
$$\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{v}' - \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{v}^s) + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon'} \nabla \cdot (2 \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{d}') = \rho \mathbf{g}, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (3.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + (1 - \boldsymbol{\varepsilon}') \nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}^s)) = 0, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (3.5)$$

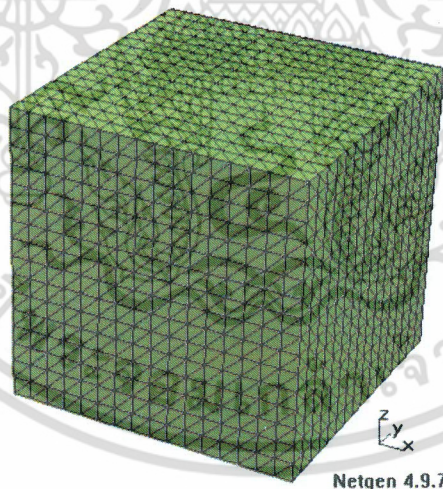
$$\mathbf{v}' \text{ และ } p \text{ เป็นคาบที่ } x_1 = x_2 = 0, x_1 = a \text{ และ } x_2 = c \quad (3.6)$$

3.2.3 แบ่งโดเมนออกเป็นส่วนเล็กๆ หลายๆ ส่วน เพื่อช่วยในการคำนวณหาผลเฉลยแบบการประมาณค่าโดยใช้วิธีมิกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์ (mixed finite element) ซึ่งโดเมนแบบสามมิติผู้วิจัยจะใช้ซอฟต์แวร์เปิด ที่เรียกว่า เน็ตเจน (Nergen)[36] หรือจีเอ็มเอสเอส (gmsh)[20] ซึ่งซอฟต์แวร์ทั้งสองเรียกอีกอย่างว่า ตัวก่อกำเนิดโครงร่างตาข่าย (mesh generator) ภาพที่ 3.3 และภาพที่ 3.4 แสดงโครงร่างตาข่ายที่ถูกก่อกำเนิดโดย โปรแกรมจีเอ็มเอสเอส และเน็ตเจน ตามลำดับ ซึ่งจำนวนจุดยอดและตำแหน่งของแต่ละจุดยอดจะถูกเรียกมาใช้ในการเขียนโปรแกรมได้ และยังสามารถกำหนดจุดยอดให้กับโปรแกรมเพื่อช่วยในการวาดภาพที่เกิดจากขอบอิสระได้ด้วย จำนวนจุดยอดของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเรียกว่า ดีกรีออฟฟร็ดอม (degree of freedom) เช่น ถ้าความเร็ว และความดัน เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ในระบบสมการที่ถูกประมาณค่าแบบเชิงเส้น (linear approximation) ของวิธีการแบบมิกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์ ที่จุดยอดหนึ่ง สำหรับโดเมนสามมิติ จำนวนดีกรีออฟฟร็ดอม คือ สี่ เพราะสามค่ามาจากความเร็ว และอีกค่าคือความดัน ซึ่งการประมาณค่าแบบมิกซ์ไฟไนท์เอลเลเมนต์เมทอด สามารถอ่านเพิ่มเติมได้จากหนังสือของ F. Brezzi [10] ดังนั้นช่วงความห่างของโครงร่างตาข่ายต้องมีค่าน้อยเพียงพอ ความถูกต้องของการประมาณค่าผลเฉลยจะอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้

3.2.4 โปรแกรมโดยใช้ภาษา Matlab เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (3.4)-(3.6)



ภาพที่ 3.3 รูปภาพแสดงโดเมนรูปกล่องแบบสามมิติ ที่มีการก่อกำเนิดร่างแห (generate mesh) โดยใช้ซอฟต์แวร์เปิดจีเอ็มเอสเอช (gmsh)



ภาพที่ 3.4 รูปภาพแสดงโดเมนรูปกล่องแบบสามมิติ ที่มีการก่อกำเนิดร่างแห (generate mesh) โดยใช้ซอฟต์แวร์เปิดเน็ตเจเน (netgen)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการสโตกบริงแมนและผลเฉลยเชิงตัวเลข

4.1 สมการบริงแมนแมคโครสเกล (Macroscale Brinkman Equation)

ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะพูดถึงที่มาอย่างคร่าวๆ ของสมการบริงแมนแมคโครสเกลที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ที่มีของสมการบริงแมนเกิดจากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีไฮบริดมิชเจอร์เทียโอรี (Hybrid Mixture Theory) กับสมการโมเมนต์ ทำให้เราได้สมการโมเมนต์แมคโครสเกล ดังต่อไปนี้ สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติม โปรดดูที่เอกสารอ้างอิง [12]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' \right) + \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{v}' - \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{v}^s) + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon'} \nabla \cdot (2 \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{d}') = \rho \mathbf{g} \quad (4.1)$$

ซึ่งตัวแปรต่างๆ ได้แนะนำไว้ในบทก่อนหน้านี้อแล้ว ต่อไปใช้วิธีการนอนไดเมนชันนอลเซชัน (nondimensionalization) กับสมการ (4.1) โดยกำหนดพารามิเตอร์อ้างอิง (reference parameters) ที่มีความยาว L ความถี่ f ความเร็ว \mathbf{v}_0 แรงดัน p_0 และอัตราเร่งโน้มถ่วง \mathbf{g}_0 และ

$$\tilde{\mathbf{v}}' = \frac{\mathbf{v}'}{\mathbf{v}_0}, \tilde{\mathbf{v}}^s = \frac{\mathbf{v}^s}{\mathbf{v}_0}, \tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \tilde{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g}_0} \quad (4.2)$$

$$\tilde{\nabla} = L \nabla, \tilde{t} = ft, \tilde{\Delta} = L^2 \Delta \quad (4.3)$$

ทำการแทนค่าสมการ (4.2)-(4.3) ในสมการ (4.1) ทำให้ได้ว่า

$$\varepsilon' \tilde{\mathbf{v}}' - \varepsilon' \tilde{\mathbf{v}}^s = -\frac{k}{\mu} \left[\rho f \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}'}{\partial t} + \frac{\rho v_0}{L} \tilde{\mathbf{v}}' \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}' + \frac{p_0}{Lv_0} \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{\rho g_0}{v_0} \tilde{\mathbf{g}} - \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\mu}{L^2} \tilde{\mathbf{v}} \cdot (2\varepsilon' \tilde{\mathbf{d}}') \right] \quad (4.4)$$

สำหรับปัญหาการไหลแบบช้าๆ ตัวอย่างเช่นการไหลของขนเส้นเล็กๆ สำหรับเวลาอ้างอิง t เป็นเวลาที่ใช้สำหรับการไหลของขนเส้นเล็กๆ ในหนึ่งรอบ (one cycle) L เป็นความสูงของขนเส้นเล็กๆ ρ และ μ เป็นความหนาแน่นและความหนืดแบบไดนามิกของน้ำที่อุณหภูมิ $40^\circ C$ และ g_0 เป็นแรงโน้มถ่วงของโลกจากการแทนค่าตัวแปรอ้างอิงดังกล่าวในสมการ (4.4) จะทำให้สองเทอมแรกทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ (4.4) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมอื่นๆ ในสมการ ดังนั้นสมการ (4.1) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot (\varepsilon' \mathbf{v}' - \varepsilon' \mathbf{v}^s) + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon'} \nabla \cdot (2\varepsilon' \mathbf{d}') = \rho \mathbf{g} \quad (4.5)$$

ซึ่งเป็นที่รู้จักกันว่าสมการบริงแมน (Brinkman equation) นั่นเอง สังเกตว่า ถ้า $\mathbf{k}^{-1} = 0$ หรือไม่มีพจน์ $\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot (\varepsilon' \mathbf{v}' - \varepsilon' \mathbf{v}^s)$ ในสมการ (4.5) และ $\varepsilon' = 1$ จะทำให้ได้สมการสโตกมันเอง

4.2 รูปแบบไม่ต่อเนื่องของสมการสโตกมันบริงแมน (Model Discretization of Stokes-Brinkman equations)

รูปแบบไม่ต่อเนื่องเป็นขั้นตอนแรกทีนำไปสู่การคำนวณเชิงตัวเลข สมการสโตกมันบริงแมน (Stokes-Brinkman equations) สมการ (4.5) ก่อนที่จะเป็นรูปแบบไม่ต่อเนื่อง เราทำการจัดรูปดังนี้ เนื่องจากว่า

$$\nabla \cdot (2\varepsilon' \mathbf{d}') = \Delta \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (4.6)$$

และกำหนดให้ $\varepsilon' \mathbf{v}' = \mathbf{v}$, ε' เป็นค่าคงที่ และ

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q d\Omega = 0 \right\} \quad (4.7)$$

$L^2_0(\Omega)$ เป็นโซโบเลฟสเปซ (Sobolev space) ดังนั้นสมการ (4.5) หรือ (3.2) และ (3.3) สามารถเขียนในรูปของ weak formulation ได้ว่า ทหาความเร็ว \mathbf{v} และความดัน p ที่ $(\mathbf{v}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ ที่สอดคล้องกับระบบสมการต่อไปนี้

$$\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{v} + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon'} \Delta \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \varepsilon' \mathbf{v}^s + \frac{\mu}{\varepsilon'} \Delta f \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = f, \quad (4.9)$$

$f = -\varepsilon' / (1 - \varepsilon') + \nabla \cdot \varepsilon' \mathbf{v}^s$, $H^1(\Omega)$ เป็นฮิลเบิร์ตสเปซ (Hilbert space) และ Ω เป็นโดเมนที่ต้องการคำนวณ

สมการ (4.8) สมการเขียนเป็นสมการสเกลาร์ใน n มิติ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ ได้ดังนี้

$$\mu \left[k_{ij}^{-1} v_j \right] - \frac{\mu}{\varepsilon'} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i + \mu \varepsilon' \left[k_{ij}^{-1} v_j^s \right] + \frac{\mu}{\varepsilon'} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (4.10)$$

สำหรับ $j = 1, 2, \dots, n$ โดยที่ $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ และการซ้ำกันของ j ภายในพจน์เดียวคือผลรวมดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทก่อนหน้านี้ ต่อไปเราจะหา weak formulation ของสมการ (4.10) ด้วยการคูณสมการ (4.10) ด้วยฟังก์ชันถ่วง $w_i \in H^1_0(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$ และปริพันธ์บนโดเมน Ω ทำให้ได้ว่า

$$\int_{\Omega} \left(\mu \left[k_{ij}^{-1} v_j \right] - \frac{\mu}{\varepsilon'} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) w_i d\Omega = \int_{\Omega} \left(\rho g_i + \mu \varepsilon' \left[k_{ij}^{-1} v_j^s \right] + \frac{\mu}{\varepsilon'} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) w_i d\Omega \quad (4.11)$$

การซ้ำกันของ i ในสมการ (4.11) ระบุจำนวนของสมการไม่ได้เป็นผลบวก ต่อไปทำการปริพันธ์ทีละส่วน (integration by parts) พจน์ที่ 2 พจน์ความดันและพจน์ที่มี f ทำให้ได้ $(v, p) \in H^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mu [k_{ij}^{-1} v_j] w_i d\Omega + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \left(\rho g_i + \mu \varepsilon' [k_{ij}^{-1} v_j^s] \right) w_i d\Omega - \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} f \frac{\partial w_i}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} p w_i n_i d\Gamma \\
& + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right] w_i d\Gamma + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma} f w_i n_i d\Gamma, \quad \forall w_i \in H_0^1(\Omega), i=1,2,\dots,n \quad (4.12)
\end{aligned}$$

โดยที่ Γ เป็นขอบของโดเมน Ω และ $n_i, i=1,2,\dots,n$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในทิศทางที่พุ่งออกจากโดเมน Ω ให้ T_h เป็นส่วนประกอบเล็กๆ ที่อยู่ภายในโดเมน Ω เช่น T_h เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ที่อยู่ใน Ω และ

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega) : v|_K \text{ is quadratic}, \forall K \in T_h\} \quad (4.13)$$

$$H_h = \{q \in L^2_0(\Omega) : q|_K \text{ is linear}, \forall K \in T_h\} \quad (4.14)$$

เราประมาณค่า $(v_i, p) \in V_h \times H_h$ ดังนี้

$$v_i(x) = \sum_{m=1}^M \psi_m(x) v_i^m = \Psi^T V_i \quad (4.15)$$

$$p(x) = \sum_{l=1}^L \phi_l(x) p_l = \Phi^T P \quad (4.16)$$

โดยที่ V_i และ P เป็นเวกเตอร์ของความเร็วและความดัน ψ_m และ ϕ_l เรียกว่าฟังก์ชันพื้นฐาน (basis functions) Ψ และ Φ เป็นเวกเตอร์ของ ψ_m และ ϕ_l ตามลำดับ M และ L เป็นจำนวนเต็มที่สูงขึ้นอยู่กับรูปร่างของ T_h แทน (4.15) และ (4.16) ลงใน (4.12) และแทน w_i ด้วย Ψ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \left(\mu \int_{\Omega} k_{ij}^{-1} \Psi \Psi^T d\Omega \right) V_j + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega \right) V_i - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T d\Omega \right) P \\
& = \int_{\Omega} (\rho g_i + \mu \varepsilon' k_{ij}^{-1} v_j^s) \Psi d\Omega - \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} f \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega - \left(\int_{\Gamma} \Psi \Phi^T n_i d\Gamma \right) P \\
& + \frac{\mu}{\varepsilon'} \left(\int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma \right) V_i + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma} f \Psi n_i d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ให้ Ω_1 และ Ω_2 เป็นโดเมนของของไหลอิสระ (free-fluid domain) และโดเมนที่มีรูพรุน (porous medium) ตามลำดับ ฉะนั้น $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ เราได้รูปแบบของเมตริกซ์ในโดเมน Ω_2 เป็น

$$\mu k_{ij}^{-1} \tilde{A} V_j + (\mu / \varepsilon') (\tilde{K}_{ij}) V_i - \tilde{Q}_i^T P = \tilde{F}_i, \quad i=1,2,3,\dots,n, \tag{4.18}$$

โดยที่
$$\tilde{A} = \int_{\Omega_2} \Psi \Psi^T d\Omega_2^e, \quad \tilde{K}_{ij} = \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega_2^e \right), \quad \tilde{Q}_i = \int_{\Omega_2} \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega_2^e \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_i = & \int_{\Omega_2} (-\rho g_i + \mu \varepsilon' k_{ij}^{-1} v_j^s) \Psi d\Omega_2^e - \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega_2} f \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega_2^e - \left(\int_{\Gamma_2} \Psi \Phi^T n_i d\Gamma_2^e \right) P \\
& + \frac{\mu}{\varepsilon'} \left(\int_{\Gamma_2} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma_2^e \right) V_i + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma_2} f \Psi n_i d\Gamma_2^e
\end{aligned} \tag{4.20}$$

เมื่อ Ω_2^e เป็นสมาชิกโดเมนดังกล่าว นั่นคือ $\Omega_2 = \cup \Omega_2^e$

ประยุกต์ใช้กระบวนการเดียวกันกับสมการความต่อเนื่องสมการ (4.9)

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon} + \varepsilon' \frac{\partial v_j^s}{\partial x_j} \tag{4.21}$$

ได้รูปแบบวีคฟอร์มูเลชัน (weak formulation) ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\int_{\Omega_2^e} \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega_2^e V_j = -\int_{\Omega_2^e} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^l}{1-\varepsilon^l} + \varepsilon^l \frac{\partial v_j^s}{\partial x_j} \right) \Phi d\Omega_2^e \quad (4.22)$$

ให้

$$\tilde{F}_{n+1} = -\int_{\Omega_2^e} \left(-\frac{\dot{\varepsilon}^l}{1-\varepsilon^l} + \varepsilon^l \frac{\partial v_j^s}{\partial x_j} \right) \Phi d\Omega_2^e \quad (4.23)$$

ดังนั้นสมการที่ (4.22) กลายเป็น

$$-\tilde{Q}_j V_j = \tilde{F}_{n+1} \quad (4.24)$$

กำหนดให้ $\tilde{B} = (\mu / \varepsilon^l) (\tilde{K}_{jj})$ และดัชนีซ้ำ j คือผลรวมที่ $j=1,2,\dots,n$ รูปแบบเมทริกซ์ของระบบสมการ (4.20) และ (4.24) บนโดเมนแบบสามมิติเป็นดังนี้

$$\begin{pmatrix} \mu k_{11}^{-1} \tilde{A} + \tilde{B} & \mu k_{12}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{13}^{-1} \tilde{A} & -\tilde{Q}_1^T \\ \mu k_{21}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{22}^{-1} \tilde{A} + \tilde{B} & \mu k_{23}^{-1} \tilde{A} & -\tilde{Q}_2^T \\ \mu k_{31}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{32}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{33}^{-1} \tilde{A} + \tilde{B} & -\tilde{Q}_3^T \\ -\tilde{Q}_1 & -\tilde{Q}_2 & -\tilde{Q}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

ขณะนี้เรามีรูปแบบเมทริกซ์ของระบบสมการในโดเมน Ω_2

ต่อไปเราจะหารูปแบบสมาชิกในเมทริกซ์ในบริเวณโดเมนของเทลวอิสระ (free-fluid domain) โดเมน Ω_1 เพราะที่ไม่มีของแข็งในขั้นนี้ เราไม่มีการซึมผ่านและความพรุณ ดังนั้นสมการโมเมนต์เป็นเช่นเดียวกันกับใน Ω_2 แต่จะไม่มีพจน์ของการซึมผ่าน \mathbf{k}^{-1} ประยุกต์ใช้กระบวนการเดียวกันกับที่นำมาใช้เพื่อให้ได้สมการ (4.25) เราได้

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\varepsilon^l} \left(\int_{\Omega_1^e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega_1^e \right) V_i - \left(\int_{\Omega_1^e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T d\Omega_1^e \right) P \\ & = \left(-\int_{\Gamma_1^e} \Psi \Phi^T n_i d\Gamma_1^e \right) P + \frac{\mu}{\varepsilon^l} \left(\int_{\Gamma_1^e} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma_1^e \right) V_i \end{aligned} \quad (4.26)$$

โดยที่ Ω_1^e เป็นโดเมนสมาชิก นั่นคือ $\Omega_1 = \bigcup_e \Omega_1^e$ เขียนสมการ (4.26) และ (4.24) ในรูปเมตริกซ์บนโดเมนสามมิติ และ $\tilde{F}_4 = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 & 0 & -\tilde{Q}_1^T \\ 0 & \tilde{B} & 0 & -\tilde{Q}_2^T \\ 0 & 0 & \tilde{B} & -\tilde{Q}_3^T \\ -\tilde{Q}_1 & -\tilde{Q}_2 & -\tilde{Q}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

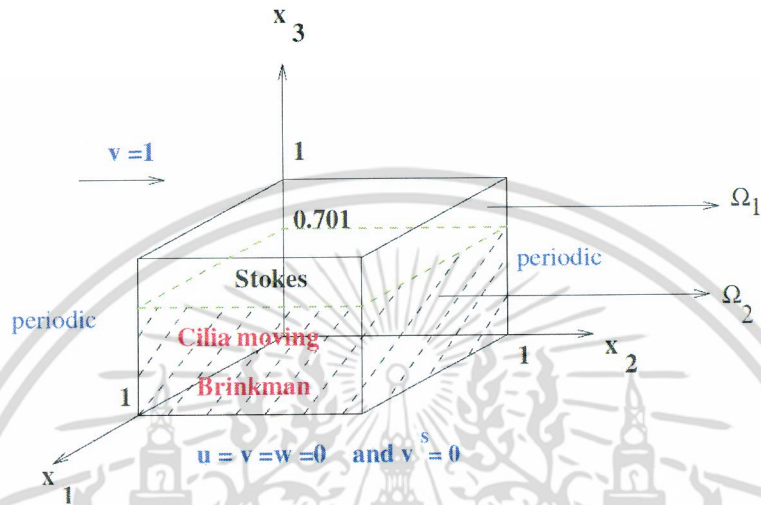
โดยที่

$$\tilde{B}_i = \left(-\int_{\Gamma_1^e} \Psi \Phi^T n_i d\Gamma_1^e \right) P + \frac{\mu}{\varepsilon^i} \left(\int_{\Gamma_1^e} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma_1^e \right) V_i, \quad i=1,2,3 \quad (4.28)$$

สังเกตว่าบนโดเมน Ω_1 เราไม่มีของแข็งดังนั้น $\mathbf{v}^s = 0$ และ ในงานวิจัยนี้ ε^i เป็นค่าคงที่ ดังนั้น $\tilde{F}_4 = 0$ บน Ω_1 จะเห็นว่าความเร็วและความดันใน Ω_1 และ Ω_2 มีความแตกต่างกันยกเว้นที่ผิวหน้าที่อยู่ระหว่างของเหลวอิสระ (free-fluid domain) กับโดเมนที่มีรูพรุน (porous medium) แต่เรายังคงใช้เครื่องหมายเดียวกันเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจ

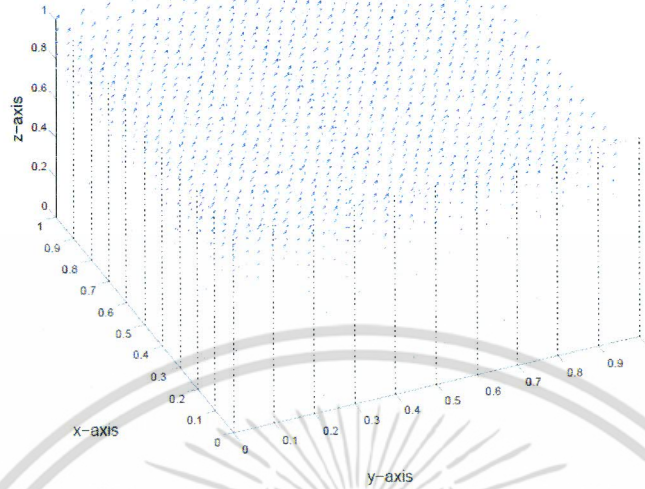
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical solution)

ผู้วิจัยได้ทำการเขียนโปรแกรมโดยใช้ Matlab ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (4.8)-(4.9) ใช้วิธีการมิกซ์ไฟไนท์เอลเมนต์ตามที่ได้อธิบายในหัวข้อ (4.2) ข้างต้น บนโดเมนดังภาพที่ 4.1



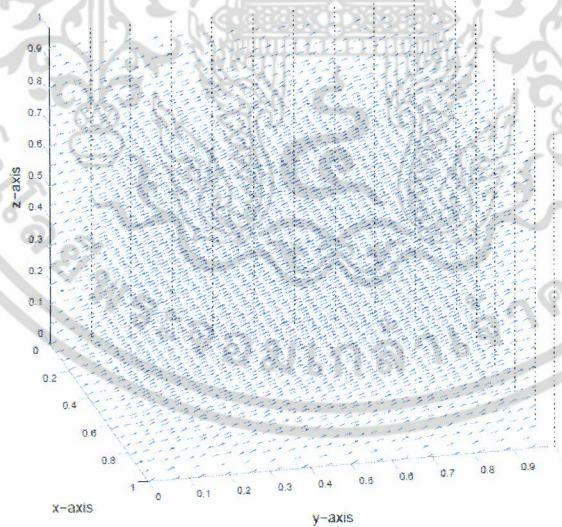
ภาพที่ 4.1 แสดงโดเมนที่ใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (4.8)-(4.9)

เป็นรูปภาพที่แสดงถึงโดเมนขนาด 1 ลูกบาศก์หน่วย ที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการสโตกบริงแมนที่ความเร็วด้านบนมีค่าเท่ากับ 1 ในทิศทางของ y และที่ฐานความเร็วในทิศทาง x, y และ z คือ u, v และ w เป็นศูนย์ตามลำดับ และความเร็วเป็นคาบ (periodic boundary conditions) ที่ด้านข้างของโดเมน นอกจากนี้ กำหนดให้ที่มีรูพรุน เริ่มจาก $z=0$ ถึง $z=0.7$ หรือ Ω_2 และของไหลอิสระอยู่ชั้นที่ $z=0.7$ ถึง $z=1$ หรือ Ω_1 ทำให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขดังแสดงในภาพที่ 4.2



ภาพที่ 4.2 แสดงถึงเวกเตอร์ที่แสดงทิศทางการไหลของของไหล เมื่อความเร็วของของแข็งเป็น 0

จากรูปภาพที่ 4.2 จะเห็นว่าเวกเตอร์มีค่ามากบนโดเมน Ω_1 เพราะไม่มีของแข็งกีดขวางการไหลของของไหล และมีค่าน้อยบน Ω_2 จะเห็นว่า ของไหลไหลในทิศทาง y เพราะที่ด้านบนของโดเมน ในความเร็วเริ่มต้นในทิศทางของ y



ภาพที่ 4.3 แสดงถึงเวกเตอร์ที่แสดงทิศทางการไหลของของไหล เมื่อความเร็วของของแข็งเป็น 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปภาพที่ 4.3 แสดงเวกเตอร์ แสดงทิศทางการไหลของของไหลบนโดเมน ดังภาพที่ 4.1 เมื่อความเร็วของของแข็งเป็น 1 และความเร็วที่ขอบเป็นคาบ (periodic boundary conditions) ที่ด้านข้าง ทั้งสี่ของโดเมนรวมถึงด้านล่างของโดเมนด้วย ซึ่งกรณีที่ความเร็วด้านบนไม่ได้กำหนดค่าแต่เป็นความเร็วเป็นคาบเช่นกัน จากรูปจะเห็นว่าสำหรับกรณีที่เวกเตอร์ความเร็วมีค่าเกือบเท่ากันทั้งโดเมนเพราะความเร็วของของแข็งมีค่าและทำให้ของไหลในโดเมน Ω , สามารถเคลื่อนที่ได้ อันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของของแข็งถึงแม้ว่าผู้วิจัยไม่ได้เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับปัญหาจริง เพราะยังไม่มีนักวิจัยท่านใดทราบความเร็วของขนเส้นเล็กๆ อย่างแท้จริงแต่จากทั้งสองตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า โปรแกรมที่ผู้วิจัยได้เขียนขึ้นมีความน่าเชื่อถือได้ในระดับหนึ่ง สำหรับความเร็วของของแข็งที่ซับซ้อนขึ้น ผู้วิจัยจะนำเสนอในผลงานวิจัยชิ้นต่อไป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

เราประยุกต์ใช้สมการสโตกบริงแมน (Stokes-Brinkman equations) แบบแมคโครสเกล (macroscale) คู่กับการไหลของของเหลวอิสระ (free-fluid domain) และโดเมนที่มีรูพรุน (porous medium) โดยใช้ทฤษฎีบทไฮบริดมิชเจอร์เทียโอรี (Hybrid Mixture Theorem) และนอนไดเมนชันลิเซชัน (nondimensionalization) โดยปกติแล้วระดับความดันที่ต่างกันจะทำให้ของไหลสามารถไหลผ่านโดเมนต่างๆ ได้ ในงานวิจัยนี้ของเหลวสามารถไหลผ่าน โดเมนต่างๆ ได้อันเนื่องจากการเคลื่อนที่ของของแข็ง เราใช้วิธีมิกซ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทอด (mixed finite element method) กับสมการสโตกบริงแมน (Stokes-Brinkman equations) สำหรับโดเมน n มิติ โดยใช้สัญลักษณอินดิเชียล (indicial notation) เข้ามาช่วย สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับ indicial notation ให้ดูเอกสารอ้างอิง [4] นอกจากนี้ผู้วิจัยได้คำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีมิกซ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทอด (mixed finite element method) แบบสามมิติ ซึ่งผลเฉลยที่ได้สอดคล้องกับหลักการทางการเคลื่อนที่ของของไหลเมื่อกำหนดค่าขอบและความเร็วของของแข็งที่ต่างๆ กัน ซึ่งค่าขอบที่ซับซ้อน และความเร็วของของแข็งที่ซับซ้อนกว่านี้จะได้นำเสนอในงานวิจัยขั้นถัดไป

บทที่ 6

สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

6.1 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

ได้ตีพิมพ์งานวิจัยในวารสารต่อไปนี้ (เอกสารแนบภาคผนวก) Kannanut Chamsri, N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method , Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 8(11): 30-36 Special 2014.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

- [1] T. Arbogast, D. S. Brunson. A Computational Method for Approximating a Darcy-Stokes System Governing a Vuggy Porous Medium, *Computational Geosciences*, 11:207-218, 2007.
- [2] C. Barton and S. Raynor. Analytical Investigation of Cilia Induced Mucus Flow. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 29:419-428, 1967.
- [3] L. S. Bennethum, J. H. Cushman. Multiphase, Hybrid Mixture Theory for Swelling Systems-I: Balance Laws, *International Journal of Engineering Science*, 34(2):125-145, 1996.
- [4] L. S. Bennethum. Notes for Introduction to Continuum Mechanics, *Continuum Mechanics Class Lecture*, 2011.
- [5] J. Blake. A Model for the Micro-Structure in Ciliated Organisms. *Journal of Fluid Mechanics*, 55:1-23, 1972.
- [6] J. Blake. Mucus Flows. *Mathematics Biosciences*, 17:301-313, 1973.
- [7] J. Blake. Hydrodynamic Calculations on the Movements of Cilia and Flagella I. Paramecium. *Journal of Theoretical Biology*, 45:183-203, 1974.
- [8] J. Blake. On the Movement of Mucus in the Lung. *Journal of Biomechanics*, 8:179-190, 1975.
- [9] J. R. Blake. An Active Porous Medium Model for Ciliary Propulsion. *Journal of Theoretical Biology*, 64:697-701, 1977.
- [10] F. Brezzi and M. Fortin. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. *Springer-Verlag*, 1991.
- [11] H. C. Brinkman. A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles, *Applied Scientific Research*, A1:27-34, 1947a.

- [12] K. Chamsri. Modeling the Flow of PCL Fluid due to the Movement of Lung Cilia, PH.D. thesis, *University of Colorado Denver*, 2012.
- [13] K. Chamsri. Formulation of a Well-Posed Stokes-Brinkman Problem with a Permeability Tensor. *International Scientific Journal Mathematics and Mechanics*, 1(1): 5-11, 2004.
- [14] M. Chandesris and D. Jamet. Boundary Conditions at a Fluid-Porous interface: An a Priori Estimation of the Stress Jump Coefficients. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:3422-3436, 2007.
- [15] M. Chandesris and D. Jamet. Jump Conditions at a Surface-Excess Quantities at a Fluid/Porous Interface: A Multi-Scale Approach. *Transport in Porous Media*, 78:419-438, 2009.
- [16] N. Chen, M. Gunzburger, and X. Wang. Asymptotic Analysis of the Differences between the Stokes-Darcy System with Different Interface Conditions and the Stoke-Brinkman System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 368:658-676, 2010.
- [17] J. H. Cushman, L. S. Bennethum, B. X. Hu. A Primer on Upscaling Tools for Porous Media, *Advances in Water Resources*, 25:1043-1067, 2002.
- [18] H. Darcy. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, *Dalmont Paris*, 647, 1856.
- [19] G. H. Frommer and C. R. Steele. Permeability of Fluid Flow through Hair Cell Cilia. *Journal of the Acoustical Society of America*, 65(3):759-764, 1979.
- [20] C. Geuzaine and J. F. Remacle. Gmsh: A 3-D Finite Element mesh Generator with Built-In Pre- and Post-Processing Facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79:1309-1331, 2009.
- [21] S. Gueron and K. Levit-Gurevich. Energetic Considerations of Ciliary Beating and the Advantage of Metachronal Coordination. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 96(22):12240-12245, 1999.

- [22] N. S. Hanspal, A. N. Waghode, V. Nassehi, R. J. Wakeman. Numerical Analysis of Coupled Stokes/Darcy Flows in Industrial Filtrations, *Transport in Porous Media*, 64:73-101, 2006.
- [23] D. F. James and A. M. J. Davis. Flow at the Interface of a Model Fibrous Porous Medium. *The Journal of Fluid Mechanics*, 426:47-72, 2001.
- [24] V. A. Kirsh. Stokes Flow in Periodic Systems of Parallel Cylinders with Porous Permeable Shells, *Colloid Journal*, 68:173-181, 2006.
- [25] W. J. Layton, F. Schieweek, I. Yotov. Coupling Fluid Fluid Flow with Porous Media Flow, (2003), *Journal on Numerical Analysis*, 40:2195-2218, 2003.
- [26] W. L. Lee, P. G. Jayathilake, Z. Tan, Le D. V., H. P. Lee, and B. C. Khoo. Muco-Ciliary Transport: Effect of Mucus Viscosity, Cilia Beat Frequency and Cilia Density. *Computer&Fluids*, 49:214-221, 2011.
- [27] N. Liron. Fluid Transport by Cilia between Parallel Plates. *The Journal of Fluid Mechanics*, 86:705-726, 1978.
- [28] N. Liron and M. Rozenon. Muco-Ciliary Transport. *Journal of Submicroscopic Cytology*, 15:317-321, 1983.
- [29] N. S. Martys. Improved Approximation of the Brinkman Equation using a Lattice Boltzmann Method, *Physics of Fluids*, 13:1807-1810, 2001.
- [30] N. S. Martys, J. G. Hagedorn. Multiscale Modeling of Fluid Transport in Heterogeneous Materials using Discrete Boltzmann Methods, *Materials and Structures*, 35:650-659, 2002.
- [31] C. E. Miller. Flow Induced by Mechanical Analogues of Mucociliary Systems. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 130:8801-890, 1996.
- [32] M. Morandotti. Self-propelled micro-swimmers in a brinkman fluid. Submitted to the *Journal of Biological Dynamics*, 2010.

- [33] G. Neale, W. Nader. Practical Significance of Brinkman's Extension of Darcy's Law: Coupled Parallel Flows within a Channel and a Bounding Porous Medium, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52:475-478, 1974.
- [34] A. Rabinovitch and R. Rabinovitch. A Simple Model of Light Transmission through Metachronally Moving Cilia. *Journal of Applied Physics*, 67(2):1108-112, 1990.
- [35] J. Sadé, N. Eliezer, A. Silberberg, and A. C. Nevo. The Role of Mucus in Transport by Cilia. *American Review of Respiratory Disease*, 102:48-52, 1970.
- [36] J. Schöberl. Netgen. *Automatic mesh generator*, 2001.
- [37] D. J. Smith, E. A. Gaffney, and J. R. Blake. A Viscoelastic Traction Layer Model of Muco-Ciliary Transport. *Bulletin of Mathematical Biology*, 69:289-327, 2007.
- [38] D. J. Smith, E. A. Gaffney, and J. R. Blake. Modelling Mucociliary Clearance. *Respiratory Physiology Neurobiology*, 163:178-188, 2008.
- [39] H. Tan and K. M. Pillai. Finite Element Implementation of Stress-Jump and Stress-Continuity Conditions at Porous-Medium, Clear-Fluid Interface. *Computers&Fluids*, 38:1118-1131, 2009.
- [40] D. J. Thornton, K. Rousseau, and M. A. McGuckin. Structure and Function of the Polymeric Mucins in Airways Mucus. *Annual Review of Physiology*, 70:459-486, 2008.
- [41] T. F. Weinstein. Three-Phase Hybrid Mixture Theory for Swelling Drug Delivery Systems, Ph.D. thesis, *University of Colorado Denver*, 2005.
- [42] T. F. Weinstein, L. S. Bennethum. On the Derivation of the Transport Equation for Swelling Porous Materials with Finite Deformation, *International Journal of Engineering Science*, 2006.
- [43] S. Whitaker: Momentum Transfer at the Boundary between a Porous Medium and a Homogeneous Fluid-I, Theoretical Development, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38:2635-2646, 1995.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

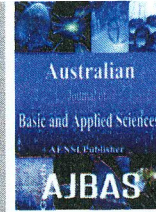


AENSI Journals

Australian Journal of Basic and Applied Sciences

ISSN:1991-8178

Journal home page: www.ajbasweb.com



N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method

Kannanut Chamsri

¹Department of Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 13 November 2013

Accepted 23 October 2013

Available online 30 November 2011

Keywords:

Mixed finite element method, Variation formulation of Stokes-Brinkman equations, Moving solid phase

ABSTRACT

A macroscale model is developed to model a porous medium and adjacent free fluid. Typically, fluid flows through a porous medium by a pressure gradient. In this problem, we introduce the model that fluid moves by the movement of solid phases. Hybrid mixture theory (HMT) and nondimensionalization are used to obtain the macroscale generalized Darcy's law called the Brinkman equation. This generalization helps to match the tangential stress acting on the fluid at the free-fluid/porous-medium interface. We apply the Stokes equation for incompressible slow flow in the adjacent free fluid domain. A variational formulation of the Stokes-Brinkman equations is provided by using a mixed finite element method for n -dimensional domain. Applications of this model include modeling fluid flow through moving solid phases such as animal hair and hairlike structures.

© 2014 AENSI Publisher All rights reserved.

To Cite This Article: Kannanut Chamsri., N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method. *Aust. J. Basic & Appl. Sci.*, 8(11): 30-36, 2014

INTRODUCTION

Nowadays, there are several problems involving the fluid flow through a porous medium and adjacent free-fluid region. Classical porous-media flow problems involve a static phase with a liquid-phase pressure gradient inducing fluid flow. In this research, we develop governing equations that will be used to model a fluid flowing due to the movement of the solid phase such as biological hairlike structures. The configuration is illustrated in Figure 1.

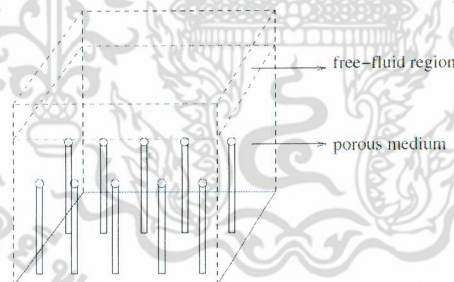


Fig. 1: A snapshot of a cell of the porous medium and adjacent free-fluid region when the angle between cylinders and horizontal plane is 90 degrees.

Typically, the Stokes or Navier-Stokes equations are used in free-fluid region and Darcy's law with the Beavers-Joseph condition in the porous medium (Hanspal, N.S., *et al.*, 2006; Arbogast, T., D.S. Brunson., 2007; Layton, W.J., *et al.*, 2003). However, because of the limitation of the boundary condition when Darcy's law is applied, in this study, we use the Stokes-Brinkman equations which are employed by several authors, cf. e.g., (Neale, G., W. Nader., 1974; Martys, N.S., J.G. Hagedorn., 2002; Martys., N.S., 2001; Kirsh., V.A., 2006).

We next clarify the difference between Darcy's law and Brinkman equations. Darcy's law (Darcy, H., 1856).

Corresponding Author: Kannanut Chamsri, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Department of Mathematics, Bangkok 10520, Thailand.
E-mail: kckannan@kmitl.ac.th, Phone numbers (+66929955645)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_D = -\frac{k}{\mu}[\nabla p - \rho g], \quad (1)$$

where v_D is Darcy's velocity; k is the permeability tensor; μ is the dynamic viscosity; p is the pressure; ρ is the fluid density in the porous medium and g is the gravity, is typically employed where viscosity and inertial effects are negligible while Brinkman (1947a) claimed that in some cases the viscous shearing stresses acting on the fluid are not negligible and additional term should be included. To rigorously determine the macroscale form of Brinkman equations, we use hybrid mixture theory (HMT) (Cushman, J.H., *et al.*, 2002; Bennethum, L.S., J.H. Cushman., 1996; Weinstein., T.F., 2005) and nondimensionalization to obtain form of the Brinkman equations, see Section 2:

$$\mu k^{-1} \cdot (\varepsilon^l v^l - \varepsilon^l v^s) + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon^l} \nabla \cdot (2\varepsilon^l d^l) = \rho g, \quad (2)$$

which is the equation used in the porous medium where k^{-1} is the inverse of the permeability tensor; ε^l is the porosity; v^l and v^s are the velocities of the liquid and solid phases, respectively; $d^l = 0.5(\nabla v^l + (\nabla v^l)^T)$ is the rate of deformation tensor and the superscript T is the transpose. For the divergent-free continuity equation, equation (2) is consistent with [11, equation (16)] except that (2) includes the term $\varepsilon^l v^s$ on the left-hand side whereas in (Weinstein., T.F., 2005) it is assumed that the velocity of the solid phase is zero. The extra term $(\mu / \varepsilon^l) \nabla \cdot (2\varepsilon^l d^l)$ comes from the liquid phase stress tensor and with this term the generalized Darcy's law is called the Brinkman equations. This term helps to match the tangential stress acting on the fluid at the free-fluid/porous-medium interface.

Note that for incompressible fluid, if we let the inverse of the permeability k^{-1} go to zero in the free-fluid region and ε^l be a constant in space, the equation (2) becomes

$$\nabla p - \rho g = \frac{\mu}{\varepsilon^l} \Delta(\varepsilon^l v^l), \quad (3)$$

which is the Stokes equation typically derived from Navier-Stokes equation with the porosity $\varepsilon^l = 1$.

We now have a system of equations in free-fluid region when the Stokes equation is coupled with the divergent-free continuity equation while in porous medium domain we have the Brinkman equation (2) coupling with the continuity equation (Weinstein, T.F., L.S. Bennethum., 2006):

$$\dot{\varepsilon}^l + (1 - \varepsilon^l) \nabla \cdot (\varepsilon^l (v^l - v^s)) = 0, \quad (4)$$

where $\dot{\varepsilon}^l$ is the material time derivative of the porosity with respect to the solid phase, $\dot{\varepsilon}^l = \partial \varepsilon^l / \partial t + v^s \cdot \nabla \varepsilon^l$. In Section 2, the macroscopic scale of Brinkman equation which are specific forms of the momentum equation are derived. The model discretization of the Stokes-Brinkman system of the Stokes-Brinkman equations using a mixed finite element method is shown in Section 3. Finally, the conclusion is drawn in Section 4.

Macroscale Brinkman Equation:

We derive the macroscale Brinkman equation by using hybrid mixture theory (HMT) and nondimensionalization method. HMT starts with microscale equations and uses averaging theorem to derive macroscopic field equations and then exploits the entropy inequality to derive constitutive equations. Transferring a microscale variable to a macroscale variable is defined in term of the intrinsic phase average. That is the average of the microscale variable weighted by the volume of the phase. The macroscale conservation of momentum balance for liquid phase, l , using HMT provides as follows. For more details, see (Chamsri., K., 2012). The conservation of momentum is

$$\rho \left(\frac{\partial v^l}{\partial t} + v^l \cdot \nabla v^l \right) + \mu k^{-1} \cdot (\varepsilon^l v^l - \varepsilon^l v^s) + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon^l} \nabla \cdot (2\varepsilon^l d^l) = \rho g. \quad (5)$$

Next, we normalize equation (5) and neglect some terms in the equation with respect to a slow motion of the fluid. To normalize (5), we choose scaling parameters: characteristic length L , characteristic frequency f , characteristic speed v_0 , reference pressure p_0 and gravitational acceleration g_0 . By defining the following dimensionless variables

$$\tilde{v}^l = \frac{v^l}{v_0}, \tilde{v}^s = \frac{v^s}{v_0}, \tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \tilde{g} = \frac{g}{g_0}, \quad (6)$$

$$\tilde{\nabla} = L\nabla, \tilde{t} = ft, \tilde{\Delta} = L^2\Delta. \quad (7)$$

The dimensionless form of equation (5) is

$$\varepsilon^l \tilde{v}^l - \varepsilon^l \tilde{v}^s = -\frac{k}{\mu} \left[\rho f \frac{\partial \tilde{v}^l}{\partial \tilde{t}} + \frac{\rho v_0}{L} \tilde{v}^l \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v}^l + \frac{p_0}{L v_0} \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{\rho g_0}{v_0} \tilde{g} - \frac{1}{\varepsilon^l} \frac{\mu}{L^2} \tilde{\nabla} \cdot (2\varepsilon^l \tilde{d}^l) \right]. \quad (8)$$

For a slow flow problem, for example biological hairlike structures such as animal hair, we choose the reference time t to be the time it takes for a periodic array of cylinders to go through one cycle, L to be the height of the array of cylinders, ρ and μ to be the density and dynamic viscosity of water at temperature $40^\circ C$ and g_0 to be the Earth's gravity. Then the time-dependent and nonlinear terms are relatively small in comparison with other terms. Neglecting these terms, (5) becomes

$$\mu k^{-1} \cdot (\varepsilon^l v^l - \varepsilon^l v^s) + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon^l} \nabla \cdot (2\varepsilon^l d^l) = \rho g, \quad (9)$$

which is the Brinkman equation.

Model Discretization:

Discretization of the model is the first step leading to numerical solutions. In this section, we apply a mixed finite element method to discretize the continuity equation (4) and the Stokes-Brinkman equations (9). Before discretizing the equations, we first note that

$$\nabla \cdot (2\varepsilon^l d^l) = \Delta v + \nabla(\nabla \cdot v), \quad (10)$$

where $\varepsilon^l v^l = v$ and ε^l is assumed to be a constant, i.e. the porosity does not change in space. Define the spaces

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q d\Omega = 0 \right\}, \quad (11)$$

where $L^2(\Omega)$ is the Sobolev space. The weak formulation of the system of equations is as follows: Find $(v, p) \in H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ such that

$$\mu k^{-1} \cdot v + \nabla p - \frac{\mu}{\varepsilon^l} \Delta v = \rho g + \mu k^{-1} \cdot \varepsilon^l v^s + \frac{\mu}{\varepsilon^l} \nabla f \quad (12)$$

$$\nabla \cdot v = f, \quad (13)$$

where $f = -\varepsilon' / (1 - \varepsilon') + \nabla \cdot \varepsilon' v^s$; $H^1(\Omega)$ is the Hilbert space; and Ω is a computational domain.

Writing (12) as scalar equations in n-dimensions gives: for $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\mu [k_{ij}^{-1} v_j] - \frac{\mu}{\varepsilon'} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i + \mu \varepsilon' [k_{ij}^{-1} v_j^s] + \frac{\mu}{\varepsilon'} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (14)$$

for $j = 1, 2, \dots, n$, where gravity is given by $g = (0, 0, -g)$ and the repeated index j within a single term indicates summation. To find the weak formulation, we multiply (14) by test functions $w_i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$ and integrate over the domain Ω . This yields

$$\int_{\Omega} \left(\mu [k_{ij}^{-1} v_j] - \frac{\mu}{\varepsilon'} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) w_i d\Omega = \int_{\Omega} \left(\rho g_i + \mu \varepsilon' [k_{ij}^{-1} v_j^s] + \frac{\mu}{\varepsilon'} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) w_i d\Omega. \quad (15)$$

Note that the repeated index i in (15) indicates the number of equations, not the summation. Integrating by parts the second-order term, the pressure term and the source term f , we have the weak formulation: Find $(v, p) \in H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ such that

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu [k_{ij}^{-1} v_j] w_i d\Omega + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \left(\rho g_i + \mu \varepsilon' [k_{ij}^{-1} v_j^s] \right) w_i d\Omega - \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} f \frac{\partial w_i}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} p w_i n_i d\Gamma \\ & + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right] w_i d\Gamma + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma} f w_i n_i d\Gamma, \quad \forall w_i \in H_0^1(\Omega), i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (16)$$

where Γ is the boundary of the domain Ω and $n_i, i = 1, 2, \dots, n$, is the outward unit normal vector. Let T_h be a triangulation of domain Ω and

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega) : v|_K \text{ is quadratic}, \forall K \in T_h\} \quad (17)$$

$$H_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q|_K \text{ is linear}, \forall K \in T_h\} \quad (18)$$

be finite-dimensional subspaces of $H^1(\Omega)$ and $L_0^2(\Omega)$, respectively. The approximate solutions $(v_i, p) \in V_h \times H_h$ in finite element method are as follows.

Let

$$v_i(x) = \sum_{m=1}^M \psi_m(x) v_i^m = \Psi^T V_i, \quad (19)$$

$$p(x) = \sum_{l=1}^L \phi_l(x) p_l = \Phi^T P, \quad (20)$$

where V_i and P are vectors of the velocities and pressure, respectively; ψ_m and ϕ_l are called basis functions; Ψ and Φ are their vector forms and the integers M and L are determined by the interpolation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

function. For example, for a tetrahedral element, $M=10$ for quadratic for the velocity v_i and $L=4$ for linear function for the pressure p . Substituting the basis function Ψ into w_i and (19) and (20) into (16), we have

$$\begin{aligned} & \left(\mu \int_{\Omega} k_{ij}^{-1} \Psi \Psi^T d\Omega \right) V_j + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} \right) d\Omega V_i - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi d\Omega \right) P \\ & = \int_{\Omega} (\rho g_i + \mu \varepsilon' k_{ij}^{-1} v_j^s) \Psi d\Omega - \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega} f \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega - \left(\int_{\Gamma} \Psi \Phi^T n_i d\Gamma \right) P \\ & + \frac{\mu}{\varepsilon'} \left(\int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma \right) V_i + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma} f \Psi n_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (21)$$

Let Ω_1 and Ω_2 be a porous medium domain and the domain of the adjacent free-fluid region, respectively. Therefore $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. We first form an element matrix in domain Ω_2 . Define

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \int_{\Omega_2^e} \Psi \Psi^T d\Omega_2^e, \quad \tilde{K}_{ij} = \int_{\Omega_2^e} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} \right) d\Omega_2^e, \quad \tilde{Q}_i = \int_{\Omega_2^e} \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} d\Omega_2^e, \\ \tilde{F}_i &= \int_{\Omega_2^e} (-\rho g_i + \mu \varepsilon' k_{ij}^{-1} v_j^s) \Psi d\Omega_2^e - \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Omega_2^e} f \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d\Omega_2^e - \left(\int_{\Gamma_2^e} \Psi \Phi^T n_i d\Gamma_2^e \right) P \\ & + \frac{\mu}{\varepsilon'} \left(\int_{\Gamma_2^e} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma_2^e \right) V_i + \frac{\mu}{\varepsilon'} \int_{\Gamma_2^e} f \Psi n_i d\Gamma_2^e, \end{aligned} \quad (22)$$

where Ω_2^e is the element domain such that $\Omega_2 = \bigcup \Omega_2^e$. Then (21) becomes

$$\mu k_{ij}^{-1} \tilde{A} V_j + (\mu / \varepsilon') (\tilde{K}_{ij}) V_i - \tilde{Q}_i^T P = \tilde{F}_i, \quad (23)$$

where again the superscript T denotes the transpose. Applying the same process to the continuity equation (13) which is:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon} + \varepsilon' \frac{\partial v_j^s}{\partial x_j}, \quad (24)$$

where have the weak form

$$-\int_{\Omega_2^e} \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega_2^e V_j = -\int_{\Omega_2^e} \left(-\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'} + \varepsilon' \frac{\partial v_j^s}{\partial x_j} \right) \Phi d\Omega_2^e. \quad (25)$$

Let

$$\tilde{F}_4 = -\int_{\Omega_2^e} \left(-\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'} + \varepsilon' \frac{\partial v_j^s}{\partial x_j} \right) \Phi d\Omega_2^e. \quad (26)$$

Therefore (26) becomes

$$-\tilde{Q}_j V_j = \tilde{F}_4. \quad (27)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Define $\tilde{B} = (\mu / \varepsilon^l) (\tilde{K}_{jj})$ and recall that the repeated index j is the summation over $j, j = 1, 2, \dots, n$. The element matrix form of the system of equations (24) and (28) is as follows,

$$\begin{pmatrix} \mu k_{11}^{-1} \tilde{A} + \tilde{B} & \mu k_{12}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{13}^{-1} \tilde{A} & -\tilde{Q}_1^T \\ \mu k_{21}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{22}^{-1} \tilde{A} + \tilde{B} & \mu k_{23}^{-1} \tilde{A} & -\tilde{Q}_2^T \\ \mu k_{31}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{32}^{-1} \tilde{A} & \mu k_{33}^{-1} \tilde{A} + \tilde{B} & -\tilde{Q}_3^T \\ -\tilde{Q}_1 & -\tilde{Q}_2 & -\tilde{Q}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} \quad (29)$$

We now have the matrix form of the discrete system of equations in domain Ω_2 .

Next, we find the element matrix form in the free-fluid region, domain Ω_1 . Because of no solid phases in this region, we have no permeability and the porosity becomes one in this domain. Therefore, the momentum equations are the same as those in Ω_2 except there are no source term, permeability and the porosity is one. Applying the same process as that applied to obtain (29), we have

$$\frac{\mu}{\varepsilon^l} \left(\int_{\Omega_1^e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} d\Omega_1^e \right) V_i - \left(\int_{\Omega_1^e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T d\Omega_1^e \right) P = \left(- \int_{\Gamma_1^e} \Psi \Phi^T n_j d\Gamma_1^e \right) P + \frac{\mu}{\varepsilon^l} \left(\int_{\Gamma_1^e} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma_1^e \right) V_i, \quad (30)$$

where Ω_1^e be the element domain such that $\Omega_1 = \bigcup_e \Omega_1^e$. Writing (30) and (28) into a matrix form, we have

$$\begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 & 0 & -\tilde{Q}_1^T \\ 0 & \tilde{B} & 0 & -\tilde{Q}_2^T \\ 0 & 0 & \tilde{B} & -\tilde{Q}_3^T \\ -\tilde{Q}_1 & -\tilde{Q}_2 & -\tilde{Q}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

where

$$\tilde{B}_i = \left(- \int_{\Gamma_1^e} \Psi \Phi^T n_j d\Gamma_1^e \right) P + \frac{\mu}{\varepsilon^l} \left(\int_{\Gamma_1^e} \Psi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} n_j d\Gamma_1^e \right) V_i, \quad (32)$$

Note that the velocities and pressure in Ω_1 and Ω_2 are different except at the free-fluid/porous-medium interface but we still use the same notations for simplicity.

Conclusion:

We develop macroscale Stokes-Brinkman equations for coupled free-fluid/porous-medium viscous flow using Hybrid Mixture Theory and nondimensionalization. Typically, pressure gradient induces fluid flowing through a porous medium. It should be noted that to the author's knowledge this is the first time the porous medium equations are being used to model a fluid flowing due to the movement of the solid phase. We use a mixed finite element method to discretize the Stokes-Brinkman system of equations for n-dimensional domain by using the indicial notation introduced in the previous sections. For more details about indicial notations, see (Bennethum., L.S., 2011). Numerical solutions of this model using a mixed finite element method will be provided in future work.

ACKNOWLEDGMENT

This research was supported by a grant from KMITL Research Fund (KMITL Fund).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

REFERENCES

- Arbogast, T., D.S. Brunson., 2007. A Computational Method for Approximating a Darcy-Stokes System Governing a Vuggy Porous Medium, *Computational Geosciences.*, 11: 207-218.
- Bennethum, L.S., J.H. Cushman., 1996. Multiphase, Hybrid Mixture Theory for Swelling Systems-I: Balance Laws, *International Journal of Engineering Science*, 34(2): 125-145.
- Bennethum., L.S., 2011. Notes for Introduction to Continuum Mechanics, *Continuum Mechanics Class Lecture.*
- Brinkman., H.C., 1947a. A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles, *Applied Scientific Research*, A1: 27-34.
- Chamsri., K., 2012. Modeling the Flow of PCL Fluid due to the Movement of Lung Cilia, Ph.D. thesis, University of Colorado Denver.
- Cushman, J.H., L.S. Bennethum, B.X. Hu., 2002. A Primer on Upscaling Tools for Porous Media, *Advances in Water Resources*, 25: 1043-1067.
- Darcy, H., 1856. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dalmont Paris: 647.
- Hanspal, N.S., A.N. Waghode, V. Nassehi, R.J. Wakeman., 2006. Numerical Analysis of Coupled Stokes/Darcy Flows in Industrial Filtrations, *Transport in Porous Media*, 64: 73-101.
- Kirsh., V.A., 2006. Stokes Flow in Periodic Systems of Parallel Cylinders with Porous Permeable Shells, *Colloid Journal*, 68: 173-181.
- Layton, W.J., F. Schieweck, I. Yotov., 2003. Coupling Fluid Flow with Porous Media Flow, *Journal on Numerical Analysis.*, 40: 2195-2218.
- Martys, N.S., J.G. Hagedorn., 2002. Multiscale Modeling of Fluid Transport in Heterogeneous Materials using Discrete Boltzmann Methods, *Materials and Structures.*, 35: 650-659.
- Martys., N.S., 2001. Improved Approximation of the Brinkman Equation using a Lattice Boltzmann Method, *Physics of Fluids.*, 13: 1807-1810.
- Neale, G., W. Nader., 1974. Practical Significance of Brinkman's Extension of Darcy's Law: Coupled Parallel Flows within a Channel and a Bounding Porous Medium, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52: 475-478.
- Weinstein, T.F., L.S. Bennethum., 2006. On the Derivation of the Transport Equation for Swelling Porous Materials with Finite Deformation, *International Journal of Engineering Science.*
- Weinstein., T.F., 2005. Three-Phase Hybrid Mixture Theory for Swelling Drug Delivery Systems, Ph.D. thesis, University of Colorado Denver.
- Whitaker., S., 1995. Momentum Transfer at the Boundary between a Porous Medium and a Homogeneous Fluid-I, *Theoretical Development*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38: 2635-2646.

สรุปค่าใช้จ่ายการดำเนินงานโครงการวิจัย

รายละเอียดงบประมาณ

1. ค่าใช้สอย

1.1 ค่าจ้างเหมาบริการเขียนโปรแกรม	15,000	บาท
1.2 ค่าจ้างเหมาวิเคราะห์ข้อมูล	15,000	บาท
1.3 ค่าจ้างพิมพ์รายงานวิจัย	3,000	บาท
1.4 ค่าจัดทำรูปเล่มรายงาน	2,000	บาท

2. ค่าวัสดุ

2.1 ค่าถ่ายเอกสาร	2,000	บาท
2.2 ค่าวัสดุคอมพิวเตอร์		
2.2.1 ค่าหมึกพิมพ์ปริ้นเตอร์เลเซอร์สี	5,000	บาท
2.2.2 ฮาร์ดดิสความจุสูงเพื่อเก็บข้อมูลผลการคำนวณ	6,000	บาท
2.3 ค่าวัสดุสำนักงาน	2,000	บาท

รวม

50,000 บาท

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Contact Information

Address: Department of Mathematics
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
1 Chalongkrung 1, Ladkrabang, Bangkok 10520

Telephone (cell phone): +66893434424

E-mail: kckannan@kmitl.ac.th

URL: <http://www.kmitl.ac.th/~kckannan/>

Education

PhD	Applied Mathematics	University of Colorado Denver, Denver, CO	2005–2012
MS	Mathematics	Chulalongkorn University, Thailand	2002–2005
BS	Mathematics	Chulalongkorn University, Thailand	1998–2002

Research Publications

1. K. Chamsri and L. S. Bennethum, Permeability of Fluid Flow Through a Periodic Array of Cylinders, *Applied Mathematical Modelling*, 39(1): 244-254, 2015.
2. K. Chamsri, N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 8(11): 30-36 Special 2014.
3. K. Chamsri, Formulation of a Well-Posed Stokes-Brinkman Problem with a Permeability Tensor, *International Scientific Journal Mathematics and Mechanics*, 1(1): 5-11, 2014.
4. K. Chamsri, Derivation of Darcys Law using Homogenization Method, *International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering*, 7(9): 868-872, 2013.
5. P. Chankitkan, B. Pimpunchat, K. Chamsri, W. Triampo, S. Amornsamankul, Modeling for Metals Contaminated Wastewater by Algae Adsorption, *Proceedings of International Conference in Mathematics and Applications Mahidol University 2013, Bangkok, Thailand, Jan 19-21, 2013.*

Presentations

- N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method, ICMSC 2014: International Conference on Mathematics and Statistics, Ho Chi Minh City, Vietnam, August 29-30, 2014.
- Derivation of Darcys Law using Homogenization Method, ICMSSC 2013: International Conference on Mathematics, Statistics and Scientific Computing, Singapore, Sep 12-13, 2013.
- Simplified Mathematical Model for the PCL in Lungs, Center for Computational Mathematics, University of Colorado, October 25, 2011.
- Modeling the PCL, Center for Computational Mathematics, University of Colorado Denver, May 2, 2011.
- Permeability of Fluid Flow through Cilia, SIAM Conference on Mathematical & Computational Issues in the Geosciences, Long Beach, California, March 22, 2011.
- Modeling the Cilia and Mucus of Lungs, 7th Annual SIAM Front Range Applied Mathematics Student Conference, March 5, 2011.
- Modeling the Cilia and Mucus of Lungs, Center for Computational Mathematics, University of Colorado Denver, August 30, 2010.
- Homogenization Method to Find the Permeability of Fluid Flow through Cilia, 6th Annual SIAM Front Range Applied Mathematics Student Conference, February 4, 2010.

Scholarships, Fellowships and Awards

- **Lynn Bateman Fellowship** Aug 2011 – Dec 2011
Nominated by Department of Mathematical & Statistical Sciences. (Four winners each year for all mathematical fields. The scholarships included the tuition and monthly expenses.)
- **SIAM Student Travel Award** Mar 21 – Mar 24 2011
From SIAM Conference on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences (GS11) Long Beach, California.

- **Royal Thai Scholarships** Sep 2005 – Sep 2010
From King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Ministry of Science, Thailand. (Only one is awarded each academic year. The scholarships included the tuition and monthly expenses.)
- **Development and Promotion of Science and Technology Talents Project Scholarship** May 1997-Mar 2005
From Ministry of Science, Thailand. (Seventy awards are made each year for the whole country among high school students in science area. The scholarships included the tuition and monthly expenses.)

Attended Conferences

- International Conference on Mathematics and Statistics (ICMSC 2014), Ho Chi Minh City, Veitnam, August 29-30, 2014.
- The 18th International Computer Science and Engineering Conference, Khon Kaen, Thailand, July 30 - August 1, 2014.
- SIAM Conference on Mathematical & Computational Issues in the Geosciences, Long Beach, California, March 21-24, 2011.
- 7th Annual SIAM Front Range Applied Mathematics Student Conference, March 5, 2011.
- 6th Annual SIAM Front Range Applied Mathematics Student Conference, February 4, 2010.
- The 4th IMACS Conference on Mathematical Modelling and Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Modelling 2009), Roznov pod Radhostem, Czech Republic, June 22-26, 2009.
- MAFELAP (MATHematics of Finite ELEMENTS and APplications), Brunel University, London, UK, June 9-12, 2009.

Major Areas of Research Interest

Developing models using upscaling methods such as homogenization and Hybrid Mixture Theory and solving the system of equations deriving from conservation of mass, momentum and energy by employing numerical treatments, the finite element, finite volume, finite difference and boundary element methods and finding rigorous boundary conditions at a free-fluid/porous-medium interface to simulations of fluid dynamics for a free boundary problem.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้