

# ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

## Geometric Means for Positive Operators on a Hilbert Space

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

Patrawut Chansangiam

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
แขวงลาดกระบัง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ตในมุมมองที่เป็นการขยายแนวคิดของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับจำนวนจริงบวก รวมทั้งแสดงลักษณะสมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ได้แก่ การเป็นผลเฉลยเดียวของสมการริกคาตี การเป็นลิมิตร่วมของลำดับที่สร้างจากความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และสมบัติการเป็นค่าสุดขีด

คำสำคัญ : ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ตัวดำเนินการเชิงบวก การแปลงสมภาค ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก

### Abstract

This article proposes geometric means for positive operators on a Hilbert space in the viewpoint of being a suitable generalization of geometric means for positive real numbers. In addition, we show important characterizations of the geometric mean such as being a unique solution to Riccati's equation, being a common limit of recursive sequences defined by arithmetic and harmonic means, and some extremal properties.

**Keywords :** Geometric mean, Positive operator, Congruence transformation, Arithmetic mean, Harmonic mean

---

E-mail address : kcpattra@kmitl.ac.th โทรศัพท์ 0-23298400-11 (ต่อ 283) โทรสาร : 0-23298400-11 (ต่อ 284)

## 1. บทนำ

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนจริงบวกเป็นค่าเฉลี่ยพื้นฐานที่สำคัญในคณิตศาสตร์ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก  $a$  และ  $b$  นิยามโดย  $\sqrt{ab}$  ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเฉลี่ยนี้คือ  $\sqrt{ab}$  เป็นความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว  $a$  และ  $b$  ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตมีมุมมองต่างๆที่น่าสนใจดังนี้

- $\sqrt{ab}$  เป็นผลเฉลยที่เป็นบวกเพียงผลเฉลยเดียวของสมการ  $x^2 = ab$  หรือ  $xa^{-1}x = b$
- $\sqrt{ab}$  เป็นลิมิตร่วมของลำดับ  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  และ  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  ที่นิยามจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, n \in \mathbb{N}$$

- $\sqrt{ab} = \max \left\{ x \geq 0 : \begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$

สมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ได้แก่ ความเป็นทางเดียวและอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก นั่นคือ

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

ในบทความนี้ เราจะแนะนำค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยชี้ให้เห็นลักษณะสมบัติต่างๆของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตในมุมมองที่เป็นการขยายแนวคิดของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับจำนวนจริงบวก ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวก  $A$  และ  $B$  ซึ่งเขียนแทนด้วย  $A \# B$  มีสมบัติต่างๆดังนี้

- $A \# B$  เป็นผลเฉลยที่เป็นบวกเพียงผลเฉลยเดียวของสมการริกคาติ  $XA^{-1}X = B$
- $A \# B$  เป็นลิมิตร่วมของลำดับ  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  และ  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  ที่นิยามจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$A_1 = A, B_1 = B, A_{n+1} = A_n ! B_n, B_{n+1} = A_n \nabla B_n, n \in \mathbb{N}$$

เมื่อ  $!$  และ  $\nabla$  แทนค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกและค่าเฉลี่ยเลขคณิต ตามลำดับ

- $A \# B = \max \left\{ X \geq 0 : \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$

ยิ่งกว่านั้นค่าเฉลี่ยเรขาคณิตมีสมบัติความเป็นทางเดียวและสอดคล้องอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกสำหรับตัวดำเนินการ วิธีการนำเข้าสู่สมบัติต่างๆของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับตัวดำเนินการจะแตกต่างกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ เราใช้การแปลงสมภาค (congruence transformation) และการเป็นผลเฉลยเดียวของสมการริกคาติ (Riccati's equation) เป็นเครื่องมือสำคัญ

ให้  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตและให้  $B(H)$  แทนเซตของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตทั้งหมดบน  $H$  ตัวดำเนินการ  $A \in B(H)$  จะกล่าวว่าเป็น

- ตัวดำเนินการเชิงบวก (positive operator) ก็ต่อเมื่อ  $A$  เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัวเอง (self-adjoint operator) และ  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  สำหรับทุก  $x \in H$
- ตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน (positive definite operator) ก็ต่อเมื่อ  $A$  เป็นตัวดำเนินการเชิงบวกที่หาผกผันได้

สับเซตที่สำคัญของ  $B(H)$  มีดังนี้

- $B(H)^{sa}$  แทนเซตของตัวดำเนินการผูกพันในตัวเองทั้งหมดบน  $H$
- $B(H)^+$  แทนเซตของตัวดำเนินการเชิงบวกทั้งหมดบน  $H$
- $B(H)^{++}$  แทนเซตของตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอนทั้งหมดบน  $H$

เนื่องจาก  $B(H)^{sa}$  เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์  $\mathbb{R}$  โดยมี  $B(H)^+$  เป็นกรวยเชิงบวก (positive cone) เราจึงสามารถนิยามอันดับของตัวดำเนินการผูกพันในตัวเอง  $A$  และ  $B$  บน  $H$  ได้อย่างธรรมชาติ ดังนี้

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \in B(H)^+$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นการเรียงอันดับบางส่วน ในทำนองเดียวกัน สำหรับ  $A, B \in B(H)^{sa}$  นิยาม

$A > B \Leftrightarrow A - B \in B(H)^{++}$  ในกรณีเฉพาะ  $A \geq 0$  หมายความว่า  $A$  เป็นตัวดำเนินการเชิงบวก และ  $A > 0$  หมายความว่า  $A$  เป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน

## 2. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกและการแปลงสมภาค

ในการศึกษาค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้นนั้น ขั้นแรกคือการศึกษาค่าเฉลี่ยแบบฉบับได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก ค่าเฉลี่ยเลขคณิตสำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้น  $A$  และ  $B$  บนปริภูมิเวกเตอร์ใดๆนิยามโดย

$$A \nabla B = \frac{1}{2}(A+B)$$

ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของตัวดำเนินการเชิงบวก  $A, B \in B(H)^+$  ที่หาผกผันได้สามารถนิยามได้โดย

$$A ! B = 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

เรานิยามค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของของตัวดำเนินการเชิงบวก  $A, B$  ใดๆ โดยใช้ภาวะต่อเนื่องดังนี้

$$A ! B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A + \varepsilon I) ! (B + \varepsilon I)$$

โดยพิจารณาขีดจำกัดในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม (strong-operator topology) ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกถูกนำเสนอในรูปแบบของการบวกแบบขนานใน [1] สมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกได้ถูกศึกษาใน [2]

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวก  $A, B \in B(H)^+$  ไม่สามารถนิยามโดยสูตร  $(AB)^{1/2}$  เนื่องจาก  $AB$  อาจไม่ใช่ตัวดำเนินการเชิงบวก อย่างไรก็ตามนิยามของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (เขียนแทนด้วย  $\#$ ) ของตัวดำเนินการเชิงบวกที่หาผลคูณได้นั้นควรสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$(M 1) \quad \text{ถ้า } AB = BA \text{ แล้ว } A\#B = (AB)^{1/2}$$

$$(M 2) \quad \text{สำหรับทุก } X \in B(H) \text{ ที่หาผลคูณได้จะได้ว่า } X^*(A\#B)X = (X^*AX) \# (X^*BX)$$

**ทฤษฎีบท 2.1** ถ้า  $\#: B(H)^{++} \times B(H)^{++} \rightarrow B(H)^{++}$  เป็นการดำเนินการทวิภาคที่สอดคล้องกับสมบัติ (M 1) และ (M 2) ข้างต้น แล้ว

$$A\#B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

**พิสูจน์** พิจารณา  $A, B > 0$  ให้  $D = A^{-1/2}BA^{-1/2}$  เนื่องจาก  $DI = ID$  โดย (M 1) จะได้

$$I\#D = (ID)^{1/2} = D^{1/2} \text{ โดย (M 2) จะได้}$$

$$A^{1/2}(I\#D)A^{1/2} = A^{1/2}IA^{1/2} \# A^{1/2}DA^{1/2} = A\#B$$

$$\text{ดังนั้น } A\#B = A^{1/2}(I\#D)A^{1/2} = A^{1/2}D^{1/2}A^{1/2} = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

**บทนิยาม 2.2** ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ  $A, B > 0$  กำหนดโดย

$$A\#B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

จะได้ว่า  $A\#B > 0$  และถ้า  $AB = BA$  แล้ว  $A\#B = (AB)^{1/2}$  เรานิยามค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวก  $A, B$  ใดๆ โดยใช้ภาวะต่อเนื่องดังนี้

$$A\#B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A + \varepsilon I) \# (B + \varepsilon I)$$

โดยลิมิตดังกล่าวพิจารณาในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม นิยามดังกล่าวถูกนำเสนอใน [3] โดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ T. Ando ซึ่งนิยามนี้สมมูลกับนิยามที่ถูกนำเสนอใน [4] สมบัติต่างๆที่สำคัญของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนที่นิยามโดยสูตรดังกล่าวได้ถูกศึกษาใน [2]

นักคณิตศาสตร์ชื่อ J.D. Lawson และ Y. Lim ได้ใช้การแปลงสมภาคในการศึกษาค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ([5]) ในบทความนี้เราพิจารณาการแปลงสมภาคสำหรับตัวดำเนินการบนปริภูมิฮิลเบิร์ต สำหรับแต่ละตัวดำเนินการ  $C \in B(H)$  ที่หาผลคูณได้ เรานิยาม

$$\Gamma_C : B(H) \rightarrow B(H), \quad A \mapsto C^*AC$$

จะได้ว่าแต่ละ  $\Gamma_C$  เป็นสมสัณฐานเชิงเส้น (linear isomorphism) ที่มีผลผกผันเป็น  $\Gamma_{C^{-1}}$  เราเรียก  $\Gamma_C$  ว่าการแปลงสมภาคโดย  $C$  เซตของการแปลงสมภาคทั้งหมดเป็นกรุปภายใต้การคูณ(การประกอบ)

**ทฤษฎีบท 2.3** การแปลงสมภาคมีสมบัติการรักษาไว้ซึ่งการผูกพันในตัว การเป็นบวก การเป็นบวกแน่นอน อันดับและการหาผกผันได้ นั่นคือ สำหรับทุก  $C \in B(H)$  ที่หาผกผันได้และสำหรับทุก  $A, B \in B(H)$

1. ถ้า  $A$  เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว แล้ว  $\Gamma_C(A)$  เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว
2. ถ้า  $A$  หาผกผันได้ แล้ว  $\Gamma_C(A)$  หาผกผันได้
3. ถ้า  $A \geq B$  แล้ว  $\Gamma_C(A) \geq \Gamma_C(B)$  ในกรณีเฉพาะถ้า  $A$  เป็นตัวดำเนินการเชิงบวก แล้ว  $\Gamma_C(A)$  เป็นตัวดำเนินการเชิงบวก
4. ถ้า  $A > B$  แล้ว  $\Gamma_C(A) > \Gamma_C(B)$  ในกรณีเฉพาะถ้า  $A$  เป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน แล้ว  $\Gamma_C(A)$  เป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน

ยิ่งกว่านั้น  $\Gamma_C$  ส่ง  $B(H)^{sa}$ ,  $B(H)^+$  และ  $B(H)^{++}$  ไปทั่วถึงตัวเอง และ  $\Gamma_C : B(H)^{sa} \rightarrow B(H)^{sa}$  เป็นสมสัณฐานเชิงอันดับ (order isomorphism) เทียบกับ  $\leq$  พิสูจน์ ได้โดยตรงจากนิยาม

### 3. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกกับสมการริกกาติ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะให้มุมมองของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการในแง่ของการเป็นผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวของสมการของตัวดำเนินการที่เรียกว่าสมการริกกาติ

**ทฤษฎีบท 3.1** ([6]) ให้  $A > 0$  และ  $B \geq 0$  จะได้ว่าสมการริกกาติ  $\Gamma_X(A^{-1}) := XA^{-1}X = B$  มีผลเฉลย  $X \geq 0$  เพียงผลเฉลยเดียวคือ  $X = A \# B$

พิสูจน์ โดยการคำนวณจะได้

$$\begin{aligned} XA^{-1}X &= A^{1/2} (A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2} A^{1/2} A^{-1} A^{1/2} (A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2} A^{1/2} \\ &= A^{1/2} A^{-1/2} BA^{-1/2} A^{1/2} \\ &= B \end{aligned}$$

สมมติว่ามี  $Y \geq 0$  ที่ทำให้  $YA^{-1}Y = B$  จะได้ว่า

$$(A^{-1/2}XA^{-1/2})^2 = A^{-1/2}XA^{-1}XA^{-1/2} = A^{-1/2}YA^{-1}YA^{-1/2} = (A^{-1/2}YA^{-1/2})^2$$

โดยความเป็นได้อย่างเดียวของรากที่สองที่เป็นบวก จะได้ว่า  $A^{-1/2}XA^{-1/2} = A^{-1/2}YA^{-1/2}$  นั่นคือ

$$X = Y$$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกมีสมบัติต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.2** ((2) สำหรับแต่ละ  $A, B \geq 0$  จะได้ว่า

1. สมบัตินิจพด (idempotent property)  $A \# A = A$
2. สมบัติการผกผัน (inversion property)  $(A \# B)^{-1} = A^{-1} \# B^{-1}$  เมื่อ  $A, B > 0$
3. สมบัติการสลับที่ (commutative property)  $A \# B = B \# A$
4. สมบัติการคงสภาพภายใต้การแปลงสมภาค  $\Gamma_C(A) \# \Gamma_C(B) = \Gamma_C(A \# B)$  สำหรับทุก  $C \in B(H)$  ที่หาผกผันได้

**พิสูจน์**

1. โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้  $A > 0$  เนื่องจาก  $AA^{-1}A = A$  โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$$A \# A = A$$

2. เนื่องจาก  $(A \# B)A^{-1}(A \# B) = B$  จะได้ว่า  $(A \# B)^{-1}A(A \# B)^{-1} = B^{-1}$  ดังนั้นโดยทฤษฎีบท

$$3.1 \text{ จะได้ว่า } (A \# B)^{-1} = A^{-1} \# B^{-1}$$

3. โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้  $A, B > 0$  เนื่องจาก  $(B \# A)B^{-1}(B \# A) = A$  จะได้ว่า

$$(B \# A)A^{-1}(B \# A) = B \text{ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า } A \# B = B \# A$$

4. เราอาจสมมติให้  $A, B > 0$  เนื่องจาก  $(A \# B)A^{-1}(A \# B) = B$  โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Gamma_C(A \# B)\Gamma_C(A)^{-1}\Gamma_C(A \# B) &= C^*(A \# B)C(C^*AC)^{-1}C^*(A \# B)C \\ &= C^*(A \# B)A^{-1}(A \# B)C \\ &= C^*BC \\ &= \Gamma_C(B) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \Gamma_C(A) \# \Gamma_C(B) = \Gamma_C(A \# B)$$

**4. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตกับอันดับของตัวดำเนินการ**

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสามารถนำไปใช้พิสูจน์อสมการต่างๆที่สำคัญได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 4.1** ให้  $A, B > 0$  จะได้ว่า

1. ถ้า  $A \geq B$  แล้ว  $A^{-1} \leq B^{-1}$
2. ถ้า  $A > B$  แล้ว  $A^{-1} < B^{-1}$

**พิสูจน์** โดยทฤษฎีบท 3.1 และทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A \# B)(A^{-1} - B^{-1})(A \# B) &= (A \# B)A^{-1}(A \# B) - (A \# B)B^{-1}(A \# B) \\ &= (A \# B)A^{-1}(A \# B) - (B \# A)B^{-1}(B \# A) \\ &= B - A\end{aligned}$$

เนื่องจากการแปลงสมภาคมีสมบัติการคงสภาพอันดับ  $\leq$  และ  $<$  (ทฤษฎีบท 2.3) จะได้ว่าข้อ 1 และข้อ 2 เป็นจริง

**ข้อสังเกต 4.2** การแปลงสมภาคมีสมบัติการคงสภาพภายใต้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก นั่นคือ สำหรับแต่ละตัวดำเนินการ  $C \in B(H)$  ที่หาผกผันได้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\Gamma_C(A \nabla B) &= \Gamma_C(A) \nabla \Gamma_C(B) \\ \Gamma_C(A ! B) &= \Gamma_C(A) ! \Gamma_C(B) \\ \Gamma_C(A \# B) &= \Gamma_C(A) \# \Gamma_C(B)\end{aligned}$$

**พิสูจน์** เราเคยพิสูจน์แล้วว่า  $\Gamma_C(A \# B) = \Gamma_C(A) \# \Gamma_C(B)$  โดยความเป็นเชิงเส้นของ  $\Gamma_C$  จะได้  $\Gamma_C(A \nabla B) = \Gamma_C(A) \nabla \Gamma_C(B)$  โดยการคำนวณจะได้

$$\begin{aligned}[C^*(A^{-1} + B^{-1})^{-1}C]^{-1} &= C^{-1}(A^{-1} + B^{-1})(C^*)^{-1} \\ &= C^{-1}A^{-1}(C^*)^{-1} + C^{-1}B^{-1}(C^*)^{-1} \\ &= (C^*AC)^{-1} + (C^*BC)^{-1}\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\Gamma_C(A ! B) = \Gamma_C(A) ! \Gamma_C(B)$

**ทฤษฎีบท 4.3** (อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก [2]) ให้  $A, B \geq 0$  จะได้

$$A \nabla B \geq A \# B \geq A ! B$$

**พิสูจน์** โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้  $A, B > 0$  พิจารณา  $D = A^{-1/2}BA^{-1/2}$  เนื่องจาก

$$I - 2D^{1/2} + D = (I - D^{1/2})^2 \geq 0$$

จะได้ว่า  $I \# D = D^{1/2} \leq (I + D)/2$  ดังนั้นเราจะได้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตดังนี้

$$\frac{A+B}{2} = A^{1/2} \left( \frac{I+D}{2} \right) A^{1/2} \geq A^{1/2} D^{1/2} A^{1/2} = A \# B$$

เมื่อประยุกต์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตกับ  $A^{-1}$  และ  $B^{-1}$  จะได้

$$\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2} \geq A^{-1} \# B^{-1} = (A \# B)^{-1}$$

ดังนั้น  $A ! B \leq A \# B$

**บทตั้ง 4.4** ([2]) สำหรับแต่ละ  $A, B \geq 0$  จะได้ว่า  $(A \nabla B) \# (A ! B) = A \# B$

พิสูจน์ โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้  $A, B > 0$  ให้  $X = A^{-1/2}BA^{-1/2}$  จะได้ว่า

$$(I \nabla X) \# (I ! X) = \frac{I+X}{2} \# 2X(I+X)^{-1} = I \# X$$

โดยการประยุกต์  $\Gamma_{A^{1/2}}$  จะได้  $(A \nabla B) \# (A ! B) = A \# B$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสามารถนิยามได้จากกระบวนการทำซ้ำ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 4.5** ((7)) ให้  $A, B \geq 0$  พิจารณากระบวนการทำซ้ำ

$$A_1 = A, B_1 = B, A_{n+1} = A_n ! B_n, B_{n+1} = A_n \nabla B_n, n \in \mathbb{N}$$

จะได้ว่าลำดับ  $A_n$  และลำดับ  $B_n$  ลู่เข้าโดยมีลิมิตร่วมกันคือ  $A \# B$

พิสูจน์ โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้  $A, B > 0$  โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (ทฤษฎีบท 4.3) จะได้ว่า

$$A_n \leq A_{n+1} \leq A \# B \leq B_{n+1} \leq B_n, n \in \mathbb{N}$$

นั่นคือ  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  เป็นลำดับเพิ่มของตัวดำเนินการเชิงบวกที่มีขอบเขตบน ดังนั้นลำดับนี้ลู่เข้าในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม ในทำนองเดียวกัน  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  เป็นลำดับลดของตัวดำเนินการเชิงบวกที่มีขอบเขตล่าง ซึ่งจะลู่เข้าในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม สำหรับแต่ละ  $n \in \mathbb{N}$  เนื่องจาก  $A_n \leq A_n ! B_n$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} B_{n+1} - A_{n+1} &= \frac{1}{2}(A_n + B_n) - (A_n ! B_n) \\ &= \frac{1}{2}A_n - (A_n ! B_n) + \frac{1}{2}B_n \\ &\leq \frac{1}{2}(B_n - A_n) \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  และ  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  ลู่เข้าสู่ลิมิตเดียวกัน

เนื่องจาก  $A_{n+1}$  และ  $B_{n+1}$  เป็นค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกและค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ  $A_n$  และ  $B_n$  โดยบทตั้ง 4.4 จะได้ว่า  $A_{n+1} \# B_{n+1} = A_n \# B_n$  ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้

$$A_n \# B_n = A \# B, n \in \mathbb{N}$$

ยิ่งกว่านั้นเนื่องจาก  $A_{n+1} \leq A_n \# B_n \leq B_{n+1}$  สำหรับทุก  $n \in \mathbb{N}$  จะได้ว่าลิมิตของ  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  และ  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  คือ  $A \# B$

**ทฤษฎีบท 4.6** (สมบัติทางเดียวของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต [2]) ให้  $A_1, A_2, B_1, B_2 \geq 0$  ถ้า  $A_1 \geq A_2$  และ  $B_1 \geq B_2$  แล้ว  $A_1 \# B_1 \geq A_2 \# B_2$

**พิสูจน์** พิจารณากระบวนการทำซ้ำในทฤษฎีบท 4.5 สำหรับ  $A_1 \# B_1$  และ  $A_2 \# B_2$

**ทฤษฎีบท 4.7** (อสมการของโลว์เนอร์-ไฮนซ์ [8]) ถ้า  $A \geq B \geq 0$  แล้ว  $A^{1/2} \geq B^{1/2}$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $A \geq B$  จะได้  $A^{1/2} = I \# A \geq I \# B = B^{1/2}$  โดยทฤษฎีบท 4.6

**บทตั้ง 4.8** ให้  $A, B, C \in B(H)$  โดยที่  $A > 0$  และ  $B \geq 0$  จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad B \geq C^* A^{-1} C$$

**พิสูจน์** ให้

$$X = \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad G = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า  $G > 0$  และ

$$\begin{aligned} \Gamma_G(X) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^* A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^* A^{-1} C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\Gamma_G$  มีสมบัติการคงสภาพการเป็นบวกของตัวดำเนินการ (ทฤษฎีบท 2.3) จะได้ว่า  $X \geq 0$  ก็ต่อเมื่อ  $B \geq C^* A^{-1} C$

**ทฤษฎีบท 4.9** ([2]) ให้  $A > 0$  และ  $B \geq 0$  จะได้ว่า

$$A \# B = \max \left\{ X \geq 0 : \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $(A \# B)A^{-1}(A \# B) = B$  โดยบทตั้ง 4.8 จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} A & A \# B \\ A \# B & B \end{pmatrix} \geq 0$$

สมมติ  $X \geq 0$  โดยที่

$$\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0$$

โดยบทตั้ง 4.8 จะได้  $XA^{-1}X \leq B$  ดังนั้น

$$(A^{-1/2}XA^{-1/2})^2 = A^{-1/2}(XA^{-1}X)A^{-1/2} \leq A^{-1/2}BA^{-1/2}$$

โดยทฤษฎีบท 4.7 จะได้  $A^{-1/2}XA^{-1/2} \leq (A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}$  โดยการประยุกต์  $\Gamma_{A^{1/2}}$  จะได้

$$X \leq A \# B$$

**บทแทรก 4.10** ให้  $A, B, X \in B(H)$  โดยที่  $A > 0$  และ  $B \geq 0$  จะได้ว่า  $XA^{-1}X \leq B$  ก็ต่อเมื่อ

$$X \leq A \# B$$

พิสูจน์ ได้จากการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 4.9

### เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Anderson, W.N. and Duffin, R.J., 1969. Series and parallel addition of matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 26, 576–594.
- [2] Ando, T., 1979. Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products. *Linear Algebra and Its Applications*, 26, 203–241.
- [3] Ando, T., 1978. Topics on Operator Inequalities. Hokkaido Univ., Sapporo.
- [4] Pusz, W. and Woronowicz, S., 1975. Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map. *Reports on Mathematical Physics*, 8, 159–170.
- [5] Lawson, J.D. and Lim, Y., 2001. The geometric mean, Matrices, Metrics, and More. *The American Mathematical Monthly*, 108, 797-812.
- [6] Anderson, W.N. and Trapp, G.E., 1980. Operator means and electrical networks. Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pp. 523-527.
- [7] Anderson, W.N., Morley, T.D. and Trapp, G.E., 1979. Characterization of parallel subtraction. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 76, pp. 3599–3601
- [8] Löwner, C., 1934. Über monotone matrix funktionen. *Mathematische Zeitschrift*, 38, 177–216.