การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงปกติ

Statistical Hypotheses Testing under Normal Distribution

สายชล สินสมบูรณ์ทอง

Saichon Sinsomboonthong

สาขาวิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05 ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 11 แล้ว c_1 และกำลังของการทดสอบ $(1-\beta)$ จะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 11$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 13 ถึง 19 แล้ว c_2 และกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง ส่วนในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

คำสำคัญ : การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย กำลังของการทดสอบและการแจกแจงปกติ

E-mail address : kssaicho@kmitl.ac.th

Abstract

In this study, the most powerful test and uniformly most powerful test were investigated under Normal distribution and the test size of 0.05. The result of the most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.05$ for any n, $\mu_0 = 12$ and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_1 increased from 5 to 11, c_1 and power of the test $(1-\beta)$ showed an certain constant value, while $\mu_1 = 11$, power of the test had an decrease. In addition, in the most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.05$ for any n, $\mu_0 = 12$ and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_1 increased from 13 to 19, c_2 and power of the test had constant value, while $\mu_1 = 13$, power of the test had an decrease. In the uniformly most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.05$ for any n and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_0 increased from 12 to 18, while c_1 had an increase. In addition, in the uniformly most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.05$ for any n and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_0 increased from 12 to 18, while c_2 had an increase.

Keywords : Most powerful test, Uniformly most powerful test, Power of the test, and Normal distribution

1. บทนำ

ในเรื่องของการอนุมานเชิงสถิตินั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วนสำคัญ ๆ คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์และการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ จุดประสงค์ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ คือหาข้อสรุปเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่ผู้วิจัยสนใจศึกษา ในการดำเนินการทดสอบเมื่อกำหนดขนาดของการทดสอบ (size of the test) α ให้ และขนาดตัวอย่าง n คงที่ ผู้วิจัยจะหาการทดสอบ (test) ที่มีกำลังของการทดสอบ (power of the test) สูงที่สุด อย่างไรก็ตาม การทดสอบมีชื่อเรียกต่างกันไปขึ้นอยู่กับการตั้งสมมติฐานเชิงสถิติที่ต้องการทดสอบ [1] มีผู้วิจัยหาการทดสอบแบบต่าง ๆ เช่น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายภายใต้การแจกแจงทวินาม [2] การแจกแจงปัวส์ซง [3] และการแจกแจงเบอร์นูลลี [4] ในบทความนี้ผู้วิจัยมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ โดย

การหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ภายใต้การแจกแจงปกติ

จากการศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินาม โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.3$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 10, 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง n = 30 หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.3$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง n = 30 หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต c จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.3$ หรือ $\theta \geq 0.7$ เทียบกับ $H_1 : 0.3 < \theta < 0.7$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ n = 10, 20, 30 จะไม่สามารถหา ค่าได้ ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 10 จะไม่สามารถหาค่าได้ สำหรับการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.3 \leq \theta \leq 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01, 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c_1(\gamma_1)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และ $X = c_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c_1(\gamma_1)$ และ $X = c_2(\gamma_2)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ

$\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = c_1(\gamma_1)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก และ $X = c_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 10 จะไม่สามารถหาค่าได้ [2]

การศึกษาการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสองด้าน ภายใต้การแจกแจงปัวส์ซง โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.2$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.2 < \theta < 0.75$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่า γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยตลอด ยกเว้นที่ n = 20 จะไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 จะไม่สามารถหาค่าได้ ในการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลง ยกเว้นที่ n = 20 และ 50 จะไม่สารถหาค่าได้ และการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne 0.5$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก ค่า γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงโดยตลอด และค่าวิกฤต c_1, c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดเช่นเดียวกัน [3]

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05 ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ค่าวิกฤต c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ค่าวิกฤต c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ค่าวิกฤต c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่าวิกฤต γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ค่าวิกฤต c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น [4]

ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาถึงการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย โดยมีวิธีในการดำเนินงานดังนี้

1) สมมติฐานที่สนใจทดสอบ

1.1 $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

1.2 $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

1.3 $H_0 : \mu \ge \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_0 : \mu \le \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

2) ขนาดการทดสอบสำหรับงานวิจัยในครั้งนี้เท่ากับ 0.05

3) เขียนโปรแกรม

เขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดและการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

3. ผลการวิจัย

3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} & ; \quad -\infty < x < \infty,\ \sigma^2 > 0 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

3.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

ในที่นี้ $$L(\mu; x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} \leq c$$

จะได้ $$\frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) - \frac{n}{2\sigma_0^2}(\mu_0^2-\mu_1^2)} \leq c$$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) - \frac{n}{2\sigma_0^2}(\mu_0^2-\mu_1^2) \leq \ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \leq \frac{n}{2\sigma_0^2}(\mu_0^2-\mu_1^2) + \ln c$$

แต่ $\mu_1 < \mu_0$ จะได้ $\mu_0 - \mu_1 > 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \leq \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1) + \frac{\sigma_0^2 \ln c}{n(\mu_0 - \mu_1)} = c_1$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว $\overline{X}$ ก็จะมีการแจกแจงปกติเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma_0^2}{n}$

ดังนั้น

$$P\left[\overline{X} \leq c_1 \middle| \mu = \mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \leq \frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \geq -\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)\right] = \alpha$$

$$-\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = z_\alpha$$

$$c_1 = \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

เมื่อ $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\text{กำลังของการทดสอบ} = 1 - \beta = P\left[\overline{X} \leq c_1 \middle| \mu = \mu_1\right]$$

$$= P\left[Z \leq \frac{\mu_0 - \frac{\sigma_0 Z_\alpha}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right]$$

$$= P\left[Z \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_0} + z_\alpha\right]$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \mu_1 = 11,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้ $c_1 \quad = \quad 12-\frac{1.645}{\sqrt{16}} \quad = \quad 11.59$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu = 11,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \le 11.59 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > 11.59 \end{cases}$$

กำลังของการทดสอบ

$$\begin{aligned} &= P\left[\bar{X} \le 11.59 \mid \mu = 11\right] \\ &= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{11.59-11}{1/\sqrt{16}}\right] \\ &= P(Z \le 2.36) \\ &= 1-P(Z > 2.36) \\ &= 1-0.0091 \\ &= 0.9909 \end{aligned}$$

ตารางที่ 3.1. ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_1	$1-\beta$
0.05	1	16	12	5	11.59	1.0000000000
				7	11.59	1.0000000000
				9	11.59	1.0000000000
				11	11.59	0.9908625325
		25		5	11.67	1.0000000000
				7	11.67	1.0000000000
				9	11.67	1.0000000000
				11	11.67	0.9995959422
		36		5	11.73	1.0000000000
				7	11.73	1.0000000000
				9	11.73	1.0000000000
				11	11.73	0.9999940624

ตารางที่ 3.1. (ต่อ) ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_1	$1-\beta$
0.05	1	49	12	5	11.77	1.0000000000
				7	11.77	1.0000000000
				9	11.77	1.0000000000
				11	11.77	0.9999999648
		64		5	11.79	1.0000000000
				7	11.79	1.0000000000
				9	11.79	1.0000000000
				11	11.79	0.9999999999
		81		5	11.82	1.0000000000
				7	11.82	1.0000000000
				9	11.82	1.0000000000
				11	11.82	1.0000000000
		100		5	11.84	1.0000000000
				7	11.84	1.0000000000
				9	11.84	1.0000000000
				11	11.84	1.0000000000

จากตารางที่ 3.1 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 11 แล้ว c_1 และกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 11$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 11$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าเพิ่มขึ้น

3.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

ในทำนองเดียวกับหัวข้อที่ 3.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \ge \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

กำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P\left[\bar{X} \ge c_2 \middle| \mu = \mu_1\right]$

$$= P\left[Z \ge \frac{\mu_0 + \dfrac{\sigma_0 Z_\alpha}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right]$$

$$= P\left[Z \ge \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma_0} + z_\alpha\right]$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \mu_1 = 13,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้ $c_2 = 12 + \dfrac{1.645}{\sqrt{16}}$

$= 12.41$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu = 13,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \ge 12.41 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < 12.41 \end{cases}$$

กำลังของการทดสอบ $= P\left[\bar{X} \ge 12.41 \middle| \mu = 13\right]$

$$= P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{12.41 - 13}{1/\sqrt{16}}\right]$$

$$= P(Z \ge -2.36)$$

$$= P(Z \le 2.36)$$

$$= 1 - P(Z > 2.36)$$

$$= 1 - 0.0091$$

$$= 0.9909$$

ตารางที่ 3.2. ค่าวิกฤต c_2 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_2	$1-\beta$
0.05	1	16	12	13	12.41	0.9908625325
				15	12.41	1.0000000000
				17	12.41	1.0000000000
				19	12.41	1.0000000000
		25		13	12.33	0.9995959422
				15	12.33	1.0000000000
				17	12.33	1.0000000000
				19	12.33	1.0000000000
		36		13	12.27	0.9999940660
				15	12.27	1.0000000000
				17	12.27	1.0000000000
				19	12.27	1.0000000000
		49		13	12.24	0.9999999481
				15	12.24	1.0000000000
				17	12.24	1.0000000000
				19	12.24	1.0000000000
		64		13	12.21	0.9999999999
				15	12.21	1.0000000000
				17	12.21	1.0000000000
				19	12.21	1.0000000000

ตารางที่ 3.2. (ต่อ) ค่าวิกฤต c_2 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_2	$1-\beta$
0.05	1	81	12	13	12.18	1.0000000000
				15	12.18	1.0000000000
				17	12.18	1.0000000000
				19	12.18	1.0000000000
		100		13	12.16	1.0000000000
				15	12.16	1.0000000000
				17	12.16	1.0000000000
				19	12.16	1.0000000000

จากตารางที่ 3.2 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 13 ถึง 19 แล้ว c_2 และกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง ส่วนกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าเพิ่มขึ้น

3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาการทดสอบสำหรับสมมติฐานต่าง ๆ ถ้าสามารถหาการทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อย ๆ แล้วไม่ได้ทำให้การทดสอบเปลี่ยนแปลงไป แต่ยังคงเหมือนเดิม สามารถใช้การทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นการทดสอบที่ดีมาก กล่าวคือการทดสอบที่มีรูปแบบเดียว (Uniform) และสามารถใช้ทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกเป็น 2 กรณี

3.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

พิจารณา $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq c$$

จะได้

$$\frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}(\mu_0^2-\mu_1^2)} \leq c$$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right) \leq \ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \leq \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

แต่ $\mu_1 < \mu_0$ จะได้ $\mu_0 - \mu_1 > 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \leq \frac{1}{2}(\mu_0+\mu_1)+\frac{\sigma_0^2 \ln c}{n(\mu_0-\mu_1)} = c_1$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\mu_1 < \mu_0$

ดังนั้น $P\left[\bar{X} \leq c_1 \middle| \mu = \mu_0\right] = \alpha$

$$P\left[Z \leq \frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \geq -\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)\right] = \alpha$$

$$-\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = z_\alpha$$

$$c_1 = \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

เมื่อ $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \leq \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้ $c_1 = 12 - \dfrac{1.645}{\sqrt{16}}$

$= 11.59$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu < 12,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \leq 11.59 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > 11.59 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.3. ค่าวิกฤต c_1 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	c_1
0.05	1	16	12	11.59
			14	13.59
			16	15.59
			18	17.59
		25	12	11.67
			14	13.67
			16	15.67
			18	17.67

ตารางที่ 3.3. (ต่อ) ค่าวิกฤต c_1 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	c_1
0.05	1	36	12	11.73
			14	13.73
			16	15.73
			18	17.73
		49	12	11.77
			14	13.77
			16	15.77
			18	17.77
		64	12	11.79
			14	13.79
			16	15.79
			18	17.79
		81	12	11.82
			14	13.82
			16	15.82
			18	17.82
		100	12	11.84
			14	13.84
			16	15.84
			18	17.84

จากตารางที่ 3.3 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

3.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

ในทำนองเดียวกับหัวข้อที่ 3.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \ge \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้ $c_2 = 12 + \dfrac{1.645}{\sqrt{16}} = 12.41$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu > 12,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \ge 12.41 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < 12.41 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.4. ค่าวิกฤต c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	c_2
0.05	1	16	12	12.41
			14	14.41
			16	16.41
			18	18.41
0.05		25	12	12.33
			14	14.33

ตารางที่ 3.4. (ต่อ) ค่าวิกฤต c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	c_2
0.05	1	25	16	16.33
			18	18.33
			12	12.27
			14	14.27
		36	16	16.27
			18	18.27
			12	12.24
			14	14.24
		49	16	16.24
			18	18.24
			12	12.21
			14	14.21
		64	16	16.21
			18	18.21
			12	12.18
			14	14.18
		81	16	16.18
			18	18.18
			12	12.16
			14	14.16
		100	16	16.16
			18	18.16

จากตารางที่ 3.4 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง

3.2.3 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

3.2.3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

พิจารณา $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยายในหัวข้อที่ 3.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \leq \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\mu_1 < \mu_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 3.2.1 ดังแสดงในตารางที่ 3.3

3.2.3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \leq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

ในทำนองเดียวกับหัวข้อที่ 3.2.3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \geq \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu \leq \mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu > \mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 3.2.2 ดังแสดงในตารางที่ 3.4

4. สรุปผลการวิจัย

1) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu=\mu_1,\ \mu_1<\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0=12$ และ $\sigma_0^2=1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 11 แล้ว c_1 และกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1=11$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0=12$ และ $\sigma_0^2=1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1=11$ ซึ่งกำลังของการของทดสอบจะมีค่าเพิ่มขึ้น

2) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu=\mu_1,\ \mu_1>\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0=12$ และ $\sigma_0^2=1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 13 ถึง 19 แล้ว c_2 และกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1=13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0=12$ และ $\sigma_0^2=1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง ส่วนกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1=13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าเพิ่มขึ้น

3) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu<\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2=1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

4) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเรื่องนี้ได้รับทุนจากคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นักศึกษาปริญญาโท ชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

เอกสารอ้างอิง

[1] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C., 1974. Introduction to the Theory of Statistics. 3rd ed. Auckland : McGraw Hill.

[2] บรรทม สุระพร, 2541. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินาม. *วารสารพัฒนบริหารศาสตร์*, 38(3), 78-86. [Buntoom Suraporn, 1998. Statistical hypotheses testing under Binomial distribution. NIDA Journal, 38(3), 78-86. (in Thai)]

[3] รุจิเรข ดีเสียง, 2541. การทดสอบสมมติฐานสองด้านเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซง. *วารสารพัฒนบริหารศาสตร์*, 38(2), 125-132. [Rujirek Deesaeng, 1998. Statistical hypotheses testing under Poisson distribution. NIDA Journal, 38(2), 125-132. (in Thai)]

[4] สายชล สินสมบูรณ์ทอง, 2554. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี. *วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง*, 20(2), 72-93. [Saichon Sinsomboonthong, 2011. Statistical hypotheses testing under Bernoulli distribution. Journal of Ladkrabang Sciences, 20(2), 72-93. (in Thai)]