รายงานการวิจัย

การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี

Statistical Hypotheses Testing Under Bernoulli Distribution

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2554

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

รายงานการวิจัย

การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี

Statistical Hypotheses Testing Under Bernoulli Distribution

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2554

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

หัวข้อ	การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี Statistical Hypotheses Testing Under Bernoulli Distribution
ผู้วิจัย	รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง
สาขา	สถิติประยุกต์
พ.ศ.	2554

บทคัดย่อ

ในการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05

ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ส่วนในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

Thesis Title Statistical Hypotheses Testing Under Bernoulli Distribution
Researcher Assoc.Prof. Saichon Sinsomboonthong
Programme Applied Statistics
Year 2011

Abstract

In this study, uniformly most powerful test and uniformly most powerful unbiased test were investigated using statistical hypotheses testing under Bernoulli distribution with the sample size of 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 and 50, and the test size of 0.05.

The result of the uniformly most powerful test for $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$ showed that $\alpha = 0.05$ for any n when θ_0 increased from 0.1 to 0.9 and γ showed an uncertain value, while c_1 had an increase. In addition, in the uniformly most powerful test for $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$ showed that $\alpha = 0.05$ for any n when θ_0 increased from 0.1 to 0.9 and γ had an uncertained value, while c_2 had an increase.

In the uniformly most powerful test for $H_0 : \theta \le 0.25$ or $\theta \ge 0.75$ versus $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$, it was found that $\alpha = 0.05$ when n had an increase from 5 to 50 and γ_1, γ_2 showed an uncertain value, while c_1 and c_2 increased.

The result of the uniformly most powerful unbiased test for $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.75$ versus $H_1 : \theta < 0.25$ or $\theta > 0.75$ showed that $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ could not be found when $\alpha = 0.05$ and n = 5 and 10. However, when there was an increase of n from 5 to 50, γ_1, γ_2 had uncertained value, and there was an increase for c_1 and c_2.

In addition, the result of the uniformly most powerful unbiased test for $H_0 : \theta = 0.25$ versus $H_1 : \theta \ne 0.25$ showed that $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ could not be found when $\alpha = 0.05$ with n = 5 and 10. However, when there was an increase of n from 5 to 50, γ_1, γ_2 had an uncertained value, and there was an increase for c_1 and c_2.

คำสำคัญ (Keywords) : Uniformly most powerful test and Uniformly most powerful unbiased test

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือจากบุคคลผู้มีพระคุณหลายท่าน ดังนี้

ขอขอบพระคุณโครงการวิจัยที่เอื้อเฟื้อทุนสนับสนุนในการวิจัยครั้งนี้ โดยใช้เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นักศึกษาปริญญาโท ชั้นปีที่ 1 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยี พระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

ขอขอบคุณทุกท่านที่มิได้เอ่ยนามในที่นี้ที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่าง ๆ และคอยเป็นกำลังใจให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

....

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

(หัวหน้าโครงการวิจัย)

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VII
บทที่ 1 บทนำ	**1**
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	2
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย	3
1.5 นิยามคำศัพท์	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและรายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	**4**
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	4
2.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด	4
2.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย	7
2.1.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย	13
2.2 รายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	14
บทที่ 3 วิธีดำเนินงานวิจัย	**16**
3.1 อุปกรณ์ในการวิจัย	16
3.1.1 อุปกรณ์ที่มีอยู่แล้ว	16
3.1.2 อุปกรณ์ที่ต้องการเพิ่มเติม	16
3.2 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย	16
3.3 โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	18

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล **19**

4.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด 19

4.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ 19

4.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ 24

4.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย 28

4.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ 28

4.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ 33

4.2.3 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ 38

4.2.4 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ 41

4.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย 45

4.3.1 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ 45

4.3.2 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ 48

4.4 ตัวอย่าง 51

4.4.1 การโยนเหรียญและโยนลูกเต๋า 51

4.4.2 ชุดชั้นในสตรี ผ้าตัวกลม ขนาด 32 52

4.4.3 กล่องพลาสติกบรรจุขนม 53

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ **55**

5.1 สรุปผลการวิจัย 55

5.2 ข้อเสนอแนะ 56

บรรณานุกรม 57

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 4.1 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1,\theta_1<\theta_0$ 22

ตารางที่ 4.2 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_2 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1,\theta_1>\theta_0$ 26

ตารางที่ 4.3 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_1 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta<\theta_0$ 31

ตารางที่ 4.4 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta>\theta_0$ 36

ตารางที่ 4.5 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le 0.25$ หรือ $\theta\ge 0.75$ เทียบกับ $H_1:0.25<\theta<0.75$ 44

ตารางที่ 4.6 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:0.25\le\theta\le 0.75$ เทียบกับ $H_1:\theta<0.25$ หรือ $\theta>0.75$ 47

ตารางที่ 4.7 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=0.25$ เทียบกับ $H_1:\theta\ne 0.25$ 50

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในเรื่องของการอนุมานเชิงสถิตินั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วนสำคัญ ๆ คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์และการทดสอบสมมติฐาน ซึ่งจุดประสงค์ในการทดสอบสมมติฐานคือ การหาวิธีทั่ว ๆ ไปสำหรับการทดสอบสมมติฐานเพื่อนำไปประยุกต์กับปัญหาทั่วไปได้ในงานวิจัยที่เกี่ยวกับการทดลอง จุดประสงค์บางครั้งเพียงเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ เช่น นักวิจัยคนหนึ่งอาจต้องการที่จะประมาณผลผลิตของข้าวโพดผสมสายพันธุ์ใหม่ แต่บ่อยครั้งที่จุดประสงค์สุดท้ายจะเกี่ยวข้องกับการใช้การประมาณค่าและการทดสอบสมมติฐาน เช่น นักวิจัยคนหนึ่งอาจต้องการที่จะเปรียบเทียบผลผลิตของข้าวโพดพันธุ์ผสมสายพันธุ์ใหม่กับข้าวโพดสายพันธุ์มาตรฐาน ถ้าสายพันธุ์ใหม่ดีกว่าสายพันธุ์มาตรฐาน ก็จะได้แนะนำให้ใช้สายพันธุ์ใหม่ ซึ่งเป็นสถานการณ์ปกติในการวิจัย นักวิจัยอาจต้องการหาวิธีการใหม่ ๆ ในการเพิ่มอายุการใช้งานของหลอดไฟชนิดหนึ่ง หรืออาจต้องการทราบว่ายาฆ่าเชื้อโรคชนิดใหม่มีประสิทธิภาพในการรักษาการติดเชื้อโรคได้ดีกว่ายาฆ่าเชื้อโรคมาตรฐานหรือไม่ หรือต้องการทราบว่าวิธีการเก็บรักษาอาหารแบบหนึ่งจะดีกว่าวิธีการเก็บรักษาอาหารอีกแบบหนึ่งหรือไม่ เป็นต้น

สมมติว่าหลอดไฟยี่ห้อหนึ่ง ซึ่งผลิตโดยวิธีมาตรฐานมีอายุการใช้งานเฉลี่ย 1,400 ชั่วโมง เราต้องการทดสอบว่าวิธีการผลิตแบบใหม่ดีกว่าวิธีการผลิตแบบมาตรฐานหรือไม่ ในที่นี้เรากำลังเกี่ยวข้องกับหลอดไฟฟ้า 2 พวก พวกหนึ่งใช้วิธีการผลิตแบบมาตรฐาน ส่วนอีกพวกหนึ่งใช้วิธีการผลิตแบบใหม่ ถ้าทราบจากการทดสอบในอดีตที่ผ่านมาว่าประชากรชุดแรกมีอายุการใช้งานเฉลี่ยเท่ากับ 1,400 ชั่วโมง คำถามก็คือว่าประชากรชุดที่สองมีอายุการใช้งานเฉลี่ยมากกว่าหรือน้อยกว่า 1,400 ชั่วโมง เพื่อที่ตอบคำถามนี้เราอาจตั้งสมมติฐานว่าวิธีการผลิตแบบใหม่มีอายุการใช้งานเฉลี่ยไม่ได้มากกว่าวิธีการผลิตแบบมาตรฐาน โดยทั่วไป เราหวังว่าสมมติฐานจะถูกปฏิเสธ เพื่อทดสอบสมมติฐานนี้แล้ววัดอายุการใช้งานของหลอดไฟฟ้า สมมติว่าอายุการใช้งานเฉลี่ยของตัวอย่างเท่ากับ 1,500 ชั่วโมง ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธีการผลิตแบบใหม่ดีกว่าวิธีการผลิตแบบมาตรฐาน แต่ยังไม่สามารถสรุปได้ว่าวิธีการผลิตแบบใหม่ดีกว่าวิธีการผลิตแบบมาตรฐาน สมมติว่าค่าประมาณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยคือ $\sigma/\sqrt{n}$ มีค่าเท่ากับ 125 ชั่วโมง โดยที่ n เป็นขนาดของตัวอย่าง จะได้ช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับอายุการใช้งานเฉลี่ยของประชากรพวกที่สอง ซึ่งสมมติว่ามีการแจกแจงแบบปกติมีค่าอยู่ในช่วง 1,300 ถึง 1,800 ชั่วโมง ดังนั้นอายุการใช้งานฉลี่ยตัวอย่าง 1,550 ชั่วโมง สามารถกล่าวได้อย่างง่าย ๆ ว่ามาจากประชากรที่มีอายุการใช้งานเฉลี่ย 1,400 ชั่วโมง เราไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะปฏิเสธสมมติฐาน ในทางตรงกันข้าม

ถ้า $\sigma/\sqrt{n}$ มีค่าเท่ากับ 25 ชั่วโมง จะได้ช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับค่าเฉลี่ยของประชากรพวกที่สองมีค่าอยู่ในช่วง 1,501 ถึง 1,599 ชั่วโมง เราสามารถกล่าวได้อย่างมั่นใจว่าจะปฏิเสธสมมติฐาน และเสนอว่าวิธีการผลิตแบบใหม่ดีกว่าวิธีการผลิตแบบมาตรฐาน (Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. : 1974)

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้ ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะทำการศึกษาถึงการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

1.2.2 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.2.3 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05 หลังจากนั้นเก็บรวบรวมข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี ได้แก่ การโยนเหรียญ การโยนลูกเต๋า การตรวจสอบคุณภาพชุดชั้นในสตรี และการตรวจสอบคุณภาพกล่องพลาสติกบรรจุขนม เป็นต้น โดยใช้ความน่าจะเป็นของการเกิดความสำเร็จจากการบันทึกข้อมูลในอดีต ใช้ตัวอย่างขนาด 50, 100, 500 และ 14,000 ชิ้น บันทึกผลจากการผลิตสินค้าแต่ละชนิดนับจำนวนสินค้าที่บกพร่อง ภายหลังจากที่หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายได้แล้ว หลังจากนั้นพิจารณาจากการทดทดสอบที่หาได้ว่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมานั้นเมื่อเทียบกับการทดสอบแบบต่าง ๆ แล้วเราจะยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด โดยในการวิจัยในครั้งนี้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการคำนวณ รวมระยะเวลาดำเนินโครงการ 1 ปี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1.4.1 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

1.4.2 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.4.3 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.5 นิยามคำศัพท์

Most powerful test หมายถึง การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

Uniformly most powerful test หมายถึง การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

Uniformly most powerful unbiased test หมายถึง การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

Two-sided test หมายถึง การทดสอบสองด้าน

บทที่ 2

ทฤษฎีและรายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test) (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ และต้องการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยที่ C เป็น**บริเวณวิกฤต (Critical region)**

บริเวณวิกฤต C เป็น**บริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR)** ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ ก็ต่อเมื่อ C มีขนาด α และกำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤต C ไม่น้อยกว่ากำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤตอื่นใดที่มีขนาด α ด้วยกัน

ถ้า C_1 เป็นบริเวณวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ คือ ถ้า $P[(X_1,...,X_n) \in C_1 | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$ แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

1. $P[(X_1,...,X_n) \in C | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$

และ 2. $P[(X_1,...,X_n) \in C | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}] \geq P[(X_1,...,X_n) \in C_1 | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}]$

สถิติเพื่อการทดสอบ $T = T(X_1,...,X_n)$ ที่ใช้สำหรับบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด C ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ เรียกว่า **การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test) ที่มีขนาด** α

ถ้า $\beta_T(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T และถ้า $\beta_{T_1}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐานเดียวกัน โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T_1 แล้วจะกล่าวว่า T เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

1. $\beta_T(\theta_0) = \alpha$

และ 2. $\beta_T(\theta_1) \geq \beta_{T_1}(\theta_1)$ ไม่ว่า T_1 จะเป็นสถิติใด ๆ ที่ $\beta_{T_1}(\theta_0) = \alpha$

2.1.1.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว (Simple Hypothesis Test)

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดจะอาศัย**ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน (Neyman – Pearson Lemma)** ดังนี้ (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ให้ α เป็นค่าคงที่ที่ $0<\alpha<1$ ให้ c เป็นจำนวนจริงบวก และ C เป็นเซทย่อยของปริภูมิตัวอย่าง S ที่มีคุณสมบัติ

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C \mid \theta=\theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

และ
$$\frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \le c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1,\ldots,x_n)\in C$$
$$\frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \ge c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1,\ldots,x_n)\notin C$$

โดยที่ L เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของตัวอย่างสุ่ม แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1$

วิธีหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Method of Finding Most Powerful Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_1:\theta=\theta_1$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันหา**บริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR)** หรือหา**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test)** ได้ กล่าวคือบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดคือ

$$C = \left\{(x_1,\ldots,x_n): \frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \le c\right\}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C \mid \theta=\theta_0] = \int_C\!\cdots\!\int L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \alpha$$

ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของตัวอย่างสุ่ม $X_1,\ldots,X_n$ เป็น**ฟังก์ชันที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง** ความน่าจะเป็น $P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)}{L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)}=c\right]$ อาจมีค่าที่ต่างจาก 0 ได้

ในกรณีเช่นนี้ อาจหาค่าคงที่ c ที่ทำให้ขนาดของการทดสอบเท่ากับ $\alpha-q$ เมื่อ $0<q<p$ เมื่อต้องการหาการทดสอบที่มีขนาด α จะต้องใช้**การทดสอบสุ่ม (Randomized test)**

ดังนั้นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} < c \\ \dfrac{q}{p} & \text{เมื่อ} \quad \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} > c \end{cases}$$

โดยที่ $q = \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} < c\right]$ และ $p = P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} = c\right]$

เมื่อ $P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} < c\right] < \alpha \le P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} \le c\right]$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta_0] = (1)P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \left(\frac{q}{p}\right)P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]$$

$$= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]} P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]$$

$$= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha$$

ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยายสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ การทดสอบที่กำหนดให้ในรูปของ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

โดยที่ $c > 0$ และ $0 \le \gamma \le 1$ เป็นการทดสอบสุ่มที่มีกำลังสูงสุดในบรรดาการทดสอบสมมติฐานเดียวกันที่มีขนาดไม่เกิน α

การทดสอบจะมีขนาด α ได้โดยการเลือก c และ γ ให้เหมาะสมดังนี้

1. ถ้ามีค่าคงที่ $c > 0$ ที่ทำให้ $P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha$ ให้เลือกใช้ c นั้น และให้ $\gamma = 0$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \le c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

2. ถ้าไม่มีค่าคงที่ $c > 0$ ใด ๆ ที่มีคุณสมบัติตามข้อ 1. ให้เลือก c ที่ทำให้

$$P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] < \alpha \le P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \le c\right]$$

และให้ $\gamma = \dfrac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]}$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta_0] &= 1P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \gamma P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]} P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

2.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

2.1.2.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยวเทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ (Simple Hypothesis Compare with Composite Hypothesis Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว H_0 เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ H_1 บริเวณวิกฤต C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful critical region) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ H_0 นั้น เทียบกับสมมติฐานเชิงเดี่ยวใด ๆ ใน H_1 (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อการทดสอบนั้นมีขนาด α และมีฟังก์ชันกำลังมากกว่าฟังก์ชันกำลังของการทดสอบอื่นใดที่มีขนาด α เมื่อ $\theta \in \Omega - \omega$

นั่นคือ $\phi(x_1,...,x_n)$ เป็นการทดสอบ UMP ที่มีขนาด α ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ ก็ต่อเมื่อ

1. $\beta_\phi(\theta_0) = \alpha$

และ 2. $\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi'}(\theta)$ ทุก $\theta \in \Omega - \omega$

ไม่ว่า $\phi'(x_1,...,x_n)$ จะเป็นการทดสอบใด ๆ ที่ $\beta_{\phi'}(\theta_0) = \alpha$ ในที่นี้ $\beta_\phi(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi'}(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ'

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (ถ้ามี) สำหรับการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันสำหรับ $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_1 \in \Omega - \omega$ เพื่อหาการทดสอบได้ โดยกำหนด θ_1 ขึ้นมา 1 ตัว เช่น $\theta = \theta_1$ แล้วทำการทดสอบดู ถ้าการทดสอบที่หาได้ไม่เปลี่ยนแปลงรูปไปเมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป แต่ยังคงอยู่ใน $\Omega - \omega$ แสดงว่าการทดสอบนั้นเป็นการทดสอบ UMP แต่ถ้าการทดสอบเปลี่ยนแปลงรูปไป เมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป ก็แสดงว่าการทดสอบนั้นไม่ใช่การทดสอบ UMP ดังนั้นการทดสอบ UMP อาจจะมีหรือไม่มีก็ได้

2.1.2.2 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ $H_0 : \theta \in \omega,\ \omega \subset \Omega$ เป็นการทดสอบที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta \in \omega} P[\text{ปฏิเสธ } H_0 | H_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

นั่นคือ

$$\alpha = \sup_{\theta \in \omega} \beta(\theta)$$

เมื่อ $\beta(\theta)$ คือ ฟังก์ชันกำลัง (ประชุม สุวัตถี : 2545)

การทดสอบ $\phi(x_1,...,x_n)$ สำหรับ $H_0 : \theta \in \omega$ เทียบกับ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ เป็น**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test)** ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta \in \omega} \beta_\phi(\theta) = \alpha$$

และ

$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta)$$

ทุกค่า $\theta \in \Omega - \omega$

ไม่ว่า ϕ^* จะเป็นฟังก์ชันวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาดไม่เกิน α กล่าวคือ

$$\sup_{\theta \in \omega} \beta_{\phi^*}(\theta) \leq \alpha$$

โดยที่ $\beta_\phi(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi^*}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ^*

การแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียวหรือแบบลดอย่างเดียว

(Distribution of monotone increasing or decreasing likelihood ratio)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริง **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียว (Monotone increasing likelihood ratio)** ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)/L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)$ เป็น**ฟังก์ชันไม่ลด (Nondecreasing function)** ของ $T(X_1,\ldots,X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0<\theta_1$

(ประชุม สุวัตถี : 2545)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริง มี**อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบลดอย่างเดียว (Monotone decreasing likelihood ratio)** ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)/L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)$ เป็น**ฟังก์ชันไม่เพิ่ม (Nonincreasing function)** ของ $T(X_1,\ldots,X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0<\theta_1$

ถ้า $X_1,\ldots,X_n$ มีการแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น เราอาจใช้หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายได้ดังนี้

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบไม่ลดอย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ให้ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$ หรือ $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1,\ldots,x_n):T(x_1,\ldots,x_n)\le c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases}1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)<c\\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)=c\\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)>c\end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c>0,\ 0\le\gamma\le1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_0]=\alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$

ถ้าให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta \in \Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่เพิ่ม</u>อย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T = T(X_1,...,X_n)$ ให้ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$ หรือ $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1,...,x_n):T(x_1,...,x_n)\ge c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n)>c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n)=c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n)<c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c>0,\ 0\le\gamma\le1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta=\theta_0]=\alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$

ถ้าให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta \in \Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่ลด</u>อย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T = T(X_1,...,X_n)$ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta<\theta_0$ **หรือ** $H_0:\theta\ge\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta<\theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n)>c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n)=c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n)<c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c>0,\ 0\le\gamma\le1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta=\theta_0]=\alpha$ หรือบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1,...,x_n):T(x_1,...,x_n)\ge c\}$$

และถ้าให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และในทำนองเดียวกัน วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta \in \Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่เพิ่ม</u>อย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio)** ของสถิติ

$T=T(X_1,...,X_n)$ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือ** $H_0 : \theta \ge \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0,\ 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,..., X_n)|\theta = \theta_0] = \alpha$ หรือบริเวณวิกฤต ที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1,...,x_n) : T(x_1,...,x_n) \le c\}$$

การแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง (Distribution of Exponential Family)

ถ้า $X_1,...,X_n$ มีการแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง เราอาจใช้หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ได้ดังนี้ (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกใน**วงศ์ชี้กำลัง (Exponential family)** สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

และให้ $T = T(X_1,...,X_n) = \sum_{i=1}^{n} q(X_i)$

1. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียว**ของ θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \le \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0\ ,\ 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,..., X_n)|\theta = \theta_0] = P[T(X_1,...,X_n) > c|\theta=\theta_0] + \gamma P[T(X_1,...,X_n) = c|\theta=\theta_0]$$
$$= \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,...,X_n) > c|\theta > \theta_0] + \gamma P[T(X_1,...,X_n) = c|\theta > \theta_0]$

2. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \le \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots, X_n)|\theta = \theta_0] = P[T(X_1,\ldots,X_n)<c|\theta=\theta_0]+\gamma P[T(X_1,\ldots,X_n)=c|\theta=\theta_0]$$

$$= \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots,X_n)<c|\theta>\theta_0]+\gamma P[T(X_1,\ldots,X_n)=c|\theta>\theta_0]$

ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta),\theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกในวงศ์ชี้กำลัง สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

และให้ $T = T(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} q(X_i)$

1. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \ge \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots, X_n)|\theta = \theta_0] = P[T(X_1,\ldots,X_n)<c|\theta=\theta_0]+\gamma P[T(X_1,\ldots,X_n)=c|\theta=\theta_0]$$

$$= \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots,X_n)<c|\theta<\theta_0]+\gamma P[T(X_1,\ldots,X_n)=c|\theta<\theta_0]$

2. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \ge \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots, X_n)|\theta = \theta_0] = P[T(X_1,\ldots,X_n)>c|\theta=\theta_0]+\gamma P[T(X_1,\ldots,X_n)=c|\theta=\theta_0]$$

$$= \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots,X_n)>c|\theta<\theta_0]+\gamma P[T(X_1,\ldots,X_n)=c|\theta<\theta_0]$

2.1.2.3 การทดสอบสมมติฐานสองด้าน (Two-sided Test)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ อยู่ในวงศ์ ชี้กำลัง คือสามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x;\theta) \quad = \quad c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta \in \Omega$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ จะมี**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP test)** ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1,...,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < T(x_1,...,x_n) < c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,...,x_n) = c_i, i = 1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,...,x_n) < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta = \theta_1] \quad = \quad E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta = \theta_2] \quad = \quad \alpha$$

2.1.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

(Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ อยู่ในวงศ์ชี้กำลัง คือสามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x;\theta) \quad = \quad c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta \in \Omega$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ จะมี**การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP unbiased test)** ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1,...,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,...,x_n) < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,...,x_n) = c_i, i = 1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < T(x_1,...,x_n) < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta = \theta_1] \quad = \quad E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta = \theta_2] \quad = \quad \alpha$$

ถ้าให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ อยู่ในวงศ์ชี้กำลัง คือสามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x;\theta) \quad = \quad c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta \in \Omega$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta \ne \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$ **จะมีการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP unbiased test)** ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < T(x_1,\ldots,x_n) < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0] = \alpha$$

และ

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0\right] = \alpha E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i|\theta = \theta_0\right]$$

2.2 รายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บรรทม สุระพร (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยหาแบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุดสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.3$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 10, 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง n = 30 หลังจากนั้น ค่าจะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด

การหาแบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.3$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง n = 30 หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และการหาแบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุดเสมอสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.3$ หรือ $\theta \geq 0.7$ เทียบกับ $H_1 : 0.3 < \theta < 0.7$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ n = 10, 20, 30 จะไม่สามารถหาค่าได้ ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ n = 50 และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ n = 10 จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาแบบทดสอบที่ไม่เอนเอียงที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.3 \leq \theta \leq 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ เมื่อขนาดของการ

ทดสอบ $\alpha = 0.01, 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและการหาแบบทดสอบที่ไม่เอนเอียงที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 10$ จะไม่สามารถหาค่าได้

รุจิเรข ดีเสียง (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสองด้านเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง โดยหาแบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.2$ หรือ $\theta \geq 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.2 < \theta < 0.75$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และ γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 20$ จะไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาแบบทดสอบที่ไม่เอนเอียงที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลง ยกเว้นที่ n = 20 และ 50 จะไม่สารถหาค่าได้

และการหาแบบทดสอบที่ไม่เอนเอียงที่มีกำลังสูงสุดเสมอสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.5$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก ค่า γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดเช่นเดียวกัน

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

3.1 อุปกรณ์ในการวิจัย

3.1.1 อุปกรณ์ที่มีอยู่แล้ว

1) เครื่องคอมพิวเตอร์

2) เครื่องพิมพ์เลเซอร์

3) โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6

3.1.2 อุปกรณ์ที่ต้องการเพิ่ม

1) ข้อมูลเกี่ยวกับการโยนเหรียญ

2) ข้อมูลเกี่ยวกับการโยนลูกเต๋า

3) ข้อมูลเกี่ยวกับการตรวจสอบคุณภาพชุดชั้นในสตรี

4) ข้อมูลเกี่ยวกับการตรวจสอบคุณภาพกล่องพลาสติกบรรจุขนม

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยทำการศึกษาในเรื่องต่อไปนี้

1. การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด
2. การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย
3. การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

วิธีการดำเนินงานกระทำได้ดังนี้

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย โดยมีวิธีในการดำเนินงานดังนี้

1) สมมติฐานที่สนใจทดสอบ

1.1 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

1.2 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

1.3 $H_0 : \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

$H_0 : \theta \leq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

1.4 $H_0 : \theta \leq \theta_1$ หรือ $\theta \geq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$

1.5 $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$

1.6 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$

2) ขนาดตัวอย่างและขนาดการทดสอบ

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ จะพิจารณาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05

3) เขียนโปรแกรม

เขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

4) เก็บรวบรวมข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี ได้แก่

4.1 การโยนเหรียญ โดยทำการทดลองโยนเหรียญเป็นจำนวน 50 และ 100 ครั้ง โดยมีความน่าจะเป็นของการเกิดหัวเท่ากับ 0.50 บันทึกผลการทดลองจากการโยนเหรียญ โดยนับจำนวนเหรียญที่เกิดหัว

4.2 การโยนลูกเต๋า โดยทำการทดลองโยนลูกเต๋าเป็นจำนวน 50 และ 100 ครั้ง โดยมีความน่าจะเป็นของการได้หน้าคู่เท่ากับ 0.50 บันทึกผลการทดลองจากการโยนลูกเต๋า โดยนับจำนวนลูกเต๋าที่ได้หน้าคู่

4.3 การตรวจสอบคุณภาพชุดชั้นในสตรี โดยทำการตรวจสอบคุณภาพชุดชั้นในสตรีจำนวน 500 ชิ้น โดยมีความน่าจะเป็นที่ชุดชั้นในสตรีจะเกิดข้อบกพร่อง (สัดส่วนของเสีย) เท่ากับ 0.0116 บันทึกผลจากการผลิตชุดชั้นในสตรี โดยนับจำนวนชุดชั้นในสตรีที่บกพร่อง

4.4 การตรวจสอบคุณภาพกล่องพลาสติกบรรจุขนม โดยทำการตรวจสอบคุณภาพกล่องพลาสติกบรรจุขนมจำนวน 14,000 ชิ้น โดยมีความน่าจะเป็นที่กล่องพลาสติกบรรจุขนมจะเกิดข้อบกพร่อง (สัดส่วนของเสีย) เท่ากับ 0.0198 บันทึกผลจากการผลิตกล่องพลาสติกบรรจุขนม โดยนับจำนวนกล่องพลาสติกบรรจุขนมที่บกพร่อง

5) พิจารณาจากการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่หาได้ในข้อที่ 3) ว่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมา ในข้อที่ 4.1-4.4 นั้นเมื่อเทียบกับการทดสอบแบบต่าง ๆ แล้วเราจะยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด

3.3 โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.3.1 โปรแกรม MATHLAB version 7.6

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

4.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลีโดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-x} & ; \quad x = 0,1 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

4.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

ในที่นี้ $$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$$= \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \ldots \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้ $$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n}(1-\theta_0)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n}(1-\theta_1)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < \ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $\theta_0(1-\theta_1) > \theta_1(1-\theta_0)$ และ $\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] > 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{\ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]}{\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]} = c_1$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีพารามิเตอร์เป็น θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 + 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1-\beta &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | \theta = \theta_1\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ θ_0=0.75 และ θ_1=0.5 จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_1 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = 0.75\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = 0.75\right]} \qquad \text{..... (1)}$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบ (Power of the test) ได้จากสมการ

$$1-\beta = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = 0.5\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = 0.5\right] \qquad \text{..... (2)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองพบว่า $c_1 = 12$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 12 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.0409251677,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 12 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.0608866892$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 12 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.7482776642,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 12 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.1201343536$$

แทนค่าลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0409251677}{0.0608866892}$$

$$= 0.1490446009$$

และ

$$1-\beta = 0.7482776642 + 0.1490446009(0.1201343536)$$

$$= 0.7661830410$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.5,\ \theta_1 < \theta_0$ เมื่อ $n = 20$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_{20}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 12 \\ 0.1490446009 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 12 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > 12 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.1 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1,\theta_1<\theta_0$

α	n	θ_0	θ_1	γ	c_1	$1-\beta$
0.01	10	0.75	0.1	0.4003386243	4	0.9916726851
			0.3	0.4003386243	4	0.7297268638
			0.5	0.4003386243	4	0.2539756944
			0.7	0.4003386243	4	0.0253072888
	20	0.75	0.1	0.6105311700	10	0.9999967822
			0.3	0.6105311700	10	0.9708528911
			0.5	0.6105311700	10	0.5194752663
			0.7	0.6105311700	10	0.0359596049
	30	0.75	0.1	0.1357348326	17	0.9999999997
			0.3	0.1357348326	17	0.9980787034
			0.5	0.1357348326	17	0.7228068357
			0.7	0.1357348326	17	0.0460815513
	40	0.75	0.1	0.7740397466	23	1.0000000000
			0.3	0.7740397466	23	0.9998758120
			0.5	0.7740397466	23	0.8476710141
			0.7	0.7740397466	23	0.0562263977
	50	0.75	0.1	0.4882088199	30	1.0000000000
			0.3	0.4882088199	30	0.9999931907
			0.5	0.4882088199	30	0.9191166303
			0.7	0.4882088199	30	0.0658464863

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

α	n	θ_0	θ_1	γ	c_1	$1-\beta$
0.05	10	0.75	0.1	0.5183682801	5	0.9991364126
			0.3	0.5183682801	5	0.9030817914
			0.5	0.5183682801	5	0.5045203189
			0.7	0.5183682801	5	0.1006991114
	20	0.75	0.1	0.1490446009	12	0.9999999499
			0.3	0.1490446009	12	0.9954370436
			0.5	**0.1490446009**	**12**	**0.7661830410**
			0.7	0.1490446009	12	0.1303816793
	30	0.75	0.1	0.9773511707	18	1.0000000000
			0.3	0.9773511707	18	0.9998270823
			0.5	0.9773511707	18	0.8979313557
			0.7	0.9773511707	18	0.1576264905
	40	0.75	0.1	0.8426081605	25	1.0000000000
			0.3	0.8426081605	25	0.9999923495
			0.5	0.8426081605	25	0.9538966269
			0.7	0.8426081605	25	0.1803688230
	50	0.75	0.1	0.8058612577	32	1.0000000000
			0.3	0.8058612577	32	0.9999997331
			0.5	0.8058612577	32	0.9804674641
			0.7	0.8058612577	32	0.2028102909

จากตารางที่ 4.1 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.75$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.7 แล้วค่า γ และ c_1 จะคงที่ แต่ค่า $1-\beta$ จะลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.75$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น แต่ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ซึ่งตรงข้ามกับเมื่อ $\alpha = 0.05$ ที่ค่า γ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นสลับกันไป

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n, θ_0 และ θ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า c_1 และ $1-\beta$ มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

4.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ

$H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากหัวข้อที่ 4.1.1

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < \ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]$$

แต่ $\theta_1 > \theta_0$ จะได้ $\theta_0(1-\theta_1) < \theta_1(1-\theta_0)$ และ $\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]}{\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]} = c_2$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีพารามิเตอร์เป็น θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ θ

ดังนั้น c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ $$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1-\beta &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | \theta = \theta_1\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_0 = 0.5$ และ $\theta_1 = 0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_2 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = 0.5\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = 0.5\right]} \quad \text{.....} \ (3)$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบได้จากสมการ

$$1 - \beta = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = 0.75\right] + \gamma \, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = 0.75\right] \quad \text{.....} \ (4)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า $c_2 = 14$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 14 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.0206947327, \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 14 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.0369644165$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 14 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.6171726544, \ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 14 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.1686092932$$

แทนค่าลงในสมการ (3) และ (4) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0206947327}{0.0369644165}$$

$$= 0.7927966976$$

และ

$$1 - \beta = 0.6171726544 + 0.7927966976\,(0.1686092932)$$

$$= 0.7508455452$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.75,\ \theta_1 > \theta_0$ เมื่อ $n = 20$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_{20}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > 14 \\ 0.7927966976 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 14 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 14 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.2 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_2 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

α	n	θ_0	θ_1	γ	c_2	$1-\beta$
0.01	10	0.1	0.75	0.7495400511	4	0.9924313319
		0.3		0.9342258766	7	0.7594129935
		0.5		0.9240000000	9	0.2297591400
		0.7		0.3540133175	10	0.0199357342
	20	0.1	0.75	0.8586751055	6	0.9999925551
		0.3		0.4049286422	11	0.9700325054
		0.5		0.2766873065	15	0.4708239640
		0.7		0.0848506443	18	0.0299931895
	30	0.1	0.75	0.1228376628	7	0.9999999962
		0.3		0.3434906412	15	0.9979135900
		0.5		0.1454154909	21	0.6924751701
		0.7		0.0327968310	26	0.0394309192
	40	0.1	0.75	0.4732388038	9	1.0000000000
		0.3		0.4394809748	19	0.9998806150
		0.5		0.1558364907	27	0.8326941397
		0.7		0.0912604137	34	0.0481062772
	50	0.1	0.75	0.0425070283	10	1.0000000000
		0.3		0.6594642960	23	0.9999943507
		0.5		0.2660187440	33	0.9131804192
		0.7		0.2489545145	42	0.0567927503

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

α	n	θ_0	θ_1	γ	c_2	$1-\beta$
0.05	10	0.1	0.75	0.6482166481	3	0.9984972209
		0.3		0.0257581565	5	0.9233773484
		0.5		0.8933333333	8	0.4955589294
		0.7		0.1796822037	9	0.0900419694
	20	0.1	0.75	0.0760257720	4	0.9999996406
		0.3		0.0311781584	9	0.9961516033
		0.5		**0.7927966976**	**14**	**0.7508455452**
		0.7		0.2027391509	17	0.1184063158
	30	0.1	0.75	0.5103783154	6	0.9999999998
		0.3		0.2239533850	13	0.9998213952
		0.5		0.0124111790	19	0.8949553590
		0.7		0.4273285650	25	0.1426230684
	40	0.1	0.75	0.1405559357	7	1.0000000000
		0.3		0.5755041051	17	0.9999931504
		0.5		0.2639014681	25	0.9530027582
		0.7		0.8324060312	33	0.1675863967
	50	0.1	0.75	0.7639550547	9	1.0000000000
		0.3		0.0603736300	20	0.9999998436
		0.5		0.6496978320	31	0.9808924716
		0.7		0.2529420290	40	0.1886033468

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\theta_1 = 0.75$ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.7 แล้วค่า c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนค่า $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และค่า γ จะมีแนวโน้มลดลง ซึ่งตรงข้ามกับเมื่อ $\alpha = 0.05$ ที่ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นละลดลงที่ไม่แน่นอน และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ที่ $\theta_1 = 0.75$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ในขณะที่ c_2 และ $1-\beta$ มีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n, θ_0 และ θ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_2 มากกว่า แต่มีค่า $1-\beta$ น้อยกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาการทดสอบสำหรับสมมติฐานต่าง ๆ ถ้าสามารถหาการทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อย ๆ แล้วไม่ได้ทำให้การทดสอบเปลี่ยนแปลงไป แต่ยังคงเหมือนเดิม สามารถใช้การทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นการทดสอบที่ดีมาก กล่าวคือการทดสอบที่มีรูปแบบเดียว (Uniform) และสามารถใช้ทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกเป็น 2 กรณี

4.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n}(1-\theta_0)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n}(1-\theta_1)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < \ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}\right]$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $\theta_0(1-\theta_1) > \theta_1(1-\theta_0)$ และ $\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] > 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad < \quad \frac{\ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]}{\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]} \quad = \quad c_1$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 < \theta_0$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีพารามิเตอร์เป็น θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 + 1 \middle| \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_0 = 0.5$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_1 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = 0.5\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = 0.5\right]} \quad \ldots\ldots (5)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า $c_1 = 6$ โดยที่

$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 6 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.0206947327$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 6 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.0369644165$

แทนค่าลงในสมการ (5) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0206947327}{0.0369644165}$$

$$= 0.7927966976$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.5$ เมื่อ $n = 20$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_{20}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 6 \\ 0.7927966976 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 6 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 6 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.3 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_1 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

α	n	θ_0	γ	c_1
0.01	10	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	0.9240000000	1
		0.7	0.9342258766	3
		0.9	0.7495400511	6
	20	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	0.0848506443	2
		0.5	0.2766873065	5
		0.7	0.4049286422	9
		0.9	0.8586751055	14
	30	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	0.0327968310	4
		0.5	0.1454154909	9
		0.7	0.3434906412	15
		0.9	0.1228376628	23
	40	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	0.0912604137	6
		0.5	0.1558364907	13
		0.7	0.4394809748	21
		0.9	0.4732388038	31
	50	0.1	0.1692585391	1
		0.3	0.2489545145	8
		0.5	0.2660187440	17
		0.7	0.6594642960	27
		0.9	0.0425070283	40

ตารางที่ 4.3 (ต่อ)

α	n	θ_0	γ	c_1
0.05	10	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	0.1796822037	1
		0.5	0.8933333333	2
		0.7	0.0257581565	5
		0.9	0.6482166481	7
	20	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	0.2027391509	3
		0.5	**0.7927966976**	**6**
		0.7	0.0311781584	11
		0.9	0.0760257720	16
	30	0.1	0.0538473731	1
		0.3	0.4273285650	5
		0.5	0.0124111790	11
		0.7	0.2239533850	17
		0.9	0.5103783154	24
	40	0.1	0.5361182664	1
		0.3	0.8324060312	7
		0.5	0.2639014681	15
		0.7	0.5755041051	23
		0.9	0.1405559357	33
	50	0.1	0.2080258882	2
		0.3	0.2529420290	10
		0.5	0.6496978320	19
		0.7	0.0603736300	30
		0.9	0.7639550547	41

จากตารางที่ 4.3 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า c_1 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

4.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n}(1-\theta_0)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n}(1-\theta_1)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < \ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}\right]$$

แต่ $\theta_1 > \theta_0$ จะได้ $\theta_0(1-\theta_1) < \theta_1(1-\theta_0)$ และ $\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < 0$

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad > \quad \frac{\ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]}{\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]} \quad = \quad c_2$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 > \theta_0$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีพารามิเตอร์เป็น θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ θ

ดังนั้น c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_0 = 0.5$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_2 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = 0.5\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = 0.5\right]} \qquad \ldots.. (6)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า $c_2 = 14$ โดยที่ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 14 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.0206947327$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 14 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.0369644165$

แทนค่าลงในสมการ (6) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0206947327}{0.0369644165} = 0.7927966976$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.5$ เมื่อ $n = 20$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_{20}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 14 \\ 0.7927966976 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 14 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 14 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.4 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

α	n	θ_0	γ	c_2
0.01	10	0.1	0.7495400511	4
		0.3	0.9342258766	7
		0.5	0.9240000000	9
		0.7	0.3540133175	10
		0.9	0.0286797199	10
	20	0.1	0.8586751055	6
		0.3	0.4049286422	11
		0.5	0.2766873065	15
		0.7	0.0848506443	18
		0.9	0.0822526334	20
	30	0.1	0.1228376628	7
		0.3	0.3434906412	15
		0.5	0.1454154909	21
		0.7	0.0327968310	26
		0.9	0.2358982488	30
	40	0.1	0.4732388038	9
		0.3	0.4394809748	19
		0.5	0.1558364907	27
		0.7	0.0912604137	34
		0.9	0.6765495701	40
	50	0.1	0.0425070283	10
		0.3	0.6594642960	23
		0.5	0.2660187440	33
		0.7	0.2489545145	42
		0.9	0.1692585391	49

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)

α	n	θ_0	γ	c_2
0.05	10	0.1	0.6482166481	3
		0.3	0.0257581565	5
		0.5	0.8933333333	8
		0.7	0.1796822037	9
		0.9	0.1433985995	10
	20	0.1	0.0760257720	4
		0.3	0.0311781584	9
		0.5	**0.7927966976**	**14**
		0.7	0.2027391509	17
		0.9	0.4112631670	20
	30	0.1	0.5103783154	6
		0.3	0.2239533850	13
		0.5	0.0124111790	19
		0.7	0.4273285650	25
		0.9	0.0538473731	29
	40	0.1	0.1405559357	7
		0.3	0.5755041051	17
		0.5	0.2639014681	25
		0.7	0.8324060312	33
		0.9	0.5361182664	39
	50	0.1	0.7639550547	9
		0.3	0.0603736300	20
		0.5	0.6496978320	31
		0.7	0.2529420290	40
		0.9	0.2080258882	48

จากตารางที่ 4.4 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ค่า c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ค่า c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.2.3 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

4.2.3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^n(1-\theta_0)^{-\sum_{i=1}^n x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_1)^n(1-\theta_1)^{-\sum_{i=1}^n x_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^n x_i} < c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < \ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $\theta_0(1-\theta_1) > \theta_1(1-\theta_0)$ และ $\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] > 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{\ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n\right]}{\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]} = c_1$$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีพารามิเตอร์เป็น θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 + 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$

อสมการ $\sum_{i=1}^{n} x_i < c_1$ นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 < \theta_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \ge \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \ge \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.1 ดังแสดงในตารางที่ 4.3

4.2.3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n}(1-\theta_0)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n}(1-\theta_1)^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < \ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}\right]$$

แต่ $\theta_1 > \theta_0$ จะได้ $\theta_0(1-\theta_1) < \theta_1(1-\theta_0)$ และ $\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right] < 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\ln\left[c\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n}\right]}{\ln\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]} = c_2$$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีพารามิเตอร์เป็น θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ θ

ดังนั้น c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 - 1 \middle| \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$

อสมการ $\sum_{i=1}^{n} x_i > c_2$ นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 > \theta_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.2 ดังแสดงในตารางที่ 4.4

4.2.4 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$

ในที่นี้
$$f(x;\theta) = (1-\theta)\theta^x (1-\theta)^{-x}$$
$$= (1-\theta)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x$$
$$= (1-\theta)(1)e^{x[\ln\theta - \ln(1-\theta)]}$$

เปรียบเทียบกับ
$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $c(\theta) = 1-\theta,\quad h(x) = 1$

$p(\theta) = \ln\theta - \ln(1-\theta),\quad q(x) = x$

ดังนั้น $T(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}q(X_i)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ เป็นสถิติที่พอเพียงและสมบูรณ์ของ θ

การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le\theta_1$ หรือ $\theta\ge\theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } c_1<\sum x_i<c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i=c_i, i=1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i<c_1 \text{ หรือ } >c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_2] = \alpha$$

จะได้

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2|\theta=\theta_1\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_1|\theta=\theta_1\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2|\theta=\theta_1\right]=\alpha$$

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2|\theta=\theta_2\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_1|\theta=\theta_2\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2|\theta=\theta_2\right]=\alpha$$

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $n=20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha=0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_1=0.25$ และ $\theta_2=0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n}X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1,c_2,\gamma_1,\gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2|\theta=\theta_1\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_1|\theta=\theta_1\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2|\theta=\theta_1\right]=\alpha \quad \text{..... (7)}$$

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2|\theta=\theta_2\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_1|\theta=\theta_2\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2|\theta=\theta_2\right]=\alpha \quad \text{..... (8)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า $c_1=8$ และ $c_2=12$ โดยที่

$$P\left[8<\sum_{i=1}^{n}X_i<12|\theta=0.25\right]=0.0399897761,\ P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=8|\theta=0.25\right]=0.0608866892,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=12|\theta=0.25\right]=0.0007516875$$

$$P\left[8<\sum_{i=1}^{n}X_i<12|\theta=0.75\right]=0.0399897761,\ P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=8|\theta=0.75\right]=0.0007516875,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=12|\theta=0.75\right]=0.0608866892$$

แทนค่าลงในสมการ (7) และ (8) จะได้

$$0.0608866892\gamma_1 + 0.0007516875\gamma_2 = 0.0100102239 \qquad \ldots..(9)$$

$$0.0007516875\gamma_1 + 0.0608866892\gamma_2 = 0.0100102239 \qquad \ldots..(10)$$

จะได้ γ_1=0.1624024577, γ_2=0.1624024577

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{20}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad 8 < \sum x_i < 12 \\ 0.1624024577 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 8 \text{ หรือ } > 12 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.5 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.25$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$

α	n	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	5	0.0284444444	0.0284444444	2	3
	10	0.1712352211	0.0000000000	5	6
	15	0.1907403364	0.1907403364	7	8
	20	0.0025850077	0.0025850077	9	11
	25	0.0092444930	0.0092444930	11	14
	30	0.1499626582	0.1499626582	13	17
	35	0.4017525337	0.4017525337	15	20
	40	0.7747576949	0.7747576949	17	23
	45	0.1421224035	0.1421224035	18	27
	50	0.4882220064	0.4882220064	20	30
0.05	5	0.1422222222	0.1422222222	2	3
	10	0.8561761056	0.0000000000	5	6
	15	0.9537016822	0.9537016822	7	8
	20	**0.1624024577**	**0.1624024577**	**8**	**12**
	25	0.4911476549	0.4911476549	10	15
	30	0.9777331441	0.9777331441	12	18
	35	0.3484033316	0.3484033316	13	22
	40	0.8426147463	0.8426147463	15	25
	45	0.2942251201	0.2942251201	16	29
	50	0.8058613438	0.8058613438	18	32

จากตารางที่ 4.5 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 แล้วค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ในขณะที่ c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

และจากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_1 มากกว่า แต่จะมีค่า c_2 น้อยกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

4.3.1 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_2] = \alpha$$

จะได้
$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right]$$
$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha$$
$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_2\right]$$
$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha$$

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_1 = 0.25$ และ $\theta_2 = 0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_1\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_1\right]$$
$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_1\right] = \alpha \qquad \ldots..(11)$$
$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta = \theta_2\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta = \theta_2\right]$$
$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_2\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 | \theta = \theta_2\right] = \alpha \qquad \ldots..(12)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า c_1=2 และ c_1=18 โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i<2|\theta=0.25\right]=0.0243126249,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i>18|\theta=0.25\right]=0.0000000001,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=2|\theta=0.25\right]=0.0669478076,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=18|\theta=0.25\right]=0.0000000016,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i<2|\theta=0.75\right]=0.0000000001,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i>18|\theta=0.75\right]=0.0243126249,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=2|\theta=0.75\right]=0.0000000016,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=18|\theta=0.75\right]=0.0669478076,$$

แทนค่าลงในสมการ (11) และ (12) จะได้

$$0.066947807 6\gamma_1 + 0.000000001 6\gamma_2 = 0.0256873751 \qquad \text{..... (13)}$$

$$0.000000001 6\gamma_1 + 0.066947807 6\gamma_2 = 0.0256873751 \qquad \text{..... (14)}$$

จะได้ γ_1=0.3836925421, γ_2=0.3836925421

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 2 \text{ หรือ } > 8 \\ 0.3836925421 & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } 2 < \sum x_i < 8 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.6 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.75$

α	n	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	15	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.3230052819	0.3230052819	1	19
	25	0.1186480737	0.1186480737	2	23
	30	0.9309653115	0.9309653115	2	28
	35	0.6484606822	0.6484606822	3	32
	40	0.4674826471	0.4674826471	4	36
	45	0.3379760511	0.3379760511	5	40
	50	0.2392757539	0.2392757539	6	44
0.05	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	15	0.5483087810	0.5483087810	1	14
	20	**0.3836925421**	**0.3836925421**	**2**	**18**
	25	0.2790940570	0.2790940570	3	22
	30	0.2077228963	0.2077228963	4	26
	35	0.1588718377	0.1588718377	5	30
	40	0.1270243594	0.1270243594	6	34
	45	0.1089011918	0.1089011918	7	38
	50	0.1023739517	0.1023739517	8	42

จากตารางที่ 4.6 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 แล้วค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

จากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_1 น้อยกว่า แต่จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.3.2 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ $c_1,\ c_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ หาได้จาก

$$E\left[\phi(X_1,\ldots,X_n)\middle|\theta = \theta_0\right] = \alpha$$

และ $$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\phi(X_1,\ldots,X_n)\middle|\theta = \theta_0\right] = \alpha E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha$$

จะได้ $$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$$
$$+ \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\sum_{x=0}^{c_1-1}\binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x} + \sum_{x=c_2+1}^{n}\binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x} + \sum_{i=1}^{2}\gamma_i\binom{n}{c_i}\theta_0^{c_i}(1-\theta_0)^{n-c_i} = \alpha \quad \ldots..(15)$$

และ $$\sum_{i=1}^{n} X_i\, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^{n} X_i\, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$$
$$+ c_1\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + c_2\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = 0}^{c_1-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \binom{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] + \sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2+1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \binom{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i\gamma_i\binom{n}{c_i}\theta_0^{c_i}(1-\theta_0)^{n-c_i} = n\theta_0\alpha \quad \ldots..(16)$$

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta = 0.25$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$$

$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha \qquad \text{.....(17)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$$

$$+ c_1\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + c_2\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha \qquad \text{.....(18)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลอง พบว่า $c_1 = 2$ และ $c_2 = 9$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0243126249,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0138644169,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0669478076,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0270607508,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0211414129,\ \sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.1437391493,$$

$$c_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.1338956152,\ c_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.2435467569$$

แทนค่าลงในสมการ (17) และ (18) จะได้

$$0.066947807 6\gamma_1 + 0.027060750 8\gamma_2 = 0.0118229582 \qquad \text{..... (19)}$$

$$0.133895615 2\gamma_1 + 0.2435467569\gamma_2 = 0.0851194378 \qquad \text{..... (20)}$$

จะได้ $\gamma_1 = 0.0454238410,\ \gamma_2 = 0.3245265330$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.25$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_{20}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 2 \text{ หรือ } > 9 \\ 0.0454238410 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 2 \\ 0.3245265330 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 9 \\ 0 & \text{เมื่อ } 2 < \sum x_i < 9 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.7 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.25$

α	n	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	15	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.1228912949	0.0290811108	1	10
	25	0.7686212353	0.1435165667	1	12
	30	0.4164108195	0.3115898553	2	14
	35	0.2121212659	0.5748728916	3	16
	40	0.0687119530	0.9569187026	4	18
	45	0.8772286924	0.2202079567	4	19
	50	0.6675143230	0.5425730075	5	21
0.05	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	15	0.2279156115	0.1044746797	1	7
	20	**0.0454238410**	**0.3245265330**	**2**	**9**
	25	0.8052549383	0.6359613469	2	11
	30	0.6227950936	0.0373749141	3	12
	35	0.4890074006	0.3511744794	4	14
	40	0.4018054723	0.7800945190	5	16
	45	0.3320349320	0.2028554776	6	17
	50	0.2819910034	0.6343219362	7	19

จากตารางที่ 4.7 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 แล้วค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

จากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_1 น้อยกว่า แต่จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.4 ตัวอย่าง (Example)

4.4.1 การโยนเหรียญและโยนลูกเต๋า

ในที่นี้เราต้องการทดสอบว่าเหรียญและลูกเต๋ามีความเที่ยงตรงหรือไม่ สามารถกระทำได้โดยใช้**การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย**ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.5$ สำหรับ $n = 50$ ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{50}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 18 \text{ หรือ } > 32 \\ 0.5351145901 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 18 \\ 0.5351145901 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 32 \\ 0 & \text{เมื่อ } 18 < \sum x_i < 32 \end{cases}$$

ในการทดลองโยนเหรียญทั้งหมด 50 ครั้ง ปรากฏว่าได้หัว (สิ่งที่สนใจ) 26 ครั้ง ซึ่งอยู่ในช่วง $18 < \sum x_i < 32$ แสดงว่าไม่ปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ ดังนั้นเหรียญที่ใช้ในการทดลองมีความเที่ยงตรง

และในการทดลองโยนลูกเต๋าทั้งหมด 50 ครั้ง ปรากฏว่าได้หน้าคู่ (สิ่งที่สนใจ) 28 ครั้ง ซึ่งอยู่ในช่วง $18 < \sum x_i < 32$ แสดงว่าไม่ปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ ดังนั้นลูกเต๋าที่ใช้ในการทดลองมีความเที่ยงตรง

ส่วน**การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย**ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.5$ สำหรับ $n = 100$ ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{100}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 40 \text{ หรือ } > 60 \\ 0.6824041726 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 40 \\ 0.6824041726 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 60 \\ 0 & \text{เมื่อ } 40 < \sum x_i < 60 \end{cases}$$

ในการทดลองโยนเหรียญทั้งหมด 100 ครั้ง ปรากฏว่าได้หัว 46 ครั้ง ซึ่งอยู่ในช่วง $40 < \sum x_i < 60$ แสดงว่าไม่ปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ ดังนั้นเหรียญที่ใช้ในการทดลองมีความเที่ยงตรง

และในการทดลองโยนลูกเต๋าทั้งหมด 100 ครั้ง ปรากฏว่าได้หน้าคู่ 49 ครั้ง ซึ่งอยู่ในช่วง $40 < \sum x_i < 60$ แสดงว่าไม่ปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ ดังนั้นลูกเต๋าที่ใช้ในการทดลองมีความเที่ยงตรง

4.4.2 ชุดชั้นในสตรี ผ้าตัวกลม ขนาด 32

ในที่นี้เราต้องการทดสอบว่าชุดชั้นในสตรี ผ้าตัวกลม ขนาด 32 มีของเสียมากน้อยแค่ไหนเมื่อเทียบกับของเสียในปีที่ผ่าน ๆ มาซึ่งมีสัดส่วนของเสีย $\theta = 0.0116$ หรือน้อยกว่า $\theta = 0.0116$ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้เป็น 0.01 สามารถกระทำได้โดยใช้**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด**ที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0116$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.01,\ \theta_1 < \theta_0$ สำหรับ n = 500 คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{500}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 2 \\ 0.5945755704 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > 2 \end{cases}$$

ซึ่งมีกำลังในการทดสอบ $1-\beta = 0.9549391285$

แต่ในการทดลองเก็บชุดชั้นในสตรีทั้งหมด 500 ชิ้น ปรากฏว่าชุดชั้นในสตรีมีของเสียทั้งหมด 10 ชิ้น ซึ่งอยู่ในช่วง $\sum x_i > 2$ แสดงว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0116$ ดังนั้นชุดชั้นในสตรีผ้าตัวกลมขนาด 32 ที่ใช้ในการทดลองมีสัดส่วนของเสีย 0.0116 นั่นคือฝ่ายผลิตชุดชั้นในสตรีควรจะต้องทำงานด้วยความระมัดระวังมากขึ้น เนื่องจากกระบวนการผลิตมีของเสียพอ ๆ กับในปีที่ผ่าน ๆ มา ซึ่งของเสียไม่ได้ลดลงเลย

ถ้าต้องการทดสอบว่าชุดชั้นในสตรี ผ้าตัวกลม ขนาด 32 มีของเสียมากน้อยแค่ไหนเมื่อเทียบกับของเสียในปีที่ผ่าน ๆ มาซึ่งมีสัดส่วนของเสียน้อยที่สุด $\theta_1 = 0.0072$ และมีสัดส่วนของเสียมากที่สุด $\theta_2 = 0.0140$ สามารถกระทำได้โดยใช้**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย**ที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.0072$ หรือ $\theta \ge 0.0140$ เทียบกับ $H_1 : 0.0072 < \theta < 0.0140$ สำหรับ n = 500 คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{500}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad 5 < \sum x_i < 6 \\ 0.3317218216 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 5 \\ 0.0506994774 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 6 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 5 \ \text{หรือ} \ \sum x_i > 6 \end{cases}$$

แต่ในการทดลองเก็บชุดชั้นในสตรีทั้งหมด 500 ชิ้น ปรากฏว่ามีชุดชั้นในที่มีของเสียทั้งหมด 10 ชิ้น ซึ่งอยู่ในช่วง $\sum x_i > 6$ แสดงว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.0072$ หรือ $\theta \ge 0.0140$ ดังนั้นชุดชั้นในสตรีผ้าตัวกลมขนาด 32 ที่ใช้ในการทดลองอาจจะมีสัดส่วนของเสียน้อยกว่า 0.0072 หรือมากกว่า 0.0140

นอกจากนี้ ถ้าต้องการทดสอบว่าชุดชั้นในสตรี ผ้าตัวกลม ขนาด 32 มีของเสียเท่ากับของเสียในปีที่ผ่าน ๆ มาซึ่งมีสัดส่วนของเสีย $\theta = 0.0116$ หรือไม่ สามารถกระทำได้โดยใช้**การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย**ที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0116$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.0116$ สำหรับ n = 500 คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{500}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 2 \text{ หรือ } > 11 \\ 0.1808538200 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 2 \\ 0.2909609907 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 11 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad 2 < \sum x_i < 11 \end{cases}$$

แต่ในการทดลองเก็บชุดชั้นในสตรีทั้งหมด 500 ชิ้น ปรากฏว่าชุดชั้นในมีของเสียทั้งหมด 10 ชิ้น ซึ่งอยู่ในช่วง $2 < \sum x_i < 11$ แสดงว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0116$ ดังนั้นชุดชั้นในสตรี ผ้าตัวกลม ขนาด 32 ที่ใช้ในการทดลองมีสัดส่วนของเสีย 0.0116 ซึ่งให้ผลสรุปในทำนองเดียวกับการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

4.4.3 กล่องพลาสติกบรรจุขนม

ในที่นี้เราต้องการทดสอบว่ากล่องพลาสติกบรรจุขนมมีของเสียมากน้อยแค่ไหนเมื่อเทียบกับของเสียในปีที่ผ่าน ๆ มาซึ่งมีสัดส่วนของเสีย $\theta = 0.0279$ หรือน้อยกว่า $\theta = 0.0279$ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้เป็น 0.01 สามารถกระทำได้โดยใช้**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด**ที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0279$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.01,\ \theta_1 < \theta_0$ สำหรับ n = 14,000 คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{14000}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 359 \\ 0.3128927608 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 359 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > 359 \end{cases}$$

ซึ่งมีกำลังในการทดสอบ $1 - \beta = 1.0$

แต่ในการทดลองเก็บกล่องพลาสติกบรรจุขนมทั้งหมด 14,000 ชิ้น ปรากฏว่ามีกล่องพลาสติกบรรจุขนมเสียทั้งหมด 332 ชิ้น ซึ่งอยู่ในช่วง $\sum x_i < 359$ แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0279$ ดังนั้นกล่องพลาสติกบรรจุขนมที่ใช้ในการทดลองมีสัดส่วนของเสีย 0.01

ถ้าต้องการทดสอบว่ากล่องพลาสติกบรรจุขนมมีของเสียมากน้อยแค่ไหนเมื่อเทียบกับของเสียในปีที่ผ่าน ๆ มาซึ่งมีสัดส่วนของเสียน้อยที่สุด $\theta_1 = 0.0199$ และมีสัดส่วนของเสียมากที่สุด $\theta_2 = 0.0310$ สามารถกระทำได้โดยใช้**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย**ที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.0199$ หรือ $\theta \ge 0.0310$ เทียบกับ $H_1 : 0.0199 < \theta < 0.0310$ สำหรับ n = 14,000 คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{14000}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad 306 < \sum x_i < 401 \\ 0.4409431314 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 306 \\ 0.0387445502 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 401 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 306 \text{ หรือ } \sum x_i > 401 \end{cases}$$

แต่ในการทดลองเก็บกล่องพลาสติกบรรจุขนมทั้งหมด 14,000 ชิ้น ปรากฏว่ามีกล่องพลาสติกบรรจุขนมที่มีของเสียทั้งหมด 332 ชิ้น ซึ่งอยู่ในช่วง $306 < \sum x_i < 401$ แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.0199$ หรือ $\theta \ge 0.0310$ ดังนั้นกล่องพลาสติกบรรจุขนมที่ใช้ในการทดลองมีสัดส่วนของเสียอยู่ระหว่าง 0.0199 และ 0.0310

นอกจากนี้ ถ้าต้องการทดสอบว่ากล่องพลาสติกบรรจุขนมมีของเสียเท่ากับของเสียในปีที่ผ่าน ๆ มาซึ่งมีสัดส่วนของเสีย $\theta = 0.0279$ หรือไม่ สามารถกระทำได้โดยใช้**การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย**ที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0279$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne 0.0279$ สำหรับ n = 14,000 คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{14000}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < 353 \text{ หรือ } > 429 \\ 0.5028662369 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 353 \\ 0.0995660914 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = 429 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad 353 < \sum x_i < 429 \end{cases}$$

แต่ในการทดลองเก็บกล่องพลาสติกบรรจุขนมทั้งหมด 14,000 ชิ้น ปรากฏว่ามีกล่องพลาสติกบรรจุขนมเสียทั้งหมด 332 ชิ้น ซึ่งอยู่ในช่วง $\sum x_i < 353$ แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.0279$ ดังนั้นกล่องพลาสติกบรรจุขนมที่ใช้ในการทดลองมีสัดส่วนของเสียไม่เท่ากับ 0.0279 ซึ่งให้ผลสรุปในทำนองเดียวกับการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

1) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.75$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.7 แล้วค่า γ และ c_1 จะคงที่ แต่ค่า $1-\beta$ จะลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.75$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น แต่ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ซึ่งตรงข้ามกับเมื่อ $\alpha = 0.05$ ที่ค่า γ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นสลับกันไป

ส่วนในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\theta_1 = 0.75$ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.7 แล้วค่า c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนค่า $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และค่า γ จะมีแนวโน้มลดลง ซึ่งตรงข้ามกับเมื่อ $\alpha = 0.05$ ที่ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นละลดลงที่ไม่แน่นอน และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ที่ $\theta_1 = 0.75$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ในขณะที่ c_2 และ $1-\beta$ มีค่าเพิ่มขึ้น

2) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วนค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ส่วนการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ค่า c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10 ถึง 50 แล้วค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วนค่า c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

3) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.25$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 แล้วค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วนค่า c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

4) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 แล้วค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วนค่า c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

5) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne 0.25$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 แล้วค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วนค่า c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

1) ในการทดสอบสมมติฐานอาจเพิ่มขนาดตัวอย่าง n ให้มากขึ้น เช่น 100, 500 เป็นต้น

2) ในการทดสอบสมมติฐานอาจเปลี่ยนค่า θ_0 และ θ_1 ไป เช่น $\theta_0 = 0.30, \theta_1 = 0.70$

3) ในการทดสอบสมมติฐานอาจทำการศึกษากรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง เช่น การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรทม สุระพร. 2541. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินาม. วารสารพัฒน บริหารศาสตร์ ปีที่ 38 ฉบับที่ 3 กรกฎาคม-กันยายน.

ประชุม สุวัตถี. 2545. ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ. พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รุจิเรข ดีเสียง. 2541. การทดสอบสมมติฐานสองด้านเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง. วารสารพัฒน บริหารศาสตร์ ปีที่ 38 ฉบับที่ 2 เมษายน-มิถุนายน.

Lehmann, E. L. 1986. Testing Statistical Hypotheses. 2nd ed. New York : John Wiley and Sons.

Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. : 1974. Introduction to the Theory of Statistics. 3rd ed. Auckland : McGraw Hill.