

แบบจำลองการระบาดของโรคอีสุกอีใสในประเทศไทย Chickenpox Transmission Model in Thailand

อรวรรณ ต้นสุข¹ และ พันธนี พงศ์สัมพันธ์²

Orawan Tansuiy¹ and Puntani Pongsumpun²

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

²สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร

บทคัดย่อ

โรคอีสุกอีใสเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อไวรัสวาริเซลลา (Varicella virus) หรือ Human herpesvirus type 3 ในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการแพร่เชื้อของไวรัสชนิดนี้ โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของประชากร ผู้วิจัยได้ทำการหาจุดสมดุล หาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรังและนำมาแสดงในรูปแบบของค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นำมาแสดงเพื่อใช้ในการสนับสนุนผลลัพธ์เชิงทฤษฎี

คำสำคัญ: ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค แบบจำลองการระบาด โรคอีสุกอีใส

Abstract

Chickenpox is caused by Varicella virus or Human Herpes virus type 3. In this paper, we studied the transmission of this virus by formulating the mathematical model of population. Then equilibrium points, conditions for stabilities of disease-free and endemic equilibrium states were investigated and shown in the form of basic reproductive numbers. The numerical results are shown for supporting the theoretical results.

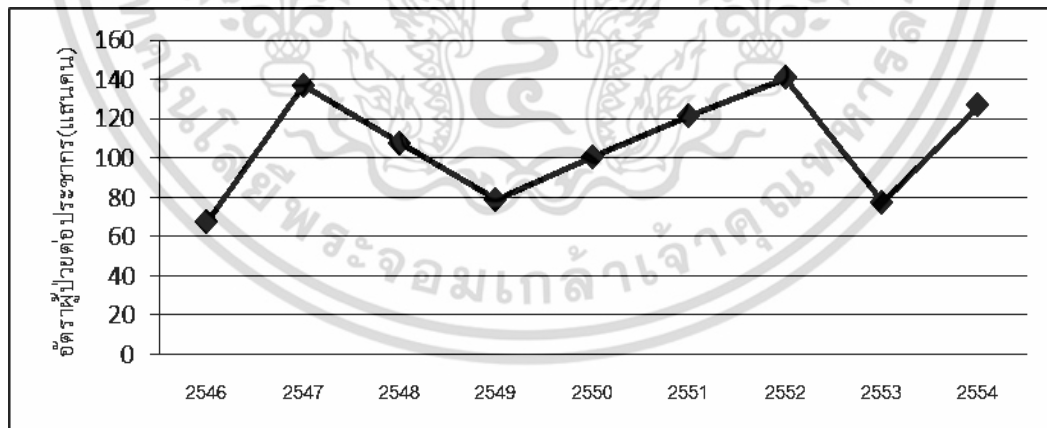
Keywords : Basic reproductive number, Endemic disease equilibrium point, Disease-free equilibrium point, Transmission model, Chickenpox

E-mail address : kppuntan@kmitl.ac.th

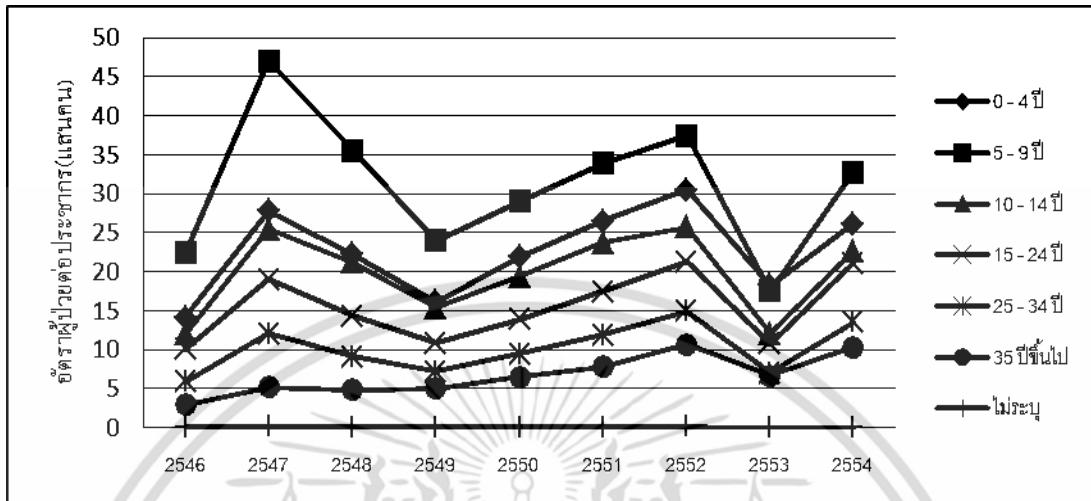
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. บทนำ

โรคอีสุกอีใสเป็นโรคที่พบได้ทั้งในเด็กและผู้ใหญ่เกิดจากการได้รับเชื้อไวรัสวาริเซลลา ซึ่งสามารถเข้าสู่ร่างกายโดยการสัมผัสตุ่มน้ำโดยตรง การสัมผัสของใช้ของผู้ป่วย เช่น เสื้อผ้า แก้วน้ำ ที่นอน หรืออาจได้รับเชื้อจากการไอจามรดกัน สำหรับในสตรีที่ตั้งครรภ์หากป่วยเป็นโรคนี้อาจเกิดทารกในครรภ์อาจได้รับเชื้อด้วย ในรายที่เป็นงูสวัด เชื้อโรคนี้อาจสามารถติดต่อในรูปแบบของอีสุกอีใสได้ โดยเฉพาะมารดาที่ให้นมบุตร หากมารดาเป็นงูสวัด บุตรก็จะเป็นอีสุกอีใสได้ เมื่อเชื้อไวรัสชนิดนี้เข้าสู่ร่างกายจะมีระยะการฟักตัวของเชื้อประมาณ 10-20 วัน ส่วนการแพร่เชื้อของโรคนี้อาจอยู่ในช่วง 2 วันก่อนมีตุ่มขึ้นไปจนถึงหลังมีตุ่มขึ้นแล้ว 4-5 วัน อาการที่พบในเด็กที่เป็นอีสุกอีใสจะมีไข้ต่ำ ๆ อ่อนเพลียและเบื่ออาหาร ส่วนผู้ใหญ่จะมีไข้สูง ปวดเมื่อยตามตัวคล้ายไข้หวัด ขณะเดียวกันก็จะมีผื่นขึ้นพร้อมๆกับวันที่เริ่มมีไข้หรือ 1 วันหลังมีไข้ โดยในระยะแรกจะขึ้นเป็นผื่นแดงราบ ต่อมาจะกลายเป็นตุ่มนูน มีน้ำใสๆ และคัน ต่อมาอีก 2-3 วันก็จะตกสะเก็ด ผื่นและตุ่มเหล่านี้จะขึ้นตามไรผมก่อน แล้วกระจายไปตามใบหน้า ลำตัว แขนหลัง และมีประปรายบริเวณแขนและขา บางคนจะมีตุ่มขึ้นในช่องปากทำให้เกิดอาการเจ็บคอ บางคนอาจไม่มีไข้ มีเพียงผื่นและตุ่มขึ้นเท่านั้น โดยในวัยรุ่นและผู้ใหญ่มักจะมีอาการรุนแรงและมีตุ่มขึ้นมากกว่า เด็กๆ โดยทั่วไปผื่นจะหายได้โดยไม่มีแผลเป็น ยกเว้นจะมีเชื้อแบคทีเรียมาแทรกซ้อน ในประเทศไทยโรคนี้นับว่าได้ในวัยเด็กช่วงอายุ 5-9 ปีมากที่สุด รองลงมาคือช่วงอายุ 0-4 ปี จากผลการสำรวจตั้งแต่ปี พ.ศ. 2546 – พ.ศ. 2554 พบว่ามีผู้ป่วยมากที่สุดในปี พ.ศ. 2552 [1-3] ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนตั้งแต่ปี พ.ศ. 2546 – พ.ศ. 2554 [3]



รูปที่ 2 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนตั้งแต่ปี พ.ศ. 2546 – พ.ศ. 2554 แยกตามกลุ่มอายุ [3]

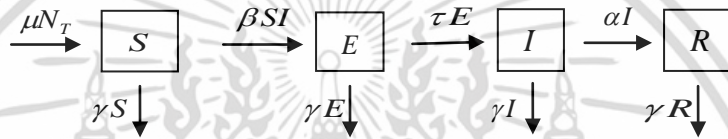
ในปี ค.ศ. 2003 Schuette ได้ศึกษาการแพร่ระบาดของไวรัสวาริเซลลาโซสเตอร์ (Varicella-zoster virus) โดยศึกษาจากแบบจำลองการแพร่ระบาดของไวรัสวาริเซลลากับไวรัสโซสเตอร์ พบว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของไวรัสวาริเซลลาโซสเตอร์ (R_0) เกิดจากการรวมกันของค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของไวรัสวาริเซลลา (R_{0v}) กับค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของไวรัสโซสเตอร์ (R_{0z}) และเมื่อ $\rho=0$ จะได้ว่า $R_0 = R_{0v}$ นั่นคือไวรัสโซสเตอร์ไม่มีผลก่อให้เกิดไวรัสวาริเซลลา-โซสเตอร์ [4]

ในปี ค.ศ. 2008 Zaman และคณะ ได้ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบ SIR โดยแสดงการหาจุดสมดุลและเงื่อนไขที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ Runge-Kutta จากผลการศึกษาได้ optimal control theory โดยนำไปวิเคราะห์การหาจุดสมดุล การวิเคราะห์เสถียรภาพ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข และนำวิธีการนี้ไปประยุกต์ใช้กับโรคต่าง ๆ เช่น โรคอีสุกอีใส โรคคางทูม [5]

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค่าข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รวบรวมจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2546 – พ.ศ. 2554 พร้อมทั้งสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคอีสุกอีใส เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวังของทางสำนักโรคระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคอีสุกอีใสที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากร และลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งกำหนดให้จำนวนประชากรมีขนาดคงที่ โดยจะแบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ กลุ่มประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และกลุ่มประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ โดยแผนภาพอธิบายแนวคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โดยที่ S เป็นจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ E เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ I เป็นจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ R เป็นจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ μ เป็นอัตราการเกิดของประชากร γ เป็นอัตราการเสียชีวิตของประชากร β เป็นอัตราการถ่ายทอดเชื้อ τ เป็นอัตราการฟื้นตัวของโรคอีสุกอีใส α เป็นอัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่เป็นโรคอีสุกอีใส และ N_T เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด ซึ่งสามารถนำมาสร้างแบบจำลองสำหรับโรคที่ติดเชื้อ โดยที่สมการพลศาสตร์ของประชากรมนุษย์แสดงได้ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \mu N_T - \gamma S - \beta SI \quad (1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \gamma E - \tau E \quad (1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \tau E - \gamma I - \alpha I \quad (1.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \gamma R \quad (1.4)$$

โดยที่ $N_T = S + E + I + R$

สมมติให้จำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั่นคือ $\frac{dN_T}{dt} = 0$

จะได้ว่า
$$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

$$0 = \mu N_T - \gamma S - \beta SI + \beta SI - \gamma E - \tau E + \tau E - \gamma I - \alpha I + \alpha I - \gamma R$$

$$\therefore \mu = \gamma$$

กำหนดให้ $\bar{S} = \frac{S}{N_T}, \bar{E} = \frac{E}{N_T}, \bar{I} = \frac{I}{N_T}, \bar{R} = \frac{R}{N_T}$

สามารถจัดสมการ (1.1) - (1.4) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \mu(1 - \bar{S}) - \beta \bar{S} \bar{N}_T \bar{I} \tag{2.1}$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \beta \bar{S} \bar{N}_T \bar{I} - (\mu + \tau) \bar{E} \tag{2.2}$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \tau \bar{E} - (\mu + \alpha) \bar{I} \tag{2.3}$$

โดยที่ \bar{R} สามารถหาได้จากเงื่อนไข $\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{R} = 1$

3. การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

3.1 จุดสมดุล

จุดสมดุล $(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*)$ สามารถหาได้จากการจัดสมการ (2.1) - (2.3) ให้เท่ากับศูนย์ [6] จะได้จุดสมดุลสองจุด คือจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1(1,0,0)$ และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง

$E_2(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*)$ เมื่อ

$$\bar{S}^* = \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \tau)}{\beta N_T \tau}, \quad \bar{E}^* = \frac{\beta \mu \tau N_T - \mu(\mu + \alpha)(\mu + \tau)}{(\mu + \tau)\beta \tau N_T}, \quad \bar{I}^* = \frac{\beta \mu \tau N_T - \mu(\mu + \alpha)(\mu + \tau)}{(\mu + \alpha)(\mu + \tau)\beta N_T}$$

โดยที่ $\bar{I}^* > 0$ เมื่อ $R_0 > 1$ โดยที่ $R_0 = \frac{\beta N_T \tau}{(\mu + \alpha)(\mu + \tau)}$

3.2 ความเสถียรภาพ

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาจากค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียน [7] จากระบบสมการ (2.1) - (2.3) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์จาโคเบียนได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta N_T \bar{I}) & 0 & -\beta \bar{S} N_T \\ \beta N_T \bar{I} & -(\mu + \tau) & \beta \bar{S} N_T \\ 0 & \tau & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}$$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมการลักษณะเฉพาะ

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

เมื่อ I_3 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 หรือ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1(1, 0, 0)$ จากการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะคือ

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \frac{-(\alpha + 2\mu + \tau) + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\tau + 4\beta N_T \tau + \tau^2}}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{-(\alpha + 2\mu + \tau) - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\tau + 4\beta N_T \tau + \tau^2}}{2}$$

เราพบว่า λ_1, λ_2 และ λ_3 มีค่าเป็นลบเมื่อ $\alpha + 2\mu + \tau > \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\tau + 4\beta N_T \tau + \tau^2}$

ดังนั้น จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 < 1$ โดยที่ $R_0 = \frac{\beta N_T \tau}{(\mu + \alpha)(\mu + \tau)}$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $E_2(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*)$ สมการลักษณะเฉพาะ คือ [7]

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3}$$

$$\text{โดยที่ } a = -\text{Tr}(A), b = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, c = -\det(A)$$

ซึ่งจะได้ว่า $a = \mu R_0 + (\mu + \tau) + (\mu + \alpha)$

$$b = \mu R_0(\mu + \alpha) + \mu R_0(\mu + \tau)$$

$$c = \mu(\mu + \tau)(\mu + \alpha)(R_0 - 1)$$

$$ab = \mu^2 R_0^2 [(\mu + \tau) + (\mu + \alpha)] + 2R_0 \mu(\mu + \tau)(\mu + \alpha) + \mu R_0 [(\mu + \tau)^2 + (\mu + \alpha)^2]$$

เพราะว่า $2R_0 \mu(\mu + \tau)(\mu + \alpha) > \mu(\mu + \tau)(\mu + \alpha)(R_0 - 1)$

จะได้ว่า $ab > c$ นั่นคือ สมการ (3) สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh - Hurwitz [6]

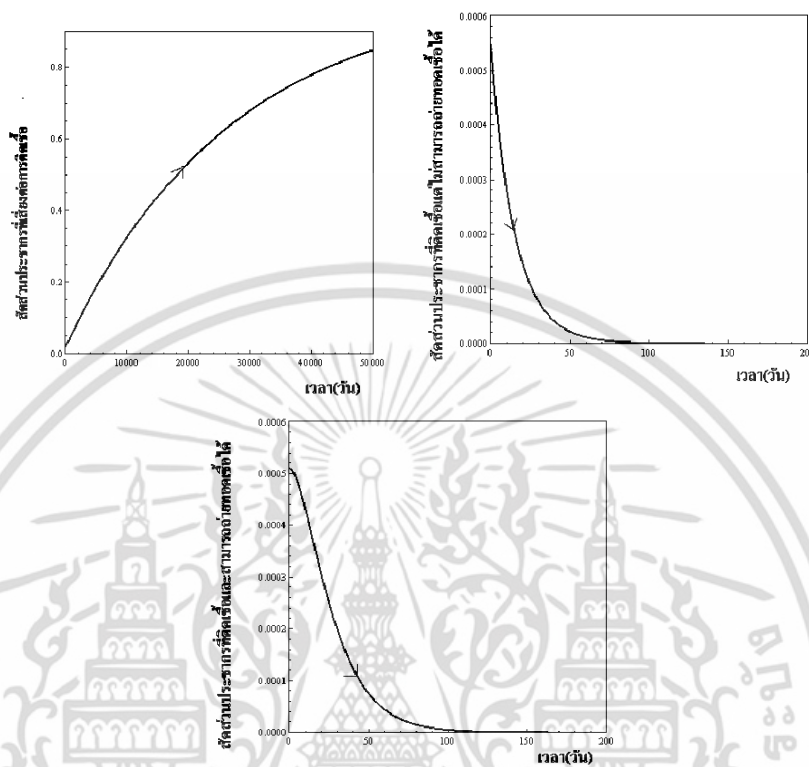
ดังนั้นจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดอย่างเรื้อรังมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 > 1$ โดยที่ $R_0 = \frac{\beta N_T \tau}{(\mu + \alpha)(\mu + \tau)}$

3.3 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการระบาดของโรคอีสุกอีใส ในการคิดเชื่อของคน ซึ่งมีค่าต่าง ๆ ดังนี้ [1, 3]

ตารางที่ 1 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆของโรคอีสุกอีใส

ข้อความ	สัญลักษณ์	พารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเกิดของประชากรมนุษย์	μ	$\frac{1}{365 * 73.6}$	ต่อวัน
อัตราการตายของประชากรมนุษย์	γ	$\gamma = \mu$	ต่อวัน
อัตราการถ่ายทอดเชื้อ	β	0.0005	ต่อวัน
อัตราการฟื้นตัวของเชื้อ	τ	$\frac{1}{15}$	ต่อวัน
อัตราการฟื้นฟูของผู้ป่วยที่เป็นโรคอีสุกอีใส	α	$\frac{1}{14}$	ต่อวัน
สภาวะไร้โรค			
จำนวนประชากร	N_T	100	คน
สภาวะเรื้อรัง			
จำนวนประชากร	N_T	7000	คน



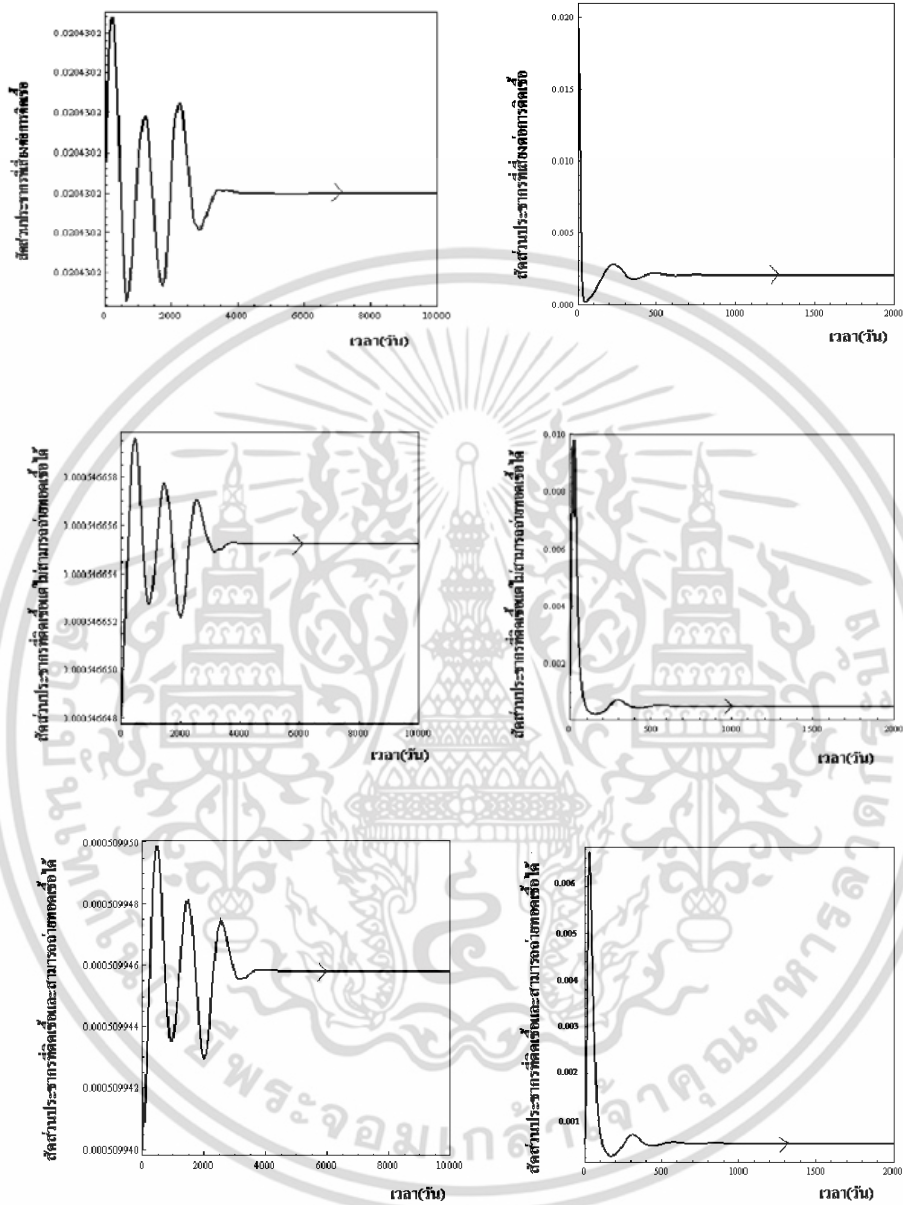
รูปที่ 4 กราฟแสดงสัดส่วนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะไร้โรค

จากกราฟจะเห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบเข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0)$ โดยที่ $R_0 = 0.69$

จากกราฟด้าน 5a) เราจะเห็นได้ว่าผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะระบาดอย่างเร็ว

$E_2 = (0.020430, 0.000546, 0.000509)$ โดยที่ $R_0 = 48.94$ เมื่อ $\beta = 0.0005$ และจากกราฟ 5b) เราจะเห็นได้ว่าผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะระบาดอย่างเร็ว $E_2 = (0.002043, 0.000556, 0.000519)$ โดยที่ $R_0 = 489.47$ เมื่อ $\beta = 0.005$

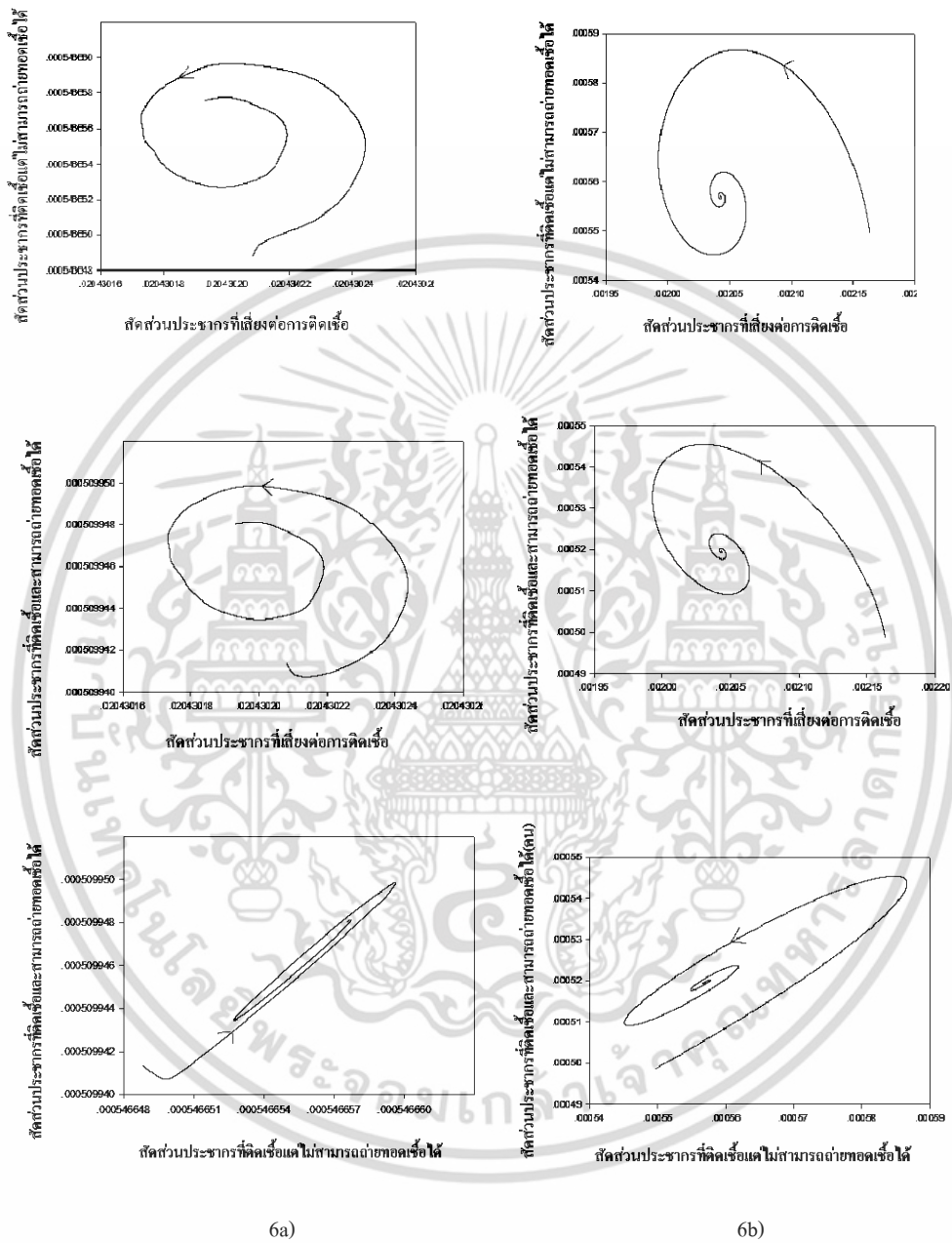
จากรูปที่ 5 เราพบว่าเมื่อค่า R_0 เพิ่มขึ้นจะส่งผลให้เวลาที่เข้าสู่จุดสมดุลเร็วขึ้น



5a)

5b)

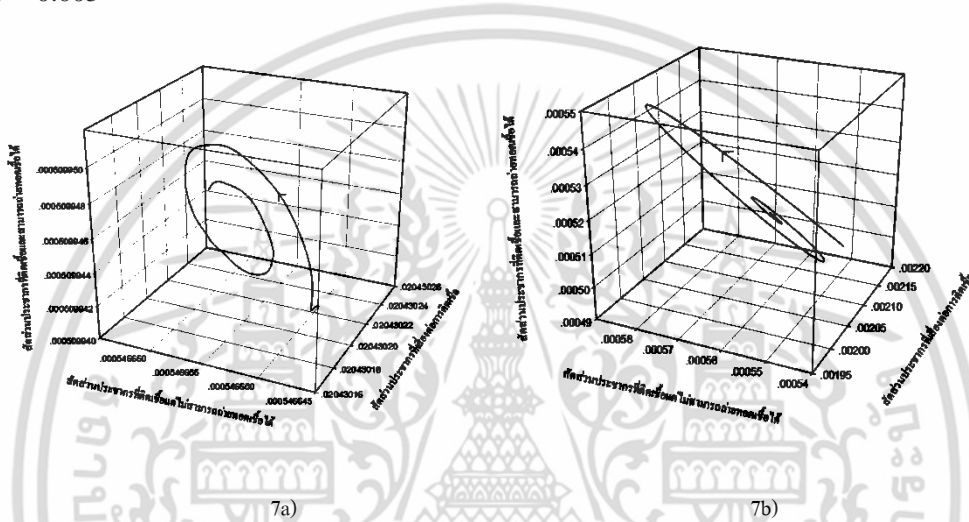
รูปที่ 5 กราฟแสดงสัดส่วนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อมาแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และ ประชากรที่ติดเชื้อมาและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบอบอย่างเรื้อรัง



รูปที่ 6 กราฟแสดงการเปรียบเทียบของสัดส่วนของประชากรแต่ละกลุ่มสำหรับโรคอีสุกอีใสในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศีกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในรูปที่ 6 แสดงกราฟของ $(\bar{S}^*, \bar{E}^*), (\bar{S}^*, \bar{I}^*), (\bar{E}^*, \bar{I}^*)$ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ กราฟ (6a) จะลู่เข้าจุดสมดุล $(0.020430, 0.000546), (0.020430, 0.000509)$ และ $(0.000546, 0.000509)$ ตามลำดับ โดยที่ $R_0 = 48.94$ เมื่อ $\beta = 0.0005$ และกราฟ (6b) จะลู่เข้าจุดสมดุล $(0.002043, 0.000556), (0.002043, 0.000519)$ และ $(0.000556, 0.000519)$ โดยที่ $R_0 = 489.47$ เมื่อ $\beta = 0.005$



รูปที่ 7 กราฟแสดงสัดส่วนเปรียบเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคอีสุกอีใสในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง

ในรูปที่ 7 ได้อธิบาย $(\bar{S}^*, \bar{E}^*, \bar{I}^*)$ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่กราฟ 7a) จะลู่เข้าจุดสมดุล $(0.020430, 0.000546, 0.000509)$ สำหรับ $R_0 = 48.94$ เมื่อ $\beta = 0.0005$ และกราฟ 7b) จะลู่เข้าจุดสมดุล $(0.002043, 0.000556, 0.000519)$ สำหรับ $R_0 = 489.47$ เมื่อ $\beta = 0.005$

จากรูปที่ 6 และรูปที่ 7 จะเห็นได้ว่าเมื่อ R_0 เพิ่มขึ้น การวนของกราฟจะเร็ว และเห็นได้ชัดกว่ากราฟที่มีค่า R_0 น้อย

4. อภิปรายและสรุปผล

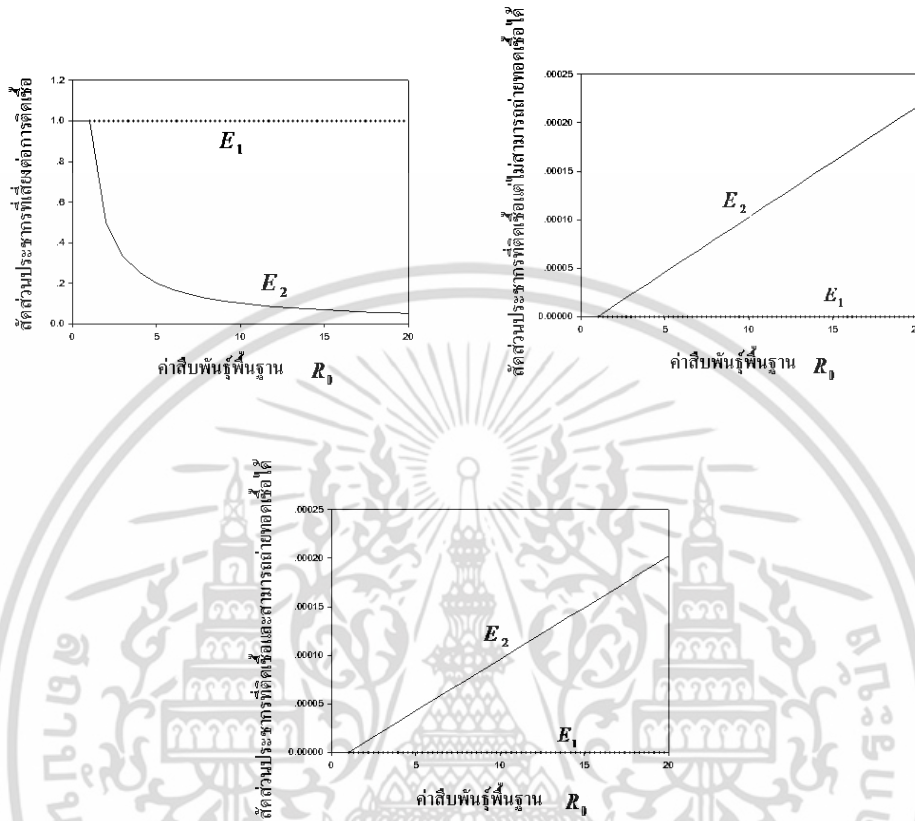
ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการระบาดของโรคอีสุกอีใส โดยการรวบรวมข้อมูลจากสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข มาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และผู้ที่พ้นจากการติดเชื้อ โดยทำการหาจุดสมดุล เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพ และการวิเคราะห์เชิงตัวเลข [8]

จากการศึกษา ผลลัพธ์ที่ได้คือจุดสมดุลสองจุดคือ จุดสมดุลที่สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง จากการศึกษาพบว่าเมื่อค่า R_0 เพิ่มขึ้นจะส่งผลให้เวลาที่เข้าสู่จุดสมดุลเร็วขึ้น เมื่อพิจารณาคาบของการแกว่ง พบว่าคาบของการแกว่งมีค่าประมาณ 2.20 ปี เมื่อค่าลักษณะเฉพาะมีค่าเป็น $-0.000691 \pm 0.007840i$ ที่สภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $R_0 = 48.94$ และคาบของการแกว่งมีค่าประมาณ 0.68 ปี เมื่อมีค่าลักษณะเฉพาะมีค่าเป็น $-0.007330 \pm 0.025395i$ ที่สภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $R_0 = 489.471$ พิจารณากราฟระหว่างค่า R_0 กับสัดส่วนต่าง ๆ พบว่าในสภาวะไร้โรค ($R_0 < 1$) จุดสมดุล (E_1) จะเสถียร ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง ($R_0 > 1$) จุดสมดุล (E_2) จะเสถียร โดยที่ $\tilde{R}_0 = \sqrt{R_0}$ จะถูกเรียกว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรค โดยเป็นค่าเฉลี่ยที่แสดงจำนวนของการเกิดโรคในระยะที่สองโดยใช้ผลจากระยะแรก

กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของประชากรกลุ่มต่าง ๆ แสดงดังรูปที่ 8

จากกราฟรูปที่ 8 จะเห็นได้ว่าถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของคนที่เกี่ยวข้องต่อการติดเชื้อมีค่าน้อยลง แต่สัดส่วนของผู้ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้มีค่ามากขึ้น

จากการวิจัยข้างต้นพบว่าแบบจำลองนี้เกิดจุดสมดุลสองจุดที่มีความเสถียรภาพที่สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีผลทำให้ระยะเวลาในการเข้าสู่จุดสมดุลเร็วขึ้นและยังมีผลต่อสัดส่วนของประชากรใน แต่ละกลุ่มด้วย ดังนั้นการเพิ่มค่าสืบพันธุ์พื้นฐานจะช่วยลดการระบาดของโรคได้เร็วขึ้น



รูปที่ 8 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนต่าง ๆ ของประชากรในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรัง

อย่างไรก็ตาม แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ไม่ได้พิจารณาเมื่อประชากรไม่คงที่ และไม่ได้พิจารณาสภาวะการมีภูมิคุ้มกันต่อโรคนี ซึ่งถ้าทำการพิจารณาโดยเพิ่มปัจจัยทั้งสองปัจจัยที่กล่าวมาข้างต้น อาจทำให้แบบจำลองที่ได้มีความเหมาะสมมากยิ่งขึ้น

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กระทรวงสาธารณสุข นางสาว อรรธณ ดันสุข ขอขอบคุณโครงการพัฒนากำลังคนทางด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย) และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่าน

เอกสารอ้างอิง

- [1] อภิชาติ ศิวาธร , 2550 . โรคผิวหนังต้องรู้ ; สำหรับเวชปฏิบัติทั่วไป . พิมพ์ครั้งที่ 8, สำนักพิมพ์หมอชาวบ้าน. กรุงเทพฯ. [Apichard Siwayotorn , 2007 . Dermatitis ; for general medical . 8th ed. Hmorchawbarn Publisher . Bangkok (in Thai)]
- [2] สำนักระบาดวิทยา , รายงานโรคในระบบเฝ้าระวัง *Chickenpox* . [ออนไลน์] . เข้าถึงได้จาก : < <http://www.boe.moph.go.th/boedb/surdata/disease.php?dcontent=old&ds=17> > [วันที่ค้นข้อมูล : 5 เมษายน 2555] [Bureau of Epidemiology , Surveillance summarized of chickenpox . [online] Available at : < <http://www.boe.moph.go.th/boedb/surdata/disease.php?dcontent=old&ds=17> > [Accessed 5 April 2012] (in Thai)]
- [3] Mootie, โรคอีสุกอีใส (*chickenpox*). [ออนไลน์] . เข้าถึงได้จาก : < <http://www.thaihealth.or.th/healthcontent/article/6569> > [วันที่ค้นข้อมูล : 5 เมษายน 2555][Mootie , Chickenpox. [online] Available at : < <http://www.thaihealth.or.th/healthcontent/article/6569> > [Accessed 5 April 2012] (in Thai)]
- [4] Schuette , M.C., 2003. A qualitative analysis of a model for the transmission of varicella-zoster virus. *Mathematical Biosciences* ,182 , 113–126.
- [5] Zaman , G. , Kang , Y.H. and Jung , I.H., 2008. Stability analysis and optimal vaccination of an SIR epidemic model. *BioSystems* , 93, 240–249.
- [6] Leah, E.K.,1998. *Mathematical Models in Biology* . New York : Random House.
- [7] Esteva , L. and Vargas, C. , 1998 . Analysis of a dengue disease Transmission model. *Mathematical Biosciences*, 150, 131-151.
- [8] Kendall, A., 1993. *Elementary Numerical Analysis* , 2nd ed . John Wiley & sons, USA.