ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอฌองด์ โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

APPROXIMATED SOLUTIONS OF BESSEL'S EQUATION AND LEGENDRE'S EQUATION BY DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

บุญญาพร เกิดผล

BOONYAPORN KERDPOL

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2558

KMITL-2015-SC-M-001-029

ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

Approximated Solutions of Bessel's Equation and Legendre's Equation by Differential Transform Method

บุญญาพร เกิดผล

Boonyaporn Kerdpol

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2558

KMITL-2015-SC-M-001-029

Approximated Solutions of Bessel's Equation and Legendre's Equation by Differential Transform Method

Boonyaporn Kerdpol

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2015

KMITL-2015-SC-M-001-029

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ “ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์”
“APPROXIMATED SOLUTIONS OF BESSEL’S EQUATION AND LEGENDRE’S EQUATION BY DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD”

ชื่อนักศึกษา นางสาวบุญญาพร เกิดผล
รหัสประจำตัว 56605067
ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม (ถ้ามี) -

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ประธานกรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ อาจารย์บัณฑิตประจำ (ในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้อง)	
ดร.สุรีรัตน์ อารีรักษ์สกุล ก้องโลก ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอกสถาบันฯ	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	

วัน/ เดือน/ ปี ที่สอบ 26 มิถุนายน พ.ศ.2558 เวลา 10.00-12.00 น.
สถานที่สอบ ห้อง 207 อาคารจุฬาภรณ์วลัยลักษณ์ 1 ชั้น 2

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.ดุษณี ธนะบริพัฒน์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
วันที่ 10 **เดือน** กค **พ.ศ** 58

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์
นักศึกษา	นางสาวบุญญาพร เกิดผล
รหัสประจำตัว	56605067
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2558
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาทฤษฎีวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อนำมาใช้หาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลอันดับ ν และสมการเลอจองด์อันดับ α และเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยแม่นตรงโดยหาค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์และใช้กราฟซึ่งการหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์หาจากวิธีของโฟรเบนิอุสและวิธีอนุกรมกำลัง ตามลำดับ ผลเฉลยที่ได้ด้วยวิธีนี้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังมีค่าเช่นเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้มีขั้นตอนการคำนวณที่ง่ายกว่าและได้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องแม่นยำ

คำสำคัญ : วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ สมการเลอจองด์ สมการเบสเซล

Thesis Title	Approximated Solutions of Bessel's Equation and Legendre's Equation by Differential Transform Method
Student	Miss Boonyaporn Kerdpol
Student ID	56605067
Degree	Master of Science
Program	Applied Mathematics
Year	2015
Thesis Advisor	Asst.Prof.Dr.Jaipong Kasemsuwan

Abstract

In this work, differential transform method (DTM) is developed theoretically to find approximated solutions of Bessel's equations of order ν and Legendre's equations of order α. The obtained results are compared graphically and also check absolute error with the exact solutions calculated by the Frobenius method for Bessel's equations and power series method for Legendre's equations. Both approximated solutions and exact solutions are in the same power series forms. The DTM is accurate and easier than the Frobenius method.

Keywords: Differential transform method, Legendre's equation, Bessel's equations

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้ ข้าพเจ้าได้ศึกษาในหัวข้อเรื่อง ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์(Approximated Solutions of Bessel’s Equation and Legendre’s Equation by Differential Transform Method)

ข้าพเจ้าขอกราบขอบคุณ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ดร. สุรีรัตน์ อารีรักษ์สกลุล ก้องโลก ผศ.ดร. นพรัตน์ โพธิ์ชัย และดร.วรรณพร สรรประเสริฐ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้คำปรึกษา แนะนำแนวทาง ตลออดจนช่วยตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ และให้ความรู้แก่ข้าพเจ้า ทำให้งานวิจัยฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบคุณบิดามารดาที่คอยสั่งสอนอบรม เป็นกำลังใจให้แก่ข้าพเจ้าและสนับสนุนด้านการศึกษามาตั้งแต่ต้นจนถึงทุกวันนี้

นางสาวบุญญาพร เกิดผล

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์(Differential Transform Method: DTM) เป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่ได้แนวคิดมาจากอนุกรมเทเลอร์(Taylor Series)และวิธีนี้จะให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ แรกเริ่มนั้น Zhoun[3] ได้นำไปประยุกต์ในการแก้ไขปัญหาเริ่มต้น ทั้งที่เป็นเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า ต่อมา C.L.Chan และY.C.Liu[4] ได้นำเอาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ไปประยุกต์ในการแก้ปัญหาค่าขอบ จากนั้น Jang,Chen และ Lui[5] ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาเชิงอนุพันธ์ย่อย นอกจากนี้Montri Thogmoon และ Sasitorn Pusjuso[6] ได้ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงซึ่งได้มาจากการแปลงลาปลาซ

การแปลงเชิงอนุพันธ์เป็นการแปลงของฟังก์ชัน $c(x)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันเดิม(Original Function) ไปเป็นฟังก์ชันใหม่ $C(k)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการแปลง(Transform Function)

การแปลงเชิงอนุพันธ์(Differential Transform) ของ $c(x)$ กำหนดโดย [7]

$$C(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=x_0} \tag{1.1}$$

และการแปลงเชิงอนุพันธ์ผกผันของ $C(k)$ คือ $c(x)$ ซึ่งอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ [8]

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(k)(x-x_0)^k \tag{1.2}$$

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลและสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ ซึ่งทั้งสองสมการนี้มีวิธีการหาผลเฉลยแม่นตรงที่ซับซ้อนและเข้าใจยาก จากตัวอย่างในงานวิจัยนี้จะเปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์กับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่าผลเฉลยที่ได้มีคำตอบเท่ากันและวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์สามารถหาผลเฉลยของสมการทั้งสองได้ง่ายกว่า

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) เพื่อศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2) พัฒนาและปรับปรุงทฤษฎีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ที่เหมาะสมกับการนำไปใช้แก้ปัญหาสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์

3) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) สมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ที่ศึกษาในงานวิจัยนี้จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจึงจะสามารถใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการหาผลเฉลยได้

2) สมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ที่ศึกษาในงานวิจัยนี้มีหลายชนิด

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษาคุณสมบัติและชนิดของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์รวมทั้งวิธีการแก้สมการด้วยวิธีโฟรเบนิอุสและวิธีอนุกรมกำลัง

2) ศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform Method: DTM) เกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีบทและคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไป ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

3) ศึกษารวบรวมทฤษฎีของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์และนำมาพัฒนาและปรับปรุงให้สามารถนำไปใช้แก้สมการได้

4) พัฒนาและปรับปรุงสูตรการแปลงเชิงอนุพันธ์ ให้สอดคล้องกับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบสเซลแต่ละชนิดและแต่ละอันดับรวมทั้งการหาผลเฉลยของสมการเลอจองด์ด้วย

5) เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณ (Approximated Solutions) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์กับผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution)

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้รับความรู้ในการศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐาน

2) ได้รับความรู้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและเลอจองด์ด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ที่มีเงื่อนไขขอบเขต

3) ได้วิธีใหม่ที่เข้าใจง่ายในการแก้ปัญหาสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์

4) เป็นแนวทาง ในการนำวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ไปใช้แก้ปัญหาอื่นๆต่อไป

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

2.1 อนุกรมกำลัง และ อนุกรมเทย์เลอร์ [1]

2.1.1 อนุกรมกำลัง (Power Series)

นิยามที่ 1 [1] อนุกรมกำลังใน $x-x_0$ (Power Series in $x-x_0$) คือ อนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad (2.1)$$

สำหรับจำนวนจริง x จะมี x_0 เป็นค่าคงตัวเรียกว่า จุดศูนย์กลางของการกระจาย(center of expansion) เรียกอนุกรมที่ (2.1) ว่าอนุกรมกำลังรอบจุด x_0 และเรียก a_n ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง

<u>หมายเหตุ</u> อนุกรมที่ (2.1) คอนเวอร์ไปสู่ a_0 เมื่อ $x = x_0$ เสมอและอาจลู่เข้าสำหรับทุกค่าของ x ก็ได้ ถ้าอนุกรมที่ (2.1) ไม่ลู่เข้าตามที่กล่าวมา จะมี $R > 0$ ซึ่งอนุกรมที่ (2.1) ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์สำหรับทุกค่า x ในช่วง $|x-x_0| < R$ และลู่ออก เมื่อ $|x-x_0| > R$ เราเรียก R ว่า รัศมีของการลู่เข้า($R=0$ อนุกรมลู่เข้าที่ x_0 และ $R=\infty$ อนุกรมคอนเวอร์ทุกค่า x) และเรียกช่วง (x_0-R, x_0+R) ว่า ช่วงของการลู่เข้า และถ้าอนุกรมที่ (2.1) ลู่เข้าไปสู่ $f(x)$ จะเขียนได้เป็น

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (2.2)$$

2.1.2 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) และอนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin's Series)

นิยามที่ 2 [1] อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคคลอริน
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบนช่วง I ที่มี x_0 เป็นจุดภายใน อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด $x = x_0$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \quad (2.3)$$

อนุกรมแมคคลอริน คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (2.4)$$

นั้นคือ อนุกรมเทย์เลอร์ กรณี $x_0 = 0$ นั้นเอง

ตัวอย่างที่1 กำหนด $f(x)=e^{x}$ พหุนามเทย์เลอร์ที่กระจายรอบจุด $x=0$

วิธีทำ ให้ $f(x)=e^{x}$ จะได้อนุพันธ์อันดับต่างๆดังนี้

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=e^{x} & f(0)=1 \\
f'(x)=e^{x} & f'(0)=1 \\
f''(x)=e^{x} & f''(0)=1 \\
f'''(x)=e^{x} & f'''(0)=1 \\
f^{(4)}(x)=e^{x} & f^{(4)}(0)=1 \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x)=e^{x} & f^{(n)}(0)=1
\end{array}
$$

ดังนั้น แทนลงในนิยามที่ 2 เมื่อ $x_0=0$ จะได้ พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ e^{x} รอบ $x=0$ คือ

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^{n} &= f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^{2}+\ldots \\
&=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x)=\frac{1}{x}$ พหุนามเทย์เลอร์ที่กระจายรอบจุด $x=1$

วิธีทำ ให้ $f(x)=\frac{1}{x}$ จะได้อนุพันธ์อันดับต่างๆดังนี้

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=\dfrac{1}{x} & f(1)=1 \\
f'(x)=-\dfrac{1}{x^{2}} & f'(1)=-1 \\
f''(x)=\dfrac{2}{x^{3}} & f''(1)=2! \\
f'''(x)=-\dfrac{3\cdot 2}{x^{4}} & f'''(1)=-3! \\
f^{(4)}(x)=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{x^{5}} & f^{(4)}(1)=(-1)^{n}n! \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x)=(-1)^{n}\dfrac{n!}{x^{n}} & f^{(n)}(1)=(-1)^{n}n!
\end{array}
$$

ดังนั้น แทนลงในนิยามที่ 2 เมื่อ $x_0=1$ จะได้ พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $\frac{1}{x}$ รอบ $x=1$ คือ

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^{n} &= f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^{2}+\ldots \\
&=1-(x-1)+(x-1)^{2}-(x-1)^{3}+\ldots
\end{aligned}
$$

นิยามที่ 3 [1] เราเรียก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อมีช่วง $I:(x_0-R, x_0+R), R>0$ ซึ่งสำหรับทุก x ในช่วงนี้คอนเวอร์ไปสู่ $f(x)$ เราสามารถเขียนแทน $f(x)$ ได้ด้วยอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) รอบจุด x_0 นั้นคือ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2.5}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงอนุกรมเทย์เลอร์(อนุกรมแมคลอริน)ของฟังชันวิเคราะห์ บนช่วงของ x

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{ทุกค่า } x$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{ทุกค่า } x$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad |x|<1$$

นอกจากฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ยกมาเป็นตัวอย่างนี้ ฟังก์ชันที่เราพบมากและเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ คือ ฟังก์ชันโพลิโนเมียลและฟังก์ชันตรรกยะ(rational function) สำหรับฟังก์ชันตรรกยะเป็นฟังก์ชันวิเคาระห์ยกเว้นที่จุดซึ่งทำให้ฟังก์ชันมีค่าเข้าสู่อนันต์ เช่นฟังก์ชัน $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า x ยกเว้นที่จุด $x=1$ และ $x=2$

หมายเหตุ ฟังก์ชันในรูป $f(x)=(x-1)^{\frac{5}{3}}$ มีค่าจำกัดไม่ว่า x จะมีค่าเท่าใด แต่ฟังก์ชันนี้ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด $x=1$ เพราะว่า $f''(x)$ มีค่าเข้าสู่อนันต์ เมื่อ $x=1$ $f(x)$ จึงไม่สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ ณ จุด $x=1$ ได้

เราจะพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2.6}$$

นิยามที่ 4 [1] เราเรียก x_0 ว่าจุดสามัญ (Ordinary Point) ของสมการ (2.6) ถ้าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 และเรียนจุดที่ไม่ใช่จุดสามัญว่าจุดเอกฐาน (Singular Point) เรียกจุดเอกฐาน x_0 ว่าเป็นเอกฐานปรกติ (Regular Singular Point) ถ้า $(x-x_0)P(x)$ และ $(x-x_0)^2Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 ไม่เช่นนั้นจะเรียก x_0 ว่าเป็นจุดเอกฐานไม่ปรกติ (Irregular Singular Point)

บทแทรกที่ 1 [1] ถ้าเป็นจุดเอกฐานไม่ปรกติของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.6) จะได้ว่าเราไม่สามารถหาผลเฉลยแบบอนุกรมกำลังได้

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาสมการ $x(x-1)^3 y'' + 2(x-1)^3 y' + 3y = 0$

สามารถเขียนใหม่ได้หลังจากหารตลอดด้วย $x(x-1)^3$ จะได้

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x(x-1)^3}y = 0$$

เนื่องจาก $P(x) = \frac{2}{x}$ และ $Q(x) = \frac{3}{x(x-1)^3}$ จะเห็นว่าทุกจุด x เป็นจุดสามัญ ยกเว้นจุด $x = 0$ และ $x = 1$ เป็นจุดเอกฐาน เพราะว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ ไม่นิยามที่ $x = 0$ และในขณะที่ $P(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 1$ แต่ $Q(x)$ ไม่เป็น

พิจารณาที่จุด $x = 0$ จะพบว่า $xP(x) = 2$ และ

$$x^2 Q(x) = \frac{3x}{(x-1)^3} = 3x(x-1)^{-3} = 3x(1 + 3x + 6x^2 + \ldots), \ |x| < 1$$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เพราะสามารถแทน $xP(x)$ และ $x^2Q(x)$ ได้ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $x = 0$ ดังนั้น จุด $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

พิจารณาที่จุด $x = 1$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปรกติ เนื่องจาก

$$(x-1)P(x) = \frac{2(x-1)}{x} = 2(x-1)\left[1 + (x-1)\right]^{-1}$$

$$= 2(x-1)\left[1 - (x-1) + (x-1)^2 - \ldots\right], \quad |x-1| < 1$$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ แต่ $(x-1)^2 Q(x) = \frac{3}{x(x-1)}$ ไม่นิยามที่ $x = 1$

ดังนั้น $(x-1)^2 Q(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 1$

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาสมการ $y'' + y' + xy = 0$ หาผลเฉลยแบบอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิด

วิธีทำ ให้ $P(x) = 1$ และ $Q(x) = x$ จะเห็นว่าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

ดังนั้น เป็นจุดสามัญของสมการ เพราะฉะนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

หาอนุพันธ์ จะได้ $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ และ $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

แทน y, y' และ y'' ลงในสมการจะได้

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$
$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$
$$(2a_2 + a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} \right\} x^n = 0$$

ซึ่งจะเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สัมประสิทธิ์ของกำลังต่างๆ ต้องมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$2a_2 + a_1 = 0$$

และ $$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

เพราะฉะนั้น $$a_2 = -\frac{a_1}{2}$$

และจะได้สูตรหมุนเวียน(Recurrence Formula)

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

ดังนั้น $$a_3 = -\frac{2a_2 + a_0}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{6} - \frac{a_0}{6}$$
$$a_4 = -\frac{3a_3 + a_1}{4 \cdot 3} = -\frac{a_1}{8} + \frac{a_0}{24}$$
$$a_5 = -\frac{4a_4 + a_2}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{40} - \frac{a_0}{120}$$
$$\vdots$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \ldots \\ &= a_0 + a_1 x - \frac{a_1}{2} x^2 + \left(\frac{a_1}{6} - \frac{a_0}{6} \right) x^3 + \left(-\frac{a_1}{8} + \frac{a_0}{24} \right) x^4 + \left(\frac{a_1}{40} - \frac{a_0}{120} \right) x^5 + \ldots \\ &= a_0 \left(1 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{120} x^5 + \ldots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{8} x^4 + \ldots \right) \end{aligned}$$

โดยที่ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

2.2 ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) [1]

นิยามที่ 5 [1] ฟังก์ชันแกมมา

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad , \quad x > 0 \tag{2.7}$$

อ่านว่า “แกมมา x” ที่ต้องกำหนดให้ $x > 0$ เพราะว่าอินทิกรัลใน (2.6) เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบซึ่งลู่เข้า

เมื่อ $x > 0$

จาก (2.7) แทนค่า $x = 1$ ได้

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

และจาก (2.7) แทนค่า x ด้วย $x+1$ ได้

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = 1 \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \left[\left(-t^x e^{-t}\right)\Big|_0^T + x\int_0^T t^{x-1} e^{-t} dt \right] \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

โดยการแทนค่า x ใน (2.7) ด้วย 1 และ $x+1$ ตามลำดับนี้เราได้คุณสมบัติของฟังก์ชันแกมมา คือ

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad , x > 0$$

และจากคุณสมบัติทั้งสองนี้ ทำให้เราได้ว่า

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 1\cdot 2$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 1\cdot 2\cdot 3$$

ซึ่งเราสรุปได้ว่า

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2.8}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $n!$ นิยามสำหรับ $n = 0$ หรือเลขจำนวนเต็มบวกเท่านั้นโดยผลจาก(2.8) ทำให้เราสามารถขยายบทนิยามของฟังก์ชันแฟกทอเรียล (Factorial Function) คือ $x!$ สำหรับ x ที่ไม่จำเป็นต้องมีค่าเป็น 0 หรือเลขจำนวนเต็มบวกโดยอาศัยฟังก์ชันแกมมา คือ

$$x! = \Gamma(x+1)$$

สำหรับทุกค่า x ที่ $x \neq -N \; , N = 1, 2, 3, \ldots$

จากบทนิยามของ $\Gamma(x)$ เรานิยาม $\Gamma(x)$ สำหรับ $x > 0$ เท่านั้น เราสามารถนิยาม $\Gamma(x)$ สำหรับ $x < 0$ ได้โดยใช้คุณสมบัติ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ โดยเขียนคุณสมบัตินี้ในรูป

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad , \quad x > 0 \tag{2.9}$$

เนื่องจาก $\Gamma(x+1)$ นิยามได้ เมื่อ $x > -1$ ดังนั้น โดย(2.8) เราสามารถหาค่า $\Gamma(x)$ ได้เมื่อ $-1 < x < 0$

และจาก (2.8) เมื่อแทน x ด้วย $x+1$ ได้

$$\Gamma(x+1)=\frac{\Gamma(x+2)}{x+1} \quad , \quad x>-1$$

แทนในสมการ (2.8) ได้

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} \quad , \quad x>0 \tag{2.10}$$

เพราะว่า $\Gamma(x+2)$ นิยามได้เมื่อ $x>-2$ ดังนั้น โดย(2.10) เราหาค่า $\Gamma(x)$ ได้เมื่อ $-2<x<0\,, x\neq 1$ กระทำทำนองเดียวนี้ต่อไปจะได้ค่าของ $\Gamma(x)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k ใดๆ ซึ่ง $-k<x<0\ , x\neq 0,-1,-2,\ldots,-k+1$ จาก

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)} \tag{2.11}$$

จาก(2.11) นี้จะเห็นว่า $\Gamma(x)$ จะมีค่าเข้าสู่อนันต์ เมื่อ x มีค่าเข้าสู่ 0 หรือจำนวนเต็มลบ

2.3 สมการเบสเซล (Bessel Equation) [1]

สมการเบสเซลปรากฏในการประยุกต์ทางวิทยาศาสตร์หลายเรื่อง เช่น ปัญหาต่างๆ ในทางไฟฟ้า ความร้อน อุทกพลศาสตร์(Hydrodynamics) ความยืดหยุ่น การเคลื่อนที่ของคลื่น (Wave motion) เป็นต้น

นิยามที่ 6 [1] สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับที่ ν (Bessel's Differential Equation of Order ν) คือ สมการซึ่งอยู่ในรูป

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{2.12}$$

โดยที่ ν เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนตรรกยะและ $\nu\geq 0$

หาผลเฉลยของสมการเบสเซลในอนุกรมกำลังรอบจุด $x=0$ โดยวิธีของโฟรเบนิอุส สมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}, \qquad a_0\neq 0 \tag{2.13}$$

แล้วแทนค่าลงในสมการเบสเซลจะได้

$$\begin{aligned}x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y &=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r+2}-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}\\ &=a_0\left(r^2-\nu^2\right)x^r+x^r\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left((k+r)^2-\nu^2\right)x^k+x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}\\ &=0\end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์และเราสนใจกรณี $a_0\neq 0$ ดังนั้น $r^2-\nu^2=0$

จะได้ รากของสมการ คือ $r_1=\nu$ และ $r_2=-\nu$

แทนค่า $r_1=\nu$ จะได้

$$x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} a_k k\left(k+2\nu\right)x^k + x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = x^\nu\left(\left(1+2\nu\right)a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k+2\nu\right)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2}\right)$$

$$= x^\nu\left(\left(1+2\nu\right)a_1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(k+2\right)\left(k+2+2\nu\right)a_{k+2} + a_k\right)x^{k+2}\right)$$

$$= 0$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์อีกครั้ง จะได้

$$\left(1+2\nu\right)a_1 = 0$$

$$\left(k+2\right)\left(k+2+2\nu\right)a_{k+2} + a_k = 0, \qquad k = 0,1,2,...$$

หรือ $$a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)\left(k+2+2\nu\right)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

เพราะว่า $1+2\nu \neq 0$ ดังนั้น $a_1 = 0$ ซึ่งจะทำให้ $a_3 = a_5 = \ldots = 0$ เพราะฉะนั้น เราจะหาค่าเฉพาะ $a_0, a_2, a_4, \ldots$

และสำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $k = 2m$ จะได้ สำหรับบาง m ที่เป็นจำนวนเต็ม

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+\nu)}, \qquad m = 1,2,3,\ldots \tag{2.14}$$

เนื่องจาก a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ในที่นี้ เลือก $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ ตามความเป็นจริงแล้ว การเลือกค่าของ a_0 อาจจะเป็นตัวอื่นก็ได้ แต่ค่าที่ได้เลือกไว้นี้ค่อนข้างจะมาตรฐาน ถ้า ν เป็นจำนวนเต็ม แล้วฟังชันแกมมามีคุณสมบัติว่า $\Gamma\left(\nu+1\right) = \nu!$ และจากสมการที่ (2.14) จะได้

$$a_2 = \frac{a_0}{2^2(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu}1!(\nu+1)\Gamma(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu}1!\Gamma(\nu+2)}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{2^2 \cdot 2(\nu+2)} = -\frac{1}{2^{4+\nu} \cdot 2 \cdot 1!(\nu+2)\Gamma(\nu+2)} = -\frac{1}{2^{4+\nu}2!\Gamma(\nu+3)}$$

$$a_6 = \frac{a_4}{2^2 \cdot 3(\nu+3)} = -\frac{1}{2^{6+\nu} \cdot 3 \cdot 2!(\nu+3)\Gamma(\nu+3)} = -\frac{1}{2^{6+\nu}3!\Gamma(\nu+4)}$$

$\vdots$

โดยทั่วไปจะได้ $$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} \cdot m!\Gamma(\nu+m+1)}, \qquad m = 0,1,2,\ldots \tag{2.15}$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ลงในผลเฉลยที่สมมติไว้จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการเบสเซลซึ่งจะเขียนแทนด้วย $J_\nu(x)$ นั้นคือ

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}x^{2m+\nu} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \tag{2.16}$$

และเรียก $J_\nu(x)$ ว่า ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ ν (Bessel function of the first kind of order ν)

ฟังก์ชันเบสเซลที่พบมากในทางประยุกต์คือ $J_0(x)$ และ $J_1(x)$ ซึ่งเขียนออกมาอย่างชัดเจนได้เป็น

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!\Gamma(m+1)}=1-\frac{x^2}{2^2\cdot(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4\cdot(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6\cdot\left(3!\right)^2}+\ldots \tag{2.17}$$

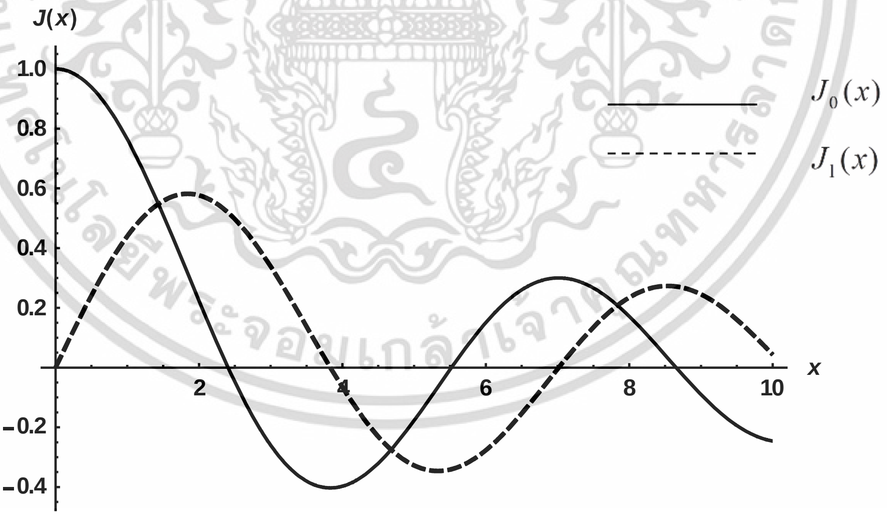
$$J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{m!\Gamma(m+2)}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot1!\cdot2!}+\frac{x^5}{2^5\cdot2!\cdot3!}-\frac{x^7}{2^7\cdot3!\cdot4!}+\ldots \tag{2.18}$$

$$J_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2}}{m!\Gamma(m+3)}=\frac{x^2}{2!\cdot2^2}-\frac{x^4}{3!\cdot2^4}+\frac{x^6}{4!\cdot2^7}-\frac{x^8}{5!\cdot6\cdot2^8}+\ldots \tag{2.19}$$

$$J_3(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+3}}{m!\Gamma(m+4)}=\frac{x^3}{3!\cdot2^3}-\frac{x^5}{4!\cdot2^5}+\frac{x^7}{2!\cdot5!\cdot2^7}-\frac{x^9}{3!\cdot6!\cdot2^9}+\ldots \tag{2.20}$$

สังเกตว่า $J_0(0)=1$ และ $J_\nu(0)=0$ สำหรับ $\nu>0$

และแสดงได้ด้วยกราฟดังรูป



รูปที่ 2.1 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 0 และ อันดับที่ 1

(Bessel function of the first kind of order 0 and 1)

โดยที่กราฟเส้นทึบเป็นกราฟ $J_0(x)$ กราฟเส้นประเป็นกราฟ $J_0(x)$

ต่อไปจะพิจารณาหาผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซล

เนื่องจาก $r_1-r_2=\nu-(-\nu)=2\nu$

นิยามที่ 7 [1] นิยามของความเป็นอิสระเชิงเส้นและไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (Linear Independence and Linear Dependence)

เซตของฟังก์ชัน $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น(Linear Dependence) บนช่วง I ถ้าค่าคงที่ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและทำให้ $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$ ทุก $x \in I$ แต่ถ้าไม่สามารถหาค่าคงที่ c_i ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวได้เซตของฟังก์ชัน $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ จะเป็นอิสระเชิงเส้น(Linear Independence) บนช่วง I

หมายเหตุ กล่าวอีกนัยหนึ่ง $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ ค่าคงที่ c_i ที่ทำให้ $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$ ทุก $x \in I$ มีกรณีเดียวคือ c_i ทุกตัวมีค่าเป็น 0 ($c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$)

ตัวอย่างที่ 5 พิจารณา $\cos x$ และ $\sin x$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันบนช่วง $(-\infty, \infty)$

วิธีทำ ให้ $c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0$

เนื่องจากสมการนี้เป็นจริงทุกค่า x เพราะฉะนั้นให้ $x = 0$ และ $x = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \text{ และ } c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0$$

ดังนั้น $c_1 = c_2 = 0$ แสดงว่า $\cos x$ และ $\sin x$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันบนช่วง $(-\infty, \infty)$

กรณีที่1 ถ้า 2ν ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า ν ไม่เป็นจำนวนเต็มด้วย

ใช้ $r_2 = -\nu$ หาผลเฉลยในทำนองเดียวกันกับการใช้ $r_1 = \nu$ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการเป็น

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu + \mathrm{m} + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu} \tag{2.21}$$

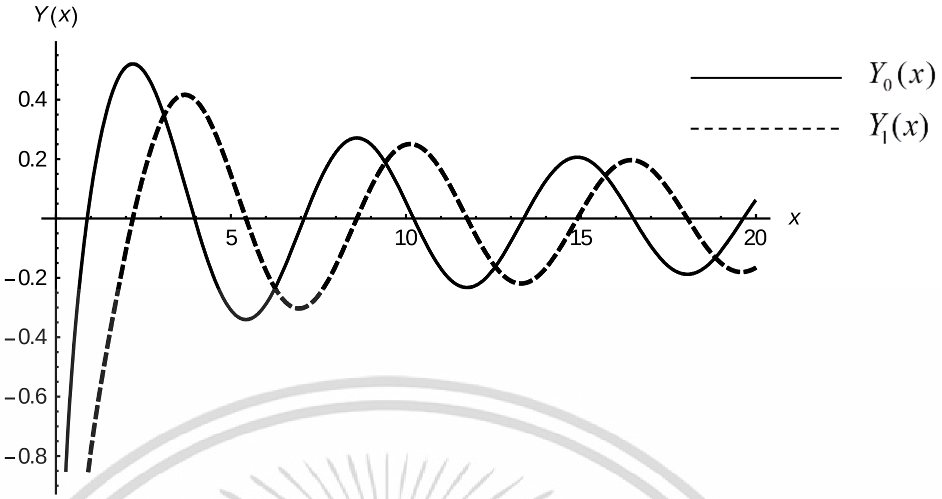
เนื่องจาก $J_{-\nu}(x)$ มีพจน์ $x^{-\nu}$ ในขณะที่ $J_\nu(x)$ ไม่มี เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $J_\nu(x)$ และ $J_{-\nu}(x)$ เป็นอิสระต่อกัน

แต่เพื่อจุดประสงค์หลายๆอย่าง จะสะดวกกว่าที่จะใช้

$$Y_\nu(x) = \frac{(\cos \nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \tag{2.22}$$

แทน $J_{-\nu}(x)$ เป็นผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซลและเรียก $Y_\nu(x)$ ว่า ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ ν

(Bessel function of the second kind of order ν) และแสดงได้ด้วยกราฟดังรูป



รูปที่ 2.2 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับที่ 0 และ อันดับที่ 1

(Bessel function of the second kind of order 0 and 1)

โดยที่กราฟเส้นทึบเป็นกราฟ $Y_0(x)$ และกราฟเส้นประเป็นกราฟ $Y_1(x)$

กรณีที่ 2 ถ้า 2ν เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า ν ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ $2\nu = N$

แทนค่า $r_2 = -\nu$ ลงในสูตรเวียนเกิดจะได้

$$k(k-N)a_k = -a_{k-2}\,, \qquad k \geq 2$$

เมื่อแทนค่า $k = 2,3,4,\ldots$ ลงในสมการนี้เป็นลำดับไปจนกระทั่งถึง $k = N$ จะได้

$$a_3 = a_5 = \ldots = a_{N-2} = 0 \text{ และ } 0 \cdot a_N = a_{N-2} = 0$$

เนื่องจาก a_N เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ดังนั้นเลือก $a_N = 0$ ผลที่ตามมาคือ เหลือสัมประสิทธิ์ a_k เมื่อ $k = 2,4,6,\ldots$ และเราจะได้ผลเฉลยที่สองจากค่า $r_2 = -\nu$ เช่นเดียวกับกรณีที่1

กรณีที่ 3 ถ้า 2ν เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า ν เป็นจำนวนเต็ม ให้ $\nu = n$ จะได้

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \tag{2.23}$$

แต่ $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = 0$ ทุกค่า $x = 0,-1,-2,\ldots$ ดังนั้น $\dfrac{1}{\Gamma(-n+m+1)} = 0$ เมื่อ $m = 0,1,2,\ldots,(n-1)$

ผลที่ได้คือ $$J_{-n}(x)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

ให้ $k=m-n$ จะได้ $$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=(-1)^n J_n(x)$$

ซึ่งแสดงว่า $J_n(x)$ และ $J_{-n}(x)$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน

ดังนั้นเมื่อ $\nu=n=0,1,2,\ldots$ เราจะได้ผลเฉลยของสมการเบสเซลเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นคือ $J_n(x)$ เราสามารถหาผลเฉลยที่สองได้ในรูปของลิมิต

นั้นคือ

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{(\cos\nu\pi)J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (2.24)$$

ดังนั้นผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการเบสเซลอันดับ ν จะอยู่ในรูป

$$y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x) \qquad (2.25)$$

และถ้า ν ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะเขียนผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการเบสเซลอันดับ ν ได้อีกอย่างคือ

$$y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x) \qquad (2.26)$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> พิจารณาผลเฉลยของสมการ $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$

วิธีทำ เพราะว่า $v^2=\frac{1}{4}$ ดังนั้น $v=\frac{1}{2}$ จะได้ผลเฉลยของสมการที่กำหนดให้คือ

$$y(x)=c_1J_{\frac{1}{2}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

พิจารณาค่าของ $J_{\frac{1}{2}}(x)$

เนื่องจาก $$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+2\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5\cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi}=\frac{5!}{2^5 2!}\sqrt{\pi}$$

$$\vdots$$

หรือในรูปทั่วไป $$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+m\right)=\Gamma\left(1+\frac{2m+1}{2}\right)=\frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}m!}\sqrt{\pi}$$

เพราะฉะนั้น $$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1+\frac{1}{2}+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}m!}\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

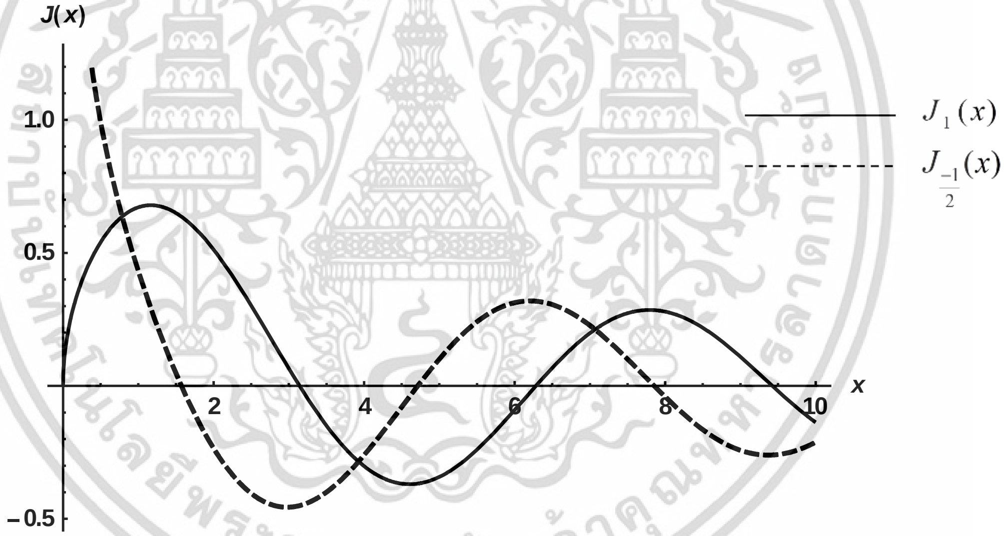
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

ในทำนองเดียวกันเราจะแสดงได้ว่า $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ คือ $y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$

และแสดงได้ด้วยกราฟดังรูป



รูปที่ 2.3 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ $\frac{1}{2}$ และอันดับที่ $-\frac{1}{2}$

(Bessel function of the first kind of order $\frac{1}{2}$ and order $-\frac{1}{2}$)

โดยที่กราฟสีเส้นทึบเป็นกราฟ $J_{\frac{1}{2}}(x)$ และกราฟเส้นประเป็นกราฟ $J_{\frac{-1}{2}}(x)$

2.3.1 สมการเบสเซลดัดแปรอันดับ ν (Modified Bessel's Equation of order ν) [1]

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0 \tag{2.27}$$

และผลเฉลยของสมการนี้อยู่ในรูป

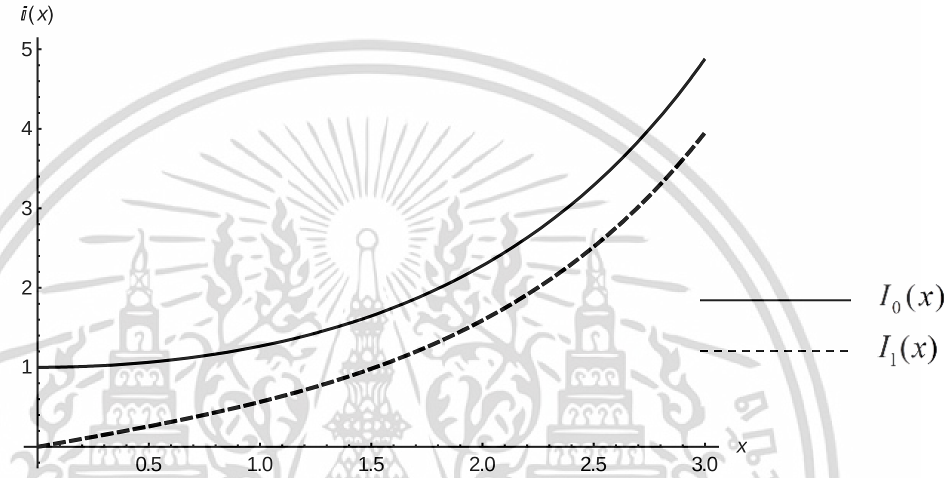
$$y = c_1 J_\nu(ix) + c_2 Y_\nu(ix) \tag{2.28}$$

และถ้าให้ $I_\nu = (i)^{-\nu} J_\nu(ix)$ แล้วผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 I_{-\nu}(x) \tag{2.29}$$

โดยที่ $$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} + \frac{x^{10}}{14745600} + \dots \tag{2.30}$$

และ $$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} + \frac{x^9}{1474560} + \dots \tag{2.31}$$



รูปที่ 2.4 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 0 และ อันดับที่ 1 (Modified Bessel functions of first kind of order 0 and 1) โดยที่กราฟสีเส้นทึบเป็นกราฟ $I_0(x)$ และกราฟเส้นปะเป็นกราฟ $I_1(x)$

เมื่อ ν ไม่เป็นจำนวนเต็มหรือศูนย์ จะได้

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right]}{\sin \pi\nu} \tag{2.32}$$

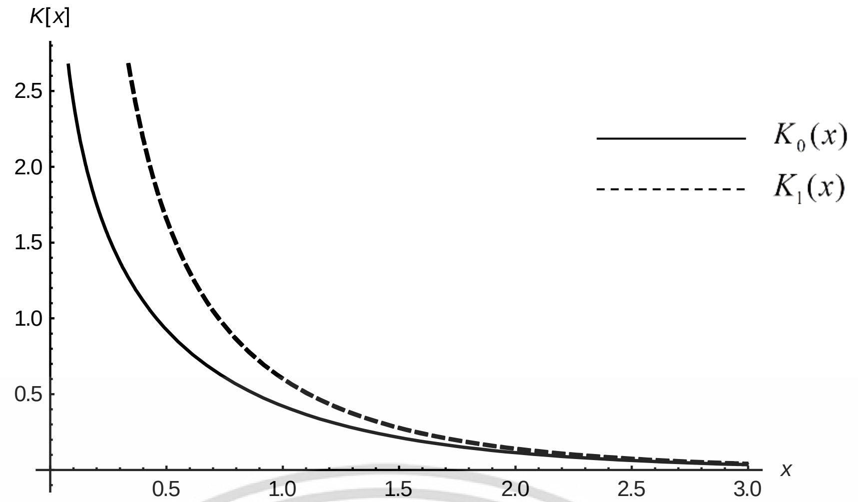
ผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x) \tag{2.33}$$

และสำหรับ $\nu = N$ จำนวนเต็มหรือศูนย์ จะได้

$$K_N(x) = \lim_{\nu \to N} K_\nu(x) \tag{2.34}$$

เรียก $I_\nu(x)$ และ $K_\nu(x)$ ว่า ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรอันดับ ν ชนิดที่ 1 (Modified Bessel's Function of the first kind of order ν) และ ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรอันดับ ν ชนิดที่ 2 (Modified Bessel's Function of the second kind of order ν) ตามลำดับ



รูปที่ 2.5 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่สองอันดับที่ 0 และ อันดับที่ 1
(Modified Bessel functions of second kind of order 0 and 1)
โดยที่กราฟเส้นทึบเป็นกราฟ $K_0(x)$ และกราฟเส้นประเป็นกราฟ $K_1(x)$

2.4 สมการเลอจองด์ (Legendre Equation) [1]

นิยามที่ 8 [1] สมการเชิงอนุพันธ์แบบเลอจองด์อันดับที่ α (Legendre's Differential Equation of order n) คือสมการที่อยู่ในรูป

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \tag{2.35}$$

เมื่อ α เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และเรียกผลเฉลยของสมการนี้ว่าฟังก์ชันเลอจองด์(Legendre Function)

สมการเลอจองด์นี้มีปรากฏในการประยุกต์ทางฟิสิกส์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเกี่ยวกับปัญหาเงื่อนไขค่าขอบสำหรับวงกลม (Boundary Value Problem for Sphere) การหาคำตอบของสมการทำได้หลายวิธีและวิธีที่จะแสดงต่อไปนี้เป็นวิธีหาคำตอบเป็นอนุกรมรอบจุด $x=0$ คือให้คำตอบของสมการ(2.39) อยู่ในรูป

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \tag{2.36}$$

แทนค่านี้ลงในสมการเลอจองด์จะได้

$$\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_k x^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^{k-1}+\alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=0 \tag{2.37}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}a_k k(k-1)x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}a_k k(k-1)x^k-2\sum_{k=1}^{\infty}a_k kx^k+\alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=0$$

$$(\alpha(\alpha+1)a_0+2a_2)x^0+(\alpha(\alpha+1)a_1-2a_1+6a_3)x+\sum_{k=4}^{\infty}a_k k(k-1)x^{k-2}$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}a_k k(k-1)x^k-2\sum_{k=2}^{\infty}a_k kx^k+\alpha(\alpha+1)\sum_{k=2}^{\infty}a_k x^k=0$$

$$(\alpha(\alpha+1)a_0+2a_2)+((\alpha-1)(\alpha-2)a_1+6a_3)x$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}((k+2)(k+1))a_{k+2}+(\alpha-k)(\alpha+k+1)a_k)x^k=0$$

โดยกรเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้สูตรเวียนเกิดในรูป

$$\alpha(\alpha+1)a_0+2a_2=0$$
$$(\alpha-1)(\alpha-2)a_1+6a_3=0$$
$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(\alpha-k)(\alpha+k+1)a_k=0,\;\; k=2,3,4,\dots \tag{2.38}$$

จัดรูปสมการ(2.38)จะได้

$$a_2=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}a_0$$
$$a_3=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}a_1$$
$$a_{k+2}=-\frac{(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k \tag{2.39}$$

แทนค่า $k=2,3,4,\dots$ ในสมการ(2.39) จะได้

$$a_4=-\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4\cdot 3}a_2 \quad , \quad a_5=-\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5\cdot 4}a_3$$
$$a_6=-\frac{(\alpha-4)\alpha(\alpha+5)}{5\cdot 6}a_4 \quad , \quad a_7=-\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{6\cdot 7}a_5$$
$$\vdots$$
$$a_{2k}=-\frac{(\alpha-2k+2)(\alpha+2k-1)a_{2k+1}}{(2k-1)(2k)} \quad , \quad a_{2k+1}=-\frac{(\alpha-2k+1)(\alpha+2k)a_{2k-1}}{(2k)(2k+1)}$$

จะเห็นได้ว่า สำหรับ $k=1,2,3,\dots a_{2k}$ เขียนได้ในพจน์ของ a_0 และ a_{2k+1} เขียนได้ในพจน์ของ a_1

ดังนั้น

$$a_2a_4\dots a_{2k-2}a_{2k}=\frac{(-1)^k(\alpha-2k+2)\dots(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(2k)}(a_0a_2a_4\dots a_{2k-2}) \tag{2.40}$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k(\alpha-2k+2)\dots(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2k-1)}{(2k)!}a_0 \tag{2.41}$$

สำหรับ $k\geq 1$ ทำนองเดียวกัน จะได้

$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^k(\alpha-2k+1)\dots(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2k)}{(2k+1)!}a_1 \tag{2.42}$$

ดังนั้น

$$y=\left[a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x^{2k}\right]+\left[a_1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}\right] \tag{2.43}$$

แทนค่าสมการที่(2.41)และ(2.42) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเลอจองด์ ในรูป

$$y = a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha-2k+2)\ldots(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2k-1)x^{2k}}{(2k)!}\right]$$
$$+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha-2k+1)\ldots(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2k)x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \tag{2.44}$$

เมื่อ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง และ ให้ $a_0 = a_1 = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha-2k+2)\ldots(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2k-1)x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 \\ &\quad -\frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}x^6+\ldots \end{aligned} \tag{2.45}$$

และ

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha-2k+1)\ldots(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2k)x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 \\ &\quad -\frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!}x^7+\ldots \end{aligned} \tag{2.46}$$

ได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเลอจองด์ (2.35) สำหรับ α ไม่เป็นเลขจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

$$y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{2.47}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

นอกจากนี้เราจะพบว่า

กรณีที่ $\alpha = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$

$y_1(x)$ เป็นพหุนามอับดับ α หรือพหุนามเลอจองด์อันดับ α แทนด้วย $P_\alpha(x)$

$y_2(x)$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้าบนช่วง $(-1,1)$ หรือ ฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่2 แทนด้วย $Q_\alpha(x)$

กรณีที่ $\alpha = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$y_1(x)$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้าบนช่วง $(-1,1)$ หรือ ฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่2 แทนด้วย $Q_\alpha(x)$

$y_2(x)$ เป็นพหุนามอับดับ α หรือพหุนามเลอจองด์อันดับ α แทนด้วย $P_\alpha(x)$

ต่อไปเราจะพิจารณาส่วนที่เป็นพหุนามเลอจองด์เท่านั้น โดยที่เราจะหารูปมาตรฐานของพหุนามเลอจองด์ได้โดยการกำหนดค่าของ a_0 และ a_1 ซึ่งจะทำให้สัมประสิทธิ์ของ x กำลังสูงสุดมีค่าเท่ากับ $\dfrac{(2\alpha)!}{2^\alpha(\alpha!)^2}$ นั้นคือ เราเลือกให้ค่าคงตัว

$$a_0 = \frac{(-1)^{\alpha} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot(\alpha-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot \alpha} = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\alpha!}{2^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right)!}\ , \alpha = 0,2,4,\dots$$

$$a_1 = \frac{(-1)^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot \alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot(\alpha-1)} = (-1)^{\frac{(\alpha-1)}{2}} \frac{(\alpha+1)!}{2^{\alpha}\left(\frac{(\alpha-1)}{2}\right)!\left(\frac{(\alpha+1)}{2}\right)!}\ , \alpha = 1,3,5,\dots$$

ซึ่งจะได้สูตรทั่วไปของพหุนามเลอจองด์อับดับ α ในรูป

$$P_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2\alpha-2k)!}{2^{\alpha} k!(\alpha-k)!(\alpha-2k)!} x^{\alpha-2k}$$

โดยที่ $N = \frac{\alpha}{2}$ เมื่อ α เป็นจำนวนคู่ และ $N = \frac{\alpha-1}{2}$ เมื่อ α เป็นจำนวนคี่ จะได้

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

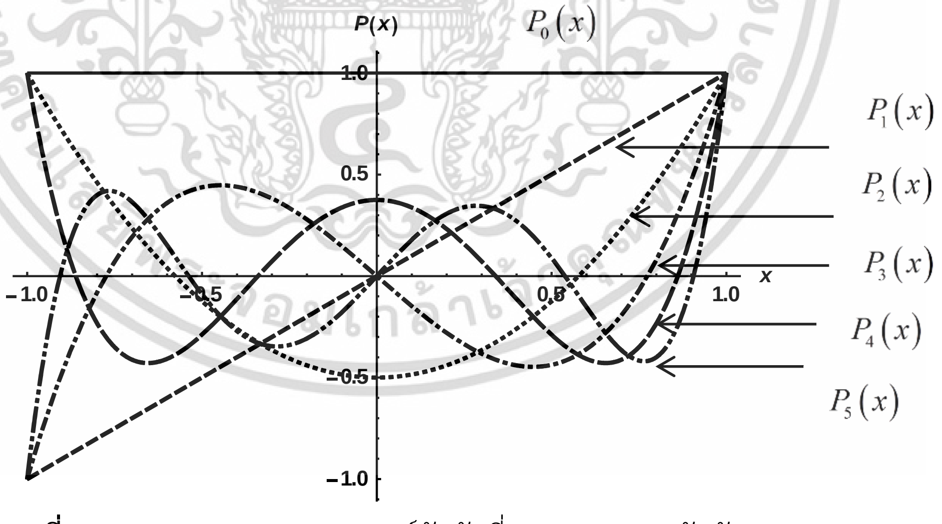
$P_2(x) = 1-3x^2$

$P_3(x) = \frac{1}{3}(3x-5x^3)$

$P_4(x) = \frac{1}{3}(35x^4-30x^2+3)$

$P_5(x) = \frac{1}{15}(63x^5-70x^3+15x)$

$\vdots$



รูปที่ 2.6 กราฟของพหุนามเลอจองด์อันดับที่ 0,1,2,3,4 และอับดับ 5

(Legendre polynomial of order 0,1,2,3,4 and 5)

หมายเหตุ

พหุนาม คือ นิพจน์ที่สร้างจากตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวและสัมประสิทธิ์ โดยใช้การดำเนินการมี การบวก การลบ การคูณ และการยกกำลัง โดยที่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

อนุกรมอนันต์(Infinite series) คือ นิพจน์ ที่อยู่ในรูป

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ผลรวมได้เป็น

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

เรียก จำนวน $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ว่าพจน์ของอนุกรม และเรียก “อนุกรมอนันต์” เพียงสั้นๆว่า “อนุกรม”

2.5 นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

นิยามที่ 9 [7] การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform) ของ ฟังก์ชัน $c(x)$ กำหนดโดย

$$C(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=x_0} \quad \text{โดยที่ } C:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}, c:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{2.48}$$

เมื่อ $c(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และสามารถหาอนุพันธ์ได้ เรียก $c(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันเดิม(Original Function) และเรียก $C(k)$ ว่าเป็นฟังก์ชันการแปลง (Transform Function) ของ $c(x)$ หรือเรียกว่าฟังก์ชันที (T-Function)

นิยามที่ 10 [8] การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse Transform) การแปลงเชิงผกผัน ของ $C(k)$ ในสมการที่ (2.48) กำหนดโดย

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(k)(x - x_0)^k \quad \text{โดยที่ } C:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}, c:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{2.49}$$

เมื่อ $x_0 = 0$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> [6] พิจารณาระบบสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Non-linear Differential System)

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy}{dt} + x(t) + y(t) = 1 \tag{2.50}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t) + y(t)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0) = 0; \qquad y(0) = 1 \tag{2.51}$$

ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ในสมการที่(2.49) จะได้

$$(k+1)X(k+1) + (k+1)Y(k+1) + X(k) + Y(k) = 1 \tag{2.52}$$

$$(k+1)Y(k+1) = 2X(k) + Y(k)$$

จัดรูปสมการที่ (2.52) จะได้

$$X(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[1 - (k+1)Y(k+1) - X(k) - Y(k)\right] \tag{2.53}$$

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[2X(k) + Y(k)\right]$$

แทน $k=0$ ในสมการที่(2.53) จะได้

$$Y(1)=\frac{1}{0+1}\left[2X(0)+Y(0)\right]=1\left[0+1\right]=1$$

$$X(1)=\frac{1}{0+1}\left[1-(0+1)Y(0+1)-X(0)-Y(0)\right]$$

$$=\left[1-(1)Y(1)-0-1\right]$$

$$=-1$$

แทน $k=1$ ในสมการที่(2.53) จะได้

$$Y(2)=\frac{1}{1+1}\left[2X(1)+Y(1)\right]=\frac{1}{2}\left[2(-1)+1\right]=-\frac{1}{2}$$

$$X(2)=\frac{1}{1+1}\left[1-(1+1)Y(1+1)-X(1)-Y(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-(2)Y(2)+1-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-2(-\frac{1}{2})\right]$$

$$=1$$

แทน $k=2$ ในสมการที่(2.53) จะได้

$$Y(3)=\frac{1}{2+1}\left[2X(2)+Y(2)\right]=\frac{1}{3}\left[2(1)-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

$$X(3)=\frac{1}{2+1}\left[1-(2+1)Y(2+1)-X(2)-Y(2)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-(3)Y(3)-1+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-2(\frac{1}{2})-1+\frac{1}{2}\right]$$

$$=-\frac{5}{6}$$

แทน $k=3$ ในสมการที่(2.53) จะได้

$$Y(4)=\frac{1}{3+1}\left[2X(3)+Y(3)\right]=\frac{1}{4}\left[2(-\frac{5}{6})+\frac{1}{2}\right]=-\frac{7}{24}$$

$$X(4)=\frac{1}{3+1}\left[1-(3+1)Y(3+1)-X(3)-Y(3)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-(4)Y(4)+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-4(-\frac{7}{24})+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{5}{8}$$

แทน $k=4$ ในสมการที่(2.53) จะได้

$$Y(5)=\frac{1}{4+1}\left[2X(4)+Y(4)\right]=\frac{1}{5}\left[2(\frac{5}{8})-\frac{7}{24}\right]=\frac{23}{120}$$

$$X(5)=\frac{1}{4+1}\left[1-(4+1)Y(4+1)-X(4)-Y(4)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[1-(5)Y(5)-\frac{5}{8}+\frac{7}{24}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[1-5(\frac{23}{120})-\frac{5}{8}+\frac{7}{24}\right]$$

$$=-\frac{7}{120}$$

แทน $k=5$ ในสมการที่(2.53) จะได้

$$Y(6)=\frac{1}{5+1}\left[2X(5)+Y(5)\right]=\frac{1}{5}\left[2(-\frac{7}{120})+\frac{23}{120}\right]=\frac{1}{80}$$

$$X(6)=\frac{1}{5+1}\left[1-(5+1)Y(5+1)-X(5)-Y(5)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1-(6)Y(6)-\frac{7}{120}-\frac{23}{120}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1-6(\frac{1}{80})-\frac{7}{120}-\frac{23}{120}\right]$$

$$=-\frac{19}{144}$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$\mathrm{X}(0)=0; \qquad Y(0)=1 \tag{2.54}$$

จากสมการที่ (2.49) ค่าประมาณของผลเฉลยเมื่อ $n=6$ คือ

$$x(t)=\sum_{k=0}^{6}X(k)t^k \tag{2.55}$$

$$x(t)=X(0)t^0+X(1)t+X(2)t^2+X(3)t^3+X(4)t^4+X(5)t^5+X(6)t^6$$

และ

$$y(t)=\sum_{k=0}^{6}Y(k)t^k \tag{2.56}$$

$$\mathrm{y}(t)=Y(0)t^0+Y(1)t+Y(2)t^2+Y(3)t^3+Y(4)t^4+Y(5)t^5+Y(6)t^6$$

แทนค่าของ $X(k)$ และ $Y(k)$ ลงในสมการที่(2.55)และ(2.56) ได้ผลเฉลยเชิงตัวเลข คือ

$$x(t)=-t+t^2-5/6t^3+5/8t^4-7/120t^5-19/144t^6 \tag{2.57}$$

$$y(t)=1+t-1/2t^2+1/2t^3-7/24t^4+23/120t^5+1/80t^6 \tag{2.58}$$

หมายเหตุ

ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0$$

พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) n เงื่อนไขที่จุด x_0 คือ

$y(x_0)=d_{0,}y'(x_0)=d_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=d_{n-1}$ เมื่อ $d_0,d_1,\ldots,d_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว และพิจารณาหาผลเฉลยของ $y(x)$ เมื่อ $x \ge x_0$

ปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0$$

และเงื่อนไขขอบ (Boundary conditions) คือ การกำหนดค่าของ y และ ค่าของอนุพันธ์ของที่จุดของ y ตัวแปรอิสระ x มากกว่า 1 จุด

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่ ใช้นิยามในสมการที่(2.52) มาใช้ในการพิสูจน์ ในงานวิจัยนี้จะพิสูจน์ทั้งหมด 8 ทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $C:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, U:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R},$

$V:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ ถ้า $c(x)=u(x)\pm v(x)$ แล้ว $C(k)=U(k)\pm V(k)$ (2.59)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

นั่นคือ $\mathrm{U}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ และ $\mathrm{V}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x)=u(x)\pm v(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}C(k)&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(u(x)\pm v(x))}{dx^k}\right]_{t=0}\\&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\pm\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k v(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\end{aligned}$$

ดังนั้น $C(k)=U(k)\pm V(k)$

ทฤษฎีบทที่ 2 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, C:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, U:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ และ α คือ ค่าคงที่

ถ้า $c(x)=\alpha u(x)$ แล้ว $C(k)=\alpha U(k)$ (2.60)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x)=\alpha u(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}C(k)&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(\alpha u(x))}{dx^k}\right]_{x=0}\\&=\alpha\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathrm{C}(k)=\alpha U(k)$

บทแทรกที่ 2 [1] สูตรของไลน์นิตซ์ สำหรับการหาอนุพันธ์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

$$D^k(uv) = u^{(k)}v + \binom{k}{1}u^{(k-1)}v' + \binom{k}{2}u^{(k-2)}v'' + \ldots + \binom{k}{k}uv^{(k)} \qquad (2.61)$$

<u>พิสูจน์</u> เราจะใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์ บน k

ให้ $P(k)$ แทนสมการที่ (2.61)

จะได้ $P(1)$ คือ $D(uv) = u'v + uv'$ เป็นจริง

และ ถ้า $P(m)$ เป็นจริง นั้นคือ

$$D^m(uv) = u^{(m)}v + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v' + \binom{m}{2}u^{(m-2)}v'' + \ldots + \binom{m}{m}uv^{(m)}$$ จะได้

$$D\left(D^m(uv)\right) = D\left(u^{(m)}v + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v' + \binom{m}{2}u^{(m-2)}v'' + \ldots + \binom{m}{m}uv^{(m)}\right)$$

$$\begin{aligned}
D^{m+1}(uv) &= \left(u^{(m)}v' + vu^{(m+1)}\right) + \binom{m}{1}\left(u^{(m-1)}v'' + v'u^{(m)}\right) + \binom{m}{2}\left(u^{(m-2)}v''' + v''u^{(m-1)}\right) + \ldots + \\
&\quad \binom{m}{m-1}\left(u'v^{(m)} + v^{(m-1)}u''\right) + \binom{m}{m}\left(uv^{(m+1)} + v^{(m)}u'\right) \\
&= u^{(m)}v' + vu^{(m+1)} + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v'' + \binom{m}{1}v'u^{(m)} + \binom{m}{2}u^{(m-2)}v''' + \binom{m}{2}v''u^{(m-1)} + \ldots + \\
&\quad \binom{m}{m-1}u'v^{(m)} + \binom{m}{m-1}v^{(m-1)}u'' + \binom{m}{m}uv^{(m+1)} + \binom{m}{m}v^{(m)}u' \\
&= u^{(m+1)}v + \binom{m}{0}u^{(m)}v' + \binom{m}{1}v'u^{(m)} + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v'' + \binom{m}{2}v''u^{(m-1)} + \ldots + \\
&\quad \binom{m}{m-1}u'v^{(m)} + \binom{m}{m}v^{(m)}u'
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} = \binom{m+1}{r+1}$ จะได้ว่า

$$D^{m+1}(uv) = u^{(m+1)}v + \binom{m+1}{1}u^{m}v' + \binom{m+1}{2}u^{(m-1)}v'' + \ldots + \binom{m+1}{m+1}uv^{(m+1)}$$

นั้นคือ $P(m+1)$ จริง เมื่อ $P(m)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ 3 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $C:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}, U:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R},$
$V:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$ ถ้า $c(x)=u(x)v(x)$ แล้ว $C(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$ (2.62)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x)=u(x)v(x)$ จะได้ว่า

$$C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)v(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

จากสมการที่ (2.65) ใช้บทแทรกที่ 3 จะได้

$$=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{\mathrm{r}!(k-r)!}\left[\frac{d^r u(x)}{dx^r}\frac{d^{k-r}v(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{\mathrm{r}!}\left[\frac{d^r}{dx^r}u(x)\right]\left[\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r}v(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$$

ดังนั้น $C(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$

ทฤษฎีบทที่ 4 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $C:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}, U:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$

ถ้า $c(x)=\frac{d}{dx}u(x)$ แล้ว $\mathrm{C}(k)=(k+1)\,\mathrm{U}(k+1)$ (2.63)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

นั้นคือ

$$U(k+1)=\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}$$

แทนค่า $c(x)=\frac{d}{dx}u(x)$ จะได้ว่า

$$\mathrm{C}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{(k+1)!}{k!(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{(k+1)}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $\mathrm{C}(k) = (k+1)\,\mathrm{U}(k+1)$

ทฤษฎีบทที่ 5 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $C:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}, U:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$

ถ้า $c(x) = \dfrac{d^r}{dx^r}u(x)$ แล้ว $C(k) = (k+1)(k+2)....(k+r)U(k+r)$ (2.64)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0 = 0$ จะได้ $C(k) = \dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x) = \dfrac{d^r}{dx^r}u(x)$ จะได้ว่า

$$C(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^r u(x)}{dx^r}\right)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}u(x)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{(k+r)!}{k!(k+r)!}\left[\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}u(x)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)....(k+r)}{(k+r)!}\left[\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}u(x)\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $C(k) = (k+1)(k+2)....(k+r)U(k+r)$

ทฤษฎีบทที่ 6 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $C:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$

ถ้า $c(x) = x^j\,;\, j = 0,1,2,...$ แล้ว $C(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1\,, k = j \\ 0\,, k \neq j \end{cases}$ (2.65)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0 = 0$ จะได้ $C(k) = \dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x) = x^j\,;\, j = 0,1,2,...$ ในสมการที่(8) จะได้

$$C(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^j\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k x^j}{dx^k}\right]_{x=0}$$

เนื่องจาก $\left[\dfrac{d^k x^j}{dx^k}\right]_{x=0} = \begin{cases} k!, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$

ดังนั้น $C(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1\,, k = j \\ 0\,, k \neq j \end{cases}$

ทฤษฎีบทที่ 7 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $C:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$, $\omega\in\mathbb{Z}^{+}$ และ $0\le\alpha\le 2\pi$

$$\text{ถ้า } c(x)=\sin(\omega x+\alpha) \text{ แล้ว } C(k)=\frac{\omega^{k}}{k!}\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right) \tag{2.66}$$

จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{dx^{k}}c(x)\right]_{x=0}$

และแทนค่า $c(x)=\sin(\omega x+\alpha)$ จะได้ว่า

$$C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left[\sin\left(\omega x+\alpha\right)\right]\right]_{x=0}$$

<u>พิสูจน์</u> โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณา $C(1)$

$$\begin{aligned}C(1)&=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}\sin\left(\omega x+\alpha\right)\right]_{x=0}\\&=\left[\frac{d}{dx}\sin\left(\omega x+\alpha\right)\right]_{x=0}\\&=\left[\cos\left(\omega x+\alpha\right)\left(\omega\right)\right]_{x=0}\\&=\omega\cos\alpha\end{aligned}$$

หรือ $C(1)=\omega\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

ดังนั้น $C(1)$ เป็นจริง

ขั้นตอนที่ 2 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ กำหนดให้ $C(n)$ เป็นจริง

$$\text{ให้} \quad \mathrm{C}(n)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n}}{dx^{n}}\sin\left(\omega x+\alpha\right)\right]_{x=0}=\frac{\omega^{n}}{n!}\sin\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\Bigg|_{x=0} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad \mathrm{C}(n+1)&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\sin\left(\omega x+\alpha\right)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n}}{dx^{n}}\sin\left(\omega x+\alpha\right)\right)\right]_{x=0}\end{aligned}$$

จากสมการ (2.67) จะได้

$$\begin{aligned}C(n+1)&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{d}{dx}\left(\omega^{n}\sin\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\right)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\omega^{n+1}\cos\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\omega^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\right]\end{aligned}$$

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ จะได้

ดังนั้น $$C(n+1)=\frac{\omega^{n+1}}{(n+1)!}\left[\sin\frac{(n+1)\pi}{2}\right]$$ เป็นจริง

นั้นคือ ขั้นตอนที่ 1และขั้นตอนที่ 2 โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น

ถ้า $c(x)=\sin(\omega x+\alpha)$ แล้ว $C(k)=\frac{\omega^k}{k!}\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right)$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 8 [2] ให้ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $C:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$, $\omega\in\mathbb{Z}^+$ และ $0\le\alpha\le 2\pi$

ถ้า $c(x)=\cos(\omega x+\alpha)$ แล้ว $$C(k)=\frac{\omega^k}{k!}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right) \tag{2.68}$$

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x)=\cos(\omega x+\alpha)$ จะได้

$$C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left[\cos(\omega x+\alpha)\right]\right]_{x=0}$$

<u>พิสูจน์</u> โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่1 พิจารณา $C(1)$

$$\begin{aligned}C(1)&=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}\cos(\omega x+\alpha)\right]_{x=0}\\&=\left[\frac{d}{dx}\cos(\omega x+\alpha)\right]_{x=0}\\&=\left[-\sin(\omega x+\alpha)(\omega)\right]_{x=0}\\&=-\omega\sin\alpha\end{aligned}$$

หรือ $$C(1)=-\omega\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

ดังนั้น $C(1)$ เป็นจริง

ขั้นตอนที่ 2 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ กำหนดให้ $C(n)$ เป็นจริง

ให้ $$C(n)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\cos(\omega x+\alpha)\right]_{x=0}=\frac{\omega^n}{n!}\cos\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\Big|_{x=0} \tag{2.69}$$

ดังนั้น $$\begin{aligned}C(n+1)&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\cos(\omega x+\alpha)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\cos(\omega x+\alpha)\right)\right]_{x=0}\end{aligned}$$

จากสมการ (2.69) จะได้

$$C(n+1)=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{d}{dx}\left(\omega^{n}\cos\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[\omega^{n+1}\sin\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[\omega^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)\right]$$

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ จะได้

$$C(n+1)=\frac{\omega^{n+1}}{(n+1)!}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{2}\right] \text{ เป็นจริง}$$

นั้นคือ ขั้นตอนที่ 1และขั้นตอนที่ 2 โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น

ถ้า $c(x)=\cos(\omega x+\alpha)$ แล้ว $C(k)=\frac{\omega^{k}}{k!}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right)$ เป็นจริง

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 การปรับปรุงและพัฒนาทฤษฎีเพิ่มเติมของการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากการศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงเชิงอนุพันธ์ เราพบว่าทฤษฎีที่มีอยู่ไม่เพียงพอต่อการแก้ปัญหาสมการเบสเซลได้ งานวิจัยนี้ จึงนำความรู้พื้นฐานที่ได้จาก [8] มาปรับปรุงและพัฒนาทฤษฎีเพิ่มเติม ดังนี้

ทฤษฎีบทที่10 ให้ $C:\mathbb{Z}^{+}\rightarrow\mathbb{R}, c:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

ถ้า $c(x)=x^{2}y(x)$ แล้ว $C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)$ (3.1)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{dx^{k}}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x)=x^{2}y(x)$ จะได้ว่า $C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{dx^{k}}x^{2}y(x)\right]_{x=0}$

และจากสมการที่ (2.61) จะได้

$$
\begin{aligned}
C(k)&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!(k-r)!}\left[\frac{d^{r}x^{2}}{dx^{r}}\frac{d^{k-r}y(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!}\left[\frac{d^{r}x^{2}}{dx^{r}}\right]\left[\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r}y(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}\\
&=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!}\left[\frac{d^{r}x^{2}}{dx^{r}}\right]\left[\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r}y(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\left[\frac{d^{r}x^{2}}{dx^{r}}\right]=\begin{cases} r!, & r=2\\ 0, & r\neq 2\end{cases}$ จะได้

$$C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)\left[\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r}y(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}$$

ดังนั้น

$$C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)$$

ทฤษฎีบทที่11 ให้ $C:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}, c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ถ้า $c(x)=x\dfrac{dy(x)}{dx}$ แล้ว $C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$ (3.2)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x)=x\dfrac{dy(x)}{dx}$ จะได้ว่า $C(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k x}{dx^k}\dfrac{dy(x)}{dx}\right]_{x=0}$

และจากสมการที่ (2.61) จะได้

$$\begin{aligned}C(k)&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!(k-r)!}\left[\frac{d^r x}{dx^r}\frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!}\left[\frac{d^r x}{dx^r}\right]\left[\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r+1}y(x)}{dx^{k-r+1}}\right]_{x=0}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left[\dfrac{d^r x}{dx^r}\right]=\begin{cases}r!, & r=1\\0, & r\neq 1\end{cases}$ จะได้

$$C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)\left[\frac{(k-r+1)}{(k-r+1)!}\frac{d^{k-r+1}y(x)}{dx^{k-r+1}}\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$

ทฤษฎีบทที่12 ให้ $C:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}, c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ถ้า $c(x)=x^2\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$ แล้ว $C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-\mathrm{r}+2)Y(k-r+2)$ (3.3)

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.48) เมื่อ $x_0=0$ จะได้ $C(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $c(x)=x^2\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$ จะได้ว่า $C(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k x^2}{dx^k}\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}\right]_{x=0}$

และจากสมการที่ (2.61) จะได้

$$\begin{aligned}C(k)&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{\mathrm{r}!(k-r)!}\left[\frac{d^r x^2}{dx^r}\frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}}\left(\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right)\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{\mathrm{r}!}\left[\frac{d^r x^2}{dx^r}\right]\left[\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r+2}y(x)}{dx^{k-r+2}}\right]_{x=0}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left[\frac{d^r x^2}{dx^r}\right] = \begin{cases} r!, & r = 2 \\ 0, & r \neq 2 \end{cases}$ จะได้

$$C(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)\left[\frac{(k-r+2)(k-r+1)}{(k-r+2)(k-r+1)(k-r)!}\frac{d^{k-r+2}}{dx^{k-r+2}}y(x)\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $C(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)(k-r+1)(k-\mathrm{r}+2)Y(k-r+2)$

3.2 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซล

การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลอันดับ v โดยใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลอันดับ v โดยใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ที่มีเงื่อนไขขอบ ซึ่งวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นั้น ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(x-x_0)^k$

โดยที่ $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0}$ เป็นฟังก์ชันการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลอันดับ v

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (3.4)$$

<u>**ขั้นตอนการดำเนินการ**</u>

ขั้นตอนที่ 1) ใช้ทฤษฎีที่ได้จากบทที่ 2 กับสมการที่ (3.4) แล้วหาฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$ และจัดรูปสมการ

ให้ $y(x) = x^2 y''$ จากทฤษฎีบทที่12 จะได้

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)(k-r+1)(k-\mathrm{r}+2)Y(k-r+2) \quad (3.5)$$

$y(x) = xy'$ จากทฤษฎีบทที่11 จะได้

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) \quad (3.6)$$

$y(x) = x^2 y$ จากทฤษฎีบทที่10 จะได้

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)Y(k-r) \quad (3.7)$$

และ $y(x) = \nu^2 y$ จากทฤษฎีบทที่10 จะได้

$$Y(k) = \nu^2 Y(k) \quad (3.8)$$

นำสมการที่(3.5)-(3.8) แทนลงในสมการที่(3.4) จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$

$$+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-\nu^{2}Y(k)=0 \tag{3.9}$$

จัดรูปสมการที่ (3.9) จะได้

$$\nu^{2}Y(k)=\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)$$

$$+\delta(r-1)(k-r+1)+Y(k-r+1)+\delta(r-2)Y(k-r)] \tag{3.10}$$

ขั้นตอนที่ 2) จากฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$ ที่ได้ นำมาแทนค่าด้วยเงื่อนไขขอบ สำหรับทุก $k=1,2,3,4,5,6$ ในสมการ (3.10)

ขั้นตอนที่ 3) จากขั้นตอนที่2 จะได้ $Y(0),Y(1),Y(2),\ldots,Y(k)$ มาแทนลงในสมการการแปลงผกผันของ $Y(k)$ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปของอนุกรม ดังนี้

$$y(x)=Y(0)x^{0}+Y(1)x+Y(2)x^{2}+Y(3)x^{3}+Y(4)x^{4}+\ldots+Y(k)x^{k} \tag{3.11}$$

ขั้นตอนที่ 4) นำผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

3.2.1 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลดัดแปร

จะมีขั้นตอนคล้ายกับการหาผลเฉลยของสมการเบสเซล ซึ่งจะมีขั้นตอนดังนี้

$$x^{2}y''+xy'-(x^{2}+\nu^{2})y=0 \tag{3.12}$$

<u>ขั้นตอนการดำเนินการ</u>

ขั้นตอนที่ 1) ใช้ทฤษฎีที่ได้จากบทที่ 2 กับสมการที่ (3.12) แล้วหาฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$ และจัดรูปสมการ ให้ $y(x)=x^{2}y''$ จากทฤษฎีบทที่12 จะได้

$$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-\mathrm{r}+2)Y(k-r+2) \tag{3.13}$$

$y(x)=xy'$ จากทฤษฎีบทที่11 จะได้

$$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) \tag{3.14}$$

$y(x)=x^{2}y$ จากทฤษฎีบทที่10 จะได้

$$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r) \tag{3.15}$$

และ $y(x)=\nu^2 y$ จากทฤษฎีบทที่10 จะได้

$$Y(k)=\nu^2 Y(k) \tag{3.16}$$

นำสมการที่(3.13)-(3.16) แทนลงในสมการที่(3.12) จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$

$$-\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-\nu^2 Y(k)=0 \tag{3.17}$$

จัดรูปสมการที่ (3.17) จะได้

$$\nu^2 Y(k)=\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(r-1)(k-r+1)+Y(k-r+1)-\delta(r-2)Y(k-r)] \tag{3.18}$$

ขั้นตอนที่ 2) จากฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$ ที่ได้ นำมาแทนค่าด้วยเงื่อนไขขอบ สำหรับทุก $k=1,2,3,4,5,6$ ในสมการ (3.18)

ขั้นตอนที่ 3) จากขั้นตอนที่2 จะได้ $Y(0),Y(1),Y(2),\ldots,Y(k)$ มาแทนลงในสมการการแปลงผกผันของ $Y(k)$

ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปของอนุกรม ดังนี้

$$y(x)=Y(0)x^0+Y(1)x+Y(2)x^2+Y(3)x^3+Y(4)x^4+\ldots+Y(k)x^k \tag{3.19}$$

ขั้นตอนที่ 4) นำผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

3.3 การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเลอจองด์

การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์อันดับ α โดยใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ที่มีเงื่อนไขขอบ ซึ่งวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นั้น ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)(x-x_0)^k$$

โดยที่ $Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0}$ เป็นฟังก์ชันการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์อันดับ α

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \tag{3.20}$$

<u>ขั้นตอนการดำเนินการ</u>

ขั้นตอนที่ 1) ใช้ทฤษฎีที่ได้จากบทที่ 2 กับสมการที่ (3.20) แล้วหาฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$ และจัดรูปสมการ

ให้ $y(x)=-x^2y''$ จากทฤษฎีบทที่12 จะได้

$$Y(k) = -\sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)(k-r+1)(k-\mathrm{r}+2)Y(k-r+2) \tag{3.21}$$

$y(x) = -2xy'$ จากทฤษฎีบทที่11 จะได้

$$Y(k) = -2\sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) \tag{3.22}$$

$y(x) = \alpha(\alpha+1)y$ จากทฤษฎีบทที่10 จะได้

$$Y(k) = \alpha(\alpha+1)Y(k) \tag{3.23}$$

และ $y(x) = y''$ จากทฤษฎีบทที่ 9 จะได้

$$Y(k) = (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{3.24}$$

นำสมการที่(3.21)-(3.24) แทนลงในสมการที่(3.20) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - \sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)$$

$$-2\sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) + \alpha(\alpha+1)Y(k) = 0 \tag{3.25}$$

จัดรูปสมการที่ (3.25) จะได้

$$\alpha(\alpha+1)Y(k) = \sum_{r=0}^{k} \left[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) - 2\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)\right]$$
$$-(k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{3.26}$$

ขั้นตอนที่ 2) จากฟังก์ชันการแปลง $Y(k)$ ที่ได้ นำมาแทนค่าด้วยเงื่อนไขขอบ สำหรับทุก $k = 1,2,3,4,5,6,7$ ในสมการ (3.26)

ขั้นตอนที่ 3) จากขั้นตอนที่2 จะได้ $Y(0), Y(1), Y(2), \ldots, Y(k)$ มาแทนลงในสมการการแปลงผกผันของ $Y(k)$ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปของอนุกรม ดังนี้

$$y(x) = Y(0)x^0 + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \ldots + Y(k)x^k \tag{3.27}$$

ขั้นตอนที่ 4) นำผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

บทที่ 4
ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในบทที่ผ่านมาได้ศึกษานิยาม ทฤษฎีบท รวมถึงคุณสมบัติที่เป็นความรู้พื้นฐานของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์และนำมาใช้ในการการผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ ที่มีเงื่อนไขขอบ

ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) ของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงในรูปของกราฟโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จากตัวอย่างในบทที่ 3 ได้ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์(DTM) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ ที่มีเงื่อนไขขอบ ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จะอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์

<u>ตัวอย่างที่ 4.1</u> สมการเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ v

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{4.1}$$

จากสมการที่ (4.1) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + \sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r) - v^2Y(k) = 0 \tag{4.2}$$

จัดรูปสมการที่ (4.2) จะได้

$$v^2Y(k) = \sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)$$
$$+\delta(r-1)(k-r+1) + Y(k-r+1) + \delta(r-2)Y(k-r)] \tag{4.3}$$

แทนค่า $k = 1,2,3,4,5,6,\ldots$ ลงในสมการที่ (4.3) จะได้

$$v^2Y(1) = \delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2) + \delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(1-0) + \delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2) + \delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(1-1)$$
$$v^2Y(1) = Y(1)$$

$$\nu^2 Y(2) = \delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2) + \delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(2-0) + \delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2) + \delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(2-1) + \delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2) + \delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(2-2)$$
$$\nu^2 Y(2) = 2Y(2) + 2Y(2) + Y(0)$$
$$\nu^2 Y(2) = 4Y(2) + Y(0)$$
$$Y(2) = \frac{Y(0)}{\nu^2 - 4}$$
$$\nu^2 Y(3) = \delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2) + \delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(3-0) + \delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2) + \delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(3-1) + \delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2) + \delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(3-2) + \delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2) + \delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(3-3)$$
$$\nu^2 Y(3) = 3Y(2) + 6Y(3) + Y(1)$$
$$\nu^2 Y(3) = 9Y(3) + Y(1)$$
$$Y(3) = \frac{Y(1)}{\nu^2 - 9}$$
$$\nu^2 Y(4) = \delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2) + \delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(4-0) + \delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2) + \delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(4-1) + \delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2) + \delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(4-2) + \delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2) + \delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(4-3) + \delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2) + \delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(4-4)$$
$$\nu^2 Y(4) = 4Y(4) + 12Y(4) + Y(2)$$
$$\nu^2 Y(4) = 16Y(4) + Y(2)$$
$$Y(4) = \frac{Y(2)}{\nu^2 - 16}$$
$$\nu^2 Y(5) = \delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2) + \delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(5-0) + \delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2) + \delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(5-1) + \delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2) + \delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(5-2) + \delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2) + \delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(5-3) + \delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2) + \delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(5-4) + \delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2) + \delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(5-5)$$
$$\nu^2 Y(5) = 5Y(5) + 20Y(5) + Y(3)$$
$$\nu^2 Y(5) = 25Y(5) + Y(3)$$
$$Y(5) = \frac{Y(3)}{\nu^2 - 25}$$

$$\nu^2 Y(6)=\delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(6-5)+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(6-6)$$
$$\nu^2 Y(6)=6Y(6)+30Y(6)+Y(4)$$
$$\nu^2 Y(6)=36Y(6)+Y(4)$$
$$Y(6)=\frac{Y(4)}{\nu^2-36}$$

ดังนั้น $$Y(k)=\frac{Y(k-2)}{\nu^2-k^2}\ ,k=2,3,4,5,\ldots$$

ดังนั้น เมื่อนำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณในรูปทั่วไป คือ

$$y(x)=Y(0)+Y(1)x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{Y(k-2)}{\nu^2-k^2}x^k$$ โดยที่ $Y(0)$ และ $Y(1)$ ได้มาจากเงื่อนไขขอบ (4.4)

<u>**ตัวอย่างที่ 4.2**</u> สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 0

แทนค่า $\nu=0$ ในสมการที่ (4.1) จะได้

$$x^2y''+xy'+x^2y=0 \qquad (4.5)$$

เงื่อนไขขอบ คือ $y(0)=1, y(1)=0$ (4.6)

จากสมการที่ (4.5) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)=0 \qquad (4.7)$$

จัดรูปสมการที่ (4.7) จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$+\delta(r-2)Y(k-r)]=0 \qquad (4.8)$$

เมื่อแทน $k=1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots$ ลงในสมการที่ (4.8) จะได้

$k=1\,;\ \delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2)+\delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(1-0)+\delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2)$
$+\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1)+\delta(1-2)Y(1-1)=0$

$Y(1)=0$

$k=2\,;\ \delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2)+\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(2-0)+\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2)+\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(2-1)+\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)+\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(2-2)=0$

$4Y(2)+Y(0)=0$

$Y(2)=-\frac{1}{4}$

$k=3\,;\ \delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(3-0)+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(3-1)+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(3-2)+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(3-3)=0$

$9Y(3)+Y(1)=0$

$Y(3)=0$

$k=4\,;\ \delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(4-0)+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(4-1)+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(4-2)+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(4-3)+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(4-4)=0$

$16Y(4)+Y(2)=0$

$Y(4)=\frac{1}{64}$

$k=5;\ \delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(5-0)+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(5-1)+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(5-2)+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(5-3)+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(5-4)+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$
$+\delta(5-2)Y(5-5)=0$

$25Y(5)+Y(3)=0$

$Y(5)=0$

$k=6;\ \delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$
$+\delta(5-2)Y(6-5)+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$
$+\delta(6-2)Y(6-6)=0$
$36Y(6)+Y(4)=0$
$Y(6)=-\dfrac{1}{2304}$
$k=7;\ \delta(0-2)(7-0+1)(7-0+2)Y(7-0+2)+\delta(0-1)(7-0+1)Y(7-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(7-0)+\delta(1-2)(7-1+1)(7-1+2)Y(7-1+2)+\delta(1-1)(7-1+1)Y(7-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(7-1)+\delta(2-2)(7-2+1)(7-2+2)Y(7-2+2)+\delta(2-1)(7-2+1)Y(7-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(7-2)+\delta(3-2)(7-3+1)(7-3+2)Y(7-3+2)+\delta(3-1)(7-3+1)Y(7-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(7-3)+\delta(4-2)(7-4+1)(7-4+2)Y(7-4+2)+\delta(4-1)(7-4+1)Y(7-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(7-4)+\delta(5-2)(7-5+1)(7-5+2)Y(7-5+2)+\delta(5-1)(7-5+1)Y(7-5+1)$
$+\delta(5-2)Y(7-5)+\delta(6-2)(7-6+1)(7-6+2)Y(7-6+2)+\delta(6-1)(7-6+1)Y(7-6+1)$
$+\delta(6-2)Y(7-6)+\delta(7-2)(7-7+1)(7-7+2)Y(7-7+2)+\delta(7-1)(7-7+1)Y(7-7+1)$
$+\delta(7-2)Y(7-7)=0$
$49Y(7)+Y(5)=0$
$Y(7)=0$
$k=8;\ \delta(0-2)(8-0+1)(8-0+2)Y(8-0+2)+\delta(0-1)(8-0+1)Y(8-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(8-0)+\delta(1-2)(8-1+1)(8-1+2)Y(8-1+2)+\delta(1-1)(8-1+1)Y(8-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(8-1)+\delta(2-2)(8-2+1)(8-2+2)Y(8-2+2)+\delta(2-1)(8-2+1)Y(8-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(8-2)+\delta(3-2)(8-3+1)(8-3+2)Y(8-3+2)+\delta(3-1)(8-3+1)Y(8-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(8-3)+\delta(4-2)(8-4+1)(8-4+2)Y(8-4+2)+\delta(4-1)(8-4+1)Y(8-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(8-4)+\delta(5-2)(8-5+1)(8-5+2)Y(8-5+2)+\delta(5-1)(8-5+1)Y(8-5+1)$
$+\delta(5-2)Y(8-5)+\delta(6-2)(8-6+1)(8-6+2)Y(8-6+2)+\delta(6-1)(8-6+1)Y(8-6+1)$
$+\delta(6-2)Y(8-6)+\delta(7-2)(8-7+1)(8-7+2)Y(8-7+2)+\delta(7-1)(8-7+1)Y(8-7+1)$
$+\delta(7-2)Y(8-7)+\delta(8-2)(8-8+1)(8-8+2)Y(8-8+2)+\delta(8-1)(8-8+1)Y(8-8+1)$
$+\delta(8-2)Y(8-8)=0$
$64Y(8)+Y(6)=0$
$Y(8)=\dfrac{1}{147456}$

ดังนั้น

$$Y(1)=0,Y(2)=-\frac{1}{4},Y(3)=0,Y(4)=\frac{1}{64},\mathrm{Y}(5)=0,Y(6)=-\frac{1}{2304},Y(7)=0,Y(8)=\frac{1}{147456}$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^6}-\frac{x^6}{2^8\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{24}}{2^{44}\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}} \tag{4.9}$$

ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon=\left|J_0(x)-y(x)\right|$

เมื่อ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Absolute Error)

$J_0(x)$ คือ ค่าจริงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

$y(x)$ คือ ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varepsilon=&\left|\left(1-\frac{x^2}{2^2\cdot(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4\cdot(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6\cdot(3!)^2}+\ldots+\frac{x^{24}}{2^{24}\cdot(4!)^2}\right)-\right.\\&\left.\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^6}-\frac{x^6}{2^8\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{24}}{2^{44}\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}}\right)\right|\\=&\ 0\end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีค่าเท่ากันกับผลเฉลยแม่นตรง

<u>ตัวอย่างที่ 4.3</u> สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 1

แทนค่า $\nu=1$ ในสมการที่ (4.1) จะได้ $x^2y''+xy'+x^2y-y=0$ (4.10)

เงื่อนไขขอบ คือ $y(0)=0, y(1)=\frac{1}{2}$ (4.11)

จากสมการที่ (4.10) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)+\\&\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-Y(k)=0\end{aligned} \tag{4.12}$$

จัดรูปสมการที่ (4.12) จะได้

$$\begin{aligned}Y(k)=&\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)\\&+\delta(r-2)Y(k-r)]\end{aligned} \tag{4.13}$$

เมื่อแทน $k=1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots$ ในสมการที่ (4.13) จะได้

$k=1$; $Y(1)=\delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2)+\delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(1-0)+\delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2)+\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(1-1)$

$Y(1)=Y(1)$

$k=2$; $Y(2)=\delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2)+\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(2-0)+\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2)+\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(2-1)+\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)+\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(2-2)=4Y(2)+Y(0)$

$Y(2)=0$

$$k=3\,;\,Y(3)=\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(3-0)+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(3-1)+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(3-2)+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(3-3)=9Y(3)+Y(1)$$
$$Y(3)=-\frac{1}{16}$$
$$k=4\,;\,Y(4)=\delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(4-0)+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(4-1)+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(4-2)+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(4-3)+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(4-4)\;=16Y(4)+Y(2)$$
$$Y(4)=0$$
$$k=5;\,Y(5)=\delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)+\delta(0-2)Y(5-0)$$
$$+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)+\delta(1-2)Y(5-1)$$
$$+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)+\delta(2-2)Y(5-2)$$
$$+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)+\delta(3-2)Y(5-3)$$
$$+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)+\delta(4-2)Y(5-4)$$
$$+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)+\delta(5-2)Y(5-5)$$
$$=25Y(5)+Y(3)$$
$$Y(5)=\frac{1}{384}$$
$$k=6;\,Y(6)=\delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(6-5)+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(6-6)=36Y(6)+Y(4)$$
$$Y(6)=0$$

$$\begin{aligned}
k=7;\, Y(7) &= \delta(0-2)(7-0+1)(7-0+2)Y(7-0+2)+\delta(0-1)(7-0+1)Y(7-0+1)\\
&+\delta(0-2)Y(7-0)+\delta(1-2)(7-1+1)(7-1+2)Y(7-1+2)+\delta(1-1)(7-1+1)Y(7-1+1)\\
&+\delta(1-2)Y(7-1)+\delta(2-2)(7-2+1)(7-2+2)Y(7-2+2)+\delta(2-1)(7-2+1)Y(7-2+1)\\
&+\delta(2-2)Y(7-2)+\delta(3-2)(7-3+1)(7-3+2)Y(7-3+2)+\delta(3-1)(7-3+1)Y(7-3+1)\\
&+\delta(3-2)Y(7-3)+\delta(4-2)(7-4+1)(7-4+2)Y(7-4+2)+\delta(4-1)(7-4+1)Y(7-4+1)\\
&+\delta(4-2)Y(7-4)+\delta(5-2)(7-5+1)(7-5+2)Y(7-5+2)+\delta(5-1)(7-5+1)Y(7-5+1)\\
&+\delta(5-2)Y(7-5)+\delta(6-2)(7-6+1)(7-6+2)Y(7-6+2)+\delta(6-1)(7-6+1)Y(7-6+1)\\
&+\delta(6-2)Y(7-6)+\delta(7-2)(7-7+1)(7-7+2)Y(7-7+2)+\delta(7-1)(7-7+1)Y(7-7+1)\\
&+\delta(7-2)Y(7-7)\\
&= 49Y(7)+Y(5)
\end{aligned}$$

$$Y(7)=\frac{1}{18432}$$

$$\begin{aligned}
k=8;\, Y(8) &= \delta(0-2)(8-0+1)(8-0+2)Y(8-0+2)+\delta(0-1)(8-0+1)Y(8-0+1)\\
&+\delta(0-2)Y(8-0)+\delta(1-2)(8-1+1)(8-1+2)Y(8-1+2)+\delta(1-1)(8-1+1)Y(8-1+1)\\
&+\delta(1-2)Y(8-1)+\delta(2-2)(8-2+1)(8-2+2)Y(8-2+2)+\delta(2-1)(8-2+1)Y(8-2+1)\\
&+\delta(2-2)Y(8-2)+\delta(3-2)(8-3+1)(8-3+2)Y(8-3+2)+\delta(3-1)(8-3+1)Y(8-3+1)\\
&+\delta(3-2)Y(8-3)+\delta(4-2)(8-4+1)(8-4+2)Y(8-4+2)+\delta(4-1)(8-4+1)Y(8-4+1)\\
&+\delta(4-2)Y(8-4)+\delta(5-2)(8-5+1)(8-5+2)Y(8-5+2)+\delta(5-1)(8-5+1)Y(8-5+1)\\
&+\delta(5-2)Y(8-5)+\delta(6-2)(8-6+1)(8-6+2)Y(8-6+2)+\delta(6-1)(8-6+1)Y(8-6+1)\\
&+\delta(6-2)Y(8-6)+\delta(7-2)(8-7+1)(8-7+2)Y(8-7+2)+\delta(7-1)(8-7+1)Y(8-7+1)\\
&+\delta(7-2)Y(8-7)+\delta(8-2)(8-8+1)(8-8+2)Y(8-8+2)+\delta(8-1)(8-8+1)Y(8-8+1)\\
&+\delta(8-2)Y(8-8)\\
&= 64Y(8)+Y(6)
\end{aligned}$$

$$Y(8)=0$$

ดังนั้น

$$Y(1)=\frac{1}{2}, Y(2)=0, Y(3)=-\frac{1}{16}, Y(4)=0, Y(5)=\frac{1}{384}, Y(6)=0, Y(7)=-\frac{1}{18432}, Y(8)=0$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$y(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^4}+\frac{x^5}{2^7\cdot 3}-\frac{x^7}{2^{11}\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{25}}{2^{45}\cdot 13\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}} \tag{4.14}$$

ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon=\left|J_1(x)-y(x)\right|$

เมื่อ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Absolute Error)

$J_1(x)$ คือ ค่าจริงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

$y(x)$ คือ ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

ดังนั้น $$\varepsilon=\left|\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 1!\cdot 2!}+\frac{x^5}{2^5\cdot 2!\cdot 3!}-\frac{x^7}{2^7\cdot 3!\cdot 4!}+\ldots+\frac{x^{25}}{2^{25}\cdot 12!\cdot 13!}\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^4}+\frac{x^5}{2^7\cdot 3}-\frac{x^7}{2^{11}\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{25}}{2^{45}\cdot 13\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}}\right)\right|=0$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีค่าเท่ากันกับผลเฉลยแม่นตรง

<u>ตัวอย่างที่ 4.4</u> สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 2

แทนค่า $\nu = 2$ ในสมการที่ (4.1) จะได้

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y - 4y = 0 \tag{4.15}$$

เงื่อนไขขอบ คือ $y(1) = 0, y(2) = \frac{1}{8}$ (4.16)

จากสมการที่ (4.15) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)Y(k-r) - 4Y(k) = 0 \tag{4.17}$$

จัดรูปสมการที่ (4.17) จะได้

$$4Y(k) = \sum_{r=0}^{k} [\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$+\delta(r-2)Y(k-r)] \tag{4.18}$$

เมื่อแทน $k = 3,4,5,6,7,8,9,\ldots$ ลงในสมการที่ (4.18) จะได้

$$k=3\,;\ 4Y(3) = \delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2) + \delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(3-0) + \delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2) + \delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(3-1) + \delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2) + \delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(3-2) + \delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2) + \delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(3-3)$$
$$4Y(3) = 9Y(3) + Y(1)$$
$$Y(3) = 0$$

$$k=4\,;\ 4Y(4) = \delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2) + \delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(4-0) + \delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2) + \delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(4-1) + \delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2) + \delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(4-2) + \delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2) + \delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(4-3) + \delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2) + \delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(4-4)$$
$$4Y(4) = 16Y(4) + Y(2)$$
$$Y(4) = -\frac{1}{96}$$

$$k=5;\ 4Y(5)=\delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(5-0)+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(5-1)+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(5-2)+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(5-3)+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(5-4)+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(5-5)$$
$$4Y(5)=25Y(5)+Y(3)$$
$$Y(5)=0$$
$$k=6;\ 4Y(6)=\delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(6-5)+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(6-6)$$
$$4Y(6)=36Y(6)+Y(4)$$
$$Y(6)=\frac{1}{96\cdot 32}$$
$$k=7;\ 4Y(7)=\delta(0-2)(7-0+1)(7-0+2)Y(7-0+2)+\delta(0-1)(7-0+1)Y(7-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(7-0)+\delta(1-2)(7-1+1)(7-1+2)Y(7-1+2)+\delta(1-1)(7-1+1)Y(7-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(7-1)+\delta(2-2)(7-2+1)(7-2+2)Y(7-2+2)+\delta(2-1)(7-2+1)Y(7-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(7-2)+\delta(3-2)(7-3+1)(7-3+2)Y(7-3+2)+\delta(3-1)(7-3+1)Y(7-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(7-3)+\delta(4-2)(7-4+1)(7-4+2)Y(7-4+2)+\delta(4-1)(7-4+1)Y(7-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(7-4)+\delta(5-2)(7-5+1)(7-5+2)Y(7-5+2)+\delta(5-1)(7-5+1)Y(7-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(7-5)+\delta(6-2)(7-6+1)(7-6+2)Y(7-6+2)+\delta(6-1)(7-6+1)Y(7-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(7-6)+\delta(7-2)(7-7+1)(7-7+2)Y(7-7+2)+\delta(7-1)(7-7+1)Y(7-7+1)$$
$$+\delta(7-2)Y(7-7)$$
$$4Y(7)=49Y(7)+Y(5)$$
$$Y(7)=0$$

$$k=8;4Y(8)=\delta(0-2)(8-0+1)(8-0+2)Y(8-0+2)+\delta(0-1)(8-0+1)Y(8-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(8-0)+\delta(1-2)(8-1+1)(8-1+2)Y(8-1+2)+\delta(1-1)(8-1+1)Y(8-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(8-1)+\delta(2-2)(8-2+1)(8-2+2)Y(8-2+2)+\delta(2-1)(8-2+1)Y(8-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(8-2)+\delta(3-2)(8-3+1)(8-3+2)Y(8-3+2)+\delta(3-1)(8-3+1)Y(8-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(8-3)+\delta(4-2)(8-4+1)(8-4+2)Y(8-4+2)+\delta(4-1)(8-4+1)Y(8-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(8-4)+\delta(5-2)(8-5+1)(8-5+2)Y(8-5+2)+\delta(5-1)(8-5+1)Y(8-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(8-5)+\delta(6-2)(8-6+1)(8-6+2)Y(8-6+2)+\delta(6-1)(8-6+1)Y(8-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(8-6)+\delta(7-2)(8-7+1)(8-7+2)Y(8-7+2)+\delta(7-1)(8-7+1)Y(8-7+1)$$
$$+\delta(7-2)Y(8-7)+\delta(8-2)(8-8+1)(8-8+2)Y(8-8+2)+\delta(8-1)(8-8+1)Y(8-8+1)$$
$$+\delta(8-2)Y(8-8)$$
$$4Y(8)=64Y(8)+Y(6)$$
$$Y(8)=-\frac{1}{96\cdot 32\cdot 60}$$
$$k=9;4Y(9)=\delta(0-2)(9-0+1)(9-0+2)Y(9-0+2)+\delta(0-1)(9-0+1)Y(9-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(9-0)+\delta(1-2)(9-1+1)(9-1+2)Y(9-1+2)+\delta(1-1)(9-1+1)Y(9-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(9-1)+\delta(2-2)(9-2+1)(9-2+2)Y(9-2+2)+\delta(2-1)(9-2+1)Y(9-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(9-2)+\delta(3-2)(9-3+1)(9-3+2)Y(9-3+2)+\delta(3-1)(9-3+1)Y(9-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(9-3)+\delta(4-2)(9-4+1)(9-4+2)Y(9-4+2)+\delta(4-1)(9-4+1)Y(9-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(9-4)+\delta(5-2)(9-5+1)(9-5+2)Y(9-5+2)+\delta(5-1)(9-5+1)Y(9-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(9-5)+\delta(6-2)(9-6+1)(9-6+2)Y(9-6+2)+\delta(6-1)(9-6+1)Y(9-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(9-6)+\delta(7-2)(9-7+1)(9-7+2)Y(9-7+2)+\delta(7-1)(9-7+1)Y(9-7+1)$$
$$+\delta(7-2)Y(9-7)+\delta(8-2)(9-8+1)(9-8+2)Y(9-8+2)+\delta(8-1)(9-8+1)Y(9-8+1)$$
$$+\delta(8-2)Y(9-8)+\delta(9-2)(9-9+1)(9-9+2)Y(9-9+2)+\delta(9-1)(9-9+1)Y(9-9+1)$$
$$+\delta(9-2)Y(9-9)$$
$$4Y(9)=81Y(9)+Y(7)$$
$$Y(9)=0$$

ดังนั้น

$$Y(1)=0,Y(2)=\frac{1}{8},Y(3)=0,Y(4)=-\frac{1}{96},\mathrm{Y}(5)=0,Y(6)=\frac{1}{96\cdot 32},Y(7)=0,$$
$$Y(8)=-\frac{1}{96\cdot 32\cdot 60},Y(9)=0$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$y(x)=\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{96}+\frac{x^6}{96\cdot 32}-\frac{x^8}{96\cdot 32\cdot 60} \tag{4.19}$$

ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon=\left|J_2(x)-y(x)\right|$

เมื่อ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Absolute Error)

$J_2(x)$ คือ ค่าจริงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

$y(x)$ คือ ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

จะได้ว่า

$$\varepsilon=\left|\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{6\cdot 2^4}+\frac{x^6}{24\cdot 2^7}-\frac{x^8}{6\cdot 5!\cdot 2^8}\right)-\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{96}+\frac{x^6}{96\cdot 32}-\frac{x^8}{96\cdot 32\cdot 60}\right)\right|$$

$$=0$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีค่าเท่ากันกับผลเฉลยแม่นตรง

<u>ตัวอย่างที่ 4.5</u> สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 3

แทนค่า $\nu=1$ ในสมการที่ (4.1) จะได้ $x^2y''+xy'+x^2y-9y=0$ (4.20)

เงื่อนไขขอบ คือ $y(2)=0, y(3)=\dfrac{1}{2}$ (4.21)

จากสมการที่ (4.21) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)+$$

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-9Y(k)=0 \qquad (4.22)$$

จัดรูปสมการที่ (4.22) จะได้

$$9Y(k)=\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$

$$+\delta(r-2)Y(k-r)] \qquad (4.23)$$

เมื่อแทน $k=4,5,6,7,8,9,10,\ldots$ ในสมการที่ (4.23) จะได้

$$k=4\,;\ 9Y(4)=\delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$$

$$+\delta(0-2)Y(4-0)+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$$

$$+\delta(1-2)Y(4-1)+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$$

$$+\delta(2-2)Y(4-2)+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$$

$$+\delta(3-2)Y(4-3)+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$$

$$+\delta(4-2)Y(4-4)$$

$$9Y(4)=16Y(4)+Y(2)$$

$$Y(4)=0$$

$$k=5;\ 9Y(5)=\delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$$

$$+\delta(0-2)Y(5-0)+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$$

$$+\delta(1-2)Y(5-1)+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$$

$$+\delta(2-2)Y(5-2)+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$$

$$+\delta(3-2)Y(5-3)+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$$

$$+\delta(4-2)Y(5-4)+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$$

$$+\delta(5-2)Y(5-5)$$

$$9Y(5)=25Y(5)+Y(3)$$

$$Y(5)=-\frac{1}{768}$$

$$
\begin{aligned}
&k=6;\ 9Y(6)=\delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)\\
&+\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)\\
&+\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)\\
&+\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)\\
&+\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)\\
&+\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)\\
&+\delta(5-2)Y(6-5)+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)\\
&+\delta(6-2)Y(6-6)
\end{aligned}
$$

$$9Y(6)=36Y(6)+Y(4)$$

$$Y(6)=0$$

$$
\begin{aligned}
&k=7;\ 9Y(7)=\delta(0-2)(7-0+1)(7-0+2)Y(7-0+2)+\delta(0-1)(7-0+1)Y(7-0+1)\\
&+\delta(0-2)Y(7-0)+\delta(1-2)(7-1+1)(7-1+2)Y(7-1+2)+\delta(1-1)(7-1+1)Y(7-1+1)\\
&+\delta(1-2)Y(7-1)+\delta(2-2)(7-2+1)(7-2+2)Y(7-2+2)+\delta(2-1)(7-2+1)Y(7-2+1)\\
&+\delta(2-2)Y(7-2)+\delta(3-2)(7-3+1)(7-3+2)Y(7-3+2)+\delta(3-1)(7-3+1)Y(7-3+1)\\
&+\delta(3-2)Y(7-3)+\delta(4-2)(7-4+1)(7-4+2)Y(7-4+2)+\delta(4-1)(7-4+1)Y(7-4+1)\\
&+\delta(4-2)Y(7-4)+\delta(5-2)(7-5+1)(7-5+2)Y(7-5+2)+\delta(5-1)(7-5+1)Y(7-5+1)\\
&+\delta(5-2)Y(7-5)+\delta(6-2)(7-6+1)(7-6+2)Y(7-6+2)+\delta(6-1)(7-6+1)Y(7-6+1)\\
&+\delta(6-2)Y(7-6)+\delta(7-2)(7-7+1)(7-7+2)Y(7-7+2)+\delta(7-1)(7-7+1)Y(7-7+1)\\
&+\delta(7-2)Y(7-7)
\end{aligned}
$$

$$9Y(7)=49Y(7)+Y(5)$$

$$Y(7)=\frac{1}{768\cdot 40}$$

$$
\begin{aligned}
&k=8;\ 9Y(8)=\delta(0-2)(8-0+1)(8-0+2)Y(8-0+2)+\delta(0-1)(8-0+1)Y(8-0+1)\\
&+\delta(0-2)Y(8-0)+\delta(1-2)(8-1+1)(8-1+2)Y(8-1+2)+\delta(1-1)(8-1+1)Y(8-1+1)\\
&+\delta(1-2)Y(8-1)+\delta(2-2)(8-2+1)(8-2+2)Y(8-2+2)+\delta(2-1)(8-2+1)Y(8-2+1)\\
&+\delta(2-2)Y(8-2)+\delta(3-2)(8-3+1)(8-3+2)Y(8-3+2)+\delta(3-1)(8-3+1)Y(8-3+1)\\
&+\delta(3-2)Y(8-3)+\delta(4-2)(8-4+1)(8-4+2)Y(8-4+2)+\delta(4-1)(8-4+1)Y(8-4+1)\\
&+\delta(4-2)Y(8-4)+\delta(5-2)(8-5+1)(8-5+2)Y(8-5+2)+\delta(5-1)(8-5+1)Y(8-5+1)\\
&+\delta(5-2)Y(8-5)+\delta(6-2)(8-6+1)(8-6+2)Y(8-6+2)+\delta(6-1)(8-6+1)Y(8-6+1)\\
&+\delta(6-2)Y(8-6)+\delta(7-2)(8-7+1)(8-7+2)Y(8-7+2)+\delta(7-1)(8-7+1)Y(8-7+1)\\
&+\delta(7-2)Y(8-7)+\delta(8-2)(8-8+1)(8-8+2)Y(8-8+2)+\delta(8-1)(8-8+1)Y(8-8+1)\\
&+\delta(8-2)Y(8-8)
\end{aligned}
$$

$$9Y(8)=64Y(8)+Y(6)$$

$$Y(8)=0$$

$$k=9;9Y(9)=\delta(0-2)(9-0+1)(9-0+2)Y(9-0+2)+\delta(0-1)(9-0+1)Y(9-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(9-0)+\delta(1-2)(9-1+1)(9-1+2)Y(9-1+2)+\delta(1-1)(9-1+1)Y(9-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(9-1)+\delta(2-2)(9-2+1)(9-2+2)Y(9-2+2)+\delta(2-1)(9-2+1)Y(9-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(9-2)+\delta(3-2)(9-3+1)(9-3+2)Y(9-3+2)+\delta(3-1)(9-3+1)Y(9-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(9-3)+\delta(4-2)(9-4+1)(9-4+2)Y(9-4+2)+\delta(4-1)(9-4+1)Y(9-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(9-4)+\delta(5-2)(9-5+1)(9-5+2)Y(9-5+2)+\delta(5-1)(9-5+1)Y(9-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(9-5)+\delta(6-2)(9-6+1)(9-6+2)Y(9-6+2)+\delta(6-1)(9-6+1)Y(9-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(9-6)+\delta(7-2)(9-7+1)(9-7+2)Y(9-7+2)+\delta(7-1)(9-7+1)Y(9-7+1)$$
$$+\delta(7-2)Y(9-7)+\delta(8-2)(9-8+1)(9-8+2)Y(9-8+2)+\delta(8-1)(9-8+1)Y(9-8+1)$$
$$+\delta(8-2)Y(9-8)+\delta(9-2)(9-9+1)(9-9+2)Y(9-9+2)+\delta(9-1)(9-9+1)Y(9-9+1)$$
$$+\delta(9-2)Y(9-9)$$
$$9Y(9)=81Y(9)+Y(7)$$
$$Y(9)=-\frac{1}{768\cdot 40\cdot 72}$$
$$k=10;9Y(10)=\delta(0-2)(10-0+1)(10-0+2)Y(10-0+2)+\delta(0-1)(10-0+1)Y(10-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(10-0)+\delta(1-2)(10-1+1)(10-1+2)Y(10-1+2)+\delta(1-1)(10-1+1)Y(10-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(10-1)+\delta(2-2)(10-2+1)(10-2+2)Y(10-2+2)+\delta(2-1)(10-2+1)Y(10-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(10-2)+\delta(3-2)(10-3+1)(10-3+2)Y(10-3+2)+\delta(3-1)(10-3+1)Y(10-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(10-3)+\delta(4-2)(10-4+1)(10-4+2)Y(10-4+2)+\delta(4-1)(10-4+1)Y(10-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(10-4)+\delta(5-2)(10-5+1)(10-5+2)Y(10-5+2)+\delta(5-1)(10-5+1)Y(10-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(10-5)+\delta(6-2)(10-6+1)(10-6+2)Y(10-6+2)+\delta(6-1)(10-6+1)Y(10-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(10-6)+\delta(7-2)(10-7+1)(10-7+2)Y(10-7+2)+\delta(7-1)(10-7+1)Y(10-7+1)$$
$$+\delta(7-2)Y(10-7)+\delta(8-2)(10-8+1)(10-8+2)Y(10-8+2)+\delta(8-1)(10-8+1)Y(10-8+1)$$
$$+\delta(8-2)Y(10-8)+\delta(9-2)(10-9+1)(10-9+2)Y(10-9+2)+\delta(9-1)(10-9+1)Y(10-9+1)$$
$$+\delta(9-2)Y(10-9)+\delta(10-2)(10-10+1)(10-10+2)Y(10-10+2)+\delta(10-1)(10-10+1)$$
$$Y(10-10+1)+\delta(10-2)Y(10-10)$$
$$9Y(10)=81Y(9)+Y(7)$$
$$Y(10)=0$$

ดังนั้น

$$Y(3)=\frac{1}{48},Y(4)=0,Y(5)=-\frac{1}{768},Y(6)=0,Y(7)=\frac{1}{768\cdot 40},Y(8)=0$$
$$Y(9)=-\frac{1}{768\cdot 40\cdot 72},Y(10)=0$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$y(x)=\frac{x^3}{48}-\frac{x^5}{768}+\frac{x^7}{768\cdot 40}-\frac{x^9}{768\cdot 40\cdot 72}+\frac{x^{11}}{768\cdot 40\cdot 72\cdot 112} \tag{4.24}$$

ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon=\left|J_3\left(x\right)-y\left(x\right)\right|$

เมื่อ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Absolute Error)

$J_3(x)$ คือ ค่าจริงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

$y(x)$ คือ ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

ดังนั้น
$$\varepsilon=\left|\left(\frac{x^3}{3!\cdot 2^3}-\frac{x^5}{4!\cdot 2^5}+\frac{x^7}{2!\cdot 5!\cdot 2^7}-\frac{x^9}{3!\cdot 6!\cdot 2^9}+\frac{x^{11}}{4!\cdot 7!\cdot 2^{11}}\right)-\left(\frac{x^3}{48}-\frac{x^5}{768}+\frac{x^7}{768\cdot 40}-\frac{x^9}{768\cdot 40\cdot 72}+\frac{x^{11}}{768\cdot 40\cdot 72\cdot 112}\right)\right|$$
$$=0$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีค่าเท่ากันกับผลเฉลยแม่นตรง

<u>ตัวอย่างที่ 4.6</u> สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ $\frac{1}{2}$

แทนค่า $\nu=1$ ในสมการที่ (4.1) จะได้ $x^2y''+xy'+x^2y-\frac{1}{4}y=0$ (4.25)

เงื่อนไขขอบ คือ $y(0)=0, y(1)=1$ (4.26)

จากสมการที่ (4.26) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)+$$
$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-\frac{1}{4}Y(k)=0 \quad (4.27)$$

จัดรูปสมการที่ (4.27) จะได้

$$Y(k)=4\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$+\delta(r-2)Y(k-r)] \quad (4.28)$$

เมื่อแทน $k=1,2,3,4,5,6,7,8,9\ldots$ ในสมการที่ (4.28) จะได้

$$k=2\ ;\ Y(2)=4[\delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2)+\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(2-0)+\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2)+\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(2-1)+\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)+\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(2-2)]$$
$$Y(2)=4[4Y(2)+Y(0)]$$
$$Y(2)=0$$

$$k=3\,;\,Y(3)=4[\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(3-0)+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(3-1)+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(3-2)+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(3-3)]$$
$$Y(3)=4[9Y(3)+Y(1)]$$
$$Y(3)=-\frac{4}{35}$$
$$k=4\,;\,Y(4)=4[\delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(4-0)+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(4-1)+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(4-2)+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(4-3)+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(4-4)]$$
$$Y(4)=4[16Y(4)+Y(2)]$$
$$Y(4)=0$$
$$k=5\,;\,Y(5)=4[\delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(5-0)+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(5-1)+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(5-2)+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(5-3)+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(5-4)+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(5-5)]$$
$$Y(5)=4[16Y(5)+Y(3)]$$
$$Y(5)=\frac{16}{32\cdot 99}$$
$$k=6;\,Y(6)=4[\delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$$
$$+\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$$
$$+\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$$
$$+\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$$
$$+\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$$
$$+\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$$
$$+\delta(5-2)Y(6-5)+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$$
$$+\delta(6-2)Y(6-6)]$$
$$Y(6)=4[36Y(6)+Y(4)]$$
$$Y(6)=0$$

$k=7;\, Y(7)=4[\delta(0-2)(7-0+1)(7-0+2)Y(7-0+2)+\delta(0-1)(7-0+1)Y(7-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(7-0)+\delta(1-2)(7-1+1)(7-1+2)Y(7-1+2)+\delta(1-1)(7-1+1)Y(7-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(7-1)+\delta(2-2)(7-2+1)(7-2+2)Y(7-2+2)+\delta(2-1)(7-2+1)Y(7-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(7-2)+\delta(3-2)(7-3+1)(7-3+2)Y(7-3+2)+\delta(3-1)(7-3+1)Y(7-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(7-3)+\delta(4-2)(7-4+1)(7-4+2)Y(7-4+2)+\delta(4-1)(7-4+1)Y(7-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(7-4)+\delta(5-2)(7-5+1)(7-5+2)Y(7-5+2)+\delta(5-1)(7-5+1)Y(7-5+1)$
$+\delta(5-2)Y(7-5)+\delta(6-2)(7-6+1)(7-6+2)Y(7-6+2)+\delta(6-1)(7-6+1)Y(7-6+1)$
$+\delta(6-2)Y(7-6)+\delta(7-2)(7-7+1)(7-7+2)Y(7-7+2)+\delta(7-1)(7-7+1)Y(7-7+1)$
$+\delta(7-2)Y(7-7)]$
$Y(7)=4[49Y(7)+Y(5)]$
$$Y(7)=-\frac{64}{35\cdot 99\cdot 195}$$
$k=8;\, Y(8)=4[\delta(0-2)(8-0+1)(8-0+2)Y(8-0+2)+\delta(0-1)(8-0+1)Y(8-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(8-0)+\delta(1-2)(8-1+1)(8-1+2)Y(8-1+2)+\delta(1-1)(8-1+1)Y(8-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(8-1)+\delta(2-2)(8-2+1)(8-2+2)Y(8-2+2)+\delta(2-1)(8-2+1)Y(8-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(8-2)+\delta(3-2)(8-3+1)(8-3+2)Y(8-3+2)+\delta(3-1)(8-3+1)Y(8-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(8-3)+\delta(4-2)(8-4+1)(8-4+2)Y(8-4+2)+\delta(4-1)(8-4+1)Y(8-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(8-4)+\delta(5-2)(8-5+1)(8-5+2)Y(8-5+2)+\delta(5-1)(8-5+1)Y(8-5+1)$
$+\delta(5-2)Y(8-5)+\delta(6-2)(8-6+1)(8-6+2)Y(8-6+2)+\delta(6-1)(8-6+1)Y(8-6+1)$
$+\delta(6-2)Y(8-6)+\delta(7-2)(8-7+1)(8-7+2)Y(8-7+2)+\delta(7-1)(8-7+1)Y(8-7+1)$
$+\delta(7-2)Y(8-7)+\delta(8-2)(8-8+1)(8-8+2)Y(8-8+2)+\delta(8-1)(8-8+1)Y(8-8+1)$
$+\delta(8-2)Y(8-8)]$
$Y(8)=4[64Y(8)+Y(6)]$
$Y(8)=0$
$k=9;\, Y(9)=4[\delta(0-2)(9-0+1)(9-0+2)Y(9-0+2)+\delta(0-1)(9-0+1)Y(9-0+1)$
$+\delta(0-2)Y(9-0)+\delta(1-2)(9-1+1)(9-1+2)Y(9-1+2)+\delta(1-1)(9-1+1)Y(9-1+1)$
$+\delta(1-2)Y(9-1)+\delta(2-2)(9-2+1)(9-2+2)Y(9-2+2)+\delta(2-1)(9-2+1)Y(9-2+1)$
$+\delta(2-2)Y(9-2)+\delta(3-2)(9-3+1)(9-3+2)Y(9-3+2)+\delta(3-1)(9-3+1)Y(9-3+1)$
$+\delta(3-2)Y(9-3)+\delta(4-2)(9-4+1)(9-4+2)Y(9-4+2)+\delta(4-1)(9-4+1)Y(9-4+1)$
$+\delta(4-2)Y(9-4)+\delta(5-2)(9-5+1)(9-5+2)Y(9-5+2)+\delta(5-1)(9-5+1)Y(9-5+1)$
$+\delta(5-2)Y(9-5)+\delta(6-2)(9-6+1)(9-6+2)Y(9-6+2)+\delta(6-1)(9-6+1)Y(9-6+1)$
$+\delta(6-2)Y(9-6)+\delta(7-2)(9-7+1)(9-7+2)Y(9-7+2)+\delta(7-1)(9-7+1)Y(9-7+1)$
$+\delta(7-2)Y(9-7)+\delta(8-2)(9-8+1)(9-8+2)Y(9-8+2)+\delta(8-1)(9-8+1)Y(9-8+1)$
$+\delta(8-2)Y(9-8)+\delta(8-2)(9-8+1)(9-8+2)Y(9-8+2)+\delta(8-1)(9-8+1)Y(9-8+1)$
$+\delta(9-2)Y(9-9)]$
$Y(9)=4[81Y(9)+Y(7)]$
$$Y(9)=\frac{256}{35\cdot 99\cdot 195\cdot 323}$$
ดังนั้น

$Y(1)=1, Y(2)=0, Y(3)=-\dfrac{4}{35}, Y(4)=0, Y(5)=\dfrac{16}{35\cdot 99}, Y(6)=0, Y(7)=-\dfrac{64}{35\cdot 99\cdot 195},$

$Y(8)=0, Y(9)=\dfrac{256}{35\cdot 99\cdot 195\cdot 323}$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$y_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x-\frac{4x^3}{35}+\frac{16x^5}{35\cdot 99}-\frac{64x^7}{35\cdot 99\cdot 195}+\frac{256x^9}{35\cdot 99\cdot 195\cdot 323}\right) \tag{4.29}$$

ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon=\left|J_{\frac{1}{2}}(x)-y(x)\right|$

เมื่อ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Absolute Error)

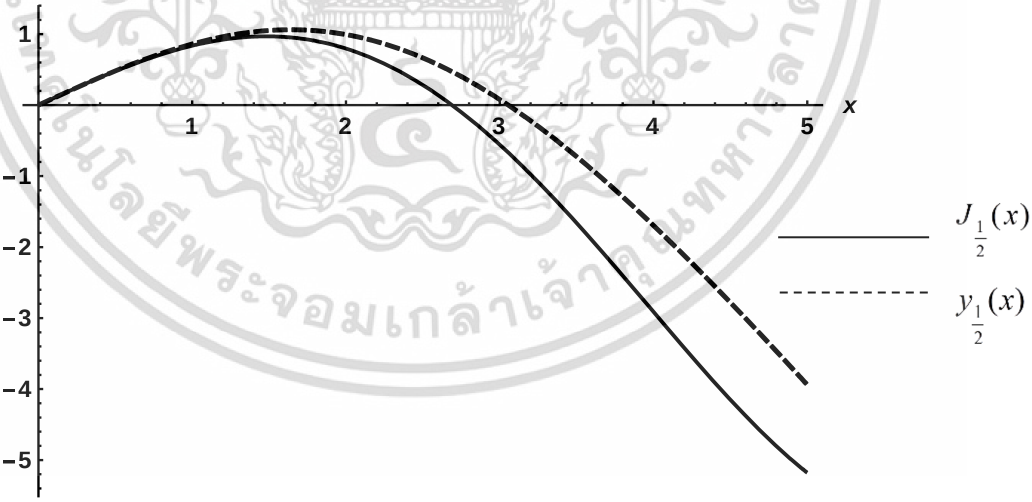
$J_{\frac{1}{2}}(x)$ คือ ค่าจริงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

$y_{\frac{1}{2}}(x)$ คือ ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\varepsilon=&\left|\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x-\frac{x^3}{1!\cdot 3!}+\frac{x^5}{3!\cdot 5!}-\frac{x^7}{3!\cdot 7!}+\ldots+\frac{x^{23}}{11!\cdot 23!}\right)-\right.\\ &\left.\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x-\frac{4x^3}{35}+\frac{16x^5}{35\cdot 99}-\frac{64x^7}{35\cdot 99\cdot 195}+\ldots+\frac{4194304x^{23}}{35\cdot 99\cdot 195\cdot 323\cdot 483\cdot 575\cdot 675\cdot 784\cdot 1443\cdot 1763\cdot 2115}\right)\right|\\ =&\ 0.0242\end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีค่าเท่ากันกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 4.1 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ $\frac{1}{2}$

(Bessel functions of first kind of order $\frac{1}{2}$)

โดยที่กราฟเส้นทึบเป็นกราฟ $J_{\frac{1}{2}}(x)$ และกราฟเส้นปะเป็นกราฟ $y_{\frac{1}{2}}(x)$

ตัวอย่างที่ 4.7 สมการเบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับ ν

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0 \tag{4.30}$$

จากสมการที่ (4.30) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$

$$-\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-\nu^2Y(k)=0 \tag{4.31}$$

จัดรูปสมการที่ (4.31) จะได้

$$\nu^2Y(k)=\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)$$

$$+\delta(r-1)(k-r+1)+Y(k-r+1)-\delta(r-2)Y(k-r)] \tag{4.32}$$

แทนค่า $k=1,2,3,4,5,6,\ldots$ ลงในสมการที่ (4.32) จะได้

$$\nu^2Y(1)=\delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2)+\delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(1-0)+\delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2)+\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(1-1)$$
$$\nu^2Y(1)=Y(1)$$

$$\nu^2Y(2)=\delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2)+\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(2-0)+\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2)+\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(2-1)+\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)+\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(2-2)$$
$$\nu^2Y(2)=2Y(2)+2Y(2)-Y(0)$$
$$\nu^2Y(2)=4Y(2)-Y(0)$$
$$Y(2)=\frac{Y(0)}{4-\nu^2}$$

$$\nu^2Y(3)=\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(3-0)+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(3-1)+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(3-2)+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$$
$$-\delta(3-2)Y(3-3)$$
$$\nu^2Y(3)=3Y(2)+6Y(3)-Y(1)$$
$$\nu^2Y(3)=9Y(3)-Y(1)$$
$$Y(3)=\frac{Y(1)}{9-\nu^2}$$

$$\nu^2 Y(4) = \delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2) + \delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(4-0) + \delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2) + \delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(4-1) + \delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2) + \delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(4-2) + \delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2) + \delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$$
$$-\delta(3-2)Y(4-3) + \delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2) + \delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$$
$$-\delta(4-2)Y(4-4)$$
$$\nu^2 Y(4) = 4Y(4) + 12Y(4) - Y(2)$$
$$\nu^2 Y(4) = 16Y(4) - Y(2)$$
$$Y(4) = \frac{Y(2)}{16-\nu^2}$$

$$\nu^2 Y(5) = \delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2) + \delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(5-0) + \delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2) + \delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(5-1) + \delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2) + \delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(5-2) + \delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2) + \delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$$
$$-\delta(3-2)Y(5-3) + \delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2) + \delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$$
$$-\delta(4-2)Y(5-4) + \delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2) + \delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$$
$$-\delta(5-2)Y(5-5)$$
$$\nu^2 Y(5) = 5Y(5) + 20Y(5) - Y(3)$$
$$\nu^2 Y(5) = 25Y(5) - Y(3)$$
$$Y(5) = \frac{Y(3)}{25-\nu^2}$$

$$\nu^2 Y(6) = \delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2) + \delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(6-0) + \delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2) + \delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(6-1) + \delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2) + \delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(6-2) + \delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2) + \delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$$
$$-\delta(3-2)Y(6-3) + \delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2) + \delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$$
$$-\delta(4-2)Y(6-4) + \delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2) + \delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$$
$$-\delta(5-2)Y(6-5) + \delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2) + \delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$$
$$-\delta(6-2)Y(6-6)$$
$$\nu^2 Y(6) = 6Y(6) + 30Y(6) - Y(4)$$
$$\nu^2 Y(6) = 36Y(6) - Y(4)$$
$$Y(6) = \frac{Y(4)}{36-\nu^2}$$

ดังนั้น $$Y(k) = \frac{Y(k-2)}{k^2-\nu^2} \ , k = 2,3,4,5,\ldots$$

ดังนั้น เมื่อนำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณในรูปทั่วไป คือ

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{Y(k-2)}{k^2-\nu^2} x^k$$ โดยที่ $Y(0)$ และ $Y(1)$ ได้มาจากเงื่อนไขขอบ (4.33)

ตัวอย่างที่ 4.8 สมการเบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับ 0 (Modified Bessel functions of first kind of order 0)

แทนค่า $\nu = 0$ ในสมการที่ (4.30) จะได้

$$x^2 y'' + xy' - x^2 y = 0 \quad (4.34)$$

เงื่อนไขขอบ คือ $y(0) = 1, y(1) = 0$ (4.35)

จากสมการที่ (4.34) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$

$$-\sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)Y(k-r) = 0 \quad (4.36)$$

จัดรูปสมการที่ (4.36) จะได้

$$\sum_{r=0}^{k} [\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$

$$-\delta(r-2)Y(k-r)] = 0 \quad (4.37)$$

เมื่อแทน $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ จะได้

$k = 1$; $\delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2) + \delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$

$-\delta(0-2)Y(1-0) + \delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2)$

$+\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1) - \delta(1-2)Y(1-1) = 0$

$Y(1) = 0$

$k = 2$; $\delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2) + \delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$

$-\delta(0-2)Y(2-0) + \delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2) + \delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$

$-\delta(1-2)Y(2-1) + \delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)$

$+\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1) - \delta(2-2)Y(2-2) = 0$

$4Y(2) - Y(0) = 0$

$Y(2) = \frac{1}{4}$

$k = 3$; $\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2) + \delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$

$-\delta(0-2)Y(3-0) + \delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2) + \delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$

$-\delta(1-2)Y(3-1) + \delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)$

$+\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1) - \delta(2-2)Y(3-2) + \delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)$

$+\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1) - \delta(3-2)Y(3-3) = 0$

$9Y(3) - Y(1) = 0$

$Y(3) = 0$

$k=4\,;\ \delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$

$-\delta(0-2)Y(4-0)+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$

$-\delta(1-2)Y(4-1)+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$

$-\delta(2-2)Y(4-2)+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$

$-\delta(3-2)Y(4-3)+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$

$-\delta(4-2)Y(4-4)=0$

$16Y(4)-Y(2)=0$

$Y(4)=\dfrac{1}{64}$

$k=5\,;\ \delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$

$-\delta(0-2)Y(5-0)+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$

$-\delta(1-2)Y(5-1)+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$

$-\delta(2-2)Y(5-2)+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$

$-\delta(3-2)Y(5-3)+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$

$-\delta(4-2)Y(5-4)+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+\delta(5-1)(5-5+1)$

$Y(5-5+1)-\delta(5-2)Y(5-5)=0$

$25Y(5)-Y(3)=0$

$Y(5)=0$

$k=6;\ \delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$

$-\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$

$-\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$

$-\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$

$-\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$

$-\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$

$-\delta(5-2)Y(6-5)+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$

$-\delta(6-2)Y(6-6)=0$

$36Y(6)-Y(4)=0$

$Y(6)=\dfrac{1}{2304}$

$k=7;\ \delta(0-2)(7-0+1)(7-0+2)Y(7-0+2)+\delta(0-1)(7-0+1)Y(7-0+1)$

$-\delta(0-2)Y(7-0)+\delta(1-2)(7-1+1)(7-1+2)Y(7-1+2)+\delta(1-1)(7-1+1)Y(7-1+1)$

$-\delta(1-2)Y(7-1)+\delta(2-2)(7-2+1)(7-2+2)Y(7-2+2)+\delta(2-1)(7-2+1)Y(7-2+1)$

$-\delta(2-2)Y(7-2)+\delta(3-2)(7-3+1)(7-3+2)Y(7-3+2)+\delta(3-1)(7-3+1)Y(7-3+1)$

$-\delta(3-2)Y(7-3)+\delta(4-2)(7-4+1)(7-4+2)Y(7-4+2)+\delta(4-1)(7-4+1)Y(7-4+1)$

$-\delta(4-2)Y(7-4)+\delta(5-2)(7-5+1)(7-5+2)Y(7-5+2)+\delta(5-1)(7-5+1)Y(7-5+1)$

$-\delta(5-2)Y(7-5)+\delta(6-2)(7-6+1)(7-6+2)Y(7-6+2)+\delta(6-1)(7-6+1)Y(7-6+1)$

$-\delta(6-2)Y(7-6)+\delta(7-2)(7-7+1)(7-7+2)Y(7-7+2)+\delta(7-1)(7-7+1)Y(7-7+1)$

$-\delta(7-2)Y(7-7)=0$

$49Y(7)-Y(5)=0$

$Y(7)=0$

$$k=8;\ \delta(0-2)(8-0+1)(8-0+2)Y(8-0+2)+\delta(0-1)(8-0+1)Y(8-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(8-0)+\delta(1-2)(8-1+1)(8-1+2)Y(8-1+2)+\delta(1-1)(8-1+1)Y(8-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(8-1)+\delta(2-2)(8-2+1)(8-2+2)Y(8-2+2)+\delta(2-1)(8-2+1)Y(8-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(8-2)+\delta(3-2)(8-3+1)(8-3+2)Y(8-3+2)+\delta(3-1)(8-3+1)Y(8-3+1)$$
$$-\delta(3-2)Y(8-3)+\delta(4-2)(8-4+1)(8-4+2)Y(8-4+2)+\delta(4-1)(8-4+1)Y(8-4+1)$$
$$-\delta(4-2)Y(8-4)+\delta(5-2)(8-5+1)(8-5+2)Y(8-5+2)+\delta(5-1)(8-5+1)Y(8-5+1)$$
$$-\delta(5-2)Y(8-5)+\delta(6-2)(8-6+1)(8-6+2)Y(8-6+2)+\delta(6-1)(8-6+1)Y(8-6+1)$$
$$-\delta(6-2)Y(8-6)+\delta(7-2)(8-7+1)(8-7+2)Y(8-7+2)+\delta(7-1)(8-7+1)Y(8-7+1)$$
$$-\delta(7-2)Y(8-7)+\delta(8-2)(8-8+1)(8-8+2)Y(8-8+2)+\delta(8-1)(8-8+1)Y(8-8+1)$$
$$-\delta(8-2)Y(8-8)=0$$
$$64Y(8)-Y(6)=0$$
$$Y(8)=\frac{1}{147456}$$
แทนค่าไปเรื่อยๆ จะได้
$$Y(0)=1, Y(1)=0, Y(2)=\frac{1}{4}, Y(3)=0, Y(4)=\frac{1}{64}, Y(5)=0, Y(6)=\frac{1}{2304}, Y(7)=0, Y(8)=\frac{1}{147456}$$
นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ
$$y(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^6}+\frac{x^6}{2^8\cdot 3^2}+\frac{x^8}{2^{14}\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{24}}{2^{44}\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}} \tag{4.38}$$
ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon=\left|I_0(x)-y(x)\right|$

เมื่อ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Absolute Error)

$I_0(x)$ คือ ค่าจริงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

$y(x)$ คือ ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

ดังนั้น
$$\varepsilon=\left|\left(1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+\frac{x^6}{2304}+\frac{x^8}{147456}+\ldots+\frac{x^{24}}{2^{24}\cdot(12!)^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^6}+\frac{x^6}{2^8\cdot 3^2}+\frac{x^8}{2^{14}\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{24}}{2^{44}\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}}\right)\right|$$
$$=0$$
ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีค่าเท่ากันกับผลเฉลยแม่นตรง

<u>ตัวอย่างที่ 4.9</u> สมการเบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับ 1 (Modified Bessel functions of first kind of order 1)

แทนค่า $\nu=1$ ในสมการที่ (4.30) จะได้
$$x^2y''+xy'-x^2y-y=0 \tag{4.39}$$
เงื่อนไขขอบ คือ $y(0)=0, y(1)=\frac{1}{2}$ (4.40)

จากสมการที่ (4.39) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-Y(k)=0 \tag{4.41}$$
จัดรูปสมการที่ (4.41) จะได้
$$\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$$
$$-\delta(r-2)Y(k-r)]=Y(k) \tag{4.42}$$
เมื่อแทน $k=1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots$ จะได้

$k=1$; $Y(1)=\delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2)+\delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$
$-\delta(0-2)Y(1-0)+\delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2)$
$+\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1)-\delta(1-2)Y(1-1)$
$Y(1)=Y(1)$
$$Y(1)=\frac{1}{2}$$
$k=2$; $Y(2)=\delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2)+\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$
$-\delta(0-2)Y(2-0)+\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2)$
$+\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)-\delta(1-2)Y(2-1)$
$+\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)$
$+\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)-\delta(2-2)Y(2-2)=4Y(2)-Y(0)$
$$Y(2)=\frac{Y(0)}{3}$$
$$Y(2)=0$$
$k=3$; $Y(3)=\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$
$-\delta(0-2)Y(3-0)+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)$
$+\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)-\delta(1-2)Y(3-1)+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)$
$+\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)-\delta(2-2)Y(3-2)$
$+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)-\delta(3-2)Y(3-3)$
$=9Y(3)-Y(1)$
$$Y(3)=\frac{Y(1)}{8}=\frac{1}{16}$$

$k=4\,;\ \delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$
$-\delta(0-2)Y(4-0)+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)$
$+\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)-\delta(1-2)Y(4-1)$
$+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$
$-\delta(2-2)Y(4-2)+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)$
$+\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)-\delta(3-2)Y(4-3)$
$+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$
$-\delta(4-2)Y(4-4)=0$

$16Y(4)-Y(2)=0$

$Y(4)=\frac{1}{64}$

$k=5;\ \delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$
$-\delta(0-2)Y(5-0)+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$
$-\delta(1-2)Y(5-1)+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$
$-\delta(2-2)Y(5-2)+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)$
$+\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)-\delta(3-2)Y(5-3)+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)$
$+\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)-\delta(4-2)Y(5-4)+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)$
$+\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)-\delta(5-2)Y(5-5)=0$

$25Y(5)-Y(3)=0$

$Y(5)=0$

$k=6;\ \delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$
$-\delta(0-2)Y(6-0)+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$
$-\delta(1-2)Y(6-1)+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)$
$+\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)-\delta(2-2)Y(6-2)+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)$
$+\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)-\delta(3-2)Y(6-3)+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)$
$+\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)-\delta(4-2)Y(6-4)+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)$
$+\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)-\delta(5-2)Y(6-5)$
$+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$
$-\delta(6-2)Y(6-6)=0$

$36Y(6)-Y(4)=0$

$Y(6)=\frac{1}{2304}$

$$k=7;\ \delta(0-2)(7-0+1)(7-0+2)Y(7-0+2)+\delta(0-1)(7-0+1)Y(7-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(7-0)+\delta(1-2)(7-1+1)(7-1+2)Y(7-1+2)+\delta(1-1)(7-1+1)Y(7-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(7-1)+\delta(2-2)(7-2+1)(7-2+2)Y(7-2+2)+\delta(2-1)(7-2+1)Y(7-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(7-2)+\delta(3-2)(7-3+1)(7-3+2)Y(7-3+2)+\delta(3-1)(7-3+1)Y(7-3+1)$$
$$-\delta(3-2)Y(7-3)+\delta(4-2)(7-4+1)(7-4+2)Y(7-4+2)+\delta(4-1)(7-4+1)Y(7-4+1)$$
$$-\delta(4-2)Y(7-4)+\delta(5-2)(7-5+1)(7-5+2)Y(7-5+2)+\delta(5-1)(7-5+1)Y(7-5+1)$$
$$-\delta(5-2)Y(7-5)+\delta(6-2)(7-6+1)(7-6+2)Y(7-6+2)+\delta(6-1)(7-6+1)Y(7-6+1)$$
$$-\delta(6-2)Y(7-6)+\delta(7-2)(7-7+1)(7-7+2)Y(7-7+2)+\delta(7-1)(7-7+1)Y(7-7+1)$$
$$-\delta(7-2)Y(7-7)=0$$
$$49Y(7)-Y(5)=0$$
$$Y(7)=0$$
$$k=8;\ \delta(0-2)(8-0+1)(8-0+2)Y(8-0+2)+\delta(0-1)(8-0+1)Y(8-0+1)$$
$$-\delta(0-2)Y(8-0)+\delta(1-2)(8-1+1)(8-1+2)Y(8-1+2)+\delta(1-1)(8-1+1)Y(8-1+1)$$
$$-\delta(1-2)Y(8-1)+\delta(2-2)(8-2+1)(8-2+2)Y(8-2+2)+\delta(2-1)(8-2+1)Y(8-2+1)$$
$$-\delta(2-2)Y(8-2)+\delta(3-2)(8-3+1)(8-3+2)Y(8-3+2)+\delta(3-1)(8-3+1)Y(8-3+1)$$
$$-\delta(3-2)Y(8-3)+\delta(4-2)(8-4+1)(8-4+2)Y(8-4+2)+\delta(4-1)(8-4+1)Y(8-4+1)$$
$$-\delta(4-2)Y(8-4)+\delta(5-2)(8-5+1)(8-5+2)Y(8-5+2)+\delta(5-1)(8-5+1)Y(8-5+1)$$
$$-\delta(5-2)Y(8-5)+\delta(6-2)(8-6+1)(8-6+2)Y(8-6+2)+\delta(6-1)(8-6+1)Y(8-6+1)$$
$$-\delta(6-2)Y(8-6)+\delta(7-2)(8-7+1)(8-7+2)Y(8-7+2)+\delta(7-1)(8-7+1)Y(8-7+1)$$
$$-\delta(7-2)Y(8-7)+\delta(8-2)(8-8+1)(8-8+2)Y(8-8+2)+\delta(8-1)(8-8+1)Y(8-8+1)$$
$$-\delta(8-2)Y(8-8)$$
$$64Y(8)-Y(6)=0$$
$$Y(8)=\frac{1}{147456}$$
แทนค่าไปเรื่อยๆ จะได้
$$Y(0)=1, Y(1)=0, Y(2)=\frac{1}{4}, Y(3)=0, Y(4)=\frac{1}{64}, Y(5)=0, Y(6)=\frac{1}{2304}, Y(7)=0, Y(8)=\frac{1}{147456}$$
นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$y(x)=\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^4}+\frac{x^5}{2^7\cdot 3}+\frac{x^7}{2^{11}\cdot 3^2}+\frac{x^9}{2^{15}\cdot 5\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{25}}{2^{45}\cdot 13\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}} \quad (4.43)$$

ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon=\left|I_1(x)-y(x)\right|$

เมื่อ ε คือ ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Absolute Error)

$I_1(x)$ คือ ค่าจริงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

$y(x)$ คือ ค่าประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

ดังนั้น $\varepsilon = \left|\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{384}+\frac{x^7}{18432}+\frac{x^9}{1474560}+\ldots+\frac{x^{25}}{2^{25}\cdot 12!\cdot 13!}\right)-\right.$

$$\left.\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^4}+\frac{x^5}{2^7\cdot 3}+\frac{x^7}{2^{11}\cdot 3^2}+\frac{x^9}{2^{15}\cdot 5\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^{25}}{2^{45}\cdot 13\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}}\right)\right|$$

$$=0$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีค่าเท่ากันกับผลเฉลยแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 4.10 สมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ชนิดที่หนึ่งอันดับ α

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \tag{4.44}$$

จากสมการที่ (4.44) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)-\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)$$

$$-2\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)+\alpha(\alpha+1)Y(k)=0 \tag{4.45}$$

จัดรูปสมการที่ (4.46) จะได้

$$\alpha(\alpha+1)Y(k)=\sum_{r=0}^{k}\left[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)-2\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)\right]$$

$$-(k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{4.46}$$

เมื่อแทน $k=0,1,2,3,4,5,6,\ldots$ ในสมการที่ (4.46) จะได้

$k=0$; $\alpha(\alpha+1)Y(0)=\delta(0-2)(0-0+1)(0-0+2)Y(0-0+2)+2\,\delta(0-1)(0-0+1)Y(0-0+1)$

$-(0+1)(0+2)Y(0+2)=-2Y(2)$

$$Y(2)=-\frac{\alpha(\alpha+1)Y(0)}{2}$$

$k=1$; $\alpha(\alpha+1)Y(1)=\delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2)+2\,\delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$

$+\delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2)+2\,\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1)-(1+1)(1+2)Y(1+2)$

$=2Y(1)-6Y(3)$

$$Y(3)=\frac{\left(2-\alpha(\alpha+1)\right)Y(1)}{6}$$

$k=2$; $\alpha(\alpha+1)Y(2)=\delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2)+2\,\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$

$+\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2)+2\,\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$

$+\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)+2\,\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)$

$-(2+1)(2+2)Y(2+2)$

$=6Y(2)-12Y(4)$

$$Y(4)=\frac{\left(6-\alpha(\alpha+1)\right)Y(2)}{12}$$

$$k=3\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(3)=\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+2\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$$
$$+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+2\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$$
$$+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+2\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$$
$$+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+2\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$$
$$-(3+1)(3+2)Y(3+2)=12Y(3)-20Y(5)$$
$$Y(5)=\frac{\left(12-\alpha(\alpha+1)\right)Y(3)}{20}$$

$$k=3\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(3)=\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+2\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$$
$$+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+2\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$$
$$+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+2\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$$
$$+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+2\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$$
$$-(3+1)(3+2)Y(3+2)=12Y(3)-20Y(5)$$
$$Y(5)=\frac{\left(12-\alpha(\alpha+1)\right)Y(3)}{20}$$

$$k=4\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(4)=\delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+2\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$$
$$+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+2\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$$
$$+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+2\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$$
$$+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+2\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$$
$$+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+2\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$$
$$-(4+1)(4+2)Y(4+2)=16Y(4)-30Y(6)$$
$$Y(6)=\frac{\left(16-\alpha(\alpha+1)\right)Y(4)}{30}$$
$$k=5\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(5)=\delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+2\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$$
$$+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+2\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$$
$$+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+2\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$$
$$+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+2\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$$
$$+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+2\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$$
$$+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+2\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$$
$$-(5+1)(5+2)Y(5+2)=30Y(5)-42Y(7)$$
$$Y(7)=\frac{\left(30-\alpha(\alpha+1)\right)Y(5)}{42}$$

$k=6\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(6)=\delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+2\,\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$
$+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+2\,\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$
$+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+2\,\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$
$+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+2\,\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$
$+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+2\,\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$
$+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+2\,\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$
$+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+2\,\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$
$-(6+1)(6+2)Y(6+2)=42Y(6)-56Y(8)$

$$Y(8)=\frac{\big(42-\alpha(\alpha+1)\big)Y(6)}{56}$$

ดังนั้น $$Y(k)=\frac{-\alpha\big(\alpha+1\big)Y(k-2)}{2}\quad ,k=2,3,4,5,\ldots \tag{4.47}$$

ดังนั้น เมื่อนำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณในรูปทั่วไป คือ

$y(x)=Y(0)+Y(1)x-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)Y(k-2)}{2}x^k$ โดยที่ $Y(0)$ และ $Y(1)$ ได้มาจากเงื่อนไขขอบ (4.48)

ตัวอย่างที่ 4.11 หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ชนิดที่หนึ่ง

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \tag{4.49}$$

เงื่อนไขขอบเขต คือ $y(0)=1, y(1)=0$ (4.50)

จากสมการที่ (4.49) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)-\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)$$

$$-2\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)+\alpha(\alpha+1)Y(k)=0 \tag{4.51}$$

จัดรูปสมการที่ (4.51) จะได้

$$\alpha(\alpha+1)Y(k)=\sum_{r=0}^{k}\left[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)-2\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)\right]$$

$$-(k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{4.52}$$

เมื่อแทน $k=0,1,2,3,4,5,6,\ldots$ ในสมการที่ (4.52) จะได้

$k=0\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(0)=\delta(0-2)(0-0+1)(0-0+2)Y(0-0+2)+2\,\delta(0-1)(0-0+1)Y(0-0+1)$
$-(0+1)(0+2)Y(0+2)=-2Y(2)$

$$Y(2)=-\frac{\alpha(\alpha+1)Y(0)}{2}$$

$k=1\,;\ \alpha(\alpha+1)Y(1)=\delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2)+2\,\delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1)$
$+\delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2)+2\,\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1)-(1+1)(1+2)Y(1+2)$
$=2Y(1)-6Y(3)$

$$Y(3)=\frac{\left(2-\alpha(\alpha+1)\right)Y(1)}{6}$$

$k=2\,;\ \alpha(\alpha+1)Y(2)=\delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2)+2\,\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1)$
$+\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2)+2\,\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1)$
$+\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2)+2\,\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1)$
$-(2+1)(2+2)Y(2+2)$
$=6Y(2)-12Y(4)$

$$Y(4)=\frac{\left(6-\alpha(\alpha+1)\right)Y(2)}{12}$$

$k=3\,;\ \alpha(\alpha+1)Y(3)=\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+2\,\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$
$+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+2\,\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$
$+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+2\,\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$
$+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+2\,\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$
$-(3+1)(3+2)Y(3+2)=12Y(3)-20Y(5)$

$$Y(5)=\frac{\left(12-\alpha(\alpha+1)\right)Y(3)}{20}$$

$k=3\,;\ \alpha(\alpha+1)Y(3)=\delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2)+2\,\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1)$
$+\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2)+2\,\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1)$
$+\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2)+2\,\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1)$
$+\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2)+2\,\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1)$
$-(3+1)(3+2)Y(3+2)=12Y(3)-20Y(5)$

$$Y(5)=\frac{\left(12-\alpha(\alpha+1)\right)Y(3)}{20}$$

$k=4\,;\ \alpha(\alpha+1)Y(4)=\delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+2\,\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)$
$+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+2\,\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)$
$+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+2\,\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)$
$+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+2\,\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)$
$+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+2\,\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)$
$-(4+1)(4+2)Y(4+2)=16Y(4)-30Y(6)$

$$Y(6)=\frac{\left(16-\alpha(\alpha+1)\right)Y(4)}{30}$$

$k=5\,;\ \alpha(\alpha+1)Y(5)=\delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+2\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)$
$+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+2\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)$
$+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+2\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)$
$+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+2\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)$
$+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+2\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)$
$+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+2\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)$
$-(5+1)(5+2)Y(5+2)=30Y(5)-42Y(7)$

$$Y(7)=\frac{\left(30-\alpha(\alpha+1)\right)Y(5)}{42}$$

$k=6\,;\ \alpha(\alpha+1)Y(6)=\delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+2\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)$
$+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+2\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)$
$+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+2\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)$
$+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+2\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)$
$+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+2\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)$
$+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+2\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)$
$+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+2\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)$
$-(6+1)(6+2)Y(6+2)=42Y(6)-56Y(8)$

$$Y(8)=\frac{\left(42-\alpha(\alpha+1)\right)Y(6)}{56}$$

แทนค่าไปเรื่อยๆ จะได้

$$Y(2)=-\frac{\alpha(\alpha+1)Y(0)}{2},Y(3)=\frac{\left(2-\alpha(\alpha+1)\right)Y(1)}{6},Y(4)=\frac{\left(6-\alpha(\alpha+1)\right)Y(2)}{12},$$
$$Y(5)=\frac{\left(12-\alpha(\alpha+1)\right)Y(3)}{20},Y(6)=\frac{\left(16-\alpha(\alpha+1)\right)Y(4)}{30},Y(7)=\frac{\left(30-\alpha(\alpha+1)\right)Y(5)}{42},$$
$$Y(8)=\frac{\left(42-\alpha(\alpha+1)\right)Y(6)}{56},\dots$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$y(x)=1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2+\frac{\left(\alpha(\alpha+1)\right)^2-6\alpha(\alpha+1)}{24}x^4-\frac{\left(16-\alpha(\alpha+1)\right)\left(\left(\alpha(\alpha+1)\right)^2-6\alpha(\alpha+1)\right)}{720}x^6 \qquad (4.53)$$

เมื่อแทนค่า $\alpha=0,2,4$ จะเห็นได้ว่าสมการที่(4.53) อยู่ในรูปเดียวกับสมการที่(2.49)
ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์อยู่ในรูปเดียวกับผลเฉลยแม่นตรงและเราจะแสดงด้วยกราฟ ดังรูปที่ 4.2

ตัวอย่างที่ 4.12 หาผลเฉลยที่สองของสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \qquad (4.54)$$

เงื่อนไขขอบ คือ $y(0)=0, y(1)=1$ (4.55)

จากสมการที่ (4.55) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - \sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)$$

$$-2\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) + \alpha(\alpha+1)Y(k) = 0 \qquad (4.56)$$

จัดรูปสมการที่ (4.56) จะได้

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha+1)Y(k) &= \sum_{r=0}^{k}\left[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) - 2\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)\right] \\ &\quad -(k+1)(k+2)Y(k+2) \qquad (4.57)\end{aligned}$$

เมื่อแทน $k = 0,1,2,3,4,5,6,\ldots$ ในสมการที่ (4.57) จะได้

$$\begin{aligned}k=0\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(0) &= \delta(0-2)(0-0+1)(0-0+2)Y(0-0+2) + 2\delta(0-1)(0-0+1)Y(0-0+1) \\ &\quad -(0+1)(0+2)Y(0+2) \\ &= -2Y(2) \\ Y(2) &= -\frac{\alpha(\alpha+1)Y(0)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k=1\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(1) &= \delta(0-2)(1-0+1)(1-0+2)Y(1-0+2) + 2\delta(0-1)(1-0+1)Y(1-0+1) \\ &\quad +\delta(1-2)(1-1+1)(1-1+2)Y(1-1+2) + 2\delta(1-1)(1-1+1)Y(1-1+1) \\ &\quad -(1+1)(1+2)Y(1+2) \\ &= 2Y(1) - 6Y(3) \\ Y(3) &= \frac{\left(2-\alpha(\alpha+1)\right)Y(1)}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k=2\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(2) &= \delta(0-2)(2-0+1)(2-0+2)Y(2-0+2) + 2\delta(0-1)(2-0+1)Y(2-0+1) \\ &\quad +\delta(1-2)(2-1+1)(2-1+2)Y(2-1+2) + 2\delta(1-1)(2-1+1)Y(2-1+1) \\ &\quad +\delta(2-2)(2-2+1)(2-2+2)Y(2-2+2) + 2\delta(2-1)(2-2+1)Y(2-2+1) \\ &\quad -(2+1)(2+2)Y(2+2) \\ &= 6Y(2) - 12Y(4) \\ Y(4) &= \frac{\left(6-\alpha(\alpha+1)\right)Y(2)}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k=3\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(3) &= \delta(0-2)(3-0+1)(3-0+2)Y(3-0+2) + 2\delta(0-1)(3-0+1)Y(3-0+1) \\ &\quad +\delta(1-2)(3-1+1)(3-1+2)Y(3-1+2) + 2\delta(1-1)(3-1+1)Y(3-1+1) \\ &\quad +\delta(2-2)(3-2+1)(3-2+2)Y(3-2+2) + 2\delta(2-1)(3-2+1)Y(3-2+1) \\ &\quad +\delta(3-2)(3-3+1)(3-3+2)Y(3-3+2) + 2\delta(3-1)(3-3+1)Y(3-3+1) \\ &\quad -(3+1)(3+2)Y(3+2) \\ &= 12Y(3) - 20Y(5) \\ Y(5) &= \frac{\left(12-\alpha(\alpha+1)\right)Y(3)}{20}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k=4\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(4) &= \delta(0-2)(4-0+1)(4-0+2)Y(4-0+2)+2\delta(0-1)(4-0+1)Y(4-0+1)\\
&\quad+\delta(1-2)(4-1+1)(4-1+2)Y(4-1+2)+2\delta(1-1)(4-1+1)Y(4-1+1)\\
&\quad+\delta(2-2)(4-2+1)(4-2+2)Y(4-2+2)+2\delta(2-1)(4-2+1)Y(4-2+1)\\
&\quad+\delta(3-2)(4-3+1)(4-3+2)Y(4-3+2)+2\delta(3-1)(4-3+1)Y(4-3+1)\\
&\quad+\delta(4-2)(4-4+1)(4-4+2)Y(4-4+2)+2\delta(4-1)(4-4+1)Y(4-4+1)\\
&\quad-(4+1)(4+2)Y(4+2)\\
&= 16Y(4)-30Y(6)\\
Y(6) &= \frac{\big(16-\alpha(\alpha+1)\big)Y(4)}{30}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k=5\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(5) &= \delta(0-2)(5-0+1)(5-0+2)Y(5-0+2)+2\delta(0-1)(5-0+1)Y(5-0+1)\\
&\quad+\delta(1-2)(5-1+1)(5-1+2)Y(5-1+2)+2\delta(1-1)(5-1+1)Y(5-1+1)\\
&\quad+\delta(2-2)(5-2+1)(5-2+2)Y(5-2+2)+2\delta(2-1)(5-2+1)Y(5-2+1)\\
&\quad+\delta(3-2)(5-3+1)(5-3+2)Y(5-3+2)+2\delta(3-1)(5-3+1)Y(5-3+1)\\
&\quad+\delta(4-2)(5-4+1)(5-4+2)Y(5-4+2)+2\delta(4-1)(5-4+1)Y(5-4+1)\\
&\quad+\delta(5-2)(5-5+1)(5-5+2)Y(5-5+2)+2\delta(5-1)(5-5+1)Y(5-5+1)\\
&\quad-(5+1)(5+2)Y(5+2)\\
&= 30Y(5)-42Y(7)\\
Y(7) &= \frac{\big(30-\alpha(\alpha+1)\big)Y(5)}{42}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k=6\ ;\ \alpha(\alpha+1)Y(6) &= \delta(0-2)(6-0+1)(6-0+2)Y(6-0+2)+2\delta(0-1)(6-0+1)Y(6-0+1)\\
&\quad+\delta(1-2)(6-1+1)(6-1+2)Y(6-1+2)+2\delta(1-1)(6-1+1)Y(6-1+1)\\
&\quad+\delta(2-2)(6-2+1)(6-2+2)Y(6-2+2)+2\delta(2-1)(6-2+1)Y(6-2+1)\\
&\quad+\delta(3-2)(6-3+1)(6-3+2)Y(6-3+2)+2\delta(3-1)(6-3+1)Y(6-3+1)\\
&\quad+\delta(4-2)(6-4+1)(6-4+2)Y(6-4+2)+2\delta(4-1)(6-4+1)Y(6-4+1)\\
&\quad+\delta(5-2)(6-5+1)(6-5+2)Y(6-5+2)+2\delta(5-1)(6-5+1)Y(6-5+1)\\
&\quad+\delta(6-2)(6-6+1)(6-6+2)Y(6-6+2)+2\delta(6-1)(6-6+1)Y(6-6+1)\\
&\quad-(6+1)(6+2)Y(6+2)\\
&= 42Y(6)-56Y(8)\\
Y(8) &= \frac{\big(42-\alpha(\alpha+1)\big)Y(6)}{56}
\end{aligned}
$$

แทนค่าไปเรื่อยๆ จะได้

$$
Y(2)=-\frac{\alpha(\alpha+1)Y(0)}{2},Y(3)=\frac{\big(2-\alpha(\alpha+1)\big)Y(1)}{6},Y(4)=\frac{\big(6-\alpha(\alpha+1)\big)Y(2)}{12},
$$

$$
Y(5)=\frac{\big(12-\alpha(\alpha+1)\big)Y(3)}{20},Y(6)=\frac{\big(16-\alpha(\alpha+1)\big)Y(4)}{30},Y(7)=\frac{\big(30-\alpha(\alpha+1)\big)Y(5)}{42},
$$

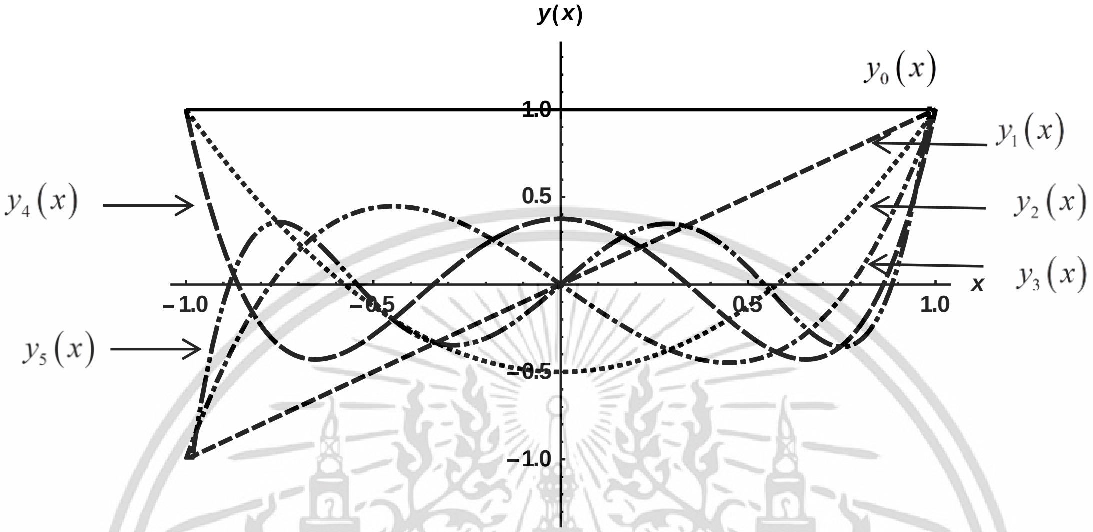
$$
Y(8)=\frac{\big(42-\alpha(\alpha+1)\big)Y(6)}{56},\ldots
$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (2.53) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ

$$
y(x)=x-\frac{\big(2-\alpha(\alpha+1)\big)}{6}x^3+\frac{\big(2-\alpha(\alpha+1)\big)\big(12-\alpha(\alpha+1)\big)}{120}x^5
$$

$$-\frac{\left(2-\alpha(\alpha+1)\right)\left(12-\alpha(\alpha+1)\right)\left(30-\alpha(\alpha+1)\right)}{5040}x^7 \tag{4.58}$$

เมื่อแทนค่า $\alpha = 1,3,5$ จะเห็นได้ว่าสมการที่(4.58) อยู่ในรูปเดียวกับสมการที่(2.50)
ดังนั้น สรุปได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณที่หาได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์อยู่ในรูปเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง
และเราจะแสดงด้วยกราฟ ดังรูป



รูปที่ 4.2 กราฟของพหุนามเลอจองด์โดยที่ $\alpha = 0,1,2,3,4$ และ 5
(Legendre polynomial $\alpha = 0,1,2,3,4$ and 5)

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในหนึ่งมิติ ที่ได้แนวคิดมาจากอนุกรมเทย์เลอร์เพื่อนำมาหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลและสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ที่มีเงื่อนไขขอบ ทั้งสมการชนิดที่ 1 และสมการชนิดที่ 2 ของทั้งสองสมการดังกล่าว

โดยบทที่ 2 ได้กล่าวถึงบทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานของอนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ อนุกรมแมคลอลิน สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซล สมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์และวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ในบทที่ 3 พิสูจน์ทฤษฎีบทเพิ่มอีก 3 ทฤษฎีบทที่จะนำมาใช้แก้สมการ และอธิบายขั้นตอนในการใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการหาผลเฉลย ในบทที่ 4 ได้ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลและสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ และยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง โดยการหาค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์และใช้กราฟในการเปรียบเทียบซึ่งมีทั้งหมด 6 ตัวอย่าง ดังนี้

ตัวอย่างที่	ชื่อสมการ	เงื่อนไขขอบ
4.1	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ ν $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$	-
4.2	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 0 $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$	$y(0) = 1, y(1) = 0$
4.3	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 1 $x^2y'' + xy' + x^2y - y = 0$	$y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{2}$
4.4	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 2 $x^2y'' + xy' + x^2y - y = 0$	$y(1) = 0, y(2) = \frac{1}{8}$
4.5	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 3 $x^2y'' + xy' + x^2y - y = 0$	$y(2) = 0, y(3) = 0$
4.6	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ $\frac{1}{2}$ $x^2y'' + xy' + x^2y - y = 0$	$y(0) = 0, y(1) = 1$
4.7	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับ ν $x^2y'' + xy' - x^2y = 0$	-
4.8	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับ 0 $x^2y'' + xy' - x^2y = 0$	$y(0) = 1, y(1) = 0$
4.9	สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับ 1 $x^2y'' + xy' - x^2y - y = 0$	$y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{2}$

4.10	สมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์อันดับ α $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$	-
4.11	หาผลเฉลยที่หนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$	$y(0)=1, y(1)=0$
4.12	หาผลเฉลยที่สองของสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$	$y(0)=0, y(1)=1$

จากตัวอย่างที่ 4.1,4.7 และ 4.10 จะได้ผลเฉลยโดยประมาณรูปทั่วไป สำหรับสมการเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ ν สมการเบสเซลดัดแปรชนิดที่หนึ่งอันดับ ν และสมการเลอจองด์อันดับ α ตามลำดับ

จากตัวอย่างที่ 4.2-4.5 จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์เช่นเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง ตัวอย่างที่ 4.6 จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 4.11 จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูปเดียวกับพหุนามเลอจองด์อันดับ α เมื่อ $\alpha=0,2,4$ และอยู่ในรูปเดียวกับฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่2 เมื่อ $\alpha=1,3,5$

ตัวอย่างที่ 4.12 จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูปเดียวกับพหุนามเลอจองด์อันดับ α เมื่อ $\alpha=1,3,5$ และอยู่ในรูปเดียวกับฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่2 เมื่อ $\alpha=0,2,4$

เราพบว่าวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้ เป็นวิธีที่ง่าย และได้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องค่อนข้างสูง โดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของสมการเบสเซลที่ได้จากวิธีโฟรเบนิอุสและสมการเลอจองด์ที่ได้จากวิธีอนุกรมกำลัง ตามลำดับ

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ของสมการเบสเซลมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรงกรณีที่อันดับเป็นจำนวนเต็ม และอาจจะได้ผลเฉลยโดยประมาณใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง กรณีที่อันดับเป็นจำนวนตรรกยะ

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาที่เราได้ดำเนินการแล้วนั้น เราพอสรุปปัญหาที่เกิดขึ้นและข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษาต่อในงานนี้ ดังต่อไปนี้

1. วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นอกจากจะใช้กับปัญหาในหนึ่งมิติ ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาใน 2 มิติได้ด้วย
2. เนื่องจากนิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่เราศึกษาจะพิจารณากรณีที่ $x_0=0$ เท่านั้น แต่ในบางปัญหาอาจจะต้องใช้วิธีนี้ในกรณีที่ $x_0 \neq 0$ ด้วย
3. เนื่องจากสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์ในงานวิจัยนี้ศึกษาบางอันดับของสมการเบสเซลเท่านั้น เราสามารถศึกษาอันดับอื่นๆ เพิ่มเติม

เอกสารอ้างอิง

[1] ดำรง ทิพย์โยธา 2538. **คณิตศาสตร์ขั้นสูง.** ภาควิชาคณิตศาสตร์ : คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[2] แสงสุรีย์ เสมอใจ 2556. **วิธีการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการอินทิโกรดิฟเฟอเรนเชียล.** ภาควิชาคณิตศาสตร์ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[3] X. Zhou. 1986, **Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits**, Huazhong University Press, Wuhan : China.

[4] C.L. Chen and Y.C. Liu. 1998, **Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems**, Appl. Math. Comput.95(1998)155164.

[5] M.J. Jang and C.L. Chen. 1997, **Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system Using a differential transformation technique**. Appl. Math. Comput. 88(1997)137–151.

[6] Montri Thongmoon and Sasitorn Pusjuso. 2010,**The numerical of differential transform method and the Laplace tramform method for system of differential equation**. Nonliear Analysis : Hybrid system 4(2010)425-431.

[7] F. Ayas. 2003, **On the two-dimensional differential transform method**. Appl. Math. Comput : 143 (2003) 361–374.

[8] F. Ayas. 2004, **Solutions of the system of differential equations by differential transform method**. Appl. Math. Comput : 147 (2004) 547–567.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การหาผลเฉลยประมาณค่าโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซล

The Approximated Solution of Differential Transform Method for Bessel Differential Equations

บุญญาพร เกิดผล, ใจปอง เกษมสุวรรณ์
Boonyaporn Kerdpol, Jaipong Kasemsuwan
สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาทฤษฎีวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อนำมาใช้หาผลเฉลยประมาณค่าของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับ ν และแสดงกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยแม่นตรงซึ่งหาจากวิธีของโฟรเบนิอุส ผลเฉลยจากวิธีนี้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังเดียวกับผลเฉลยแม่นตรง โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้มีขั้นตอนการคำนวณที่ง่ายกว่าและได้ผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้อง

คำสำคัญ : วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซล

Abstract

In this work, differential transform method (DTM) is developed theoretically to find the solutions of Bessel differential equations with order ν. The obtained results are compared graphically with the exact solutions calculated by the Frobenius method. Both numerical solution and exact solution are in the same power series forms. The DTM is easier than the Frobenius method and accurate.

Keywords: Differential transform method, Bessel differential equations

1. บทนำ

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์(DTM) เป็นวิธีเชิงตัวเลข(Numerical Method) สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้แนวคิดมาจากการกระจายฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทเลอร์(Taylor's series) และวิธีนี้จะให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ แรกเริ่มนั้นผู้คิดได้นำไปประยุกต์ในการแก้ไขปัญหาเริ่มต้น ทั้งที่เป็นเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า คือ Zhoun[1] ต่อมามีผู้นำไปประยุกต์วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการแก้ปัญหาค่าขอบ คือ C.L.Chan และ Y.C.Liu[2] จากนั้น Jang,Chen และ Lui[3] ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยวิธี DTM นี้สามารถให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องสูงหรือมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรง

ในงานวิจัยนี้ จะนำวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเบสเซลอันดับที่ 0 และสมการเบสเซลอันดับที่ 1 ซึ่งเป็นฟังก์ชันเบสเซลที่พบมากในการประยุกต์กับปัญหาทางฟิสิกส์ สมการคลื่น สนามของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า คลื่นในตัวกลาง เป็นต้น ทั้งนี้ในการหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการนี้จะใช้วิธีของโฟรเบนิอุสซึ่งค่อนข้างซับซ้อนและใช้การคำนวณที่ยุ่งยาก เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

2. ความรู้พื้นฐาน

นิยามที่ 1 [4] สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับที่ ν (Bessel's Differential Equation of order ν) คือ สมการซึ่งอยู่ในรูป

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1}$$

โดยที่ ν เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริง และ $\nu \geq 0$

นิยามที่ 2 [4] $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ เราสามารถเขียนแทน $f(x)$ ได้ด้วยอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) รอบจุด x_0 นั้นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2}$$

นิยามที่ 3 [5] การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform) ของ ฟังก์ชัน $c(x)$ กำหนดโดย

$$C(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=x_0} \tag{3}$$

เมื่อ $c(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และสามารถหาอนุพันธ์ได้ เรียก $c(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันเดิม(Original Function) และเรียก $C(k)$ ว่าเป็นฟังก์ชันการแปลง(Transform Function) ของ $c(x)$ หรือเรียกว่า ฟังก์ชันที(T-Function)

นิยามที่ 4 [6] การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์(Differential Inverse Transform) การแปลงเชิงผกผัน ของ $C(k)$ ในสมการที่ (3) กำหนดโดย

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(k)(x - x_0)^k \tag{4}$$

เมื่อ $x_0 = 0$

นิยามที่ 5 [7] การแปลงเชิงอนุพันธ์ใน 1 มิติของฟังก์ชัน $c(x)$

$$C(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c(x)\right]_{x=0} \tag{5}$$

เมื่อ $c(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และสามารถหาอนุพันธ์ได้ เรียก $c(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันเดิม(Original Function) และเรียก $C(k)$ ว่าเป็นฟังก์ชันการแปลง(Transform Function) ของ $c(x)$ หรือเรียกว่า ฟังก์ชันที(T-Function)

นิยามที่ 6 [3] การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์(Differential Inverse Transform) การแปลงเชิงผกผันของ $C(k)$ ในสมการที่ (5) กำหนดโดย

$$c(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C(k)(x)^{k} \tag{6}$$

จากนิยามที่ 5 และนิยามที่ 6 เราจะใช้พิสูจน์คุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงเชิงอนุพันธ์ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 [8] คุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงเชิงอนุพันธ์

ฟังก์ชันเดิม	ฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์
1. $c(x)=u(x)\pm v(x)$	$C(k)=U(k)\pm V(k)$
2. $c(x)=\alpha w(x)$	$C(k)=\alpha W(k)$
3. $c(x)=u(x)v(x)$	$C(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$
4. $c(x)=u(x)\frac{dy(x)}{dx}$	$C(k)=U(k)\otimes Y(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)U(r)Y(k-r+1)$
5. $c(x)=u(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}$	$C(k)=U(k)\otimes Y(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)(k-\mathrm{r}+2)U(r)Y(k-r+2)$
6. $c(x)=t^{j}\,;\,j=0,1,2,...$	$C(k)=\delta(k-j)=\begin{cases}1\,,k=j\\0\,,k\neq j\end{cases}$

<u>**หมายเหตุ**</u> จากการศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงเชิงอนุพันธ์ เราพบว่าทฤษฎีที่มีอยู่ไม่เพียงพอต่อการแก้ปัญหาสมการเบสเซลได้ งานวิจัยนี้ จึงนำความรู้พื้นฐานที่ได้จาก [9] มาปรับปรุงและพัฒนาทฤษฎีเพิ่มเติม ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้า $c(x)=x\frac{dy(x)}{dx}$ แล้ว $C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$ (7)

<u>พิสูจน์</u> จากนิยามที่ 3

$$C(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{dx^{k}}c(x)\right]_{x=0} \tag{8}$$

แทนค่า $c(x)=x\frac{dy(x)}{dx}$ ในสมการที่(8) จะได้

$$\begin{aligned}C(k)&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{dx^{k}}\frac{xdy(x)}{dx}\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{\mathrm{r}!(k-r)!}\left[\frac{d^{r}}{dx^{r}}x\frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}}\frac{dy(x)}{dx}\right]_{x=0}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{\mathrm{r}!}\left[\frac{d^{r}x}{dx^{r}}\right]\left[\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r+1}y(x)}{dx^{k-r+1}}\right]_{x=0}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{d^{r}x}{dx^{r}}=\begin{cases}r!\,;\; r=1\\0\;;\; r\neq 1\end{cases}$

ดังนั้น จะได้ว่า $C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)$

ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้า $c(x)=x^2\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$ แล้ว

$$C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \tag{9}$$

ทฤษฎีบทที่ 9 ถ้า $c(x)=x^2y(x)$ แล้ว $C(k)=\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)$ (10)

3. วิธีการดำเนินงาน

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับที่ ν รูปแบบทั่วไป $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ โดยที่ ν เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริง และ $\nu\geq 0$ และผลเฉลยอยู่ในรูป $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r},\ a_0\neq 0$ เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการเบสเซลซึ่งจะเขียนแทนด้วย $J_\nu(x)$ นั้นคือ

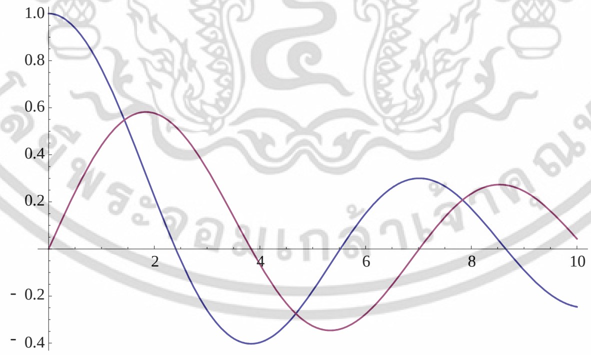
$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m+r}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \tag{11}$$

และเรียก $J_\nu(x)$ ว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ ν จากวิธีของโฟรเบนิอุสจะได้ผลเฉลยของสมการเบสเซลกรณีที่ $\nu=0$ และ $\nu=1$ ซึ่งถูกเรียกว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 0 และอันดับ 1 ตามลำดับ ดังนี้

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\ldots \tag{12}$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3 1!2!}+\frac{x^5}{2^5 2!3!}-\frac{x^7}{2^7 3!4!}+\ldots \tag{13}$$

และแสดงได้ด้วยกราฟดังรูป



รูปที่ 1 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง

โดยให้กราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟ $J_0(x)$ และกราฟสีแดงเป็นกราฟ $J_1(x)$

ในงานวิจัยนี้จะแสดงการหาผลเฉลยของสมการเบสเซลอันดับที่ 0 และ 1 ด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

พิจารณาสมการเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ ν

$$x^2y''+xy'+x^2y-\nu^2y=0 \tag{14}$$

จากสมการที่ (14) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ในสมการที่ (7),(9) และ (10) จะได้

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-2)Y(k-r)-\nu^2Y(k)=0 \quad (15)$$

จัดรูปสมการที่ (15) จะได้

$$\nu^2Y(k)=\sum_{r=0}^{k}[\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1)+\delta(r-2)Y(k-r)] \quad (16)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (16) จะพบว่า $\nu^2 \neq 0$ ดังนั้น จะได้สูตรทั่วไปที่ใช้หาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลังที่แทนผลเฉลยประมาณค่าของสมการ (14) กรณีที่ $\nu \neq 0$ ดังนี้

เมื่อแทน $k=1,2,3,4,5,6,7$ จะได้

$$\begin{aligned}
k&=1: \nu^2Y(1)=Y(1)\\
k&=2: \nu^2Y(2)=4Y(2)+Y(0)\\
k&=3: \nu^2Y(3)=9Y(3)+Y(1)\\
k&=4: \nu^2Y(2)=16Y(4)+Y(2)\\
k&=5: \nu^2Y(5)=25Y(5)+Y(3)\\
k&=6: \nu^2Y(6)=36Y(6)+Y(4)\\
k&=7: \nu^2Y(7)=49Y(7)+Y(5)
\end{aligned} \quad (17)$$

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 1

จากสมการที่(14)จะได้ $x^2y''+xy'+x^2y-y=0$ (18)

เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=0,\, y(1)=\frac{1}{2}$ (19)

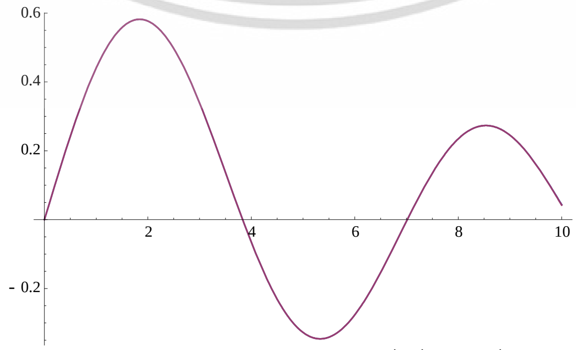
แทนค่า $\nu=1$ ลงในสมการที่ (17) จะได้ว่า

$$Y(1)=\frac{1}{2},\; Y(2)=0, Y(3)=-\frac{1}{2^4}, Y(4)=0,\; Y(5)=\frac{1}{2^7\cdot 3},\; Y(6)=0,\;\; Y(7)=-\frac{1}{2^{11}\cdot 3^2}$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (6) จะได้ผลเฉลยประมาณค่า เมื่อ $k=1,2,3,4,5,6,7,...,25$

$$y(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^4}+\frac{x^5}{2^7\cdot 3}-\frac{x^7}{2^{11}\cdot 3^2}+\frac{x^9}{2^{15}\cdot 5\cdot 3^2}-\ldots+\frac{x^{25}}{2^{45}\cdot 13\cdot 11^2\cdot 7^2\cdot 5^4\cdot 3^{10}}+\frac{x^{27}}{2^{37}\cdot 13^2\cdot 11^2\cdot 7^3\cdot 5^3\cdot 3^4} \quad (20)$$

กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยในสมการ(20) กับผลเฉลยแม่นตรงที่หาได้จากสมการ(13) จะเห็นได้ว่ามีค่าเท่ากัน ดังรูป



รูปที่ 2 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 1

โดยให้กราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟ $J_1(x)$ ในสมการ(13) และกราฟสีแดงเป็นกราฟ $y(x)$ ในสมการ(20)

เมื่อพิจารณาสมการที่ (16) แล้ว กรณีที่ $\nu = 0$ ไม่สามารถใช้สูตรทั่วไปตามสมการที่ (17) ในการหาสัมประสิทธิ์ของผลเฉลยประมาณค่าได้ เนื่องจากสมการที่ (17) จะใช้ได้ในกรณีที่ $\nu \neq 0$ เท่านั้น จึงต้องพิจารณาสูตรการแปลงเชิงอนุพันธ์เฉพาะสำหรับสมการเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 0 ซึ่งจะได้สูตรสำหรับหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลังที่แตกต่างจากสมการเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 1 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> พิจารณาฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 0

จากสมการที่(14)จะได้ $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$ (21)

เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1, y(1) = 0$ (22)

จากสมการที่ (21) ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ในสมการที่ (7),(9) และ (10) จะได้

$$\sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) + \sum_{r=0}^{k} \delta(r-2)Y(k-r) = 0 \quad (23)$$

จัดรูปสมการที่ (23) จะได้

$$\sum_{r=0}^{k} [\delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) + \delta(r-2)Y(k-r)] = 0 \quad (24)$$

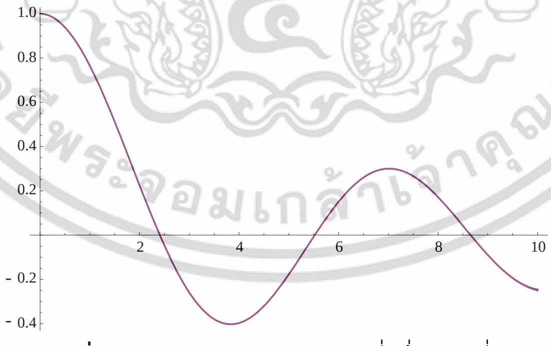
เมื่อแทน $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ จะได้

$$Y(1) = 0,\ Y(2) = -\frac{1}{2^2},\ Y(3) = 0,\ Y(4) = \frac{1}{2^6},\ Y(5) = 0,\ Y(6) = -\frac{1}{2^8 \cdot 3^2},\ Y(7) = 0$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ (6) จะได้ผลเฉลยประมาณค่า เมื่อ $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 24$

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^6} - \frac{x^6}{2^8 \cdot 3^2} + \frac{x^8}{2^{14} \cdot 3^2} - \ldots + \frac{x^{24}}{2^{44} \cdot 11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^4 \cdot 3^{10}} + \frac{x^{26}}{2^{36} \cdot 13^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^3 \cdot 3^4} \quad (25)$$

กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยในสมการ(25) กับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากสมการ(12) จะเห็นได้ว่ามีค่าเท่ากัน ดังรูป



รูปที่ 3 กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 0

โดยให้กราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟ $J_0(x)$ ในสมการ(12) และกราฟสีแดงเป็นกราฟ $y(x)$ ในสมการ(25)

4. บทสรุป

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) ถูกนำมาใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับที่ ν งานวิจัยนี้ได้แสดงตัวอย่างของการหาผลเฉลยอันดับที่ 0 และ 1 จะเห็นได้ว่าการใช้วิธีแปลงเชิงอนุพันธ์จะมีการคำนวณที่ทำได้โดยง่ายและได้ผลเฉลยที่เท่ากันกับการคำนวณด้วยวิธีโฟรเบนิอุส โดยจะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับปัญหาด้วยจึงจะสามารถใช้วิธี DTM ได้ ดังนั้นวิธีการนี้ จึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับที่ ν ได้เป็นอย่างดี

5. เอกสารอ้างอิง

[1] X. Zhou, Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986 (in Chinese)

[2] C.L. Chen, Y.C. Liu, Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, Appl. Math. Comput.95 (1998)155164.

[3] M.J. Jang, C.L. Chen, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique, Appl. Math. Comput.88 (1997) 137–151

[4] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรชัย สาตรวาหา. Differential Equations ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[5] F. Ayas, On the two-dimensional differential transform method, Appl. Math. Comput. 143 (2003) 361–374.

[6] F. Ayas, Solutions of the system of differential equations by differential transform method, Appl. Math. Comput. 147 (2004) 547–567.

[7] Y. Duan,R. Liu, Y. Jiang, Lattice Boltzmann model for the modified Burger's equation, Appl. Math. Comput. 202 (2008) 489-497.

[8] A.S.V. Ravi Kanth, K.Aruna, Solution of singular two-point boundary value problems using differential transformation method ,Physics Letters A 372 (2008) 4671-4673

[9] นางสาวแสงสุรีย์ เสมอใจ วิธีการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ อินทิโกรข-ดิฟเฟอเรนเชียล (A method for the numerical solution of the integro-differential equation) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ พ.ศ.2556

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นางสาวบุญญาพร เกิดผล
วัน เดือน ปีเกิด	26 ตุลาคม 2532
ที่อยู่ปัจจุบัน	36/2 หมู่ 4 ตำบล ยี่สาร อำเภอ อัมพวา จังหวัด สมุทรสงคราม 75110
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต ปีที่จบ 2555 สาขา คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ผลงานทางวิชาการ	1. นำเสนอผลงาน การประชุมวิชาการระดับชาติ”วิทยาศาสตร์วิจัย”ครั้งที่7 ชื่อบทความ “การหาผลเฉลยประมาณค่าโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซล”