

การวิเคราะห์พื้นผิวเฉพาะที่ด้วยค่าความโค้ง

ANALYSIS OF THE LOCAL OF SURFACE WITH A CURVATURE



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2555

KMITL-2012-SC-M-001-022

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# **ANALYSIS OF THE LOCAL OF SURFACE WITH A CURVATURE**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS  
FACULTY OF SCIENCE  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
2012  
KMITL-2012-SC-M-001-022**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



**COPYRIGHT 2012**

**FACULTY OF SCIENCE**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECNOLOGY LADKRABANG**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิทยาศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์พื้นผิวเฉพาะที่ด้วยค่าความโค้ง  
Analysis of the Local of Surface with a Curvature  
นักศึกษา นายวิศรุต คล้ายแจ่ม  
รหัสประจำตัว 52650704  
ปริญญา วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต  
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์  
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ภักดีณี ชิตสกุล  
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม -

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
ดร.ศุภระวารมณ งามเวชะ	
ผศ.ดร. พันธนี พงศ์สัมพันธ์	
ดร.บัญญัติ สร้อยแสง	
รศ.ภักดีณี ชิตสกุล	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ 22 พฤษภาคม พ.ศ. 2555 เวลา 9.00 - 12.00 น.  
สถานที่สอบ ณ ห้อง 210 ชั้น 2 อาคารจุฬารามวลัยลักษณ์ 1

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

  
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชณนี ชนะบริพัฒน์)  
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ 24 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 55

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์พื้นผิวเฉพาะที่ด้วยค่าความโค้ง

นักศึกษา

นายวิศรุต กล้ายแข็ง

รหัสประจำตัว

52650704

ปริญญา

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต

สาขาวิชา

คณิตศาสตร์ประยุกต์

พ.ศ.

2555

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล

### บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเพื่อนำมาใช้ในการอธิบายถึงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน และนำไปโปรแกรมสำเร็จรูปช่วยในการคำนวณ พบว่า เมื่อแทนสมการของทรงรีและทรงกลมด้วยสมการของเวกเตอร์ระบุทิศทาง จะสามารถอธิบายลักษณะของจุดบนพื้นผิวของรูปทรงได้ชัดเจนกว่าการใช้สมการในระบบพิกัดฉาก ผลที่ได้พบว่าในส่วนของรูปครึ่งบนและรูปครึ่งล่างมีลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกัน สำหรับทรงกระบอก ทรงกรวย ทรงพาราโบลายเชิงวงรีและทรงไฮเพอร์โบลายแบบชั้นเดียว มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าคงที่ นั่นคือลักษณะพื้นผิวเฉพาะที่ของแต่ละรูปทรงมีลักษณะเดียวกัน ในทุกๆจุด และในกรณีของทรงห้วงยางจะแทนด้วยสมการอิงตัวแปรเสริมซึ่งจะมีลักษณะพื้นผิวเฉพาะที่แตกต่างกันไป ณ แต่ละจุดที่พิจารณา

คำสำคัญ: ค่าความโค้งของเกาส์ ค่าความโค้งเฉลี่ย

**Thesis Title** Analysis of the local of surface with a curvature  
**Student** Witsarut Kraychang  
**Student ID** 52650704  
**Degree** Master of Science  
**Program** Mathematics  
**Year** 2012  
**Thesis Advisor** Associate Professor Pakkinee Chitsakul

### ABSTRACT

In this research, we study to the Gaussian curvature and Mean curvature used to describe the local shape of surface of revolution and compute both curvature with the mathematical programming. When we substitute the equation of Ellipsoid and Sphere by position vector, the top half and bottom half on this surface are different. For the case of cylinder, cone, elliptic parabolic, and hyperboloid of one sheet have a constant Gaussian curvature and Mean curvature. In case of torus we found that a shape of torus is difference depend on a point of interest.

**Keywords:** Gaussian curvature, Mean curvature

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เรื่อง การวิเคราะห์พื้นผิวเฉพาะที่ด้วยค่าความโค้ง สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือจากอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ภคคินี ชิตสกุล ที่ให้คำแนะนำ เป็นกำลังใจ ตลอดจนให้ความรู้และช่วยตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพนธ์จนทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ผลงานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัย (บางส่วน) จากศูนย์ความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา ประเทศไทย (C.E.M)

ผู้วิจัยขอขอบคุณท่านอาจารย์ ดร.สุภระวรรณ มะเวชะ ประธานกรรมการสอบที่ช่วยให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์อีกทั้งช่วยตรวจสอบในเรื่องภาษาและแนวคิดใหม่ๆในงานวิจัยเล่มนี้ด้วย

ขอขอบคุณท่านอาจารย์ ผศ.ดร.พันธินี พงศ์สัมพันธ์ กรรมการการสอบที่ที่ให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์อีกทั้งช่วยตรวจสอบในเรื่องภาษาและแนวคิดใหม่ๆในงานวิจัยเล่มนี้ด้วย

ขอขอบคุณท่านอาจารย์ ดร.บัญญัติ สร้อยแสง กรรมการภายนอกสถาบันที่ช่วยให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์อีกทั้งช่วยตรวจสอบในเรื่องภาษาและแนวคิดใหม่ๆในงานวิจัยเล่มนี้ด้วย

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดาและมารดาที่ช่วยเป็นกำลังใจและเป็นแรงบันดาลใจจนทำให้ผู้วิจัยสามารถทำงานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี รวมถึงนายฉัฐพล บุญนำ (พี่นัท) ที่ช่วยเป็นกำลังใจทั้งเป็นที่ปรึกษาคอยแนะนำและช่วยตรวจสอบเล่มวิทยานิพนธ์นี้ และขอขอบคุณนายอุคร บุญธรรม (พี่นก) นางชุตिकाญจน์ ดันยะสิทธิ์ (พี่เจน) นางสาวพชรา แก้วเจริญ (พี่กบ) ที่ช่วยสนับสนุนในการพิมพ์เอกสาร ทำเอกสารและสนับสนุนทางด้านเทคนิคคอมพิวเตอร์ และขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ที่ช่วยเหลืองานในด้านอื่นๆ ไว้ ณ ที่นี้ด้วย

วิศรุต กล้ายแจ้ง

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูปภาพ	VII
สารบัญตาราง	XI
<b>บทที่ 1 บทนำ</b>	
1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	5
1.3 ข้อยกเว้นและขอบเขตของงานวิจัย	5
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	6
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย	6
<b>บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง</b>	
2.1 ทฤษฎีบทพื้นฐาน	8
2.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับค่าความโค้งบนพื้นผิว	20
2.3 ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย	25
2.4 สัญลักษณ์ของคริสตอฟเฟิล	32
2.5 ทฤษฎีเกี่ยวกับค่าความโค้งของจีโอเดซิก	36
<b>บทที่ 3 การดำเนินการวิจัย</b>	
3.1 ขั้นตอนการค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย	41
3.2 ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของรูปทรงต่างๆ	41
3.2.1 ทรงกลม	42
3.2.2 ทรงรี	45
3.2.3 ทรงกรวย	50
3.2.4 ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี	52

## สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
3.2.5 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว	54
3.2.6 ทรงกระบอก	56
3.2.7 ทรงห่วย่าง	57
<b>บทที่ 4 ผลการวิจัย</b>	
4.1 การวิเคราะห์ลักษณะที่ของจุดบนพื้นผิวของรูปทรงต่างๆ	60
4.1.1 ทรงกลม	60
4.1.2 ทรงรี	60
4.1.3 ทรงกรวย	62
4.1.4 ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี	62
4.1.5 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว	63
4.1.6 ทรงกระบอก	63
4.1.7 ทรงห่วย่าง	63
4.2 ผลการวิเคราะห์ค่าความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ย ที่มีค่ามากน้อยที่แตกต่างกัน	66
4.2.1 ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี	66
4.2.2 ทรงกรวย	70
4.2.3 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว	72
4.2.4 ทรงรี	76
4.2.5 ทรงห่วย่าง	79
<b>บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ</b>	
5.1 สรุปผล	86
5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางของการพัฒนางานวิจัย	88
<b>เอกสารอ้างอิง</b>	94
<b>ภาคผนวก</b>	95
<b>ประวัติผู้เขียน</b>	

## สารบัญรูปภาพ

รูปที่	หน้า
1.1 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของเส้นสัมผัสในทิศทางที่แตกต่างกัน	1
1.2 ความโค้งบนพื้นผิว	2
1.3 ระนาบตัดกับพื้นผิวเกิดเป็นรอยตัด $C_v(\mathbf{p})$	3
1.4 ค่าความโค้งหลัก $\kappa_1, \kappa_2$	3
1.5 การจำแนกประเภทของพื้นผิวด้วยค่าความโค้งของเกาส์	4
2.1.1 แสดงพิกัด $(x_0, y_0)$ $(x_0 + a_1h, y_0 + a_2h)$ และเวกเตอร์ $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$	9
2.1.2 แสดงการหาความชันของจุด $\mathbf{p}$ และ $\mathbf{q}$	9
2.1.3 แสดงการหาความชันของเส้นโค้ง $C$ เมื่อจุด $\mathbf{q}$ เข้าใกล้จุด $\mathbf{p}$	10
2.1.4 แสดงการอธิบายของฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}$	15
2.1.5 แสดงการส่ง $E$ ด้วยฟังก์ชันการส่ง $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ ไปยัง $M$	16
2.1.6 ภาพแสดงการส่งของฟังก์ชัน	18
2.1.7 การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ	18
2.1.8 แสดงการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิว	19
2.1.9 แสดงการหาเวกเตอร์ $d\mathbf{x}$	19
2.5.1 ภาพฉายของเส้นโค้งในพื้นผิว $M$ ไปยังระนาบสัมผัส $A$	36
2.5.2 เวกเตอร์ $\beta''(s)$ สามารถเขียนในรูปผลบวกของเวกเตอร์ ส่วนประกอบทั้งสอง $\beta''(s)^T$ กับ $\beta''(s)^\perp$	37
2.5.3 ค่าความโค้งจีโอเดซิก และค่าความโค้งปรกติ	37
3.1 ทรงกลม	42
3.2 ทรงรี	45
3.3 ทรงกรวย	50
3.4 ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี	52
3.5 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว	54
3.6 ทรงกระบอก	56
3.7 ทรงห่วยยาง	57
3.8 แสดงทิศทางของมุม $u, v$ เป็นตัวแปรของทรงห่วยยาง และแสดงช่วงของการเปลี่ยนเครื่องหมายค่าความโค้ง	58

## สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.1 พาราโบลาเชิงวงรีที่มีค่า $a = b = 1$ และเส้นโค้งก่อกำเนิดที่ทำให้เกิด ทรงพาราโบลาเชิงวงรี	67
4.2 พาราโบลาเชิงทรงวงรี	68
4.3 เส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงพาราโบลาเชิงวงรี	69
4.4 รูปทรงกรวยและเส้นก่อกำเนิด (เส้นตรง) ที่ทำให้เกิดรูปทรงกรวย	71
4.5 รูปทรงกรวย	72
4.6 รูปทรงไฮเพอร์โบลาแบบขึ้นเดียวและเส้นโค้งก่อกำเนิดของ รูปทรงไฮเพอร์โบลาแบบขึ้นเดียว	73
4.7 รูปทรงไฮเพอร์โบลาแบบขึ้นเดียว	75
4.8 รูปทรงรีและส่วนของเส้นโค้งก่อกำเนิดรูปทรงรี	77
4.9 รูปทรงรี	78
4.10 รูปทรงห้วงยางและเส้นโค้งก่อกำเนิดของทรงห้วงยาง (วงกลม)	80
4.11 ทิศทางการหมุนรอบแกน $z$ ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางใน กรณี $\nu = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	80
4.12 ทิศทางการหมุนรอบแกน $z$ ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางใน กรณี $\nu = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	81
4.13 ทิศทางการหมุนรอบแกน $z$ ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางใน กรณี $\nu \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$	81
4.14 ทิศทางการหมุนรอบแกน $z$ ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางใน กรณี $\nu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	83
4.15 ทิศทางการหมุนรอบแกน $z$ ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางใน กรณี $\nu \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$	84

## สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.2.1 แสดงเครื่องหมายของค่าความโค้งแต่ละตำแหน่ง โดยพิกัดแรกคือเครื่องหมาย ค่าความโค้งของแก๊สและพิกัดหลังคือเครื่องหมายของค่าความโค้งเฉลี่ย	91
5.2.2 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็น โคม	91
5.2.3 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็น ถ้วย	91
5.2.4 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็น ประทุนอานม้า	92
5.2.5 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็น ประทุนหางแบบอานม้า	92
5.2.6 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็น ประทุน	92
5.2.7 กราฟของสมการ $z = \sin(x + y^2)$ บนช่วง $x \in [0, 4], y \in [0, 4]$ ที่สร้างโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica	93
5.2.8 กราฟของสมการ $z = \sin(x + y^2)$ บนช่วง $x \in [-4, 4], y \in [-2, 2]$ ที่สร้างโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica	93

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1 แสดงการจำแนกประเภทลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิว โดยใช้ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย	4
2 ตารางแสดงรูปแบบของสมการต่างๆที่ใช้ในงานวิจัย	5
3 ตารางกิจกรรมและเวลาของการทำวิทยานิพนธ์	7
4 แสดงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวรูปทรงห้วงยาง โดยพิจารณาจากเครื่องหมายค่าความโค้งทั้งสอง	65
5 สรุปผลลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน	86



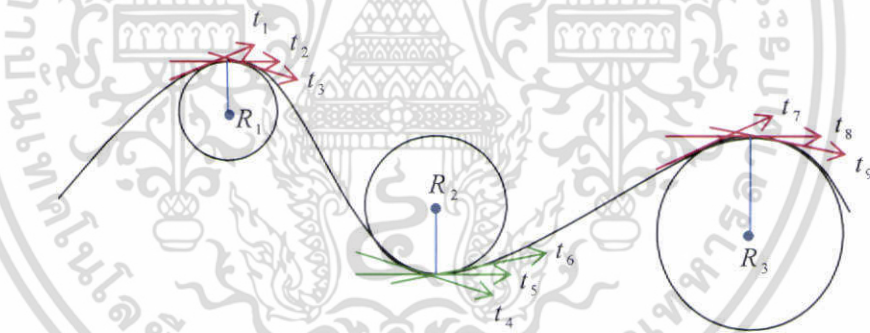
# บทที่ 1

## บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความสำคัญและที่มาของงานวิจัย รวมทั้งวัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบจำกัด และขอบเขตของงานวิจัย ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย และขั้นตอนการดำเนินการในงานวิจัย ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้อ่านและผู้สนใจที่จะนำไปประยุกต์ใช้หรือนำไปทำการวิจัยต่อไป

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

ในปัจจุบันเราก็คงเห็นเชิงอนุพันธ์เริ่มมีบทบาทสำคัญต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในหลายด้าน เช่น ด้านธรณีวิทยา โดยการอธิบายเกี่ยวกับพื้นผิวทางธรณีวิทยา ด้านการแพทย์ในเรื่องการผ่าตัดแผลเล็ก ด้านสถาปัตยกรรมในการออกแบบรูปทรง หรือแม้กระทั่งด้านวิศวกรรมในเรื่องการสร้างแบบจำลองหุ่นยนต์ การจดจำใบหน้าของคน



รูปที่ 1.1 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของเส้นสัมผัสในทิศทางที่แตกต่างกัน

ค่าความโค้ง (Curvature) เป็นหัวข้อหนึ่งที่น่าสนใจซึ่งมีความสำคัญในการอธิบายถึงลักษณะของพื้นผิว ในทางคณิตศาสตร์นั้น ค่าความโค้งของเส้นโค้งในระนาบ หมายถึง ค่าที่วัดการเบี่ยงเบนของเส้นโค้งเมื่อเปรียบเทียบกับเส้นตรง โดยพิจารณาจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง และในขณะเดียวกันเส้นโค้งมีทิศทางของการวางตัวสองทิศทาง โดยจากรูปที่ 1.1 เส้นสัมผัส  $t_1, t_2, t_3, t_7, t_8, t_9$  เป็นเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่มีทิศทางการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเข็มนาฬิกา ทำให้ค่าความโค้งจะมีค่าติดลบ และเส้นสัมผัส  $t_4, t_5, t_6$  เป็นเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่มีทิศทางการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

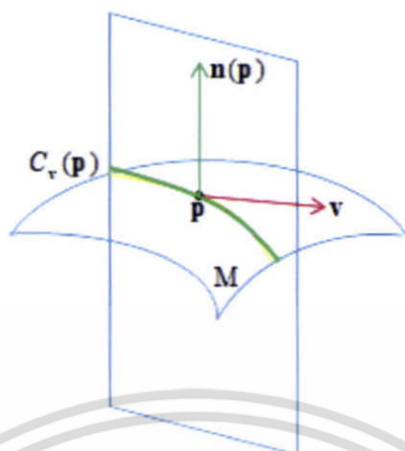
เปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเข็มนาฬิกาทำให้ค่าความโค้งที่ได้จะมีค่าเป็นบวก นอกจากนี้เป็นที่ทราบกันดีว่า เส้นตรงมีค่าความโค้งเป็นศูนย์และวงกลมที่มีรัศมี  $R$  จะมีค่าความโค้งเท่ากับ  $\frac{1}{R}$  ดังนั้นจะสังเกตเห็นได้ว่าวงกลมรัศมียิ่งมากค่าความโค้งจะยิ่งน้อย

การหาค่าความโค้งของพื้นผิว มีความยุ่งยากมากกว่าการหาค่าความโค้งของเส้นโค้งในปริภูมิ 3 มิติ เนื่องจาก ณ จุด  $p$  ใดๆ บนพื้นผิว  $M$  มีทิศทางที่แตกต่างกันมากมายจากจุด  $p$  ไปยังจุดอื่นๆ บนพื้นผิว และจากทิศทางที่แตกต่างกันนี้เอง ค่าความโค้งของพื้นผิวอาจมีค่าแตกต่างกัน ในการศึกษานี้จะหาจำนวนสองจำนวน  $\kappa_1, \kappa_2$  ณ ทุกจุด  $p$  ที่จะใช้อธิบายความโค้งของพื้นผิว ณ จุดที่สนใจ



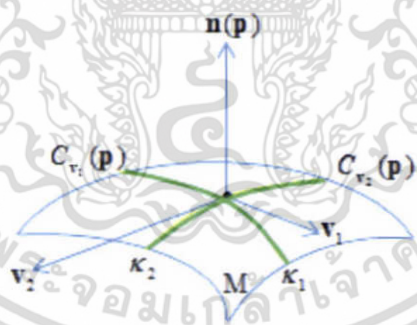
รูปที่ 1.2 ความโค้งบนพื้นผิว

ให้  $M$  เป็นพื้นผิว และให้  $p$  เป็นจุดหนึ่งในพื้นผิว  $M$  ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งใดๆ ที่อยู่ในพื้นผิวที่ผ่านจุด  $p$  ดังรูปที่ 1.2 ทุกๆเวกเตอร์สัมผัสกับเส้นโค้ง  $C$  ใน  $M$  ที่จุด  $p$  จะประกอบกันเป็นระนาบสัมผัส  $T_p(M)$  กำหนด  $v$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยแล้ว  $v \in T_p(M)$  จากระนาบสัมผัสให้  $n(p)$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากที่จุด  $p$  เลือกเวกเตอร์  $v$  ในหนึ่งทิศทางแล้ว  $n(p)$  และ  $v$  จะประกอบกันเป็นระนาบตั้งฉากกับพื้นผิว ( $\Pi_v(p)$ ) ที่ผ่านจุด  $p$  รอยตัดของระนาบตั้งฉาก ( $\Pi_v(p)$ ) กับพื้นผิว  $M$  เป็นเส้นโค้งในพื้นผิวที่เรียกว่าภาคตัดเชิงตั้งฉาก (Normal section) ในทิศทาง  $v$  แทนด้วย  $C_v(p)$  ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 ระนาบตัดกับพื้นผิวเกิดเป็นรอยตัด  $C_v(p)$

กำหนดให้เส้นโค้งภาคตัดเชิงตั้งฉาก  $C_v(p)$  ในทิศทาง  $v$ , มีค่าความโค้งของเส้นโค้งเป็น  $\kappa$ , เรียก  $\kappa$  ว่าค่าความโค้งปรกติของพื้นผิว  $M$  ณ จุด  $p$  ในทิศทาง  $v$ ; บนพื้นผิว  $M$  มี  $C_v(p)$  หลายเส้น แต่ละเส้นขึ้นอยู่กับทิศทางเวกเตอร์สัมผัส  $v$  นั่นคือ ณ จุด  $p$  มีค่าความโค้งปรกติหลายค่า เรียกค่า  $\kappa_1, \kappa_2$  เป็นค่าความโค้งปรกติที่มีค่ามากที่สุดและน้อยสุดตามลำดับ ณ จุด  $p$  ว่าค่าความโค้งหลัก



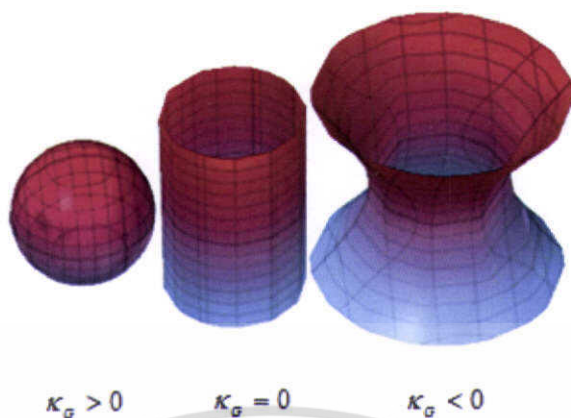
รูปที่ 1.4 ค่าความโค้งหลัก  $\kappa_1, \kappa_2$

จากค่าความโค้งหลักสามารถนำมาหาค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G$  และค่าความโค้งเฉลี่ย  $\kappa_M$  ได้โดย

$$\kappa_G = \kappa_1 \kappa_2 \text{ และ } \kappa_M = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$







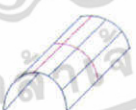

เนื่องจากค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) สามารถจำแนกประเภทของลักษณะเฉพาะของพื้นผิวได้สามลักษณะ ดังรูปที่ 1.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 1.5 การจำแนกประเภทของพื้นผิวด้วยค่าความโค้งของเกาส์

งานวิจัยของ Ian Mynatt (2007) [2] ได้นำค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยมาจำแนกประเภทของลักษณะพื้นผิวบริเวณเฉพาะที่โดยพิจารณาจากเครื่องหมายของค่าความโค้งทั้งสองดังตารางที่ 1

	$\kappa_G < 0$	$\kappa_G = 0$	$\kappa_G > 0$
$\kappa_M < 0$	 Synformal saddle	 Synformal	 dome
$\kappa_M = 0$	 Perfect saddle	 plane	
$\kappa_M > 0$	 Antiformal saddle	 antiformal	 basin

ตารางที่ 1 แสดงการจำแนกประเภทลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวโดยใช้ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย

เป็นที่น่าสนใจว่า พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนจะมีลักษณะพื้นผิวเฉพาะที่เป็นลักษณะใด ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาหาค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย และนำข้อสรุปของ Ian Mynatt ดังตาราง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ 1 มาใช้ในการอธิบายลักษณะของรูปทรงของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนว่ามีลักษณะเป็นแบบใด เพื่อเป็นความรู้นำไปสู่การอธิบายพื้นผิวที่ซับซ้อน และสมบัติเฉพาะที่ทำให้มีความชัดเจนมากยิ่งขึ้น

## 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาลักษณะเฉพาะของจุดและสมบัติต่างๆของค่าความโค้งบนพื้นผิวในปริภูมิ สามมิติ

1.2.2 เพื่อนำค่าความโค้งของเกาส์ และค่าความโค้งเฉลี่ย มาใช้ในอธิบายลักษณะเฉพาะที่บริเวณจุดของพื้นผิวที่เกิดจากหมุนและพื้นผิวใดๆ ใน สามมิติได้

1.2.3 เพื่อเผยแพร่องค์ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องค่าความโค้งในแบบต่างๆ เพื่อนำไปใช้ประยุกต์กับสาขาอื่นๆได้ เช่นการประยุกต์ทางธรณีวิทยา ด้านคอมพิวเตอร์ ด้านวิศวกรรม เป็นต้น

## 1.3 ข้อย้ำกัณฑ์และขอบเขตของงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาพื้นผิวที่เกิดจากหมุน โดยพิจารณาจากสมการของรูปทรงกลม, ทรงรี, ทรงกรวย, ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี, ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว, ทรงห่วย่าง และทรงกระบอก ดังตารางที่ 2

ทรงกลม	$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \pm(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}})$
ทรงรี	$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \pm(c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2)^{\frac{1}{2}})$
ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี	$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$
ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว	$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, (-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})$
ทรงกรวย	$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})$
ทรงกระบอก	$\mathbf{r}(u, v) = ((c + a \cos(v)) \cos(u), (c + a \cos(v)) \sin(u), a \sin(v))$
ทรงห่วย่าง	$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos(u), a \sin(u), v)$

ตารางที่ 2 ตารางแสดงรูปแบบของสมการต่างๆที่ใช้ในงานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถทำให้เข้าใจในลักษณะทางกายภาพของค่าความโค้งแบบต่างๆ บนพื้นผิวและสามารถนำไปใช้อธิบายลักษณะของพื้นผิวได้ละเอียดและชัดเจนมากขึ้น

1.4.2 สามารถเป็นสื่อในการเผยแพร่องค์ความรู้เพื่อสะดวกต่อการค้นคว้าความรู้ในเรื่องของค่าความโค้ง

1.4.3 สามารถนำไปใช้ประยุกต์กับสาขาอื่นและในการศึกษาในงานวิจัยที่สูงขึ้นได้

#### 1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

1.5.1 ค้นคว้าข้อมูลและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องค่าความโค้งในระนาบและพื้นผิว

1.5.2 ศึกษาและทำความเข้าใจถึงความหมายและที่มาของความโค้งและค่าความโค้งต่างๆ ทั้งในระนาบและบนพื้นผิว พร้อมทั้งหาที่มาและการพิสูจน์ของสูตรค่าความโค้งต่างๆ

1.5.3 คำนวณค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของแต่ละจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica ช่วยในการคำนวณ

1.5.4 นำผลที่ได้ไปวิเคราะห์และพิจารณาว่าแต่ละจุดบนพื้นผิวมีลักษณะเฉพาะที่เป็นลักษณะใด

1.5.5 สรุปผลที่ได้จากการวิเคราะห์

1.5.6 นำเสนอผลงานวิจัยในงานประชุมวิชาการ

1.5.7 วิเคราะห์ค่าความโค้งที่มีค่ามากน้อยที่แตกต่างกันมีผลต่อลักษณะเฉพาะที่ของพื้นผิวอย่างไรและนำค่าความโค้งที่ได้ศึกษามาประยุกต์อธิบายลักษณะเฉพาะที่บนพื้นผิวอื่น

1.5.8 วิเคราะห์และสรุปผล

1.5.9 จัดทำเล่มวิทยานิพนธ์

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินการ (เดือน)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
ค้นคว้าข้อมูลและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องค่าความโค้งในระนาบและพื้นผิว	↔												
ศึกษาและทำความเข้าใจถึงความหมายและที่มาของความโค้งและค่าความโค้งต่างๆ ทั้งในระนาบและบนพื้นผิว พร้อมทั้งหาที่มาและการพิสูจน์ของสูตรค่าความโค้งต่างๆ		↔											
คำนวณค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของแต่ละจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica ช่วยในการคำนวณ				↔									
นำผลที่ได้ไปวิเคราะห์และพิจารณาว่าแต่ละจุดบนพื้นผิวมีลักษณะเฉพาะที่เป็นลักษณะใด					↔								
สรุปผลที่ได้จากการวิเคราะห์						↔							
นำเสนอผลงานวิจัยในงานประชุมวิชาการ							↔						
วิเคราะห์ค่าความโค้งที่มีค่าน้อยที่แตกต่างกันมีผลต่อลักษณะเฉพาะที่ของพื้นผิวอย่างไรและนำค่าความโค้งที่ได้ศึกษามาประยุกต์อธิบายลักษณะเฉพาะที่บนพื้นผิวอื่น									↔				
วิเคราะห์และสรุปผล											↔		
จัดทำเล่มวิทยานิพนธ์												↔	

ตารางที่ 3 ตารางกิจกรรมและเวลาของการทำวิทยานิพนธ์

## บทที่ 2

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย เริ่มตั้งแต่ทฤษฎีบทพื้นฐานที่สำคัญ ได้แก่ ทฤษฎีบทของอนุพันธ์ระดับสองของเวกเตอร์ ตัวดำเนินการเชิงรูปทรง (Shape operator) นิยามของพื้นผิวปรกติและส่วนของพื้นผิวปรกติ รูปแบบมูลฐานที่หนึ่งของพื้นผิว (First fundamental form) รูปแบบมูลฐานที่สองของพื้นผิว (Second fundamental form) จนไปถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องการหาค่าความโค้ง ได้แก่ ค่าความโค้งปรกติ (Normal curvature  $\kappa_n$ ) ค่าความโค้งหลัก (Principal curvature  $\kappa_1, \kappa_2$ ) ค่าความโค้งของเกาส์ (Gaussian curvature  $\kappa_G$ ) ค่าความโค้งเฉลี่ย (Mean curvature  $\kappa_M$ ) และค่าความโค้งจีโอเดซิก (Geodesic curvature  $\kappa_g$ )

#### 2.1 ทฤษฎีบทพื้นฐาน

**นิยาม 2.1.1** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และให้จุด  $(x_0, y_0)$  อยู่บนโดเมนของ  $f$  อนุพันธ์ย่อยของ  $f$  เทียบกับ  $x$  ที่จุด  $(x_0, y_0)$  นิยามโดย

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

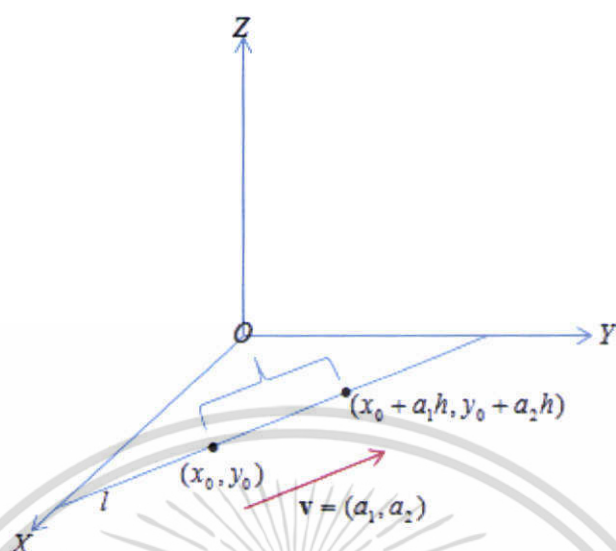
และในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ย่อยของ  $f$  เทียบกับ  $y$  ที่จุด  $(x_0, y_0)$  นิยามโดย

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

#

จากนิยามจะพบว่า อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสามารถอธิบายได้ด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันตามเส้นขนานกับแกนโคออดิเนต ในขณะนี้ต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $(x_0, y_0)$  ตามเส้นที่ไม่ขนานกับแกนโคออดิเนตซึ่งดำเนินการได้โดย ถ้าให้  $l$  เป็นเส้นในระนาบ  $xy$  ที่ขนานกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$  ดังรูปที่ 2.1.1 แล้ว  $l$  ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของ  $t$  คือ

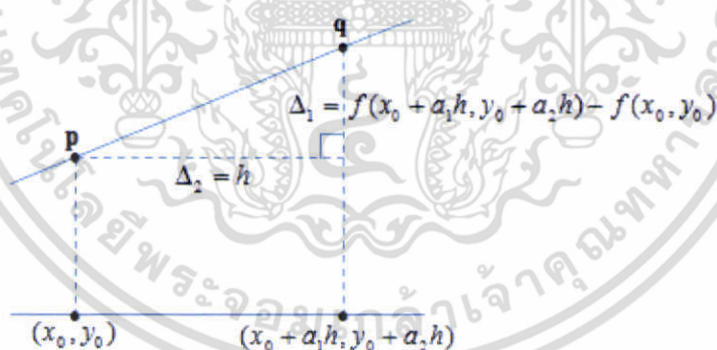
$$x = x_0 + a_1 t \quad \text{และ} \quad y = y_0 + a_2 t$$



รูปที่ 2.1.1 แสดงพิกัด  $(x_0, y_0)$   $(x_0 + a_1 h, y_0 + a_2 h)$  และเวกเตอร์  $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$

ให้  $\mathbf{p}$  และ  $\mathbf{q}$  เป็นจุดบนเส้นตรงใดๆ จากรูปที่ 2.1.2 ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $\mathbf{p}$  และ  $\mathbf{q}$  คือ

$$m = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{f(x_0 + a_1 h, y_0 + a_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}$$



รูปที่ 2.1.2 แสดงการหาความชันของจุด  $\mathbf{p}$  และ  $\mathbf{q}$

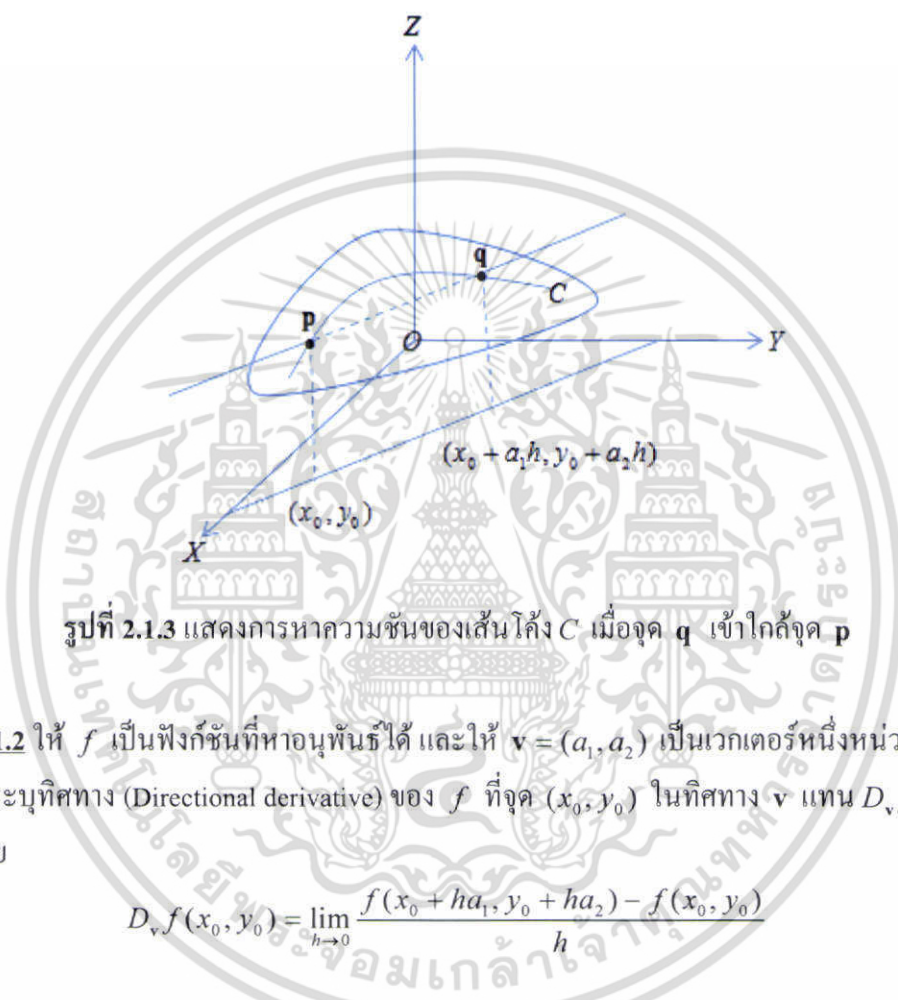
จากรูป 2.1.3 ให้  $\mathbf{p}$  และ  $\mathbf{q}$  เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของฟังก์ชัน  $f$  และมีระนาบตัดตั้งฉากกับกราฟของฟังก์ชัน  $f$  โดยรอยตัดคือ เส้นโค้ง  $C$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า  $q$  เข้าใกล้  $p$  ตามเส้นโค้ง  $C$  และ  $h \rightarrow 0$  จะได้

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a_1 h, y_0 + a_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $C$  ที่จุด  $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



รูปที่ 2.1.3 แสดงการหาความชันของเส้นโค้ง  $C$  เมื่อจุด  $q$  เข้าใกล้จุด  $p$

**นิยาม 2.1.2** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และให้  $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว อนุพันธ์ระดับทิศทาง (Directional derivative) ของ  $f$  ที่จุด  $(x_0, y_0)$  ในทิศทาง  $\mathbf{v}$  แทน  $D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0)$  นิยามโดย

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

**ทฤษฎีบท 2.1.3** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด  $(x_0, y_0)$  แล้ว  $f$  จะมีอนุพันธ์ระดับทิศทางที่จุด  $(x_0, y_0)$  ในหลายทิศทาง ถ้ามี  $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่กำหนดทิศทางแน่นอน แล้วจะได้ อนุพันธ์ระดับทิศทางในทิศของ  $\mathbf{v}$  คือ  $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a_1 + f_y(x_0, y_0)a_2$

**พิสูจน์** ให้  $F(h) = f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2)$   
แล้ว  $\frac{F(h) - F(0)}{h - 0} = \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2) - f(x_0, y_0)}{h}$

ดังนั้น  $D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0)$  มีค่าก็ต่อเมื่อ  $F'(0)$  มีค่า

ถ้าให้  $g_1(h) = x_0 + ha_1$  และ  $g_2(h) = y_0 + ha_2$

เพราะฉะนั้น  $g_1'(t) = a_1$ ,  $g_2'(t) = a_2$

แล้ว  $F(h) = f(g_1(h), g_2(h))$  กับ  $g_1(0) = x_0$ ,  $g_2(0) = y_0$

แทน  $h$  ด้วย  $t$  และแทน  $0$  ด้วย  $t_0$  จะได้

$$F(t) = f(g_1(t), g_2(t)) \text{ กับ } g_1(t_0) = x_0, g_2(t_0) = y_0$$

หาอนุพันธ์  $F(t)$  เทียบ  $t$  จะได้ จากกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{df}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x g_1'(t) + f_y g_2'(t) \\ &= f_x(x_0, y_0) g_1'(t) + f_y(x_0, y_0) g_2'(t) \end{aligned}$$

เมื่อ  $t \rightarrow 0$

$$F'(0) = f_x(x_0, y_0) a_1 + f_y(x_0, y_0) a_2$$

เพราะว่า

$$F'(0) = \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2) - f(x_0, y_0)}{h} = D_v f(x_0, y_0)$$

ดังนั้น

$$D_v f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) a_1 + f_y(x_0, y_0) a_2$$

#

**ข้อสังเกต** จากทฤษฎีบท 2.1.3 จะพบว่าอนุพันธ์ระดับทิศทาง เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน  $f$  ในทิศทางของเวกเตอร์  $\mathbf{v}$  ซึ่งมีทิศตามกำหนดที่ไม่จำเป็นต้องขนานกับแกนโคออดิเนต

**ตัวอย่าง** ให้  $f = f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$  และให้  $\mathbf{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  หา  $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$

**วิธีทำ** จาก

$$f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$$

จะได้

$$f_x(x, y) = -6x \text{ และ } f_y(x, y) = -2y$$

เพราะฉะนั้น

$$f_x(1, 2) = -6 \text{ และ } f_y(1, 2) = -4$$

จากทฤษฎีบท 2.1.2 จะได้

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 2) &= f_x(1, 2) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + f_y(1, 2) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (-6) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (-4) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$  คือหาอนุพันธ์ระดับทิศทางของกราฟ  $f$  ที่จุด  $(1, 2)$  ในทิศทาง  $\mathbf{u}$

#

จากนิยาม 2.1.2 เปลี่ยนพารามิเตอร์  $h$  เป็น  $t$  และพิจารณาที่จุด  $P(x_1, x_2)$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_v f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + ta_1, x_2 + ta_2) - f(x_1, x_2)}{t} \\ &= \frac{df}{dt}(x_1 + ta_1, x_2 + ta_2) = \frac{df}{dt}(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นอนุพันธ์ระนาบทิศทางของ  $f(u_1(t), u_2(t))$

เมื่อ  $u_1(t) = x_1 + ta_1$  และ  $u_2(t) = x_2 + ta_2$

และ  $f: R^2 \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ ที่  $\mathbf{v}_p = (x_1, x_2)$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสใน  $R^2$  ที่จุด  $\mathbf{p} \in R^2$

อนุพันธ์ระนาบทิศทางของเวกเตอร์ในปริภูมิ  $R^n$  สามารถนิยามได้ดังนี้

**นิยาม 2.1.4** ให้  $f = f(u_1(t), \dots, u_n(t))$  และ  $f: R^n \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และให้  $\mathbf{v}_p$  เป็น

เวกเตอร์สัมผัส  $f$  ใน  $R^n$  ที่จุด  $\mathbf{p} \in R^2$  แทนสัญลักษณ์

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p[f] &= \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} \\ \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} f(p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n) \right|_{t=0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t} \right] \end{aligned}$$

นั่นคือ  $\mathbf{v}_p[f]$  คืออนุพันธ์ของทิศทางของ  $f$  ที่จุด  $\mathbf{p}$  ในทิศทาง  $\mathbf{v}_p$

**บทตั้ง 2.1.5** ให้  $\mathbf{v}_p = (v_1, \dots, v_n)_p$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสใน  $R^n$  โดยที่  $f = f(u_1(t), \dots, u_n(t))$  และ

$f: R^n \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\mathbf{v}_p[f] = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial u_j}(\mathbf{p})$$

**พิสูจน์** ให้  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  ดังนั้น  $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n)$

จากกฎลูกโซ่ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})) &= \frac{d}{dt} f(\overbrace{p_1 + tv_1}^{u_1(t)}, \dots, \overbrace{p_n + tv_n}^{u_n(t)}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{du_j}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n) \frac{d}{dt}(p_j + tv_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n) v_j
\end{aligned}$$

เมื่อ  $t = 0$  จะได้

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt}(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})) \right|_{t=0} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_1, \dots, p_n) v_j \\
\mathbf{v}_p[f] &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(\mathbf{p}) v_j
\end{aligned}$$

#

**นิยาม 2.1.6** สำหรับเวกเตอร์ที่อยู่ในปริภูมิเวกเตอร์  $R^3$

กำหนดเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน  $x$  คือ  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน  $y$  คือ  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน  $z$  คือ  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$

สำหรับเวกเตอร์ที่อยู่ในปริภูมิเวกเตอร์  $R^n$

กำหนดเวกเตอร์  $\mathbf{A}_j = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)_p$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกนกับแกนตำแหน่งที่  $j$  โดยค่าตำแหน่งที่  $j$  มีค่าเป็น 1 นอกนั้นมีค่าเป็น 0

**นิยาม 2.1.7** ให้  $W$  เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้บนสับเซต  $H$  ของ  $R^n$  และให้  $\mathbf{v}_p \in R^n$  แล้ว

อนุพันธ์ของ  $W$  เทียบกับ  $\mathbf{v}_p$  คือสมาชิกของ  $R^n$  กำหนดโดย

$$D_{\mathbf{v}_p} W = D_{\mathbf{v}} W = \mathbf{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0)_p = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - \mathbf{W}(\mathbf{p})}{t} \right)_p$$

**บทตั้ง 2.1.8** ให้  $W$  เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้บนสับเซต  $H \in R^n$  และเขียน

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{A}_i$$

แล้วสำหรับจุด  $\mathbf{p} \in H$  และ  $\mathbf{v}_p \in R^n$

แล้ว  $D_{\mathbf{v}} W = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_p[w_i] \mathbf{A}_i(\mathbf{p}) = (\mathbf{v}_p[w_1], \dots, \mathbf{v}_p[w_n])_p$

**พิสูจน์** จาก  $W = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{A}_i$

จะได้ 
$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\mathbf{A}_i(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \\ &= (w_1(\mathbf{p} + t\mathbf{v}), \dots, w_n(\mathbf{p} + t\mathbf{v}))_{\mathbf{p}+t\mathbf{v}} \end{aligned}$$

ดังนั้น 
$$\mathbf{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})' = (w_1(\mathbf{p} + t\mathbf{v})', \dots, w_n(\mathbf{p} + t\mathbf{v})')$$

จากนิยาม 2.1.4 จะได้ว่า

$$w_j(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0) = \mathbf{v}_p[w_j]$$

สำหรับ  $j = 1, \dots, n$  ดังนั้น

$$\mathbf{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0) = (\mathbf{v}_p[w_1], \dots, \mathbf{v}_p[w_n])$$

#

กำหนดให้  $\alpha : (a, b) \rightarrow R^n$  เป็นเส้นโค้ง จะนิยาม  $\alpha'(t)$  เป็นเวกเตอร์ความเร็วใน  $R^n$  ซึ่งก็คือเวกเตอร์สัมผัสที่จุด  $t$

**นิยาม 2.1.9** ความเร่งหรือเวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้ง  $\alpha$  คือฟังก์ชัน  $\alpha'(t)_{\alpha(t)}$

และความเร่งของเส้นโค้ง  $\alpha$  คือฟังก์ชัน  $\alpha''(t)_{\alpha(t)}$

**บทตั้ง 2.1.10** ให้  $\alpha : (a, b) \rightarrow R^n$  เป็นเส้นโค้ง และ  $f : R^n \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\alpha'(t)_{\alpha(t)}[f] = (f \circ \alpha)'(t)$$

**พิสูจน์** สามารถเขียน  $\alpha'(t) = (a_1'(t), \dots, a_n'(t))$  ตามนิยามของอนุพันธ์ของเส้นโค้ง

นั่นคือ 
$$\begin{aligned} \alpha'(t)_{\alpha(t)}[f] &= \sum_{j=1}^n a_j'(t) \frac{\partial f}{\partial u_j}(\alpha(t)) \\ &= (f \circ \alpha)'(t) \end{aligned}$$

#

**บทตั้ง 2.1.11** ถ้า  $\mathbf{W}$  เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้บน  $R^n$  และ  $\alpha : (a, b) \rightarrow R^n$  เป็นเส้นโค้งแล้ว

$$\mathbf{D}_{\alpha'(t)} \mathbf{W} = (\mathbf{W} \circ \alpha)'(t)_{\alpha(t)}$$

**พิสูจน์** จากบทตั้ง 2.1.8 จะได้ 
$$\mathbf{D}_{\alpha'(t)} \mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \alpha'(t)[w_i] \mathbf{A}_i$$

จากบทตั้ง 2.1.10 
$$\alpha'(t)[w_i] = (w_i \circ \alpha)'(t)$$

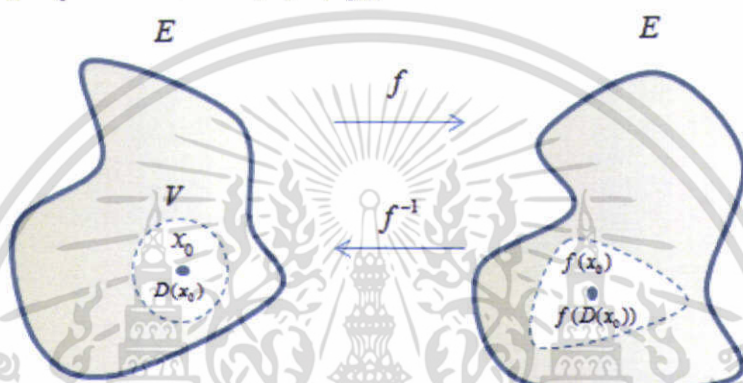
เพราะฉะนั้น 
$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\alpha'(t)} \mathbf{W} &= \sum_{i=1}^n \alpha'(t)[w_i] \mathbf{A}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (w_i \circ \alpha)'(t) \mathbf{A}_i \\ &= (\mathbf{W} \circ \alpha)'(t)_{\alpha(t)} \end{aligned}$$

#

## พื้นผิว (Surface)

**นิยาม 2.1.12** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ที่อยู่ในคลาส  $C^m$  ( $m \geq 1$ ) บนเซตเปิด  $V \subset E$  ไปยัง  $E$  และให้  $J(f) = \det(\partial f_i / \partial x_j) \neq 0$  (จาโคเบียนเมตริกซ์  $f$ ) ที่จุด  $x_0 \in V$  แล้วจะมีบริเวณ  $D(x_0) \in V$  ซึ่ง

1. ฟังก์ชัน  $f(x)$  โดย  $x \in D(x_0)$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. ภาพของ  $f(D(x_0))$  ของ  $D(x_0)$  เป็นเซตเปิด
3. ผกผัน  $f^{-1}$  ของ  $f$  อยู่ในคลาส  $C^m$  บน  $f(D(x_0))$



รูป 2.1.4 แสดงการอธิบายของฟังก์ชันผกผัน  $f^{-1}$

**นิยาม 2.1.13** พื้นผิวปรกติของคลาส  $C^m$  ( $m \geq 1$ ) คือเซตของจุด  $S$  ใน  $R^3$  และ  $x = f(u, v)$  ของคือการส่งเซตเปิด  $E$  ในระนาบ  $uv$  ไปยัง  $S$  ที่ทำให้

1.  $f$  อยู่ในคลาส  $C^m$  ใน  $E$
2. ให้  $(e_1, e_2, e_3)$  เป็นฐานใน  $R^3$  และ  $f(u, v) = f_1(u, v)e_1 + f_2(u, v)e_2 + f_3(u, v)e_3$  สำหรับทุกๆ  $(u, v) \in E$

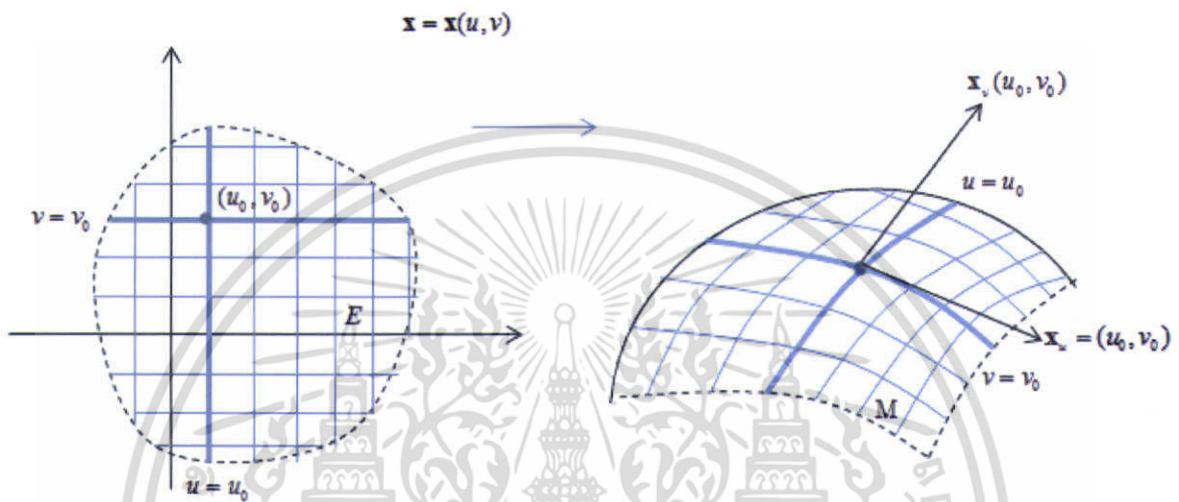
$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

โดยที่  $f$  เป็นคลาส  $C^m$  ใน  $E$

เรียก  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  ว่าการส่ง นั่นคือจะกล่าวว่า  $\mathbf{p}$  เป็นจุดพื้นผิวปรกติ ถ้า  $\mathbf{p}$  เป็นจุดบนภาพของการส่งของ  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติ  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  เป็นพื้นผิวปรกติ  $M$  ที่นิยามบน  $E$  ดังรูป 2.1.4 จะสังเกตเห็นว่า ภาพของเส้นตรง  $v = v_0$  ที่อยู่บน  $E$  โดยมี  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  เป็นการส่ง คือ  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v_0)$  เส้นที่อยู่บน  $M$  โดย  $v_0$  เป็นค่าคงที่  $u$  เป็นพารามิเตอร์ และในทำนองเดียวกันภาพของเส้นตรง  $u = u_0$  ที่อยู่บน  $E$  โดยมี  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  เป็นการส่ง คือเส้น  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v)$  อยู่บน  $M$  โดย  $u_0$  เป็นค่าคงที่ และ  $v$  เป็นพารามิเตอร์



รูปที่ 2.1.5 แสดงการส่ง  $E$  ด้วยฟังก์ชันการส่ง  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  ไปยัง  $M$

โดย  $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$  เป็นอนุพันธ์ของ  $\mathbf{x}$  ที่จุด  $(u_0, v_0)$  ในทิศทางของ  $u$  ดังนั้น  $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสกับเส้นโค้ง  $u$  ที่จุด  $(u_0, v_0)$  ในทิศทาง  $u$  ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า  $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด  $(u_0, v_0)$  ในทิศทาง  $v$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าลำดับชั้น (rank) ของจาโคเบียนเมตริกซ์ ของ  $\mathbf{x}$  มีค่าเป็นสอง ก็ต่อเมื่อ  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$

นั่นคือการส่ง  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  ของเซตเปิด  $E$  ไปยัง  $M$  เป็นพื้นผิวปรกติก็ต่อเมื่อ

1.  $\mathbf{x}$  อยู่ในคลาส  $C^m$  เมื่อ  $m \geq 1$  บน  $E$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$  สำหรับทุกๆ  $(u, v)$  ใน  $E$

### ส่วนของพื้นผิวปรกติ (Regular patch)

สมมติ  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  เป็นพื้นผิวปรกติที่อยู่ในคลาส  $C^m$  ของพื้นผิวปรกติ  $M$  ที่นิยามบนเซตเปิด  $E$  และสมมติ  $\theta = \theta(u, v)$  และ  $\phi = \phi(u, v)$  เป็นการส่งของคลาส  $C^m$  ของเซตเปิด  $E$  ไปยังระนาบ  $\theta\phi$  ซึ่งแต่ละจุด  $(u, v)$  จาโคเบียนเมตริกซ์  $\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)} \neq 0$  ตามทฤษฎีบทของผกผันของฟังก์ชัน นั่นคือ

สำหรับทุกจุด  $(u_0, v_0) \in E$  มีเซตเปิด  $E_1$  ที่มีจุด  $(u_0, v_0) \in E_1$  ซึ่ง  $\theta = \theta(u, v)$ ,  $\phi = \phi(u, v)$  เป็นการส่ง  $E_1$  แบบหนึ่งต่อหนึ่งไปยัง  $E_1^*$  และ  $E_1$  มีการส่งแบบผกผันของ  $u = u(\theta, \phi)$ ,  $v = v(\theta, \phi)$  ที่อยู่ในคลาส  $C^m$  บนเซต  $E_1$  นั่นคือ  $E_1^*$  มีการส่งจากเซต  $E_1^*$  ไปยัง  $E_1$  ต่อมาเมื่อพิจารณาการส่ง

$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi) = \mathbf{x}(u(\theta, \phi), v(\theta, \phi))$  ของ  $E_1^*$  ไปยัง  $M$  เนื่องจาก  $\mathbf{x}^*(\theta, \phi)$  อยู่ใน  $C^m$  จากกฎลูกโซ่จะได้

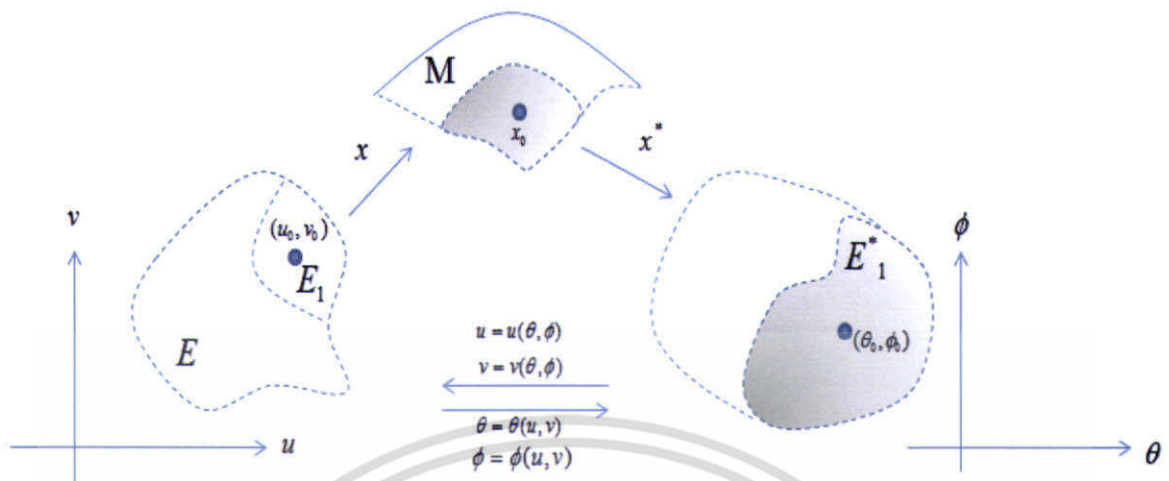
$$\mathbf{x}_\theta^* \times \mathbf{x}_\phi^* = (\mathbf{x}_u u_\theta + \mathbf{x}_v v_\theta) \times (\mathbf{x}_u u_\phi + \mathbf{x}_v v_\phi) = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u_\theta v_\phi - v_\theta u_\phi) = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \neq 0$$

เนื่องจาก  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$  และ จาโคเบียนเมตริกซ์  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} = \left[ \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)} \right]^{-1} \neq 0$  ดังนั้น  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$  เป็นพื้นผิวปรกติในคลาส  $C^m$

**นิยาม 2.1.14** ส่วนของพื้นผิวปรกติในคลาส  $C^m$  ( $m \geq 1$ ) บนพื้นผิว  $M$  คือการส่ง  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  ของเซตเปิด  $E$  ไปยัง  $M$  ซึ่ง

1.  $\mathbf{x}$  อยู่ในคลาส  $C^m$  บน  $E$
2.  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$  สำหรับทุกๆ  $(u, v) \in E$
3.  $\mathbf{x}$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และมีผกผันบน  $E$

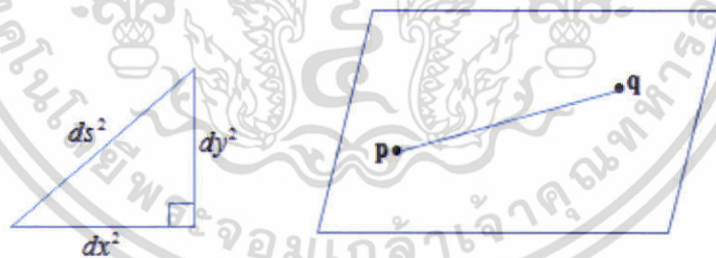
ดังนั้นส่วนของพื้นผิวปรกติก็คือพื้นผิวที่เป็นพื้นผิวย่อยของ  $M$  ซึ่งมีสมบัติการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และมีผกผัน



รูปที่ 2.1.6 ภาพแสดงการส่งของฟังก์ชัน

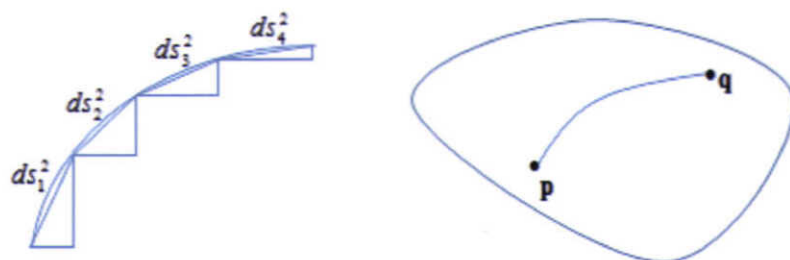
**รูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง (First fundamental form)**

การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดในระนาบจะหาโดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสดังรูปที่ 2.1.7 หมายความว่าถ้าจุด  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in R^n$  โดยที่  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  และ  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  แล้วระยะห่างจากจุด  $\mathbf{p}$  ไปยังจุด  $\mathbf{q}$  คือ  $s^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2$



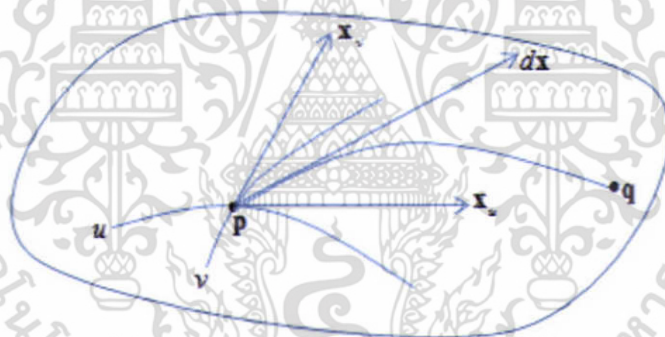
รูปที่ 2.1.7 การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ

ปัญหาคือระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ บนพื้นผิวจะสามารถหาได้อย่างไร จึงทำให้เกิดแนวคิดสำหรับการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ บนพื้นผิวซึ่งจะใช้วิธีการประมาณการหาความยาวทั้งหมดโดยการแบ่งหาระยะห่างเป็นช่วงเล็กๆ ที่ไม่จำกัด ดังรูปที่ 2.1.8



รูปที่ 2.1.8 แสดงการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิว

กำหนดให้พื้นผิวมีสมการคือ  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  โดยที่  $u$  และ  $v$  เป็นพิกัดบนพื้นผิว ดังรูปที่ 2.1.9  
 จะได้  $d\mathbf{x} = x_u du + x_v dv$  เป็นอนุพันธ์ของเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง  $\mathbf{x}$  เพราะฉะนั้น  
 $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx^2 = x_u^2 du^2 + 2x_u x_v dudv + x_v^2 dv^2$  เรียกรูปแบบนี้ว่า รูปแบบมูลฐานที่หนึ่งของ  
 พื้นผิว



รูปที่ 2.1.9 แสดงการหาเวกเตอร์  $d\mathbf{x}$

**นิยาม 2.1.15** ให้  $\mathbf{x} : H \rightarrow R^3$  เป็นส่วนของพื้นผิวและให้  $dx^2 = x_u^2 du^2 + 2x_u x_v dudv + x_v^2 dv^2$  เป็น  
 รูปแบบมูลฐานที่หนึ่งแล้ว

$$E = x_u \cdot x_u$$

$$F = x_u \cdot x_v$$

$$G = x_v \cdot x_v$$

เรียก  $E, F, G$  ว่าสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับค่าความโค้งบนพื้นผิว

ต้องการทราบว่า พื้นผิวปรกติ  $M$  ใน  $R^3$  นั้นมีการบิดตัวและโค้งมากน้อยเท่าใด โดยการพิจารณาว่าเส้นปรกติ  $U$  ของพื้นผิวมีการเปลี่ยนแปลงจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งอย่างไร โดยจะใช้ตัวดำเนินการเชิงรูปร่างคำนวณความโค้งและการบิดตัวของพื้นผิว  $M$

### ตัวดำเนินการเชิงรูปร่าง

**นิยาม 2.2.1** ให้  $H \rightarrow R^3$  เป็นพื้นผิวปรกติ และให้  $U$  เป็นเวกเตอร์ปรกติของพื้นผิว  $M$  ณ บริเวณรอบจุด  $p \in M$  สำหรับเวกเตอร์สัมผัส  $v_p$  ของ  $M$  ที่จุด  $p$  จะนิยามโดย

$$S(v_p) = -D_v U$$

เรียก  $S$  ว่า Shape operator

เรียก  $D_v U$  ว่า อนุพันธ์ระดับทิศทาง

ค่าของตัวดำเนินการเชิงรูปร่างของระนาบจะมีค่าเป็นศูนย์ทุกๆ จุดที่อยู่บนระนาบ และสำหรับพื้นผิวที่มีการบิดตัวค่าของตัวดำเนินการเชิงรูปร่างจะไม่เท่ากับศูนย์

**บทตั้ง 2.2.2** ให้  $x : H \rightarrow R^3$  เป็นส่วนของพื้นผิวปรกติแล้ว

$$S(x_u) = -U_u \text{ และ } S(x_v) = -U_v$$

**พิสูจน์** ให้  $x = x(u, v)$  พิจารณา  $v = c$  ซึ่ง  $c$  เป็นค่าคงที่ จะได้  $x = x(u, c)$  เขียนแทนฟังก์ชันของตัวแปร  $u$  ด้วย  $\beta(u)$  นั่นคือ  $\beta(u) = x(u, c)$  จากนิยาม 2.1.1 และบทตั้ง 2.1.10 จะได้

$$S(x_u(u, c)) = S(\beta'(u)) = -D_{\beta'(u)} U = -(U \circ \beta)'(u)$$

เนื่องจาก  $(U \circ \beta)'(u) = U_u$  เพราะฉะนั้น  $S(x_u) = -U_u$

ในทำนองเดียวกัน

ให้  $x = x(u, v)$  พิจารณา  $u = c$  ซึ่ง  $c$  เป็นค่าคงที่ จะได้  $x = x(c, v)$  เขียนแทนฟังก์ชันของตัวแปร  $v$  ด้วย  $\beta(v)$  นั่นคือ  $\beta(v) = x(c, v)$  จากนิยาม 2.1.1 และบทตั้ง 2.1.10 จะได้

$$S(x_v(c, v)) = S(\beta'(v)) = -D_{\beta'(v)} U = -(U \circ \beta)'(v)$$

เนื่องจาก  $(U \circ \beta)'(v) = U_v$  เพราะฉะนั้น  $S(x_v) = -U_v$

#

**บทตั้ง 2.2.3** ถ้า  $\alpha = \alpha(t)$  เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิวปรกติ  $M \subset R^3$  แล้ว

$$\alpha'' \cdot U = S(\alpha') \cdot \alpha'$$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $\alpha(t) \in M$  สำหรับทุกๆ  $t$

และ  $\alpha'$  เป็นเส้นสัมผัสของ  $M$

เนื่องจาก  $a \cdot (a \times b) = 0$  จะได้ว่า  $\alpha' \cdot \frac{(\alpha' \times \alpha'')}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = 0$

และ 
$$U = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

ดังนั้น  $\alpha' \cdot U = 0$

โดยการหาอนุพันธ์จะได้

$$\alpha' \cdot U' + \alpha'' \cdot U = 0$$

นั่นคือ

$$\alpha'' \cdot U = -\alpha' \cdot U'$$

เนื่องจาก

$$\alpha = \alpha(t)$$

โดยบทตั้ง 2.2.2  $S(\alpha') = U'$

เพราะฉะนั้น  $\alpha'' \cdot U = S(\alpha') \cdot \alpha'$

#

**ค่าความโค้งปรกติของพื้นผิว**

ในส่วนนี้จะกล่าวถึง ฟังก์ชันค่าจริงซึ่งเรียกว่า ค่าความโค้งปรกติโดยจะนิยามในพจน์ของ Shape operator ดังต่อไปนี้

**นิยาม 2.2.4** ให้  $u_p$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสของพื้นผิวปรกติ  $M \subset R^3$  และ  $\|u_p\| = 1$  แล้วค่าความโค้งปรกติของ  $M$  ในทิศทาง  $u_p$  คือ

$$\kappa_n(u_p) = S(u_p) \cdot u_p$$

ในกรณีทั่วไป ถ้า  $v_p$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ของ  $M$  ที่จุด  $p$  จะได้

$$\kappa_n(v_p) = \frac{S(v_p) \cdot v_p}{\|v_p\|^2}$$

ค่าความโค้งหลักจะวัดความเบนโค้งที่มากที่สุดและน้อยที่สุดของพื้นผิวปรกติ  $M$  ที่แต่ละจุด  $p \in M$

**นิยาม 2.2.5** ค่าความโค้งปรกติของ  $M$  แทนด้วย  $\kappa_n$  ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของค่าความโค้งปรกติ  $\kappa_n$  ของ  $M$  ที่จุด  $p$  แทนด้วย  $\kappa_1$  และ  $\kappa_2$  ตามลำดับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in M$  ที่เป็นไปตาม  $\kappa_1$  และ  $\kappa_2$  และทิศทางของเวกเตอร์ทั้งสองเรียกว่า ทิศทางหลัก (principal directions)

**นิยาม 2.2.6** ให้  $M \subset \mathbb{R}^3$  เป็นพื้นผิวปรกติ และ  $\mathbf{u}_p$  เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของ  $M$  ที่จุด  $p$  แทน  $\Pi(\mathbf{u}_p, U(p))$  เป็นระนาบที่กำหนดโดย  $\mathbf{u}_p$  และเส้นปรกติของพื้นผิว  $U(p)$  จะมีภาคตัดปรกติของ  $M$  ในทิศ  $M$  คืออินเตอร์เซกชันของ  $\Pi(\mathbf{u}_p, U(p))$  และ  $M$

**บทตั้ง 2.2.7** Shape operator ของพื้นผิวปรกติ  $M$  มีคุณสมบัติของการสมมาตร นั่นคือ

$$S(\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{w}_p = \mathbf{v}_p \cdot S(\mathbf{w}_p)$$

สำหรับทุกเวกเตอร์สัมผัส  $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p$  ใน  $M$

**พิสูจน์** ให้  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  เป็นส่วนของพื้นผิวบน  $M$  จาก  $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$

เนื่องจาก  $\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \cdot \mathbf{x}_u = 0$

นั่นคือ  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u = 0$

ทำการหาอนุพันธ์ของ  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u$  เทียบ  $v$

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u) = \mathbf{U}_v \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad (2.2.1)$$

$$-\mathbf{U}_v \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad (2.2.2)$$

จากบทตั้ง 2.2.2  $\mathbf{U}_v = -S(\mathbf{x}_v)$  จากสมการที่ (2.2.2) จะได้

$$S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad (2.2.3)$$

เนื่องจาก  $\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \cdot \mathbf{x}_v = 0$

นั่นคือ  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v = 0$

ทำการหาอนุพันธ์ของ  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v = 0$  เทียบ  $u$

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v) = \mathbf{U}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad (2.2.4)$$

$$-\mathbf{U}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad (2.2.5)$$

เนื่องจาก  $\mathbf{U}_u = -S(\mathbf{x}_u)$  จากสมการที่ (2.2.5) จะได้

$$S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad (2.2.6)$$

เพราะว่า  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$

เพราะฉะนั้นจากสมการที่ (2.2.3) และ (2.2.5) จะได้

$$S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{vu} = S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u$$

เป็นจริงสำหรับ  $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p$  ในพจน์ของ  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$

#

**นิยาม 2.2.10** ให้  $x: H \rightarrow \mathbb{R}^3$  เป็นพื้นผิวปรกติและให้รูปแบบมูลฐานที่สองเขียนในรูปของ

$II_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = S_p(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$  โดยที่  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  เป็นเวกเตอร์แล้ว

$$e = II_p(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -\mathbf{D}_{\mathbf{x}_u} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u = -\mathbf{U}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uu}$$

$$f = II_p(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -\mathbf{D}_{\mathbf{x}_v} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u = -\mathbf{U}_v \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv}$$

$$g = II_p(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = -\mathbf{D}_{\mathbf{x}_v} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v = -\mathbf{U}_v \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

$\mathbf{U}$  คือ เวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยโดย  $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$

เรียก  $e, f, g$  ว่าสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่สอง

**ทฤษฎีบท 2.2.11** สมการเวกคาเต็น (The Weingarten equation)

ให้  $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  เป็นส่วนหนึ่งของพื้นผิวปรกติแล้ว Shape operator  $S$  ของ  $\mathbf{x}$  เขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ  $\mathbf{x}_u$  และ  $\mathbf{x}_v$

$$-S(\mathbf{x}_u) = \mathbf{U}_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} \mathbf{x}_v$$

$$-S(\mathbf{x}_v) = \mathbf{U}_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \mathbf{x}_v$$

โดยที่  $EG - F^2 \neq 0$

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $\mathbf{x}$  เป็นส่วนหนึ่งของพื้นผิวปรกติและ  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  เป็นอิสระเชิงเส้นสามารถเขียนได้เป็น

$$-S(\mathbf{x}_u) = \mathbf{U}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \quad (2.2.7)$$

$$-S(\mathbf{x}_v) = \mathbf{U}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \quad (2.2.8)$$

นำ  $\mathbf{x}_u$  และ  $\mathbf{x}_v$  ไปคูณสมการที่ (2.2.7), (2.2.8) จะได้

$$N_u \cdot \mathbf{x}_u = a_{11}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u$$

$$N_v \cdot \mathbf{x}_u = a_{12}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u$$

$$N_u \cdot \mathbf{x}_v = a_{11}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + a_{21}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

$$N_v \cdot \mathbf{x}_v = a_{12}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + a_{22}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

จากนิยามของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่งและสอง จะได้

$$\begin{aligned} -e &= Ea_{11} + Fa_{21} \\ -f &= Fa_{11} + Ga_{21} \\ -f &= Ea_{12} + Fa_{22} \\ -g &= Fa_{12} + Ga_{22} \end{aligned}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

นำเมทริกซ์  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$  คูณตลอดทั้งสมการที่ (2.2.9) จะได้

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & -Ff + Eg \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

#

**ทฤษฎีบท 2.2.12** ให้  $M \subset R^3$  เป็นพื้นผิวปรกติและ  $x$  เป็นส่วนของพื้นผิวปรกติบน  $M$  ให้จุด  $p \in M$  ซึ่งเป็นจุดอยู่บนส่วนของพื้นผิว  $x$  โดยที่  $p = x(u_0, v_0)$  กำหนดเวกเตอร์สัมผัส  $\mathbf{v}_p \in M_p$  และเขียน  $\mathbf{v}_p = a\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$  แล้วค่าความโค้งปรกติของ  $M$  ในทิศทาง  $\mathbf{v}_p \in M_p$  คือ

$$\kappa_n(\mathbf{v}_p) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

โดย  $E, F, G$  เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง และ  $e, f, g$  เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่สอง

**พิสูจน์** จาก  $\mathbf{v}_p = a\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$

จะได้  $\|\mathbf{v}_p\|^2 = \|a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v\|^2 = a^2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2ab\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + b^2\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$

โดยจากนิยามของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง

จะได้  $\|\mathbf{v}_p\|^2 = a^2E + 2abF + b^2G$

$$\begin{aligned}
\text{และ} \quad S(\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{v}_p &= (aS(\mathbf{x}_u) + bS(\mathbf{x}_v)) \cdot (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \\
&= a^2S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u + abS(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u + abS(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v + b^2S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v \\
&= a^2\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uu}^2 + 2ab\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} + b^2\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{vv}
\end{aligned}$$

โดยจากนิยามของรูปแบบมูลฐานที่สอง

$$\text{จะได้} \quad S(\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{v}_p = a^2e + 2abf + b^2g$$

จากนิยาม 2.2.4 นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\kappa_n(\mathbf{v}_p) &= \frac{S(\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{v}_p}{\|\mathbf{v}_p\|^2} \\
\text{จะได้} \quad &= \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}
\end{aligned}$$

#

**ค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงรูปร่าง (Eigenvalue of Shape operator)**

**นิยาม 2.2.13** ค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงรูปร่าง  $S_p$  คือค่าความโค้งหลักของพื้นผิว  $M$  ที่จุด  $P$  ที่เป็นไปตามไอเจนเวกเตอร์เรียกว่าทิศทางหลัก

### 2.3. ค่าความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ย

**นิยาม 2.3.1** ให้  $M$  เป็นพื้นผิวปรกติใน  $R^3$  ค่าความโค้งของแก๊ส ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ ) ของ  $M$  คือฟังก์ชัน  $\kappa_G, \kappa_M : M \rightarrow R$  นิยามโดย

$$\kappa_G(\mathbf{p}) = \det(S(\mathbf{p})) \text{ และ } \kappa_M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \text{tr}(S(\mathbf{p}))$$

โดยที่

$S(\mathbf{p})$  คือ Shape operator ที่จุด  $\mathbf{p}$

$\kappa_G(\mathbf{p})$  คือค่าความโค้งของแก๊สที่จุด  $\mathbf{p}$

$\kappa_M(\mathbf{p})$  คือค่าความโค้งเฉลี่ยที่จุด  $\mathbf{p}$

ค่าความโค้งของแก๊สสามารถแบ่งชนิดของลักษณะของจุดบนพื้นผิวได้ 4 ลักษณะดังต่อไปนี้

**นิยาม 2.3.2** ให้  $p$  เป็นจุดบนพื้นผิวปรกติ  $M \subset \mathbb{R}^3$  จะเรียก

$p$  เป็นจุดเชิงวงรี (elliptic) ถ้า  $\kappa_G(p) > 0$  ( $\kappa_1, \kappa_2$  มีเครื่องหมายเหมือนกัน)

$p$  เป็นจุดเชิงไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic) ถ้า  $\kappa_G(p) < 0$  ( $\kappa_1, \kappa_2$  มีเครื่องหมายต่างกัน)

$p$  เป็นจุดเชิงพาราโบลิก (parabolic) ถ้า  $\kappa_G(p) = 0$  แต่  $S(p) \neq 0$  ( $\kappa_1, \kappa_2$  มีค่าใดค่าหนึ่งเป็นศูนย์)

$p$  เป็นจุด ถ้า  $\kappa_G(p) = 0$  และ  $S(p) = 0$  ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ )

**ประพจน์ 2.3.3** ค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ ) ของพื้นผิวปรกติ  $M \subset \mathbb{R}^3$  อยู่ในรูปแบบความสัมพันธ์ของค่าความโค้งหลัก

$$\kappa_G = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \text{และ} \quad \kappa_M = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

**พิสูจน์** เลือกฐานเชิงตั้งฉากหนึ่งหน่วยของไอเจนเวกเตอร์ของ  $S$

สำหรับ  $M_p$  ซึ่งเมทริกซ์  $S$  คือ  $\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$

ดังนั้น  $\kappa_G = \det(S) = \det \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$

$$\kappa_M = \frac{1}{2} \text{tr}(S) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

#

ค่า  $\kappa_G(p)$  และ  $\kappa_M(p)$  คือค่าความโค้งเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของจุด  $p \in M$  แต่สำหรับ

$\kappa_G, \kappa_M$  เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนทุกๆจุด  $x: H \rightarrow \mathbb{R}^3$

สามารถหาค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยที่อยู่ในเทอมของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่งและสองดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.3.4** ให้  $x: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  เป็นส่วนของพื้นผิวปรกติ ค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ ) ของ  $x$  สามารถเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\kappa_G = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.3.1)$$

$$\kappa_M = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad (2.3.2)$$

เมื่อ  $E, F, G$  เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง และ  $e, f, g$  เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่สอง

**พิสูจน์**

คำนวณหา  $\kappa_G, \kappa_M$

จากสมการ (2.2.10) (สมการเวกเตอร์)

$$-\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & -Ff + Eg \end{pmatrix}$$

ใช้ตัวกำหนด (Determinant) ใส่ทั้งสองข้างของสมการที่ (2.2.8) จะได้

$$\begin{aligned} \kappa_G &= \det \left( -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & -Ff + Eg \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{(fF - eG)(fF - gE) - (eF - fE)(gF - fG)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \kappa_M &= - \left[ \frac{(fF - eG) + (fF - gE)}{2(EG - F^2)} \right] \\ &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

#

รูปแบบอื่นของการคำนวณของฟังก์ชันค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย

**บทตั้ง 2.3.5** ให้  $\mathbf{x}: H \rightarrow R^3$  เป็นพื้นผิวปรกติแล้ว

$$e = \frac{[\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{[\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{[\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

**พิสูจน์** จากรูปแบบมูลฐานที่สอง จะได้

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{x}_{uu} \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{[\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ f &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{[\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ g &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{x}_{vv} \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{[\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

#

**บทแทรก 2.3.6** ให้  $\mathbf{x} : H \rightarrow R^3$  เป็นพื้นผิวปรกติค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของ  $M$  กำหนดโดยสูตร

$$\kappa_G = \frac{[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v][\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v] - [\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]^2}{\left(\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2\right)^2}$$

$$\kappa_M = \frac{[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]\|\mathbf{x}_v\|^2 - 2[\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v](\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + [\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]\|\mathbf{x}_u\|^2}{2\left(\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

**พิสูจน์** จาก

$$\kappa_G = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$= \frac{\frac{[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{[\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} - \frac{[\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]^2}{EG - F^2}}{EG - F^2}$$

$$= \frac{[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v][\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v] - [\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]^2}{(EG - F^2)^2}$$

และ

$$\kappa_M = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

$$= \frac{\frac{[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]\|\mathbf{x}_v\|^2}{\sqrt{EG - F^2}} - 2\frac{[\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v](\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{[\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]\|\mathbf{x}_u\|^2}{\sqrt{EG - F^2}}}{2\left(\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2\right)}$$

$$= \frac{[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]\|\mathbf{x}_v\|^2 - 2[\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v](\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + [\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]\|\mathbf{x}_u\|^2}{2\left(\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

#

**ทฤษฎีบท 2.3.7** ให้  $\mathbf{x} : H \rightarrow R^3$  เป็นพื้นผิวปรกติแล้วค่าความโค้งของเกาส์ของ  $\mathbf{x}$  กำหนดโดย

$$\kappa_G = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \right\}$$

**พิสูจน์** จากบทแทรก 2.3.6

$$\kappa_G = \frac{[\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v][\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v] - [\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v]^2}{\left(\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2\right)^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
\text{โดยที่ } [\mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v] &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{1uu} & x_{2uu} & x_{3uu} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \\
[\mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v][\mathbf{x}_{vv} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v] &= \det \begin{pmatrix} x_{1uu} & x_{2uu} & x_{3uu} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_{1vv} & x_{2vv} & x_{3vv} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \\
&= \det \left\{ \begin{pmatrix} x_{1uu} & x_{2uu} & x_{3uu} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1vv} & x_{2vv} & x_{3vv} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} = x_{1uu} \cdot x_{1vv} + x_{2uu} \cdot x_{2vv} + x_{3uu} \cdot x_{3vv}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ } [\mathbf{x}_{uv} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v]^2 &= \det \begin{pmatrix} x_{1uv} & x_{2uv} & x_{3uv} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_{1uv} & x_{2uv} & x_{3uv} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \\
&= \det \left\{ \begin{pmatrix} x_{1uv} & x_{2uv} & x_{3uv} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1uv} & x_{2uv} & x_{3uv} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

#

บางครั้งอาจจะเขียนในรูปแบบอนุพันธ์ย่อยอันดับต่างๆของ  $\mathbf{x}$  ในรูปของรูปแบบมุลฐานที่หนึ่ง

**บทตั้ง 2.3.8** ให้  $\mathbf{x} : H \rightarrow R^3$  เป็นส่วนของพื้นผิวปรกติแล้ว

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}$$

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}E_u$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} &= \frac{1}{2}G_v \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2}E_v \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2}G_u\end{aligned}$$

**พิสูจน์** จะได้ว่า

- $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv})_u - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vvu} - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv})_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uvv}$   
เนื่องจาก  $\mathbf{x}_{vvu} = \mathbf{x}_{uvv}$

จะได้  $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv})_v$

$$\begin{aligned}&= ((\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_v - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v)_u - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_{uv} \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_{vu} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_{uu} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_{uv} \\ &= -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$   
$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vu} - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vu} \\ &= (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vu}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}) \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_v \\ &= F_u - \frac{1}{2}E_v\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$   
$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} + \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} + \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv}) \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_v - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_u \\ &= F_v - \frac{1}{2}G_u\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}E_u$   
$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}) - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu} \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu} \\ 2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u \\ &= \frac{1}{2}E_u\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{2}G_v$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} &= (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v) - \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_v - \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v\end{aligned}$$

$$2\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} = (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_v$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_v \\ &= \frac{1}{2}G_v\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}E_v$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_v - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}\end{aligned}$$

$$2\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_v$$

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}E_v$$

$$\bullet \quad \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2}G_u$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv}\end{aligned}$$

$$2\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u \\ &= \frac{1}{2}G_u\end{aligned}$$

#

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**ทฤษฎีบท 2.3.9 (Brioschi's Formula)**

ให้  $\mathbf{x} : H \rightarrow R^3$  เป็นส่วนของพื้นผิวปรกติ แล้วค่าความโค้งของเกาส์ของ  $x$  กำหนดโดย

$$\kappa_G = \frac{1}{(EG - F^2)^2} = \left\{ \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \right\}$$

#

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2.3.8 แทนค่าลงในทฤษฎีบท 2.3.7 จะเป็นจริงดังสมการข้างต้น

**2.4 สัญลักษณ์ของคริสตอฟเฟิล (Christoffel Symbols)**

ให้  $\mathbf{x} : H \rightarrow R^3$  เป็นพื้นผิวปรกติและให้  $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$

สามารถเขียน  $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}$  ในรูปของผลรวมเชิงเส้นในพจน์ของ  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{U}$  ได้ดังนี้

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\mathbf{U} \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^1_{21}\mathbf{x}_v + f\mathbf{U} \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + g\mathbf{U} \quad (2.4.3)$$

เรียกสมการที่ (2.4.1)-(2.4.3) ว่าสมการเกาส์ (Gauss equation)

เนื่องจากอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันเทียบกับ  $u$  และ  $v$  มีค่าเท่ากับอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับ  $v$  และ  $u$

$$\text{ทำให้ได้ว่า} \quad \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}, \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \mathbf{x}_{vu} = \Gamma^1_{21}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_v + f\mathbf{U}$$

เรียกฟังก์ชัน  $\Gamma^i_{jk}$  ว่าสัญลักษณ์ของคริสตอฟเฟิล

**บทตั้ง 2.4.1** ให้  $\mathbf{x} : H \rightarrow R^3$  เป็นพื้นผิวปรกติแล้ว

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F &= \frac{1}{2}E_u & \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G &= F_u - \frac{1}{2}E_v \\ \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F &= \frac{1}{2}E_v & \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G &= \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F &= F_v - \frac{1}{2}G_u & \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G &= \frac{1}{2}G_v\end{aligned}$$

$E, F, G$  คือรูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง

**พิสูจน์**

จากสมการเกาส์  $\mathbf{x}_{uu} = \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\mathbf{U}$

ทำการคูณด้วยผลคูณภายในของสมการตลอดด้วย  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  จะได้

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + e\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u \quad (2.4.4)$$

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + e\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v \quad (2.4.5)$$

จากสมการเกาส์  $\mathbf{x}_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + f\mathbf{U}$

ทำการคูณด้วยผลคูณภายในของสมการตลอดด้วย  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  จะได้

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + f\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u \quad (2.4.6)$$

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + f\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v \quad (2.4.7)$$

จากสมการเกาส์  $\mathbf{x}_{vv} = \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + g\mathbf{U}$

ทำการคูณด้วยผลคูณภายในของสมการตลอดด้วย  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  จะได้

$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + g\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u \quad (2.4.8)$$

$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + g\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v \quad (2.4.9)$$

เนื่องจาก  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$

และ  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_v = 0$  และบทตั้ง 2.3.8

จากสมการที่ (2.4.4) – (2.4.9) จะได้

$$\Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \frac{1}{2}E_u$$

$$\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$\Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \frac{1}{2}E_v$$

$$\Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G = \frac{1}{2}G_u$$

$$\Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$\Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G = \frac{1}{2}G_v$$

#

**ทฤษฎีบท 2.4.2** ให้  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  เป็นส่วนพื้นผิวปรกติแล้ว

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma^2_{11} &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma^2_{12} &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{2GE_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma^2_{22} &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}\end{aligned}$$

**พิสูจน์** จากบทตั้ง 2.4.1

จากสมการ  $\Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \frac{1}{2}E_u$  (2.4.10)

และ  $\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \frac{1}{2}E_v$  (2.4.11)

นำสมการที่ (2.4.10) คูณด้วย  $G$  จะได้  $\Gamma^1_{11}EG + \Gamma^2_{11}FG = \frac{1}{2}E_uG$  (2.4.12)

นำสมการที่ (2.4.11) คูณด้วย  $F$  จะได้  $\Gamma^1_{11}F^2 + \Gamma^2_{11}GF = F_uF - \frac{1}{2}E_vF$  (2.4.13)

(2.4.12) - (2.4.13);  $\Gamma^1_{11}EG + \Gamma^1_{11}F^2 = \frac{1}{2}E_uG - F_uF + \frac{1}{2}E_vF$

นั่นคือ  $\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_u}{2(EG - F^2)}$

นำสมการที่ (2.4.10) คูณด้วย  $F$  จะได้  $\Gamma^1_{11}EF + \Gamma^2_{11}F^2 = \frac{1}{2}E_uF$  (2.4.14)

นำสมการที่ (2.4.11) คูณด้วย  $E$  จะได้  $\Gamma^1_{11}FE + \Gamma^2_{11}GE = F_uE - \frac{1}{2}E_vE$  (2.4.15)

(2.4.14) - (2.4.15);  $\Gamma^2_{11}EG + \Gamma^2_{11}F^2 = \frac{1}{2}(EF_u - E_vE + \frac{1}{2}E_uF)$

นั่นคือ  $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{(EG - F^2)} \right)$

จากสมการ  $\Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \frac{1}{2}E_v$  (2.4.16)

และ  $\Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G = \frac{1}{2}G_u$  (2.4.17)

นำสมการที่ (2.4.16) คูณด้วย  $G$  จะได้  $\Gamma^1_{12}EG + \Gamma^2_{12}FG = \frac{1}{2}E_vG$  (2.4.18)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการที่ (2.4.17) คูณด้วย  $F$  จะได้  $\Gamma^1_{12}F^2 + \Gamma^2_{12}FG = \frac{1}{2}FG_u$  (2.4.19)

(2.4.18) – (2.4.19) ;  $\Gamma^1_{12}EG - \Gamma^1_{12}F^2 = \frac{1}{2}E_vG - \frac{1}{2}G_uF$

นั่นคือ  $\Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}$

นำสมการที่ (2.4.16) คูณด้วย  $F$  จะได้  $\Gamma^1_{12}EF + \Gamma^2_{12}F^2 = \frac{1}{2}E_vF$  (2.4.20)

นำสมการที่ (2.4.17) คูณด้วย  $E$  จะได้  $\Gamma^1_{12}FE + \Gamma^2_{12}GE = \frac{1}{2}G_uE$  (2.4.21)

(2.4.21) – (2.4.20) ;  $\Gamma^2_{12}EG + \Gamma^2_{12}F^2 = \frac{1}{2}EG_u - \frac{1}{2}E_vF$

นั่นคือ  $\Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$

จากสมการ  $\Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F = F_v - \frac{1}{2}G_u$  (2.4.22)

และ  $\Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G = \frac{1}{2}G_v$  (2.4.23)

นำสมการที่ (2.4.22) คูณด้วย  $G$  จะได้  $\Gamma^1_{22}EG + \Gamma^2_{22}FG = F_vG - \frac{1}{2}G_uG$  (2.4.24)

นำสมการที่ (2.4.23) คูณด้วย  $F$  จะได้  $\Gamma^1_{22}F^2 + \Gamma^2_{22}GF = \frac{1}{2}G_vF$  (2.4.25)

(2.4.24) – (2.4.25) ;  $\Gamma^1_{22}EG - \Gamma^1_{22}F^2 = F_vG - \frac{1}{2}G_uG_v - \frac{1}{2}G_vF$

นั่นคือ  $\Gamma^1_{22} = \frac{2GE_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$

นำสมการที่ (2.4.22) คูณด้วย  $F$  จะได้  $\Gamma^1_{22}EF + \Gamma^2_{22}F^2 = F_vF - \frac{1}{2}G_uF$  (2.4.26)

นำสมการที่ (2.4.23) คูณด้วย  $E$  จะได้  $\Gamma^1_{22}FE + \Gamma^2_{22}GE = \frac{1}{2}G_vE$  (2.4.27)

(2.4.27) – (2.4.26)  $\Gamma^2_{22}EG - \Gamma^2_{22}F^2 = \frac{1}{2}EG_v - F_vF + \frac{1}{2}G_uF$

นั่นคือ  $\Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$

#

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.5 ทฤษฎีเกี่ยวกับค่าความโค้งจีโอเดซิก

ค่าความโค้งจีโอเดซิกของเส้นโค้งบนพื้นผิว

ให้  $\alpha$  เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว  $M$  ค่าความโค้งจีโอเดซิกของ  $\alpha$  ที่จุด  $p$  นิยามโดย ค่าความโค้งที่จุด  $p$  ของภาพฉายของ  $\alpha$  ไปยังระนาบ  $A$  ที่เป็นระนาบสัมผัสที่จุด  $p$  ( $\alpha^*$  คือภาพฉายของ  $\alpha$  ไปยัง  $M$ ) นั่นคือ นิยามค่าความโค้งจีโอเดซิกของ  $\alpha$  ที่จุด  $p$  คือค่าความโค้งของ  $\alpha^*$  ที่จุด  $p$

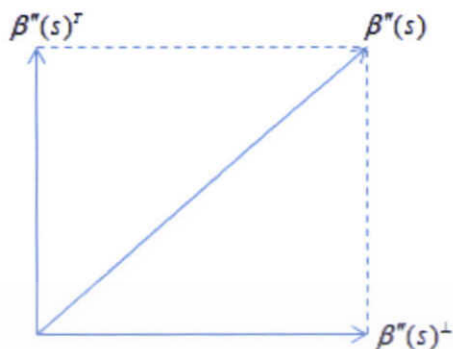


รูปที่ 2.5.1 ภาพฉายของเส้นโค้งในพื้นผิว  $M$  ไปยังระนาบสัมผัส  $A$

ให้  $M \subset R^n$  เป็นพื้นผิวปรกติ และ  $\beta : (c, d) \rightarrow M$  เป็นเส้นโค้งความเร็วหนึ่งหน่วย ซึ่งความเร่งของ  $\beta$  ใน  $R^n$  มีส่วนประกอบขนานใน  $M$  และส่วนประกอบตั้งฉากใน  $M$  สามารถเขียนได้เป็น

$$\beta''(s) = \beta''^T(s) + \beta''^\perp(s)$$

สำหรับ  $c < s < d$   $\beta''(s)^T$  นิยามเป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์สัมผัส และ  $\beta''(s)^\perp$  เป็นส่วนประกอบของที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ปรกติของพื้นผิวดังรูปที่ 2.5.2



รูป 2.5.2 เวกเตอร์  $\beta''(s)$  เขียนในรูปผลบวกของเวกเตอร์ส่วนประกอบทั้งสอง  $\beta''(s)^T$  กับ  $\beta''(s)^\perp$

**นิยาม 2.5.1** ค่าความโค้งจีโอเดซิก  $\tilde{\kappa}_g[\beta]$  และ ค่าความโค้งปรกติ  $\kappa_n[\beta]$  ของเส้นโค้งความเร็วหนึ่งหน่วย  $\beta: (c, d) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  นิยามโดย

$$\tilde{\kappa}_g[\beta](s) = \|\beta''(s)^T\| \text{ และ } \kappa_n[\beta](s) = \|\beta''(s)^\perp\|$$



รูปที่ 2.5.3 ค่าความโค้งจีโอเดซิก และค่าความโค้งปรกติ

**บทตั้ง 2.5.2** ให้  $M \subset \mathbb{R}^n$  เป็นพื้นผิวปรกติ และ  $\beta: (c, d) \rightarrow M$  เป็นเส้นโค้งความเร็วหนึ่งหน่วยแล้ว ค่าความโค้งจีโอเดซิกและค่าความโค้งปรกติของ  $\beta$  มีความสัมพันธ์กันกับค่าความโค้ง  $\kappa[\beta]$  ของ  $\beta$  ที่เป็นเส้นโค้งใน  $\mathbb{R}^n$  โดย

$$\kappa[\beta]^2 = \tilde{\kappa}_g[\beta]^2 + \kappa_n[\beta]^2$$

**พิสูจน์** จาก  $\kappa[\beta](s)^2 = \|\beta''(s)\|^2$

$$= \|\beta''(s)^T + \beta''(s)^\perp\|^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= \|\beta''(s)^T\|^2 + \|\beta''(s)^\perp\|^2 + 2\|\beta''(s)^T\|\|\beta''(s)^\perp\|\cos(\theta_{\beta''(s)^T, \beta''(s)^\perp}) \\
\text{จะได้} \quad &= \|\beta''(s)^T\|^2 + \|\beta''(s)^\perp\|^2 \\
&= \tilde{\kappa}_g[\beta](s)^2 + \kappa_n[\beta](s)^2 \quad \#
\end{aligned}$$

**นิยาม 2.5.3** ให้  $M$  เป็นพื้นผิวปรกติใน  $R^3$  ค่าความโค้งจีโอเดซิก  $\kappa_g[\beta]$  ของเส้นโค้งความเร็วหนึ่งหน่วย  $\beta : (c, d) \rightarrow M$  สำหรับ  $c < s < d$  โดยกำหนดฟังก์ชัน  $J\beta'(s) = U \times \beta'(s)$  จะได้

$$\beta''(s)^T = \kappa_g[\beta](s)J\beta'(s) = \kappa_g[\beta](s)U \times \beta'(s)$$

**บทตั้ง 2.5.4** ให้  $\alpha : (a, b) \rightarrow M \subset R^n$  เป็นเส้นโค้งใน  $M \subset R^3$  ให้  $U$  เป็นเส้นปรกติของพื้นผิวแล้ว ค่าความโค้งปรกติ  $M$  และค่าความโค้งจีโอเดซิก ของ  $\alpha$  กำหนดโดย

$$\begin{aligned}
\kappa_n[\alpha](t) &= \frac{\alpha''(t) \cdot U}{\|\alpha''(t)\|^2} \\
\kappa_g[\alpha](t) &= \frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)U]}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}
\end{aligned}$$

**พิสูจน์** ให้  $\alpha(t) = \beta(s(t))$   
จะได้  $\alpha'(t) = s'(t)\beta'(s)$   
และ  $\alpha''(t) = s''(t)\beta'(s) + s'(t)^2\beta''(s)$

ทำการใส่ผลคูณภายในด้วย  $U$  ทั้งสองข้างจะได้

$$\alpha''(t) \cdot U = s''(t)\beta'(s) \cdot U + s'(t)^2\beta''(s) \cdot U$$

เนื่องจาก  $\alpha'$  ตั้งฉากกับ  $U$  จะได้ว่า  $\beta'$  ตั้งฉากกับ  $U$  เช่นกัน

เพราะฉะนั้น  $\beta' \cdot U = 0$

จะได้  $\kappa_n[\alpha](t) = \kappa_n[\beta](s) = \beta''(s) \cdot U = \frac{\alpha''(t) \cdot U}{s'(t)^2}$

เนื่องจาก  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$

จะได้  $\kappa_n[\alpha](t) = \frac{\alpha''(t) \cdot U}{\|\alpha''(t)\|^2}$

ต่อมาพิสูจน์ในส่วนที่สอง

จะได้ว่า  $\alpha''(t) \times \alpha'(t) = (s''(t)\beta'(s) + s'(t)^2\beta''(s)) \times s'(t)\beta'(s)$   
 $= s''(t)s'(t)[\beta'(s) \times \beta'(s)] + s'(t)^3\beta''(s) \times \beta'(s)$

เนื่องจาก  $(\beta'(s) \times \beta'(s) = 0)$

$$= s'(t)^3 \beta''(s) \times \beta'(s)$$

ทำการใส่ผลคูณภายในด้วย  $U$  ทั้งสองข้าง จะได้

$$(\alpha''(t) \times \alpha'(t)) \cdot U = s'(t)^3 (\beta''(s) \times \beta'(s)) \cdot U$$

จาก  $[\alpha''(t) \alpha'(t) U] = (\alpha''(t) \times \alpha'(t)) \cdot U = -(\alpha''(t) \times U) \cdot \alpha'(t) = -[\alpha''(t) U \alpha'(t)]$

จะได้  $[\alpha''(t) U \alpha'(t)] = -[U \alpha''(t) \alpha'(t)] = -s'(t)^3 [U \beta''(s) \beta'(s)]$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \kappa_g[\alpha](t) &= \kappa_g[\beta](s) = \beta''(s) \cdot J\beta'(s) \\ &= \beta''(s) \cdot (U \times \beta'(s)) = \frac{[\alpha'(t) \alpha''(t) U]}{s'(t)^3} \end{aligned}$$

#

ต่อไปจะแสดงค่าความโค้งจีโอเดซิก ( $\kappa_g$ ) ในพจน์ของ  $E, F, G$

**ทฤษฎีบท 2.5.5** ให้  $\alpha : (a, b) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  เป็นเส้นโค้งที่  $\mathbf{x} : H \rightarrow M$  เป็นส่วนของพื้นผิว โดย

$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  สำหรับ  $a < t < b$  แล้ว

$$\kappa_g[\alpha] \|\alpha'\|^3 = -\sqrt{EG-F^2} \left( -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) u'^2 v' + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) u' v'^2 + u'' v' - v'' u' \right)$$

**พิสูจน์** จะได้ว่า  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$

และ  $\alpha'' = \mathbf{x}_{uu} u'^2 + 2\mathbf{x}_{uv} u' v' + \mathbf{x}_{vv} v'^2 + \mathbf{x}_u u'' + \mathbf{x}_v v''$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \alpha'' \times \alpha' &= (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u) u'^3 + (\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v) v'^3 \\ &\quad + (\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) v'^3 + (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) u'^2 v' \\ &\quad + (u'' v' - v'' u') \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} (\alpha'' \times \alpha') \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) &= (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) u'^3 \\ &\quad + (\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) v'^3 + (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) u'^2 v' \\ &\quad + (u'' v' - v'' u') \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 \end{aligned}$$

จะพิจารณาพจน์ขวามือของสมการ

- $$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) &= (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u) (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v) \|\mathbf{x}_u\|^2 \\ &= \frac{1}{2} E_u F - \left( F_u - \frac{1}{2} E_v \right) E \\ &= -(EG - F^2) \Gamma_{11}^2 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

- $$(\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = (EG - F^2) \Gamma_{22}^1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- $(\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u) \|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)$   
 $+ 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) - 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v) \|\mathbf{x}_u\|^2$   
 $= \frac{1}{2} E_u G - \left( F_u - \frac{1}{2} E_v \right) F + E_v F - G_u E$   
 $= (EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)$
- $(\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_u + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = -(EG - F^2)(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)$

แทนค่าลงในสมการจะได้

$$(\alpha'' \times \alpha') \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = -(EG - F^2) \Gamma_{11}^2 u'^3$$

$$+ (EG - F^2) \Gamma_{22}^1 v'^3 + (EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) u'^2 v'$$

$$- (EG - F^2)(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) u' v'^2 + (u'' v' - v'' u') \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2$$

$$= (EG - F^2) \left( -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \right) + (u'' v' - v'' u') \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2$$

เนื่องจาก  $(\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2})$

$$= (EG - F^2) \left( -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) + (u'' v' - v'' u') \right)$$

และนำ  $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$  หาคลอดสมการจะได้

$$(\alpha'' \times \alpha') \cdot \frac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{(EG - F^2)}{\sqrt{EG - F^2}} \left( -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) + (u'' v' - v'' u') \right)$$

$$(\alpha'' \times \alpha') \cdot U = \sqrt{EG - F^2} \left( -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) + (u'' v' - v'' u') \right)$$

เพราะว่า  $(\alpha'' \times \alpha') \cdot U = -(\alpha' \times \alpha'') \cdot U$

$$\text{และจากบทตั้ง 2.5.4 } \kappa_g[\alpha](t) = \frac{[\alpha'(t) \alpha''(t) U]}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad \text{หรือ } \kappa_g[\alpha](t) \|\alpha'(t)\|^3 = [\alpha'(t) \alpha''(t) U]$$

จะได้

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot U = -\sqrt{EG - F^2} \left( -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) - (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) + (u'' v' - v'' u') \right)$$

$$\kappa_g[\alpha] \|\alpha'\|^3 = -\sqrt{EG - F^2} \left( -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{22}^1 v'^3 - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) u'^2 v' + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) u' v'^2 + u'' v' - v'' u' \right)$$

#

## บทที่ 3

### การดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงการพิจารณาลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน ได้แก่ ทรงกลม ทรงรี ทรงกระบอก ทรงกรวย ทรงพาราโบล่าเชิงทรงรี ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียวและ ทรงห่วยางซึ่งมีวิธีขั้นตอนการพิจารณาประกอบกับใช้โปรแกรมสำเร็จรูปช่วยในการคำนวณ ดังต่อไปนี้

#### 3.1 ขั้นตอนการคำนวณโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย

เริ่มต้นด้วยการคำนวณหาความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย โดยใช้ทฤษฎีบทในบทที่ 2 ซึ่งมีขั้นตอนการหาดังนี้

1. คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 1  $(E, F, G)$  โดย

$$E = \|x_u\|^2, \quad F = x_u \cdot x_v, \quad G = \|x_v\|^2$$

2. คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 2  $(e, f, g)$  โดย

$$e = U \cdot x_{uu}, \quad f = U \cdot x_{uv}, \quad g = U \cdot x_{vv}$$

และเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย  $U = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$

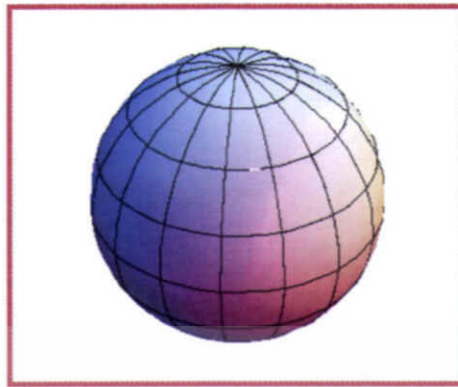
3. คำนวณหาค่า  $\kappa_G$  และ  $\kappa_M$  ด้วยสูตร

$$\kappa_G = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$\kappa_M = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

4. วิเคราะห์ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวโดยใช้ตาราง 1 ช่วยในการพิจารณาจะกล่าวถึงต่อไปในบทที่ 4 ซึ่งได้ผลดังต่อไปนี้

#### 3.2 ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของรูปทรงต่างๆ



รูปที่ 3.1 ทรงกลม

### 3.2.1 ทรงกลม (Sphere)

สมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $(0, 0, 0)$  และรัศมี  $a$  ในระบบพิกัดฉาก

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

จะแบ่งการพิจารณาหาค่าความโค้งทั้งสองโดยใช้สมการของเวกเตอร์ระบุทิศทาง  
เวกเตอร์ระบุทิศทางของพื้นผิวส่วนครึ่งบนของทรงกลม  $z(+)$

$$\vec{r}_{1,1}(x, y) = (x, y, (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{จะได้ } \vec{r}_{1,1}(x, y)_{,x} = \left( 1, 0, -\frac{x}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{1,1}(x, y)_{,y} = \left( 0, 1, -\frac{y}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{1,1}(x, y)_{,xx} = \left( 0, 0, -\frac{x^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{1,1}(x, y)_{,xy} = \left( 0, 0, -\frac{xy}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{1,1}(x, y)_{,yy} = \left( 0, 0, -\frac{y^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 1

$$E = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$F = \frac{xy}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$G = 1 + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$\mathbf{U} = \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{(a^2 - x^2 - y^2)}{a} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 2

$$e = \frac{-a^2 + y^2}{a(a^2 - x^2 - y^2)}$$

$$f = -\frac{xy}{a(a^2 - x^2 - y^2)}$$

$$g = \frac{-a^2 + x^2}{a(a^2 - x^2 - y^2)}$$

จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = \frac{1}{a^2}$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = -\frac{1}{a}$$

เวกเตอร์ระนาบทิศทางของพื้นผิวส่วนครึ่งล่างของทรงกลม  $z(-)$

$$\vec{r}_{1,2}(x, y) = (x, y, -(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}})$$

จะได้  $\vec{r}_{1,2}(x, y)_x = \left( 1, 0, \frac{x}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$

$$\vec{r}_{1,2}(x, y)_y = \left( 0, 1, \frac{y}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{1,2}(x, y)_{xx} = \left( 0, 0, \frac{x^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{1,2}(x, y)_{xy} = \left( 0, 0, \frac{xy}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{1,2}(x, y)_{yy} = \left( 0, 0, \frac{y^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 1

$$E = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$F = \frac{xy}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$G = 1 + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$\mathbf{U} = \left( -\frac{x}{a}, -\frac{y}{a}, \frac{(a^2 - x^2 - y^2)}{a} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 2

$$e = \frac{a^2 - y^2}{a(a^2 - x^2 - y^2)}$$

$$f = \frac{xy}{a(a^2 - x^2 - y^2)}$$

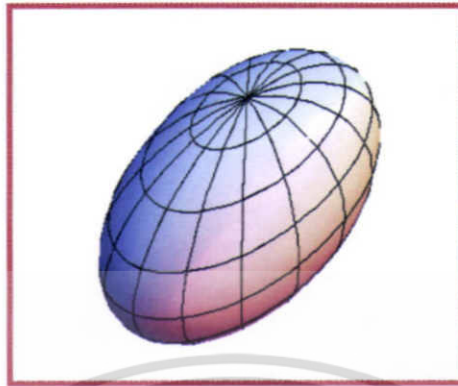
$$g = \frac{a^2 - x^2}{a(a^2 - x^2 - y^2)}$$

จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = \frac{1}{a^2}$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \frac{1}{a}$$



รูปที่ 3.2 ทรงรี

### 3.2.2 ทรงรี (Ellipsoid)

สมการของทรงรีที่มีจุดศูนย์กลาง  $(0, 0, 0)$  ในระบบพิกัดฉาก

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

จะแบ่งการพิจารณาค่าความโค้งทั้งสองโดยใช้สมการของเวกเตอร์ระบุทิศทาง  
เวกเตอร์ระบุทิศทางของพื้นผิวส่วนครึ่งบนของทรงรี  $z(+)$

$$\vec{r}_{2,1}(x, y) = \left( x, y, \left( c^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 - \frac{c^2}{b^2} y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

จะได้  $\vec{r}_{2,1}(x, y)_x = \left( 1, 0, -\frac{cx}{a^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)$

$$\vec{r}_{2,1}(x, y)_y = \left( 0, 1, -\frac{cy}{b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\vec{r}_{2,1}(x, y)_{xx} = \left( 0, 0, -\frac{cx^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{2,1}(x, y)_{xy} = \left( 0, 0, -\frac{cxy}{a^2 b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_{2,1}(x, y)_{yy} = \left( 0, 0, -\frac{cy^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 1

$$E = 1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$F = \frac{c^2 xy}{a^2 b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$G = 1 + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$\mathbf{U} = \left( \frac{cx}{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}, \frac{cy}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$e = \frac{\frac{cx^2}{a^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{a^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 + \frac{c^2x^2}{a^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})} + \frac{c^2y^2}{b^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f = \frac{cxy}{a^2b^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{c^2x^2}{a^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})} + \frac{c^2y^2}{b^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$g = \frac{\frac{cy^2}{b^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 + \frac{c^2x^2}{a^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})} + \frac{c^2y^2}{b^4(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = \frac{a^6b^6c^2}{(-a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2))^2}$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \frac{c^2(a^4b^2 + b^2c^2x^2 + a^2(b^4 + c^2y^2 - b^2(x^2 + y^2)))}{2(c^2(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}}(-a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2))}$$

เวกเตอร์ระบุทิศทางของพื้นผิวส่วนครึ่งล่างของทรงรี  $z(-)$

$$\vec{r}_{2,2}(x, y) = (x, y, -(c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2)^{\frac{1}{2}})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \vec{r}_{2,2}(x, y)_x &= \left( 1, 0, \frac{cx}{a^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 \vec{r}_{2,2}(x, y)_y &= \left( 0, 1, \frac{cy}{b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 \vec{r}_{2,2}(x, y)_{xx} &= \left( 0, 0, \frac{cx^2}{a^4 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{a^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 \vec{r}_{2,2}(x, y)_{xy} &= \left( 0, 0, \frac{cxy}{a^2 b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 \vec{r}_{2,2}(x, y)_{yy} &= \left( 0, 0, \frac{cy^2}{b^4 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 1

$$E = 1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

$$F = \frac{c^2 xy}{a^2 b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

$$G = 1 + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$U = \frac{\begin{pmatrix} \frac{cx}{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{cy}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ 1 \\ \left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}{\left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 2

$$e = \frac{\frac{cx^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f = \frac{cxy}{a^2 b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$g = \frac{\frac{cy^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{c^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

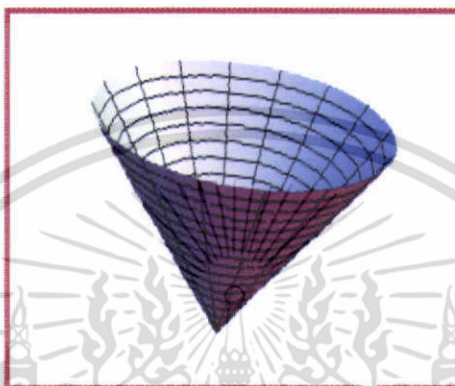
จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$K_G = \frac{a^6 b^6 c^2}{(-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$K_M = \frac{c^2(a^4b^2 + b^2c^2x^2 + a^2(b^4 + c^2y^2 - b^2(x^2 + y^2)))}{2(c^2(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}}(-a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2))}$$



รูปที่ 3.3 ทรงกรวย

### 3.2.3 ทรงกรวย (Cone)

สมการของทรงกรวยที่มีจุดยอดคือ  $(0, 0, 0)$  มีฐานวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

จะพิจารณาค่าความโค้งทั้งสองโดยใช้สมการของเวกเตอร์ระยะทาง  
เวกเตอร์ระยะทางของทรงกรวยคือ

$$\vec{r}_3(x, y) = (x, y, (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})$$

จะได้  $\vec{r}_3(x, y)_x = \left( 1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

$$\vec{r}_3(x, y)_y = \left( 0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\vec{r}_3(x, y)_{xx} = \left( 0, 0, -\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\vec{r}_3(x, y)_{xy} = \left( 0, 0, -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_3(x, y)_{yy} = \left( 0, 0, -\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 1

$$E = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$F = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$G = 1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$U = \left( -\frac{x}{\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, -\frac{y}{\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 2

$$e = \frac{-\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{2}}$$

$$f = -\frac{xy}{\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$g = \frac{-\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{2}}$$

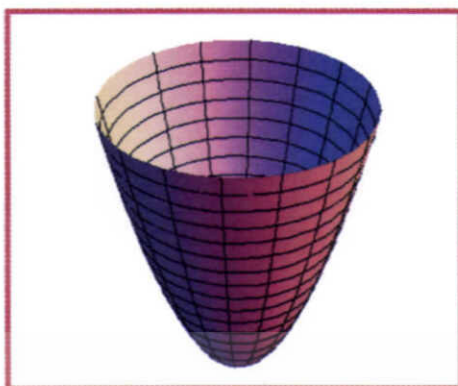
จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = 0$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \frac{1}{2\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4 ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี

### 3.2.4 ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี (Elliptic Paraboloid)

สมการของทรงพาราโบล่าเชิงวงรีในระบบพิกัดฉาก

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

จะพิจารณาค่าความโค้งทั้งสองโดยใช้สมการของเวกเตอร์ระบุทิศทาง

เวกเตอร์ระบุทิศทางของทรงพาราโบล่าเชิงวงรีคือ

$$\vec{r}_4(x, y) = \left( x, y, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

จะได้  $\vec{r}_4(x, y)_x = \left( 1, 0, \frac{2x}{a^2} \right)$

$$\vec{r}_4(x, y)_y = \left( 0, 1, \frac{2y}{b^2} \right)$$

$$\vec{r}_4(x, y)_{xx} = \left( 0, 0, \frac{2}{a^2} \right)$$

$$\vec{r}_4(x, y)_{xy} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_4(x, y)_{yy} = \left( 0, 0, \frac{2}{b^2} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 1

$$E = 1 + \frac{4x^2}{a^4}$$

$$F = \frac{4xy}{a^2b^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$G = 1 + \frac{4y^2}{b^4}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$\mathbf{U} = \left( -\frac{2x}{a^2 \left(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}, -\frac{2y}{b^2 \left(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 2

$$e = \frac{2}{a^2 \left(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f = 0$$

$$g = \frac{2}{b^2 \left(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

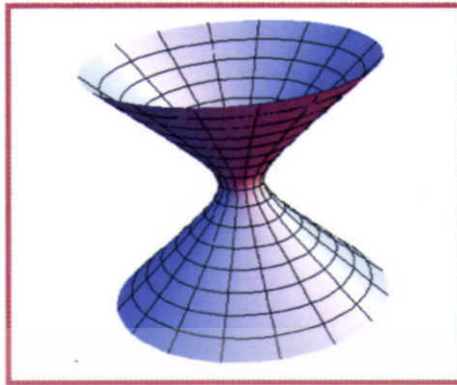
จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = \frac{4a^6 b^6}{(4b^4 x^2 + a^4(b^4 + 4y^2))^2}$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \frac{a^4 b^2 + 4b^2 x^2 + a^2(b^4 + 4y^2)}{\left(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}} (4b^4 x^2 + a^4(b^4 + 4y^2))}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.5 ทรงไฮเพอร์โบลามาแบบซันเดียว

### 3.2.5 ทรงไฮเพอร์โบลามาแบบซันเดียว (Hyperbolic Paraboloid)

สมการของทรงไฮเพอร์โบลามาแบบซันเดียวในระบบพิกัดฉาก

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2, z \geq 0$$

จะพิจารณาค่าความโค้งทั้งสองโดยใช้สมการของเวกเตอร์ระบุทิศทาง  
เวกเตอร์ระบุทิศทางของทรงไฮเพอร์โบลามาแบบซันเดียวคือ

$$\vec{r}_5(x, y) = (x, y, (-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})$$

จะได้  $\vec{r}_5(x, y)_x = \left( 1, 0, \frac{x}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$

$$\vec{r}_5(x, y)_y = \left( 0, 1, \frac{y}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_5(x, y)_{xx} = \left( 0, 0, -\frac{x^2}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_5(x, y)_{xy} = \left( 0, 0, -\frac{xy}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\vec{r}_5(x, y)_{yy} = \left( 0, 0, -\frac{y^2}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 1

$$E = 1 + \frac{x^2}{-a^2 + x^2 + y^2}$$

$$F = \frac{xy}{-a^2 + x^2 + y^2}$$

$$G = 1 + \frac{y^2}{-a^2 + x^2 + y^2}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$U = \left( \frac{x}{(-a^2 + 2(x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{(-a^2 + 2(x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\left(\frac{-a^2 + 2(x^2 + y^2)}{-a^2 + x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมาตรฐานที่ 2

$$e = \frac{\frac{x^2}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{-a^2 + 2(x^2 + y^2)}{-a^2 + x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f = \frac{xy}{(-a^2 + x^2 + y^2)(-a^2 + 2(x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}}$$

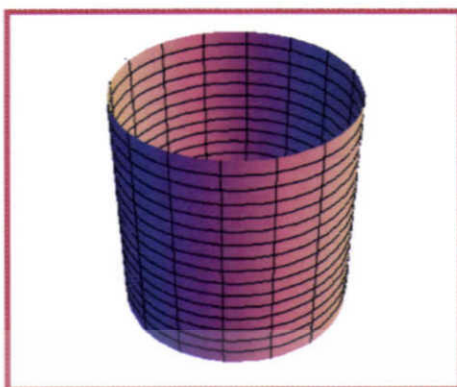
$$g = \frac{\frac{y^2}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{-a^2 + 2(x^2 + y^2)}{-a^2 + x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = -\frac{a^2}{(a^2 - 2(x^2 + y^2))^2}$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{(2(x^2 + y^2) - a^2)^{\frac{3}{2}}}$$



รูปที่ 3.6 ทรงกระบอก

### 3.2.6 ทรงกระบอก (Cylindrical)

สมการของทรงกระบอกในระบบพิกัดฉาก

$$x^2 + y^2 = a^2$$

จะพิจารณาค่าความโค้งทั้งสองโดยใช้สมการอิงตัวแปรเสริม

สมการอิงตัวแปรเสริมของทรงกระบอกคือ

$$\vec{r}_6(u, v) = (a \cos(u), a \sin(u), v)$$

จะได้  $\vec{r}_6(u, v)_u = (-a \sin(u), a \cos(u), 0)$

$$\vec{r}_6(u, v)_v = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r}_6(u, v)_{uu} = (-a \cos(u), -a \sin(u), 0)$$

$$\vec{r}_6(u, v)_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_6(u, v)_{vv} = (0, 0, 0)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 1

$$E = a^2$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$\mathbf{U} = (\cos(x), \sin(x), 0)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 2

$$e = -a$$

$$f = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

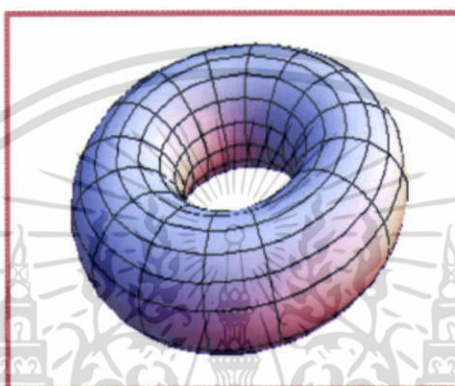
$$g = 0$$

จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = 0$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = -\frac{1}{2a}$$



รูปที่ 3.7 ทรงห่วงยาง

### 3.2.7 ทรงห่วงยาง (Torus)

สมการของทรงกระบอกในระบอบพิกัดฉาก

$$(c - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})^2 + z^2 = a^2$$

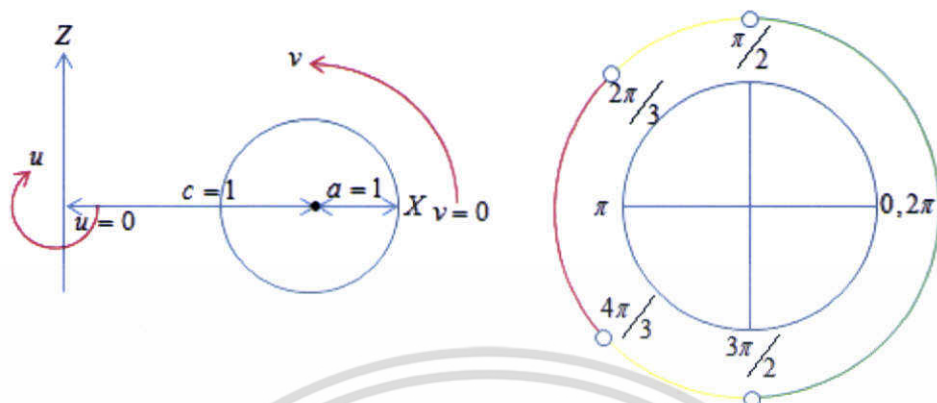
ซึ่งมีแกน  $z$  เป็นแกนหมุน

จะพิจารณาหาค่าความโค้งทั้งสองโดยใช้สมการอิงตัวแปรเสริม

สมการอิงตัวแปรเสริมของทรงห่วงยางคือ

$$\vec{r}_7(u, v) = ((c + a \cos(v)) \cos(u), (c + a \cos(v)) \sin(u), a \sin(v))$$

โดยมีพารามิเตอร์  $u, v$



รูปที่ 3.8 แสดงทิศทางของมุม  $u, v$  เป็นตัวแปรของทรงห่วงยางและแสดงช่วงของการเปลี่ยนเครื่องหมายค่าความโค้ง

จะได้

$$\begin{aligned}\vec{r}_7(u, v)_u &= (-(c + a \cos(v)) \sin(u), \cos(u)(c + a \cos(v)), 0) \\ \vec{r}_7(u, v)_v &= (-a \cos(u) \sin(v), -a \sin(u) \sin(v), a \cos(v)) \\ \vec{r}_7(u, v)_{uu} &= (-\cos(u)(c + a \cos(v)), -(c + a \cos(v)) \sin(u), 0) \\ \vec{r}_7(u, v)_{uv} &= (a \sin(u) \sin(v), -a \cos(u) \sin(v), 0) \\ \vec{r}_7(u, v)_{vv} &= (-a \cos(u) \cos(v), -a \cos(v) \sin(u), -a \sin(v))\end{aligned}$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 1

$$E = (c + a \cos(v))^2$$

$$F = 0$$

$$G = a^2$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$\mathbf{U} = (a \cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 2

$$e = -(c + a \cos(v)) \cos(v)$$

$$f = 0$$

$$g = -a$$

จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = \frac{\cos(v)}{a(c + a \cos(v))}$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = -\frac{c + 2a \cos(v)}{2a(c + a \cos(v))}$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

### ผลการวิจัย

ในบทนี้ส่วนแรกจะกล่าวถึงการนำค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของรูปทรงต่างๆ จากบทที่ 3 นำมาวิเคราะห์ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวของแต่ละรูปทรงต่างๆ โดยจำแนกประเภทของลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวด้วยตารางที่ 1 และส่วนที่สองจะวิเคราะห์ต่อไปว่าค่าความโค้งที่มีเครื่องหมายเหมือนกันแต่มีค่ามากน้อยที่แตกต่างกัน ลักษณะเฉพาะที่ของจุดพื้นผิวจะมีลักษณะแตกต่างกันอย่างไร

#### 4.1 การวิเคราะห์ลักษณะที่ของจุดบนพื้นผิวของรูปทรงต่างๆ

หลังจากที่หาค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยในบทที่ 3 แล้วต่อไปจะทำการวิเคราะห์ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวของแต่ละรูปทรงมีลักษณะเป็นอย่างไรโดยใช้ตารางที่ 1 ผลที่ได้เป็นดังต่อไปนี้

##### 4.1.1 ทรงกลม

จากค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G = \frac{1}{a^2}$  และค่าความโค้งเฉลี่ย  $\kappa_M = -\frac{1}{a}$

ผลการวิเคราะห์พบว่าทุกๆจุดที่อยู่บนพื้นผิวส่วนครึ่งบนของทรงกลมซึ่งค่าความโค้งทั้งสองเป็นค่าคงที่ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ และจากตาราง 1 จะได้ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งบนของทรงกลมมีลักษณะเป็นโดม (Dome) และส่วนของพื้นผิวส่วนครึ่งล่างของทรงกลมซึ่งมีค่าความโค้งเป็นค่าคงที่ซึ่งค่าความโค้งของเกาส์มีค่ามากกว่าศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่าน้อยกว่าศูนย์ และจากตาราง 1 จะได้ว่าลักษณะของพื้นผิวส่วนครึ่งล่างของทรงกลมมีลักษณะเป็นถ้ำ (Basin)

##### 4.1.2 ทรงรี

จากค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G = \frac{a^6 b^6 c^2}{(-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))^2}$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \frac{c^2(a^4b^2 + b^2c^2x^2 + a^2(b^4 + c^2y^2 - b^2(x^2 + y^2)))}{2(c^2(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}}(-a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2))}$$

พิจารณาค่าความโค้งของเกาส์ ในพจน์ของเศษและพจน์ของส่วนดังนี้

$$\text{พจน์ } a^6b^6c^2 > 0$$

$$\text{และ } (-a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2))^2 > 0$$

ดังนั้น  $\kappa_G > 0$  สำหรับพื้นผิวของทรงรีส่วนครึ่งบนและส่วนครึ่งล่าง สำหรับทุกจุด  $(x, y, z)$

บนทรงรี พิจารณาค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\begin{aligned} \text{เทอม } & -a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2) \\ &= -a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4b^4 - a^4b^2y^2 + a^4c^2y^2 \\ &= -a^2b^4x^2 - a^4b^2y^2 + b^4c^2x^2 + a^4c^2y^2 + a^4b^4 \\ &= -a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2) + c^2(b^4x^2 + a^4y^2) + a^4b^4 \end{aligned}$$

จาก  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2(1 - \frac{z^2}{c^2})$  โดยสมการทรงรี

$$\begin{aligned} &= -a^2b^2(a^2b^2)(1 - \frac{z^2}{c^2}) + c^2(b^4x^2 + a^4y^2) + a^4b^4 \\ &= -a^4b^4 + \frac{a^4b^4}{c^2}z^2 + c^2b^4x^2 + c^2a^4y^2 + a^4b^4 \\ &= \frac{(a^4b^4z^2 + c^4b^4x^2 + c^4a^4y^2)}{c^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เทอม } & a^4b^2 + b^2c^2x^2 + a^2(b^4 + c^2y^2 - b^2(x^2 + y^2)) \\ &= a^4b^2 + a^2b^4 + c^2(b^2x^2 + a^2y^2) - a^2b^2(x^2 + y^2) \\ &= a^4b^2 + a^2b^4 + c^2(a^2b^2)(1 - \frac{z^2}{c^2}) - a^2b^2(x^2 + y^2) \\ &= a^4b^2 + a^2b^4 + c^2(b^2x^2 + a^2y^2) - a^2b^2(x^2 + y^2) \\ &= a^4b^2 + a^2b^4 + a^2b^2c^2 - a^2b^2z^2 - a^2b^2(x^2 + y^2) \\ &= a^4b^2 + a^2b^4 + a^2b^2c^2 - a^2b^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= a^2b^2(a^2 + b^2) + a^2b^2c^2 - a^2b^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= a^2b^2(a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) \\ &= a^2b^2(a^2 - x^2 + b^2 - y^2 + c^2 - z^2) \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $a > x, b > y, c > z$

จะได้ว่า  $a^2b^2(a^2 - x^2 + b^2 - y^2 + c^2 - z^2) > 0$

เนื่องจาก  $c^2 > 0$ ,  $a^2b^2(a^2 - x^2 + b^2 - y^2 + c^2 - z^2) > 0$

$$(-a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2))^2 > 0$$

และ  $2(c^2(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}} > 0$

จะได้ว่าพจน์

$$\frac{c^2(a^4b^2 + b^2c^2x^2 + a^2(b^4 + c^2y^2 - b^2(x^2 + y^2)))}{2(c^2(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}}(-a^2b^4x^2 + b^4c^2x^2 + a^4(b^4 - b^2y^2 + c^2y^2))} > 0$$

นั่นคือค่าความโค้งเฉลี่ยบนพื้นผิวส่วนครึ่งบนทรงรีมีค่า  $\kappa_M < 0$

และค่าความโค้งเฉลี่ยบนพื้นผิวส่วนครึ่งล่างทรงรีมีค่า  $\kappa_M > 0$

ผลการวิเคราะห์พบว่าทุกๆจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งบนทรงรีมีค่าความโค้งของเกาส์มากกว่าศูนย์ แต่มีค่าความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่าศูนย์ และจากตาราง 1 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งบนทรงรีมีลักษณะเป็นโดม และทุกๆจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งล่างทรงรีมีค่าความโค้งของเกาส์มากกว่าศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าศูนย์ และจากตาราง 1 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งล่างทรงรีมีลักษณะเป็นถ้วย

#### 4.1.3 ทรงกรวย

จากค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G = 0$  และค่าความโค้งเฉลี่ย  $\kappa_M = \frac{1}{2\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$

ผลการวิเคราะห์พบว่าทรงกรวย ซึ่งค่าความโค้งเกาส์มีค่าเป็นศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่ามากกว่าศูนย์ จากตาราง 1 จะได้ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดพื้นผิวของทรงกรวยมีลักษณะเป็นรูปประทุน (Antiformal)

#### 4.1.4 ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี

จากค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G = \frac{4a^6b^6}{(4b^4x^2 + a^4(b^4 + 4y^2))^2}$

และค่าความโค้งเฉลี่ย  $\kappa_M = \frac{a^4b^2 + 4b^2x^2 + a^2(b^4 + 4y^2)}{(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4})^{\frac{1}{2}}(4b^4x^2 + a^4(b^4 + 4y^2))}$

ผลการวิเคราะห์พบว่าทรงพาราโบลาลักษณะวงรี ซึ่งค่าความโค้งแกว่งมีค่ามากกว่าศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่ามากกว่าศูนย์ จากตาราง 1 จะได้ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดพื้นผิวพาราโบลาลักษณะวงรีมีลักษณะเป็นรูปถ้วย

#### 4.1.5 ไฮเพอร์โบลาลักษณะซันเดียม

$$\text{จากค่าความโค้งของแกว่ง } \kappa_G = -\frac{a^2}{(a^2 - 2(x^2 + y^2))^2}$$

$$\text{และค่าความโค้งเฉลี่ย } \kappa_M = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{(2(x^2 + y^2) - a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 - z^2 = a^2$$

$$\text{นั่นคือ } x^2 + y^2 - a^2 = z^2$$

$$\text{เนื่องจาก } z^2 > 0 \text{ ทำให้ } x^2 + y^2 - a^2$$

$$\text{จะได้ } \kappa_M > 0$$

$$\text{และเมื่อ } x^2 + y^2 = a^2 \text{ จะได้ } \kappa_M = 0$$

ผลการวิเคราะห์พบว่าทรงไฮเพอร์โบลาลักษณะซันเดียม ซึ่งค่าความโค้งของแกว่งมีค่าน้อยกว่าศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่ามากกว่าศูนย์และจากตาราง 1 จะได้ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวของรูปทรงไฮเพอร์โบลาลักษณะซันเดียมมีลักษณะเป็นรูปประทุนแบบอานม้า (Antiformal saddle)

และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ  $x^2 + y^2 = a^2$  และจากตาราง 1 จะได้ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวของรูปทรงไฮเพอร์โบลาลักษณะซันเดียมมีลักษณะเป็นรูปอานม้าแบบสมบูรณ์ (Perfect saddle)

#### 4.1.6 ทรงกระบอก

$$\text{จากค่าความโค้งของแกว่ง } \kappa_G = 0 \text{ และค่าความโค้งเฉลี่ย } \kappa_M = -\frac{1}{2a}$$

ผลการวิเคราะห์พบว่าทรงกระบอก ซึ่งค่าความโค้งแกว่งมีค่าเท่ากับศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่าน้อยกว่าศูนย์และจากตาราง 1 จะได้ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวของทรงกระบอกมีลักษณะเป็นรูปประทุนหงาย (Synformal)

#### 4.1.7 ทรงห้วยยาง

$$\text{จากค่าความโค้งของแกว่ง } \kappa_G = \frac{\cos(v)}{a(c + a \cos(v))} \text{ และค่าความโค้งเฉลี่ย } \kappa_M = -\frac{c + 2a \cos(v)}{2a(c + a \cos(v))}$$

พิจารณาค่าความโค้งของรูปทรงห่วงยาง

สมมติให้  $a = c = 1$

จะได้  $\kappa_G = \frac{\cos v}{1 + \cos v}$  และ  $-\frac{(1 + 2 \cos v)}{2(1 + \cos v)}$  โดยที่  $v \in [0, 2\pi]$

โดยพิจารณาดังนั้น

กรณีที่ 1  $\kappa_G = 0$  นั่นคือ  $\cos v = 0$

$$v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

จะได้  $\kappa_M = -\frac{(1+0)}{2(1+0)} = -\frac{1}{2} < 0$

กรณีที่ 2  $\kappa_G < 0$  นั่นคือ  $\frac{\cos v}{(1 + \cos v)} < 0$

หรือ  $\cos v(1 + \cos v) < 0$

$$-1 < \cos v < 0$$

$$0 < 1 + \cos v < 1$$

นั่นคือ  $v \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  จะได้  $\cos v < 0$

พิจารณา  $\kappa_M = -\frac{1}{2} \frac{(1 + 2 \cos v)}{1 + \cos v} = \frac{(1 + 2 \cos v)}{-2(1 + \cos v)}$

เพราะว่า  $-2(1 + \cos v) < 0$

จึงพิจารณาเฉพาะเทอม  $1 + 2 \cos v$

โดย  $1 + 2 \cos v = 0$  เมื่อ  $v = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$1 + 2 \cos v < 0$  เมื่อ  $\cos v < -\frac{1}{2}$  และ  $-1 < \cos v < 0$

นั่นคือ  $-1 < \cos v < -\frac{1}{2}$

จะได้  $v \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$

$1 + 2 \cos v > 0$  เมื่อ  $\cos v > -\frac{1}{2}$  และ  $-1 < \cos v < 0$

นั่นคือ  $-\frac{1}{2} < \cos v < 0$

จะได้  $v \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$

กรณีที่ 3  $\kappa_G > 0$  นั่นคือ  $\frac{\cos v}{(1 + \cos v)} > 0$

หรือ  $\cos v(1 + \cos v) > 0$

$\cos v < -1$  หรือ  $\cos v > 0$  แต่  $-1 < \cos v < 1$

เพราะฉะนั้น  $\cos v > 0$

จะได้  $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

พิจารณา  $\kappa_M = -\frac{(1 + 2\cos v)}{2(1 + \cos v)}$

เพราะว่า  $\cos v > 0$

จะได้  $\frac{(1 + 2\cos v)}{2(1 + \cos v)} > 0$

$-\frac{(1 + 2\cos v)}{2(1 + \cos v)} < 0$

เพราะฉะนั้น  $\kappa_M < 0$  ทุกๆ  $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

สามารถสรุปค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยได้ดังตารางที่ 3

angle $v$ curvature	$v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$v = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	$v \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$v \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$	$v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$\kappa_G$	0	-	-	-	+
$\kappa_M$	-	0	-	+	-
Classification of point on a surface	Synformal	Perfect saddle	Synformal saddle	Antiformal saddle	Dome

ตารางที่ 4 แสดงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวรูปทรงห้วงยาง โดยพิจารณาจากเครื่องหมายค่าความโค้งทั้งสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.2 ผลการวิเคราะห์ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยที่มีค่ามากน้อยที่แตกต่างกัน

จากผลในส่วนแรกจะพิจารณาเฉพาะเครื่องหมายของค่าความโค้งเท่านั้น โดยดูว่าแต่ละจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากหมุนนั้นมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวเป็นลักษณะใด โดยพิจารณาจากเครื่องหมายของค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย ผลการวิเคราะห์ในส่วนต่อมาจะพิจารณาต่อไปว่าแล้วค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยที่มีเครื่องหมายเหมือนกัน แต่มีค่ามากน้อยแตกต่างกัน เช่น  $\kappa_G = 8$  และ  $\kappa_G = 10$  จะสามารถบอกลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวได้อย่างไรบ้าง สำหรับการพิจารณาในส่วนนี้จะพิจารณารูปทรงที่มีความโค้งไม่คงที่ ได้แก่รูปทรงพาราโบลาลิงวงรี รูปทรงรี รูปทรงไฮเพอร์โบลาลินแบบขึ้นเดียว รูปทรงกรวย รูปทรงห่วยยาง เนื่องจากรูปทรงกลมและรูปทรงกระบอกมีค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับค่าพิกัด  $(x, y, z)$

##### 4.2.1 ทรงพาราโบลาลิงวงรี

จากค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G = \frac{4a^6b^6}{(4b^4x^2 + a^4(b^4 + 4y^2))^2}$ ) และ

ค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M = \frac{a^4b^2 + 4b^2x^2 + a^2(b^4 + 4y^2)}{(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4})^2(4b^4x^2 + a^4(b^4 + 4y^2))}$ )

สมมติให้สมการพาราโบลาลิงวงรีมี  $a = b = 1$

จะได้สมการพาราโบลาลิงวงรีมีสมการเป็น  $z = x^2 + y^2$

โดยที่  $\kappa_G = \frac{4}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^2}$  และ  $\kappa_M = \frac{2 + 4x^2 + 4y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}$

พิจารณาค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ )

เนื่องจากพาราโบลาลิงวงรีมีค่า  $\kappa_G > 0$  และ  $\kappa_M > 0$  ทุกๆจุด  $(x, y, z)$  บนรูปทรงพาราโบลาลิงวงรี

แต่ค่า  $\kappa_G > 0$  และ  $\kappa_M > 0$  นี้มีค่ามากน้อยที่แตกต่างกัน ไปขึ้นอยู่กับค่าพิกัด  $x, y, z$  บนรูปทรง

พาราโบลาลิงวงรี ยกตัวอย่าง เช่นที่จุด  $(1, 1, 2)$  มีค่า  $\kappa_G = \frac{4}{81} = 0.0494$ ,  $\kappa_M = \frac{10}{27} = 0.3704$  และ

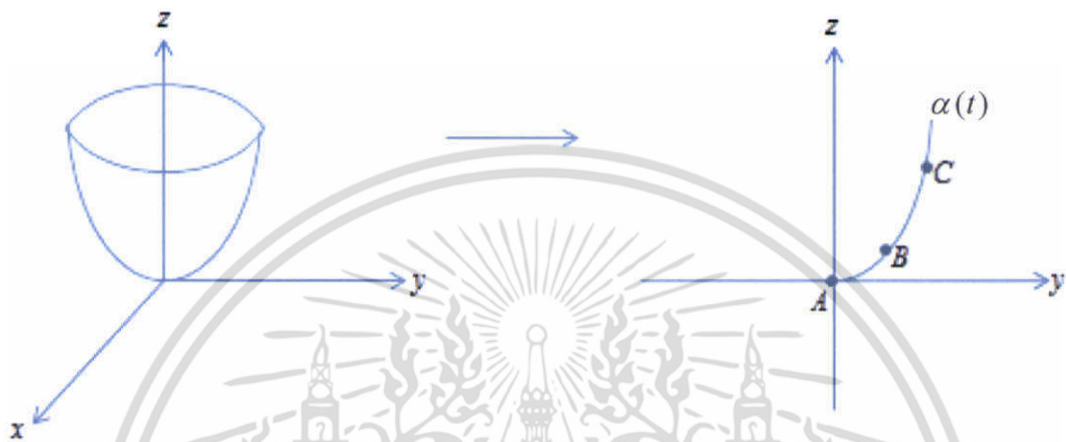
ที่จุด  $(0, 2, 4)$  มีค่า  $\kappa_G = \frac{4}{289} = 0.0138$ ,  $\kappa_M = \frac{18}{17\sqrt{17}} = 0.2568$  จะเห็นว่าค่าความโค้งของเกาส์

ของจุดนี้มีค่าเป็นบวกแต่มีค่ามากน้อยแตกต่างกันและค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดที่เป็นบวกแต่มีค่ามากน้อยแตกต่างกัน จะพิจารณาว่าค่า  $\kappa_G$  ที่เป็นค่าบวกที่แตกต่างกันและค่า  $\kappa_M$  บวกที่แตกต่างกันนี้บอกถึงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวเป็นอย่างไรบ้าง

เนื่องจากพาราโบลาลิงวงรีนั้นเกิดจากเส้นโค้ง  $\alpha(t)$  หมุนรอบแกน  $z$  ดังรูป

จากสมการพาราโบลาลิงวงรีมีสมการเป็น  $z = x^2 + y^2$

เมื่อพิจารณาบนระนาบ  $yz$  เป็นรูปครึ่งพาราโบลาคี่ที่เป็นส่วนหนึ่งของสมการ  $z = y^2$  ซึ่งเป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดที่หมุนรอบแกน  $z$  ที่ทำให้เกิดรูปทรงพาราโบลาลิงวงรี



รูปที่ 4.1 พาราโบลาลิงวงรีที่มีค่า  $a = b = 1$  และเส้นโค้งก่อกำเนิดที่ทำให้เกิดทรงพาราโบลาลิงวงรี

พิจารณา 3 จุด  $A(0,0,0)$ ,  $B(0,1,1)$ ,  $C(0,2,4)$  ที่อยู่บนรูปทรงพาราโบลาลิงวงรี

และเมื่อพิจารณาบนระนาบ  $yz$  จุด 3 จุดจะมีพิกัดเป็น  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(2,4)$

จากค่าความโค้งของเกาส์ของจุดบนพาราโบลาลิงวงรี  $\kappa_G = \frac{4}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^2}$

และจากค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดบนพาราโบลาลิงวงรี  $\kappa_M = \frac{2 + 4x^2 + 4y^2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$

ที่จุด  $A(0,0,0)$  มี  $\kappa_G = 4$ ,  $\kappa_M = 2$

ที่จุด  $B(0,1,1)$  มี  $\kappa_G = \frac{4}{25} = 0.16$ ,  $\kappa_M = \frac{6}{5\sqrt{5}} = 0.5367$

ที่จุด  $C(0,2,4)$  มี  $\kappa_G = \frac{4}{289} = 0.0138$ ,  $\kappa_M = \frac{18}{17\sqrt{17}} = 0.2568$

เนื่องจากค่า  $x = 0$  นั่นคือค่า  $\kappa_G$  จะน้อยลงเมื่อค่า  $y$  มากขึ้น

และในทำนองเดียวกันค่า  $\kappa_M$  จะน้อยลงเมื่อค่า  $y$  มากขึ้นด้วย

ต่อมาพิจารณาค่าความโค้งของเส้นโค้งที่เป็นส่วนหนึ่งของพาราโบลาลิงวงรีบนระนาบ  $yz$

จากสมการค่าความโค้งของเส้นโค้ง  $\alpha(t) = (y(t), z(t))$  บนระนาบ

$$\kappa(t) = \frac{y'(t)z''(t) - y''(t)z'(t)}{\left(\sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2}\right)^3}$$

สมการของพาราโบลา  $z = y^2$  มีสมการเวกเตอร์เป็น  $\alpha(t) = (t, t^2)$

นั่นคือ  $y(t) = t$  และ  $z(t) = t^2$

$$y'(t) = 1 \text{ และ } z'(t) = 2t$$

$$y''(t) = 0 \text{ และ } z''(t) = 2$$

จะได้ 
$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ที่จุด  $A(0,0)$  มี  $\kappa = 2$

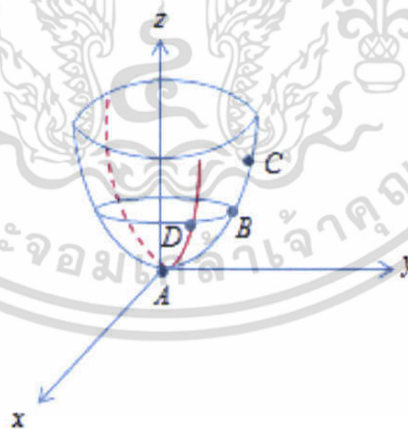
ที่จุด  $B(1,1)$  มี  $\kappa = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} = 0.1789$

ที่จุด  $C(2,4)$  มี  $\kappa = \frac{2}{17^{\frac{3}{2}}} = 0.0285$

นั่นคือที่จุด  $A$  มีค่าความโค้งมากที่สุด หรือ  $\kappa_A > \kappa_B > \kappa_C$

ซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่าความโค้งของเกาส์จาก  $\kappa_{G(A)} > \kappa_{G(B)} > \kappa_{G(C)}$  และ

$\kappa_{M(A)} > \kappa_{M(B)} > \kappa_{M(C)}$  พิจารณาจากรูป



รูปที่ 4.2 พาราโบลาเชิงทรงวงรี

เนื่องจากพาราโบลาเชิงวงรีเป็นรูปทรงที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้งก่อกำเนิด เพราะฉะนั้นจุดตั้งจะอยู่บนรูปพาราโบลา(เส้นโค้งก่อกำเนิด) ที่มีค่าพารามิเตอร์ต่างกัน แต่เป็นรูปเดียวกันนั่นคือความโค้ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่เส้นโค้งเหมือนกันในแนวเส้นรอบวงของวงกลม (เช่นถ้าจะเปรียบเทียบกันเองของจุดใดๆในแนวเดียวกันของเส้นโค้งที่กำหนดดังรูปจุด  $A, B$  และจุด  $C$  อยู่ในแนวเดียวกันนั่นคือ จากข้างต้นที่ได้พิจารณาไว้ จุด  $A$  มีค่าความโค้งทั้งสองมากที่สุดเมื่อเทียบกับจุด  $B, C$  กรณีที่สองจุด  $D$  ซึ่งอยู่บนเส้นโค้งสีแดงที่ก็เป็นเส้นโค้งที่กำหนดเหมือนกันดังรูปและจุด  $B$  เป็นจุดที่อยู่บนเส้นโค้งที่กำหนด  $(\alpha(t))$  และจุด  $B$  กับจุด  $D$  อยู่ในแนววงกลมเดียวกันโดยแนววงกลมนี้เกิดจากการที่จุด  $B$  หมุนรอบแกน  $D$  ทำให้จุดใดๆที่อยู่บนแนววงกลมนี้จะมีค่าความโค้งสองเท่ากันดังรูป กรณีที่ 3 จุดที่เปรียบเทียบอยู่คนละแนวเส้นโค้งที่กำหนดคนละเส้นและยังอยู่คนละแนววงกลมด้วยจากรูปพิจารณาที่จุด  $C$  และ  $D$  เนื่องจากจุด  $D$  มีค่าความโค้งทั้งสองเป็นค่าเดียวกันกับที่จุด  $B$  และจากจุด  $B$  มีความโค้งสองทั้งมากกว่าค่าความโค้งทั้งสองที่จุด  $C$  ดังนั้นค่าความโค้งทั้งสองที่จุด  $D$  จะมีความมากกว่าค่าความโค้งสองที่จุด  $C$ )

จากค่าความโค้งทั้งสองมีความสัมพันธ์ไปในทิศทางเดียวกันนั่นคือจุดใดๆบนรูปทรงของพาราโบลาชิงวงรีมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นด้วย เนื่องจาก  $\kappa_G > 0, \kappa_M > 0$  แต่ด้วยค่าความโค้งทั้งสองนี้แต่ละจุดมีค่ามากขึ้นแตกต่างกันไปจากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ณ จุดที่มีค่าความโค้งทั้งสองมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นด้วยลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีค่าความโค้งสองน้อยกว่า



รูปที่ 4.3 เส้นโค้งที่กำหนดของรูปทรงพาราโบลาชิงวงรี

$$\text{จากค่าความโค้งของแกว่งของจุดบนพาราโบลาชิงวงรี } \kappa_G = \frac{4}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^2}$$

$$\text{และจากค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดบนพาราโบลาชิงวงรี } \kappa_M = \frac{2 + 4x^2 + 4y^2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาที่ค่าความโค้งของเกาส์เมื่อค่า  $x = 0$  จะได้  $\kappa_G = \frac{4}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^2} = \frac{4}{(1 + 4y^2)^2}$

เนื่องจากค่าความโค้งของเกาส์ของรูปทรงพาราโบล่าเชิงวงรีในกรณีนี้ขึ้นอยู่กับค่า  $y$  นั้นหมายถึงค่า  $y$  ยิ่งเพิ่มค่า  $\kappa_G$  ยิ่งจะลดลงเนื่องจาก  $\kappa_G$  เป็นฟังก์ชันลดของตัวแปร  $y$

พิจารณาค่าความโค้งเฉลี่ยเมื่อค่า  $x = 0$  จะได้  $\kappa_M = \frac{2 + 4y^2}{(4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}}$

เนื่องจากค่าความโค้งเฉลี่ยของรูปทรงพาราโบล่าเชิงวงรีในกรณีนี้ขึ้นอยู่กับค่า  $y$  นั้นหมายถึงค่า  $y$  ยิ่งเพิ่มค่า  $\kappa_M$  ยิ่งจะลดลงเนื่องจาก  $\kappa_M$  เป็นฟังก์ชันลดของตัวแปร  $y$

#### 4.2.2 ทรงกรวย

จากค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G = 0$  และ

ค่าความโค้งเฉลี่ย  $\kappa_M = \frac{1}{2\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$

สมการทรงกรวยมีสมการเป็น  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

พิจารณาค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ )

เนื่องจากรูปทรงกรวยมีค่า  $\kappa_G = 0$  และ  $\kappa_M > 0$  ทุกๆจุดบนรูปทรงกรวยนี้มีค่ามากที่สุดที่แตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับค่าพิกัด  $x, y, z$  บนรูปทรงกรวย ยกตัวอย่าง เช่นที่จุด  $(1, 1, \sqrt{2})$  มีค่า

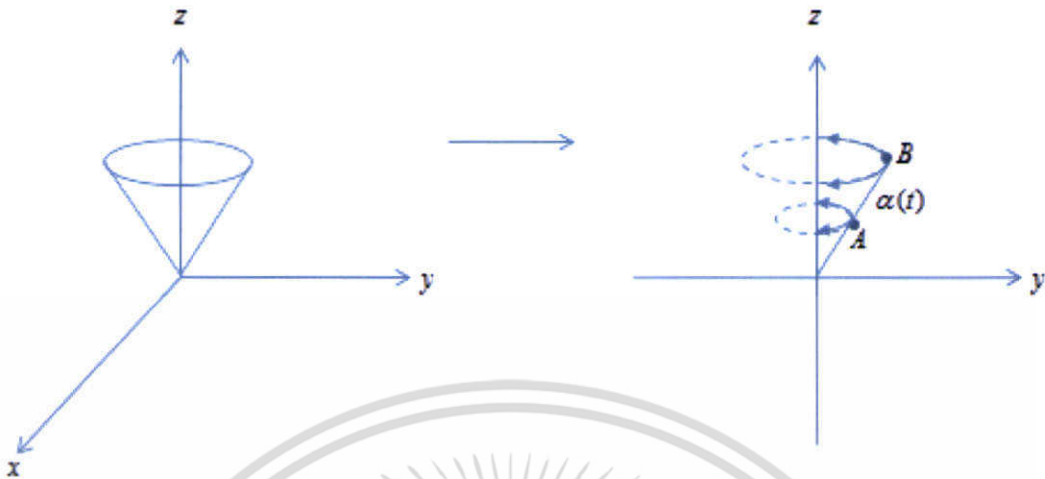
$\kappa_G = 0, \kappa_M = \frac{1}{4} = 0.25$  และที่จุด  $(2, 2, 2\sqrt{2})$  มีค่า  $\kappa_G = 0, \kappa_M = \frac{1}{8} = 0.125$  จะเห็นว่าค่าความ

โค้งของเกาส์ของจุดนี้มีค่าเป็นศูนย์เหมือนกันและค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดที่เป็นบวกแต่มีค่ามากที่สุดที่แตกต่างกัน ซึ่งในกรณีรูปทรงกรวยนี้จะพิจารณาเฉพาะค่า  $\kappa_M$  บวกที่แตกต่างกันนี้บอกถึงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวเป็นอย่างไรบ้าง

เนื่องจากรูปทรงกรวยนั้นเกิดจากเส้นตรง  $\alpha(t)$  หมุนรอบแกน  $z$  ดังรูป

จากสมการกรวยมีสมการเป็น  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

เมื่อพิจารณาบนระนาบ  $yz$  เป็นเส้นตรงมีสมการคือ  $z = y$  ซึ่งเป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดที่หมุนรอบแกน  $z$  ที่ทำให้เกิดรูปทรงกรวย



รูปที่ 4.4 รูปทรงกรวยและเส้นก่อกำเนิด (เส้นตรง) ที่ทำให้เกิดรูปทรงกรวย

จากค่าความโค้งของแกนรูปทรงกรวย  $\kappa_G = 0$

จากค่าความโค้งเฉลี่ยบนรูปทรงกรวย  $\kappa_M = \frac{1}{2\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{3/2}}$

ที่จุด  $A(0, 1, 1)$  มี  $\kappa_G = 0, \kappa_M = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.3535$

ที่จุด  $B(0, 2, 2)$  มี  $\kappa_G = 0, \kappa_M = \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0.1768$

นั่นคือค่าความโค้งของแกนเป็นศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่าน้อยขึ้นอยู่กับค่า  $y$  ยิ่งค่า  $y$  มากค่า  $\kappa_M$  จะน้อย

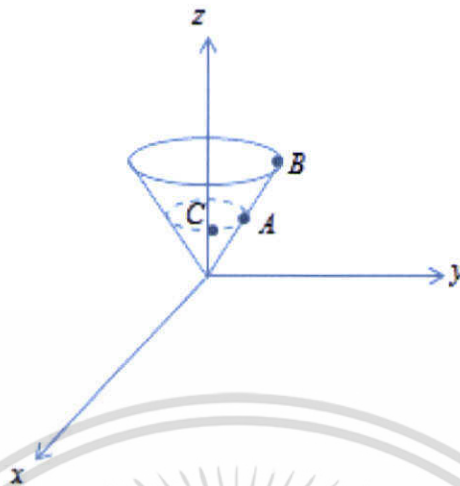
ณ จุด  $A$  เป็นจุดที่อยู่บนแนววงกลมรัศมี 1 หน่วยซึ่งเป็นแนววงกลมที่เกิดจากเส้นก่อกำเนิดหมุนรอบแกน  $z$

และณ จุด  $B$  เป็นจุดที่อยู่บนแนววงกลมรัศมี 2 หน่วยซึ่งเป็นแนววงกลมที่เกิดจากเส้นก่อกำเนิดหมุนรอบแกน  $z$

นั่นคือที่จุด  $B$  มีค่าความโค้งน้อยกว่าจุด  $A$

ซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่าความโค้งเฉลี่ยจาก  $\kappa_{M(A)} > \kappa_{M(B)}$

นั่นคือสามารถสรุปได้ว่าค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดบนรูปทรงกรวยมีค่ามากหมายถึงลักษณะเฉพาะที่ของจุดมีความโค้งมากกว่าจุดที่มีค่าความโค้งเฉลี่ยที่น้อยกว่า



รูปที่ 4.5 รูปทรงกรวย

พิจารณาจากรูปข้างต้น กรณีที่ 1 เปรียบเทียบจุดที่อยู่ในแนวบนเส้นตรงก่อกำเนิดจากรูปนั้นคือจุด  $A$  และจุด  $B$  ค่าความโค้ง  $\kappa_M$  ที่จุด  $A$  จะมีค่ามากกว่าที่จุด  $B$  ดังที่ได้พิจารณาข้างต้น กรณีที่ 2 เปรียบเทียบที่จุดใดๆที่อยู่บนแนววงกลมที่เกิดจากเส้นที่หมุนรอบแกน  $A$  นั่นคือจากรูปที่จุด  $A$  และจุด  $C$  จะมีความโค้งเฉลี่ยเท่ากันเนื่องจากอยู่บนแนววงกลมเดียวกัน กรณีที่ 3 เปรียบเทียบจุดใดๆที่อยู่บนเส้นก่อกำเนิดและบนแนววงกลม นั่นคือจุด  $C$  และจุด  $B$  ดังรูปเนื่องจากที่จุด  $A$  มีความโค้งเฉลี่ยมากกว่าที่จุด  $B$  และที่จุด  $A$  มีความโค้งเฉลี่ยเท่ากับที่จุด  $C$  ดังนั้นที่จุด  $C$  จึงมีความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจุด  $B$

จากค่าความโค้งของเส้นที่มีเป็นศูนย์กลางจุดบนรูปทรงกรวยและค่าความโค้งเฉลี่ยที่มีค่าเป็นบวก นั่นคือจุดใดๆบนรูปทรงกรวยมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นรูปประทุน เนื่องจาก  $\kappa_G = 0$   $\kappa_M > 0$  แต่ด้วยค่าความโค้งเฉลี่ยนี้แต่ละจุดมีค่าน้อยแตกต่างกันไปจากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ณ จุดที่มีความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นประทุนที่ลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า

#### 4.2.3 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว

จากค่าความโค้งของเส้น  $\kappa_G = -\frac{a^2}{(a^2 - 2(x^2 + y^2))^2}$  และ

$$\text{ค่าความโค้งเฉลี่ย } \kappa_M = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{(2(x^2 + y^2) - a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และสมการไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียวมีสมการเป็น  $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$

พิจารณาสมมติให้  $a = 1$  จะได้  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$\text{โดยที่ } \kappa_G = -\frac{1}{(1-2(x^2+y^2))^2} \text{ และ } \kappa_M = \frac{x^2+y^2-1}{(2(x^2+y^2)-1)^{\frac{3}{2}}}$$

พิจารณาค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ )

เนื่องจากรูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียวมีค่า  $\kappa_G < 0$  และ  $\kappa_M > 0$  ทุกๆจุด  $(x, y, z)$  บนรูปทรง

ไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียว แต่ค่า  $\kappa_G < 0$  และ  $\kappa_M > 0$  นี้มีค่ามากขึ้นที่แตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับค่า

พิกัด  $x, y, z$  บนรูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียว ยกตัวอย่าง เช่นที่จุด  $(1, 1, 1)$  มีค่า

$$\kappa_G = -\frac{1}{9} = -0.1111, \kappa_M = \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0.1924 \text{ และที่จุด } (2, 2, \sqrt{7}) \text{ มีค่า}$$

$$\kappa_G = -\frac{1}{225} = -0.0044, \kappa_M = \frac{7}{15\sqrt{15}} = 0.1205 \text{ จะเห็นว่าค่าความโค้งของเกาส์ของจุดนี้มีค่า}$$

เป็นลบแต่มีค่ามากขึ้นแตกต่างกันและค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดที่เป็นบวกแต่มีค่ามากขึ้นแตกต่างกัน

ซึ่งจะพิจารณาว่าค่า  $|\kappa_G|$  ที่เป็นค่าบวกที่แตกต่างกันและค่า  $\kappa_M$  ที่เป็นบวกที่แตกต่างกันนี้บอกถึง

ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวเป็นอย่างไรบ้าง

เนื่องจากรูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียวนั้นเกิดจากเส้นโค้ง  $\alpha(t)$  หมุนรอบแกน  $z$  ดังรูป

จากสมการพาราโบล่าเชิงวงรีมีสมการเป็น  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

เมื่อพิจารณาบนระนาบ  $yz$  เป็นรูปครึ่งไฮเพอร์โบล่าที่เป็นส่วนหนึ่งของสมการ  $y^2 - z^2 = 1$  ซึ่งเป็น

เส้นโค้งก่อกำเนิดที่หมุนรอบแกน  $z$  ที่ทำให้เกิดรูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียว

และจะพิจารณาเพียงครึ่งบน  $z > 0$  เท่านั้นเนื่องจากกราฟ  $\alpha(t)$  มีสมบัติการสมมาตร



รูปที่ 4.6 รูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียวและเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบซันเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา 2 จุด  $A(0, 2, \sqrt{3}), B(0, 3, 2\sqrt{2})$  ที่อยู่บนรูปทรงพาราโบล่าเชิงวงรี

และเมื่อพิจารณานระนาบ  $yz$  จุด 3 จุดจะมีพิกัดเป็น  $A(2, \sqrt{3}), B(3, 2\sqrt{2})$

จากค่าความโค้งของเกาส์ของจุดบนไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว  $\kappa_G = -\frac{1}{(1-2(x^2+y^2))^2}$

และจากค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดบนไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว  $\kappa_M = \frac{x^2+y^2-1}{(2(x^2+y^2)-1)^2}$

ที่จุด  $A(0, 2, \sqrt{3})$  มี  $|\kappa_G| = \left| -\frac{1}{49} \right| = 0.0204, \kappa_M = \frac{3}{7\sqrt{7}} = 0.1619$

ที่จุด  $B(0, 3, 2\sqrt{2})$  มี  $|\kappa_G| = \left| -\frac{1}{289} \right| = 0.0034, \kappa_M = \frac{8}{17\sqrt{17}} = 0.1141$

เนื่องจากค่า  $x = 0$  นั่นคือค่า  $|\kappa_G|$  จะน้อยลงเมื่อค่า  $y$  มากขึ้น

และในทำนองเดียวกันค่า  $\kappa_M$  จะน้อยลงเมื่อค่า  $y$  มากขึ้นด้วย

ต่อมาพิจารณาค่าความโค้งของเส้นโค้งที่เป็นส่วนหนึ่งของไฮเพอร์โบล่านระนาบ  $yz$

จากสมการค่าความโค้งของเส้นโค้ง  $\alpha(t) = (y(t), z(t))$  บนระนาบ

$$\kappa(t) = \frac{y'(t)z''(t) - y''(t)z'(t)}{(\sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2})^3}$$

สมการของไฮเพอร์โบล่า  $y^2 - z^2 = 1$  มีสมการเวกเตอร์เป็น  $\alpha(t) = (\sec t, \tan t)$

นั่นคือ  $y(t) = \sec t$  และ  $z(t) = \tan t$

$$y'(t) = \sec t \tan t \quad \text{และ} \quad z'(t) = \sec^2 t$$

$$y''(t) = \sec^3 t + \sec t \tan^2 t \quad \text{และ} \quad z''(t) = 2 \sec^2 t \tan t$$

$$\text{จะได้} \quad \kappa(t) = \frac{2 \sec^3 t \tan^2 t - (\sec^3 t + \sec t \tan^2 t)(\sec^2 t)}{(\sqrt{(\sec t \tan t)^2 + (\sec^2 t)^2})^3}$$

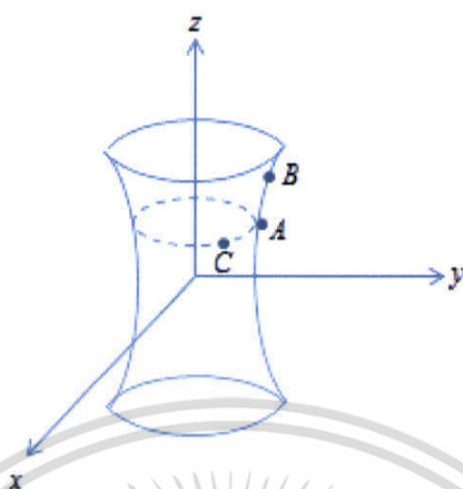
ที่จุด  $A(2, \sqrt{3})$  มี  $\kappa = -\frac{8}{28^2} = -0.0539$

ที่จุด  $B(3, 2\sqrt{2})$  มี  $\kappa = -0.0143$

ค่าความโค้งที่ติดลบนั้นหมายถึงทิศทางของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ในที่นี้จะพิจารณาค่าความโค้งที่เป็นบวกนั่นคือ  $|\kappa|$

นั่นคือที่จุด  $A$  มีค่าความโค้งมากที่สุด หรือ  $|\kappa_A| > |\kappa_B|$

ซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่าความโค้งของเกาส์จาก  $|\kappa_{G(A)}| > |\kappa_{G(B)}|$  และ  $\kappa_{M(A)} > \kappa_{M(B)}$



รูปที่ 4.7 รูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชิ้นเดียว

พิจารณาจากรูปข้างต้น กรณีที่ 1 เปรียบเทียบจุดที่อยู่ในแนวบนเส้นโค้งก่อกำเนิดจากรูปนั้นคือจุด  $A$  และจุด  $B$  ค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยที่จุด  $A$  จะมีค่ามากกว่าที่จุด  $B$  ดังที่ได้พิจารณาข้างต้น กรณีที่ 2 เปรียบเทียบที่จุดใดๆที่อยู่บนแนววงกลมที่เกิดจากเส้นที่หมุนรอบแกน  $z$  นั้นคือจากรูปที่จุด  $A$  และจุด  $C$  จะมีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยเท่ากัน เนื่องจากอยู่บนแนววงกลมเดียวกัน กรณีที่ 3 เปรียบเทียบจุดใดๆที่อยู่บนเส้นก่อกำเนิดและบนแนวกันวงกลม นั่นคือจุด  $C$  และจุด  $B$  ดังรูปเนื่องจากที่จุด  $A$  มีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าที่จุด  $B$  และที่จุด  $A$  มีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยเท่ากับที่จุด  $C$  ดังนั้นที่จุด  $C$  จึงมีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจุด  $B$

จากค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยมีความสัมพันธ์ไปในทิศทางเดียวกันนั่นคือจุดใดๆบนรูปทรงของไฮเพอร์โบล่าแบบชิ้นเดียวมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นประทุนหงายแบบอานม้า เนื่องจาก  $\kappa_G < 0, \kappa_M > 0$  แต่ด้วยค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยนี้แต่ละจุดมีค่าน้อยแตกต่างกันไปจากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ณ จุดที่มีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นประทุนหงายแบบอานม้าลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า

## 4.2.4 ทรงรี

จากค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G = \frac{a^6 b^6 c^2}{(-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))^2}$  และ

ค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \mp \frac{c^2 (a^4 b^2 + b^2 c^2 x^2 + a^2 (b^4 + c^2 y^2 - b^2 (x^2 + y^2)))}{2(c^2 (1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}} (-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))}$$

และสมการไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวมีสมการเป็น  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

พิจารณากรณีที่  $a = c$

เพื่อง่ายต่อการอธิบายจะสมมติให้  $a = 1, b = 2, c = 1$  จะได้  $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

$$\text{โดยที่ } \kappa_G = \frac{64}{(16 - 3y^2)^2} \text{ และ } \kappa_M = \mp \frac{40 - 6y^2}{(16 - 3y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

พิจารณาค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ )

เนื่องจากทรงรีมีค่า  $\kappa_G > 0$  และ  $\kappa_M < 0$  ทุกๆจุด  $(x, y, z)$  บนรูปทรงรีส่วนบนและทรงรีมีค่า  $\kappa_G > 0$  และ  $\kappa_M > 0$  ทุกๆจุด  $(x, y, z)$  บนรูปทรงรีส่วนล่าง แต่ค่า  $\kappa_G$  และ  $\kappa_M$  นี้มีค่ามากที่สุดที่แตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับค่าพิกัด  $(x, y, z)$  บนรูปทรงรี เนื่องจากรูปทรงรีมีคุณสมบัติของการสมมาตร

นั่นคือในที่นี้จะพิจารณาเพียงแค่ครึ่งทรงรีบนนั่นคือ  $\kappa_G = \frac{64}{(16 - 3y^2)^2}$  และ  $\kappa_M = -\frac{40 - 6y^2}{(16 - 3y^2)^{\frac{3}{2}}}$

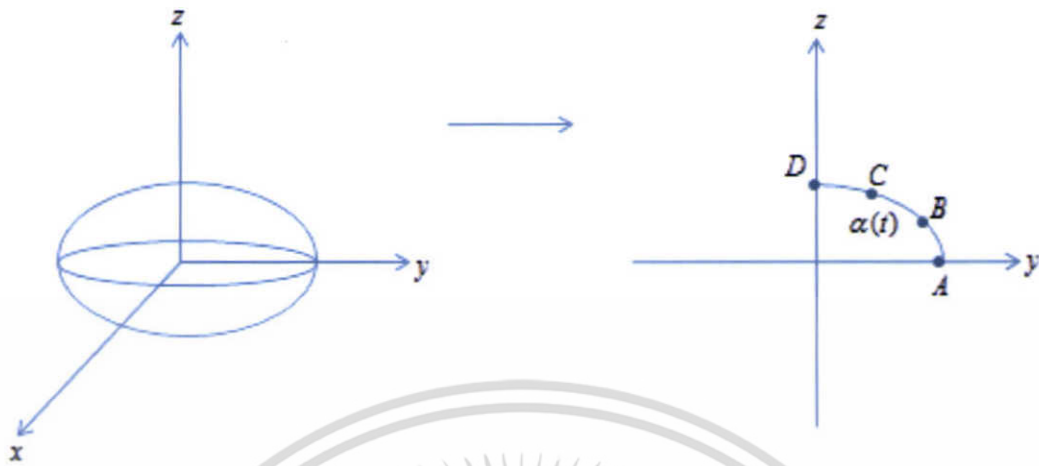
นั่นคือค่าความโค้งของเกาส์ของจุดนี้มีค่าเป็นบวกแต่มีค่ามากที่สุดที่แตกต่างกันและค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดที่เป็นลบแต่มีค่ามากที่สุดที่แตกต่างกัน ซึ่งจะพิจารณาว่าค่า  $\kappa_G$  ที่เป็นค่าบวกที่แตกต่างกันและค่า  $\kappa_M$  เป็นค่าลบที่แตกต่างกันนี้บอกถึงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวเป็นอย่างไรบ้าง

เนื่องจากทรงรีนั้นเกิดจากเส้นโค้ง  $\alpha(t)$  หมุนรอบแกน  $z$  ดังรูป

จากสมการพาราโบล่าเชิงวงรีมีสมการเป็น  $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

เมื่อพิจารณามนระนาบ  $yz$  เป็นรูปส่วนหนึ่งของวงรีที่มีสมการเป็น  $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  ซึ่งเป็นเส้นโค้ง

ก่อนกำเนิดที่หมุนรอบแกน  $z$  ที่ทำให้เกิดรูปทรงรี



รูปที่ 4.8 รูปทรงรีและส่วนของเส้นโค้งกึ่งวงกลมบนรูปทรงรี

พิจารณา 4 จุด  $A(0, 2, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ ,  $C(0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $D(0, 0, 1)$  ที่อยู่บนรูปทรงรี

และเมื่อพิจารณาบนระนาบ  $yz$  จุด 4 จุดจะมีพิกัดเป็น  $A(2, 0)$ ,  $B(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ ,  $C(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $D(0, 1)$

จากค่าความโค้งของเกาส์ของจุดบนทรงรี  $\kappa_G = \frac{64}{(16-3y^2)^2}$

และจากค่าความโค้งเฉลี่ยของจุดบนทรงรี  $\kappa_M = -\frac{40-6y^2}{(16-3y^2)^{\frac{3}{2}}}$

ที่จุด  $A(0, 2, 0)$  มี  $\kappa_G = 4$ ,  $\kappa_M = -2$

ที่จุด  $B(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$  มี  $\kappa_G = \frac{64}{49} = 1.3061$ ,  $\kappa_M = -\frac{22}{7\sqrt{7}} = -1.1879$

ที่จุด  $C(0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  มี  $\kappa_G = \frac{64}{169} = 0.3787$ ,  $\kappa_M = -\frac{34}{13\sqrt{13}} = -0.7254$

ที่จุด  $D(0, 0, 1)$  มี  $\kappa_G = \frac{1}{4} = 0.25$ ,  $\kappa_M = -\frac{40}{64} = -0.625$

เนื่องจากค่า  $x = 0$  นั้นคือค่า  $\kappa_G$  จะน้อยลงเมื่อค่า  $y$  มากขึ้น

และในทำนองเดียวกันค่า  $|\kappa_M|$  จะน้อยลงเมื่อค่า  $y$  มากขึ้นด้วย

ต่อมาพิจารณาค่าความโค้งของเส้นโค้งที่เป็นส่วนหนึ่งของวงรีบนระนาบ  $yz$

จากสมการค่าความโค้งของเส้นโค้ง  $\alpha(t) = (y(t), z(t))$  บนระนาบ

$$\kappa(t) = \frac{y'(t)z''(t) - y''(t)z'(t)}{(\sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2})^3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการของวงรี  $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  มีสมการเวกเตอร์เป็น  $\alpha(t) = (2 \cos t, \sin t)$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } y(t) &= 2 \cos t & \text{และ } z(t) &= \sin t \\ y'(t) &= -2 \sin t & \text{และ } z'(t) &= \cos t \\ y''(t) &= -2 \cos t & \text{และ } z''(t) &= -\sin t \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } \kappa(t) = \frac{2}{(1 + 3 \sin^2 t)^{3/2}}$$

$$\text{ที่จุด } A(2, 0) \text{ มี } \kappa = 2$$

$$\text{ที่จุด } B(\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \text{ มี } \kappa = \frac{2}{(\frac{7}{4})^{3/2}} = 0.3731$$

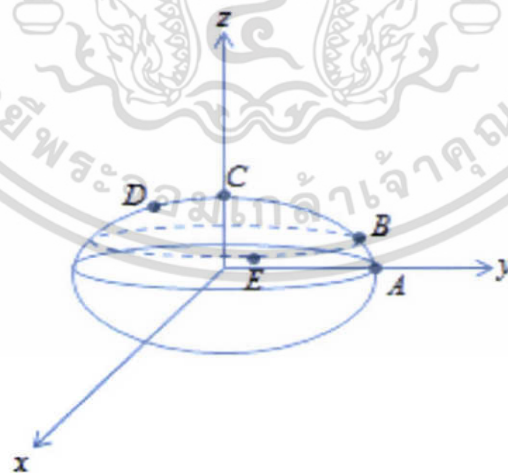
$$\text{ที่จุด } C(1, \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ มี } \kappa = \frac{2}{(\frac{13}{4})^{3/2}} = 0.0582$$

$$\text{ที่จุด } D(0, 1) \text{ มี } \kappa = \frac{2}{4^{3/2}} = 0.03125$$

นั่นคือที่จุด  $A$  มีความโค้งมากที่สุด หรือ  $\kappa_A > \kappa_B > \kappa_C > \kappa_D$

ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความโค้งของเกาส์จาก  $\kappa_{G(A)} > \kappa_{G(B)} > \kappa_{G(C)} > \kappa_{G(D)}$  และ

$$|\kappa_{M(A)}| > |\kappa_{M(B)}| > |\kappa_{M(C)}| > |\kappa_{M(D)}|$$



รูปที่ 4.9 รูปทรงรี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาจากรูปข้างต้น กรณีที่ 1 เปรียบเทียบจุดที่อยู่ในแนวบนส่วนของเส้นโค้งก่อกำเนิดที่จากรูปนั้นคือจุด  $A$  จุด  $B$  และจุด  $C$  ค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยที่จุด  $A$  จะมีค่ามากกว่าที่จุด  $B$  และที่จุด  $B$  มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าที่จุด  $C$  ดังที่ได้พิจารณาข้างต้น กรณีที่ 2 เปรียบเทียบที่จุดใดๆที่อยู่บนแนววงกลมที่เกิดจากเส้นที่หมุนรอบแกน  $z$  นั่นคือจากรูปที่จุด  $B$  และจุด  $E$  จะมีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยเท่ากันเนื่องจากอยู่บนแนววงกลมเดียวกัน กรณีที่ 3 เปรียบเทียบจุดใดๆที่อยู่บนแนวเส้นก่อกำเนิดและบนแนวกันวงกลม นั่นคือจุด  $E$  และจุด  $C$  ดังรูปเนื่องจากที่จุด  $B$  มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าที่จุด  $C$  และที่จุด  $E$  มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยเท่ากับที่จุด  $B$  ดังนั้นที่จุด  $E$  จึงมีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจุด  $C$

จากค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมีความสัมพันธ์ไปในทิศทางเดียวกันนั่นคือจุดใดๆบนรูปทรงรีมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นโดม เนื่องจาก  $\kappa_G > 0, \kappa_M < 0$  สำหรับทรงรีส่วนบนส่วนล่าง แต่ด้วยค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยนี้แต่ละจุดมีค่าน้อยแตกต่างกันไปจากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ณ จุดที่มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นโดมที่มีลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า และรูปทรงรีมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นถ้วย เนื่องจาก  $\kappa_G > 0, \kappa_M > 0$  สำหรับทรงรีส่วนล่าง แต่ด้วยค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยนี้แต่ละจุดมีค่าน้อยแตกต่างกันไปจากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ณ จุดที่มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นถ้วยที่มีลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า

#### 4.2.5 ทรงห่วงยาง

จากรูปทรงห่วงยางมีค่าความโค้งของเกาส์  $\kappa_G = \frac{\cos(v)}{a(c + a \cos(v))}$

และค่าความโค้งเฉลี่ย  $\kappa_M = -\frac{c + 2a \cos(v)}{2a(c + a \cos(v))}$

และสมการรูปทรงห่วงยางมีสมการเป็น  $(c - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})^2 + z^2 = a^2$

พิจารณากรณีที่  $a = c$  (Horn torus)

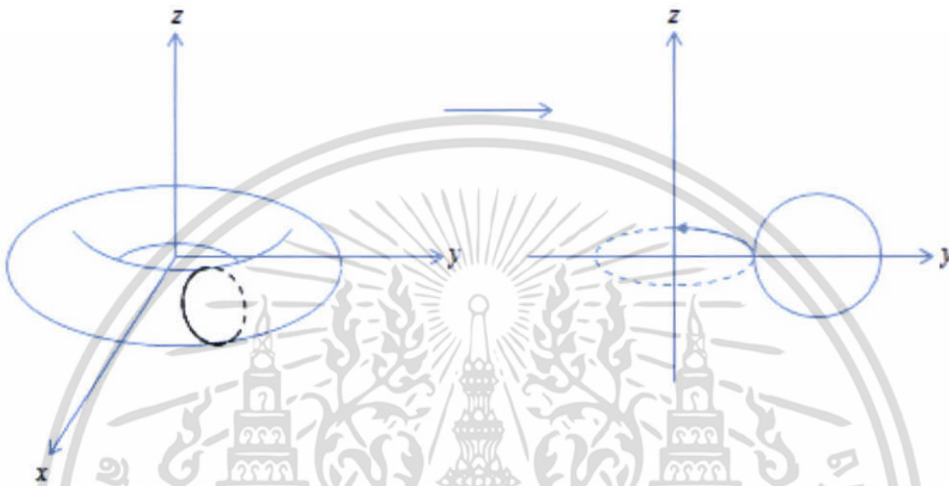
เพื่อง่ายต่อการอธิบายจะสมมติให้  $a = c = 1$  จะได้

$$\kappa_G = \frac{\cos v}{1 + \cos v} \text{ และ } \kappa_M = -\frac{(1 + 2 \cos v)}{2(1 + \cos v)} \text{ โดยที่ } v \in [0, 2\pi]$$

พิจารณาค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ )

เนื่องจากรูปทรงห้วงมีเครื่องหมายของค่าความโค้งแตกต่างกันไปตามช่วงของ  $v$

และรูปทรงห้วงยางเกิดจากเส้นโค้งก่อกำเนิดเป็นรูปวงกลมรัศมี  $a = 1$  หมุนรอบแกน  $z$  ดังรูป



รูปที่ 4.10 รูปทรงห้วงยางและเส้นโค้งก่อกำเนิดของทรงห้วงยาง (วงกลม)

แบ่งการพิจารณาของช่วง  $v \in [0, 2\pi]$  ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.11 ทิศทางการหมุนรอบแกน  $z$  ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางในกรณี

$$v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

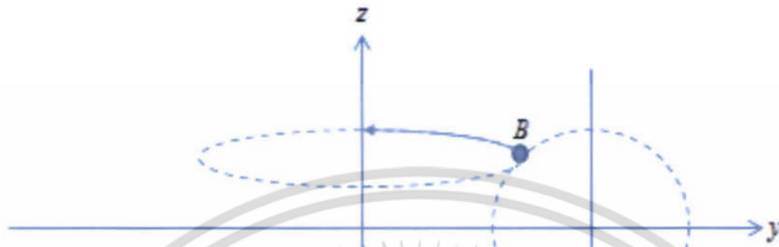
กรณีที่ 1  $v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มีค่าความโค้งของเกาส์เป็นศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าลบ

$$\text{ที่จุด } A(v = \frac{3\pi}{2}) \text{ มีค่า } \kappa_G = 0, \kappa_M = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ที่จุด } B(v = \frac{\pi}{2}) \text{ มีค่า } \kappa_G = 0, \kappa_M = -\frac{1}{2}$$



รูปที่ 4.12 ทิศทางการหมุนรอบแกน  $z$  ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางในกรณี

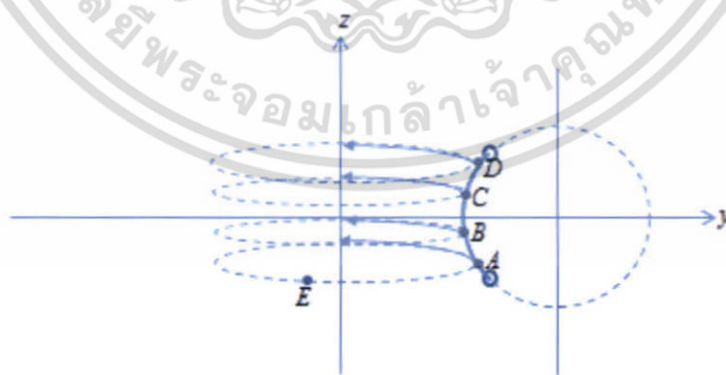
$$v = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{กรณีที่ } 2v = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

มีค่าความโค้งของเกาส์เป็นลบและค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นศูนย์

$$\text{ที่จุด } A(v = \frac{4\pi}{3}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -1, \kappa_M = 0$$

$$\text{ที่จุด } B(v = \frac{2\pi}{3}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -1, \kappa_M = 0$$



รูปที่ 4.13 ทิศทางการหมุนรอบแกน  $z$  ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางในกรณี

$$v \in \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{กรณีที่ 3 } v \in \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$$

เมื่อพิจารณาค่าความโค้งบนเส้นโค้งก่อกำเนิด (วงกลม) ทุกๆจุดที่อยู่บนแนววงกลมนี้จะมีค่าความโค้งบนวงกลมเท่ากันทุกจุด จึงพิจารณาที่แนววงกลมที่เกิดจากเส้นโค้งก่อกำเนิดที่หมุนรอบแกน  $z$  ที่จุด  $D$  จะอยู่บนแนววงกลมที่มีรัศมีมากกว่าที่จุด  $C$  ที่อยู่แนววงกลมที่มีรัศมีน้อยกว่าทำให้ค่าความโค้งของเส้นที่จุด  $C$  มากกว่าจุด  $D$  และจุด  $C$  และจุด  $B$  อยู่บนแนววงกลมที่มีรัศมีเท่ากันจะมีค่าความโค้งของเส้นเท่ากันด้วยและเปรียบเทียบจุด  $A$  และจุด  $E$  มีค่าความโค้งของเส้นเท่ากันซึ่งอยู่ในแนววงกลมเดียวกัน สำหรับกรณีที่ 1 นี้  $v \in \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$  มีค่าความโค้งของเกาส์เป็นค่าลบและค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าบวก

$$\text{ที่จุด } A(v = \frac{5\pi}{4}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -2.4142, \kappa_M = 0.7071$$

$$\text{ที่จุด } B(v = \frac{7\pi}{6}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -6.4641, \kappa_M = 2.7321$$

$$\text{ที่จุด } C(v = \frac{5\pi}{6}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -6.4641, \kappa_M = 2.7321$$

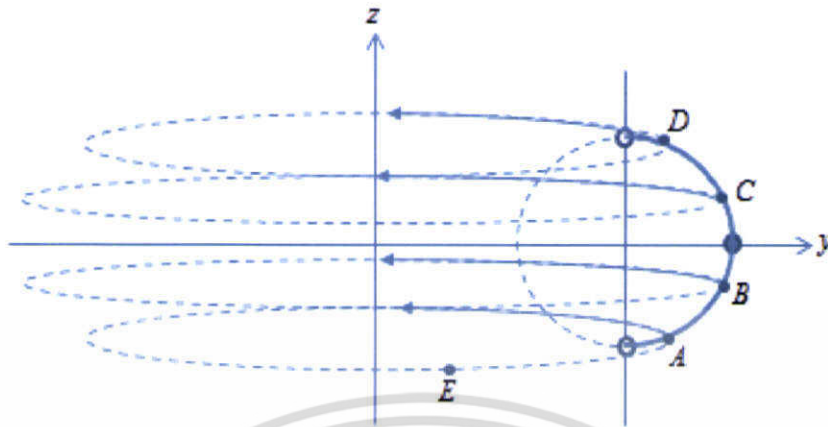
$$\text{ที่จุด } D(v = \frac{3\pi}{4}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -2.4142, \kappa_M = 0.7071$$

ยิ่ง  $v$  เข้าใกล้ค่า  $\pi$  ค่าความโค้ง  $\kappa$  จะมีค่ามากขึ้นและค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่ามากขึ้นด้วย

จากรูปนั้นคือที่จุด  $C$  มีค่าความโค้งมากที่สุด หรือ  $\kappa_C > \kappa_D$

ซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่าความโค้งของเกาส์จาก  $|\kappa_{G(C)}| > |\kappa_{G(D)}|$  และ  $\kappa_{M(C)} > \kappa_{M(D)}$

จากค่าความโค้งทั้งสองมีความสัมพันธ์ไปในทิศทางเดียวกันนั่นคือจุดใดๆบนรูปทรงห้วงยางบนช่วง  $v \in \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$  มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นประทุนอานม้า เนื่องจาก  $\kappa_G < 0, \kappa_M > 0$  แต่ด้วยค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยนี้แต่ละจุดมีค่าน้อยแตกต่างกันไปจากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ณ จุดที่มีค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นประทุนอานม้าที่มีลักษณะโค้งมากกว่าจุดที่มีค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า



รูปที่ 4.14 ทิศทางการหมุนรอบแกน  $z$  ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห่วงยางในกรณี

$$v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

กรณีที่  $4v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

เมื่อพิจารณาค่าความโค้งบนเส้นโค้งก่อกำเนิด (วงกลม) ทุกๆจุดที่อยู่บนแนววงกลมนี้จะมีค่าความโค้งบนวงกลมเท่ากันทุกจุด จึงพิจารณาที่แนววงกลมที่เกิดจากเส้นโค้งก่อกำเนิดที่หมุนรอบแกน  $z$  ที่จุด  $C$  จะอยู่บนแนววงกลมที่มีรัศมีมากกว่าที่จุด  $D$  ที่อยู่บนแนววงกลมที่มีรัศมีน้อยกว่าทำให้ค่าความโค้งของเส้นที่จุด  $D$  มากกว่าจุด  $C$  และจุด  $C$  และจุด  $B$  อยู่บนแนววงกลมที่มีรัศมีเท่ากันจะมีค่าความโค้งของเส้นเท่ากันด้วยและเปรียบเทียบจุด  $A$  และจุด  $E$  มีค่าความโค้งของเส้นเท่ากันซึ่งอยู่ในแนววงกลมเดียวกันมีค่าความโค้งของเกาส์เป็นค่าบวกและค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าลบ

ที่จุด  $A(v = \frac{5\pi}{3})$  มีค่า  $\kappa_G = 0.3333, \kappa_M = -0.6667$

ที่จุด  $B(v = \frac{11\pi}{6})$  มีค่า  $\kappa_G = 0.4641, \kappa_M = -0.7321$

ที่จุด  $C(v = \frac{\pi}{6})$  มีค่า  $\kappa_G = 0.4641, \kappa_M = -0.7321$

ที่จุด  $D(v = \frac{\pi}{3})$  มีค่า  $\kappa_G = 0.3333, \kappa_M = -0.6667$

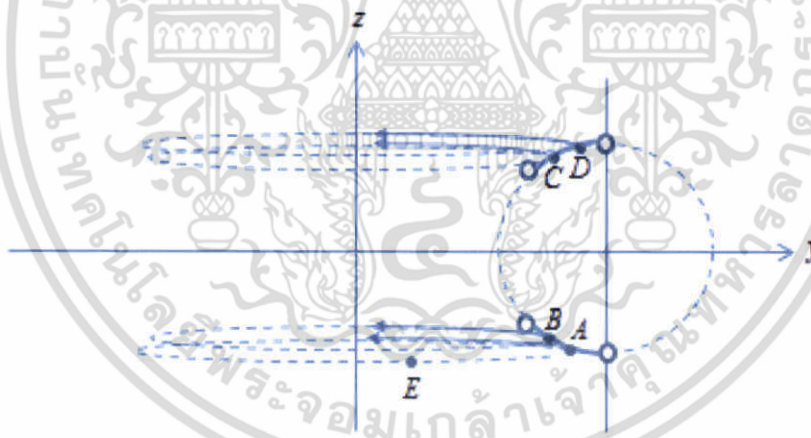
ยิ่ง  $v$  เข้าใกล้ค่า  $\frac{\pi}{2}$  หรือค่า  $\frac{3\pi}{2}$  ค่าความโค้ง  $\kappa$  จะมีค่ามากขึ้นแต่ค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่าน้อยลง

จากรูปนั้นคือที่จุด  $D$  มีค่าความโค้งมากที่สุด หรือ  $\kappa_D > \kappa_C$

แต่ค่าความโค้งของเกาส์จาก  $\kappa_{G(D)} < \kappa_{G(C)}$  และ  $|\kappa_{M(D)}| < |\kappa_{M(C)}|$

นั่นคือความสัมพันธ์ของค่าความโค้งของเส้นกับค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมีทิศทางตรงกันข้าม

จากค่าความโค้งทั้งสองมีความสัมพันธ์ไปในทิศทางตรงกันข้าม นั่นคือจุดใดๆบนรูปทรงห้วง ยางบนช่วง  $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นโดม เนื่องจาก  $\kappa_G > 0, \kappa_M < 0$  แต่ด้วยค่าความโค้งของเส้นกับค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยนี้แต่ละจุดมีค่ามากน้อยแตกต่างกันไปจากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ณ จุดที่มีค่าความโค้งของเส้นกับค่าความโค้งของเกาส์และค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นโดมที่มีลักษณะโค้งน้อยกว่าจุดที่มีค่าสัมบูรณ์ของค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า



รูปที่ 4.15 ทิศทางการหมุนรอบแกน  $z$  ของวงกลมที่เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของรูปทรงห้วงยางในกรณี

$$v \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{กรณีที่ 5 } v \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

เมื่อพิจารณาค่าความโค้งบนเส้นโค้งก่อกำเนิด (วงกลม) ทุกๆจุดที่อยู่บนแนววงกลมนี้จะมีค่าความโค้งบนวงกลมเท่ากันทุกจุด จึงพิจารณาที่แนววงกลมที่เกิดจากเส้นโค้งก่อกำเนิดที่หมุนรอบแกน  $z$  ที่จุด  $D$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะอยู่บนแนววงกลมที่มีรัศมีมากกว่าที่จุด  $C$  ที่อยู่บนวงกลมที่มีรัศมีน้อยกว่าทำให้ค่าความโค้งของเส้น  
ที่จุด  $C$  มากกว่าจุด  $D$  และจุด  $C$  และจุด  $B$  อยู่บนแนววงกลมที่มีรัศมีเท่ากันจะมีค่าความโค้งของเส้น  
เท่ากันด้วยและเปรียบเทียบจุด  $A$  และจุด  $E$  มีค่าความโค้งของเส้นเท่ากันซึ่งอยู่ในแนววงกลมเดียวกัน  
มีค่าความโค้งของเกาส์เป็นค่าลบและค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าลบ

$$\text{ที่จุด } A(v = \frac{13\pi}{9}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -0.2101, \kappa_M = -0.3950$$

$$\text{ที่จุด } B(v = \frac{25\pi}{18}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -0.5198, \kappa_M = -0.2401$$

$$\text{ที่จุด } C(v = \frac{11\pi}{18}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -0.5198, \kappa_M = -0.2401$$

$$\text{ที่จุด } D(v = \frac{5\pi}{9}) \text{ มีค่า } \kappa_G = -0.2101, \kappa_M = -0.3950$$





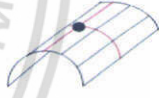
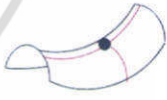
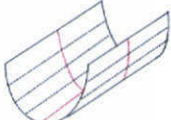

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างค่าความโค้งไม่สัมพันธ์ไปในทิศทางเดียวกันจึงไม่สามารถสรุปได้



## บทที่ 5

### สรุปผล ข้อเสนอแนะและแนวทางการพัฒนางานวิจัย

#### 5.1 สรุปผล

	$K_G$	$K_M$	ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิว	
ทรงกลมส่วนบน	+	+	Dome	
ทรงกลมส่วนล่าง	+	-	Basin	
ทรงรีส่วนบน	+	+	Dome	
ทรงรีส่วนล่าง	+	-	Basin	
ทรงกรวย	0	+	Antiformal	
ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบ ชั้นเดียว	-	+	Antiformal Saddle	
ทรงกระบอก	0	-	Synformal	
ทรงพาราโบล่าเชิงวงรี	+	+	Basin	

ตารางที่ 5 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 5 อธิบายถึงลักษณะที่ของจุดบนพื้นผิวโดยพิจารณาจากเครื่องหมายของค่าความโค้งซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งบนของทรงกลมมีลักษณะเป็น โคมและส่วนของพื้นผิวส่วนครึ่งล่างของทรงกลมซึ่งมีค่าความโค้งเป็นค่าคงที่ซึ่งค่าความโค้งเกาส์มีค่ามากกว่าศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมีค่าน้อยกว่าศูนย์จะได้ว่าลักษณะของพื้นผิวส่วนครึ่งล่างของทรงกลมมีลักษณะเป็น ถ้วย

ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งบนทรงรีมีลักษณะเป็น โคม และทุกๆจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งล่างทรงรีมีค่าความโค้งของเกาส์มากกว่าศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าศูนย์ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวส่วนครึ่งล่างทรงรีมีลักษณะเป็น ถ้วย

ลักษณะเฉพาะที่ของจุดพื้นผิวของทรงกรวยมีลักษณะเป็นรูปประทุน

ลักษณะเฉพาะที่ของจุดพื้นผิวพาราโบลาชิงวงรีมีลักษณะเป็นรูปถ้วย

ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวของรูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียวมีลักษณะเป็นรูปประทุนแบบอานม้า

ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวของทรงกระบอกมีลักษณะเป็นรูปประทุนหงาย

ในส่วนแรกวิเคราะห์เฉพาะเครื่องหมายของค่าความโค้งเพื่อจำแนกลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวว่าเป็นลักษณะอย่างไรและต่อมาวิเคราะห์ว่าค่าความโค้งที่มีเครื่องหมายเหมือนกันแต่มีค่าน้อยที่แตกต่างของแต่ละจุดจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวที่มีความโค้งมากน้อยอย่างไร

พบว่ารูปทรงกลมและทรงกระบอกมีค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าคงที่นั่นคือแต่ละจุดบนพื้นผิวของรูปทรงมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดของแต่ละรูปทรงเป็นชนิดเดียวกันและความโค้งทุกจุดบนรูปทรงมีความโค้งที่เท่ากันหมดทุกจุด

รูปทรงพาราโบลาชิงวงรีมีค่าความโค้งของเกาส์มากกว่าศูนย์ ค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าศูนย์ มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวมีลักษณะเป็นถ้วยและที่จุดยอดของรูปทรงพาราโบลาชิงวงรีมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นถ้วยที่มีลักษณะโค้งมากที่สุด

รูปทรงกรวยมีค่าความโค้งของเกาส์เป็นศูนย์ ค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าศูนย์ มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวมีลักษณะเป็นรูปประทุนและจุดยิ่งใกล้จุดยอดของทรงกรวยจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นรูปประทุนที่มีลักษณะที่โค้งมากกว่า

รูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวมีค่าความโค้งของแก๊สน้อยกว่าศูนย์มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นประทุนหงายแบบอานม้าและจุดที่มีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีค่าสัมบูรณ์ของความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า

รูปทรงรีจุดที่มีค่าความโค้งของแก๊สและค่าสัมบูรณ์ของความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นโคมที่มีลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีค่าความโค้งของแก๊สและค่าสัมบูรณ์ของความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า จุดที่มีค่าความโค้งของแก๊สและค่าสัมบูรณ์ของความโค้งเฉลี่ยมากกว่าจะมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดที่เป็นถ้วยที่มีลักษณะโค้งกว่าจุดที่มีค่าความโค้งของแก๊สและค่าสัมบูรณ์ของความโค้งเฉลี่ยน้อยกว่า

สำหรับรูปทรงห้วงยางลักษณะเฉพาะที่ของแต่ละจุดบนรูปทรงมีหลายลักษณะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ของมุมของวงกลมก่อกำเนิด

## 5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางของการพัฒนางานวิจัย

1. ในงานวิจัยนี้ใช้ค่าความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยในการอธิบายลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิว เพื่อเป็นแนวทางในพัฒนางานวิจัยโดยอาจจะมีการใช้ค่าความโค้งแบบอื่นเช่น ค่าความโค้งจีโอเดซิก เป็นต้น อธิบายลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวได้ชัดเจนมากขึ้น ได้ต่อไป

2. ในงานวิจัยนี้พิจารณาถึงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนค่าโดยพิจารณาจากความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ย เป็นจุดเริ่มต้นเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาต่อไปยังการพิจารณาบนพื้นผิวใดๆ ในสามมิติ

ตัวอย่าง การวิเคราะห์ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวใดๆ โดยพิจารณาจากค่าความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยของพื้นผิว  $z = \sin(x + y^2)$

โดยมีสมการของเวกเตอร์ระบุทิศทางคือ  $\vec{r}(x, y) = (x, y, \sin(x + y^2))$

จะได้  $\vec{r}(x, y)_x = (1, 0, \cos(x + y^2))$

$\vec{r}(x, y)_y = (0, 1, 2y\cos(x + y^2))$

$\vec{r}(x, y)_{xx} = (0, 0, -\sin(x + y^2))$

$\vec{r}(x, y)_{xy} = (0, 0, -2y\sin(x + y^2))$

$\vec{r}(x, y)_{yy} = (0, 0, -2y\sin(x + y^2))$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 1

$$E = 1 + \cos(x + y^2)^2$$

$$F = 2y\cos(x + y^2)^2$$

$$G = 1 + 4y^2\cos(x + y^2)^2$$

ซึ่งมีเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วย

$$U = \left( \begin{array}{c} -\frac{\cos(x + y^2)}{\sqrt{1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2}}, -\frac{2y\cos(x + y^2)}{\sqrt{1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2}} \end{array} \right)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่ 2

$$e = -\frac{\sin(x + y^2)}{\sqrt{1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2}}$$

$$f = -\frac{2y\sin(x + y^2)}{\sqrt{1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2}}$$

$$g = \frac{2\cos(x + y^2) - 4y^2\sin(x + y^2)}{\sqrt{1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2}}$$

จะได้ค่าความโค้งของเกาส์

$$\kappa_G = -\frac{\sin(2(x + y^2))}{(1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2)(1 + (1 + 4y^2)\cos(x + y^2)^2)}$$

และค่าความโค้งเฉลี่ย

$$\kappa_M = \frac{2\cos(x + y^2) + 2\cos(x + y^2)^3 - (1 + 4y^2)\sin(x + y^2)}{2\sqrt{1 + (1 + 4y)\cos(x + y^2)^2}(1 + (1 + 4y^2)\cos(x + y^2)^2)}$$

พิจารณาค่าความโค้งบริเวณเฉพาะ (Local)  $x \in [0, 4]$ ,  $y \in [0, 4]$

จากค่าความโค้งของเกาส์ และค่าความโค้งเฉลี่ย

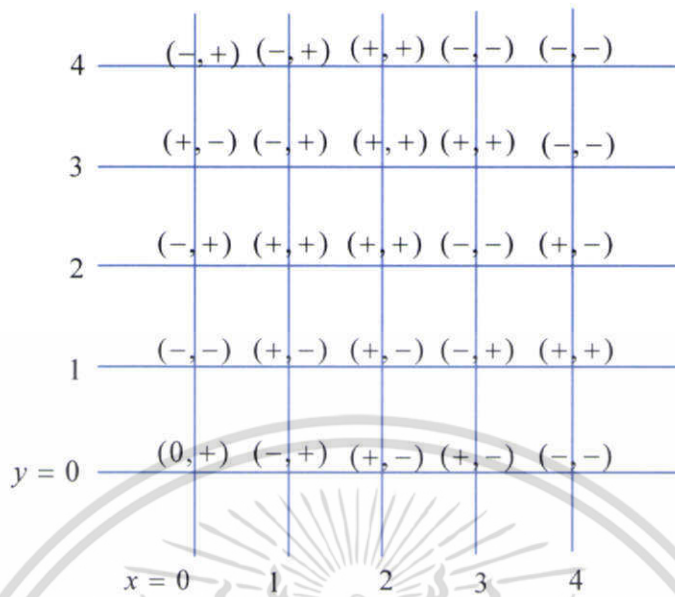
ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของแต่ละจุดมีค่าดังต่อไปนี้

ที่จุด (0, 0)	$\kappa_G = 0$	$\kappa_M = 0.7071$
ที่จุด (0, 1)	$\kappa_G = -0.1503$	$\kappa_M = -0.3644$
ที่จุด (0, 2)	$\kappa_G = -0.0247$	$\kappa_M = 0.3024$
ที่จุด (0, 3)	$\kappa_G = 0.0020$	$\kappa_M = -0.0853$
ที่จุด (0, 4)	$\kappa_G = -0.0005$	$\kappa_M = 0.0305$

ที่จุด (1, 0)	$\kappa_G = -0.5448$	$\kappa_M = 0.1888$
ที่จุด (1, 1)	$\kappa_G = 0.2174$	$\kappa_M = -1.0835$
ที่จุด (1, 2)	$\kappa_G = 0.1332$	$\kappa_M = 2.7201$
ที่จุด (1, 3)	$\kappa_G = -0.0033$	$\kappa_M = 0.1002$
ที่จุด (1, 4)	$\kappa_G = -0.0391$	$\kappa_M = 3.4560$
ที่จุด (2, 0)	$\kappa_G = 0.5498$	$\kappa_M = -0.7419$
ที่จุด (2, 1)	$\kappa_G = 0.0080$	$\kappa_M = -0.1614$
ที่จุด (2, 2)	$\kappa_G = 0.0035$	$\kappa_M = 0.0830$
ที่จุด (2, 3)	$\kappa_G = 0.0088$	$\kappa_M = 18.4885$
ที่จุด (2, 4)	$\kappa_G = 0.0040$	$\kappa_M = 0.2979$
ที่จุด (3, 0)	$\kappa_G = 0.0713$	$\kappa_M = -0.7289$
ที่จุด (3, 1)	$\kappa_G = -0.1005$	$\kappa_M = 0.1726$
ที่จุด (3, 2)	$\kappa_G = -0.0152$	$\kappa_M = -0.1669$
ที่จุด (3, 3)	$\kappa_G = 0.0032$	$\kappa_M = 0.1298$
ที่จุด (3, 4)	$\kappa_G = 0.0002$	$\kappa_M = -0.0107$
ที่จุด (4, 0)	$\kappa_G = -0.4856$	$\kappa_M = -0.3252$
ที่จุด (4, 1)	$\kappa_G = 0.2766$	$\kappa_M = 1.6281$
ที่จุด (4, 2)	$\kappa_G = 0.1778$	$\kappa_M = -5.7677$
ที่จุด (4, 3)	$\kappa_G = -0.0021$	$\kappa_M = -0.0568$
ที่จุด (4, 4)	$\kappa_G = -0.0164$	$\kappa_M = -1.2614$

สามารถสรุปเครื่องหมายของค่าความโค้งของแก๊สและค่าความโค้งเฉลี่ยบนช่วงที่พิจารณาแต่ละพิกัดของจุด  $(x, y)$  ดังรูปที่ 5.2.1

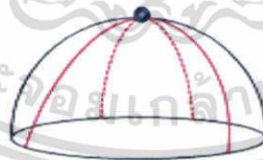
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.2.1 แสดงเครื่องหมายของค่าความโค้งแต่ละตำแหน่งโดยพิกัดแรกคือเครื่องหมายค่าความโค้งของแก๊สและพิกัดหลังคือเครื่องหมายของค่าความโค้งเฉลี่ย

และจากเครื่องหมายของค่าความโค้งทั้งสองสามารถจำแนกลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวได้โดยจกตารางที่ 1 ลักษณะเฉพาะที่ของพื้นผิวที่พิจารณานี้ มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวทั้งหมด 5 ลักษณะดังรูปที่ 5.2.2 – 5.2.6

$$\kappa_G > 0, \kappa_M > 0$$



รูปที่ 5.2.2 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็น โดม

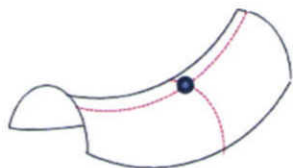
$$\kappa_G > 0, \kappa_M < 0$$



รูปที่ 5.2.3 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็น ถ้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\kappa_G < 0, \kappa_M > 0$$



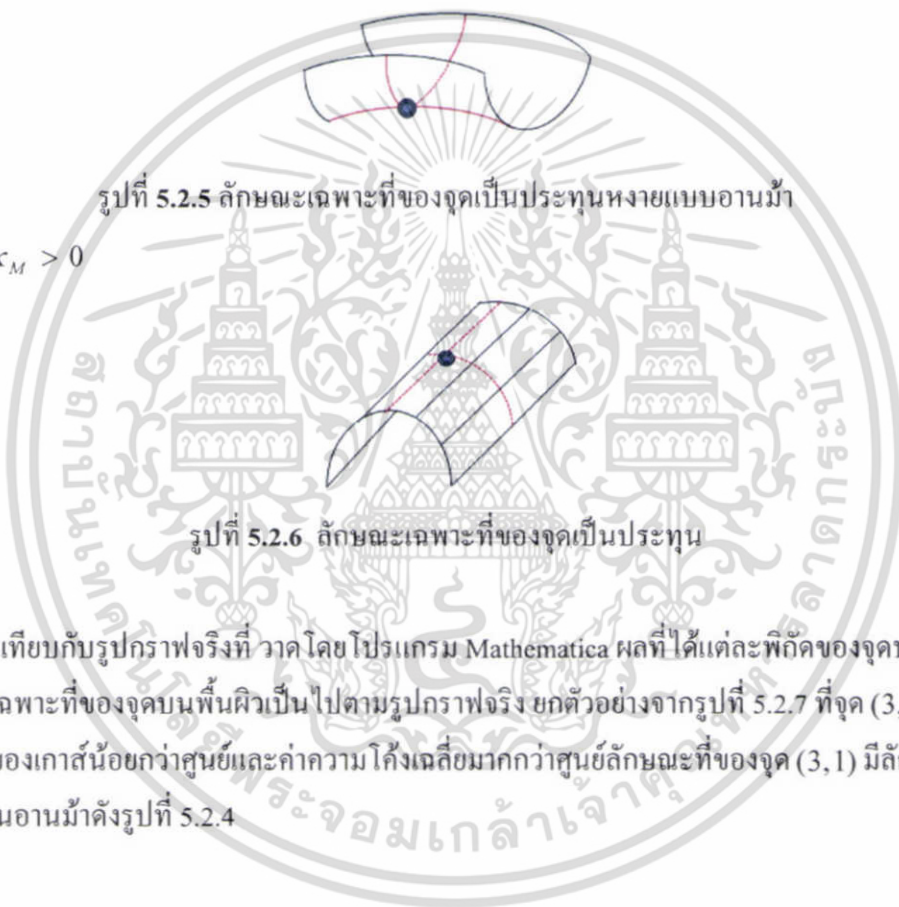
รูปที่ 5.2.4 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นประทุนอานม้า

$$\kappa_G < 0, \kappa_M < 0$$



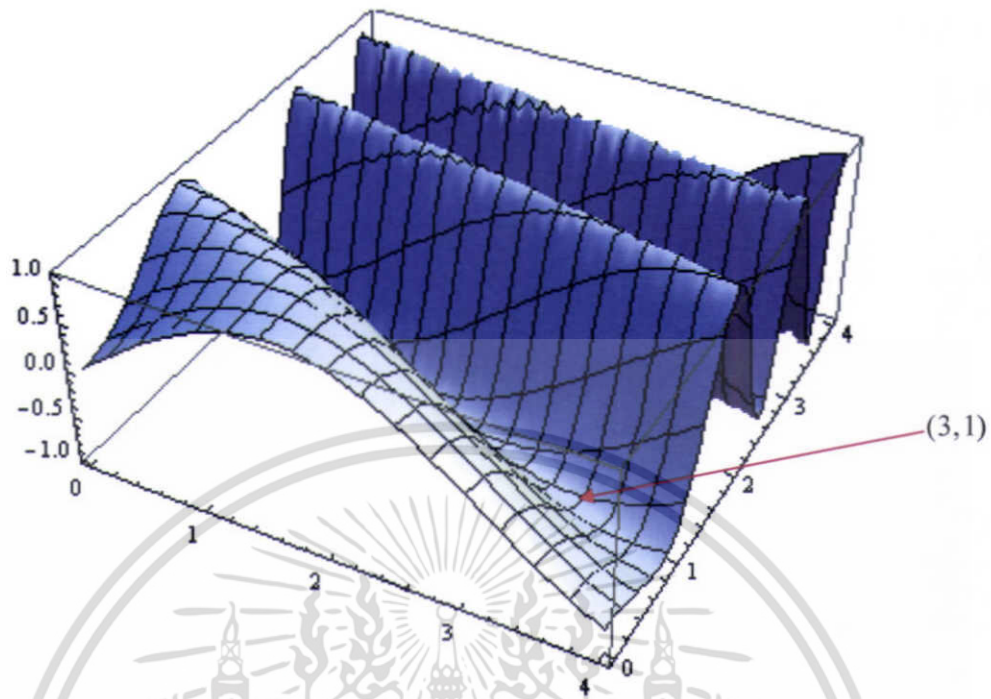
รูปที่ 5.2.5 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นประทุนหงายแบบอานม้า

$$\kappa_G = 0, \kappa_M > 0$$

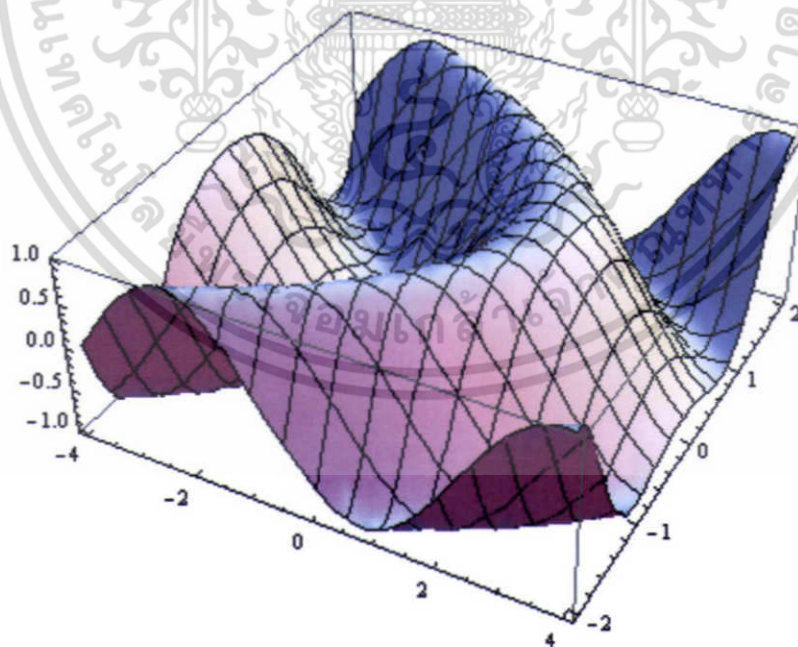


รูปที่ 5.2.6 ลักษณะเฉพาะที่ของจุดเป็นประทุน

โดยเปรียบเทียบกับรูปกราฟจริงที่ วาด โดย โปรแกรม Mathematica ผลที่ได้แต่ละพิกัดของจุดบนพื้นผิว มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวเป็นไปตามรูปกราฟจริง ยกตัวอย่างจากรูปที่ 5.2.7 ที่จุด (3, 1) มีค่าความโค้งของแกนน้อยกว่าศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยมากกว่าศูนย์ลักษณะที่ของจุด (3, 1) มีลักษณะเป็นประทุนอานม้ายังรูปที่ 5.2.4



รูปที่ 5.2.7 กราฟของสมการ  $z = \sin(x + y^2)$  บนช่วง  $x \in [0, 4], y \in [0, 4]$   
ที่สร้างโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica



รูปที่ 5.2.8 กราฟของสมการ  $z = \sin(x + y^2)$  บนช่วง  $x \in [-4, 4], y \in [-2, 2]$   
ที่สร้างโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Alfred Gray, Elsa Abbena, Simon Salamon. **Modern Differential Geometry of Curves and Surface with Mathematica**. 3<sup>rd</sup> Edition.
- [2] M. P. Do Carmo. **Differential Geometry of Curve and Surface**. Prentice-Hall, England Cliffs, New Jersey, United States of America.
- [3] Ian Mynatt, Stephan Bergbauer, David D. Pollard., 2007. **Using differential geometry to Describe 3-D folds**. Journal of structural geology 29,
- [4] Minoru TANAKA. **Lecture Notes on Classical Differential Geometry** Tokai University 2006
- [5] Vladimir Y. Rovenski **Differential Geometry of Curves and Surfaces** Department of Mathematics University of Haifa, Israel
- [6] Christian Bar **Elementary Differential Geometry** University Potsdam, Germany 2010
- [7] Martin M. Lipschutz, **Differential Geometry** Department of Mathematics University of Bridgeport 1969
- [8] Robert Ellis ,Denny Gulick **Calculus Analytic Geometry** 5<sup>th</sup> Edition

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การวิเคราะห์ลักษณะของพื้นผิวด้วยค่าความโค้ง  
Analysis of the Local of Surface with a Curvature

วิศรุต คล้ายแจ้<sup>1</sup> และภัคคินี ชิตสกุล<sup>1</sup>

Witsarut Kraychang<sup>1</sup> and Pakkinee Chitsakul<sup>1</sup>

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะนำค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย มาใช้ในการอธิบายถึงลักษณะพื้นฐานของพื้นผิวในสามมิติ โดยจะพิจารณารอบจุดบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน และนำไปโปรแกรมสำเร็จรูปช่วยในการคำนวณ พบว่า เมื่อแทนสมการของทรงรีและทรงกลมด้วยเวกเตอร์ระบุทิศทางซึ่งจะสามารถอธิบายลักษณะของจุดบนพื้นผิวของรูปทรงได้ชัดเจน สำหรับทรงกระบอก ทรงกรวย ทรงพาราโบล่าเชิงวงรีและทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าคงที่ และในกรณีของทรงห่วงยางจะแทนด้วยสมการอิงตัวแปรเสริมซึ่งลักษณะพื้นผิว จะมีลักษณะที่แตกต่างกันไป ณ แต่ละจุดที่พิจารณา

คำสำคัญ : ค่าความโค้งของเกาส์ ค่าความโค้งเฉลี่ย

ABSTRACT

In this paper, we interest Gaussian curvature and Mean curvature to describe the local of point on surface in three dimensional. We consider neighborhood locally on surface of revolution and compute with the mathematical programming. When we substitute the equation of Ellipsoid and Sphere by position vector that describe characteristic of locally point obviously For the case of cylinder, cone, elliptic paraboloid, and hyperboloid of one sheet have Gaussian curvature and Mean curvature are constant. On behalf of torus have a difference locally point depend on point of interest.

Key Words : Gaussian curvature, Mean curvature

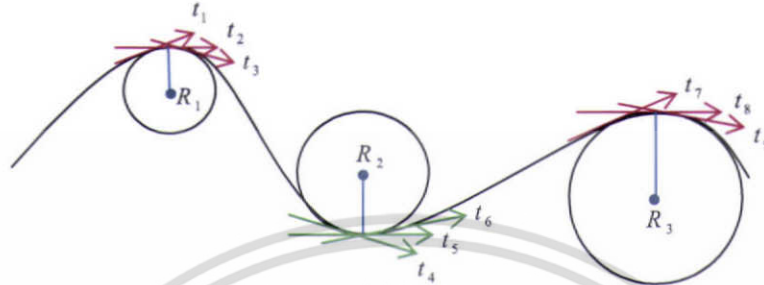
E-mail : jeab\_016@hotmail.com

<sup>1</sup> สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520

### คำนำ

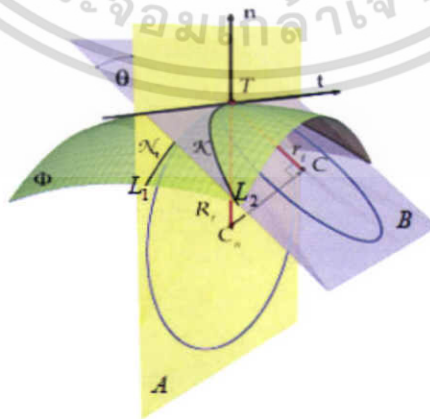
ในปัจจุบันเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์เริ่มมีบทบาทสำคัญต่อการนำไปใช้ประยุกต์ในหลายด้าน เช่น ด้าน ธรณีวิทยา โดยการอธิบายเกี่ยวกับพื้นผิวทางธรณีวิทยา ด้านการแพทย์ในเรื่องการผ่าตัดแผลเล็ก ด้านสถาปัตยกรรม ในการออกแบบรูปทรง หรือแม้กระทั่งด้านวิศวกรรมในเรื่องการสร้างแบบจำลองหุ่นยนต์ การจดจำใบหน้าของคน



รูปที่ 1 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของเส้นสัมผัสในทิศทางที่ต่างกัน

ค่าความโค้งเป็นหัวข้อหนึ่งที่น่าสนใจซึ่งมีความสำคัญในการอธิบายถึงลักษณะของพื้นผิว สำหรับค่าความโค้งของเส้นโค้งบนระนาบในทางคณิตศาสตร์นั้น หมายถึง ค่าที่วัดการเบี่ยงเบนของเส้นโค้งเมื่อเปรียบเทียบกับเส้นตรง โดยพิจารณาจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง และในขณะเดียวกันเส้นโค้งมีทิศทางการวางตัวสองทิศทาง โดยจากรูปที่ 1 เส้นสัมผัส  $t_1, t_2, t_3, t_7, t_8, t_9$  เป็นเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่มีทิศทางการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเข็มนาฬิกา ค่าความโค้งจะมีค่าติดลบและเส้นสัมผัส  $t_4, t_5, t_6$  เป็นสัมผัสของเส้นโค้งที่มีทิศทางการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเข็มนาฬิกา ค่าความโค้งที่ได้จะมีค่าเป็นบวก นอกจากนี้เป็นที่ทราบกันดีว่าเส้นตรงมีค่าความโค้งเป็นศูนย์และวงกลมที่มีรัศมี  $R$  จะมีค่าความโค้งเท่ากับ  $\frac{1}{R}$  ดังนั้นจะสังเกตเห็นได้ว่าวงกลมรัศมียิ่งมากค่าความโค้งจะยิ่งน้อย

ค่าความโค้งของพื้นผิวคือค่าการวัดการเบี่ยงเบนของพื้นผิว ณ จุดใดๆ บนพื้นผิวโดยเทียบกับระนาบที่ตรง ซึ่งค่าความโค้งที่นิยมใช้ในการหาค่าความโค้งของพื้นผิว ได้แก่ ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย ซึ่งค่าความโค้งทั้งสองนี้สามารถคำนวณได้โดยจะพิจารณาจากค่าความโค้งปกติ




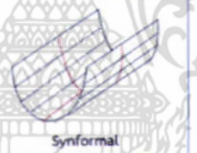


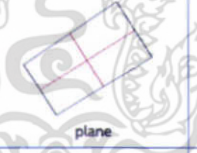
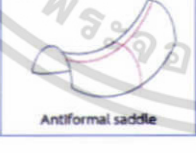

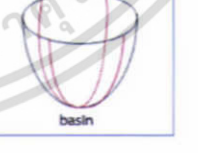
รูปที่ 2 แสดงการหาค่าความโค้งปกติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อ 829 ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความโค้งของพื้นผิว จากรูปที่ 2 กำหนดให้  $\Phi$  เป็นพื้นผิวในสามมิติให้จุด  $T$  เป็นจุดที่อยู่บนพื้นผิว  $\Phi$  ซึ่งมีเวกเตอร์สัมผัส  $\mathbf{t}$  และเวกเตอร์ปรกติ  $\mathbf{n}$  โดยเวกเตอร์  $\mathbf{t}$  และ  $\mathbf{n}$  ประกอบกันเป็นระนาบ  $A$  ให้  $L_1$  คือรอยตัดของระนาบ  $A$  กับพื้นผิว  $\Phi$  และให้ระนาบ  $B$  เป็นระนาบที่ทำมุม  $\theta$  กับระนาบ  $A$  และตัดกับพื้นผิว  $\Phi$  เกิดเป็นรอยตัด  $L_2$

กำหนดค่าความโค้งของเส้นรอยตัด  $L_2$  ที่จุด  $T$  มีค่าเท่ากับ  $r$ , ค่าความโค้งปรกติของ  $L_2$  ที่จุด  $T$  คือค่าความโค้งของเส้นโค้ง  $L_2$  ที่ฉายไปยังระนาบ  $A$  ทุกๆ เส้นโค้งบน  $\Phi$  ที่ผ่านจุด  $T$  มีเวกเตอร์สัมผัส  $\mathbf{t}$  จะมีค่าความโค้งปรกติที่แตกต่างกัน ถ้ากำหนดให้  $k_1, k_2$  เป็นค่าความโค้งปรกติที่น้อยที่สุดและมากที่สุดตามลำดับ เรียกค่าทั้งสองนี้ว่าค่าความโค้งหลัก ซึ่งเมื่อนำมาคูณกันจะเรียกว่าค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) และค่าเฉลี่ยของทั้งสองความโค้งนี้เรียกว่าค่าความโค้งเฉลี่ย ( $\kappa_M$ )

จากการศึกษาวิจัยที่ผ่านมาพบว่าค่าความโค้งของเกาส์ ( $\kappa_G$ ) สามารถอธิบายได้เพียงว่าพื้นผิวบริเวณเฉพาะที่นั้นมีลักษณะเป็นแบบระนาบ โดม หรือ ถ้วย แต่ในงานวิจัยของ Ian Mynatt [3] ได้นำค่าความโค้งของเกาส์ และค่าความโค้งเฉลี่ยมาแยกประเภทของลักษณะพื้นผิวบริเวณเฉพาะที่โดยพิจารณาจากเครื่องหมายของค่าความโค้งทั้งสองดังตารางที่ 1

	$\kappa_G < 0$	$\kappa_G = 0$	$\kappa_G > 0$
$\kappa_M < 0$	 Synformal saddle	 Synformal	 dome
$\kappa_M = 0$	 Perfect saddle	 plane	
$\kappa_M > 0$	 Antiformal saddle	 antiformal	 basin

ตารางที่ 1 แสดงการแยกประเภทลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนพื้นผิวโดยใช้ค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ย

เป็นที่น่าสนใจว่า ในพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนจะมีลักษณะพื้นผิวเฉพาะที่เป็นลักษณะใด ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาค่าความโค้งต่างๆ และนำข้อสรุปของ Ian Mynatt ดังตารางที่ 1 มาใช้ในการอธิบายลักษณะของรูปทรงของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน เพื่อนำไปสู่การอธิบายพื้นผิวที่ซับซ้อนและสมบัติของพื้นผิว ณ บริเวณเฉพาะที่ต่อไป

## ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับค่าความโค้ง [1],[2]

ทฤษฎีบท 1 (รูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง)

ให้  $x:U \rightarrow \square^n$  เป็นส่วนของพื้นผิว กำหนดฟังก์ชัน  $E, F, G:U \rightarrow \square$  โดย

$$E = \|x_u\|^2, \quad F = x_u \cdot x_v, \quad G = \|x_v\|^2 \quad (1.1)$$

แล้ว  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  เป็นรูปแบบมูลฐานที่หนึ่งของแผ่น  $x$  และเรียก  $E, F, G$  ว่าสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่ง

ทฤษฎีบท 2 (รูปแบบมูลฐานที่สอง)

ให้  $x:U \rightarrow \square^3$  เป็นส่วนของพื้นผิว และ  $\hat{N} = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$  เป็นเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยแล้ว

$$e = \hat{N} \cdot x_{uu}, \quad f = \hat{N} \cdot x_{uv}, \quad g = \hat{N} \cdot x_{vv} \quad (1.2)$$

เรียก  $e, f, g$  ว่าสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่สอง

บทตั้ง 1 ตัวดำเนินการรูปทรงของพื้นผิวปรกติ  $\Phi$  สมมาตร นั่นคือ

$$S(v_p) \cdot w_p = v_p \cdot S(w_p) \quad (1.3)$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์สัมผัส  $v_p, w_p$  ใน  $\Phi$

ทฤษฎีบท 3 (สมการเวกเตอร์) ให้  $x:U \rightarrow \square^3$  เป็นส่วนของพื้นผิวปรกติ แล้วตัวดำเนินการพื้นผิว  $S$  ของ  $x$  ที่กำหนดให้ในพจน์ของฐาน  $\{x_u, x_v\}$  โดย

$$-S(x_u) = \hat{N}_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2} x_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} x_v, \quad (1.4)$$

$$-S(x_v) = \hat{N}_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2} x_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} x_v, \quad (1.5)$$

โดยที่  $\hat{N}$  คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยปรกติ

ทฤษฎีบท 4 ให้  $x:U \rightarrow \square^3$  เป็นส่วนพื้นผิวปรกติค่าความโค้งเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยของ  $x$

$$\kappa_G = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.6)$$

$$\kappa_M = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad (1.7)$$

ที่  $E, F, G$  เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่งและ  $e, f, g$  เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่สอง

พิสัยจะคำนวณค่าความโค้ง  $\kappa_G, \kappa_M$  โดยใช้ฐาน  $\{x_u, x_v\}$  และเมทริกซ์จากทฤษฎีบท 3

$$\frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ff & -Ff + Eg \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

และค่า  $\kappa_G, \kappa_M$  คือดีเทอร์มิแนนต์และเทรซของเมทริกซ์ข้างต้น

$$\kappa_G = \frac{(fF - eG)(fF - gE) - (eF - fE)(gF - fG)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.9)$$

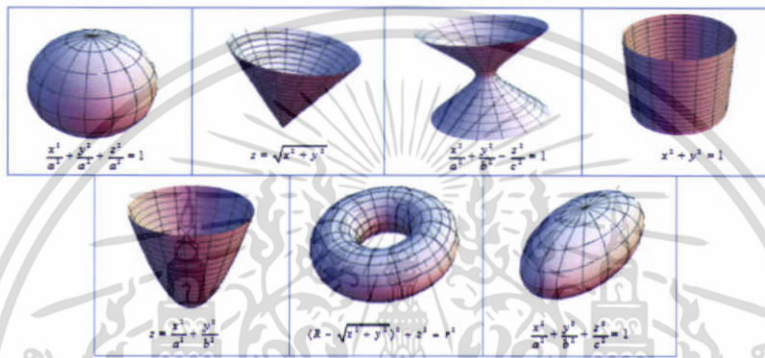
$$\kappa_M = -\frac{(fF - eG) + (fF - gE)}{2(EG - F^2)} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad (1.10)$$

**พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน [1]**

ทฤษฎีบท 5 ให้  $S$  เป็นระนาบใน  $\mathbb{R}^3$  และ  $l$  เป็นเส้นใน  $S$  และให้  $\varphi$  เป็นเซตของจุดใน  $S$  เมื่อ  $\varphi$  หมุนรอบแกน  $l$  เซต  $M$  คือเซตของจุดที่ได้จากการหมุนเรียกว่า พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน และในงานวิจัยนี้ให้  $z$  เป็นแกนหมุน

ทฤษฎีบท 6 พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน  $[\alpha]: (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  นิยามโดย

$[\alpha](u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$  เรียกว่า สมการอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

**ผลการวิจัยและการวิเคราะห์ผล**

ในการพิจารณาบริเวณเฉพาะที่ของจุดพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน ในรูปทรงต่างๆ ซึ่งจะพิจารณาค่าความโค้งของเกาส์และความโค้งเฉลี่ยจากสูตร (1.9) , (1.10) โดยพิจารณาสมการของทรงกลม ทรงรี ทรงกรวย ทรงพาราโบลา เริงวงรีและทรงไฮเพอร์โบลกแบบขึ้นขึ้นเดียวด้วยเวกเตอร์ระบุทิศทาง ในกรณีของทรงห่วงยาง ทรงกระบอกด้วยสมการอิงตัวแปรเสริม ได้ผลลัพธ์ดังนี้

สมการทรงรี  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  มีเวกเตอร์ระบุตำแหน่งคือ

$$\vec{r}_{1,1}(x, y) = (x, y, (c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{รูปทรงรีส่วนบน})$$

$$\kappa_G = \frac{a^6 b^6 c^2}{(-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))^2} \quad (2.1)$$

$$\kappa_M = -\frac{c^2 (a^4 b^2 + b^2 c^2 x^2 + a^2 (b^4 + c^2 y^2 - b^2 (x^2 + y^2)))}{2(c^2 (1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}} (-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))} \quad (2.2)$$

$$\vec{r}_{1,2}(x, y) = (x, y, -(c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{รูปทรงรีส่วนล่าง})$$

$$\kappa_G = \frac{a^6 b^6 c^2}{(-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))^2} \quad (2.3)$$

$$\kappa_M = \frac{c^2 (a^4 b^2 + b^2 c^2 x^2 + a^2 (b^4 + c^2 y^2 - b^2 (x^2 + y^2)))}{2(c^2 (1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{b^4}))^{\frac{1}{2}} (-a^2 b^4 x^2 + b^4 c^2 x^2 + a^4 (b^4 - b^2 y^2 + c^2 y^2))} \quad (2.4)$$

สมการทรงกลม  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$

สมการทรงกลมคือรูปแบบเฉพาะของสมการทรงรีที่มี  $c = b = a$  มีเวกเตอร์ระบุตำแหน่งคือ

$$\vec{r}_{2,1}(x, y) = (x, y, (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}) \text{ (รูปครึ่งทรงกลมส่วนบน)}$$

$$\kappa_G = \frac{1}{a^2} \quad (2.5)$$

$$\kappa_M = -\frac{1}{a} \quad (2.6)$$

$$\vec{r}_{2,2}(x, y) = (x, y, -(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}) \text{ (รูปครึ่งทรงกลมส่วนล่าง)}$$

$$\kappa_G = \frac{1}{a^2} \quad (2.7)$$

$$\kappa_M = \frac{1}{a} \quad (2.8)$$

สำหรับทุก ๆ จุด  $(x, y, z)$  ซึ่งเป็นพิกัดคาร์ทีเซียนของส่วนของทรงรีและทรงกลมในส่วนของแกนบวก  $z$  มีค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นบวกทั้งคู่ ส่วนทรงรีและทรงกลมในส่วนของแกนลบ  $z$  มีค่าความโค้งของเกาส์เป็นบวกและค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นลบ โดยจากตารางที่ 1 จะได้ว่า ลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนทรงรีและทรงกลมบนมีลักษณะเป็นโดม (Dome) และส่วนของทรงรีและทรงกลมล่างมีลักษณะเฉพาะที่เป็นรูบ่อ (Basin)

สมการกรวยฐานวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  มีเวกเตอร์ระบุตำแหน่งคือ

$$\vec{r}_3(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\kappa_G = 0 \quad (2.9)$$

$$\kappa_M = \frac{1}{2\sqrt{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.10)$$

สำหรับจุดใดๆ  $(x, y, z)$  บนกรวยยกเว้นจุดยอดกรวย  $(0, 0, 0)$  มีค่าความโค้งของเกาส์เท่ากับศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นบวก โดยตารางที่ 1 จะได้ว่า ลักษณะเฉพาะที่ของจุดทุกจุดบนทรงกรวยที่ยกเว้นจุดยอดมีลักษณะเป็นรูปประทุน (Antiformal)

สมการทรงพาราโบล่าเชิงวงรี  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  มีเวกเตอร์ระบุตำแหน่งคือ

$$\vec{r}_4(x, y) = (x, y, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$$

$$\kappa_G = \frac{4a^6b^6}{(4b^4x^2 + a^6(b^4 + 4y^2))^2} \quad (2.11)$$

$$\kappa_M = \frac{a^4b^2 + 4b^2x^2 + a^2(b^4 + 4y^2)}{(1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4})^2 (4b^4x^2 + a^4(b^4 + 4y^2))} \quad (2.12)$$

สำหรับจุดใดๆ  $(x, y, z)$  บนรูปทรงพาราโบล่าเชิงวงรีมีค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นบวก โดยตารางที่ 1 จะได้ว่าลักษณะเฉพาะที่ของจุดทุกจุดบนรูปทรงพาราโบล่าเชิงวงรีมีลักษณะเป็นรูปถ้วย (Dome) สมการทรงกระบอก  $x^2 + y^2 = a^2$  มีสมการอิงพารามิเตอร์คือ

$$\vec{r}_5(u, v) = (a \cos(u), a \sin(u), v)$$

$$\kappa_G = 0 \quad (2.13)$$

$$\kappa_M = -\frac{1}{2a} \quad (2.14)$$

สำหรับจุดใดๆ  $(x, y, z)$  บนรูปทรงกระบอกมีค่าความโค้งของเกาส์เท่ากับศูนย์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นลบ โดยตารางที่ 1 จะได้ว่า ลักษณะเฉพาะที่ของจุดทุกจุดบนทรงกระบอกมีลักษณะเป็นรูปประทุนหงาย (Synformal) สมการทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว  $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$  มีเวกเตอร์ระบุตำแหน่งคือ

$$\vec{r}_6(x, y) = (x, y, (-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$\kappa_G = -\frac{a^2}{(a^2 - 2(x^2 + y^2))^2} \quad (2.15)$$

$$\kappa_M = \frac{\left( \frac{(-a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 - 2(x^2 + y^2)} \right)}{(-a^2 + x^2 + y^2)^2} \quad (2.16)$$

สำหรับจุดใดๆ  $(x, y, z)$  บนรูปทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวมีค่าความโค้งของเกาส์เป็นลบและค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นบวก โดยตารางที่ 1 จะได้ว่า ลักษณะเฉพาะที่ของจุดทุกจุดบนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวมีลักษณะเป็นรูปประทุนแบบอานม้า (Antiformal saddle)

สมการรูปทรงห้วงยาง  $(c - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})^2 + z^2 = a^2$  มีสมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$$\vec{r}_7(u, v) = ((c + a \cos(v)) \cos(u), (c + a \cos(v)) \sin(u), a \sin(v)) \text{ สำหรับ } c \geq a$$

$$\kappa_G = \frac{\cos(v)}{a(c + a \cos(v))} \quad (2.17)$$

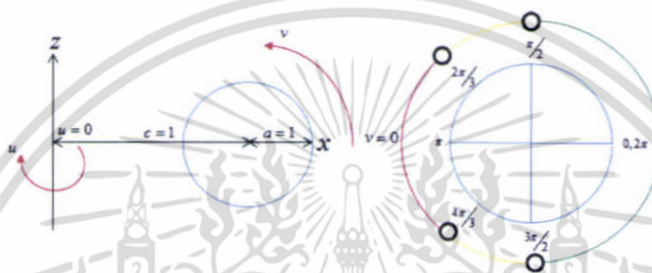
$$\kappa_M = -\frac{(c + 2a \cos(v))}{2a(c + a \cos(v))} \quad (2.18)$$

$$\text{สมมติให้ค่า } c = a = 1 \text{ ค่า } \kappa_G = \frac{\cos(v)}{(1 + \cos(v))} \text{ และ } \kappa_M = -\frac{(1 + 2 \cos(v))}{2(1 + \cos(v))}$$

ค่าความโค้งทั้งสองอยู่ในพจน์ของ  $v$  เป็นพารามิเตอร์ที่บอกถึงมุมที่กวาดไปของวงกลมต้นแบบดังรูปที่ 3

angle curvature	$v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$v = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	$v \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$v \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$	$v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$K_G$	0	-	-	-	+
$K_M$	-	0	-	+	-
Classification of point on a surface	Synformal	Perfect saddle	Synformal saddle	Antiformal saddle	Dome

ตารางที่ 2 แสดงลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนรูปทรงห่อวงยางโดยพิจารณาจากเครื่องหมายค่าความโค้ง



รูปที่ 3 แสดงทิศทางของมุม  $u, v$  เป็นตัวแปรของทรงห่อวงยางและแสดงช่วงของการเปลี่ยนเครื่องหมายค่าความโค้ง

### สรุปผลงานวิจัย

จากผลการวิจัยพบว่า รูปทรงกรวย ทรงกระบอก และทรงพาราโบล่าเชิงวงรีมีค่าความโค้งของเกาส์และค่าความโค้งเฉลี่ยเป็นค่าคงที่ โดยจากการจำแนกประเภทของจุดบนพื้นผิว ทุกๆ จุดบนพื้นผิวของรูปทรงดังกล่าวมีลักษณะเดียวกันเสมอ ซึ่งในส่วนของงานวิจัยนี้ทรงรีและทรงกลมจะใช้เวกเตอร์ระบุตำแหน่งแทนสมการของรูปทรงกลมและทรงรีในส่วนของครึ่งบนและครึ่งล่าง เนื่องจากครึ่งทรงรีบนและครึ่งรีล่างมีลักษณะเฉพาะที่ของจุดต่างกัน ทำให้สามารถอธิบายลักษณะของพื้นผิวได้ชัดเจนกว่า แต่ถ้าใช้สมการอิงตัวแปรเสริมในพจน์ของพิกัดทรงกลม เนื่องจากค่าความโค้งเฉลี่ยที่ได้จะมีค่าเท่ากัน ลักษณะเฉพาะที่ของจุดทั้งทรงรีและทรงกลมเหมือนกันทั้งรูปทรง ในกรณีสุดท้าย รูปทรงห่อวงยางซึ่งเป็นรูปทรงที่มีลักษณะเฉพาะที่ของจุดบนรูปทรงหลายประเภทที่แตกต่างกันไป โดยขึ้นอยู่กับลักษณะของบริเวณพื้นผิวของรูปทรงห่อวงยางที่จะพิจารณาดังตารางที่ 2

### เอกสารอ้างอิง

Alfred Gray, Elsa Abbena, Simon Salamon. Modern Differential Geometry of Curves and Surface with Mathematica. 3<sup>rd</sup> Edition.

M. P. Do Carmo. Differential Geometry of Curve and Surface. Prentice-Hall, England Cliffs, New Jersey, United States of America.

lan Mynatt, Stephan Bergbauer, David D. Pollard., 2007. Using differential geometry to Describe 3-D folds. Journal of structural geology 29,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อ 835 ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – นามสกุล นายวิศรุต คล้ายแจ้  
วัน เดือน ปีเกิด 4 พฤศจิกายน 2530  
ที่อยู่ปัจจุบัน 194/115 หมู่ที่ 1 ซอยเพิ่มสุข ถนนหลวงแพ่ง ตำบลทับยาว  
เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520  
ประวัติการศึกษา จบปริญญาตรีจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร  
ลาดกระบัง  
วุฒิการศึกษา วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ (เกียรตินิยมอันดับ 1)  
ปีการศึกษาที่จบ 2551



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้