

การศึกษาผลกระทบของยอว์แดมเปอร์ต่อการสั่นสะเทือนแบบฮันติง  
ในระบบราง

INVESTIGATION OF YAW DAMPER EFFECT ON HUNTING OSCILLATION  
IN RAILWAY



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
พ.ศ.2568  
KMITL-2025-EN-M-037-082

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

INVESTIGATION OF YAW DAMPER EFFECT ON HUNTING OSCILLATION  
IN RAILWAY



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF  
THE REQUIREMENT FOR THE MASTER DEGREE OF  
ENGINEERING IN MECHANICAL ENGINEERING  
FACULTY OF ENGINEERING  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
2025  
KMITL-2025-EN-M-037-082

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2025

SCHOOL OF ENGINEERING

เอกสารนี้สงวนลิขสิทธิ์และมิให้ใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษาผลกระทบของยอร์แดนเปอร์โตการสั่นสะเทือนแบบฮันติงในระบบราง
นักศึกษา	เตชิต ศรีตระกูล
รหัสประจำตัว	65016037
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
พ.ศ.	2568
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร. มนต์ศักดิ์ พิมสาร

## บทคัดย่อ

เมื่อรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่สูงขึ้น ชุดล้อของรถไฟจะเกิดการสั่นสะเทือนด้วยตัวเองหรือการสั่นสะเทือนแบบฮันติง หากรถไฟเคลื่อนที่ภายใต้ความเร็วที่ปลอดภัยการสั่นสะเทือนก็จะกลับไปสู่สภาวะสมดุล ในทางกลับกันหากรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าความเร็ววิกฤต แรงกระทำจากการสั่นสะเทือนจะสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ ซึ่งอาจให้เกิดล้อปืนรางและนำไปสู่อุบัติเหตุรถไฟตกราง ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงศึกษาผลกระทบของยอร์แดนเปอร์โตการสั่นสะเทือนแบบฮันติงในระบบรางด้วยวิธีการวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์ (Hopf bifurcation) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแครร์รถไฟโดยนำเสนอพฤติกรรมเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟและความไวของการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของแครร์รถไฟกับความเร็วจุดวิกฤต มากไปกว่านั้นยังพัฒนาสร้างชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 เพื่อศึกษาอิทธิพลของยอร์แดนเปอร์โตการสั่นสะเทือนกับความเร็วจุดวิกฤตและยืนยันความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่าความเร็วจุดวิกฤตของแครร์รถไฟขนาดย่อแปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของ ยอร์แดนเปอร์โตการสั่นสะเทือนซึ่งสอดคล้องและยืนยันผลจากการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติงด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อีกด้วย อย่างไรก็ตามความไวพารามิเตอร์ระบบหลักมีความไวในการเปลี่ยนแปลงความเร็วจุดวิกฤตสูงกว่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับรอง เช่น ยอร์แดนเปอร์โตการสั่นสะเทือน เป็นต้น

คำหลัก: การสั่นสะเทือนแบบฮันติง, ความเร็วจุดวิกฤต, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแครร์รถไฟ, ชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อ, ยอร์แดนเปอร์โตการสั่นสะเทือน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis	INVESTIGATION OF YAW DAMPER EFFECT ON HUNTING OSCILLATION IN RAILWAY
Student	Techit Sritrakul
Student ID.	65016037
Degree	Master of Engineering
Program	Mechanical Engineering
Year	2025
Thesis Advisor	Asst. Prof. Dr. Monsak Pimsarn

## ABSTRACT

Hunting oscillation occurs due to the self-oscillation of the wheelset when a train moves at a higher speed. The train has a stable at the lower speed, which is a safety operation. On the other hand, if the train exceeds the critical speed, significant lateral and yaw forces might lead to a wheel-climb derailment. Therefore, this thesis has studied the yaw damper's effect on railway hunting oscillation with the mathematical bogie model by Hopf bifurcation analysis. The study represents the behavior of the motion of a bogie and the sensitivity of changing the bogie's parameters and critical speed. Furthermore, the small-scale 1:5 bogie test rig has been developed to confirm mathematical model results and investigate the yaw damper's effect and critical speeds. The test rig's study indicates the bogie's critical speeds vary with the yaw damper's damping coefficient, which agrees with the mathematical model study. However, the sensitivity of the primary suspension parameter changing had a higher critical velocity sensitivity than the sensitivity of the secondary suspension parameter changing, such as yaw damper and others.

**Keywords:** Hunting oscillation, Critical velocity, Mathematical model of bogie, Small-scale bogie test rig, Yaw damper

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร. มนต์ศักดิ์ พิมสาร ที่ให้ความช่วยเหลือและคำชี้แนะช่วยแก้ปัญหาตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้า ซึ่งสิ่งเหล่านั้นทำให้เกิดงานวิจัยตีพิมพ์แรกของข้าพเจ้าโดยที่ข้าพเจ้าเป็นผู้เขียนหลักและผู้นำเสนอในงานประชุม TSME International Conference on Mechanical Engineering ครั้งที่ 13 พ.ศ. 2566 ยิ่งไปกว่านั้นงานวิจัยตีพิมพ์ฉบับนี้ก็ยังเป็นส่วนหนึ่งของเนื้อหาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ด้วยเช่นกัน

ขอขอบคุณ ดร. กลวัชร เฉลิมพงศ์ อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล เป็นผู้ขอทุนวิจัยจากทางสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังสร้างชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ โดยมีข้าพเจ้าเป็นผู้ช่วยวิจัยและรับทุนผู้ช่วยวิจัย จึงทำให้เกิดงานวิจัยตีพิมพ์ครั้งที่ 2 ของข้าพเจ้าโดยที่ข้าพเจ้าเป็นผู้ช่วยวิจัยและผู้เขียนหลักในผลงานวิจัยที่นำเสนอในที่ประชุมวิชาการ TSME International Conference on Mechanical Engineering ครั้งที่ 14 พ.ศ. 2567 มากไปกว่านั้นงานวิจัยตีพิมพ์ฉบับนี้ยังเป็นส่วนหนึ่งของเนื้อหาที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น และนั่นหลังจากการวิจัยเสร็จสิ้นชุดทดลองนี้ก็ยังคงเป็นสื่อการสอนแก่นักศึกษารุ่นหลังต่อไป

ขอขอบคุณมารดาของข้าพเจ้า คุณพรสาย ศรีตระกูล ที่เป็นผู้สนับสนุนให้ข้าพเจ้าทำสิ่งที่รัก ทั้งสนับสนุนค่าใช้จ่ายระหว่างเรียนและทำงานวิจัย อีกทั้งท่านยังมอบคำสอนและกำลังใจที่ดี ที่สุดสุดท้ายนี้ขอขอบคุณ ตัวข้าพเจ้าเอง ที่น้อมรับความช่วยเหลือ น้อมรับทุกโอกาส น้อมรับคำแนะนำ จากทุก ๆ ท่าน จนเกิด 2 งานวิจัยตีพิมพ์และวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ลุล่วงไปด้วยดี

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบบุญกุศลให้แก่สุนัข ทั้งสามตัวได้แก่ บุญเกิด บุญหลาย และ บุญรอด (ชื่อบุคคลที่ดีพึงป้องกัน, ชื่อสุนัขตามที่อยู่ ภูมิลำเนา, และชื่อแมว) ซึ่งเคยเป็นส่วนหนึ่งของสมาชิกในครอบครัวข้าพเจ้าด้วยเทอญ

*Don't find a fault, find a remedy, Henry Ford*

เตชิต ศรีตระกูล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยามให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ .....	I
ABSTRACT .....	II
กิตติกรรมประกาศ .....	III
สารบัญ .....	IV
สารบัญตาราง .....	VII
สารบัญรูปภาพ .....	VIII
รายการคำย่อและสัญลักษณ์ .....	XI
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	2
1.4 โครงสร้างวิทยานิพนธ์.....	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ .....	2
บทที่ 2 การทบทวนวรรณกรรม.....	3
2.1 บทนำ.....	3
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาการสันสเทือนโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	3
2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาการสันสเทือนด้วยการทดลองจริงบนชุดทดลองขนาดเล็ก.....	5
2.4 สรุปผลการทบทวนวรรณกรรม.....	7
บทที่ 3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	8
3.1 บทนำ.....	8
3.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับรถไฟความเร็วสูง .....	8
3.2.1 คุณลักษณะของรถไฟความเร็วสูง.....	8
3.2.2 ส่วนประกอบของแคร่รถไฟความเร็วสูง .....	9
3.2.3 มาตรฐานการออกแบบความเร็ววิกฤตบนรถไฟความเร็วสูง .....	10
3.3 เสถียรภาพการเคลื่อนที่ของรถไฟและการสันสเทือนแบบฮันดิง .....	11
3.3.1 เสถียรภาพการเคลื่อนที่ของรถไฟ .....	11
3.3.2 การสันสเทือนแบบฮันดิง.....	14
3.4 แรงคืบ (Creep force).....	14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และดองอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.1 ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ (Hertz's contact theory) .....	15
3.4.2 ทฤษฎีเชิงเส้นของคาลเคอร์ (Kalker's theory).....	18
3.5 ระบบเชิงพลวัตและสมการเชิงอนุพันธ์ .....	21
3.5.1 ระบบเชิงพลวัต .....	21
3.5.2 สมการเชิงอนุพันธ์ .....	22
3.6 ทฤษฎีการแยกสาขาและการแยกสาขาของฮอปฟ์ .....	23
3.6.1 ทฤษฎีการแยกสาขา (Bifurction) .....	23
3.6.2 การแยกสาขาของฮอปฟ์ (Hopf Bifurcation) .....	24
3.6.3 ประเภทของการแยกสาขาของฮอปฟ์ (Hopf Bifurcation).....	28
3.6.4 การแยกสาขาของฮอปฟ์ในการวิเคราะห์ระบบเชิงพลวัต.....	29
3.7 กฎความคล้ายคลึงเชิงกล.....	31
บทที่ 4 การศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติงตันด้วยแบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์ .....	31
4.1 บทนำ .....	31
4.2 สมการการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟ.....	33
4.3 ระเบียบวิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟ.....	37
4.4 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟเดิมกับสมการ การเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบ .....	42
4.5 การวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์.....	43
4.5.1 พลวัตการเคลื่อนที่ของระบบแครร์รถไฟ .....	44
4.5.2 ความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์กับความเร็ววิกฤตของแครร์รถไฟ.....	47
4.6 บทสรุป .....	50
บทที่ 5 การศึกษาผลกระทบฮาร์โมนิกต่อการสั่นสะเทือน แบบฮันติงตันในชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อ 50 .....	
5.1 บทนำ .....	50
5.2 การย่อขนาดค่าพารามิเตอร์ตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกล .....	52
5.3 การออกแบบชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อ .....	54
5.4 การทดสอบใช้ค้ำบนชุดทดสอบอย่างง่ายเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับและฮาร์โมนิกแต่ละค่า.....	56
5.4.1 การหาค่าความแข็งของสปริงของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่าย .....	57
5.4.2 การหาค่าความแข็งของสปริงและสัมประสิทธิ์ความหน่วงของใช้ค้ำแต่ละประเภทบนชุดทดสอบอย่างง่าย.....	59

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.5	หาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลักและระบบรองรับรอง ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	64
5.5.1	การหาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลัก $K_{px}$ , $K_{py}$ และ $C_{py}$ .....	64
5.5.2	การหาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับรอง $K_{sy}$ และ $C_{sy}$ .....	69
5.6	การวิเคราะห์ความเร็ววิกฤตของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ .....	72
5.7	ผลการทดลองบนชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อในออร์แทมเปอร์แต่ละประเภท.....	73
5.7.1	ออร์แทมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ .....	73
5.7.2	ออร์แทมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง.....	50
5.7.3	ออร์แทมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง .....	50
5.8	การเปรียบเทียบความเร็ววิกฤตของระบบแคร่รถไฟขนาดย่อ.....	50
5.9	บทสรุป .....	51
บทที่ 6	สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ .....	79
6.1	บทสรุป .....	79
6.2	ข้อเสนอแนะ .....	80
	เอกสารอ้างอิง .....	81
	ภาคผนวก ก โปรแกรม Matlab วิเคราะห์การแยกสาขาของฮอฟฟ์ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแคร่รถไฟ.....	84
	ภาคผนวก ข แบบภาพประกอบและภาพถ่าย คุณสมบัตีสปริงและใช้คัพแต่ละประเภท และการคำนวณความเร็วรอบของมอเตอร์ที่เหมาะสมกับ ชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ.....	91
	ภาคผนวก ค โปรแกรม Matlab แสดงการตอบสนองและ สเปกตรัมความถี่ของชุดทดสอบใช้คัพอย่างง่าย .....	102
	ประวัติผู้เขียน .....	104

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 4.1 แสดงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ .....	40
ตารางที่ 4.2 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 10% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น $V_n$ ...	49
ตารางที่ 4.3 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 20% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น $V_n$ ...	49
ตารางที่ 4.4 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 30% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น $V_n$ ...	50
ตารางที่ 5.1 ค่าพารามิเตอร์ของแควร์รถไฟความเร็วสูงจากงานวิจัย [1] .....	52
ตารางที่ 5.2 ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดเล็ก .....	54
ตารางที่ 5.3 ค่าพารามิเตอร์ของโซ่คอปเพื่อจำลองระบบรองรับรองตามแนวการเคลื่อนที่ของ แควร์รถไฟหรือยอร์แดมเปอร์จากการทดสอบ.....	63
ตารางที่ 5.4 คุณสมบัติวัสดุของอะลูมิเนียม [26] .....	66
ตารางที่ 5.5 ค่าความเร็ววิกฤตของชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดเล็กบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภท.....	72
ตารางที่ 5.6 ความเร็วต่าง ๆ ของแควร์รถไฟขนาดเล็กแต่ละประเภทยอร์แดมเปอร์.....	73
ตารางที่ 5.7 การเปรียบเทียบความเร็ววิกฤตจากการคำนวณและการทดลอง .....	50

# สารบัญรูปร่าง

หน้า

รูปที่ 3.1	รถไฟความเร็วสูงประเทศจีน บริษัท CRRC Thangshan [25].....	9
รูปที่ 3.2	แคร่รถไฟความเร็วสูง (Trailer bogie).....	9
รูปที่ 3.3	แสดงรัศมีการหมุนของชุดล้อ.....	11
รูปที่ 3.4	แสดงถึงการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งของชุดล้อ.....	12
รูปที่ 3.5	แสดงการเคลื่อนที่แนวด้านข้างของชุดล้อ.....	13
รูปที่ 3.6	วัตถุทั้ง 2 สัมผัสซึ่งกันและกัน.....	15
รูปที่ 3.7	แนวการสัมผัสของ 2 วัตถุ.....	16
รูปที่ 3.8	การสัมผัสของ 2 วัตถุภายใต้แรงตั้งฉากภายนอก.....	17
รูปที่ 3.9	แสดงแนวแกนของล้อรถไฟเมื่อกลิ้งบนรางรถไฟ.....	18
รูปที่ 3.10	พื้นที่สัมผัสตามทฤษฎีของคาร์เตอร์.....	19
รูปที่ 3.11	พื้นที่สัมผัสตามทฤษฎีของจอห์นสันสันและเวอร์มูเลน.....	19
รูปที่ 3.12	แสดงแนวแกน ณ จุดสัมผัส.....	19
รูปที่ 3.13	แสดงการเปลี่ยนแปลงของคานเมื่อรับหนักหนกที่แตกต่างกัน [21].....	23
รูปที่ 3.14	แสดงการแยกสาขาของฮอพฟ์วิกฤตยิ่งยวด (Supercritical Hopf bifurcation).....	25
รูปที่ 3.15	แสดงการแยกสาขาของฮอพฟ์วิกฤตยิ่งยวดในพื้นที่เฟสและพารามิเตอร์ (Phase-parameter space).....	26
รูปที่ 3.16	แสดงการแยกสาขาของฮอพฟ์ต่ำกว่าค่าวิกฤต (Subcritical Hopf bifurcation).....	27
รูปที่ 3.17	แสดงการแยกสาขาของฮอพฟ์ต่ำกว่าค่าวิกฤตในพื้นที่เฟสและพารามิเตอร์ (Phase-parameter space).....	27
รูปที่ 3.18	การแยกสาขาของฮอพฟ์ในระบบที่เป็นเชิงเส้น.....	29
รูปที่ 4.1	แผนภาพขั้นตอนในการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์..	32
รูปที่ 4.2	แสดงแบบจำลองแคร่รถไฟ.....	33
รูปที่ 4.3	แสดงแผนผังการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแคร่ไฟบนโปรแกรม MATLAB.....	41
รูปที่ 4.4	แสดงการเปรียบเทียบวงกลมจำกัดจากการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแคร่ไฟเดิม และวงกลมจำกัดจากการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแคร่ไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบ.....	42
รูปที่ 4.5	แสดงแผนผังการสร้างแผนภาพการแยกสาขานบนโปรแกรม MATLAB.....	43
รูปที่ 4.6	แสดงแผนภาพการแยกสาขาของระบบแคร่รถไฟ.....	44
รูปที่ 4.7	พฤติกรรมของระบบแคร่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 25 เมตรต่อวินาที.....	44
รูปที่ 4.8	พฤติกรรมการหมุนสั่นสะเทือนของระบบแคร่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 25 เมตรต่อวินาที.....	45
รูปที่ 4.9	พฤติกรรมของระบบแคร่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 30.4 เมตรต่อวินาที.....	45
รูปที่ 4.10	พฤติกรรมการหมุนสั่นสะเทือนของระบบแคร่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 30.4 เมตรต่อวินาที.....	45
รูปที่ 4.11	พฤติกรรมของระบบแคร่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 35 เมตรต่อวินาที.....	46
รูปที่ 4.12	พฤติกรรมการหมุนสั่นสะเทือนของระบบแคร่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 35 เมตรต่อวินาที.....	46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการศึกษา

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.13 แสดงความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 10% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	47
รูปที่ 4.14 แสดงความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 20% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	48
รูปที่ 4.15 แสดงความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 30% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	48
รูปที่ 5.1 แผนภาพขั้นตอนในการศึกษาผลกระทบยอร์วแดมเปอร์บนการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่ง ในชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ .....	51
รูปที่ 5.2 แสดงชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 .....	54
รูปที่ 5.3 แสดงใช้คอปฟ์และชุดทดสอบอย่างง่ายเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของใช้คอปฟ์.....	56
รูปที่ 5.4 แสดงแผนภาพระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบใช้คอปฟ์อย่างง่าย.....	56
รูปที่ 5.5 แสดงแผนภาพระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบที่ไม่ติดตั้งใช้คอปฟ์ .....	57
รูปที่ 5.6 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ไม่ติดตั้งใช้คอปฟ์ .....	58
รูปที่ 5.7 แสดงแผนภาพระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบใช้คอปฟ์อย่างง่าย ที่เขียนใหม่จากรูปที่ 5.4.....	59
รูปที่ 5.8 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ติดตั้งยอร์วแดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ.....	60
รูปที่ 5.9 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ติดตั้งยอร์วแดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง.....	61
รูปที่ 5.10 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ติดตั้งยอร์วแดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง.....	61
รูปที่ 5.11 แสดงการตอบสนองของระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระที่มีตัวหน่วง [25] .....	61
รูปที่ 5.12 แสดงแผนภาพชุดล้อรถไฟด้านหลังของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ .....	64
รูปที่ 5.13 แสดงการกำหนดพื้นที่รับแรงในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ.....	66
รูปที่ 5.14 แสดงการกำหนดพื้นที่รับแรงในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ .....	66
รูปที่ 5.15 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองโดยกำหนดแรงดึง (Tension) บนพื้นที่รับแรงบนสวิงอาร์ม โดยที่ $u_x = u_y = u_z = 0$ .....	67
รูปที่ 5.16 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองโดยกำหนดแรงกระทำบนพื้นที่รับแรงบนสวิงอาร์ม.....	67
รูปที่ 5.17 แสดงการกำหนดเมสของแบบจำลอง.....	67
รูปที่ 5.18 แสดงการกระจัดของการเสียรูปของสวิงอาร์มในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่.....	68
รูปที่ 5.19 แสดงการกระจัดของการเสียรูปของ สวิงอาร์ม ในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ .....	68
รูปที่ 5.20 แสดงแผนภาพจำลองของโครงแคร่รถไฟของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ.....	69
รูปที่ 5.21 แสดงแบบจำลองเฉพาะส่วนของตัวรองรับที่ยึดติดกับใช้คอปฟ์ .....	70
รูปที่ 5.22 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบจำลองเฉพาะส่วนของตัวรองรับ โดยที่ $u_x = u_y = u_z = 0$ .....	70
รูปที่ 5.23 แสดงการกระจัดของการเสียรูปของ ตัวรองรับ ในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่.....	71

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้เผยแพร่ไปยังเว็บไซต์ด้านการค้า

รูปที่ 5.24 แสดงทางเดินของรากของแบบจำลองชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภทด้วยค่าส่วนจริงสูงสุดภายใต้ความเร็วที่เพิ่มขึ้น ด้วยโปรแกรม MATLAB .....	72
รูปที่ 5.25 แสดงค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแควร์รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำในโดเมนเวลา .....	50
รูปที่ 5.26 แสดงสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแควร์รถไฟที่ติดตั้ง ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ.....	50
รูปที่ 5.27 แสดงค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแควร์รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลางในโดเมนเวลา .....	50
รูปที่ 5.28 แสดงสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแควร์รถไฟที่ติดตั้ง ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง .....	50
รูปที่ 5.29 แสดงค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแควร์รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูงในโดเมนเวลา .....	51
รูปที่ 5.30 แสดงสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแควร์รถไฟที่ติดตั้ง ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง.....	51



## รายการคำย่อและสัญลักษณ์

$a$	ความกว้างของรางรถไฟวัดจากกึ่งกลางของรางรถไฟ (m)
$b$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเฉของระบบรองรับหลัก (m)
$b_1$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแกนตัวหน่วงของระบบรองรับหลัก (m)
$b_2$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเฉของระบบรองรับรอง (m)
$b_3$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแกนตัวหน่วงของระบบรองรับรอง (m)
$C_1, C_2, C_3, C_4$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงของยอร์ว้แดมเปอร์ที่ได้จากการทดลอง (N s/m)
$C_{py}$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก (N s/m)
$C_{sx}$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง (N s/m)
$C_{sy}$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง (N s/m)
$f_{11}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ (N)
$f_{22}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบหมุน (Nm <sup>2</sup> )
$f_{12}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบหมุนทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ (Nm)
$f_{33}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ (N)
$I_{bz}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนรอบแกน z ของแคร่รถไฟ (kgm <sup>2</sup> )
$I_{wx}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนรอบแกน x ของชุดล้อ (kgm <sup>2</sup> )
$I_{wy}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนรอบแกน y ของชุดล้อ (kgm <sup>2</sup> )
$K_r$	ค่าความแข็งของรางรถไฟ (N/m)
$K_{px}$	ค่าความแข็งของสปริงการเคลื่อนที่ของระบบรองรับหลัก (N/m)
$K_{py}$	ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก (N/m)
$K_{sx}$	ค่าความแข็งของสปริงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง (N/m)
$K_{sy}$	ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง (N/m)
$l_1$	ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างสปริงของระบบรองรับรอง (m)
$l_2$	ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง (m)
$m_b$	มวลของโครงแคร่รถไฟ (kg)
$m_w$	มวลของชุดล้อ (kg)
$r_0$	รัศมีของล้อแคร่รถไฟ (m)
$W_A$	น้ำหนักกดเพลา (N)
$\lambda$	ค่าความเป็นกรวยของล้อ
$\delta$	ระยะห่างระหว่างขอบบังใบล้อและขอบรางรถไฟ (m)

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

การคมนาคมด้วยการขนส่งทางรางทางรางเป็นระบบที่มีประสิทธิภาพสูงและมีความสำคัญต่อการพัฒนาเศรษฐกิจ โดยประกอบด้วยรถขนส่งหลายประเภท ได้แก่ รถไฟผู้โดยสารทั่วไป รถไฟขนส่งสินค้า รถไฟฟ้าขนส่งมวลชน และรถไฟใต้ดิน และในปัจจุบันยังมีการพัฒนารถไฟความเร็วสูงที่สามารถเดินทางได้มากกว่า 250 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อย่างไรก็ตามการสั่นสะเทือนแบบฮันติง (Hunting Oscillation) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบไม่เสถียรของแคร่รถไฟทุกประเภท ที่จะประกอบด้วยการสั่นสะเทือนสองแบบพร้อมกัน คือ การสั่นหมุนรอบแกน Z ที่ทำให้แคร่รถไฟหมุนรอบแกนตั้งฉาก และการสั่นสะเทือนตามแนวแกน Y ที่ทำให้เกิดการเลื่อนไถลในทิศทางตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของรถไฟ มากไปกว่านั้นการสั่นสะเทือนแบบฮันติงนี้ทำให้เกิดจากปฏิสัมพันธ์ทำให้เกิดการชนกันระหว่างขบวนล้อและรางซึ่งเป็นสาเหตุให้ล้อรถไฟบิ่นรางและตกรางในที่สุด ส่งผลกระทบต่อความปลอดภัยในความเสี่ยงที่รถไฟตกราง การสึกหรอของล้อและราง และความสบายของผู้โดยสาร ดังนั้นในการออกแบบรถไฟความเร็วสูง [1] ในช่วงที่รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความไม่เสถียรภาพควรมีความเร็วไม่ต่ำกว่า 10% ของความเร็วสูงสุดของรถไฟ

เพื่อเพิ่มขีดความสามารถของความเร็วของรถไฟและหลีกเลี่ยงอุบัติเหตุรถไฟตกราง รวมถึงตอบสนองในความปลอดภัยจากขบวนรถไฟและความสะดวกสบายของผู้โดยสาร งานวิจัยที่ผ่านมาได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการศึกษาเพื่อคำนวณหาความเร็ววิกฤตและปัจจัยที่ส่งผลต่อความเร็ววิกฤตนี้เนื่องจากสามารถศึกษาได้อย่างอิสระและประหยัดงบประมาณ อย่างไรก็ตามผลการศึกษาจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แม่นยำควรถูกยืนยันจากการทดลองในรถไฟจริง แต่หัวข้อจำกัดของการศึกษาจากรถไฟขนาดจริงซึ่งงบประมาณวิจัยสูง

ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงศึกษาคุณลักษณะการสั่นสะเทือนแบบฮันติงของแคร่รถไฟความเร็วสูงด้วยวิธีการคำนวณ อีกทั้งยังศึกษาความไวพารามิเตอร์ของระบบรองรับต่อความเร็ววิกฤตมากกว่านั้นยังศึกษาคุณลักษณะการสั่นสะเทือนแบบฮันติงของแคร่รถไฟความเร็วสูงด้วยวิธีการทดลองด้วยชุดทดลองแคร่รถไฟความเร็วขนาดย่อ รวมถึงยังได้ศึกษาผลของความหน่วงของยอร์วเดมเปอร์ต่อความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟความเร็วสูงด้วยวิธีการคำนวณและการทดลองด้วยชุดทดลองขนาดย่อ

### 1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาคุณลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮันติง (Hunting motion) ของแคร่รถไฟความเร็วสูงด้วยวิธีการคำนวณ
2. เพื่อศึกษาความไว (Sensitivity study) พารามิเตอร์ของระบบรองรับ (Suspension parameters) ต่อความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟความเร็วสูงด้วยวิธีการคำนวณ
3. เพื่อศึกษาคุณลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮันติงของแคร่รถไฟความเร็วสูงด้วยวิธีการทดลองด้วยชุดทดลองขนาดย่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. เพื่อศึกษาผลของความหน่วงของยอร์แดมเปอร์ต่อความเร็ววิกฤติของแคร่รถไฟความเร็วสูง ด้วยวิธีการคำนวณและการทดลองด้วยชุดทดลองขนาดย่อ

### 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาบนการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งในระบบรางด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และชุดทดลองแคร่รถไฟสองเพลลาขนาดย่อ ดังนั้นจึงกำหนดขอบเขตของงานวิจัยดังนี้

1. ชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 จากขนาดจริงของรถไฟความเร็วสูงประเทศสเปน [2]
2. ส่วนประกอบของแคร่ เช่น โครงแคร่ เพลลา ล้อ พิจารณาเป็นวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body)
3. แบบจำลองประกอบไปด้วย โครงแคร่ เพลลา และล้อ พิจารณาเป็นวัตถุแข็งเกร็ง โดยมีระบบรองรับหลักและระบบรองรับรองเชื่อมระหว่างวัตถุแข็งเกร็งนั้น โดยมีองศาความอิสระเท่ากับ 6 (6 Degrees of Freedom)
4. ทั้งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และชุดทดลอง ศึกษาในสถานการณ์รถไฟวิ่งบนรางตรง

### 1.4 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

สำหรับวิทยานิพนธ์ของงานวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมด 6 บท ซึ่งรายละเอียดดังต่อไปนี้

- บทที่ 1 บทนำ
- บทที่ 2 การทบทวนวรรณกรรม
- บทที่ 3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
- บทที่ 4 การศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- บทที่ 5 การศึกษาผลกระทบของยอร์แดมเปอร์ต่อการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งในชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ
- บทที่ 6 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งในระบบรางด้วยชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ ซึ่งเป็นวิธีการทดลองยืนยันความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และทดแทนการทดลองในรถไฟขนาดจริงซึ่งใช้งบประมาณวิจัยที่สูงและพื้นที่กว้างเพื่อรองรับการทดลอง อีกทั้งยังเป็นชุดทดลองให้แก่นักศึกษาและนักวิจัยท่านอื่น ๆ ศึกษาและเข้าใจการเกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งโดยประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย มีดังนี้

1. ผู้ที่ศึกษาเกี่ยวกับระบบขนส่งทางรางเข้าใจพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งและรู้จักความเร็ววิกฤต
2. ผู้ที่ศึกษาเข้าใจอิทธิพลของยอร์แดมเปอร์ที่ส่งผลต่อการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่ง
3. ผู้ที่ศึกษาเกี่ยวกับการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งสามารถเห็นผลกระทบผลกระทบของพารามิเตอร์ของระบบรองรับต่อความเร็ววิกฤต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

### การทบทวนวรรณกรรม

#### 2.1 บทนำ

ในบทนี้จะเป็นการศึกษางานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งพบว่างานวิจัยส่วนใหญ่ที่เกี่ยวกับการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งนั้น มักใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และชุดทดลองขนาดย่อเพื่อศึกษาตัวแปรต่าง ๆ ที่มีผลต่อความเร็ววิกฤตในแควร์รถไฟ ซึ่งงานวิจัยเหล่านั้นเป็นองค์ความรู้สำคัญที่นำมาต่อยอดจนเกิดเป็นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นในบทนี้จึงเป็นการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการทดลองจริงบนชุดทดลองขนาดเล็ก

#### 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาการสั่นสะเทือนโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

Bustos, A. et.al. [2] ศึกษาความมีเสถียรภาพของแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้นของแควร์รถไฟความเร็วสูงโดยอ้างอิงค่าพารามิเตอร์จากแควร์รถไฟความเร็วสูงของประเทศสเปน โดยมุ่งเน้นศึกษาการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ที่ส่งผลกระทบต่อความเร็ววิกฤตซึ่งก่อให้เกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งที่นำไปสู่อุบัติเหตุรถไฟตกราง ผลการศึกษาพบว่าการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักกดเพลลาแปรผันตรงกับการเปลี่ยนแปลงความเร็ววิกฤต มากไปกว่านั้นการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบกันสะเทือนส่งผลกระทบต่อการศึกษาการเปลี่ยนแปลงความเร็ววิกฤตเช่นเดียวกัน

True and Jensen [3] ศึกษาการสั่นสะเทือนแบบไม่เป็นเชิงเส้นบนแบบจำลองแควร์รถไฟของ Cooperider ด้วยการวิเคราะห์การแยกสาขา (Bifurcation) ซึ่งเป็นวิธีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของระบบเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ เพื่อหาค่าที่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของระบบอย่างมีนัยสำคัญและส่งผลกระทบต่อความไม่เสถียรของระบบ โดยผลการศึกษาแสดงให้เห็นถึงความเร็ววิกฤตที่ส่งผลกระทบต่อความเสถียรภาพของการเคลื่อนที่ของรถไฟหากรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าความเร็ววิกฤตจะเกิดความเสียหายของล้อและรางรถไฟอย่างรุนแรงและรถไฟมีความเสี่ยงที่จะเกิดอุบัติเหตุตกรางได้เช่นกัน

Ahmadian and Yang [4] ศึกษาผลกระทบของความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบที่มีต่อการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่ง โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแควร์รถไฟ 2 ชุดล้อ (2-axle railway bogie) ซึ่งอ้างอิงค่าพารามิเตอร์จากรถไฟขนส่งสินค้าในสหรัฐอเมริกา มากไปกว่านั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวได้กล่าวถึงและนำฟังก์ชันแรงกระทำของยอร์แดมเปอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นและฟังก์ชันแรงกระทำจากการสัมผัสระหว่างบังใบล้อกับรางรถไฟประกอบการคำนวณด้วย ผลการศึกษาพบว่าการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งเกิดขึ้นที่ความเร็วต่ำกว่าความเร็ววิกฤตที่คำนวณโดยการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นเนื่องจากความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบรถไฟ อีกทั้งยังศึกษาอิทธิพลที่มีผลต่อความเร็ววิกฤตและการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่ง ได้แก่ ความไม่เป็นเชิงเส้นของยอร์แดมเปอร์การสัมผัสระหว่างบังใบล้อกับรางรถไฟ และพารามิเตอร์อื่น ๆ ด้วย ซึ่งเป็นการค้นพบที่มีนัยสำคัญที่สร้างความ

เข้าใจในการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งในระบบรถไฟที่ซับซ้อนมากขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Kim, P. et.al. [5] ศึกษาผลกระทบของความแข็งของสปริงและสัมประสิทธิ์ความหน่วงของรถไฟที่มีแคร่รถไฟคู่กับการสั่นสะเทือนแบบฮันติงตันโดยการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) เพื่อสังเกตพฤติกรรมเชิงพลวัตของรถไฟที่มีแคร่รถไฟคู่ ณ ความเร็ววิกฤต ผลการศึกษาพบว่า การวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะแสดงค่ารากสังยุคเชิงซ้อนที่โดดเด่น (Dominant complex conjugate root) และรากที่ซ่อนอยู่ (Shadowed root) ซึ่งแสดงถึง โหมดของการสั่นสะเทือน (Mode shape) แบบฮันติงตันของรถไฟ ณ ความเร็ววิกฤต ในส่วนของผลการศึกษาผลกระทบของพารามิเตอร์นั้นพบว่า ความแข็งของสปริงทั้งทางแนวยาวและแนวตั้งข้างส่งผลกระทบต่ออย่างชัดเจนในการสั่นสะเทือนแบบฮันติงตัน นอกจากนี้ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของแคร่รถไฟก็ส่งผลกระทบต่ออย่างชัดเจนในการสั่นสะเทือนแบบฮันติงตันด้วยเช่นกัน

Hamid, M. et.al. [6] ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบฮันติงตันของแคร่รถไฟโดยใช้การวิเคราะห์การแยกสาขา (Bifurcation) โดยมุ่งเน้นในผลกระทบของความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบแคร่รถไฟ เช่น แรงกระทำของยอร์แดมเปอร์แบบไม่เป็นเชิงเส้น และแบบจำลองแรงเสียดทานการคืบของการสัมผัสล้อกับราง อีกทั้งยังได้นำเสนอการวิเคราะห์เพื่อหาความเร็ววิกฤตและความถี่ของวงกลมขอบ (Limit cycle) โดยใช้หลักเกณฑ์ของเร้าท์เฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz criterion) และนำเสนอฟังก์ชันใหม่สำหรับความไม่ต่อเนื่องในความไม่เป็นเชิงเส้น ผลการศึกษาแสดงให้เห็นถึงความไม่เสถียรภาพของรถไฟเมื่อรถไฟเคลื่อนที่มากกว่าความเร็ววิกฤต ยิ่งไปกว่านั้นการนำเสนอฟังก์ชันใหม่สำหรับความไม่ต่อเนื่องในความไม่เป็นเชิงเส้นยังง่ายต่อการวิเคราะห์และสามารถแก้ปัญหาไม่เป็นเชิงเส้นได้ และงานวิจัยนี้ยังแสดงอิทธิพลของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ส่งผลต่อความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟ ซึ่งพบว่าความแข็งสปริงของยอร์แดมเปอร์มีผลต่อความเร็ววิกฤตและเป็นพารามิเตอร์สำคัญในการออกแบบเพื่อเพิ่มความเร็ววิกฤตของรถไฟ

Reza [7] ศึกษาอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของค่าความแข็งสปริงแนวตั้งข้างบนการวิเคราะห์แบบไม่เป็นเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีโบโกลิอูบอฟ (Bogoliubov) เพื่อศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติงตันของรถไฟ ผลการศึกษาพบว่าความเร็ววิกฤตในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบฮันติงตันในระบบแคร่รถไฟที่มี 2 ชุดล้อมีค่าน้อยกว่าความเร็ววิกฤตในการวิเคราะห์ระบบ 1 ชุดล้อ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความแม่นยำของความเร็ววิกฤตหากวิเคราะห์ในระบบที่สมบูรณ์ ในส่วนของผลการศึกษาอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของระบบรถไฟพบว่า การขยายความกว้างรางรถไฟและการลดความเป็นโคนของล้อรถไฟเพิ่มความเร็ววิกฤตอย่างมีนัยสำคัญ อย่างไรก็ตามการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักดเพลลาและค่าความแข็งของรางไม่ส่งผลกระทบต่อ การเปลี่ยนแปลงความเร็ววิกฤต

Xuejun, G. et.al. [8] ศึกษาการสั่นสะเทือนในแนวตั้งข้างของรถไฟโดยใช้ 2 แบบจำลองการสัมผัสระหว่างล้อกับรางรถไฟ ได้แก่ แบบจำลองเวอร์มูเลน-จอห์นสัน (Vermeulen-Johnson) และแบบจำลองเชน-เฮดริค-เอลกินส์ (Shen-Hedrick-Elkins) เพื่อนำเสนอพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของรถไฟและความปั่นป่วน (Chaos) ของการเคลื่อนที่รถไฟ ณ ความเร็วต่าง ๆ บนการวิเคราะห์การแยกสาขา ผลการศึกษาพบหลากหลายเส้นทางของผลเฉลยบนการวิเคราะห์การแยกสาขา ซึ่งผลเฉลยคือค่าความเร็ววิกฤตที่ก่อให้เกิดความไม่เสถียรของรถไฟ ยิ่งกว่านั้นแบบจำลองเชน-เฮดริค-เอลกินส์เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ยังนำเสนอความซับซ้อนและความสมจริงของสาขาของผลเฉลยที่มากกว่าแบบจำลองเวอร์มูเลน-จอห์นสัน อย่างไรก็ตามเส้นทางการเฉลยทั้ง 2 แบบจำลองไม่ได้การันตีถึงเส้นทางการเฉลยทั้งหมด ดังนั้นจึงต้องวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของรถไฟอย่างละเอียดและระมัดระวัง และทดสอบวิ่งรถไฟบนรางทดสอบเพื่อยืนยันผลการวิเคราะห์

Uyulan, Ç. et.al. [9] ศึกษาผลกระทบการออกแบบพารามิเตอร์บนความเป็นพลวัตของแคร่รถไฟภายใต้สภาวะความไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีการวิเคราะห์การแยกสาขา เพื่อสังเกตพฤติกรรมเชิงพลวัตของระบบแคร่รถไฟ ณ ความเร็วที่เพิ่มขึ้น รวมไปถึงการหาความเร็ววิกฤต ณ จุดที่รถไฟไม่มีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่ ผลการศึกษาการแสดงผลภาพการแยกสาขา ที่แสดงถึงการกระจัดทางด้านข้างสูงสุดของชุดล้อหน้าของแคร่รถไฟในแต่ละช่วงความเร็วบนค่าพารามิเตอร์ของระบบสั้นสะเทือนที่แตกต่างกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าพารามิเตอร์ของระบบสั้นสะเทือนมีผลกระทบต่อความเร็ววิกฤตและพฤติกรรมเชิงพลวัตไม่เป็นเชิงเส้นอย่างมีนัยสำคัญ อีกทั้งยังเน้นย้ำให้เห็นถึงการมีอยู่ของการเคลื่อนที่แบบปั่นป่วนหรือไม่มีเสถียรภาพเมื่อรถไฟเคลื่อนที่เร็วกว่าความเร็ววิกฤต

Sun, J. et.al. [10] ศึกษาความเร็ววิกฤตและความถี่ของการสั้นสะเทือนแบบฮันติงของรถไฟความเร็วสูงด้วยการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์รถไฟของความเร็วสูงในแนวด้านข้างซึ่งมี 17 องศาอิสระ โดยมุ่งเน้นผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อความเป็นพลวัตของรถไฟความเร็วสูง ผลการศึกษาพบว่า ณ ความเร็ววิกฤต ความถี่ของการสั้นสะเทือนแบบฮันติงเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วเมื่อยอร์ว้แคมเปอร์เกิดการโบลออฟ (Blow off) ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงค่าประสิทธิความหน่วงจากค่าหนึ่งสู่อีกค่าหนึ่งของยอร์ว้แคมเปอร์เมื่อยอร์ว้แคมเปอร์สั้นสะเทือนด้วยความเร็วที่มากกว่าค่าโบลออฟ อีกทั้งยังนำเสนอวงกลมจำกัดเสถียร (Stable limit cycle) ของการกระจัดแนวด้านข้างและความเร็วของชุดล้อ ณ ความเร็วของรถไฟมากกว่าความเร็ววิกฤต ซึ่งแสดงถึงการเกิดการสั้นสะเทือนแบบฮันติง ทั้งนี้การเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของรถไฟความเร็วสูงส่งผลผลกระทบต่อความเร็ววิกฤตและความถี่ของการสั้นสะเทือนแบบฮันติงอย่างมีนัยสำคัญ

### 2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาการสั้นสะเทือนด้วยการทดลองจริงบนชุดทดลองขนาดเล็ก

Moritz and Alfred [11] ศึกษาการออกแบบชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็ก 1 ต่อ 5 เพื่อย่อชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดจริง ซึ่งการออกแบบชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็กมีจุดเด่นในเรื่องการใช้งบประมาณการสร้งน้อยกว่าเมื่อเทียบกับขนาดจริง อีกทั้งยังง่ายต่อการควบคุม การซ่อมบำรุง และการศึกษาการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ต่าง ๆ ผลการศึกษาพบว่าผลการทดลองชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็กและผลการทดลองจากการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความคล้ายคลึงกัน ซึ่งยืนยันได้ว่าชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็กสามารถยืนยันผลการทดลองจากการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

Beom-Gyu, E. et.al. [12] ศึกษาการออกแบบชุดจำลองการทรงขนาดย่อเพื่อสังเกตพฤติกรรมเชิงพลวัตและเสถียรภาพของแคร่รถไฟ มุ่งเน้นในการพัฒนาจำลองในหลากหลายพารามิเตอร์ เช่น มุมบังใบล้อ รัศมีล้อ และความโค้งของราง ซึ่งทำให้เข้าใจถึงความเป็นพลวัตของแคร่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตให้ถือว่าผิดกฎหมาย และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รถไฟและความปลอดภัยในระบบราง โดยออกแบบในขนาดย่อ 1 ต่อ 5 ภายใต้กฎความเหมือนเชิงกล จากการศึกษาพบว่าชุดจำลองการตรึงขนาดเล็กสามารถทดสอบพฤติกรรมเชิงพลวัตและเสถียรภาพของแคร่รถไฟภายใต้เงื่อนไขที่พารามิเตอร์แตกต่างกัน อีกทั้งยังสามารถศึกษาการลดการสั่นสะเทือนและเพิ่มความปลอดภัยของรถไฟด้วยเช่นกัน

Docquier and Fiset [13] ออกแบบชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 เพื่อเพิ่มความเข้าใจในปรากฏการณ์สัมผัสกับรางของรถไฟ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับวิศวกรที่ไม่ได้เชี่ยวชาญในระบบรถไฟ อีกทั้งใช้เป็นสื่อการสอนบุคลากรทั้งในและนอกสถาบันโดยอาศัยการเคลื่อนที่ด้านข้างและการหมุนของแคร่รถไฟขณะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่าง ๆ เพื่อแสดงพฤติกรรมเชิงพลวัตของแคร่รถไฟ

Beom-Gyu, E. et.al. [14] ศึกษาเสถียรภาพการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟจำลองขนาดย่อ 1 ต่อ 5 โดยใช้ชุดทดลองจำลองการตรึงขนาดเล็ก เพื่อแสดงให้เห็นความสำคัญของการเพิ่มความปลอดภัยในการดำเนินรถไฟเมื่อรถไฟวิ่งด้วยความเร็วสูง ผลการศึกษาพบว่าพฤติกรรมเชิงพลวัตของแคร่รถไฟขนาดย่อมีความคล้ายคลึงกับผลลัพธ์จากการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังพบว่าน้ำหนักของรถไฟมีอิทธิพลอย่างมีนัยสำคัญกับเสถียรภาพการเคลื่อนที่ของรถไฟ ซึ่งการลดน้ำหนักรถไฟส่งผลต่อเสถียรภาพการเคลื่อนที่ที่ลดลง

Han, J. et.al. [15] พัฒนาชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 10 จากขนาดจริง เพื่อศึกษาพฤติกรรมเชิงพลวัตของรถไฟ โดยการออกแบบขนาดย่ออยู่ภายใต้กฎ Jasninski's similarity และทดสอบการสั่นสะเทือน 9 ระดับความอิสระ ผลการศึกษาพบว่าผลการทดลองจากชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อมีความแม่นยำในการจำลองพฤติกรรมเชิงพลวัตของรถไฟเมื่อเทียบกับผลการทดลองจากการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

Bosso, N. et.al. [16] ศึกษาการพัฒนาชุดทดลองแคร่รถไฟและชุดทดลองชุดล้อรถไฟเดี่ยว ณ Railway Technology Laboratory ของ Politechnico di Torino ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1998 เพื่อสร้างชุดทดลองที่สามารถทดลองภายใต้เงื่อนไขในการปฏิบัติการเดินรถต่าง ๆ ผลการศึกษาชี้ให้เห็นถึงการออกแบบชุดทดลองที่ทันสมัยมีความยืดหยุ่นในการทดลองมากขึ้น เพื่อตอบสนองต่อความสามารถในการทดสอบที่มากขึ้นสำหรับองค์ประกอบสำคัญ ซึ่งนำไปสู่การพัฒนาประสิทธิภาพและความปลอดภัยของระบบขนส่งทางรางในอนาคต

Kalivoda and Bauer [17] ได้ศึกษาชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็กที่ Czech Technical University ในความสำคัญของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็ก ซึ่งใช้งบประมาณค่าน้อยกว่าเมื่อเทียบกับการทดลองในขนาดจริงเพื่อยืนยันผลการทดลองจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งดำเนินการออกแบบในแบบจำลองใหม่ในอนาคต

Myamlin, S.V. et.al. [18] ศึกษาการนำชุดทดลองขนาดย่อมาใช้ในการทดสอบรถไฟ ซึ่งมุ่งเน้นการสังเกตพฤติกรรมเชิงพลวัตของรถไฟและการสัมผัสระหว่างล้อกับราง อีกทั้งยังเน้นย้ำข้อเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ได้เปรียบของชุดทดลองขนาดย่อเมื่อเทียบกับการทดสอบในขนาดจริง เช่น ง่ายต่อการควบคุมการทดลอง สามารถทดสอบซ้ำได้ และความอิสระมากกว่าในการติดตั้งการทดลอง ผลการศึกษาชี้ให้เห็นถึงความสำคัญของชุดทดลองขนาดย่อเพื่อนำมาทดสอบในแนวคิดรถไฟใหม่และองค์ประกอบต่าง ๆ ที่กระทบต่อการวิ่งและความปลอดภัยของรถไฟ

Visayataksin and Sooklamai [19] ศึกษาการพัฒนาชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 4.5 มุ่งเน้นความเข้าใจพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแคร่รถไฟ โดยเฉพาะการเคลื่อนที่แบบฮันติ่งซึ่งส่งผลกระทบต่อความปลอดภัยต่อผู้โดยสาร โดยเปรียบเทียบข้อมูลจากการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่าชุดทดลองขนาดย่อสามารถสัทธิการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟขนาดย่อได้ง่ายและปลอดภัยเมื่อเทียบกับการสัทธิในแคร่รถไฟจริง อย่างไรก็ตามค่าความเร็ววิกฤตที่หาได้จากการทดลองบนชุดทดลองและการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความคลาดเคลื่อน เนื่องจากบางค่าพารามิเตอร์ยังไม่ทราบค่าอย่างแท้จริง ดังนั้นในการศึกษาต่อไปคือการหาค่าพารามิเตอร์ที่ถูกต้อง เพื่อให้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถคำนวณให้ได้ผลลัพธ์ที่น่าเชื่อถือ

Sundar, S. et.al. [20] พัฒนาแบบจำลองระบบหลายชั้นส่วนของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อที่มีการเก็บข้อมูลแบบเรียลไทม์ (Real-time) โดยอ้างอิงพารามิเตอร์ของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อเดิม เพื่อพัฒนาความแม่นยำของการศึกษาการยึดเกาะระหว่างล้อกับรางรถไฟ ซึ่งการศึกษาส่วนใหญ่ใช้ชุดทดลองแคร่รถไฟทั่วไปโดยที่ผลการทดลองอาจจะไม่แม่นยำเนื่องจากความซับซ้อนของการออกแบบชุดทดลอง ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองระบบหลายชั้นส่วนของชุดทดลองนี้มีความแม่นยำและมีประสิทธิภาพเทียบเท่าแบบจำลองระบบหลายชั้นส่วนของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อเดิม อีกทั้งยังพบว่าความเร็วในการคำนวณของแบบจำลองระบบหลายชั้นส่วนของชุดทดลองที่มีการเก็บข้อมูลแบบเรียลไทม์เร็วกว่าความเร็วการคำนวณแบบจำลองระบบหลายชั้นส่วนของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อแบบเดิมอย่างมีนัยสำคัญ

## 2.4 สรุปผลการทบทวนวรรณกรรม

จากการทบทวนวรรณกรรมงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งของแคร่รถไฟโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในหลากหลายตัวแปร และการทดลองจริงบนชุดทดลองขนาดย่อเพื่อยืนยันผลการคำนวณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และย่อการทดลองในขนาดจริงพบว่ายอร์วแคมเปอร์เป็นหนึ่งในตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามยังไม่มียืนยันผ่านการทดลองจริงบนชุดทดลองขนาดย่อ ซึ่งเป็นแรงจูงใจให้กับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ในการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งของแคร่รถไฟโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาสร้างชุดทดลองแคร่รถไฟสองเพลานขนาดย่อ 1 ต่อ 5 ของขนาดรถไฟจริงโดยเน้นในการศึกษาอิทธิพลของ ยอร์วแคมเปอร์กับความเร็ววิกฤตที่มีผลต่อการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่ง

## บทที่ 3

# ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

### 3.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งจะประกอบไปด้วยความรู้เกี่ยวกับรถไฟความเร็วสูง เสถียรภาพการเคลื่อนที่ของรถไฟและการสั่นสะเทือนแบบฮันติง และแรงคืบ โดยอ้างอิงเนื้อหาจากหนังสือ Railroad vehicle dynamic : a computational approach เขียนโดย Shabana, A. A. et.al. [21] เพื่ออธิบายความสำคัญของการสั่นสะเทือนแบบฮันติงในระบบรางก่อนเริ่มดำเนินงานวิจัย อีกทั้งยังจะเป็นพื้นฐานที่จะนำไปสู่การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบฮันติงของแคร่รถไฟ และยังกล่าวถึงระบบเชิงพลวัตและสมการเชิงอนุพันธ์ ทฤษฎีการแยกสาขาและการแยกสาขาของฮอปฟ์ โดยอ้างอิงเนื้อหาจากหนังสือ Nonlinear dynamics and chaos with application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering เขียนโดย Strogatz, S.H. [22] และ หนังสือ Elements of applied bifurcation theory เขียนโดย Kuznetsov Y.A. et.al.[23] ยังได้ถูกนำมาใช้ในการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติงของแคร่รถไฟบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และสุดท้ายกฎความคล้ายคลึงเชิงกลเพื่อเป็นแนวทางในการออกแบบและพัฒนาชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อโดยอ้างอิงเนื้อหาจากงานวิจัยของ Moritz and Alfred [11]

### 3.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับรถไฟความเร็วสูง

#### 3.2.1 คุณลักษณะของรถไฟความเร็วสูง

รถไฟความเร็วสูง (High Speed Rail) คือ ระบบของรถไฟที่สามารถเดินทางด้วยความเร็วสูงกว่าระบบรถไฟทั่วไป โดยมีมาตรฐานแตกต่างกันไปดังนี้

1. สหภาพยุโรป (EU) ได้กำหนดความเร็วขั้นต่ำ 250 กิโลเมตรต่อชั่วโมง บนโครงสร้างหรือเส้นทางใหม่ และความเร็วขั้นต่ำ 200 กิโลเมตรต่อชั่วโมง บนโครงสร้างหรือเส้นทางที่ปรับปรุงแล้ว
2. สหภาพรถไฟนานาชาติ (UIC) ได้กำหนดความเร็วขั้นต่ำเช่นเดียวกับมาตรฐานของสหภาพยุโรป [24]
3. ประเทศญี่ปุ่น ได้กำหนดรถไฟความเร็วสูง ณ ความเร็วที่สามารถทำได้มากกว่า 200 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

### 3.2.2 ส่วนประกอบของแคร่รถไฟความเร็วสูง

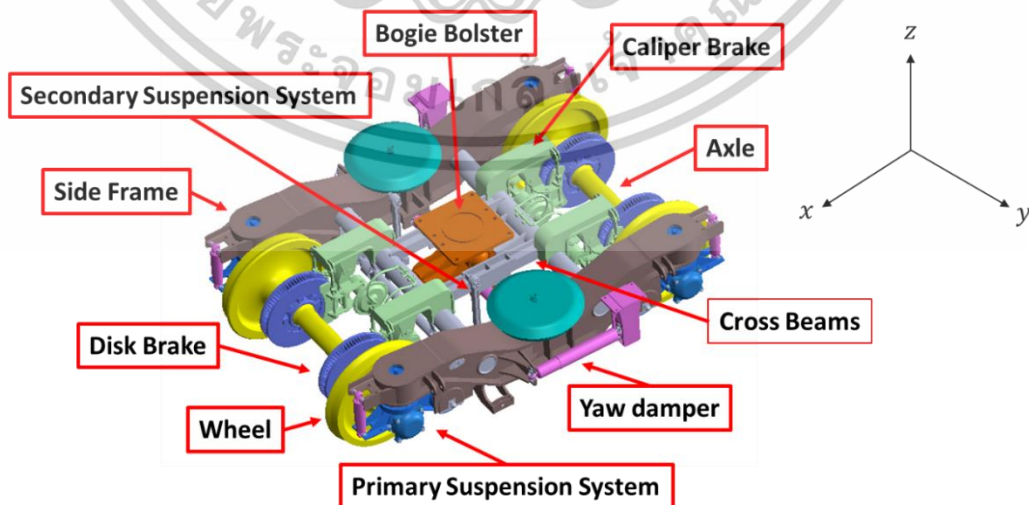
รถไฟความเร็วสูงสามารถเดินทางด้วยความเร็วที่มากกว่า 200 กิโลเมตรเป็นต้นไป ดังรูปที่ 3.1 โดยมีองค์ประกอบหลัก ดังต่อไปนี้

1. ตัวรถโดยสาร (Car body) มีหน้าที่เป็นโครงสร้างหลักที่รองรับผู้โดยสารหรืออุปกรณ์ต่าง ๆ
2. ระบบขับเคลื่อน (Traction system) ประกอบไปด้วยมอเตอร์ไฟฟ้าและระบบควบคุมการเคลื่อนที่ของรถไฟ
3. แคร่รถไฟ (Bogie) ประกอบด้วยชุดล้อและโครงสร้างรองรับตัวรถโดยสาร และมีหน้าที่เป็นตัวเชื่อมระหว่างตัวรถโดยสารกับราง
4. ระบบอาณัติสัญญาณและควบคุม (Signaling and control system) มีหน้าที่จัดการและควบคุมรถไฟให้เดินทางเป็นไปอย่างปลอดภัยและมีประสิทธิภาพ



รูปที่ 3.1 รถไฟความเร็วสูงประเทศจีน บริษัท CRRC Thangshan [25]

ซึ่งแคร่รถไฟจะรองรับตัวรถโดยสารดังรูปที่ 3.1 ที่วงกลมไว้ โดยที่แคร่รถไฟความเร็วสูงเป็นองค์ประกอบสำคัญในศึกษาและวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นจึงจะกล่าวส่วนประกอบสำคัญของแคร่รถไฟความเร็วสูงแบบลากจูง (Trailer bogie) ดังรูปที่ 3.2 ดังต่อไปนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับรูปที่ 3.2 แคร่รถไฟความเร็วสูง (Trailer bogie) ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. ระบบรองรับหลัก (Primary suspension system) ทำหน้าที่ รับการสั่นสะเทือนจากชุดล้อที่เคลื่อนที่บนรางรถไฟ
2. ระบบรองรับรอง (Secondary suspension system) ทำหน้าที่ รับการสั่นสะเทือนจากระบบรองรับหลัก เพื่อลดการสั่นสะเทือนที่นำไปสู่ตัวรถ ซึ่งส่งผลกระทบต่อความสบายของผู้นั่งโดยสาร
3. ยอร์แดมเปอร์ (Yaw damper) เป็นส่วนหนึ่งของระบบรองรับรอง ทำหน้าที่ รองรับการสั่นสะเทือนแบบหมุนรอบตัวรถหรือหมุนรอบแกน z ของระบบ (Yaw)
4. โครงโบกี้ด้านข้าง (Side frame bogie) ทำหน้าที่ เป็นโครงสร้างที่รองรับน้ำหนักจากตัวรถโดยสาร
5. คานขวาง (Cross beam) ทำหน้าที่ เชื่อมต่อโครงโบกี้ด้านข้างเข้าด้วยกัน
6. เพลา (Axle) ทำหน้าที่ เชื่อมต่อล้อทั้งสองข้าง
7. ล้อ (Wheel) ทำหน้าที่ สัมผัสและเคลื่อนที่ที่ไปบนราง
8. จานเบรกและคาลิเปอร์เบรก (Disk brake and caliper brake) ทำหน้าที่ ห้ามล้อของแคร่รถไฟ
9. ตัวรองรับตัวรถโดยสาร (Bogie bolster) ทำหน้าที่ เชื่อมต่อระหว่างแคร่รถไฟกับตัวรถโดยสาร

### 3.2.3 มาตรฐานการออกแบบความเร็ววิกฤตบนรถไฟความเร็วสูง

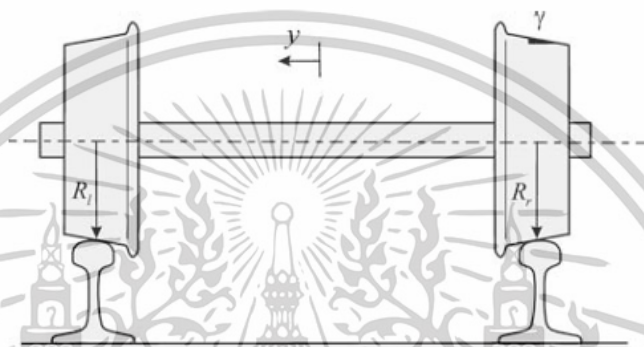
จากมาตรฐาน EN 14363:2016+A1:2018 (Railway applications – Testing and Simulation for the acceptance of running characteristics of railway vehicles-Running Behavior and stationary tests) [1] กำหนดขอบเขตที่ยอมรับได้ของรถไฟ สำหรับรถไฟที่มีความเร็วสูงมากกว่า 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และไม่เกิน 300 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ในช่วงที่รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความมีเสถียรภาพควรมีความเร็วอย่างน้อยมากกว่า 10% ของความเร็วสูงสุดของรถไฟนั้น ในกรณีที่รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงสุด 300 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ความมีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่ของรถไฟควรมีความเร็วอย่างน้อยมากกว่า 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือเพื่อให้เข้าใจได้อย่างชัดเจน รถไฟความเร็วสูงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงสุด 300 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ควรมีความมีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่ของรถไฟอย่างน้อยด้วยความเร็ว 330 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3 เสถียรภาพการเคลื่อนที่ของรถไฟและการสั่นสะเทือนแบบฮันติง

#### 3.3.1 เสถียรภาพการเคลื่อนที่ของรถไฟ

หนึ่งในลักษณะสำคัญของการเคลื่อนที่ของรถไฟคือปรากฏการณ์ฮันติง (Hunting phenomenon) ซึ่งเป็นการสั่นสะเทือนในแนวข้างของชุดล้อ (Wheelset) โดยหนึ่งชุดล้อประกอบไปด้วยล้อรถไฟทั้งสองด้านที่เชื่อมต่อกันด้วยเพลลา โดยทั่วไปแล้วล้อรถไฟเป็นรูปทรงกรวยทำให้ชุดล้อเคลื่อนที่บนรางและกลับเข้าสู่ศูนย์กลางด้วยตัวมันเอง ซึ่งในการอธิบายการสั่นสะเทือนแบบฮันติงได้ตั้งสมมติฐานว่าชุดล้อเคลื่อนที่บนรางรถไฟในลักษณะดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงรัศมีการหมุนของชุดล้อ

ซึ่งชุดล้อจะเคลื่อนที่ในแนวด้านข้างเนื่องจากการกลับเข้าสู่ศูนย์กลางด้วยตัวมันเอง ณ สภาวะเริ่มต้นชุดล้ออยู่ในตำแหน่ง  $y = 0$  โดยที่

$R_l$  คือ รัศมีการหมุนเริ่มต้นของล้อซ้าย

$R_r$  คือ รัศมีการหมุนเริ่มต้นของล้อขวา

$R_0$  คือ รัศมีทั้งล้อซ้ายและขวา ณ สภาวะเริ่มต้น เนื่องจากรัศมีล้อทั้งสองข้างมีรูปทรงเหมือนกัน

$\gamma$  คือ ความเป็นกรวยของล้อ (Wheel conicity) หรือความชันของโปรไฟล์ล้อรถไฟ

เมื่อชุดล้อเคลื่อนที่ในแนวข้าง การเปลี่ยนแปลงในรัศมีทั้ง 2 ล้อ  $\Delta R$  หาได้จากสมการนี้

$$\Delta R = y\gamma \quad (3.3)$$

ซึ่งจะทำให้รัศมีล้อด้านซ้ายและด้านขวา ณ เวลาใด ๆ จะสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} R_l &= R_0 - y\gamma \\ R_r &= R_0 + y\gamma \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

หากชุดล้อหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่  $\omega$  ความเร็วที่สุดสัมพัทธ์ของล้อซ้าย  $V_l$  และล้อขวา  $V_r$  สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} V_l &= R_l\omega \\ V_r &= R_r\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

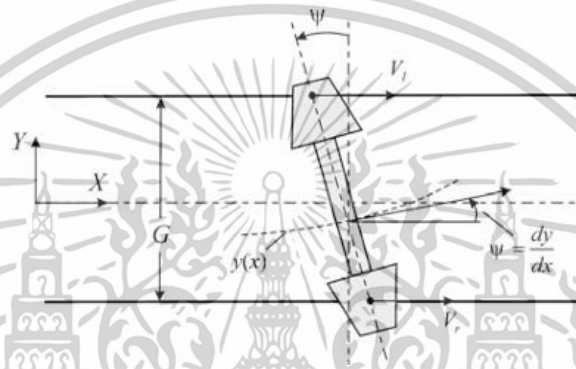
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นความเร็ว ณ ตำแหน่งตรงกลางของชุดล้อ  $V$  คือ

$$V = (V_l + V_r) / 2 = R_0 \omega \quad (3.6)$$

เมื่อมุมการเฉ (Yaw angle) แสดงดังรูปที่ 3.4 มีขนาดเล็กมาก ( $\tan \psi \approx \psi$ ) อัตราการเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่แนวข้างสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \psi V = \psi R_0 \omega \quad (3.7)$$



รูปที่ 3.4 แสดงถึงการสั่นสะเทือนแบบฮันติงของชุดล้อ

ในการวิเคราะห์ที่ง่าย อัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมการเฉ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\dot{\psi} = (V_l - V_r) / G = -2y\omega\gamma / G \quad (3.8)$$

โดยอนุพันธ์เทียบเวลาของสมการที่ 3.6 เมื่อแทนค่า  $\dot{\psi}$  จากสมการที่ 3.7 จะได้

$$\ddot{y} + \left( \frac{2R_0\omega^2\gamma}{G} \right) y = 0 \quad (3.9)$$

สมการที่ 3.9 นี้สามารถใช้อธิบายการเคลื่อนที่แนวข้างของชุดล้อ ซึ่งมีความคล้ายคลึงกับสมการการเคลื่อนที่ของระบบมวลสปริงอย่างง่าย ถ้าสัมประสิทธิ์ของ  $y$  ในสมการก่อนหน้านี้มีค่าบวก คำตอบของสมการนี้สามารถเขียนในรูปนี้ได้

$$y = A_1 \sin(\omega_n t + A_2) \quad (3.10)$$

เมื่อ  $A_1$  และ  $A_2$  ค่าคงที่ซึ่งหาค่าได้โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้นของสมการ และ  $\omega_n$  คือค่าความถี่ธรรมชาติซึ่งคำนวณได้ดังนี้

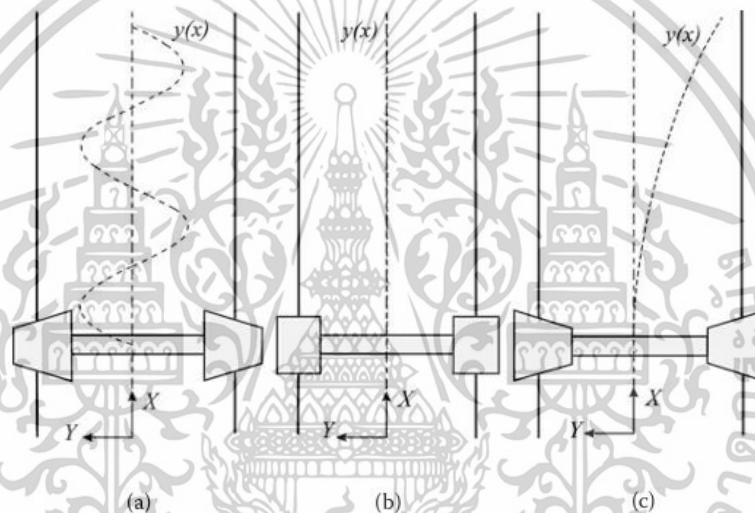
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega_n = V \sqrt{\frac{2\gamma}{R_0 G}} \quad (3.11)$$

คำตอบของสมการที่ 3.10 แสดงถึงการแกว่งด้วยค่าแอมพลิจูดคงที่ หาก  $\omega_n^2$  มีค่าเป็นบวก ในกรณีนี้ ชุดล้อยจะเคลื่อนที่แกว่งไปมารอบตำแหน่งสมดุล ดังรูปที่ 3.5a ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์หน้า  $y$  ในสมการที่ 3.9 มีค่าเป็นบวก ถ้าค่าความเป็นกรวยของล้อย  $\gamma$  เป็นบวก ดังนั้นคาบของการแกว่งของชุดล้อยคือ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{V} \sqrt{\frac{R_0 G}{2\gamma}} \quad (3.12)$$

ซึ่งสมการที่ 3.11 และ 3.12 เป็นที่รู้จักในชื่อ Klingel's formulas



รูปที่ 3.5 แสดงการเคลื่อนที่แนวด้านข้างของชุดล้อย

ในกรณีรูปทรงของล้อยเป็นทรงกระบอก นั้นหมายถึงค่าความเป็นกรวยของล้อยมีค่าเท่ากับ 0 ( $\gamma = 0$ ) และค่าสัมประสิทธิ์หน้า  $y$  ในสมการที่ 3.9 มีค่าเท่ากับ 0 การเคลื่อนที่ของชุดล้อยจะเป็นแนวตรงโดยไม่แกว่งไปมาดังรูปที่ 3.5b ในอีกกรณีที่ค่าความเป็นกรวยมีค่าเป็นลบ ค่าสัมประสิทธิ์หน้า  $y$  จะมีค่าเป็นลบด้วย และคำตอบของสมการเป็นค่าที่เพิ่มขึ้นแบบเลขชี้กำลัง (Exponential) ในฟังก์ชันของเวลาดังรูปที่ 3.5c ดังนั้นล้อยของรถไฟจึงต้องมีความเป็นกรวยของล้อยเป็นบวกเพื่อให้รถไฟเคลื่อนที่อย่างมีเสถียรภาพ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3.2 การสั่นสะเทือนแบบฮันติง

จากหัวข้อที่ 3.1.1 ล้อรถไฟแกว่งไปมาเนื่องจากรูปทรงของล้อและเป็นผลลัพธ์ให้เกิดการแกว่งทางด้านข้าง (Lateral oscillation,  $y$ ) คู่ควบกับการหมุนสาย (Yaw rotation,  $\psi$ ) การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นจะต้องอยู่ภายใต้ระดับที่เหมาะสมเพื่อให้ผู้โดยสารรู้สึกสะดวกสบายและปลอดภัย หากรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เกินกว่าความเร็วที่ออกแบบไว้ อาจทำให้เกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติง ซึ่งเป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดความไม่สะดวกสบายของผู้โดยสารและอาจนำไปสู่อุบัติเหตุรถไฟตกราง ซึ่งความเร็วที่ทำให้รถไฟเคลื่อนที่แบบไม่มีเสถียรภาพเรียกว่าความเร็ววิกฤต (Critical Speed) เมื่อรถไฟเคลื่อนที่เหนือความเร็ววิกฤต รถไฟจะอยู่ภายใต้แรงกระทำที่สูงมาก เนื่องจากการสั่นสะเทือนแบบฮันติงและเป็นผลทำให้เกิดการชนกันระหว่างบังใบล้อและรางซึ่งเป็นสาเหตุให้ล้อรถไฟป็นรางและตกรางในที่สุด ในทางกลับกันเมื่อรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำกว่าความเร็ววิกฤต จะมีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่และไม่ก่อให้เกิดอุบัติเหตุตกราง

### 3.4 แรงคืบ (Creep force)

เนื่องจากความยืดหยุ่นของวัตถุและแรงกระทำจากภายนอก บางจุดบนพื้นผิวในบริเวณที่สัมผัสกันอาจจะไถล (Slip) ในขณะที่หลาย ๆ จุด อาจจะติดกันเมื่อ 2 วัตถุเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันซึ่งกันและกัน ความแตกต่างระหว่างความเค้นบนเส้นสัมผัสของวัตถุในพื้นที่ยึดเกาะกันนำไปสู่การไถลเล็กน้อยที่เด่นชัด (Small apparent slip) หรือเรียกว่า การคืบ (Creepage) ซึ่งถูกกำหนดโดยใช้ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างสองวัตถุ ณ จุดสัมผัส โดยการคืบ (Creepage) ก่อให้เกิดแรงคืบบนเส้นสัมผัส (Tangential creep force) และโมเมนต์คืบหมุน (Creep spin moment) ซึ่งเป็นตัวแปรหลักในการวิเคราะห์ระบบเชิงพลวัตและเสถียรภาพของรถไฟ มากไปกว่านั้นแรงคืบบนเส้นสัมผัสและโมเมนต์คืบหมุนเกิดขึ้นขณะที่ล้อกับรางรถไฟสัมผัสเนื่องจากการเคลื่อนที่ของล้อสัมพัทธ์กับรางรถไฟ เป็นการรวมกันระหว่างการเคลื่อนที่หมุนและการไถล ทั้งแรงและโมเมนต์นี้ส่งผลกระทบต่อ การเคลื่อนที่และเสถียรภาพของรถไฟ ด้วยเหตุผลนี้แรงคืบต้องถูกพิจารณาในการวิเคราะห์ระบบของรถไฟ

หลากหลายทฤษฎีการสัมผัสถูกพัฒนาเพื่อหาแรงคืบบนเส้นสัมผัสและโมเมนต์คืบหมุนสำหรับแรงตั้งฉากและคุณสมบัติวัสดุและรูปร่างของล้อและรางรถไฟ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะอธิบาย 2 ทฤษฎี ได้แก่ ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ (Hertz) ซึ่งนิยมถูกใช้ในการศึกษาปัญหาการสัมผัสระหว่างล้อและราง และทฤษฎีเชิงเส้นของคาลเคอร์ (Kalker) ที่นำเสนอทฤษฎีของแรงคืบ

### 3.4.1 ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ (Hertz's contact theory)

ในปี ค.ศ. 1882 เฮิร์ตซ์ ได้นำเสนอทฤษฎีการสัมผัส โดยมีสมมติฐานว่าพื้นที่สัมผัสเป็นรูปวงรี ซึ่งสมมติฐานดังกล่าวได้มาจากการสังเกตของลวดลายการสอดแทรก ณ จุดสัมผัสของ 2 เลนส์กระจก สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการสัมผัสระหว่างล้อกับรางรถไฟ ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ เป็นที่นิยมในการหารูปร่างของพื้นที่สัมผัสและพื้นผิวการเสียดรูปของล้อและราง ณ บริเวณสัมผัส โดยสมมติฐานของเฮิร์ตซ์ มีดังนี้

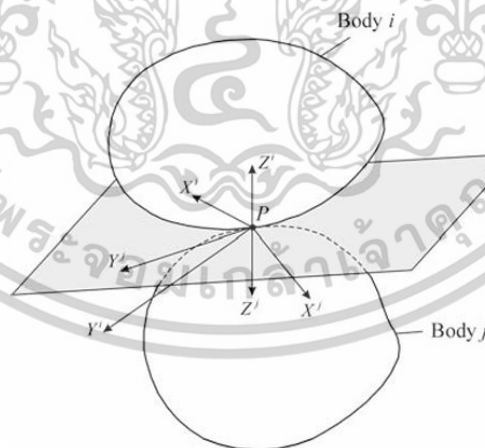
1. พื้นผิวของวัตถุทั้งสองไม่ได้สอดคล้อกัน
2. ความเค้นของวัตถุขนาดเล็ก
3. ความเครียดจากแรงสัมผัสเท่ากับศูนย์เมื่อระยะห่างของวัตถุทั้งสองห่างจากพื้นที่สัมผัส
4. พื้นผิวของวัตถุไม่มีแรงเสียดทาน
5. วัตถุมีความยืดหยุ่นและไม่มีการเสียดรูปแบบพลาสติกเกิดขึ้นในพื้นที่สัมผัส

จากสมมติฐานที่ได้กล่าวมาเฮิร์ตซ์ได้อธิบายว่าถ้า 2 วัตถุ  $i$  และ  $j$  สัมผัสซึ่งกันและกัน ดังรูปที่ 3.6 รูปร่างของพื้นผิวทั้งสองวัตถุบนบริเวณใกล้กับจุดกำเนิดสามารถหาได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} z^i &= A^i(x^i)^2 + B^i(y^i)^2 + C^i(x^i y^i) + \dots \\ z^j &= A^j(x^j)^2 + B^j(y^j)^2 + C^j(x^j y^j) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

เมื่อ  $A^k$ ,  $B^k$  และ  $C^k$  ( $k = i, j$ ) คือค่าคงที่ขึ้นอยู่กับรูปทรงของวัตถุ และ  $x^k$  และ  $y^k$  ( $k = i, j$ ) คือแนวแกนของ 2 วัตถุ ณ แนวสัมผัส ช่องว่างระหว่าง 2 พื้นผิวที่จุดกำเนิดกำหนดได้ดังนี้

$$h = z^i - z^j \quad (3.14)$$



รูปที่ 3.6 วัตถุทั้ง 2 สัมผัสซึ่งกันและกัน

เมื่อแทนสมการที่ 3.13 ลงในสมการที่ 3.14 สามารถเขียนสมการช่องว่างระหว่าง 2 พื้นผิวที่จุดกำเนิดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$h = A(x)^2 + B(y)^2 + Cxy + \dots \quad (3.15)$$

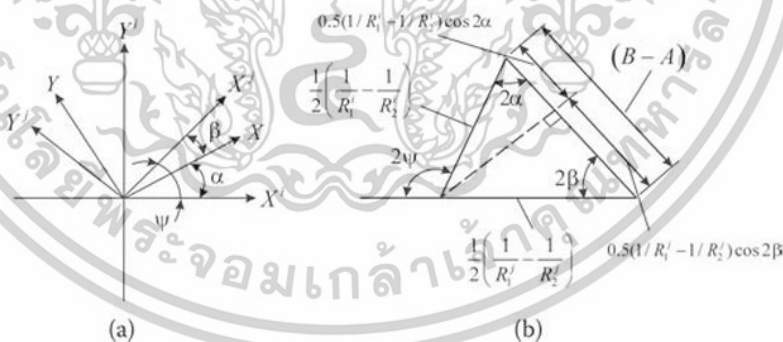
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย  $A, B$  และ  $C$  เป็นค่าคงที่ แนวนแกน  $x^k$  และ  $y^k$  ( $k=i, j$ ) สามารถเขียนในเทอม  $x$  และ  $y$  ได้ดังเช่น  $x^k y^k$  ( $k=i, j$ ) และ  $xy$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 ในกรณีนี้ สมการที่ 3.13 และ 3.15 สามารถเขียนได้โดยละเว้นเทอมอันดับสูงได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} z^i &= \frac{1}{2R_1^i}(x^i)^2 + \frac{1}{2R_2^i}(y^i)^2 \\ z^j &= \frac{1}{2R_1^j}(x^j)^2 + \frac{1}{2R_2^j}(y^j)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

$$h = A(x)^2 + B(y)^2 = \frac{1}{2R_1}(x)^2 + \frac{1}{2R_2}(y)^2 \quad (3.17)$$

โดยที่  $R_1^k$  และ  $R_2^k$  ( $k=i, j$ ) คือค่ารัศมีความโค้งของพื้นผิวของวัตถุ  $i$  และ  $j$  ณ จุดกำเนิดตามลำดับ และ  $R_1$  และ  $R_2$  เป็นค่ารัศมีความโค้งสัมพัทธ์ นั้นหมายความว่า  $\partial^2 z^k / \partial x^{k^2} = 1/R_1^k$  และ  $\partial^2 z^k / \partial y^{k^2} = 1/R_2^k$  อย่างไรก็ตามแกน  $x^i$  และ  $x^j$  ไม่ได้ขนานกัน และการวางแนวของทั้งสองแกนคลาดเคลื่อนกันโดยมุม  $\psi$  ทั้งสองแกนดังกล่าวคลาดเคลื่อนจากแนวแกน  $x$  ปกติ โดยมุมที่ไม่แน่นอน  $\alpha$  และ  $\beta$  ดังรูปที่ 3.7a ค่า  $C$  ในสมการที่ 3.15 สามารถคำนวณได้จากการใช้สมการที่ 3.14 และการเปลี่ยนแนวแกน  $x^i$  และ  $x^j$  สู่แนวแกน  $x$  ปกติ ดังนี้



รูปที่ 3.7 แนวการสัมผัสของ 2 วัตถุ

$$C = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \sin 2\beta - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) \sin 2\alpha \quad (3.18)$$

ดังนั้นสมการที่ 3.17 จะสามารถเขียนแบบนั้นได้เมื่อ  $C$  ในสมการที่ 3.18 มีค่าเท่ากับ 0 จึงนำไปสู่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) / \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) / \sin 2\beta$$

จากสมการก่อนหน้านั้นสามารถเขียนเป็นรูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ 3.7b ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการนี้

$$\begin{aligned} B - A &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \cos 2\beta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) \left( \frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \cos 2\psi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

และ

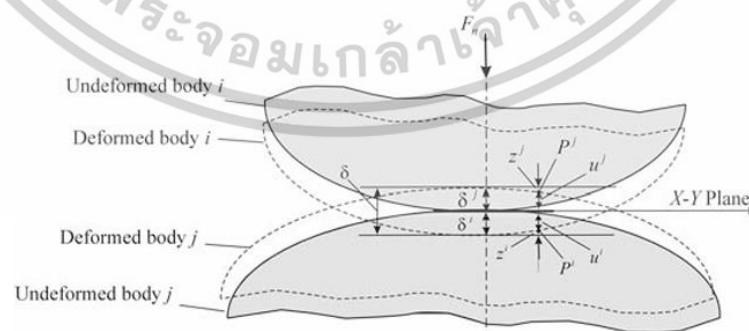
$$A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^i} + \frac{1}{R_2^i} + \frac{1}{R_1^j} + \frac{1}{R_2^j} \right) \quad (3.20)$$

เห็นได้อย่างชัดเจนจากสมการที่ 3.17 ว่ารูปร่างของช่องว่าง  $h$  ระหว่าง 2 วัตถุเป็นรูปวงรี ด้วยอัตราส่วนแนวแกนเท่ากับ  $\sqrt{A/B}$  สำหรับการหาขนาดของพื้นที่สัมผัสวงรี สมมติให้มีโหนดตั้งฉากจากภายนอก  $F_n$  กดทับระหว่าง 2 วัตถุเข้าด้วยกันซึ่งกันและกัน พื้นผิวของวัตถุ  $i$  และ  $j$  จะถูกแทนที่ในแนวตั้งโดยระยะห่าง  $u^i$  และ  $u^j$  ตามลำดับเนื่องจากแรงต่อพื้นที่ของ 2 วัตถุ ดังรูปที่ 3.8 ถ้า 2 จุด  $P^i$  และ  $P^j$  อยู่ในแนวเดียวกัน ดังนั้นการสูญเสียรูปทั้งหมดจะเท่ากับ

$$u^i + u^j + h = \delta^i + \delta^j \quad (3.21)$$

เมื่อ  $h$  ถูกกำหนดไว้ในสมการที่ 3.14 ดังนั้นถ้า 2 วัตถุเสียรูปและการเสียรูปทั้งหมดถูกกำหนดโดย  $\delta = \delta^i + \delta^j$  จากสมการที่ 3.21 แทนค่า  $h$  จากสมการที่ 3.14 ในสมการที่ 3.21 ได้ดังนี้

$$u^i + u^j = \delta - A(x)^2 - B(y)^2 \quad (3.22)$$

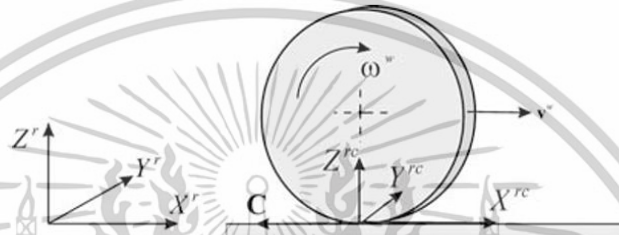


รูปที่ 3.8 การสัมผัสของ 2 วัตถุภายใต้แรงตั้งฉากภายนอก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.4.2 ทฤษฎีเชิงเส้นของคาลเคอร์ (Kalker's theory)

เมื่อล้อรถไฟเคลื่อนที่บนรางการคืบ (Creepage) ณ จุดสัมผัสก่อให้เกิดแรงบนเส้นสัมผัสซึ่งมีบทบาทสำคัญในการเคลื่อนที่และเสถียรภาพของรถไฟ จากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ในหัวข้อที่ 3.5.2 สมมติพื้นที่สัมผัสเป็นรูปวงรี ล้อและรางรถไฟเกิดความเสียหายเนื่องจากแรงกดบนบริเวณสัมผัส ความเสียหายนี้สามารถถูกกำหนดในระบบพิกัด  $X^{rc} Y^{rc} Z^{rc}$  ซึ่งจุดกำเนิดของความเสียหายถูกกำหนด ณ จุดสัมผัส ดังรูปที่ 3.9 ถ้าล้อและรางทั้งสองเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันจะก่อให้เกิดแรงเสียดทานคูลอมบ์ (Coulomb's friction) ซึ่งเป็นแรงบนแนวแกนเกิดขึ้นบนบริเวณสัมผัสยิ่งไปกว่านั้นหากล้อและรางหมุนสายสัมผัสซึ่งกันและกัน แรงบนแนวแกนก็เกิดขึ้นได้เช่นกัน



รูปที่ 3.9 แสดงแนวแกนของล้อรถไฟเมื่อเคลื่อนที่บนรางรถไฟ

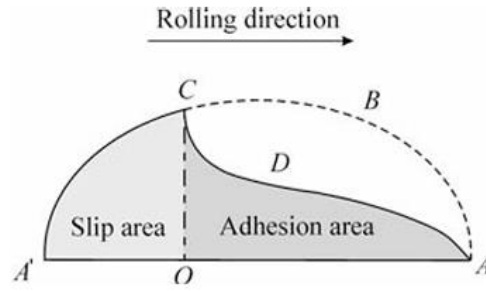
โดยทั่วไปพื้นที่สัมผัสถูกแบ่งเป็น 2 บริเวณ ได้แก่ บริเวณยึดเกาะ (Adhesion region) ซึ่งเป็นส่วนของพื้นผิวของวัตถุไม่ได้ไถลซึ่งกันและกัน และบริเวณไถล (Slip region) ซึ่งเป็นส่วนของพื้นผิวที่ไถลซึ่งกันและกัน ดังรูปที่ 3.10 ตามทฤษฎีของคาร์เตอร์ (Carter) และ รูปที่ 3.11 ตามทฤษฎีของจอห์นสันและเวอร์มูเลน (Johnson และ Vermeulen) จากสมมติฐานของทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ไม่ได้พิจารณาแรงเสียดทานจากการกดในแนวเฉือน  $\mathbf{F}_t = [F_{tx} \ F_{ty}]^T$  ระหว่าง 2 วัตถุบนบริเวณสัมผัส การไถลจริง  $\dot{\mathbf{w}}$  เป็นความเร็วสัมพัทธ์บนแนวแกนระนาบที่ถูกกำหนดบนระบบพิกัดหลัก สำหรับการคำนวณพื้นฐานเกี่ยวกับพลศาสตร์รถไฟ การไถลจริงถูกกำหนดบนพื้นฐานของวัสดุแข็งเกร็ง ในกรณีนี้องค์ประกอบของการไถลสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{w}}(x, y) = \dot{\mathbf{r}}^{wr} - (\dot{\mathbf{r}}^{wrT} \mathbf{n}^r) \mathbf{n}^r \quad (3.23)$$

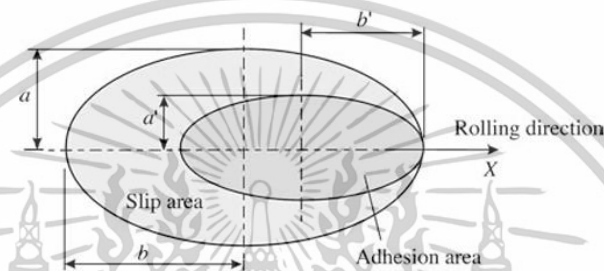
โดยที่  $\mathbf{n}^r$  คือแนวตั้งฉากบนพื้นผิว ณ จุดสัมผัส ดังรูปที่ 3.12 และ  $\dot{\mathbf{r}}^{wr}$  คือความเร็วสัมพัทธ์ ณ จุดสัมผัสระหว่างล้อและรางรถไฟ เขียนได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{r}}^{wr} = \dot{\mathbf{r}}^w - \dot{\mathbf{r}}^r \quad (3.24)$$

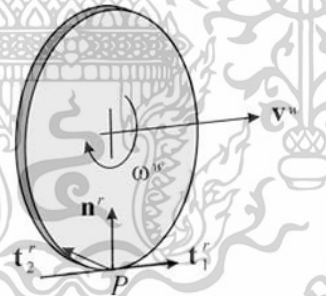
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.10 พื้นที่สัมผัสตามทฤษฎีของคาร์เตอร์



รูปที่ 3.11 พื้นที่สัมผัสตามทฤษฎีของจอห์นสันและเวอร์มูเลน



รูปที่ 3.12 แสดงแนวแกน ณ จุดสัมผัส

องค์ประกอบของการไหลในสมการที่ 3.23 สามารถกำหนดบนระบบพิกัดฉากที่กำหนดบนจุดสัมผัสได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{w}}(x, y) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_1 \\ \dot{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t}_1^r \\ \dot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_p^{wr} \cdot \mathbf{t}_1^r \\ \dot{\mathbf{r}}_p^{wr} \cdot \mathbf{t}_2^r \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

โดยที่  $\mathbf{t}_1^r$  และ  $\mathbf{t}_2^r$  คือหน่วยแนวตั้งฉากบนรางรถไฟที่จุดสัมผัส และ  $\mathbf{n}^r \cdot \mathbf{t}_1^r = \mathbf{n}^r \cdot \mathbf{t}_2^r = 0$  การไหลบนแนวแกนที่ถูกกำหนดบนระนาบสัมผัสสามารถนำมากำหนดแรงจุดในแนวเฉือนโดยกฎของคูลอมบ์

ดังนั้น เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{F}_t| &= \left| \begin{bmatrix} F_{tx} & F_{ty} \end{bmatrix}^T \right| \leq \mu p; & |\dot{\mathbf{w}}| &= 0 \text{ (adhesion area)} \\ \mathbf{F}_t &= -\frac{\mu p \dot{\mathbf{w}}}{|\dot{\mathbf{w}}|}; & |\dot{\mathbf{w}}| &\neq 0 \text{ (slip area)} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

โดยที่  $\mu$  คือสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานและ  $p$  คือแรงต่อพื้นที่ของการสัมผัส (Contact pressure) ดังนั้นแรงคืบตามแนวยาว แรงคืบตามแนวด้านข้าง และโมเมนต์คืบหมุน สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \iint F_{tx} dx dy \\ F_y &= \iint F_{ty} dx dy \\ M &= \iint (xF_{ty} - yF_{tx}) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

แรงคืบและโมเมนต์คืบหมุนขึ้นอยู่กับ การคืบ ขนาดวงรีของพื้นที่สัมผัส และแรงตั้งฉาก ซึ่งถูกควบคุมโดยทฤษฎีของแรงคืบ โดยคาลเคอร์ได้นำเสนอทฤษฎีของตนสำหรับการคืบขนาดเล็กมากบนพื้นที่ของการไถที่เล็กมากและผลกระทบของการไถข้างต้นสามารถละเว้นในการพิจารณาได้ ดังนั้นพื้นที่ยึดเกาะสามารถสันนิษฐานได้ว่ามีค่าเท่ากับพื้นที่ของการสัมผัส มากไปกว่านั้น การคืบอธิบายพฤติกรรมของจุดสัมผัสดังนี้

1. แรงจุดเกิดขึ้นเมื่อวัตถุเกิดการไถที่เล็กมาก ๆ บนพื้นที่สัมผัสตามทิศทางการหมุนของวัตถุ (No-slip condition)
2. แรงจุดเท่ากับศูนย์เมื่อวัตถุออกจากพื้นที่สัมผัส

ดังนั้นสมการที่ 3.2 จึงถูกเขียนใหม่โดยไม่คิดการไถจริงบนทุก ๆ พื้นที่สัมผัสได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{w}}(x, y) = 0 \quad (3.28)$$

ซึ่งเมื่อหาปริพันธ์สมการข้างต้นด้วยตลอดค่า  $x$  จะได้

$$\int \dot{\mathbf{w}}(x, y) dx = \mathbf{u}(x, y) \quad (3.29)$$

โดยที่  $\mathbf{u}(x, y)$  คือความแตกต่างของการกระจัดบนแนวแกนและหาได้โดยสมมติว่าการจุดนั้นต่อเนื่อง ณ เส้นขอบของพื้นที่สัมผัส ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง การคืบ แรงคืบ และโมเมนต์คืบหมุน สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงจุดและการกระจัดบนพื้นฐานของทฤษฎีทั่วไปของความยืดหยุ่นวัสดุ (General elasticity theory) และหาปริพันธ์ของแรงจุดตลอดพื้นที่สัมผัส ในสมการที่ 3.27 ซึ่งเขียนอยู่ในรูปดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} = -Gabc \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & \sqrt{abc}c_{23} \\ 0 & -\sqrt{abc}c_{23} & abc_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

หรือ

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -Gabc_{11}\zeta_x \\ F_y &= -Gabc_{22}\zeta_y - G(ab)^{1.5}c_{23}\varphi \\ M &= G(ab)^{1.5}c_{23}\zeta_y - G(ab)^2c_{33}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

โดยที่

$\zeta_x, \zeta_y, \varphi$  คือ การคืบแนวยาว แนวด้านข้าง และหมุน ตามลำดับ

$a$  คือ ความยาวของพื้นสัมผัสในแนวยาวจากจุดศูนย์กลางวงรี

$b$  คือ ความยาวของพื้นสัมผัสในแนวด้านข้างจากจุดศูนย์กลางวงรี

$G$  คือ ค่าโมดูลัสของความคงรูป (Modulus of rigidity)

$c_{ij}$  คือ สัมประสิทธิ์การคืบที่ขึ้นอยู่กับอัตราส่วน Poisson  $\nu$  และอัตราส่วนระหว่าง  $a$  และ  $b$  ซึ่งสามารถอ้างอิงได้จาก [20]

ยิ่งไปกว่านั้นคาลเคอร์ยังนำขยายความค่าโมดูลัสของความคงรูป  $G$  และอัตราส่วน Poisson  $\nu$  ดังต่อไปนี้

$$G = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{G''} + \frac{1}{G'} \right], \quad \nu = \frac{1}{2} \left[ \frac{\nu''}{G''} + \frac{\nu'}{G'} \right] \quad (3.32)$$

โดยที่

$G$  คือ ค่าโมดูลัสแรงเฉือนเฉลี่ยของความคงรูปของล้อย  $w$  และรางรถไฟ  $r$

$\nu$  คือ อัตราส่วน Poisson ของล้อยและรางรถไฟรวมกัน

### 3.5 ระบบเชิงพลวัตและสมการเชิงอนุพันธ์

#### 3.5.1 ระบบเชิงพลวัต

ระบบเชิงพลวัตคือระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงสถานะตามเวลา ซึ่งสถานะของระบบจะถูกกำหนดโดยชุดตัวแปร และพฤติกรรมของระบบสามารถคาดการณ์ได้โดยสถานะเริ่มต้นของระบบสามารถเขียนองค์ประกอบของระบบเชิงพลวัตได้ดังนี้

$$\{T, X, \varphi^t\}$$

โดยที่

$T$  คือ เซตของเวลา

$X$  คือ ปริภูมิสถานะ (State space) หมายถึงสถานะที่เป็นไปได้ของระบบทั้งหมดเพื่อหา

การเปลี่ยนแปลงสถานะของระบบตามเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\varphi' : X \rightarrow X$  คือ ชุดของตัวดำเนินการวิวัฒนาการ (Evolution operator) ซึ่ง  $t \in T$  โดยระบบประกอบด้วยสถานะเริ่มต้น  $\varphi^0$  และสถานะใด ๆ  $\varphi^{t+s}$

### 3.5.2 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็นวิธีการคาดการณ์พฤติกรรมของระบบเชิงพลวัต สมมติให้ปริภูมิสถานะของระบบคือ  $X = \mathbb{R}^n$  กับพิกัดต่าง ๆ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  โดยทั่วไปแล้ว การเปลี่ยนพฤติกรรมของระบบถูกกำหนดอย่างกว้างขวาง ตัวอย่างเช่นความเร็ว  $\dot{x}_i$  บนฟังก์ชันของพิกัด  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

โดยที่  $i=1, 2, \dots$  จนถึงลำดับที่  $n$

หรืออยู่ในรูปเวกเตอร์

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \tag{3.33}$$

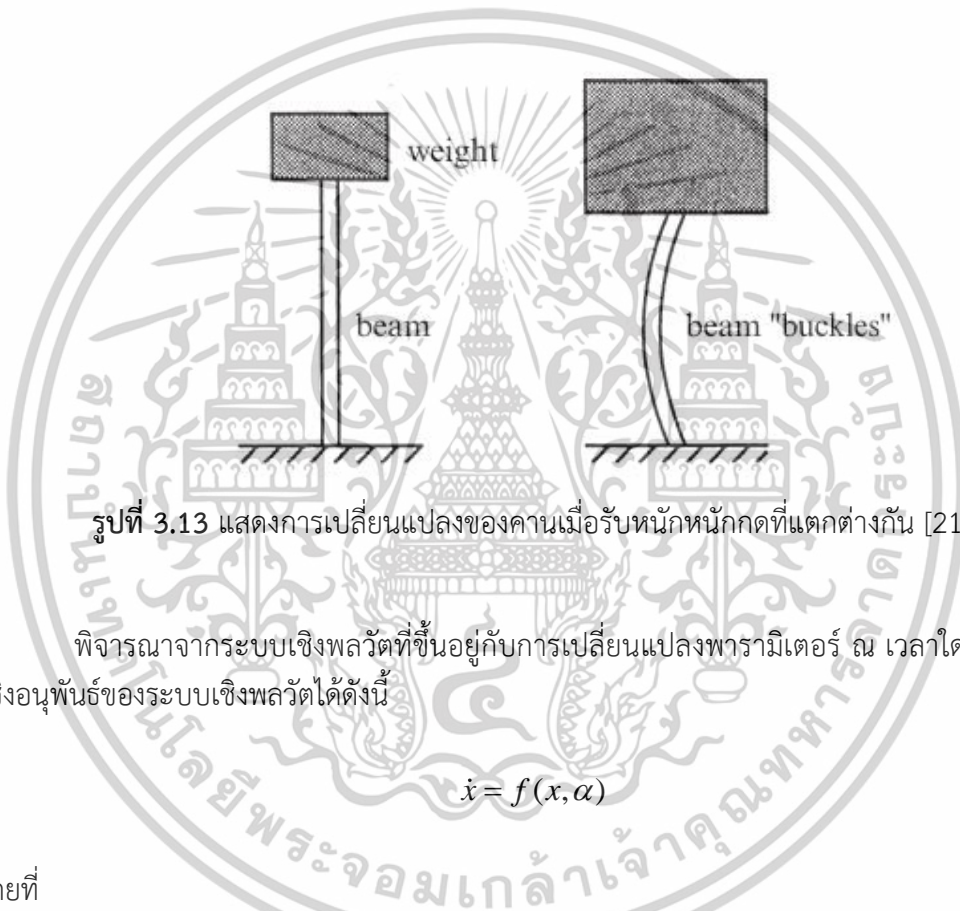
โดยที่ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ควรจะแก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้

ฟังก์ชันด้านขวาของสมการ 3.33 เรียกว่าสนามเวกเตอร์ (Vector field) เนื่องจากสนามเวกเตอร์กำหนดเวกเตอร์  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  ในแต่ละจุด  $\mathbf{x}$  มากไปกว่านั้นสมการที่ 3.33 นำเสนอระบบในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation หรือ ODE)

### 3.6 ทฤษฎีการแยกสาขาและการแยกสาขาของฮอปฟ์

#### 3.6.1 ทฤษฎีการแยกสาขา (Bifurction)

ทฤษฎีการแยกสาขาเป็นการศึกษาในการเปลี่ยนแปลงสถานะหรือพฤติกรรมของระบบเมื่อพารามิเตอร์ของระบบเปลี่ยนแปลง เพื่อให้เข้าใจถึงค่าพารามิเตอร์หนึ่งที่ทำให้ความมีเสถียรภาพของระบบเปลี่ยนแปลงโดยค่านั้นเรียกว่าจุดแยกสาขา (Bifurcation point) ซึ่งทำให้ระบบมีความปั่นป่วนหรือไม่มีเสถียรภาพ โดยยกตัวอย่างจากการโก่งตัวของคานในรูปที่ 3.13 หากมีน้ำหนักกดลงบนคานน้อย คานจะสามารถรับแรงกดและคงรูปคานเป็นแนวตั้งตรงได้ อย่างไรก็ตามหากน้ำหนักกดคานมากเกินไป ตำแหน่งแนวตั้งจะไม่เสถียรและคานอาจโก่งได้ ซึ่งน้ำหนักกดแสดงถึงค่าพารามิเตอร์ของระบบและการโก่งของคานจากแนวตั้งแสดงถึงตัวแปรแสดงสถานะของระบบ



รูปที่ 3.13 แสดงการเปลี่ยนแปลงของคานเมื่อรับน้ำหนักกดที่ต่างกัน [21]

พิจารณาจากระบบเชิงพลวัตที่ขึ้นอยู่กับ การเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ณ เวลาใด ๆ สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบเชิงพลวัตได้ดังนี้

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (3.34)$$

โดยที่

$x \in \mathbb{R}^n$  นำเสนอตัวแปรที่อธิบายสถานะของระบบในเฟส (Phase variables)

$\alpha \in \mathbb{R}^m$  นำเสนอพารามิเตอร์ที่กำหนดลักษณะของเฟส (Phase parameters)

เมื่อพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลง ภาพพจน์เฟส (Phase Portrait) ของระบบก็เปลี่ยนแปลงด้วยเช่นกันซึ่งมีอยู่ 2 ทางคือระบบมีความเสถียรภาพและระบบไม่มีความเสถียรภาพ

ดังนั้น การแยกสาขา คือการเปลี่ยนแปลงของสถานะของระบบเมื่อค่าพารามิเตอร์ของระบบผ่านจุดแยกสาขาหรือค่าวิกฤตแยกสาขา (Bifurcation critical value) ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกล่าวถึงการแยกสาขาของฮอปฟ์ (Hopf bifurcation) ซึ่งเป็นหนึ่งในประเภทของการแยกสาขาที่นิยมใช้ศึกษาระบบเชิงพลวัตของรถไฟ เพื่อระบุจุดความเร็ววิกฤตที่เป็นสาเหตุที่ทำให้รถไฟเกิดการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สันสะท้อนแบบฮันติงและเคลื่อนที่แบบไม่เสถียรภาพ มากกว่านั้นการสันสะท้อนแบบฮันติงนำไปสู่อุบัติเหตุรถไฟตกราง

### 3.6.2 การแยกสาขาของฮอปฟ์ (Hopf Bifurcation)

พิจารณาระบบเชิงพลวัตที่ประกอบด้วย 2 สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์หนึ่ง

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (3.35)$$

ซึ่งระบบมีความเสถียรภาพที่  $x_1 = x_2 = 0$  สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์  $\alpha$  ในเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

มีค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue)  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$  จากตัวแปรเชิงซ้อน

$$z = x_1 + ix_2$$

$$\bar{z} = x_1 - ix_2$$

$$|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$$

ซึ่งเป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2)$$

ดังนั้นสมการที่ 3.35 จะถูกเขียนใหม่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 \quad (3.36)$$

และจาก  $z = \rho e^{i\varphi}$  อนุพันธ์ของสมการที่ 3.36 จะได้

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi}$$

หรือ

$$\dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(\alpha + i - \rho^2)$$

ซึ่งสมการ 3.35 สามารถเขียนในรูปเชิงขั้วได้ดังนี้

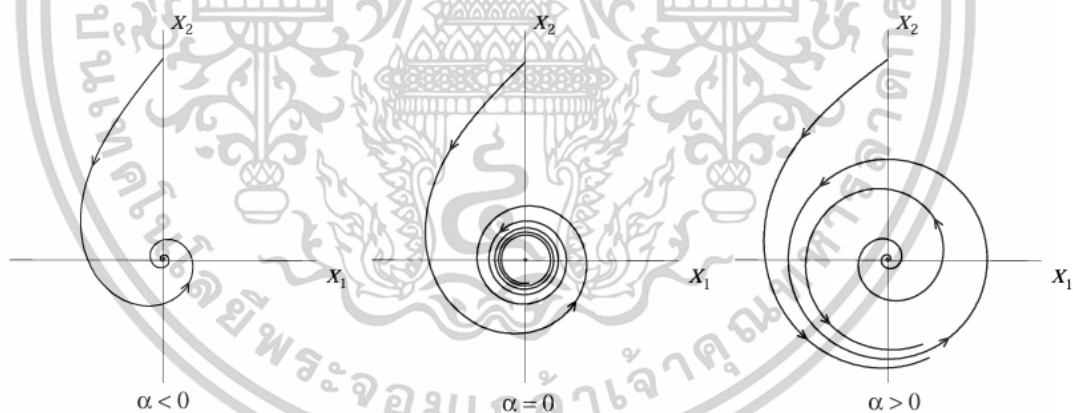
$$\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \quad (3.37a)$$

$$\dot{\varphi} = 1 \quad (3.37b)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

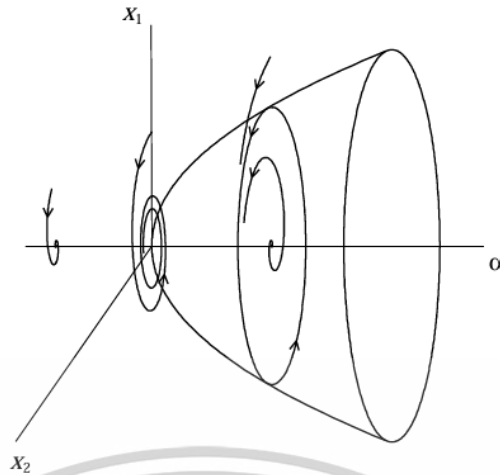
การแยกสาขาของภาพพจน์เฟสของระบบเมื่อ  $\alpha$  หรือค่าพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงสามารถวิเคราะห์ได้โดยง่ายในรูปเชิงขั้วเพราะระบบของสมการที่ 3.37a และ 3.37b ไม่มีเกี่ยวข้องกันโดยที่สมการที่ 3.37a มีจุดสมดุล (Equilibrium point)  $\rho=0$  ในทุก ๆ ค่าของ  $\alpha$  จุดสมดุลมีความเสถียรภาพเชิงเส้นที่  $\alpha < 0$  มีความเสถียรไม่เป็นเชิงเส้นที่  $\alpha = 0$  และจุดสมดุลไม่มีความเสถียรเชิงเส้นที่  $\alpha > 0$  มากไปกว่านั้นยังมีจุดสมดุลที่มีความเสถียรภาพ  $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$  สำหรับ  $\alpha > 0$  และสมการที่ 3.37b อธิบายการหมุนด้วยความเร็วคงที่ ดังนั้นการทับซ้อนของการเคลื่อนที่ (Superposition of the motion) กำหนดโดยระบบของสมการที่ 3.37 ทั้งสองสมการ ถูกอธิบายใน Bifurcation diagram สำหรับระบบ 2 มิติในสมการที่ 3.36 ดังรูปที่ 3.14 ระบบมีจุดสมดุล ณ จุดกำเนิดเสมอ และจุดสมดุลนี้มีจุดรวมเสถียร (Stable focus) เมื่อ  $\alpha < 0$  และจุดรวมไม่เสถียร (Unstable focus) เมื่อ  $\alpha > 0$  ที่ค่าพารามิเตอร์วิกฤต (Critical parameter value)  $\alpha = 0$  จุดสมดุลมีความเสถียรแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearly stable) และโครงสร้างของทางเรขาคณิตของระบบเทียบเท่ากับจุดรวมซึ่งในบางครั้งถูกเรียกว่าจุดดึงดูดอ่อนแอ (Weakly attracting focus) โดยจุดสมดุลนี้ถูกล้อมรอบโดยวงโคจรปิดแบบเดี่ยว (Isolated closed orbit) หรือวงกลมจำกัด (Limit cycle) สำหรับ  $\alpha > 0$  ซึ่งเป็นเอกลักษณ์เฉพาะและเสถียรโดยมีขนาด  $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$  ออร์บิตทั้งหมดเริ่มต้นจากข้างนอกหรือข้างในวงกลมยกเว้นที่จุดกำเนิดมีแนวโน้มเป็นวงกลม ณ  $t \rightarrow +\infty$  โดยทั้งหมดนี้อธิบายถึงการแยกสาขาของอันโดรโนฟ-ฮอปฟ์ (Andronov-Hopf bifurcation)

นอกจากนี้ยังสามารถถูกนำเสนอใน  $(x, y, \alpha)$ -space ดังรูปที่ 3.15 ซึ่ง  $\alpha$  ที่ปรากฏของวงกลมจำกัดสร้างพื้นผิวแบบพาราโบลอยด์ (Paraboloid surface)



รูปที่ 3.14 แสดงการแยกสาขาของฮอปฟ์วิกฤตยิ่งยวด (Supercritical Hopf bifurcation)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.15 แสดงการแยกสาขาของฮอปฟ์วิกฤตที่ยาวดในพื้นที่เฟสและพารามิเตอร์  
(Phase-parameter space)

จากระบบของสมการที่ 3.35 มีพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นในสมการของระบบ หากพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นในสมการของระบบเปลี่ยนเครื่องหมายดังนี้

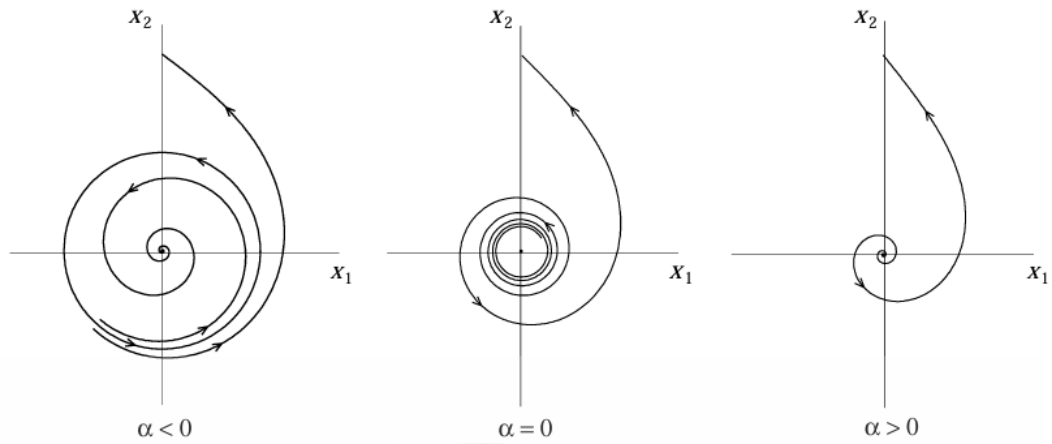
$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

ซึ่งมีรูปของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + z|z|^2$$

สามารถถูกวิเคราะห์ในวิธีที่ได้ถูกอธิบายก่อนหน้านั้น ซึ่งผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 3.16 และรูปที่ 3.17 สมการของระบบที่ 3.38 เกิดการแยกสาขาของอันโดรโนฟ-ฮอปฟ์ที่  $\alpha = 0$  โดยมีวงกลมจำกัดไม่เสถียร (Unstable limit cycle) ซึ่งตรงกันข้ามกับสมการของระบบที่ 3.35 และวงกลมจำกัดไม่เสถียรจะหายไปเมื่อ  $\alpha$  เปลี่ยนแปลงจากค่าลบไปสู่ค่าบวก สมการของระบบที่ 3.38 เสถียรเมื่อ  $\alpha < 0$  และไม่เสถียรเมื่อ  $\alpha > 0$  ซึ่งคล้ายคลึงกับสมการของระบบที่ 3.35 อย่างไรก็ตามสมการของระบบที่ 3.38 มีความไม่เสถียรไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear unstable) ณ ค่าพารามิเตอร์วิกฤต ซึ่งตรงกันข้ามกับสมการของระบบที่ 3.35 เช่นกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.16 แสดงการแยกสาขาของฮอปฟ์ต่ำกว่าค่าวิกฤต (Subcritical Hopf bifurcation)



รูปที่ 3.17 แสดงการแยกสาขาของฮอปฟ์ต่ำกว่าค่าวิกฤตในพื้นที่เฟสและพารามิเตอร์ (Phase-parameter space)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.6.3 ประเภทของการแยกสาขาของฮอฟฟ์ (Hopf Bifurcation)

จากสมการของระบบที่ 3.35 และสมการของระบบที่ 3.38 จะเห็นได้ว่าการแยกสาขาของอันโดรโนฟ-ฮอฟฟ์ (Andronov-Hopf bifurcation) นั้นมี 2 ประเภท ได้แก่

1. การแยกสาขาของฮอฟฟ์วิกฤตยิ่งยวด (Supercritical hopf bifurcation) ในสมการของระบบที่ 3.35 เนื่องจากวงกลมจำกัดเกิดขึ้นเมื่อค่าพารามิเตอร์  $\alpha$  บวก (หรือหลังจุดแยกสาขา)
2. การแยกสาขาของฮอฟฟ์ต่ำกว่าค่าวิกฤต (Subcritical hopf bifurcation) ในสมการของระบบที่ 3.38 เนื่องจากวงกลมจำกัดเกิดขึ้นก่อนจุดแยกสาขา

ในการแยกสาขาทั้งสองประเภทยังมีการสูญเสียเสถียรภาพ (Loss of stability) ของจุดสมดุล ณ  $\alpha = 0$  ภายใต้การเพิ่มขึ้นของค่าพารามิเตอร์ ในกรณีสมการของระบบที่ 3.35 หรือการแยกสาขาของฮอฟฟ์วิกฤตยิ่งยวด จุดสมดุลเสถียรถูกแทนที่โดยวงกลมจำกัดเสถียรของแอมพลิจูดขนาดเล็ก ดังนั้นระบบคงสถานะในบริเวณจุดสมดุลหรือเกิดสภาวะการสูญเสียเสถียรภาพแบบไม่ร้ายแรง (Noncatastrophic stability loss) หรือแบบนุ่มนวล (Soft) ในกรณีสมการของระบบที่ 3.38 หรือ การแยกสาขาของฮอฟฟ์ต่ำกว่าค่าวิกฤตบริเวณที่ดึงดูดของจุดสมดุลถูกกำหนดโดยวงกลมจำกัดไม่เสถียรซึ่งหดตัวเมื่อค่าพารามิเตอร์ถึงจุดวิกฤตและหายไป ดังนั้นระบบถูกผลักออกจากบริเวณของจุดสมดุลซึ่งเรียกว่าสภาวะการสูญเสียเสถียรภาพแบบร้ายแรง (Catastrophic stability loss) หรือแบบรุนแรง (Sharp) หากระบบสูญเสียเสถียรภาพแบบนุ่มนวล ระบบยังสามารถควบคุมได้หากค่าพารามิเตอร์กลับไปสู่ค่าลบล้อกลับ ในทางกลับกันหากระบบสูญเสียเสถียรภาพแบบรุนแรง การตั้งค่าพารามิเตอร์ใหม่ให้กลับสู่ค่าลบล้อกลับอาจจะไม่ทำให้ระบบกลับสู่จุดสมดุลเสถียรเนื่องจากระบบได้ออกจากบริเวณที่ดึงดูดของจุดสมดุล

จะเห็นได้ว่าประเภทของการแยกสาขาถูกกำหนดโดยเสถียรภาพของจุดสมดุล ณ ค่าพารามิเตอร์วิกฤต นอกเหนือจากการประเภทของการแยกสาขา ยังมีส่วนที่ควรพิจารณา หากเราพิจารณา  $\alpha$  เป็นตัวแปรที่ตอบสนองช้าและเพิ่มในสมการของระบบที่ 3.35 เป็นสมการที่ 3

$$\dot{\alpha} = \varepsilon$$

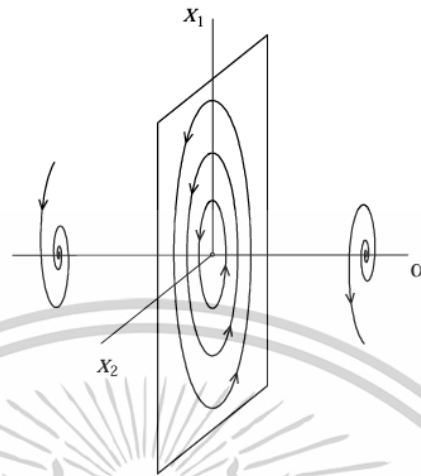
ด้วย  $\varepsilon$  ซึ่งเป็นค่าบวกที่น้อยมาก ผลลัพธ์ของชุดเวลา (Time Series)  $(x(t), y(t), \alpha(t))$  จะนำเสนอถึงระดับของความรุนแรง หากระบบเริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น  $(x_0, y_0, \alpha_0)$  ด้วย  $\alpha_0 < 0$  ระบบจะเข้าสู่จุดกำเนิดและคงสถานะใกล้กับจุดกำเนิดมาก ๆ แม้ว่า  $\alpha$  จะมีค่าเป็นบวกก็ตาม ดังนั้นระบบจึงไม่เกิดการสั่นสะเทือน หาก  $\alpha$  เข้าใกล้ค่าบางค่าที่เป็นบวกค่าหนึ่ง ระบบจะออกจากจุดสมดุลอย่างรุนแรงและเริ่มสั่นสะเทือนด้วยแอมพลิจูดที่ค่อนข้างมาก

ในการพิจารณาระบบที่ไม่มีพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น

$$\dot{z} = (\alpha + i)z$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบนี้มีกลุ่มของวงโคจรเป็นคาบ (Periodic orbit) ของการเพิ่มขึ้นของแอมพลิจูด แต่กลุ่มของวงโคจรนั้นเกิดขึ้นที่  $\alpha = 0$  เมื่อระบบมีศูนย์กลาง ณ จุดกำเนิดดังรูปที่ 3.18 ซึ่งสามารถกล่าวได้ว่าในกรณีนี้วงกลมจำกัด (Limit cycle) ไม่กลับ (Degenerate) เข้าสู่ระนาบ  $\alpha = 0$  ใน  $(x, y, \alpha)$ -space



รูปที่ 3.18 การแยกสาขาของฮอปฟ์ในระบบที่เป็นเชิงเส้น

### 3.6.4 การแยกสาขาของฮอปฟ์ในการวิเคราะห์ระบบเชิงพลวัต

สมการของระบบที่ 3.35 เขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

เมื่อ  $x = (x_1, x_2)^T$  และ  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$  ดังนั้นจึงเขียนสมการของระบบที่ 3.39 ในรูปของเวกเตอร์โดยย่อดังนี้

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1$$

เมื่อสมการในฟังก์ชันเวกเตอร์  $f$  สามารถหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งมีจุดสมดุล  $x = 0$  ที่  $\alpha = 0$  ด้วยค่าลักษณะเฉพาะ  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$  เมื่อ  $\omega_0 > 0$  จากทฤษฎีฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit function theorem) ระบบมีจุดสมดุลเฉพาะ  $x_0(\alpha)$  ในบางบริเวณของจุดกำเนิดสำหรับค่า  $|\alpha|$  ที่น้อยมาก ๆ เนื่องจาก  $\lambda = 0$  ไม่ใช่ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียน เราสามารถย้ายเงื่อนไขการวางจุดสมดุลไว้ที่จุดกำเนิดได้ ดังนั้นเราอาจจะสันนิษฐานได้ว่าไม่มีการสูญเสียเสถียรภาพซึ่ง  $x = 0$  คือจุดสมดุลของระบบสำหรับ  $|\alpha|$  ที่มีค่าน้อยมาก ดังนั้นสมการของระบบ 3.39 จึงถูกเขียนใหม่ดังนี้

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha) \quad (3.40)$$

โดยที่  $F$  คือฟังก์ชันเวกเตอร์ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งองค์ประกอบ  $F_{1,2}$  มีสมการอนุกรมเทเลอร์

ในค่า  $x$  อย่างน้อย 2 อันดับอนุกรม และเมทริกซ์จาโคเบียน  $A(\alpha)$  สามารถเขียนได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix}$$

โดยมีฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ  $\alpha$  เป็นองค์ประกอบ ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียน คือรากของสมการลักษณะเฉพาะ

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

โดยที่

$$\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{tr } A(\alpha)$$

และ

$$\Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = \det A(\alpha)$$

ดังนั้น

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2}(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)})$$

เงื่อนไขการแยกสาขาของฮอปฟ์กล่าวว่า

$$\sigma(0) = 0, \Delta(0) = \omega_0^2 > 0$$

สำหรับ  $|\alpha|$  ที่มีค่าน้อยมาก เราสามารถนำเสนอฟังก์ชันใหม่

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}$$

และนำไปแทนที่สำหรับค่าลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\lambda_1(\alpha) = \mu(\alpha), \lambda_2(\alpha) = \overline{\mu(\alpha)}$$

โดยที่

$$\lambda = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \mu(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.7 กฎความคล้ายคลึงเชิงกล

กฎความคล้ายคลึงเชิงกล (Mechanical similarity law) เป็นกฎที่ใช้ในการออกแบบและวิเคราะห์ระบบทางกลโดยการย่อส่วนขนาดและตัวแปรอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องในระบบจริง ซึ่งการทดลองในระบบจริงนั้นอาจจะต้องใช้เวลานานเพื่อพัฒนาชุดทดลองขนาดจริง อีกทั้งยังต้องมีพื้นที่รองรับชุดทดลองที่กว้างและใช้งบประมาณอย่างมหาศาล ดังนั้นกฎความคล้ายคลึงเชิงกลจึงสำคัญในการพัฒนาชุดทดลองขนาดย่อที่มีพฤติกรรมของระบบคล้ายคลึงกับชุดทดลองขนาดจริง มากไปกว่านั้นยังใช้พื้นที่และงบประมาณที่น้อยลง

จากงานวิจัยของ M. Gretzshcal และ A. Jaschinski [11] ศึกษาเกี่ยวกับการออกแบบชุดทดลองแคร์รด์ไฟขนาดย่อ ได้นำเสนอตัวแปรย่อส่วนความยาว (Length scaling factor) ดังนี้

$$\Phi_L = \frac{L_0}{L_1} \quad (3.41)$$

โดยตัวแปรย่อส่วนมวล (Mass scaling factor) จะได้

$$\Phi_M = \frac{M_0}{M_1} \quad (3.42)$$

และเช่นเดียวกัน ตัวแปรย่อส่วนเวลา (Time scaling factor) จะคำนวณได้ดังนี้

$$\Phi_T = \frac{T_0}{T_1} \quad (3.43)$$

โดยที่ดรรชนีล่าง 0 หมายถึงขนาดตัวแปรใด ๆ ในขนาดจริง และดรรชนีล่าง 1 หมายถึงขนาดตัวแปรใด ๆ ในขนาดย่อ ดังนั้นตัวแปรย่อส่วนของขนาดตัวแปรใด ๆ จึงสามารถหาได้เช่นกันดังนี้

ตัวแปรย่อส่วนพื้นที่หน้าตัด

$$\Phi_A = \Phi_L^2 \quad (3.44)$$

ตัวแปรย่อส่วนปริมาตร

$$\Phi_V = \Phi_L^3 \quad (3.45)$$

ตัวแปรย่อส่วนความเร็ว

$$\Phi_v = \frac{\Phi_L}{\Phi_T} \quad (3.46)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวแปรย่อยส่วนความเร่ง

$$\Phi_a = \frac{\Phi_L}{\Phi_T^2} \quad (3.47)$$

และตัวแปรย่อยส่วนความหนาแน่น

$$\Phi_\rho = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{M_0/V_0}{M_1/V_1} = \frac{M_0V_1}{M_1V_0} = \frac{M_0L_1^3}{M_1L_0^3} = \frac{\Phi_M}{\Phi_L^3} \quad (3.48)$$

ดังนั้นตัวแปรย่อยส่วนมวล ตัวแปรย่อยโมเมนต์ความเฉื่อย และตัวแปรย่อยส่วนแรง สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปรย่อยส่วนความหนาแน่นตามลำดับได้ดังนี้

$$\Phi_M = \Phi_\rho \Phi_L^3 \quad (3.49)$$

$$\Phi_I = \Phi_M \Phi_L^2 = \Phi_\rho \Phi_L^5 \quad (3.50)$$

$$\Phi_F = \Phi_M \Phi_a = \frac{\Phi_\rho \Phi_L^4}{\Phi_T^2} \quad (3.51)$$

และ

ตัวแปรย่อยส่วนค่าความแข็งสปริง

$$\Phi_k = \Phi_\rho \Phi_L^2 \quad (3.52)$$

ตัวแปรย่อยส่วนค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง

$$\Phi_c = \frac{\Phi_\rho \Phi_L^3}{\Phi_v} = \Phi_\rho \Phi_L^{5/2} \quad (3.53)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

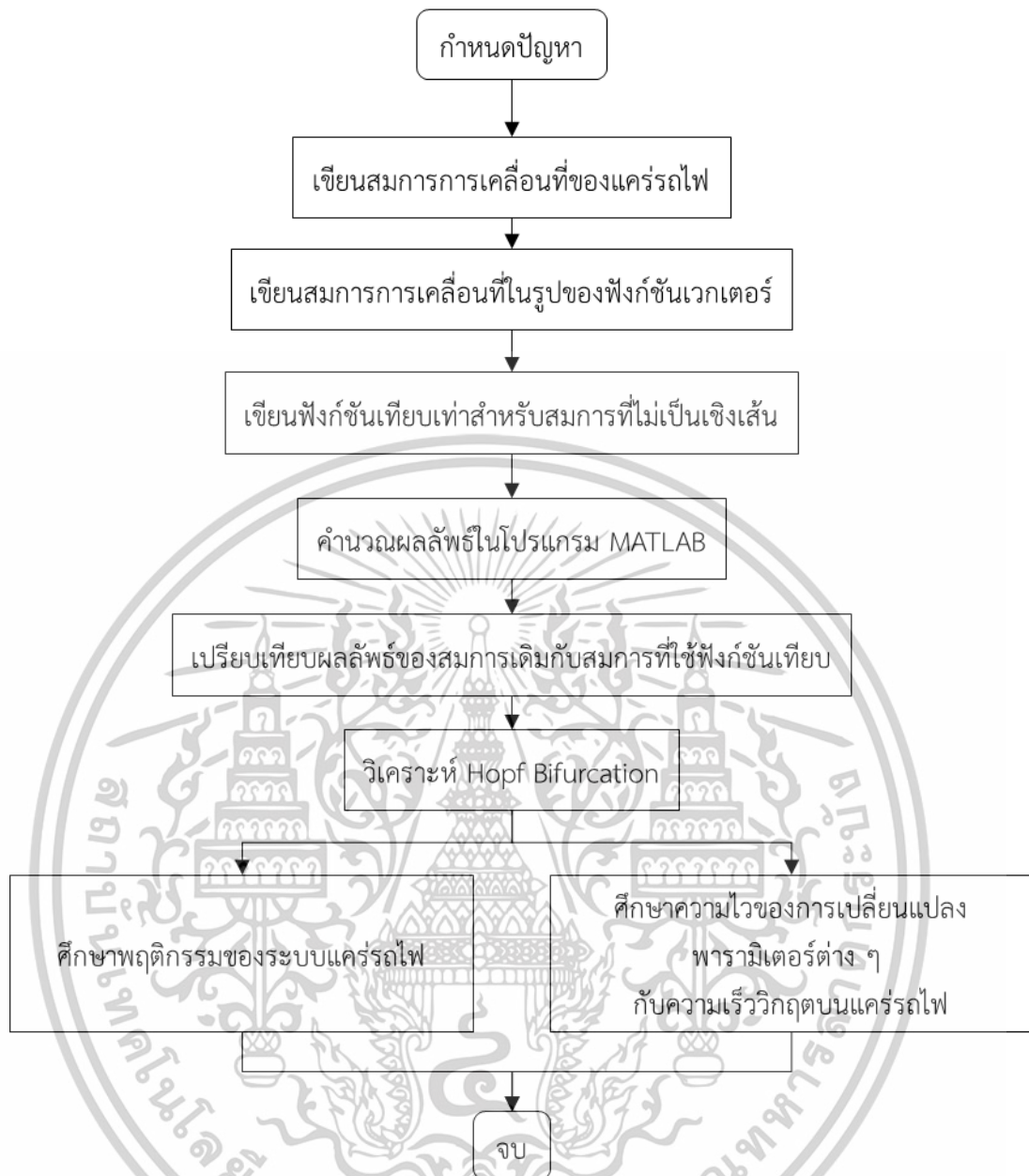
## บทที่ 4

# การศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติงด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

### 4.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการศึกษาการสั่นสะเทือนในฮันติงบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งงานวิจัยของ Sritrakul, T. et.al. [26] เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ งานวิจัยดังกล่าวศึกษาเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่ส่งผลกระทบต่อเสถียรภาพการเคลื่อนที่ของแคว่รถไฟบนรางตรง ด้วยวิธีการวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์ ซึ่งได้นำเสนอฟังก์ชันเทียบเท่าสำหรับในการศึกษาระบบเชิงพลวัตของแคว่รถไฟ สังเกตพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของแคว่รถไฟในแต่ละช่วงความเร็วโดยนำเสนอบนแผนภาพการแยกสาขาและบนภาพพจน์เฟส (Phase portrait) และศึกษาความไว (Sensitivity) ของการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ต่าง ๆ กับความเร็ววิกฤตบนแคว่รถไฟ

การดำเนินการวิจัยจะเริ่มจากการศึกษาสมการการเคลื่อนที่ของแคว่รถไฟซึ่งอ้างอิงจากงานวิจัยของ Ahamadian and Yang [4] และเขียนฟังก์ชันเทียบเท่าสำหรับสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น หลังจากนั้นเขียนสมการการเคลื่อนที่ของแคว่รถไฟให้เขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันเวกเตอร์เพื่อนำไปคำนวณในโปรแกรม MATLAB เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของแคว่รถไฟเดิมกับสมการการเคลื่อนที่ของแคว่รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบ เมื่อได้การเปรียบเทียบดังกล่าวแล้วจะนำสมการการเคลื่อนที่ของแคว่รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบมาวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์ เพื่อสังเกตพฤติกรรมของระบบแคว่รถไฟบนแผนภาพการแยกสาขา และบนภาพพจน์เฟส และสุดท้ายศึกษาความไวของการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ต่าง ๆ กับความเร็ววิกฤตบนแคว่รถไฟ โดยขั้นตอนทั้งหมดในการศึกษานี้แสดงดังรูปที่ 4.1

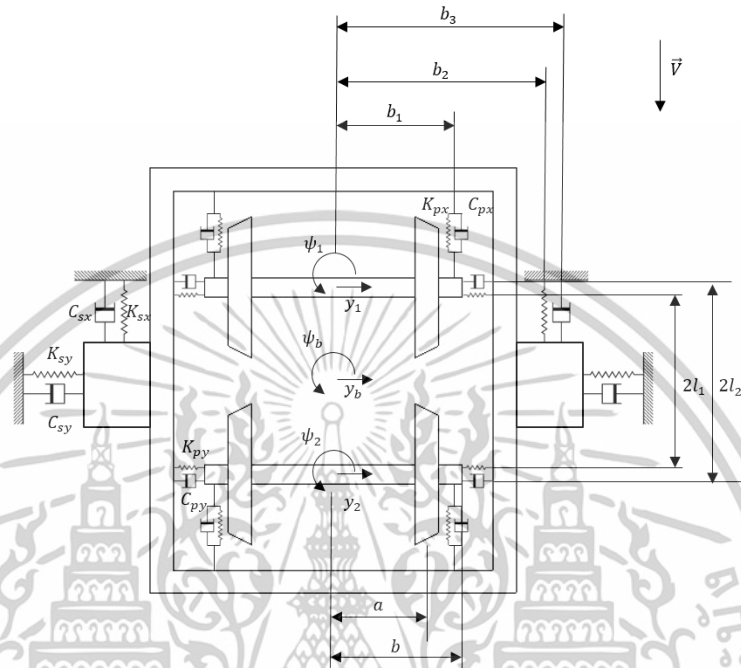


รูปที่ 4.1 แผนภาพขั้นตอนในการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮันติงตันในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.2 สมการการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

จากแบบจำลองแคร่รถไฟในรูปที่ 4.2 ซึ่งประกอบไปด้วย 2 ชุดล้อ และ 1 โครงแคร่รถไฟ สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของชุดล้อด้านหลังในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ และการหมุนควงตามลำดับ [4] ดังนี้



รูปที่ 4.2 แสดงแบบจำลองแคร่รถไฟ

$$m_w \ddot{y}_1 + \frac{2f_{11}}{V} \left[ \left( 1 + \frac{r_0 \lambda}{a} \right) \dot{y}_1 - V \psi_1 \right] + \frac{2f_{12}}{V} \dot{y}_1 + W_A \frac{\lambda}{a} = F_{sus, y1} - F_{T1} \quad (4.1)$$

$$I_{wx} \ddot{\psi}_1 + I_{wy} \frac{V \lambda}{r_0 a} \dot{y}_1 + \frac{2af_{33} \lambda}{r_0} y_1 - \frac{2f_{12}}{V} \left[ \left( 1 + \frac{r_0 \lambda}{a} \right) \dot{y}_1 - V \psi_1 \right] + \frac{2a^2 f_{33}}{V} \dot{\psi}_1 - aW_A \lambda \psi_1 + \frac{2f_{22}}{V} \psi_1 = M_{sx1} - 2b_1 F_{d1} \quad (4.2)$$

โดยที่

$y_1$  คือ การกระจัดของชุดล้อด้านหลังในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\dot{y}_1$  คือ ความเร็วของชุดล้อด้านหลังในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\ddot{y}_1$  คือ ความเร่งของชุดล้อด้านหลังในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\psi_1$  คือ การกระจัดหมุนควง (Yaw displacement) ของชุดล้อด้านหลัง

$\dot{\psi}_1$  คือ ความเร็วหมุนควง (Yaw velocity) ของชุดล้อด้านหลัง

$\ddot{\psi}_1$  คือ ความเร่งหมุนควง (Yaw acceleration) ของชุดล้อด้านหลัง

$f_{11}$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สวอนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$f_{12}$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบหมุนทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$f_{22}$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบหมุน

$f_{33}$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$V$  คือ ความเร็วของการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$a$  คือ ความกว้างของรางรถไฟวัดจากกึ่งกลางของรางรถไฟ

$r_0$  คือ รัศมีของล้อแคร่รถไฟ

$\lambda$  คือ ค่าความเป็นกรวยของล้อ

$m_w$  คือ มวลของชุดล้อ

$W_A$  คือ น้ำหนักกดเพลลา

$I_{wx}$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนกึ่งของชุดล้อ (Roll moment of inertia of wheelset)

$I_{wy}$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนของชุดล้อ (Spin moment of inertia of wheelset)

$b_1$  คือ ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแขนตัวหน่วงของระบบรองรับหลัก (Half of the primary damper arm)

ในทำนองเดียวกันสมการการเคลื่อนที่ของชุดล้อด้านหน้าในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟและการหมุนควงตามลำดับ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$m_w \ddot{y}_2 + \frac{2f_{11}}{V} \left[ \left( 1 + \frac{r_0 \lambda}{a} \right) \dot{y}_2 - V \psi_2 \right] + \frac{2f_{12}}{V} \dot{y}_2 + W_A \frac{\lambda}{a} = F_{sus,y2} - F_{T2} \quad (4.3)$$

$$I_{wx} \ddot{\psi}_2 + I_{wy} \frac{V \lambda}{r_0 a} \dot{y}_2 + \frac{2af_{33} \lambda}{r_0} y_2 - \frac{2f_{12}}{V} \left[ \left( 1 + \frac{r_0 \lambda}{a} \right) \dot{y}_2 - V \psi_2 \right] + \frac{2a^2 f_{33}}{V} \dot{\psi}_2 \quad (4.4)$$

$$-aW_A \lambda \psi_2 + \frac{2f_{22}}{V} \psi_2 = M_{sz2} - 2b_1 F_{d2}$$

โดยที่

$y_2$  คือ การกระจัดของชุดล้อด้านหน้าในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\dot{y}_2$  คือ ความเร็วของชุดล้อด้านหน้าในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\ddot{y}_2$  คือ ความเร่งของชุดล้อด้านหน้าในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\psi_2$  คือ การกระจัดหมุนควงของชุดล้อด้านหน้า

$\dot{\psi}_2$  คือ ความเร็วหมุนควงของชุดล้อด้านหน้า

$\ddot{\psi}_2$  คือ ความเร่งหมุนควงของชุดล้อด้านหน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และในส่วนของการเคลื่อนที่ของโครงแคร่รถไฟทั้งในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่และการหมุนควงตามลำดับ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$m_b \ddot{y}_b = -F_{sus,y1} - F_{sus,y2} - 2K_{sy} y_b - 2C_{sy} \dot{y}_b \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} I_{bz} \ddot{\psi}_b &= -2K_{py} [y_1 - y_b + l_1 \psi_b] l_1 + 2K_{py} [y_2 - y_b - l_1 \psi_b] l_1 \\ &- 2C_{py} [\dot{y}_1 - \dot{y}_b + l_1 \dot{\psi}_b] l_2 + 2C_{py} [\dot{y}_1 - \dot{y}_b - l_1 \dot{\psi}_b] l_2 - 2K_{sx} b_2^2 \psi_b \\ &- 2C_{sx} b_3^2 \dot{\psi}_b + 2K_{px} b^2 [\psi_1 - \psi_2 - 2\psi_b] + 2b_1 [F_{d1} + F_{d2}] \end{aligned} \quad (4.6)$$

โดยที่

$y_b$  คือ การกระจัดของแคร่รถไฟในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่

$\dot{y}_b$  คือ ความเร็วของแคร่รถไฟในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่

$\ddot{y}_b$  คือ ความเร่งของแคร่รถไฟในทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่

$\psi_b$  คือ การกระจัดหมุนควงของแคร่รถไฟ

$\dot{\psi}_b$  คือ ความเร็วหมุนควงของแคร่รถไฟ

$\ddot{\psi}_b$  คือ ความเร่งหมุนควงของแคร่รถไฟ

$m_b$  คือ มวลของโครงแคร่รถไฟ

$I_{bz}$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยการเอียงของแคร่รถไฟ (Yaw moment of inertia of bogie)

$b$  คือ ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเอียงของระบบรองรับหลัก (Half of the primary yaw spring)

$b_2$  คือ ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเอียงของระบบรองรับรอง (Half of the secondary yaw arm)

$b_3$  คือ ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแขนตัวหน่วงของระบบรองรับรอง (Half of the secondary damper arm)

$l_1$  คือ ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างสปริงของระบบรองรับรอง (Half of longitudinal distance of the secondary spring)

$l_2$  คือ ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง (Half of longitudinal distance of the lateral secondary damper)

$K_{px}$  คือ ค่าความแข็งของสปริงการเอียงของระบบรองรับหลัก

$K_{py}$  คือ ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก

$C_{py}$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก

$K_{sx}$  คือ ค่าความแข็งของสปริงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง

$K_{sy}$  คือ ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง

$C_{sx}$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง

$C_{sy}$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ 4.1 ถึง 4.6 ได้พิจารณาแรงจากระบบรองรับของแคร่รถไฟ  $F_{sus,y1}, F_{sus,y2}$  และโมเมนต์การเฉงของ 2 ชุดล้อ  $M_{sz1}, M_{sz2}$  สามารถอธิบายดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{cases} F_{sus,y1} = -2K_{py} [y_1 - y_b + l_1\psi_b] - 2C_{py} [\dot{y}_1 - \dot{y}_b + l_1\dot{\psi}_b] \\ F_{sus,y2} = -2K_{py} [y_2 - y_b - l_1\psi_b] - 2C_{py} [\dot{y}_2 - \dot{y}_b - l_2\dot{\psi}_b] \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} M_{sz1} = -2K_{px} b^2 (\psi_1 - \psi_b) \\ M_{sz2} = -2K_{px} b^2 (\psi_2 - \psi_b) \end{cases} \quad (4.8)$$

ยิ่งไปกว่านั้นยังได้พิจารณาแรงจากตัวหน่วงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear longitudinal yaw damping force)  $F_{d1}, F_{d2}$  ซึ่งอธิบายดังสมการต่อไปนี้

$$F_{d1} = \begin{cases} C_1 V_{\psi 1} + C_2 V_{\psi 1}^2 + C_3 V_{\psi 1}^3 + C_4 V_{\psi 1}^4 & V_{\psi 1} > 0 \\ C_1 V_{\psi 1} - C_2 V_{\psi 1}^2 + C_3 V_{\psi 1}^3 - C_4 V_{\psi 1}^4 & V_{\psi 1} < 0 \end{cases} \quad (4.9.1)$$

$$F_{d2} = \begin{cases} C_1 V_{\psi 2} + C_2 V_{\psi 2}^2 + C_3 V_{\psi 2}^3 + C_4 V_{\psi 2}^4 & V_{\psi 2} > 0 \\ C_1 V_{\psi 2} - C_2 V_{\psi 2}^2 + C_3 V_{\psi 2}^3 - C_4 V_{\psi 2}^4 & V_{\psi 2} < 0 \end{cases} \quad (4.9.2)$$

โดยที่

$V_{\psi 1} = b_1 (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_b)$  และ  $V_{\psi 2} = b_1 (\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_b)$  คือ ความเร็วสัมพัทธ์ของยอร์แดมเปอร์ตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$C_1, C_2, C_3, C_4$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงของยอร์แดมเปอร์ที่ได้จากการทดลอง

รวมถึงยังพิจารณาแรงสัมผัสระหว่างบังใบล้อกับรางรถไฟ (Flange contact force)  $F_{T1}, F_{T2}$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$F_{T1} = \begin{cases} K_r (y_1 - \delta) & y_1 > \delta \\ 0 & -\delta \leq y_1 \leq \delta \\ K_r (y_1 - \delta) & y_1 < -\delta \end{cases} \quad (4.10.1)$$

$$F_{T2} = \begin{cases} K_r (y_2 - \delta) & y_2 > \delta \\ 0 & -\delta \leq y_2 \leq \delta \\ K_r (y_2 - \delta) & y_2 < -\delta \end{cases} \quad (4.10.2)$$

โดยที่

$K_r$  คือ ค่าความแข็งของรางรถไฟ

$\delta$  คือ ระยะห่างระหว่างขอบบังใบล้อและขอบรางรถไฟ (Flange clearance)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะเห็นว่าสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟมีความซับซ้อนเป็นอย่างมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งแรงที่ไม่เป็นเชิงเส้นในสมการที่ 4.9 และ 4.10 งานวิจัยของ Hamid, M. et.al. [6] ได้นำเสนอฟังก์ชันเทียบสำหรับแก้ปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น อย่างไรก็ตามฟังก์ชันเทียบนี้ใช้สำหรับการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของชุดล้อเดี่ยวเพียงอย่างเดียว ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงนำฟังก์ชันเทียบมาเขียนใหม่เพื่อนำมาวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟดังนี้

$$F_{d1} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{|V_{\psi 1}|}{V_{\psi 1}} \right) (C_1 V_{\psi 1} + C_2 V_{\psi 1}^2 + C_3 V_{\psi 1}^3 + C_4 V_{\psi 1}^4) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{|V_{\psi 1}|}{V_{\psi 1}} \right) (C_1 V_{\psi 1} - C_2 V_{\psi 1}^2 + C_3 V_{\psi 1}^3 - C_4 V_{\psi 1}^4) \quad (4.11.1)$$

$$F_{d2} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{|V_{\psi 2}|}{V_{\psi 2}} \right) (C_1 V_{\psi 2} + C_2 V_{\psi 2}^2 + C_3 V_{\psi 2}^3 + C_4 V_{\psi 2}^4) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{|V_{\psi 2}|}{V_{\psi 2}} \right) (C_1 V_{\psi 2} - C_2 V_{\psi 2}^2 + C_3 V_{\psi 2}^3 - C_4 V_{\psi 2}^4) \quad (4.11.2)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} &= \frac{1}{2} K_r (2y_1 + |y_1 - \delta| - |y_1 + \delta|) \\ F_{T2} &= \frac{1}{2} K_r (2y_2 + |y_2 - \delta| - |y_2 + \delta|) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

#### 4.3 ระเบียบวิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ

จากสมการที่ 4.1 ถึง 4.6 สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\dot{X} = f(X, V) = A(V)X + F(X) \quad (4.12)$$

โดยที่

$X$  คือ ฟังก์ชันเวกเตอร์สถานะ (State vector function)

$A(V)$  คือ เมทริกซ์ระบบ (System matrix) ของแควร์รถไฟซึ่งเป็นพจน์ที่เป็นเชิงเส้น

$V$  คือ ความเร็วของการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟซึ่งเป็นพารามิเตอร์ควบคุม

$F(X)$  คือ ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่ประกอบไปสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ฟังก์ชันเวกเตอร์สถานะ  $X$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$X = [y_1 \quad \dot{y}_1 \quad \psi_1 \quad \dot{\psi}_1 \quad y_2 \quad \dot{y}_2 \quad \psi_2 \quad \dot{\psi}_2 \quad y_b \quad \dot{y}_b \quad \psi_b \quad \dot{\psi}_b]^T$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมทริกซ์ระบบ  $A(V)$  มีขนาด  $12 \times 12$  ประกอบไปด้วยสมาชิกดังต่อไปนี้

$$A(V) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12,1} & \cdots & a_{12,12} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= -\frac{1}{m_w} \left( 2K_{py} + W_A \frac{\lambda}{a} \right) \\ a_{2,2} &= -\frac{2}{m_w} \left[ C_{py} + \frac{f_{11}}{V} \left( 1 + \frac{r_0 \lambda}{a} \right) \right] \\ a_{2,3} &= \frac{2f_{11}}{m_w} \\ a_{2,4} &= -\frac{2f_{12}}{m_w V} \\ a_{2,9} &= \frac{2K_{py}}{m_w} \\ a_{2,10} &= \frac{2C_{py}}{m_w} \\ a_{2,11} &= -a_{2,9} l_1 \\ a_{2,12} &= -a_{2,10} l_1 \\ a_{4,1} &= -\frac{2af_{33}\lambda}{r_0 I_{wx}} \\ a_{4,2} &= \frac{1}{I_{wx}} \left[ -\frac{\lambda V}{r_0 a} I_{wy} + \frac{2f_{12}}{V} \left( 1 + \frac{r_0 \lambda}{a} \right) \right] \\ a_{4,3} &= \frac{1}{I_{wx}} \left( aW_A \lambda - 2f_{12} - 2b^2 K_{px} \right) \\ a_{4,4} &= -\frac{1}{I_{wx}} \left[ 2b_1 C_1 + \frac{2}{V} (a^2 f_{33} + f_{22}) \right] \\ a_{4,11} &= \frac{2b^2 K_{px}}{I_{wx}} \\ a_{4,12} &= \frac{2b_1 C_1}{I_{wx}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{6,5} &= a_{2,1} & a_{6,6} &= a_{2,2} & a_{6,7} &= a_{2,3} & a_{6,8} &= a_{2,4} & a_{6,9} &= a_{2,9} & a_{6,10} &= a_{2,10} \\ a_{6,11} &= -a_{2,11} & a_{6,12} &= -a_{2,12} \end{aligned}$$

$$a_{8,5} = a_{4,1} \quad a_{8,6} = a_{4,2} \quad a_{8,7} = a_{4,3} \quad a_{8,8} = a_{4,4} \quad a_{8,11} = a_{4,11} \quad a_{8,12} = a_{4,12}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a_{10,1} = \frac{2K_{py}}{m_b}$$

$$a_{10,2} = \frac{2C_{py}}{m_b}$$

$$a_{10,5} = a_{10,1}$$

$$a_{10,6} = a_{10,2}$$

$$a_{10,9} = -\frac{2}{m_b}(2K_{py} + K_{sy})$$

$$a_{10,10} = -\frac{2}{m_b}(2C_{py} + C_{sy})$$

$$a_{12,1} = -\frac{2K_{py}l_1}{I_{bz}}$$

$$a_{12,2} = -\frac{2C_{py}l_2}{I_{bz}}$$

$$a_{12,3} = \frac{2K_{px}b^2}{I_{bz}}$$

$$a_{12,4} = \frac{2C_{p1}b_1}{I_{bz}}$$

$$a_{12,5} = -a_{12,1}$$

$$a_{12,6} = -a_{12,2}$$

$$a_{12,7} = -a_{12,3}$$

$$a_{12,8} = a_{12,4}$$

$$a_{12,11} = -\frac{2}{I_{bz}}(K_{sx}b_2^2 + 2K_{px}b^2 + 2K_{py}l_1^2)$$

$$a_{12,12} = -\frac{2}{I_{bz}}(C_{sx}b_3^2 + 2C_{p1}b_1 + 2C_{py}l_1l_2)$$

$$a_{1,2} = a_{3,4} = a_{5,6} = a_{7,8} = a_{9,10} = a_{11,12} = 1$$

ฟังก์ชันเวกเตอร์  $F(X)$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$F(X) = \left[ 0 \quad -\frac{F_{T1}}{m_w} \quad 0 \quad -\frac{2b_1F_{d1}}{I_{wx}} \quad 0 \quad -\frac{F_{T2}}{m_w} \quad 0 \quad -\frac{2b_1F_{d2}}{I_{wx}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2b_1}{I_{bz}}(F_{d1} + F_{d2}) \right]^T$$

และค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟแสดงดังตารางที่ 4.1 ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

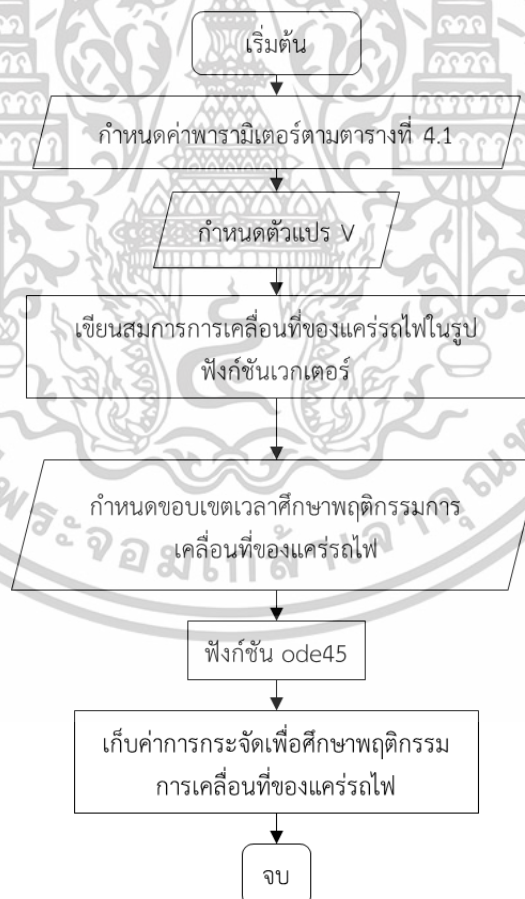
พารามิเตอร์	คำอธิบาย	ค่าพารามิเตอร์
$W_A$	น้ำหนักกดเพลลา	38,492.4 N
$m_b$	มวลของโครงแคร่รถไฟ	4,255.6 kg
$m_w$	มวลของชุดล้อ	1,800 kg
$I_{wx}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนกึ่งของชุดล้อ	625.7 kgm <sup>2</sup>
$I_{wy}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนของชุดล้อ	133.92 kgm <sup>2</sup>
$I_{bz}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการเฉของแคร่รถไฟ	10,314 kgm <sup>2</sup>
$r_0$	รัศมีของล้อแคร่รถไฟ	0.533 m
$a$	ความกว้างของรางรถไฟวัดจากกึ่งกลางของรางรถไฟ	0.7176 m
$K_{px}$	ค่าความแข็งของสปริงการเฉของระบบรองรับหลัก	8.67x10 <sup>4</sup> N/m
$K_{py}$	ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก	8.67x10 <sup>4</sup> N/m
$C_{py}$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก	2.1x10 <sup>4</sup> N s/m
$K_{sx}$	ค่าความแข็งของสปริงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง	2.189x10 <sup>5</sup> N/m
$K_{sy}$	ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง	1.532x10 <sup>5</sup> N/m
$C_{sx}$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง	6.129x10 <sup>5</sup> N s/m
$C_{sy}$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง	5.254x10 <sup>4</sup> N s/m
$C_1$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงของยอร์แดมเปอร์ที่ได้จากการทดลอง	1.923x10 <sup>4</sup> N s/m
$C_2$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงของยอร์แดมเปอร์ที่ได้จากการทดลอง	5.14x10 <sup>5</sup> N s/m
$C_3$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงของยอร์แดมเปอร์ที่ได้จากการทดลอง	-3.11 x10 <sup>6</sup> N s/m
$C_4$	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงของยอร์แดมเปอร์ที่ได้จากการทดลอง	5.14x10 <sup>5</sup> N s/m
$b$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเฉของระบบรองรับหลัก	1 m
$b_1$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแกนตัวหน่วงของระบบรองรับหลัก	1.27 m
$b_2$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเฉของระบบรองรับรอง	0.794 m
$b_3$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแกนตัวหน่วงของระบบรองรับรอง	0.889 m
$l_1$	ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างสปริงของระบบรองรับรอง	1.295 m
$l_2$	ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง	1.295 m
$f_{11}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ	6.728x10 <sup>6</sup> N

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$f_{22}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงค้ำหมุน	1,000 Nm <sup>2</sup>
$f_{12}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงค้ำหมุนทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแควรถไฟ	1,200 Nm
$f_{33}$	ค่าสัมประสิทธิ์แรงค้ำทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ของแควรถไฟ	6.728x10 <sup>6</sup> N
$K_r$	ค่าความแข็งของรางรถไฟ	1.617x10 <sup>7</sup> N/m
$\delta$	ระยะห่างระหว่างขอบบังโคลนและขอบรางรถไฟ	9.23x10 <sup>-3</sup> m
$\lambda$	ค่าความเป็นกรวยของล้อ	0.05

ในการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควรถไฟสามารถคำนวณบนโปรแกรม MATLAB ดังรูปที่ 4.3 เมื่อจัดรูปสมการการเคลื่อนที่ของแควรถไฟอยู่ในรูปฟังก์ชันเวกเตอร์ดังสมการที่ 4.12 เรียบร้อยแล้ว ฟังก์ชันเวกเตอร์ดังกล่าวจะถูกแทนค่าด้วยค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 4.1 และนำมาคำนวณ ผ่านฟังก์ชัน ode45 ซึ่งมีพื้นฐานจากระเบียบวิธีรุงเก้-คุดตะ อันดับที่ 4 (Runge-Kutta 4<sup>th</sup> Order) อันดับที่ 4 และอันดับที่ 5 ที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปของการกระจัดซึ่งเมื่อนำไปวาดกราฟจะแสดงถึงพฤติกรรมการเคลื่อนที่และภาพพจน์เฟสของแควรถไฟ

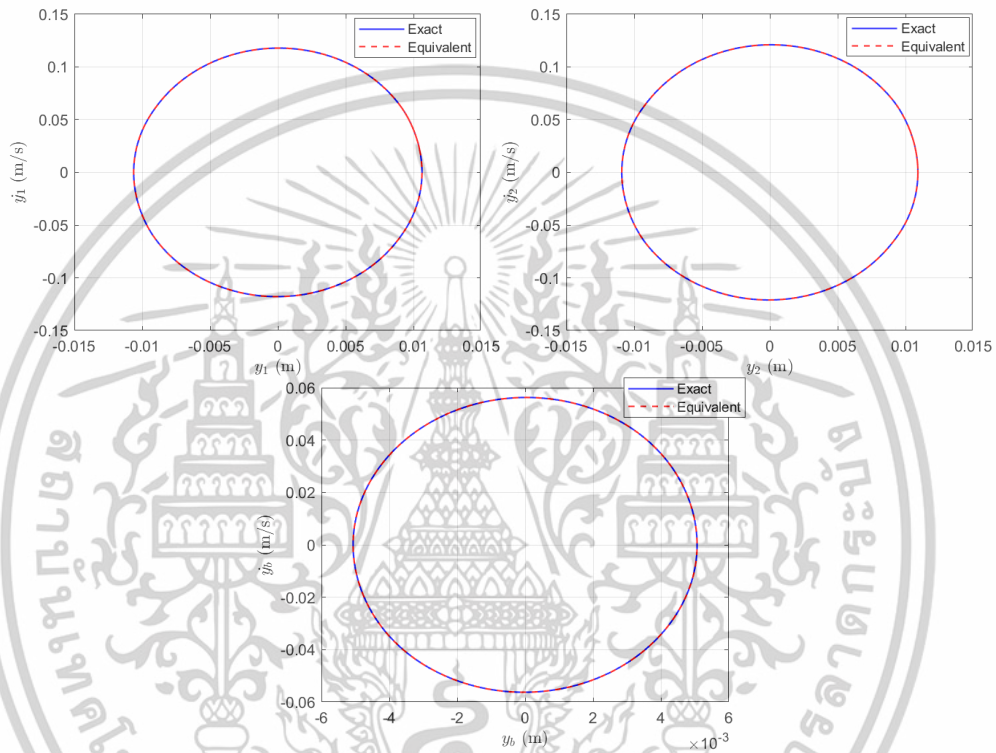


รูปที่ 4.3 แสดงแผนผังการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควรถไฟบนโปรแกรม MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.4 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟเดิมกับสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบ

ผลลัพธ์ของการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟเดิมและผลลัพธ์ของการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบสามารถเปรียบเทียบได้โดยการเปรียบเทียบขนาดวงกลมจำกัดของผลลัพธ์ทั้งสองบนโปรแกรม MATLAB ดังรูปที่ 4.4 ซึ่งจะเห็นได้ว่าวงกลมจำกัดจากการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟเดิมและวงกลมจำกัดจากการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบมีขนาดใกล้เคียงกัน



รูปที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบวงกลมจำกัดจากการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟเดิมและวงกลมจำกัดจากการคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบ

มากไปกว่านั้นการหาความคลาดเคลื่อนของสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟทั้งสองแบบสามารถหาได้ดังสมการ 4.13 ดังนี้

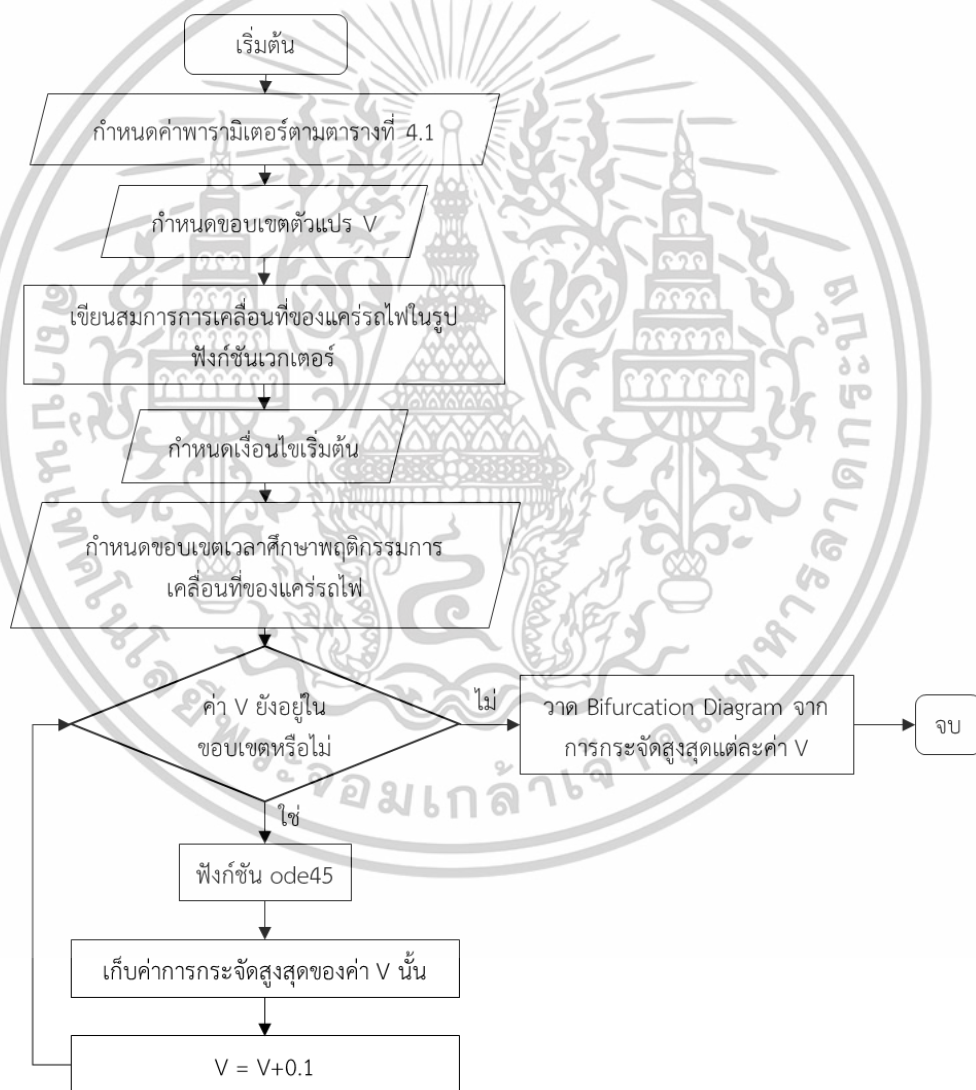
$$e = \sqrt{\frac{|\delta X_{ex} X_{eq}|^2}{|X_{ex}|^2}} \times 100 \quad (4.13)$$

โดยที่  $X_{ex}$  คือฟังก์ชันเวกเตอร์สถานะของผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟเดิม  $X_{eq}$  ฟังก์ชันเวกเตอร์สถานะของผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟที่ใช้ฟังก์ชันเทียบ และ

$\delta X_{ex} X_{eq} = X_{ex} - X_{eq}$  ซึ่งความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ของสมการทั้งสองมีค่าเท่ากับ 0.049% เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

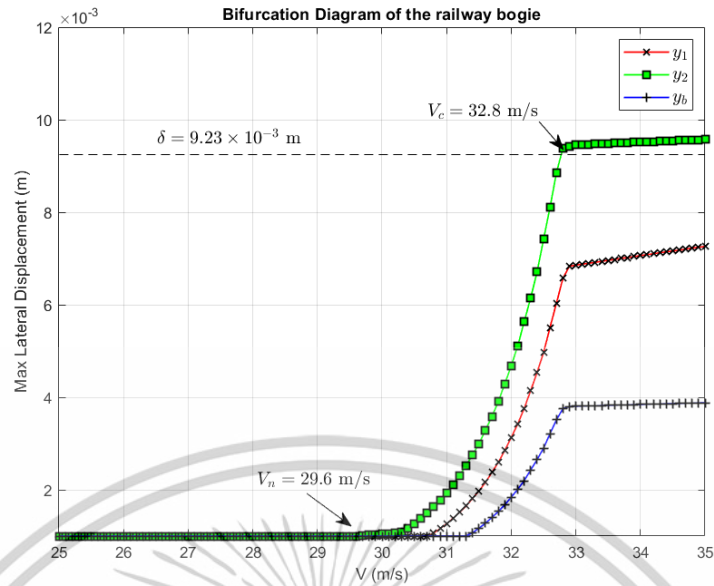
#### 4.5 การวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์

ในการวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์ของระบบแควร์รถไฟสามารถคำนวณบนโปรแกรม MATLAB ดังรูปที่ 4.5 โดยการเก็บค่าการกระจัดสูงสุดของแต่ละความเร็ว  $V$  และนำค่าการกระจัดสูงสุดของแต่ละความเร็วมาวาดแผนภาพการแยกสาขา ดังรูปที่ 4.6 ซึ่งแสดงถึงพฤติกรรมของการกระจัดสูงสุดของระบบแควร์รถไฟในแต่ละช่วงความเร็ว จะเห็นได้ว่าเมื่อแผนภาพการแยกสาขาของชุดล้อยหน้า  $y_2$  แสดงความเร็ววิกฤตแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่  $V_{cr} = 29.6$  m/s ซึ่งคลาดเคลื่อนจากผลลัพธ์ของงานวิจัยเขียนโดย M. Ahamadian และ S. Yang [3] ร้อยละ 9.69 ซึ่งสามารถยอมรับได้ มากไปกว่านั้นยังแสดงความเร็ววิกฤตแบบเชิงเส้นที่  $V_c = 32.8$  m/s ของระบบแควร์รถไฟ โดยเฉพาะอย่างยิ่งค่าการกระจัดสูงสุดของชุดล้อยหน้ามากกว่าระยะห่างระหว่างขอบบังใบล้อและขอบรางรถไฟ  $\delta$  ซึ่งเป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดความเสียหายของรางและความเสี่ยงที่แควร์รถไฟตก



รูปที่ 4.5 แสดงแผนผังการสร้างแผนภาพการแยกสาขาบนโปรแกรม MATLAB

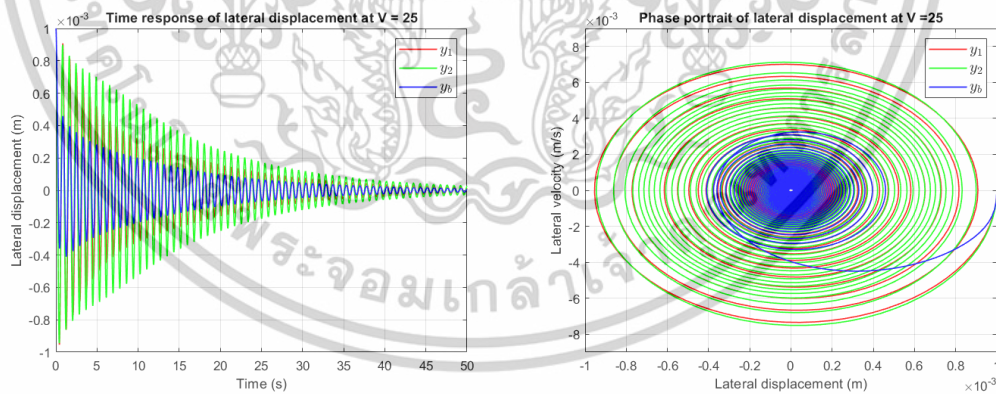
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 แสดงแผนภาพการแยกสาขาของระบบแควรถไฟ

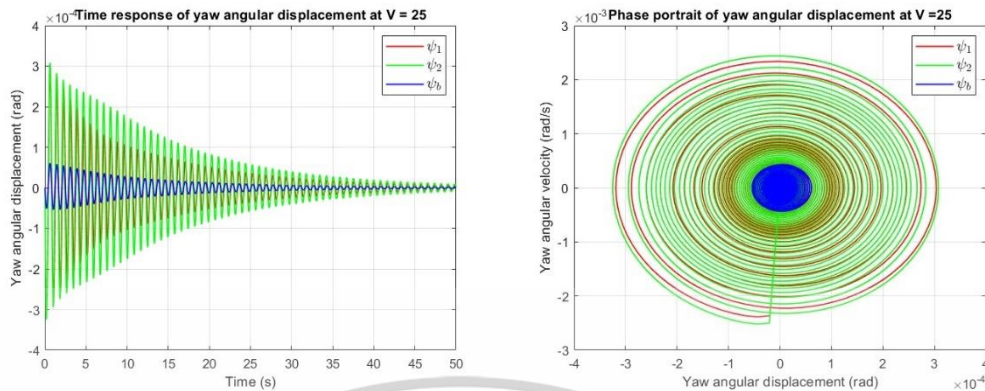
#### 4.5.1 พฤติกรรมการเคลื่อนที่ของระบบแควรถไฟ

พฤติกรรมการเคลื่อนที่ของระบบแควรถไฟและภาพพจน์เฟสถูกแสดงดังรูปที่ 4.7 – 4.9 จากรูปที่ 4.7 จะเห็นได้ว่าเมื่อแควรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่น้อยกว่าความเร็ววิกฤตแบบไม่เป็นเชิงเส้น  $V < V_n$  การกระจัดของระบบแควรถไฟและการเคลื่อนที่ของภาพพจน์เฟสจะกลับเข้าสู่สภาวะสมดุลเมื่อเวลาผ่านไป



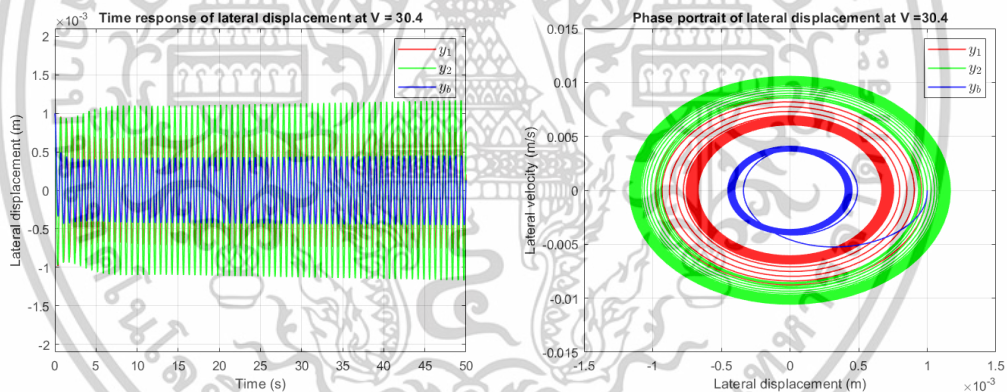
รูปที่ 4.7 พฤติกรรมของระบบแควรถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 25 เมตรต่อวินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

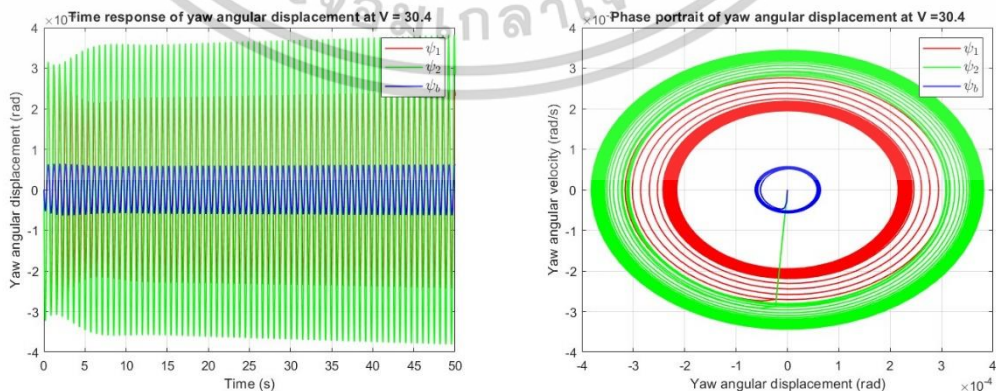


รูปที่ 4.8 พฤติกรรมการหมุนสั้นสะเทือนของระบบแควร์รถไฟและภาพพจน์เฟส  
ณ ความเร็ว 25 เมตรต่อวินาที

สำหรับพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของระบบแควร์รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็วที่อยู่ในช่วงระหว่าง  $V_n < V < V_c$  ถูกแสดงดังรูปที่ 4.9 การกระจัดของระบบแควร์รถไฟจะเข้าสู่สภาวะสูญเสียเสถียรภาพเนื่องจากแอมพลิจูดของการกระจัดเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาผ่านไป มากไปกว่านั้นภาพพจน์เฟสเคลื่อนที่เป็นวงกลมจำกัดซึ่งแผ่ขยายให้เห็นอย่างชัดเจน



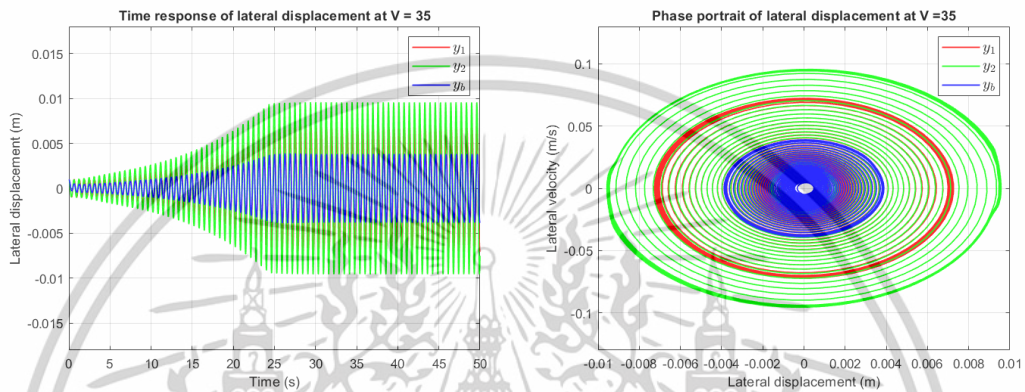
รูปที่ 4.9 พฤติกรรมของระบบแควร์รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 30.4 เมตรต่อวินาที



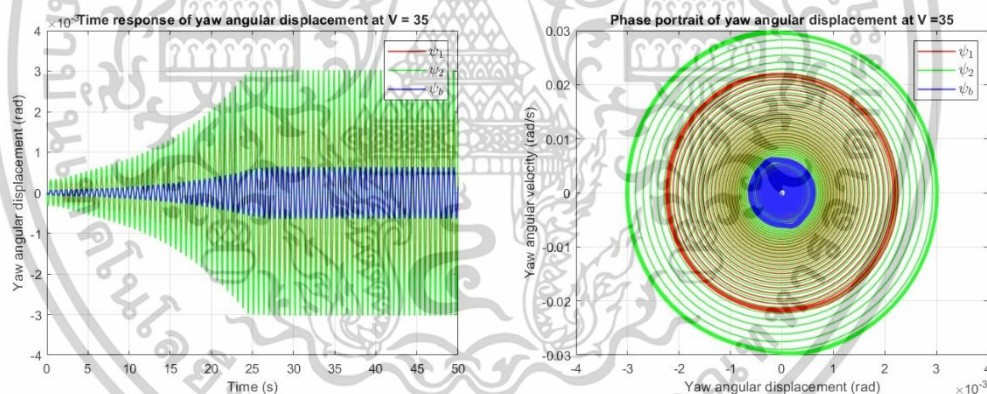
รูปที่ 4.10 พฤติกรรมการหมุนสั้นสะเทือนของระบบแควร์รถไฟและภาพพจน์เฟส  
ณ ความเร็ว 30.4 เมตรต่อวินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อย่างไรก็ตามหากแคว่รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็ววิกฤตแบบเชิงเส้น  $V > V_c$  การกระจัดของระบบแคว่รถไฟจะเพิ่มขึ้นจนถึง ณ เวลาหนึ่ง จนกระทั่งการกระจัดจะเข้าสู่สภาวะสมดุลเมื่อเวลาผ่านไป อย่างไรก็ตามการกระจัดของชุดล้อหน้าของระบบแคว่รถไฟ  $y_2$  ณ สภาวะสมดุลมีค่าใกล้เคียงกับระยะห่างระหว่างขอบบังใบล้อและขอบรางรถไฟ  $\delta$  เนื่องจากการสัมผัสระหว่างล้อกับรางและภาพพจน์เฟสของระบบแคว่รถไฟเคลื่อนที่เป็นวงกลมจำกัดซึ่งไม่กลับเข้าสู่สภาวะสมดุลดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 พฤติกรรมของระบบแคว่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 35 เมตรต่อวินาที



รูปที่ 4.12 พฤติกรรมการหมุนสั้นสะเทือนของระบบแคว่รถไฟและภาพพจน์เฟส ณ ความเร็ว 35 เมตรต่อวินาที

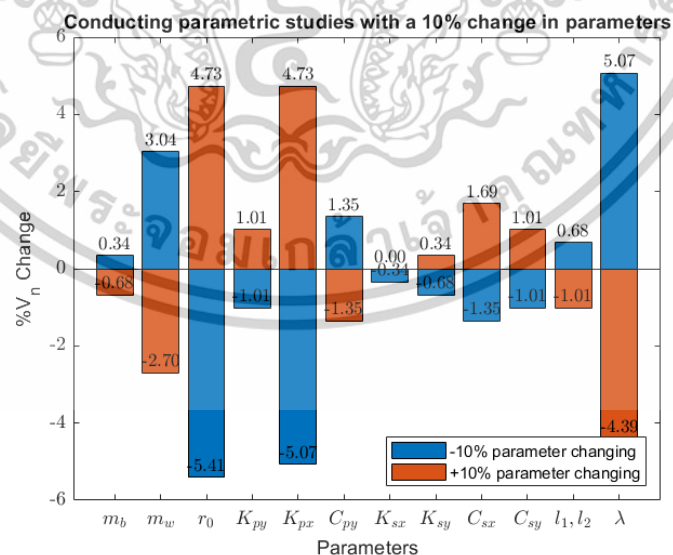
จากพฤติกรรมของระบบแคว่รถไฟและภาพพจน์เฟสของระบบแคว่รถไฟจะเห็นได้ว่า ณ ความเร็วในการเคลื่อนที่ที่มากกว่าความเร็ววิกฤตแบบไม่เป็นเชิงเส้น  $V > V_{cr}$  ทำให้ระบบแคว่รถไฟเข้าสู่สภาวะสูญเสียเสถียรภาพ มากไปกว่านั้นหากแคว่รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็ววิกฤตแบบเชิงเส้น  $V > V_c$  ก็มีความเสี่ยงที่จะตกรางเนื่องจากค่าการกระจัดของชุดล้อด้านหน้าที่ใกล้เคียงกับระยะห่างระหว่างขอบบังใบล้อและภาพพจน์เฟสของระบบเกิดวงกลมจำกัดขึ้น แม้ว่าการกระจัดดังกล่าวจะเข้าสู่สภาวะสมดุลเมื่อเวลาผ่านไป ดังนั้นเพื่อความปลอดภัยและหลีกเลี่ยงสภาวะสูญเสียเสถียรภาพที่นำไปสู่อุบัติเหตุตกราง แคว่รถไฟควรเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่น้อยกว่าความเร็ววิกฤตแบบไม่เป็นเชิงเส้น  $V < V_{cr}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.5.2 ความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์กับความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟ

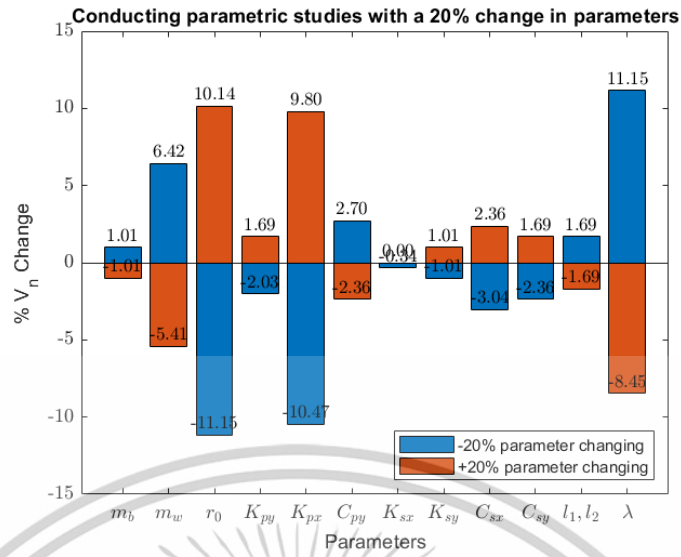
ในการออกแบบแคร่รถไฟ การศึกษาความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์จึงเป็นสิ่งที่สำคัญเพื่อเพิ่มศักยภาพในการทำความเร็วในการปฏิบัติงานของแคร่รถไฟ ผลการศึกษาความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์กับความเร็ววิกฤตบนแคร่รถไฟในแต่ละสัดส่วนแสดงดังรูปที่ 4.13 - 4.12 และดังตารางที่ 4.2 - 4.4 สามารถเรียงลำดับความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์กับความเร็ววิกฤตบนแคร่รถไฟจากมากไปน้อยได้ดังนี้

1. ค่าความเป็นกรวยของล้อ  $\lambda$
2. รัศมีของล้อแคร่รถไฟ  $r_0$
3. ค่าความแข็งของสปริงการเฉของระบบรองรับหลัก  $K_{px}$
4. มวลของชุดล้อ  $m_w$
5. ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก  $C_{py}$
6. ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง  $C_{sx}$
7. ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับหลัก  $K_{py}$
8. ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง  $C_{sy}$
9. ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างสปริงของระบบรองรับรองและระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างสปริงของระบบรองรับรอง  $l_1, l_2$
10. มวลของโครงแคร่รถไฟ  $m_b$
11. ค่าความแข็งของสปริงแนวด้านข้างของระบบรองรับรอง  $K_{sy}$
12. ค่าความแข็งของสปริงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง  $K_{sx}$

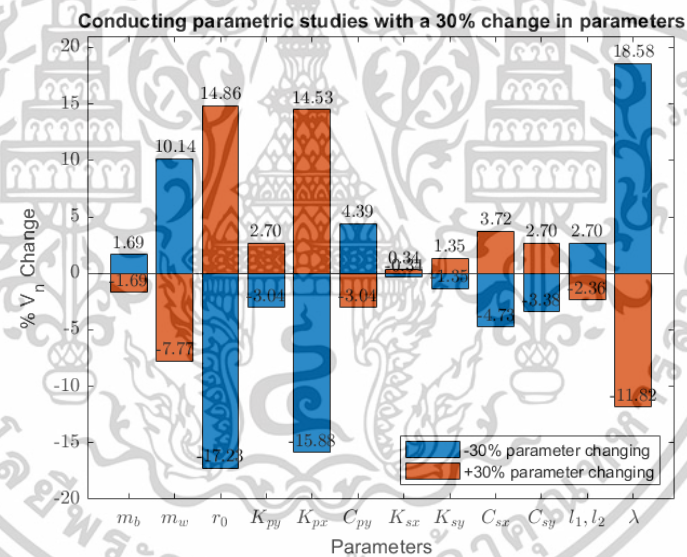


รูปที่ 4.13 แสดงความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 10%  
กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.14 แสดงความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 20% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น



รูปที่ 4.15 แสดงความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 30% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 10% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น  $V_n$

พารามิเตอร์	$V_n$ (m/s)		% การเปลี่ยนแปลง $V_n$ *	
	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง -10%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง +10%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง -10%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง +10%
	$m_b$	29.7	29.4	0.34
$m_w$	30.5	28.8	3.04	-2.70
$r_0$	28	31	-5.41	4.73
$K_{py}$	29.3	29.9	-1.01	1.01
$K_{px}$	28.1	31	-5.07	4.73
$C_{py}$	30	29.2	1.35	-1.35
$K_{sx}$	29.5	29.6	-0.34	0.00
$K_{sy}$	29.4	29.7	-0.68	0.34
$C_{sx}$	29.2	30.1	-1.35	1.69
$C_{sy}$	29.3	29.9	-1.01	1.01
$l_1, l_2$	29.8	29.3	0.68	-1.01
$\lambda$	31.1	28.3	5.07	-4.39

ตารางที่ 4.3 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 20% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น  $V_n$

พารามิเตอร์	$V_n$ (m/s)		% การเปลี่ยนแปลง $V_n$ *	
	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง -20%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง +20%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง -20%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง +20%
	$m_b$	29.9	29.3	1.01
$m_w$	31.5	28	6.42	-5.41
$r_0$	26.3	32.6	-11.15	10.14
$K_{py}$	29	30.1	-2.03	1.69
$K_{px}$	26.5	32.5	-10.47	9.80
$C_{py}$	30.4	28.9	2.70	-2.36
$K_{sx}$	29.5	29.6	-0.34	0.00
$K_{sy}$	29.3	29.9	-1.01	1.01
$C_{sx}$	28.7	30.3	-3.04	2.36
$C_{sy}$	28.9	30.1	-2.36	1.69
$l_1, l_2$	30.1	29.1	1.69	-1.69
$\lambda$	32.9	27.1	11.15	-8.45

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ 30% กับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น  $V_n$

พารามิเตอร์	$V_n$ (m/s)		% การเปลี่ยนแปลง $V_n$ *	
	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง -30%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง +30%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง -30%	ค่าพารามิเตอร์ เปลี่ยนแปลง +30%
$m_b$	30.1	29.1	1.69	-1.69
$m_w$	32.6	27.3	10.14	-7.77
$r_0$	24.5	34	-17.23	14.86
$K_{py}$	28.7	30.4	-3.04	2.70
$K_{px}$	24.9	33.9	-15.88	14.53
$C_{py}$	30.9	28.7	4.39	-3.04
$K_{sx}$	29.5	29.7	-0.34	0.34
$K_{sy}$	29.2	30	-1.35	1.35
$C_{sx}$	28.2	30.7	-4.73	3.72
$C_{sy}$	28.6	30.4	-3.38	2.70
$l_1, l_2$	30.4	28.9	2.70	-2.36
$\lambda$	35.1	26.1	18.58	-11.82

\* เปรียบเทียบกับความเร็ววิกฤตที่ไม่เป็นเชิงเส้น ณ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ในระบบ  
แควร์รถไฟ  $V_n = 29.6$  m/s

#### 4.6 บทสรุป

การศึกษากการสันสะเทือนแบบอันตั้งบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์ เพื่อศึกษาพฤติกรรมกรรมการเคลื่อนที่ของระบบแควร์รถไฟและความไวของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์กับความเร็ววิกฤตสามารถสรุปได้ดังนี้

1. เพื่อความปลอดภัยและหลีกเลี่ยงสภาวะสูญเสียเสถียรภาพที่นำไปสู่อุบัติเหตุการางแควร์รถไฟควรเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่น้อยกว่าความเร็ววิกฤตแบบไม่เป็นเชิงเส้น  $V < V_n$
2. ค่าพารามิเตอร์ของชุดล้อได้แก่ ค่าความเป็นกรวยของล้อ รัศมีของชุดล้อ และมวลของชุดล้อมีผลกระทบต่อ การเปลี่ยนแปลงค่าความเร็ววิกฤตแบบไม่เป็นเชิงเส้นอย่างมีนัยสำคัญตามลำดับ
3. ค่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับหลักมีผลกระทบต่อ การเปลี่ยนแปลงค่าความเร็ววิกฤตแบบไม่เป็นเชิงเส้นมากกว่าค่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับรอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

# การศึกษาผลกระทบยอร์แดมเปอร์ต่อการสิ้นสะท้อน แบบฮันติงในชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

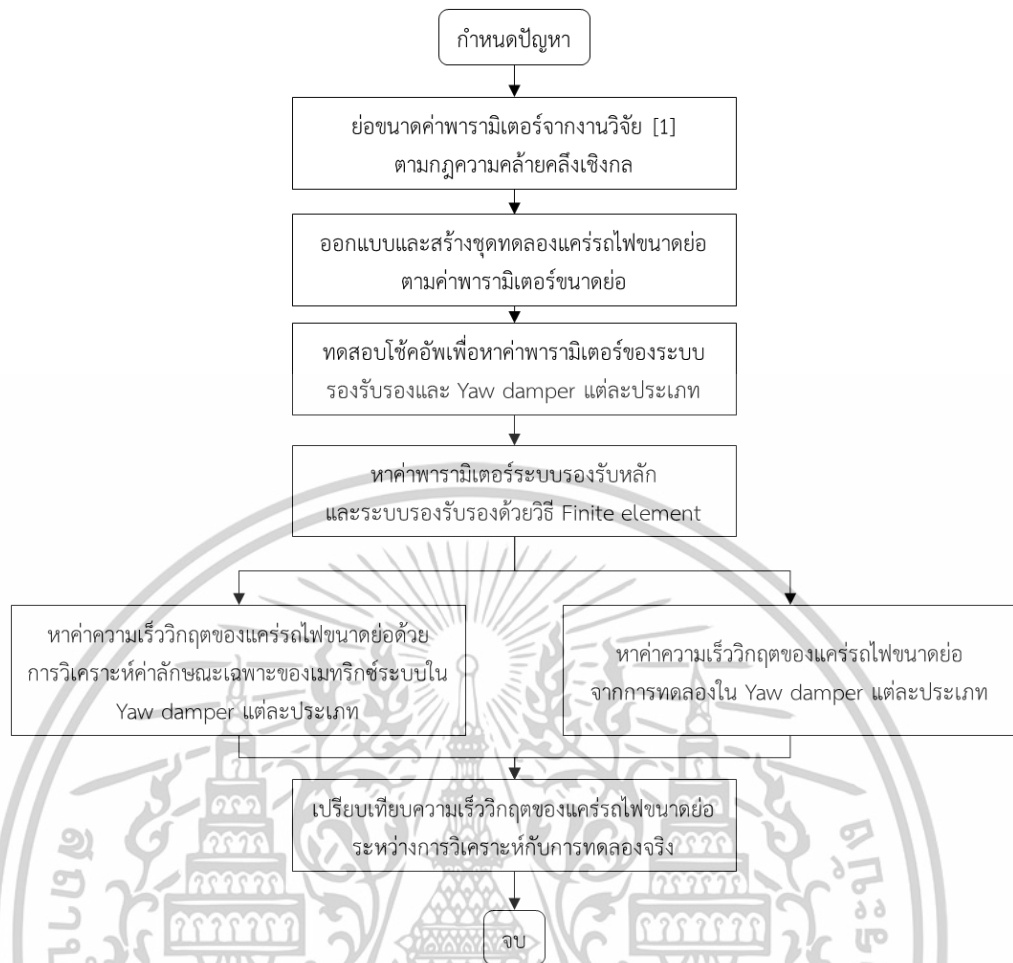
### 5.1 บทนำ

จากบทที่ 4 ผลการศึกษาการสิ้นสะท้อนแบบฮันติงในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พบว่า ค่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับหลักและค่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับรองมีผลกระทบต่อ การสิ้นสะท้อนแบบฮันติงซึ่งยอร์แดมเปอร์ก็เป็นส่วนหนึ่งของระบบรองรับรองของระบบแคร่รถไฟ อย่างไรก็ตามผลจากการศึกษาการสิ้นสะท้อนแบบฮันติงในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ควรยืนยัน ความถูกต้องของคำตอบโดยการทดลองในชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการศึกษาผลกระทบยอร์แดมเปอร์บนการสิ้นสะท้อนแบบฮันติงในชุด ทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ ซึ่งเนื้อหาในบทนี้เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยของ Sritrakul, T. et.al. [27] ที่ศึกษาผลกระทบยอร์แดมเปอร์บนการสิ้นสะท้อนแบบฮันติงในชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 เคลื่อนที่บนรางตรงโดยนำเสนอพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟขนาดย่อบนโดเมนเวลาและ ความถี่ในยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภท มากไปกว่านั้นยังเปรียบเทียบค่าความเร็ววิกฤตจากผลลัพธ์ จากการคำนวณในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และค่าความเร็ววิกฤตจากการทดลอง

การดำเนินการวิจัยถูกแสดงดังรูปที่ 5.1 โดยเริ่มจากการย่อขนาดค่าพารามิเตอร์แคร่รถไฟ ขนาดจริงจากงานวิจัยของ Bustos, A. et.al. [2] ตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกลเพื่อออกแบบและ สร้างชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ จากนั้นทดสอบใช้คอปบนชุดทดสอบอย่างง่ายเพื่อหา ค่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับรองและยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภท เมื่อได้ข้อมูลค่าพารามิเตอร์ของ ใช้คอปเรียบร้อยแล้วจึงนำไปคำนวณเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลักและระบบรองรับรองอื่น ๆ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หลังจากนั้นจะแบ่งการทดลองเป็น 2 ส่วน ดังนี้

1. การวิเคราะห์ความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟขนาดย่อบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยนำค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดของระบบแคร่รถไฟขนาดย่อแทนค่าในสมการการเคลื่อนที่ของ ระบบเพื่อหาค่าความเร็ววิกฤตด้วยการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ระบบที่ได้จาก การจัดรูปสมการการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเวกเตอร์
  2. การทดลองบนชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อในยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภท เพื่อหาค่าความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟขนาดย่อจากการทดลอง
- ซึ่งจะนำความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟขนาดย่อจากการทดลองทั้ง 2 แบบมาเปรียบเทียบกันเพื่อหา ความคาดเคลื่อนซึ่งกันและกัน



รูปที่ 5.1 แผนภาพขั้นตอนในการศึกษาผลกระทบยอร์แดมเปอร์กับการสั่นสะเทือนแบบอันติ่ง  
ในชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5.2 การย่อขนาดค่าพารามิเตอร์ตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกล

จากงานวิจัยของ Bustos, A. et.al. [2] ที่ศึกษาเสถียรภาพการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟความเร็วสูงบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยอ้างอิงค่าพารามิเตอร์จากแคร่รถไฟความเร็วสูงของประเทศสเปนแสดงในตารางที่ 5.1 ดังนี้

ตารางที่ 5.1 ค่าพารามิเตอร์ของแคร่รถไฟความเร็วสูงจากงานวิจัย [2]

พารามิเตอร์	คำอธิบาย	ค่าพารามิเตอร์
$W_A$	น้ำหนักกดเพลา	$1.5 \times 10^4$ N
$m_b$	มวลของโครงแคร่รถไฟ	1,610 kg
$m_w$	มวลของชุดล้อ	1,570 kg
$I_{wx}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนกึ่งของชุดล้อ	$693 \text{ kgm}^2$
$I_{wy}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนของชุดล้อ	$121 \text{ kgm}^2$
$I_{bz}$	โมเมนต์ความเฉื่อยการเฉของแคร่รถไฟ	$693 \text{ kgm}^2$
$r_0$	รัศมีของล้อแคร่รถไฟ	0.46 m
$a$	ความกว้างของรางรถไฟวัดจากกึ่งกลางของรางรถไฟ	0.7175 m
$K_{px}$	ค่าความแข็งของสปริงการเฉของระบบรองรับหลัก	$5.80 \times 10^7$ N/m
$K_{py}$	ค่าความแข็งของสปริงแนวต้านข้างของระบบรองรับหลัก	$1.60 \times 10^7$ N/m
$C_{py}$	ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงแนวต้านข้างของระบบรองรับหลัก	0 N s/m
$K_{sx}$	ค่าความแข็งของสปริงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง	$1 \times 10^5$ N/m
$C_{sx}$	ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟของระบบรองรับรอง	$1.3 \times 10^4$ N s/m
$K_{sy}$	ค่าความแข็งของสปริงแนวต้านข้างของระบบรองรับรอง	$1 \times 10^5$ N/m
$C_{sy}$	ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงแนวต้านข้างของระบบรองรับรอง	$3 \times 10^4$ N s/m
$b$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเฉของระบบรองรับหลัก	1.02 m
$b_1$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแกนตัวหน่วงของระบบรองรับหลัก	1.04 m
$b_2$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างสปริงการเฉของระบบรองรับรอง	1.34 m
$b_3$	ระยะห่างกึ่งกลางระหว่างแกนตัวหน่วงของระบบรองรับรอง	$4.2 \times 10^{-1}$ m
$l_1$	ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างสปริงของระบบรองรับรอง	1.50 m
$l_2$	ระยะห่างกึ่งกลางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟระหว่างตัวหน่วงแนวต้านข้างของระบบรองรับรอง	1.50 m
$K_r$	ค่าความแข็งของรางรถไฟ	$1.62 \times 10^7$ N/m
$\delta$	ระยะห่างระหว่างขอบบังใบล้อและขอบรางรถไฟ	0.009 m
$\lambda$	ค่าความเป็นกรวยของล้อ	0.025

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ก่อนการออกแบบและสร้างชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 โดยอ้างอิงจากค่าพารามิเตอร์ของงานวิจัย [2] จะต้องผ่านการย่อขนาดค่าพารามิเตอร์ตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกลจากตัวแปรย่อส่วนความยาวในสมการที่ 3.41

$$\Phi_L = \frac{L_0}{L_1} \quad (3.41)$$

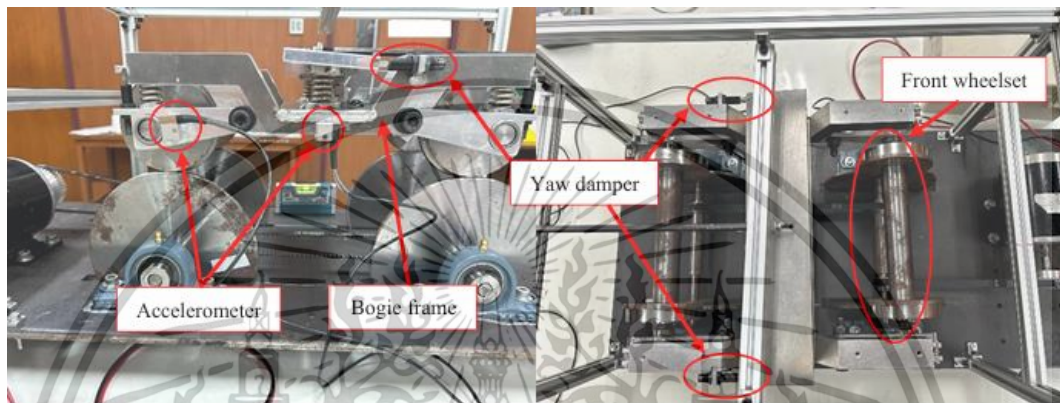
โดยที่  $L_0$  คือค่าพารามิเตอร์ความยาวขนาดจริง และ  $L_1$  คือค่าพารามิเตอร์ความยาวขนาดย่อ เมื่อแทนค่าสัดส่วนความยาวขนาดจริง 1 หน่วยต่อความยาวขนาดย่อ 5 หน่วย ลงในสมการที่ 3.41 จะได้ตัวแปรย่อส่วนความยาวที่ใช้ในการออกแบบและสร้างชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 ดังนี้

$$\Phi_L = \frac{L_0}{L_1} = \frac{5}{1} = 5$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 5.3 การออกแบบชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

ในการออกแบบและสร้างชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 ดังรูปที่ 5.2 ได้อ้างอิงค่าพารามิเตอร์จากแคร่รถไฟความเร็วสูงประเทศสเปนจากงานวิจัย [2] โดยนำมาย่อขนาดตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกล อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้ต้องการแสดงให้เห็นถึงผลของสัมประสิทธิ์ความหน่วงของยอร์ว้แดมเปอร์ต่อความเร็ววิกฤตเท่านั้นจึงไม่จำเป็นต้องมีความคล้ายคลึง 100% ดังนั้นจึงเลือกวัสดุและอุปกรณ์ที่มีความใกล้เคียงกับค่าพารามิเตอร์ย่อขนาดตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกลซึ่งแสดงในตารางที่ 5.2



รูปที่ 5.2 แสดงชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5

ตารางที่ 5.2 ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

พารามิเตอร์	ตัวแปรย่อยส่วนพารามิเตอร์ขนาดย่อ 1 ต่อ 5 [10]	ค่าพารามิเตอร์ของชุดทดลองที่ใช้	% ความแตกต่างเทียบกับกฎความคล้ายคลึงเชิงกล
$W_A$	62.50	46 N	81%
$m_b$	62.50	2.92 kg	89%
$m_w$	62.50	2.88 kg	89%
$I_{wx}$	1562.50	$2.52 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$	94%
$I_{wy}$	1562.50	$2.50 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$	97%
$I_{bz}$	1562.50	$0.085 \text{ kgm}^2$	81%
$r_0$	5.00	$4.61 \times 10^{-2} \text{ m}$	50%
$a$	5.00	$9.1 \times 10^{-2} \text{ m}$	37%
$K_{px}$	12.50	$4.53 \times 10^4 \text{ N/m}$	99%
$K_{py}$	12.50	$1.08 \times 10^7 \text{ N/m}$	744%
$C_{py}$	27.95	$3.15 \times 10^2 \text{ N s/m}$	-
$K_{sy}$	12.50	$4.61 \times 10^3 \text{ N/m}$	42%
$C_{sy}$	27.95	$36.2 \text{ N s/m}$	97%
$b$	5.00	$1.55 \times 10^{-1} \text{ m}$	24%

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พารามิเตอร์	ตัวแปรย่อยส่วนพารามิเตอร์ขนาดย่อ 1 ต่อ 5 [10]	ค่าพารามิเตอร์ของชุดทดลองที่ใช้	% ความแตกต่างเทียบกับกฎความคล้ายคลึงเชิงกล
$b_1$	5.00	$1.37 \times 10^{-1}$ m	34%
$b_2$	5.00	$1.63 \times 10^{-1}$ m	39%
$b_3$	5.00	$1.63 \times 10^{-1}$ m	93%
$l_1$	5.00	$1.50 \times 10^{-1}$ m	50%
$l_2$	5.00	$1.50 \times 10^{-1}$ m	50%
$f_{11}$	62.50	$8.10 \times 10^3$ N	-
$f_{22}$	1562.50	$1.2$ Nm <sup>2</sup>	-
$f_{12}$	312.50	1.40 Nm	-
$f_{33}$	62.50	$8.10 \times 10^3$ N	-
$K_r$	1.00	$2.98 \times 10^6$ N/m	82%
$\delta$	5.00	$7.50 \times 10^{-3}$ m	317%
$\lambda$	1.00	0.05	100%

โดยที่

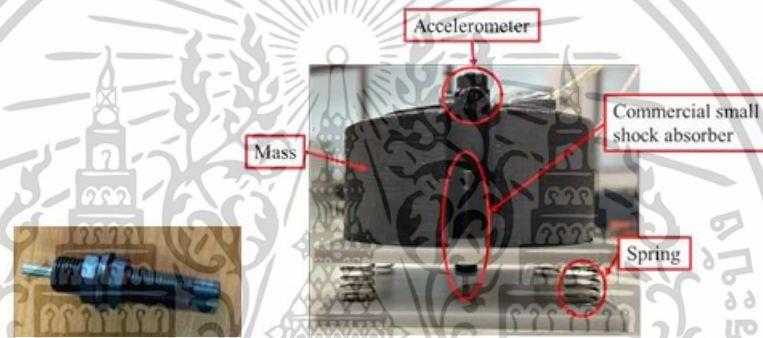
พารามิเตอร์  $f_{11}, f_{22}, f_{12}, f_{33}$  คือค่าสัมประสิทธิ์แรงคืบทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ แรงคืบหมุน แรงคืบหมุนทิศทางตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ และแรงคืบทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ ตามลำดับซึ่งอ้างอิงค่าพารามิเตอร์จากบทที่ 4 ในงานวิจัย [26]

ค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลักและระบบรองรับรองของชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อในตารางที่ 5.2 ได้แก่  $K_{px}, K_{py}, C_{py}, K_{sy}$  และ  $C_{sy}$  คำนวณจากค่าความแข็งของโช้คอัพ (Shock absorber) ร่วมกับการเสียรูป (Deformation) ของจุดเชื่อมต่อบนโบกี้ซึ่งหาได้จากการจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม Abaqus ซึ่งจะอธิบายในหัวข้อที่ 5.5

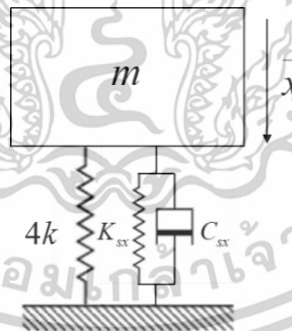
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 5.4 การทดสอบใช้ค้ำพบนชุดทดสอบอย่างง่ายเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับและยอร์แดมเปอร์แต่ละค่า

ในการศึกษาผลกระทบของยอร์แดมเปอร์บนการสั่นสะเทือนแบบฮันติงในชุดทดลองแควร์รถไฟ ขนาดย่อ ได้กำหนดประเภทของยอร์แดมเปอร์ เป็น 3 รูปแบบตามค่าความแข็งของสปริงตามแนว การเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟของระบบรองรับ  $K_{xx}$  และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงตามแนวการ เคลื่อนที่ของแควร์รถไฟของระบบรองรับ  $C_{xx}$  ซึ่งค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวหาได้จากการบันทึก การตอบสนอง (Response) ของชุดทดสอบใช้ค้ำพอย่างง่ายผ่านเซนเซอร์วัดความเร่งดังรูปที่ 5.3 และกระตุ้นอิมพัลส์ (Impulse) บนชุดทดลองเพื่อจำลองการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระ (A single-degree-of-freedom free vibration response) ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภาพระบบการ สั่นสะเทือน 1 องศาอิสระ (Schematic of a single-degree-of-freedom vibration system) ได้ ดังรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.3 แสดงใช้ค้ำพและชุดทดสอบอย่างง่ายเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของใช้ค้ำพ



รูปที่ 5.4 แสดงแผนภาพระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบใช้ค้ำพอย่างง่าย

โดยที่

$m$  คือ มวลที่ติดตั้งบนชุดทดสอบเท่ากับ 20 นิวตัน หรือ 2.04 กิโลกรัม

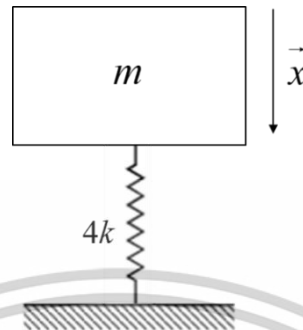
$k$  คือ ค่าความแข็งของสปริงของชุดทดสอบ ซึ่งยังไม่ทราบค่า

และการหาค่าตัวแปรของชุดทดสอบใช้ค้ำพอย่างง่ายจะถูกอธิบายในหัวข้อย่อยถัดไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 5.4.1 การหาค่าความแข็งของสปริงของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่าย

ระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่าย [28] โดยที่ไม่มีการติดตั้งใช้ค้ำสามารถเขียนเป็นแผนภาพระบบการสั่นสะเทือนได้ดังรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 แสดงแผนภาพระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบที่ไม่ติดตั้งใช้ค้ำ

จากสมการการเคลื่อนที่ของระบบมวล-สปริงอย่างง่าย (A simple spring-mass system)

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5.1)$$

หรือ

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (5.2)$$

โดยที่

$\omega_n$  คือ ความถี่ธรรมชาติของระบบมวล-สปริงอย่างง่าย ซึ่ง  $\omega_n = \sqrt{k/m}$

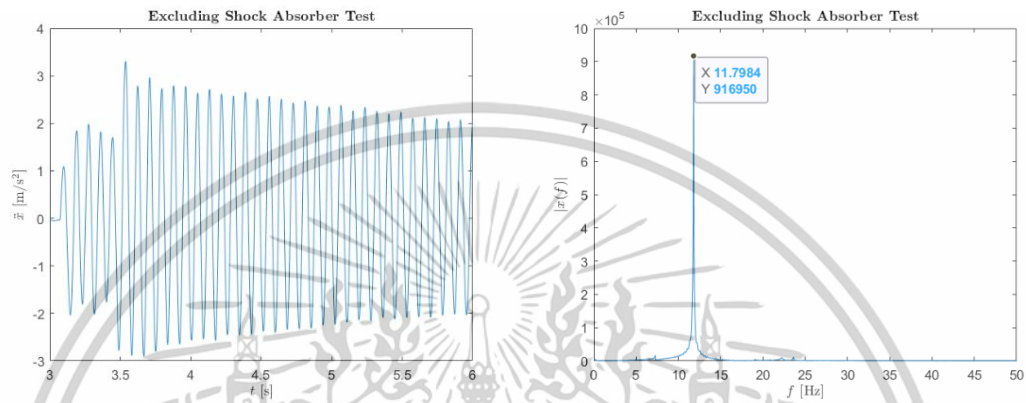
ดังนั้นสมการของระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบอย่างง่ายที่ไม่มีการติดตั้งใช้ค้ำดังรูปที่ 5.5 คือ

$$\ddot{x} + \frac{4k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (5.3)$$

ซึ่งความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ของชุดทดสอบอย่างง่ายที่ไม่มีการติดตั้งใช้ค้ำมีค่าเท่ากับ  $\omega_n = \sqrt{4k/m}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความถี่ธรรมชาติของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่ายโดยที่ไม่มีการติดตั้งใช้ค้ำสามารถหาได้จากการบันทึกการตอบสนองของชุดทดสอบผ่านเซนเซอร์วัดความเร่ง ดังรูปที่ 5.6 แล้วนำค่าการตอบสนองไปคำนวณด้วยวิธีการแปลงฟูเรียร์อย่างรวดเร็ว (Fast Fourier Transformation, FFT) ซึ่งจะได้สเปกตรัมความถี่ (Frequency spectrum) ของการตอบสนองดังรูปที่ 5.6 เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติของชุดทดสอบที่ไม่มีการติดตั้งใช้ค้ำ



รูปที่ 5.6 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ไม่ติดตั้งใช้ค้ำ

จากรูปที่ 5.6 แสดงให้เห็นถึงการสั่นสะเทือนแบบให้อิมพัล (Impulse) ของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่ายที่ไม่มีการติดตั้งใช้ค้ำ จะมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนเหมือนกับการสั่นสะเทือนแบบธรรมชาติ ซึ่งสามารถวัดความถี่ธรรมชาติจากการตอบสนองประเภทนี้ได้ มากไปกว่านั้นสเปกตรัมความถี่ยังแสดงช่วงความถี่ธรรมชาติ (Phase natural frequency) ของชุดทดลองอย่างง่าย  $f_n$  ณ ช่วงความถี่ 11.8 เฮิร์ตซ์ โดยที่

$$f_n = \omega_n / 2\pi \quad (5.4)$$

ดังนั้น

$$\omega_n = 11.8 \times 2\pi = 74.14 \text{ rad/s}$$

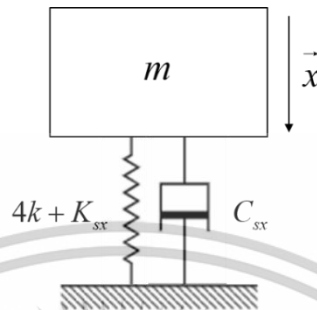
จะได้ค่าความแข็งของสปริงของชุดทดลองใช้ค้ำอย่างง่ายเท่ากับ

$$k = \frac{m\omega_n^2}{4} = 2.04(74.14)^2 / 4 = 2,803 \text{ N/m}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 5.4.2 การหาค่าความแข็งของสปริงและสัมประสิทธิ์ความหน่วงของโช้คอัพแต่ละประเภท บนชุดทดสอบอย่างง่าย

ระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบโช้คอัพอย่างง่ายดังรูปที่ 5.4 สามารถเขียนเป็นแผนภาพระบบการสั่นสะเทือนใหม่ได้ดังรูปที่ 5.7 เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ



รูปที่ 5.7 แสดงแผนภาพระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบโช้คอัพอย่างง่าย ที่เขียนใหม่จากรูปที่ 5.4

จากสมการการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระที่มีตัวหน่วง (A single-degree-of-freedom system with damper)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5.5)$$

หรือ

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (5.6)$$

โดยที่

$c$  คือ สัมประสิทธิ์ความหน่วง (Damping coefficient)

$\zeta$  คือ อัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio)

หากระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระที่มีตัวหน่วงมีการเคลื่อนที่แบบ Underdamped (Underdamped motion) ผลเฉลยของสมการที่ 5.6 คือ

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (5.7)$$

โดยที่

$A$  คือ แอมพลิจูดการตอบสนองของระบบ

$\omega_d$  คือ ความถี่ธรรมชาติตัวหน่วง (Damped natural frequency) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นสมการของระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่ายดังรูปที่ 5.7 คือ

$$m\ddot{x} + C_{sx}\dot{x} + (4k + K_{sx})x = 0 \quad (5.7)$$

หรือ

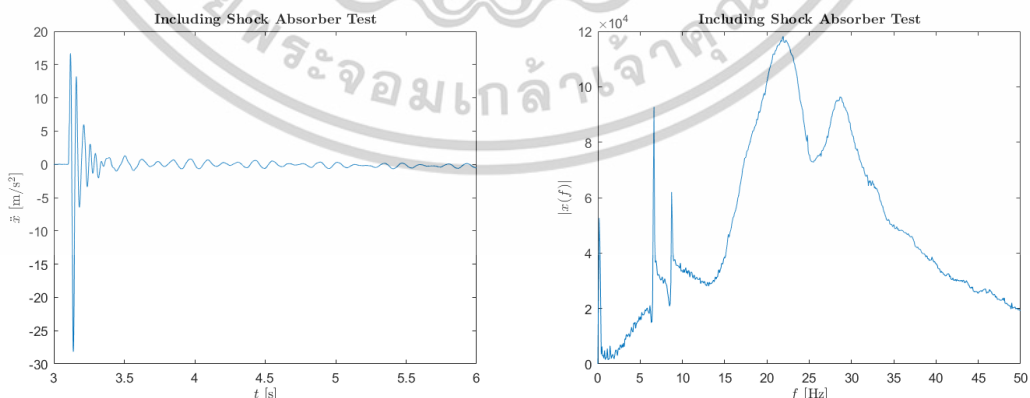
$$\ddot{x} + \frac{C_{sx}}{m}\dot{x} + \frac{4k + K_{sx}}{m}x = \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (5.8)$$

โดยที่

$$C_{sx} = 2m\zeta\omega_n; \quad K_{sx} = \omega_n^2m - 4k; \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (5.9)$$

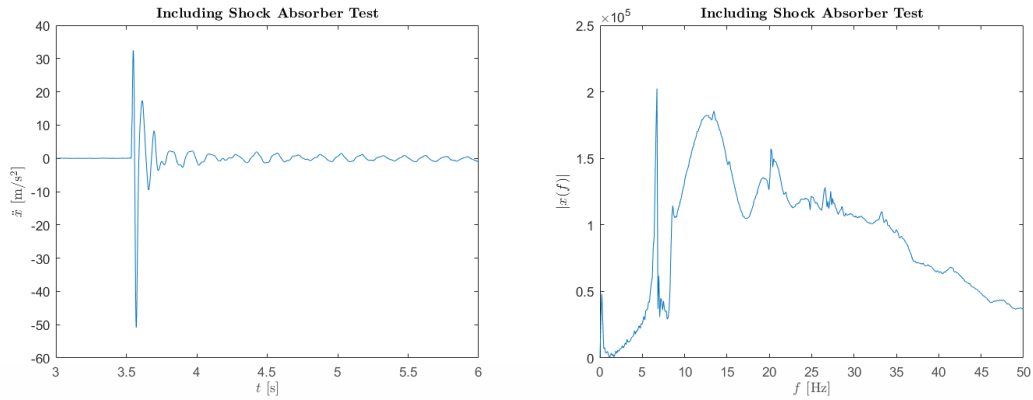
ค่าตัวแปรในสมการที่ 5.9 สามารถหาได้โดยใช้วิธีการหาค่าความแข็งของสปริงของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่ายบนชุดทดลองที่ไม่ติดตั้งใช้ค้ำ ผลการทดสอบใช้ค้ำแสดงดังรูปที่ 5.8 ถึง 5.10 จะเห็นได้ว่าการตอบสนองของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่ายมีลักษณะคล้ายคลึงกับการตอบสนองของระบบการสั่นสะเทือน 1 องศาอิสระที่มีตัวหน่วงดังรูปที่ 5.11 อย่างไรก็ตามสเปกตรัมความถี่ของการตอบสนองของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่ายที่ติดตั้งใช้ค้ำแต่ละประเภทมีรูปแบบและจุดสูงสุดของแอมพลิจูดที่แตกต่างกัน ซึ่งหมายความว่าช่วงความถี่ธรรมชาติความหน่วง (Phase damping natural frequency) ของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่าย  $f_d$  มีค่าแตกต่างกันขึ้นอยู่กับใช้ค้ำเช่นกัน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องจำแนกประเภทของใช้ค้ำ ดังนี้

1. ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ ซึ่งมีค่า  $K_{sx}$  และ  $C_{sx}$  ต่ำสุด
2. ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง ซึ่งมีค่า  $K_{sx}$  และ  $C_{sx}$  สูงสุด
3. ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง ซึ่งมีค่า  $K_{sx}$  และ  $C_{sx}$  อยู่ระหว่างกลางยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำและค่าสัมประสิทธิ์สูง

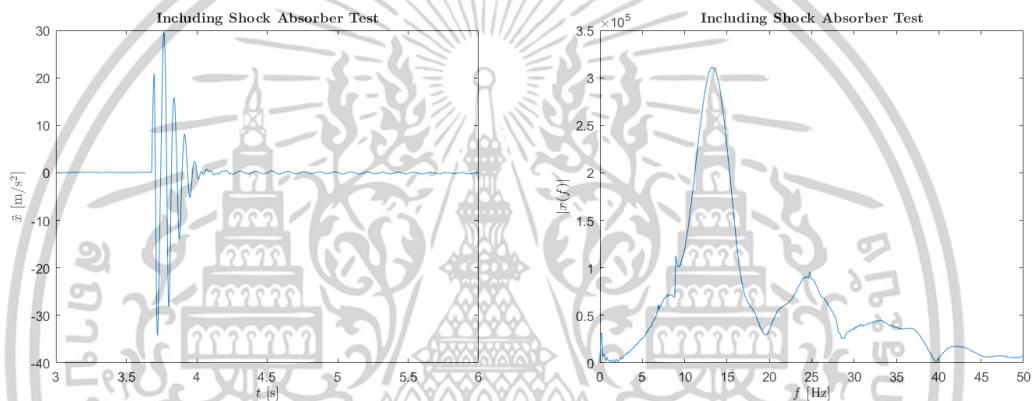


รูปที่ 5.8 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ

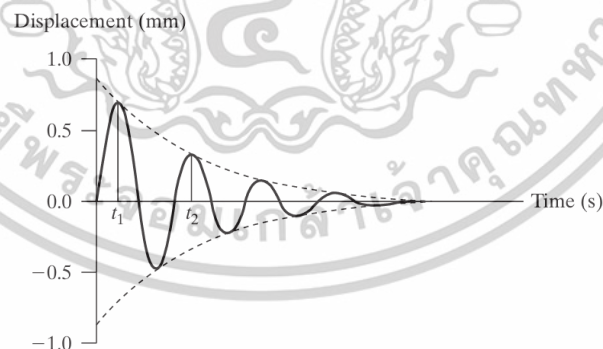
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.9 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ติดตั้ง ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง



รูปที่ 5.10 แสดงการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายที่ติดตั้ง ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง



รูปที่ 5.11 แสดงการตอบสนองของระบบการสั่นสะเทือน 1 อิสระที่มีตัวหน่วง [25]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่า  $K_{sx}$  และ  $C_{sx}$  ของโช้คอัพแต่ละประเภทสามารถหาได้จากการแทนค่าในสมการที่ 5.9 ซึ่งตัวแปรที่สามารถหาได้จากการตอบสนองและสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในชุดทดสอบอย่างง่ายดังรูปที่ 5.8 ถึง 5.10 คือ ช่วงความถี่ธรรมชาติความหน่วง (Phase damping natural frequency) ของชุดทดสอบโช้คอัพอย่างง่าย  $f_d$

นำค่า  $f_d$  แทนที่  $f_n$  ในสมการที่ 5.4 จะได้

$$f_d = \omega_d / 2\pi \quad (5.10)$$

ดังนั้น

$$\omega_d = 2\pi f_d \quad (5.11)$$

จากสมการที่ 5.9

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

ซึ่งยังไม่ทราบค่าอัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio)  $\zeta$  เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ  $\omega_n$  และนำไปหาค่า  $K_{sx}$  และ  $C_{sx}$  ของโช้คอัพ

การลดลงอย่างลอการิทึม (Logarithmic decrement) เป็นวิธีการหาค่าอัตราส่วนความหน่วงจากการตอบสนองของระบบการสั่นสะเทือนโดยมีนิยามดังนี้

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x(t)}{x(t+nT)} \right) \quad (5.12)$$

โดยที่

$\delta$  คือ Logarithmic decrement

$n$  คือ จำนวนจุดสูงสุดของการตอบสนองในแต่ละคาบ

$x(t)$  คือ แอมพลิจูดสูงสุดของการตอบสนอง ณ คาบแรก

$T$  คือ คาบของการสั่นสะเทือน

$x(t+nT)$  คือ แอมพลิจูดสูงสุดของการตอบสนอง ณ คาบสุดท้าย

แทนค่าผลเฉลยของการตอบสนองของระบบ  $x(t)$  จะได้

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n (t+nT)} \sin(\omega_d t + \omega_d nT + \phi)} \right)$$

เนื่องจาก  $\omega_d nT = 2\pi$  แทนค่าในสมการข้างต้นเพื่อลดรูปจะได้

$$\delta = \frac{1}{n} \ln e^{\zeta\omega_n nT} = \zeta\omega_n T$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งคาบตัวหน่วง (Damped period) หรือ  $T = 2\pi / \omega_d$  แทนค่าในสมการข้างต้นจะได้

$$\delta = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ดังนั้นค่าอัตราส่วนความหน่วง  $\zeta$  ที่อยู่ในรูปการลดลงอย่างลอการิทึมจะได้

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (5.13)$$

ในกรณีการหาอัตราส่วนความหน่วง  $\zeta$  ของใช้ค้ำแต่ละประเภทก็สามารถหาได้จากวิธี การลดลงอย่างลอการิทึมของการตอบสนองของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่ายที่ติดตั้งใช้ค้ำแต่ละประเภทได้เช่นกันโดยนำสมการที่ 5.10 และ 5.13 แทนค่าในสมการที่ 5.9 เพื่อหาค่า  $K_{sx}$  และ  $C_{sx}$  ของใช้ค้ำที่เขียนในรูปของค่าการลดลงอย่างลอการิทึม  $\delta$  จากการตอบสนองของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่าย และค่าช่วงความถี่ธรรมชาติความหน่วงของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่าย  $f_d$  จากสเปกตรัมความถี่ของชุดทดสอบใช้ค้ำอย่างง่าย ดังนี้

$$C_{sx} = 2mf_d \delta \quad K_{sx} = (4\pi^2 - \delta^2)f_d^2 m - 4k \quad (5.14)$$

ซึ่งค่า  $K_{sx}$ ,  $C_{sx}$  และ  $\zeta$  ของใช้ค้ำแต่ละประเภทได้ถูกแสดงดังตารางที่ 5.3

ตารางที่ 5.3 ค่าพารามิเตอร์ของใช้ค้ำเพื่อจำลองระบบรองรับรองรับตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟหรือยอร์แดมเปอร์จากการทดสอบ

ประเภทใช้ค้ำ	$\zeta$	$K_{sx}$	$C_{sx}$
ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ	0.089	2,300 N/m	10.3 N s/m
ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง	0.156	4,615 N/m	25.7 N s/m
ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง	0.21	34,425 N/m	94.2 N s/m

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

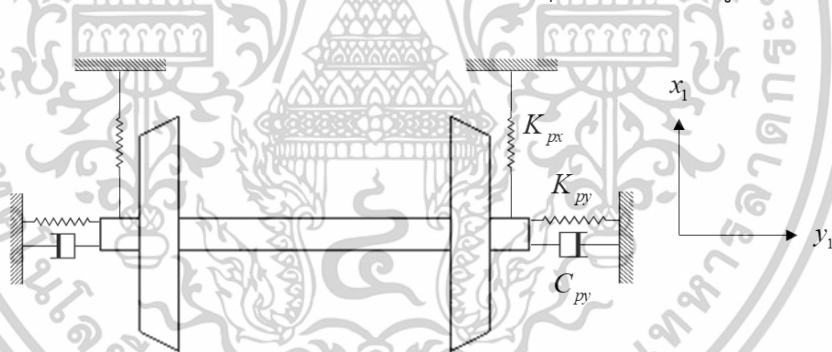
## 5.5 หาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลักและระบบรองรับรอง ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

ค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลักและระบบรองรับรองของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อในตารางที่ 5.2 ได้แก่  $K_{px}$ ,  $K_{py}$ ,  $C_{py}$ ,  $K_{sy}$  และ  $C_{sy}$  คำนวณจากค่าความแข็งของโช้คอัพพร้อมกับการเสียรูป (Deformation) ของจุดเชื่อมต่อบนชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ ซึ่งหาได้ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ (Finite element) บนโปรแกรม Abaqus ซึ่งเป็นหนึ่งในโปรแกรมได้รับการยอมรับในวงการ Simulation เพื่อหาการกระจัดของการเสียรูปของจุดเชื่อมต่อบนชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อและนำมาคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวโดยจำแนกเป็น 2 ส่วนดังนี้

1. การหาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลัก  $K_{px}$ ,  $K_{py}$  และ  $C_{py}$
2. การหาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับรอง  $K_{sy}$  และ  $C_{sy}$

### 5.5.1 การหาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลัก $K_{px}$ , $K_{py}$ และ $C_{py}$

ชุดล้อรถไฟถูกยึดด้วยสวิงอาร์ม (Swing arm) ทั้งสองด้าน โดยสวิงอาร์มประกอบด้วย 2 ส่วนหลักได้แก่ ลูกปืน (Ball Bearing) และโครงของสวิงอาร์มที่ผลิตจากอะลูมิเนียม เมื่อชุดล้อรถไฟเคลื่อนที่สวิงอาร์มที่ยึดชุดล้อรถไฟทั้งสองด้านจะทำหน้าที่เสมือนเป็นระบบรองรับหลักของระบบชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อในทิศทางการเคลื่อนที่และตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟขนาดย่อ ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภาพการเคลื่อนที่ของชุดล้อรถไฟได้ดังรูปที่ 5.12



รูปที่ 5.12 แสดงแผนภาพชุดล้อรถไฟด้านหลังของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

จากรูปที่ 5.12 เขียนสมการการเคลื่อนที่ในทิศทางการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟขนาดย่อได้ดังนี้

$$m_w \ddot{x}_1 + 2K_{px} x_1 = 0 \quad (5.16)$$

โดยที่

$x_1$  คือ การกระจัดของชุดล้อด้านหลังในทิศทางการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\ddot{x}_1$  คือ ความเร่งของชุดล้อด้านหลังในทิศทางการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเขียนสมการการเคลื่อนที่ในทิศทางตั้งฉากแนวการเคลื่อนที่แควร์รถไฟขนาดย่อได้ดังนี้

$$m_w \ddot{y}_1 + 2C_{py} \dot{y}_1 + 2K_{py} y_1 = 0 \quad (5.16)$$

ซึ่งค่า  $K_{px}$ ,  $K_{py}$  และ  $C_{py}$  เปรียบเสมือนค่าความแข็งของสปริงและค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงของสวิงอาร์มในทิศทางการเคลื่อนที่ต่าง ๆ ซึ่งค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถหาได้จากการกระจัดของการเสียรูปของสวิงอาร์มและนำไปหารกับแรงกระทำบนสวิงอาร์มในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ  $\bar{x}_1$  และในทิศทางตั้งฉากแนวการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ  $\bar{y}_1$  ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$K_{px} = F_{x1} / \delta_{x1} \quad K_{py} = F_{y1} / \delta_{y1} \quad C_{py} = 2\zeta_{Al} \sqrt{K_{py} m_w / 2} \quad (5.17)$$

โดยที่

$F_{x1}$  คือ แรงกระทำบนสวิงอาร์มในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ  $\bar{x}_1$

$F_{y1}$  คือ แรงกระทำบนสวิงอาร์มในทิศทางตั้งฉากแนวการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ  $\bar{y}_1$

$\delta_{x1}$  คือ การกระจัดของการเสียรูปของสวิงอาร์มในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ

$\delta_{y1}$  คือ การกระจัดของการเสียรูปของสวิงอาร์มในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ

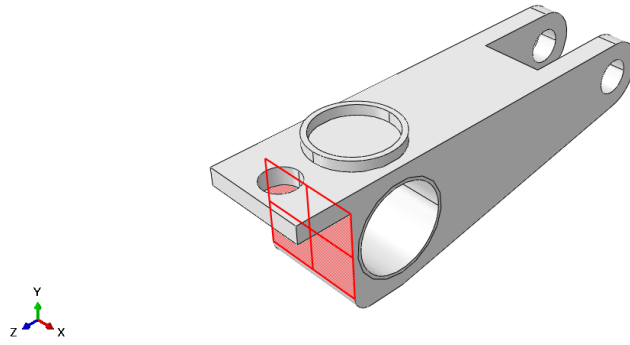
$\zeta_{Al}$  คือ ค่าอัตราส่วนความหน่วงของสวิงอาร์มจากคุณสมบัติวัสดุมีค่าเท่ากับ 0.04 [26]

เพื่อหาการกระจัดของการเสียรูปของสวิงอาร์มของชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อและนำมาคำนวณในสมการที่ 5.17 ดังนั้นระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงเหมาะสมในการหาค่าการกระจัดของการเสียรูป โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

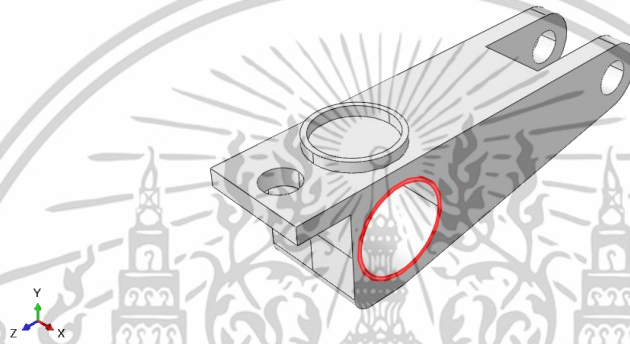
1. การนำเข้าสวิงอาร์มกำหนดเป็นแบบจำลอง โดยจะกำหนดให้ลูกปืนและโครงของสวิงอาร์มเป็นชิ้นเดียวกัน และกำหนดพื้นที่เพื่อจำลองพื้นที่รับแรงของสวิงอาร์มดังนี้

1. พื้นที่รับแรงในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ ดังรูปที่ 5.13
2. พื้นที่รับแรงในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแควร์รถไฟ ดังรูปที่ 5.14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.13 แสดงการกำหนดพื้นที่รับแรงในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟ



รูปที่ 5.14 แสดงการกำหนดพื้นที่รับแรงในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟ

2. กำหนดคุณสมบัติวัสดุของสวิงอาร์มที่ผลิตจากอะลูมิเนียม ดังตารางที่ 5.4

ตารางที่ 5.4 คุณสมบัติวัสดุของอะลูมิเนียม [29]

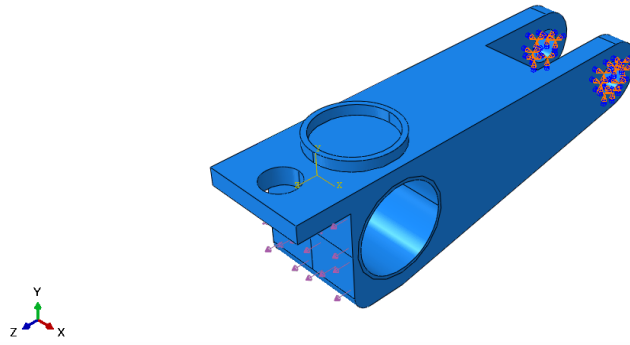
รายละเอียด	ค่าพารามิเตอร์
ความหนาแน่น (Density)	2,680 kg/m <sup>3</sup>
โมดูลัสความยืดหยุ่น (Elastic modulus)	70 GPa
อัตราส่วน Poisson (Poisson's ratio)	0.33

3. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลอง โดยกำหนดรูที่ยึดระหว่างโครงแครร์รถไฟขนาดย่อ กับสวิงอาร์มให้อยู่กับที่ในทุกทิศทางและกำหนดแรงกระทำบนพื้นที่รับแรงบนสวิงอาร์ม ดังนี้

1. แรงดึง (Tension) บนพื้นที่รับแรงบนสวิงอาร์มดังรูปที่ 5.15
2. แรงกระทำบนพื้นที่รับแรงบนสวิงอาร์มดังรูปที่ 5.16

โดยที่ แรงดึงคือแรงกระทำบนสวิงอาร์มในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟ  $F_{x1}$  และแรงกระทำบนพื้นที่คือแรงกระทำบนสวิงอาร์มในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟ  $F_{y1}$  ซึ่งแรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์ของสถาบันวิจัยและพัฒนาเทคโนโลยีการศึกษานานาชาติ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

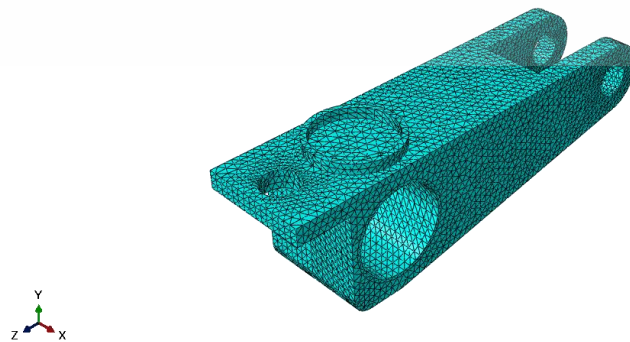


รูปที่ 5.15 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองโดยกำหนดแรงดึง (Tension) บนพื้นที่รับแรงบนสวิงอาร์ม โดยที่  $u_x = u_y = u_z = 0$



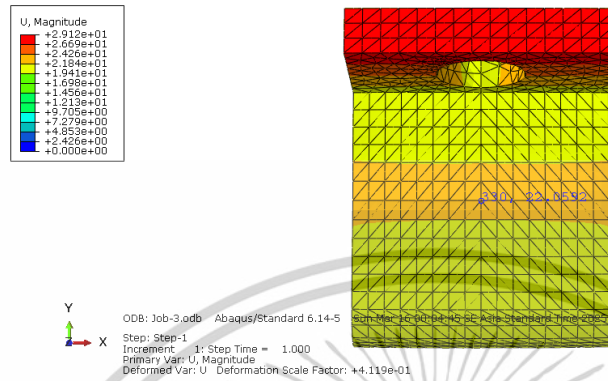
รูปที่ 5.16 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองโดยกำหนดแรงกระทำบนพื้นที่รับแรงบนสวิงอาร์ม

4. กำหนดเมช (Mesh) ของแบบจำลอง เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ในแบบจำลองสวิงอาร์มที่มีรูปทรงที่ซับซ้อน จึงเลือกเอเลเมนต์ แบบ Tetrahedon ประเภท C3D10: A 10-node quadratic tetrahedron ดังรูปที่ 5.17 ที่มีจำนวน เอเลเมนต์ที่สมบูรณ์เท่ากับ 60,722 เอเลเมนต์ ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่น่าเชื่อถือและใช้เวลาที่เหมาะสมในการวิเคราะห์

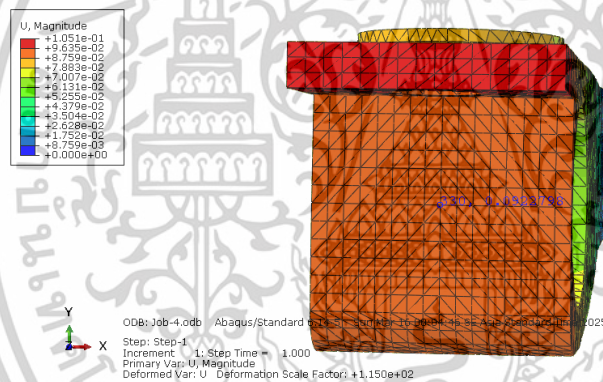


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับรูปที่ 5.17 แสดงการกำหนดเมชของแบบจำลอง  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. ทหาการกระจัดของการเสียรูป  $\delta_{x1}$  และ  $\delta_{y1}$  บน สวิงอาร์ม ดังรูปที่จากรูปที่ 5.18 และ 5.19 ณ จุดกึ่งกลางของพื้นที่รับแรงในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟในรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.18 แสดงการกระจัดของการเสียรูปของสวิงอาร์มในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่



รูปที่ 5.19 แสดงการกระจัดของการเสียรูปของ สวิงอาร์ม ในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่

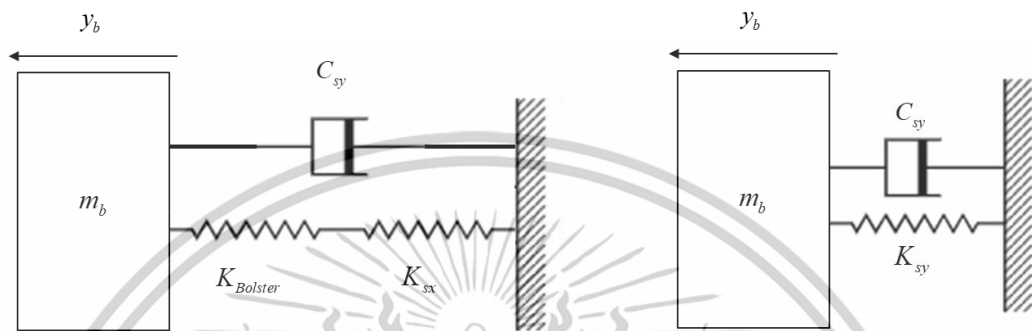
ซึ่งจะได้การกระจัดของการเสียรูป  $\delta_{x1} = 22.06 \text{ mm}$  และ  $\delta_{y1} = 0.0923 \text{ mm}$  ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลัก  $K_{px}$ ,  $K_{py}$  และ  $C_{py}$  สามารถหาได้โดยแทนค่าการกระจัดของการเสียรูป แรงดึงและแรงกระทำบนพื้นที่รับแรงในสมการที่ 5.17 จะได้

$$K_{px} = 4.53 \times 10^4 \text{ N/m} \quad K_{py} = 1.08 \times 10^7 \text{ N/m} \quad C_{py} = 315 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 5.5.2 การหาค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับรอง $K_{sy}$ และ $C_{sy}$

โครงแคร่รถไฟขนาดย่อเชื่อมต่อกับตัวรองรับ (Boster) ด้วยโช้คอัพโดยเป็นประเภทเดียวกับ ยอร์วแคมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง เมื่อแคร่รถไฟขนาดย่อเคลื่อนที่ ตัวรองรับและโช้คอัพจะทำหน้าที่เสมือนเป็นระบบรองรับรองของระบบชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภาพจำลองการเคลื่อนที่ของโครงแคร่รถไฟได้ดังรูปที่ 5.20



รูปที่ 5.20 แสดงแผนภาพจำลองของโครงแคร่รถไฟของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

จากรูปที่ 5.20 เขียนสมการการเคลื่อนที่ของโครงแคร่รถไฟในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟขนาดย่อได้ดังนี้

$$m_b \ddot{y}_b + C_{sy} \dot{y}_b + K_{sy} y_b = 0 \quad (5.18)$$

จากหัวข้อ 5.5.1 ที่ผ่านมา ค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับหลักหาได้จากการกระจัดของการเสีรูปของสวิงอาร์มหารกับแรงกระทำบนสวิงอาร์ม ในทำนองเดียวกันค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับรอง  $K_{sy}$  ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าความแข็งของสปริงเทียบเท่า (Equivalent spring stiffness) ระหว่างค่าความแข็งของสปริงของตัวรองรับ  $K_{Bolster}$  และค่าความแข็งของสปริงของโช้คอัพ  $K_{sx}$  และค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับรอง  $C_{sy}$  ก็สามารถหาได้ด้วยวิธีเดียวกันและเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$K_{sy} = \frac{K_{bolster} K_{sy}}{K_{bolster} + K_{sy}}; \quad K_{bolster} = F_{yb} / \delta_{yb} \quad (5.20)$$

$$C_{sy} = 2\zeta_{Med} \sqrt{K_{sy} m_b} \quad (5.21)$$

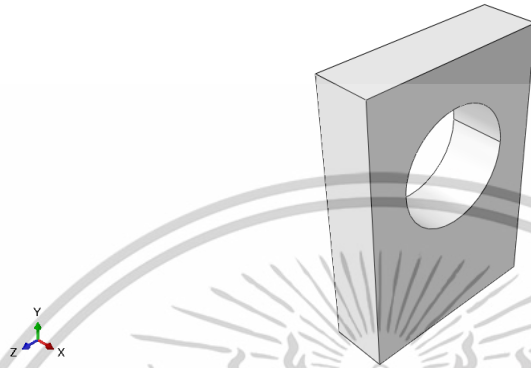
โดยที่

$F_{yb}$  คือ แรงกระทำบนตัวรองรับในทิศทางตั้งฉากแนวการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\delta_{yb}$  คือ การกระจัดของการเสีรูปของตัวรองรับในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่ของแคร่รถไฟ

$\zeta_{Med}$  คือ อัตราส่วนความหน่วงของโช้คอัพประเภทยอร์วแคมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาค่าการกระจัดของการเสียรูปของ ตัวรองรับ ของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อใช้ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีขั้นตอนคล้ายกับหัวข้อ 5.5.1 ที่ผ่านมา อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ การเสียรูปของ ตัวรองรับ วิเคราะห์เฉพาะส่วนที่ยึดติดกับโช้คอัพดังรูปที่ 5.21 เนื่องจากเป็นส่วนที่มี นัยสำคัญที่รับแรงจากการสั่นเสือนบนระบบรองรับรอง และกำหนดคุณสมบัติวัสดุดังตารางที่ 5.4 เนื่องจากวัสดุของ ตัวรองรับ กับ สวิงอาร์ม เหมือนกัน



รูปที่ 5.21 แสดงแบบจำลองเฉพาะส่วนของตัวรองรับที่ยึดติดกับโช้คอัพ

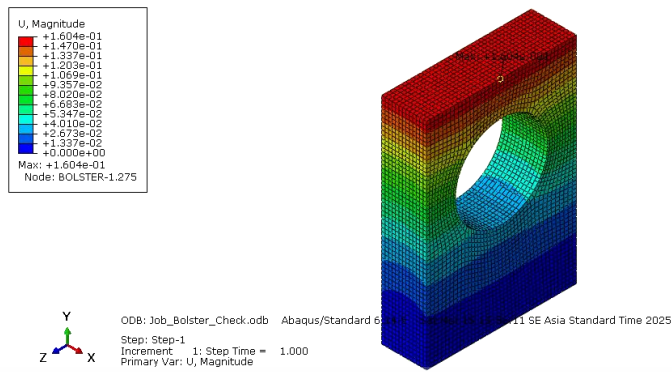
โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองแสดงดังรูปที่ 5.22 พื้นที่ใต้แบบจำลองกำหนดให้อยู่ กับที่ในทุกทิศทางและกำหนดแรงกระทำบนพื้นที่ด้านข้าง ตัวรองรับ  $F_{y,b} = 1,000 \text{ N}$



รูปที่ 5.22 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบจำลองเฉพาะส่วนของตัวรองรับ โดยที่  $u_x = u_y = u_z = 0$

และในการวิเคราะห์เพื่อหาการกระจัดของการเสียรูป  $\delta_{y,b}$  บนตัวรองรับ ดังรูปที่ 5.23 ได้กำหนด เมสของแบบจำลองเป็นแบบ Hexahedron ประเภท C3D8R: An 8-node linear brick, reduced integration, hourglass control โดยมีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 26,065 เอลิเมนต์ซึ่งเพียงพอต่อ การวิเคราะห์เพื่อให้ผลลัพธ์ที่น่าเชื่อถือและใช้เวลาที่เหมาะสมในการวิเคราะห์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.23 แสดงการกระจัดของการเสียรูปของ ตัวรองรับ ในทิศทางตั้งฉากการเคลื่อนที่

ซึ่งจะได้การกระจัดของการเสียรูป  $\delta_{yb} = 0.1604 \text{ mm}$  ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ระบบรองรับรอง  $K_{sy}$  และ  $C_{sy}$  สามารถหาได้โดยแทนค่าการกระจัดของการเสียรูปและแรงกระทำบนพื้นที่รับแรงของ ตัวรองรับ ในสมการที่ 5.20 และ 5.21 จะได้

$$K_{py} = 4.61 \times 10^3 \text{ N/m} \quad C_{py} = 36.2 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

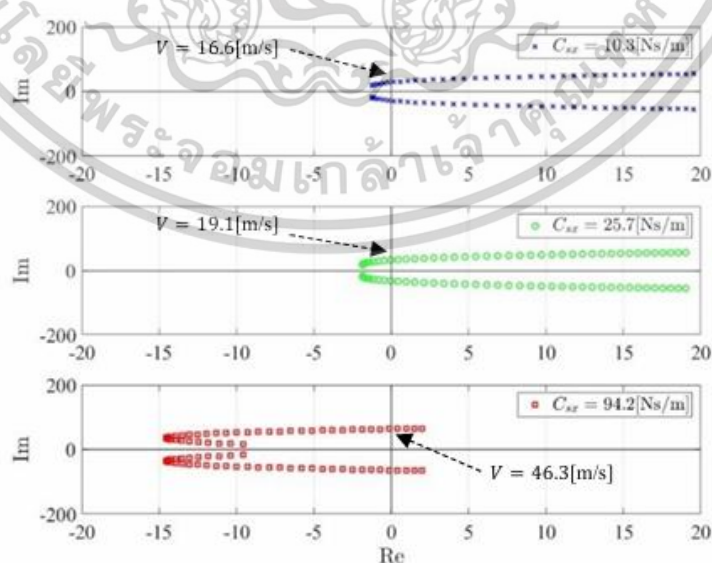
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5.6 การวิเคราะห์ความเร็ววิกฤตของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในการวิเคราะห์ความเร็ววิกฤตของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สามารถหาได้จากการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ของเมทริกซ์ระบบ  $A(V)$  ของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อตั้งสมการที่ 4.12 โดยแทนค่าพารามิเตอร์ของชุดทดลองในตารางที่ 5.2 และค่าพารามิเตอร์ของยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภทในตารางที่ 5.4 ภายใต้ความเร็ว  $V$  ต่าง ๆ ซึ่งผลลัพธ์ของการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะดังรูปที่ 5.24 แสดงทางเดินของราก (Root locus) ของแบบจำลองชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อด้วยค่าส่วนจริง (Real part number) สูงสุด จะเห็นได้ว่า ภายใต้ความเร็วที่เพิ่มขึ้นของแบบจำลองแคร่รถไฟขนาดย่อ ตำแหน่งของรากจะเคลื่อนที่ผ่านแกนจินตภาพ (Imaginary axis) โดยเคลื่อนที่จากพื้นที่จำนวนจริงลบสู่พื้นที่จำนวนจริงบวกบนระนาบจำนวนเชิงซ้อน และตำแหน่งของรากที่เป็นจุดตัดระหว่างพื้นที่จำนวนจริงลบกับพื้นที่จำนวนจริงบวกเกิดขึ้น ณ ความเร็ววิกฤต  $V_c$  ซึ่งแบบจำลองชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภทมีตำแหน่งของรากที่เป็นจุดตัดระหว่างพื้นที่จำนวนจริงลบกับพื้นที่จำนวนจริงบวกเกิดขึ้นจุดเดียวกัน ณ ความเร็ววิกฤต  $V_c$  ที่แตกต่างกันโดยแสดงดังในตารางที่ 5.5 ดังนั้นจึงสันนิษฐานได้ว่า ความเร็ววิกฤตของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็กแปรผันตรงกับค่าพารามิเตอร์ของยอร์แดมเปอร์

ตารางที่ 5.5 ค่าความเร็ววิกฤตของชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดเล็กบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในยอร์แดมเปอร์แต่ละประเภท

ประเภทยอร์แดมเปอร์	$K_{xx}$	$C_{xx}$	$V_c$
ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ	2,300 N/m	10.3 N s/m	16.6 m/s
ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง	4,615 N/m	25.7 N s/m	19.1 m/s
ค่าสัมประสิทธิ์สูง	34,425 N/m	94.2 N s/m	46.3 m/s



รูปที่ 5.24 แสดงทางเดินของรากของแบบจำลองชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์

แต่ละประเภทด้วยค่าส่วนจริงสูงสุดภายใต้ความเร็วที่เพิ่มขึ้น ด้วยโปรแกรม MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5.7 ผลการทดลองบนชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อในยอร์วแคมเปอร์แต่ละประเภท

การทดลองบนชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อในยอร์วแคมเปอร์แต่ละประเภทสามารถบ่งบอกความเร็ววิกฤตและพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งของระบบแครร์รถไฟขนาดย่อโดยการบันทึกการตอบสนองของชุดล้อหน้าและโครงแครร์รถไฟด้วยเซนเซอร์วัดความเร่ง ซึ่งประกอบไปด้วยค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ ณ เวลาต่าง ๆ ภายใต้ความเร็วที่เพิ่มขึ้นจนกระทั่งหยุดบันทึก ณ ความเร็วที่เกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งหรือ  $V_c$  ดังรูปที่ 5.25 และความเร็วของแครร์รถไฟขนาดย่อในยอร์วแคมเปอร์แต่ละประเภทถูกแสดงดังตารางที่ 5.6 จากนั้นนำการตอบสนองดังรูปที่ 5.25 มาคำนวณโดยใช้วิธี FFT แล้วนำเสนอในรูปสเปกตรัมความถี่ เพื่อสังเกตการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งบนโดเมนความถี่ ซึ่งผลการทดลองจะถูกอธิบายในหัวข้อย่อยถัดไปตามประเภทยอร์วแคมเปอร์

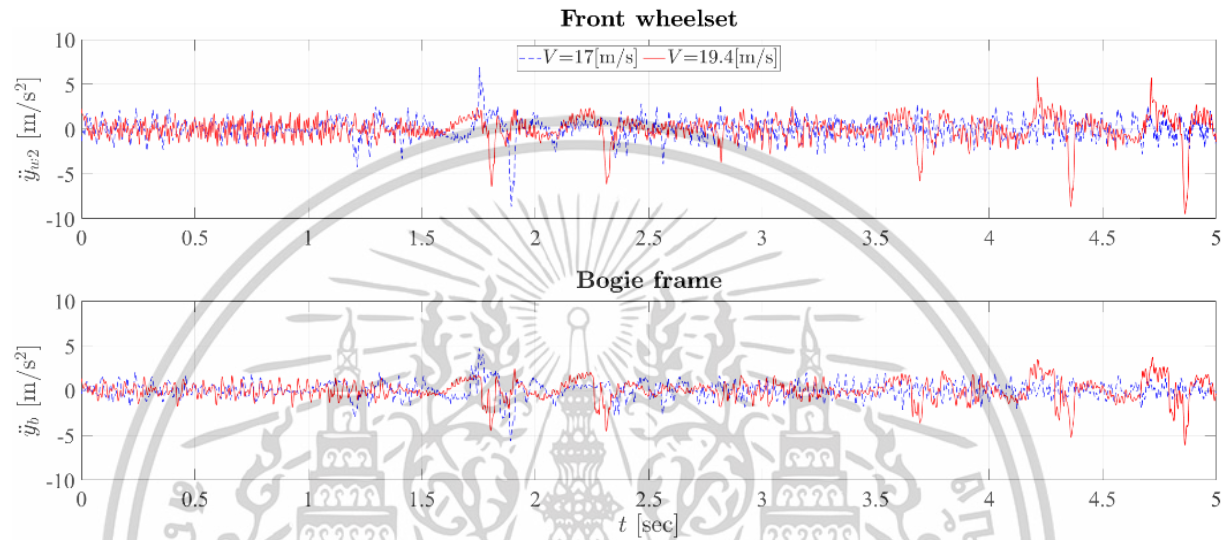
ตารางที่ 5.6 ความเร็วต่าง ๆ ของแครร์รถไฟขนาดย่อแต่ละประเภทยอร์วแคมเปอร์

ประเภทยอร์วแคมเปอร์	ความเร็วที่ 1	ความเร็วที่ 2	ความเร็วที่ 3	$V_c$
ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ	7.06 m/s	12 m/s	17 m/s	19.4 m/s
ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง	19.4 m/s	21.4 m/s	24.4 m/s	27.8 m/s
ค่าสัมประสิทธิ์สูง	21.9 m/s	26.8 m/s	29.3 m/s	31.8 m/s

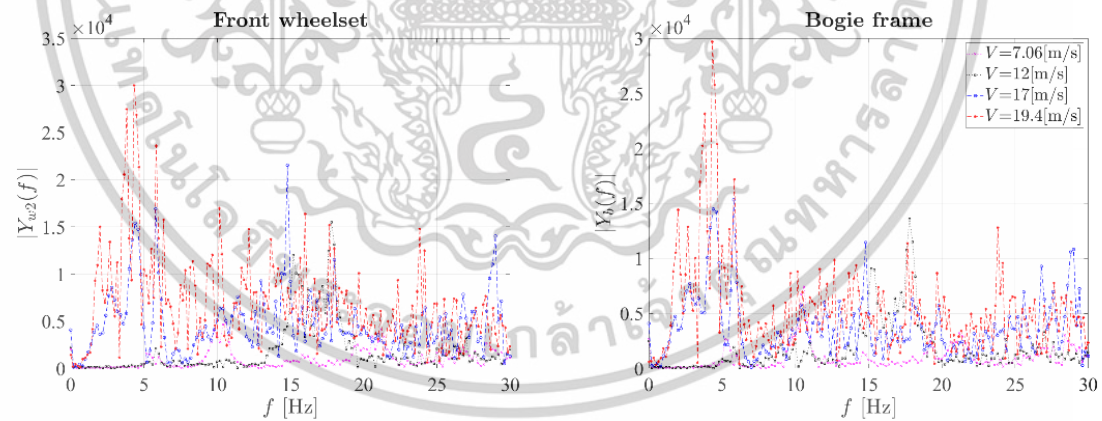
### 5.7.1 ยอร์วแคมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ

ค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแครร์รถไฟที่ติดตั้งยอร์วแคมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ ในโดเมนเวลาแสดงดังรูปที่ 5.25 จะเห็นได้ว่า ณ ความเร็ว 17 m/s ระบบแครร์รถไฟขนาดย่อมีความไม่เสถียรเล็กน้อยในช่วงเริ่มต้นเนื่องจากตัวแปรภายนอกเกิดขึ้นระหว่างการทดลอง ซึ่งสังเกตจากการเพิ่มขึ้นของแอมพลิจูดของระบบและกลับเข้าสู่ภาวะสมดุลเมื่อเวลาผ่านไป ตรงกันข้ามการตอบสนองของระบบแครร์รถไฟขนาดย่อ ณ ความเร็ว 19.4 m/s มีแอมพลิจูดที่สูงกว่าและต่อเนื่อง ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งบนระบบแครร์รถไฟขนาดย่อ

เมื่อนำข้อมูลที่บันทึกมาคำนวณโดยวิธีการแปลงฟูเรียร์อย่างรวดเร็ว แล้วนำเสนอในรูปสเปกตรัมความถี่จะได้ดังรูปที่ 5.26 เป็นการแสดงให้เห็นว่า ณ ความเร็วที่เกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่ง 19.4 m/s มีแอมพลิจูดที่สูงอย่างมีนัยสำคัญบนการสั่นสะเทือนในช่วงความถี่ต่ำ ในขณะที่ ณ ความเร็วที่ต่ำกว่ามีแอมพลิจูดต่ำกว่ามากบนการสั่นสะเทือนในช่วงความถี่ต่ำ



รูปที่ 5.25 แสดงค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแคร่รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำในโดเมนเวลา



รูปที่ 5.26 แสดงสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแคร่รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ

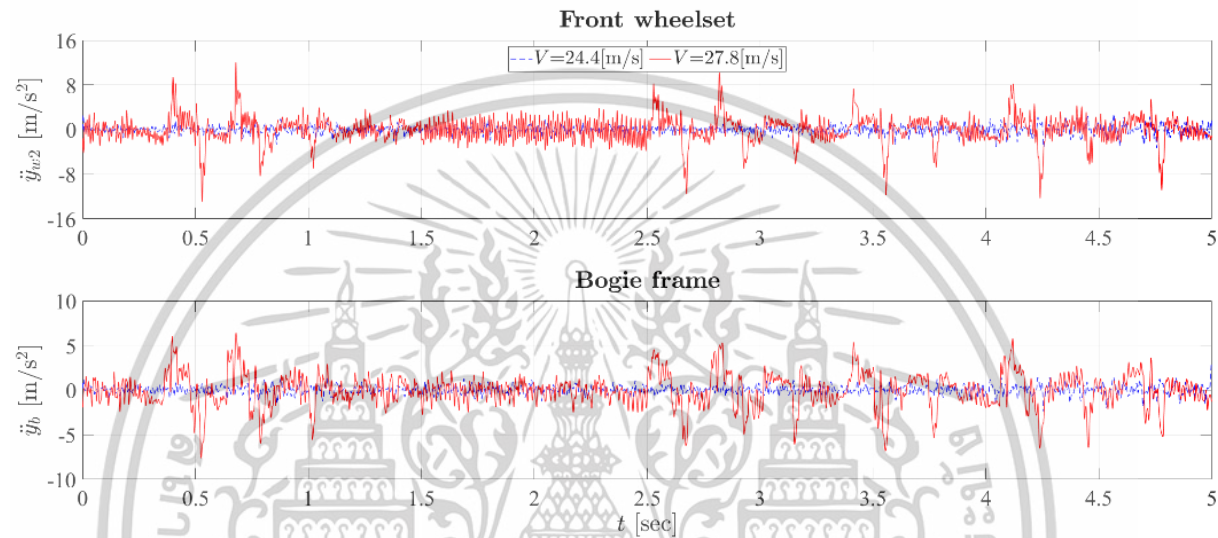
### 5.7.2 ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง

ค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแคร่รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง ในโดเมนเวลาแสดงดังรูปที่ 5.26 จะเห็นได้ว่า ณ ความเร็ว 27.8 m/s การตอบสนองของระบบแคร่รถไฟขนาดย่อมมีขนาดแอมพลิจูดที่ใหญ่กว่าขนาดแอมพลิจูดการตอบของระบบแคร่รถไฟขนาดย่อ ณ ความเร็ว 24.4 m/s อีกทั้งยังถูกคลื่นที่สูงโดดเด่นและมีต่อเนื่อง

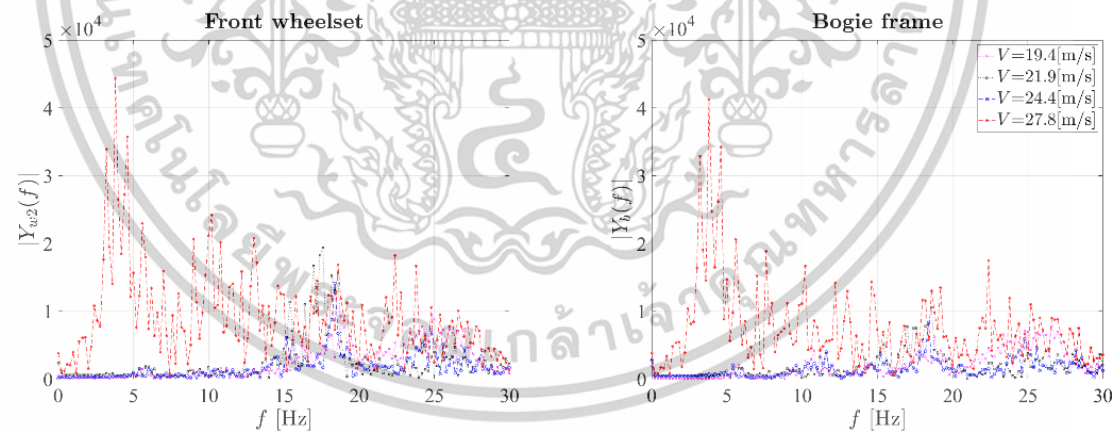
เมื่อนำข้อมูลที่บันทึกมาคำนวณโดยวิธีการแปลงฟูเรียร์อย่างรวดเร็ว แล้วนำเสนอในรูปแบบสเปกตรัมความถี่ จะได้ดังรูปที่ 5.27 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ณ ความเร็วที่เกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งมีแอมพลิจูดที่สูงอย่างมีนัยสำคัญบนการสั่นสะเทือนในช่วงความถี่ 3 ถึง 4.5 เฮิรตซ์ ในขณะที่ ณ ความเร็วที่ต่ำกว่ามีแอมพลิจูดต่ำกว่าอย่างมีนัยสำคัญ ซึ่งผลลัพธ์สอดคล้องกับการทดลองบนยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ ในหัวข้อย่อยที่ผ่านมา ถึงแม้กระนั้นผลลัพธ์ที่แสดงดังรูปที่ 5.8 และ 5.9 มีความแตกต่างอย่างชัดเจนเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงยอร์แดมเปอร์ เพิ่มขึ้นจาก 10.3 N s/m เป็น 25.7 N s/m จึงทำให้แคร่รถไฟขนาดย่อมเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงขึ้นก่อนเกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่ง ณ ความเร็ววิกฤตที่สูงขึ้นเช่นกัน

### 5.7.3 ยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง

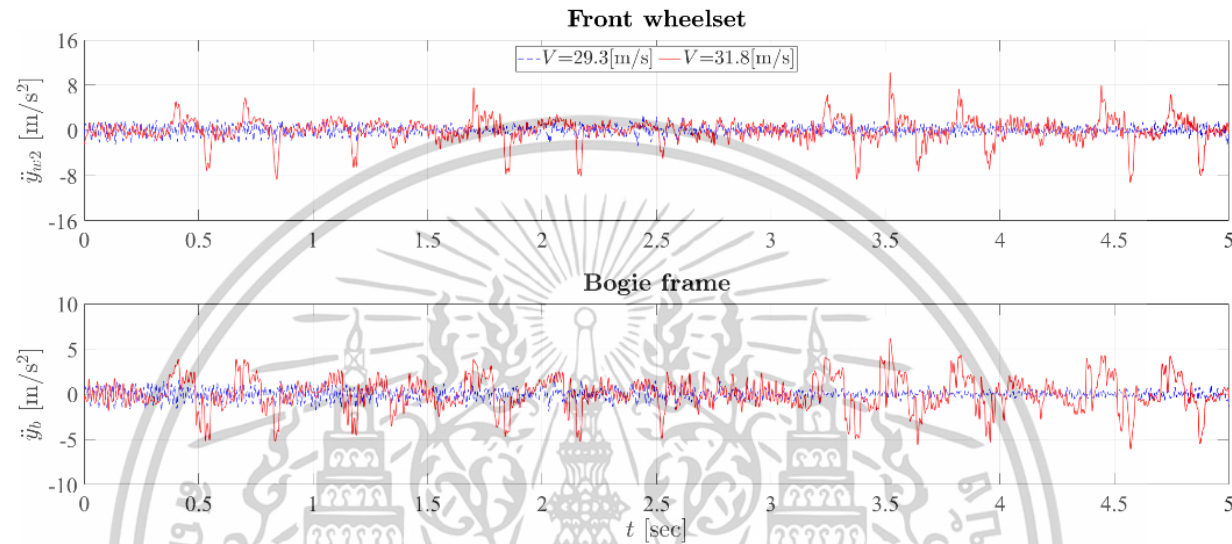
ผลการทดลองบนชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อมที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเท่ากับ 94.2 N s/m ซึ่งเป็นค่าสูงสุดในยอร์แดมเปอร์ทุกประเภท ที่ทำการทดลอง แสดงดังรูปที่ 5.28 และ 5.29 จะเห็นได้ว่ามีผลการทดลองที่สอดคล้องกัน โดยที่ ณ ความเร็ว 31.8 m/s การตอบสนองของการเคลื่อนที่ของระบบแคร่รถไฟขนาดย่อมมีขนาดแอมพลิจูดใหญ่กว่าขนาดแอมพลิจูดการตอบสนองของระบบแคร่รถไฟขนาดย่อ ณ ความเร็ว 29.3 m/s เช่นเดียวกับสเปกตรัมความถี่ ดังรูป 5.29 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ณ ความเร็วที่เกิดการสั่นสะเทือนแบบฮันติ่งมีแอมพลิจูดที่สูงอย่างมีนัยสำคัญบนการสั่นสะเทือนในช่วงความถี่ต่ำ ในขณะที่ ณ ความเร็วที่ต่ำกว่ามีแอมพลิจูดต่ำกว่าอย่างมีนัยสำคัญ



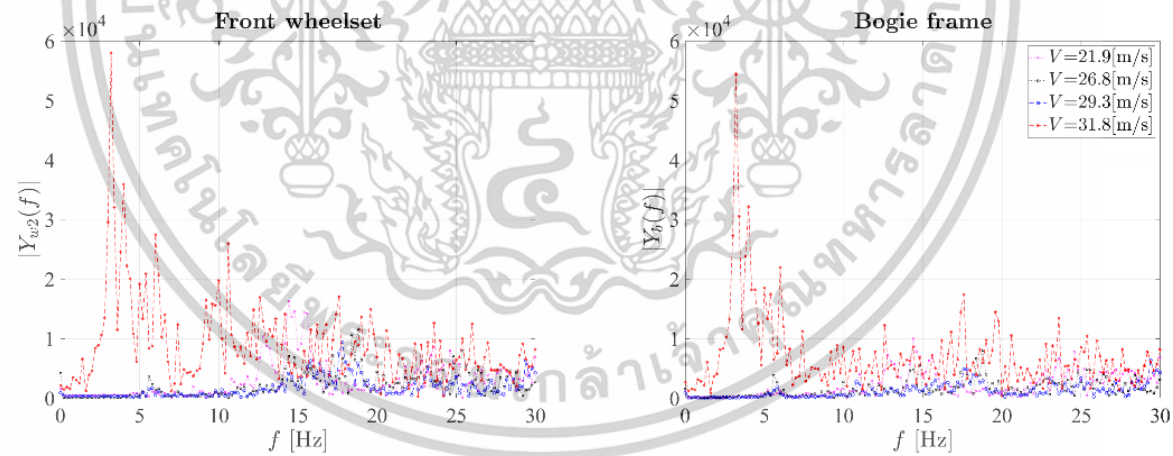
รูปที่ 5.27 แสดงค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแคร่รถไฟที่ติดตั้งยอว์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลางในโดเมนเวลา



รูปที่ 5.28 แสดงสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในตั้งฉากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแคร่รถไฟที่ติดตั้งยอว์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง



รูปที่ 5.29 แสดงค่าความเร่งในตั้งจากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแคร่รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูงในโดเมนเวลา



รูปที่ 5.30 แสดงสเปกตรัมความถี่ของค่าความเร่งในตั้งจากการเคลื่อนที่ของชุดล้อหน้าและโครงแคร่รถไฟที่ติดตั้งยอร์แดมเปอร์ค่าสัมประสิทธิ์สูง

## 5.8 การเปรียบเทียบความเร็ววิกฤตของระบบแคร่รถไฟขนาดย่อ

การเปรียบเทียบระหว่างความเร็ววิกฤตจากการคำนวณบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และจากการทดลองสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 5.7 จะเห็นได้ว่าความเร็ววิกฤตจากการทดลองคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยเฉลี่ย 31.2% ซึ่งสาเหตุของความคลาดเคลื่อนส่วนหนึ่งเกิดจากความคลาดเคลื่อนของโครงสร้างชุดทดลองและความแน่นของจุดเชื่อมต่อ มากกว่านั้นลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของใช้คอปฟ์ไม่ได้ถูกพิจารณาในการคำนวณ

ตารางที่ 5.7 การเปรียบเทียบความเร็ววิกฤตจากการคำนวณและการทดลอง

ประเภทยอร์แดมเปอร์	ค่าพารามิเตอร์ $C_{sx}$	ความเร็ววิกฤตจากการคำนวณ $V_{c,calculation}$	ความเร็ววิกฤตจากการทดลอง $V_{c,experiment}$	% ความแตกต่าง
ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำ	10.3 N s/m	16.6 m/s	19.4 m/s	16.9%
ค่าสัมประสิทธิ์ปานกลาง	25.7 N s/m	19.1 m/s	27.8 m/s	27.8%
ค่าสัมประสิทธิ์สูง	94.2 N s/m	46.3 m/s	31.8 m/s	31.8%

หากละเว้นความคลาดเคลื่อนของผลการทดลองจะเห็นได้ว่าทั้ง 2 การทดลองสามารถยืนยันได้ว่าความเร็ววิกฤตของแคร่รถไฟขนาดย่อเพิ่มขึ้นตามการเพิ่มขึ้นของค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของยอร์แดมเปอร์ซึ่งเขียนในรูปความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของยอร์แดมเปอร์และความเร็ววิกฤตผ่านฟังก์ชันเชิงเส้นดังนี้

$$V_{c,calculation} = 0.367C_{sx} + 11.4; \quad R^2 = 0.99 \quad (5.16)$$

$$V_{c,experiment} = 0.121C_{sx} + 21.1; \quad R^2 = 0.72 \quad (5.17)$$

โดยที่สมการที่ 5.16 คือฟังก์ชันเทียบจากการคำนวณ และสมการที่ 5.17 คือฟังก์ชันเทียบจากการทดลอง ซึ่งการเปลี่ยนแปลงค่าความเร็ววิกฤตจากการคำนวณมีความไว (Sensitivity) มากกว่าค่าความเร็ววิกฤตจากการทดลอง อย่างไรก็ตามผลการทดลองนี้สอดคล้องกับผลการศึกษากการสันสะเทือนแบบฮันดิงในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในบทที่ 4 ที่มาผ่านมา

## 5.9 บทสรุป

การศึกษาผลกระทบค่าพารามิเตอร์ยอร์ว์แอมแปร์บนการสันสะเทือนแบบฮันตั้งบนชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อ เพื่อศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของระบบแครร์รถไฟขนาดย่อที่ติดตั้งยอร์ว์แอมแปร์ที่แตกต่างกัน ผ่านการนำเสนอบนการตอบสนองบนโดเมนเวลาและการสันสะเทือนบนโดเมนความถี่ ณ ความเร็วที่เพิ่มขึ้น สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ผลการทดลองบนชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อสามารถยืนยันได้ว่าความเร็ววิกฤตของระบบแครร์รถไฟขนาดย่อแปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของยอร์ว์แอมแปร์ซึ่งสอดคล้องกับผลลัพธ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะของระบบ
2. ชุดล้อด้านหน้าและโครงแครร์รถไฟของระบบแครร์รถไฟขนาดย่อเกิดการสันสะเทือนแบบฮันตั้ง ณ ความเร็ววิกฤต ซึ่งมีค่าแอมพลิจูดที่สูงบนช่วงความถี่ต่ำ
3. ความเร็ววิกฤตจากการทดลองคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยเฉลี่ยร้อยละ 31.2 ซึ่งค่าจากการทดลองมีค่าที่สูงกว่าและความไวที่ต่ำกว่าเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของยอร์ว์แอมแปร์สาเหตุของความคลาดเคลื่อนอาจเกิดจากการประกอบชิ้นส่วนที่ไม่สมบูรณ์แบบและการไม่ได้พิจารณาแรงไม่เป็นเชิงเส้นของตัวหน่วง



## บทที่ 6

# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

### 6.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาผลกระทบของยอร์วแคมเปอร์บนการสันสะเทือนแบบฮันติงในระบบราง ทั้งบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และบนชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 โดยเริ่มต้นจากการศึกษาการสันสะเทือนแบบฮันติงในระบบรางด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการวิเคราะห์การแยกสาขาของฮอฟฟ์ โดยนำเสนอพฤติกรรมของการเคลื่อนที่ของแครร์รถไฟในแต่ละช่วงเวลา อนุความเร็วต่าง ๆ บนแผนภาพการแยกสาขาและภาพพจนเฟส อีกทั้งยังได้นำเสนอความไวของการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ต่าง ๆ บนแครร์รถไฟกับความถี่วิกฤตที่เกิดปรากฏการณ์สันสะเทือนแบบฮันติง หลังจากนั้นจึงมีการศึกษาผลกระทบของยอร์วแคมเปอร์ในแต่ละประเภทซึ่งเป็นพารามิเตอร์หนึ่งบนแครร์รถไฟ บนการสันสะเทือนแบบฮันติงในชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อโดยบันทึกการตอบสนองบนชุดทดลองและหาความเร็ววิกฤต เพื่อยืนยันความถูกต้องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในบทนี้จะสรุปผลการศึกษาผลกระทบของยอร์วแคมเปอร์บนการสันสะเทือนแบบฮันติงในระบบราง ทั้งการวิเคราะห์บนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการบันทึกการตอบสนองบนชุดทดลองแครร์รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 สามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

1. จากการศึกษาคุณลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮันติงของแครร์รถไฟความเร็วสูงบนการคำนวณในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พบว่า พฤติกรรมการกระจัดและพฤติกรรมการหมุนสั่นกลับเข้าสู่สภาวะสมดุลหากแครร์รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำกว่าความเร็ววิกฤตไม่เป็นเชิงเส้นในทางกลับกันหากแครร์รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าความเร็ววิกฤตไม่เป็นเชิงเส้น พฤติกรรมการกระจัดและพฤติกรรมการหมุนสั่นจะไม่กลับสู่สภาวะสมดุลและการสันสะเทือนแบบฮันติงจะเกิดขึ้น
2. จากการศึกษาความไวพารามิเตอร์ของระบบรองรับจะเห็นได้พารามิเตอร์ระบบรองรับหลักมีความไวในการเปลี่ยนแปลงความเร็ววิกฤตสูงกว่าพารามิเตอร์ของระบบรองรับรอง
3. จากการศึกษาคุณลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮันติงของแครร์รถไฟความเร็วสูงบนการชุดทดลองขนาดย่อสามารถยืนยันคุณลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮันติงของแครร์รถไฟความเร็วสูงบนการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้โดยความเร่งในทิศทางตั้งฉากจะมีขนาดแอมพลิจูดที่ใหญ่หากแครร์รถไฟขนาดย่อเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็ววิกฤต ในทำนองเดียวกันกับผลลัพธ์ของการคำนวณในแบบจำลองคณิตศาสตร์ การกระจัดและพฤติกรรมการหมุนสั่นจะขยายใหญ่ขึ้นเมื่อแครร์รถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็ววิกฤตเช่นกัน
4. จากการศึกษาผลของความหน่วงของยอร์วแคมเปอร์ต่อความเร็ววิกฤตของแครร์รถไฟความเร็วสูงพบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงของยอร์วแคมเปอร์แปรผันตรงกับความถี่วิกฤต มากไปกว่านั้นยังสอดคล้องกับการศึกษาการสันสะเทือนแบบฮันติงบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 6.2 ข้อเสนอแนะ

แม้ว่าผลการวิจัยผลกระทบยอร์แดนแปรบนการสันเสเทือนแบบฮันตั้งในระบบรางทั้งบนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และบนชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 สอดคล้องซึ่งกันและกัน อย่างไรก็ตามค่าความเร็ววิกฤตของทั้งสองมีความคลาดเคลื่อนอย่างมีนัยสำคัญ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะนำเสนออุปสรรคที่พบในการทำวิจัยและข้อเสนอแนะต่าง ๆ เพื่อเป็นแนวทางในการต่อยอดงานวิจัยนี้ต่อไป ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การออกแบบชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อ 1 ต่อ 5 มีความละเอียดและซับซ้อนทำให้การสร้างชุดทดลองตามขนาดตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกลจึงเป็นไปได้ยากเนื่องจากงบประมาณและทรัพยากรที่จำกัด ดังนั้นการออกแบบชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อควรจะออกแบบให้ใกล้เคียงกับขนาดย่อตามกฎความคล้ายคลึงเชิงกลมากที่สุด ส่วนค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ เช่น มวลของชุดล้อหรือโครงแควร์รถไฟ โมเมนต์ความเฉื่อย เป็นต้น ซึ่งขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุของชิ้นส่วนนั้น ๆ ยากต่อการควบคุมจึงต้องละเว้นไว้
2. โครงแควร์รถไฟ สวิงอาร์ม และ ตัวรองรับ ที่มีขนาดย่อทำจากอะลูมิเนียม ซึ่งมีความแข็งแรงและน้ำหนักเบา อย่างไรก็ตามการเชื่อมและการตัดอะลูมิเนียมเพื่อขึ้นชิ้นงานเป็นสิ่งที่ทำได้ยากเนื่องจากอะลูมิเนียมเป็นโลหะที่ไม่แข็งมาก ไวต่อความร้อน และกระจายความร้อนสูง จึงทำให้โครงแควร์รถไฟ สวิงอาร์ม และ ตัวรองรับ อาจมีความคลาดเคลื่อนจากการเสียรูปโดยอุณหภูมิที่สูงจากการตัดและการเชื่อม ส่งผลให้การประกอบชุดทดลองแควร์รถไฟทำได้ยากและต้องแก้ไขความคลาดเคลื่อนหลังขึ้นชิ้นงานเสร็จสิ้นเพื่อให้ประกอบชุดทดลองสำเร็จ ดังนั้นจึงควรเลือกวัสดุใหม่เหมาะสมในการขึ้นชิ้นงานดังกล่าวเพื่อลดความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการเสียรูปโดยอุณหภูมิที่สูงจากการขึ้นชิ้นงาน
3. การหาค่าพารามิเตอร์ของใช้คัพแต่ละประเภทบนชุดทดสอบใช้คัพอย่างง่ายมีความคลาดเคลื่อนเนื่องจากใช้คัพแต่ละประเภทมีลักษณะโครงสร้างในการรับแรง (Absorption characteristics structures) แตกต่างกัน เพื่อให้ได้ค่าพารามิเตอร์ของใช้คัพแต่ละประเภทแม่นยำมากขึ้น ควรที่จะทดสอบใช้คัพโดยสถาบันทดสอบที่รับรองผลการทดสอบสากล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] EN 14363:2016+A1:2018 Railway applications – Testing and Simulation for the acceptance of running characteristics of railway vehicles-Running Behavior and stationary tests (2018)
- [2] Bustos, A., Tomas-Rodriguez, M., Rubio, H. & Castejon, C. (2023) On the nonlinear hunting stability of a high-speed train bogie. *Nonlinear Dynamics*, 111, 2059–2078. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07937-y>
- [3] True, H., & Jensen, J.C. (1994). Parameter Study of Hunting and Chaos in Railway Vehicle Dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 23(1), 508–521. <https://doi.org/10.1080/00423119308969537>
- [4] Ahmadian, M., & Yang, S. (1998). Effect of System Nonlinearities on Locomotive Bogie Hunting Stability. *Vehicle System Dynamics*, 29(6), 365–384. <https://doi.org/10.1080/00423119808969380>
- [5] Kim, P., Jung, J. & Seok, J. (2011). A parametric dynamic study on hunting stability of full dual-bogie railway vehicle. *Int. J. Precis. Eng. Manuf.* 12, 505–519. <https://doi.org/10.1007/s12541-011-0064-1>
- [6] Sedighi, H., & Shirazi, K. (2012). Bifurcation analysis in hunting dynamical behavior in a railway bogie: Using novel exact equivalent functions for discontinuous nonlinearities. *Scientia Iranica*, 19(6), 1493-1501 doi: 10.1016/j.scient.2012.10.028
- [7] Reza, S. (2013). Parameters' changing influence with different lateral stiffnesses on nonlinear analysis of hunting behavior of a bogie. *Journal of Vibroengineering*, 1(4), 195-206.
- [8] Gao, X.J., True, H., & Li, Y.H. (2015). Lateral dynamic features of a railway vehicle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 230(3), 909-923. doi: 10.1177/0954409715572856
- [9] Uyulan, Ç., Gokasan, M., & Bogosyan, S. (2017). Stability and bifurcation analysis of the non-linear railway bogie dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 232(16), 2787-2802. doi:10.1177/0954406217727304
- [10] Sun, J., Chi, M., Cai, W., & Jin, X. (2019). Numerical Investigation into the Critical Speed and Frequency of the Hunting Motion in Railway Vehicle System. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019(1), 7163732 doi: 10.1155/2019/7163732
- [11] Moritz, G., & Alfred, J. (2004). Design of an active wheelset on a scaled roller rig. *Vehicle System Dynamics*, 41(5), 365–381. doi: 10.1080/00423110412331300336
- [12] Eom, B.G., Kang, B.B, & Lee, H.S. (2011). Design of Small-Scaled Derailment Simulator for Investigating Bogie Dynamics. *International Journal of Railway*, 4(2), 50–55. doi: 10.7782/ijr.2011.4.2.050

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [13] Docquier, N., & Fissette, P. (2011). A Scaled-Bogie Test Bench to Understand and Demystify Wheel/Rail Contact Dynamics. *Multibody Dynamics 2011 - Eccomas Thematic Conference*. <http://hdl.handle.net/2078.1/81133>
- [14] Eom, B.G., Kang, B.B., & Lee, H.S. (2013). A study on running stability assessment methods for 1/5 small-scaled bogie of saemaul using small-scaled derailment simulator. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 14(4), 589-598. doi: 10.1007/s12541-013-0079-x
- [15] Han, J., Kim, T.M., & Kim, J. (2013). Analysis of the Vibration Characteristics of a High-Speed Train using a Scale Model. *Journal of the Korean Society for Railway*, 16(1), 7-13. doi: 10.7782/jksr.2013.16.1.007
- [16] Bosso, N., Spiryagin, M., Gugliotta, A., & Soma, A. (2013). Design of Scaled Roller Rigs. *Mechatronic Modeling of Real-Time Wheel-Rail Contact*, 37-54. doi: 10.1007/978-3-642-36246-0\_4
- [17] Kalivoda, J., & Bauer, P. (2016). Roller rig testing at the Czech Technical University. Science and Transport Progress. *Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport*, 4(64), 125-133. doi: 10.15802/stp2016/77994
- [18] Myamlin, S.V., Kalivoda, J., & Neduzha, L.O. (2017). Testing of Railway Vehicles Using Roller Rigs. *Procedia Engineering*, 187, 688-695. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.04.439>
- [19] Visayataksin, N., & Sooklamai, M. (2018). Railway bogie vibration analysis by mathematical simulation model and a scaled four-wheel railway bogie set. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 297(1), 012045. doi: 10.1088/1757-899x/297/1/012045
- [20] Sundar, S., Maksym, S., & Qing, W. (2020). Real-time multibody modeling and simulation of a scaled bogie test rig. *Railway Engineering Science*, 28(2), 146-159. doi: 10.1007/s40534-020-00213-y
- [21] Shabana, A.A., Zaazaa, K.E., & Sugiyama, H. (2007). *Railroad Vehicle Dynamics: A Computational Approach* (1st ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781420045857>
- [22] Strogatz, S.H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429492563>
- [23] Kuznetsov, Y.A., Kuznetsov, I.A., & Kuznetsov, Y. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, New York, NY, USA.
- [24] UIC. 2018. *The definition of High Speed Rail*. [Online]. Available: [https://www.uic.org/com/enews/nr/596-high-speed/article/the-definition-of-high-speed-rail?page=thickbox\\_enews](https://www.uic.org/com/enews/nr/596-high-speed/article/the-definition-of-high-speed-rail?page=thickbox_enews)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [25] International Railway Journal. *CRRC Tangshan reveals flexible-formation high-speed EMU*. [Online]. Available: <https://www.railjournal.com/rolling-stock/crrc-tangshan-reveals-flexible-formation-high-speed-emu/>
- [26] Srirakul, T., Pimsarn, M., & Depaiwa, N. (2023). System parametric study of hunting motion stability of a two-axle railway bogie on straight track via Hopf bifurcation analysis. *Proc. TSME Int. Conf. on Mechanical Engineering*, 12-15 December 2023, Chiang Mai, Thailand.
- [27] Srirakul, T., Chalermpong, K., Krusuansombat, P., & Pimsarn, M. (2024). Investigation of Yaw Damper Effect on Hunting Oscillation in Railway using Small-Scaled Two-Axle Bogie Test Rig. *Proc. TSME Int. Conf. on Mechanical Engineering*, 10-13 December 2024, Pattaya, Thailand.
- [28] Inman, D.L. (2014). *Engineering Vibration*. 4th Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- [29] Solidworks Web Help. 2016. *Viscous Damping Ratios for Different Systems and Materials*. [Online]. Available: [https://help.solidworks.com/2016/english/solidworks/cworks/r\\_viscous\\_damping\\_ratios.htm](https://help.solidworks.com/2016/english/solidworks/cworks/r_viscous_damping_ratios.htm)
- [30] Misumi (Thailand). (n.d.). *Round Wire Coil Springs/Deflection 15%-25%/O.D. Referenced*. [Online]. Available: <https://th.misumi-ec.com/en/vona2/detail/110302288760/?CategorySpec=00000005923%3a%3amig0000001763260%0900000005916%3a%3aa>
- [31] Misumi (Thailand). (n.d.). *Shock Absorbers, Preset(Fixed) Damping Type*. [Online]. Available: <https://th.misumi-ec.com/en/vona2/detail/110310365129/?CategorySpec=00000005941%3a%3ab%0900000005940%3a%3aa&list=PageCategory>



ภาคผนวก ก

**โปรแกรม Matlab วิเคราะห์การแยกสาขาของฮอปฟ์  
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแคร่รถไฟ**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%{
This is hunting nonlinear calculation by Yang & Ahmadian
In case 2 wheelset included bogie
Analytical method with Bifurcation method
%}
```

```
% V_critical = 34.64 m/s
```

```
clear all
```

```
global d b b1 b2 b3 cy ctx cty c1 c2 c3 c4 f11 f22 f12 f33 lwx lwy ltz ktx kty kr ky kx
mw mt l1 l2 r0 lamda delta w v vc
```

```
%Paramamters by Yang
```

```
d = 0.7176; %% Half of the track gauge
```

```
b = 1; %% Half of the primary yaw spring arm
```

```
b1 = 1.27; %% Half of the primary yaw damper arm
```

```
b2 = 0.794; %% Half of the secondary yaw spring arm
```

```
b3 = 0.889; %% Half of the secondary yaw damper arm
```

```
cy = 2.1e4; % Lateral damping of primary suspension
```

```
ctx = 6.129e5; % Longitudinal damping of secondary suspension
```

```
cty = 5.254e4; % Lateral damping of secondary suspension
```

```
c1 = 1.923e4; c2 = 5.14e5; % Lateral damping of suspension
```

```
c3 = -3.1127e6; c4 = 5.14e6; % Damping coefficients for yaw dampers
```

```
f11 = 6.728e6; % Lateral creep force coefficient
```

```
f22 = 1000; % Spin creep force coefficient
```

```
f12 = 1.2e3; % Lateral spin creep force coefficient
```

```
f33 = 6.728e6; % Longitudinal creep force coefficient
```

```
lwx = 625.7; % Roll moment of inertia of wheelset
```

```
lwy = 133.92; % Spin moment of inertia of wheelset
```

```
ltz = 10314.0; % Moment of inertia of bogie frame in yaw
```

```
ktx = 2.189e5; % Longitudinal siffness of secondary suspension
```

```
kty = 1.532e5; % Lateral stiffness of secondary suspension
```

```
kr = 1.617e7; %% Lateral rail stiffness
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

ky = 8.67e4; %% Lateral stiffness of primary suspension
kx = 8.67e4; %% Yaw spring stiffness of primary suspension

mw = 1800; %% Wheelset mass
mt = 4255.6; %% Mass of bogie frame
w = 38492.4; %% axle load

l1 = 1.295; % Half of longitudinal distance of the secondary spring
l2 = 1.295; % Half of longitudinal distance between the lateral secondary dampers

r0 = 0.533; %% Wheel radius
lambda = 0.05; %% Wheel conicity
delta = 0.923e-2; %% Flange clearance (m)

%Parameters
v_range = 25:0.1:35;
critical_yaw1_displacement = zeros(size(v_range));
critical_yaw2_displacement = zeros(size(v_range));
%critical_y2_amplitude = zeros(size(v_range));
critical_yawt_displacement = zeros(size(v_range));

%Start to compute
%This is an initial condition matrix
IC = [1e-3; 0; 0; 0; 1e-3; 0; 0; 0; 1e-3; 0; 0; 0];
%timespan
t0 = 0; tf = 50; tspan = t0:0.01:tf;

for i = 1:numel(v_range)
    v = v_range(i);
    % Rest of the code remains the same
    [t ,x] = ode45(@Xdot,tspan, IC);
    yaw1 = x(:, 3);
    yaw2 = x(:, 7);
    yawt = x(:, 11);
    %t_indices = find(t >= 0.8*tf & t <= tf); % Find indices within the specified time
range
    critical_yaw1_displacement(i) = max(abs(yaw1));
    critical_yaw2_displacement(i) = max(abs(yaw2));

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

critical_yawt_displacement(i) = max(abs(yawt));

end

% Plot the Hopf bifurcation diagram
figure;
plot(v_range, critical_yaw1_displacement, 'x', 'LineWidth', 1);
hold on;
plot(v_range, critical_yaw2_displacement, 'x', 'LineWidth', 1);
hold on;

plot(v_range, critical_yawt_displacement, 'x', 'LineWidth', 1);
hold off;
xlabel('v (m/s)');
ylabel('Max Yaw Angular Displacement (m)');
title('Bifurcation Diagram of the railway bogie');
legend('yaw1','yaw2','yawb');

grid on;

% function Xdot
function matXdot = Xdot(t, x)
global d b b1 b2 b3 cy ctx cty c1 c2 c3 c4 f11 f22 f12 f33 lwx lwy ltz ktx kty kr ky kx
mw mt l1 l2 r0 lambda delta w v
y1 = x(1); y1dot = x(2); yaw1 = x(3); yaw1dot = x(4); % Front wheelset
y2 = x(5); y2dot = x(6); yaw2 = x(7); yaw2dot = x(8); % Rear wheelset
yt = x(9); ytdot = x(10); yawt = x(11); yawtdot = x(12); % Trailer bogie

% Matrix A
% Matrix A
matA = zeros(12,12);

matA(2,1) = -(2*ky+w*lamda/d)*1/mw;
matA(2,2) = -2/mw*(cy+f11*(1+r0*lamda/d)/v);
matA(2,3) = 2*f11/mw;
matA(2,4) = -2*f12/(mw*v); % Reference by Hamid *** now following Yang's paper
matA(2,9) = 2*ky/mw;
matA(2,10) = 2*cy/mw;

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \text{matA}(2,11) &= -\text{matA}(2,9)*l1; \\ \text{matA}(2,12) &= -\text{matA}(2,10)*l1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{matA}(4,1) &= -2*d*f33*\text{lamda}/(r0*lw); \% lwz = lw \\ \text{matA}(4,2) &= 1/lw*(-\text{lamda}*v/(r0*d)*(lwy)+2*f12*(1+r0*\text{lamda}/d)/v); \\ \text{matA}(4,3) &= 1/lw*(d*w*\text{lamda}-2*f12-2*b^2*kx); \\ \text{matA}(4,4) &= -1/lw*(2*b1*c1+2/v*(d^2*f33+f22)); \\ \text{matA}(4,11) &= 2*b^2*kx/lw; \\ \text{matA}(4,12) &= 2*b1*c1/lw; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{matA}(6,5) &= \text{matA}(2,1); \\ \text{matA}(6,6) &= \text{matA}(2,2); \\ \text{matA}(6,7) &= \text{matA}(2,3); \\ \text{matA}(6,8) &= \text{matA}(2,4); \\ \text{matA}(6,9) &= \text{matA}(2,9); \\ \text{matA}(6,10) &= \text{matA}(2,10); \\ \text{matA}(6,11) &= -\text{matA}(2,11); \\ \text{matA}(6,12) &= -\text{matA}(2,12); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{matA}(8,5) &= \text{matA}(4,1); \\ \text{matA}(8,6) &= \text{matA}(4,2); \\ \text{matA}(8,7) &= \text{matA}(4,3); \\ \text{matA}(8,8) &= \text{matA}(4,4); \\ \text{matA}(8,11) &= \text{matA}(4,11); \\ \text{matA}(8,12) &= \text{matA}(4,12); \end{aligned}$$

% Reference Fsy1 and Fsy2 from Harmid

$$\begin{aligned} \text{matA}(10,1) &= 2*ky/mt; \\ \text{matA}(10,2) &= 2*cy/mt; \\ \text{matA}(10,5) &= \text{matA}(10,1); \\ \text{matA}(10,6) &= \text{matA}(10,2); \\ \text{matA}(10,9) &= -2/mt*(2*ky+kty); \% not following the Yang's paper \\ \text{matA}(10,10) &= -2/mt*(2*cy+cty); \end{aligned}$$

% Fixing parameter and solve new equations to be correct

$$\begin{aligned} \text{matA}(12,1) &= -2*ky*l1/ltz; \\ \text{matA}(12,2) &= -2*cy*l2/ltz; \\ \text{matA}(12,3) &= 2*kx*b^2/ltz; \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

matA(12,4) = 2*c1*b1/ltz;
matA(12,5) = -matA(12,1);
matA(12,6) = -matA(12,2);
matA(12,7) = -matA(12,3); %change + to -
matA(12,8) = matA(12,4);
matA(12,11) = -2/ltz*(ktx*b2^2+2*kx*b^2+2*ky*l1^2);
matA(12,12) = -2/ltz*(ctx*b3^2+2*c1*b1+2*cy*l1^2); %change b2 to b3 and ky to
cy

```

```

[matA(1,2), matA(3,4), matA(5,6), matA(7,8), matA(9,10), matA(11,12)] = deal(1);

```

```

%MatA = matA + e*u*matA + (e*u)^2*matA;

```

```

%Matrix X

```

```

b22 = 0;

```

```

b24 = 0;

```

```

b42 = 0;

```

```

b44 = 0;

```

```

% Ft in Front wheelset

```

```

Ft1_1 = y1-delta;

```

```

Ft1_2 = y1+delta;

```

```

Ft1 = 0.5*kr*(2*y1+abs(Ft1_1)-abs(Ft1_2));

```

```

% Ft in Rear wheelset

```

```

Ft2_1 = y2-delta;

```

```

Ft2_2 = y2+delta;

```

```

Ft2 = 0.5*kr*(2*y2+abs(Ft2_1)-abs(Ft2_2));

```

```

% Fd in Front wheelset

```

```

vyaw1 = b1*(yaw1dot-yawtdot);

```

```

Fd1_1 = c1*vyaw1+c2*vyaw1.^2+c3*vyaw1.^3+c4*vyaw1.^4;

```

```

Fd1_2 = c1*vyaw1-c2*vyaw1.^2+c3*vyaw1.^3-c4*vyaw1.^4;

```

```

% Fd in Rear wheelset

```

```

vyaw2 = b1*(yaw2dot-yawtdot);

```

```

Fd2_1 = c1*vyaw2+c2*vyaw2.^2+c3*vyaw2.^3+c4*vyaw2.^4;

```

```

Fd2_2 = c1*vyaw2-c2*vyaw2.^2+c3*vyaw2.^3-c4*vyaw2.^4;

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

if vyaw1 ~= 0 || vyaw2 ~= 0
    Fd1 = (0.5+0.5*abs(vyaw1)/vyaw1)*Fd1_1+(0.5-0.5*abs(vyaw1)/vyaw1)*Fd1_2;
    Fd2 = (0.5+0.5*abs(vyaw2)/vyaw2)*Fd2_1+(0.5-0.5*abs(vyaw2)/vyaw2)*Fd2_2;
else
    Fd1 = 0; Fd2 = 0;
end

% MatF = BX + F(X)
g2 = b22*y1dot + b24*yaw1dot - 1/mw*Ft1;
g4 = b42*y1dot + b44*yaw1dot - 2*b1*Fd1/lwx;
g6 = b22*y2dot + b24*yaw2dot - 1/mw*Ft2;
g8 = b42*y2dot + b44*yaw2dot - 2*b2*Fd2/lwx;
g12 = 2*b1*(Fd1+Fd2)/ltz;

MatF = zeros(12,1);
MatF(2,1) = g2; MatF(4,1) = g4;
MatF(6,1) = g6; MatF(8,1) = g8;
MatF(12,1) = g12;

MatX = [y1; y1dot; yaw1; yaw1dot; y2; y2dot; yaw2; yaw2dot; yt; ytdot; yawt;
yawtdot];
matXdot = matA*MatX + MatF;
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก ข  
แบบภาพประกอบและภาพถ่าย  
คุณสมบัติสปริงและโช้คอัพแต่ละประเภท  
และการคำนวณความเร็วรอบของมอเตอร์ที่เหมาะสมกับ  
ชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4

3

2

1

F

F

E

E

D

D

C

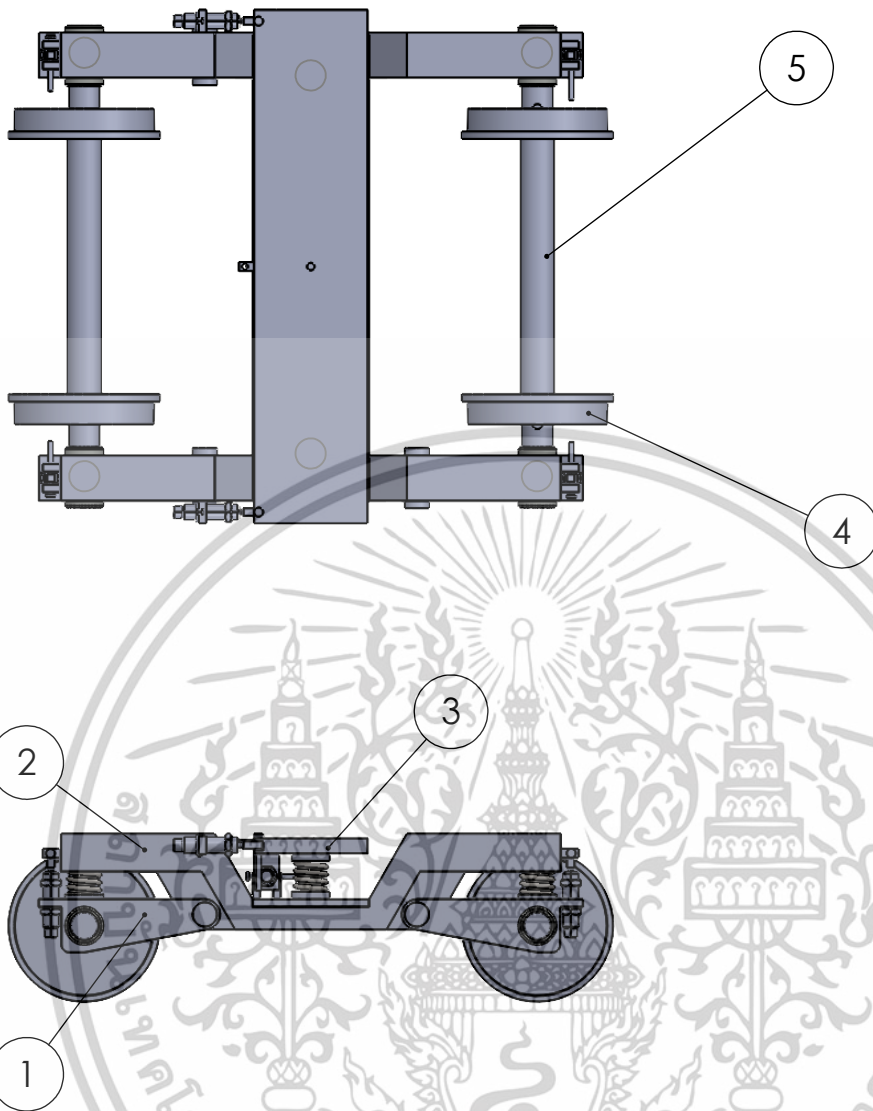
C

B

B

A

A



Part No.	Part Name	Quantity
1	Swing Arm	4
2	Bogie Frame	1
3	Bolster	1
4	Wheel	4
5	Axle	2

UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:  
DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS

DEBURR AND  
BREAK SHARP  
EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE
DRAWN	Techit		04/2024
REV	Kolawach		04/2024
CHK'D	Kolawach		04/2024
APPVD	Kolawach		04/2024

MATERIAL:  
Steel and Aluminum

TITLE:

## Small Scaled Bogie Assemble

DWG NO.

1

A4

SCALE:1:5

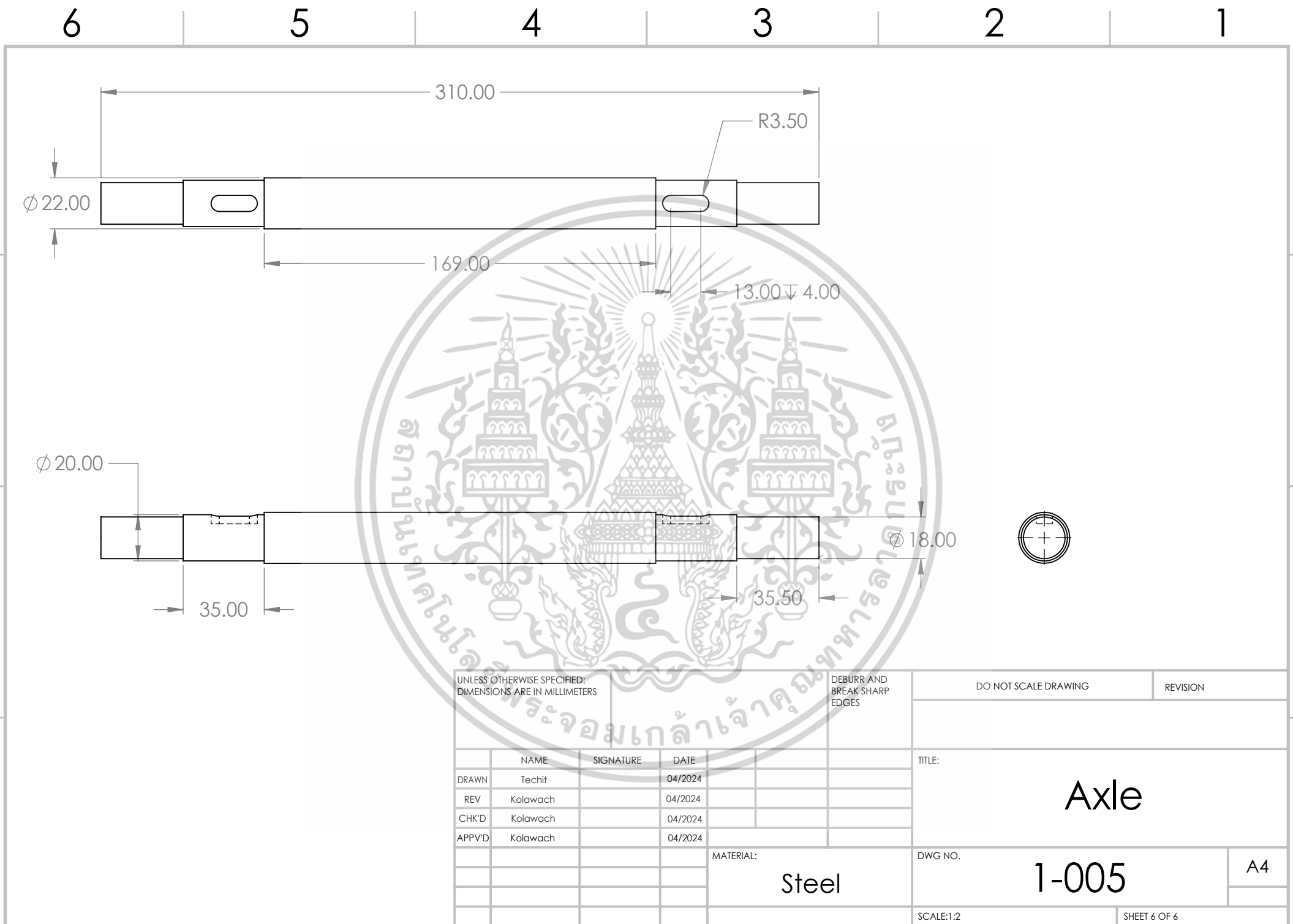
SHEET 1 OF 6

4

3

2

1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:  
DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS

DEBURR AND  
BREAK SHARP  
EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE
DRAWN	Techit		04/2024
REV	Kolawach		04/2024
CHK'D	Kolawach		04/2024
APP'VD	Kolawach		04/2024

MATERIAL:  
**Steel**

TITLE:  
**Axle**

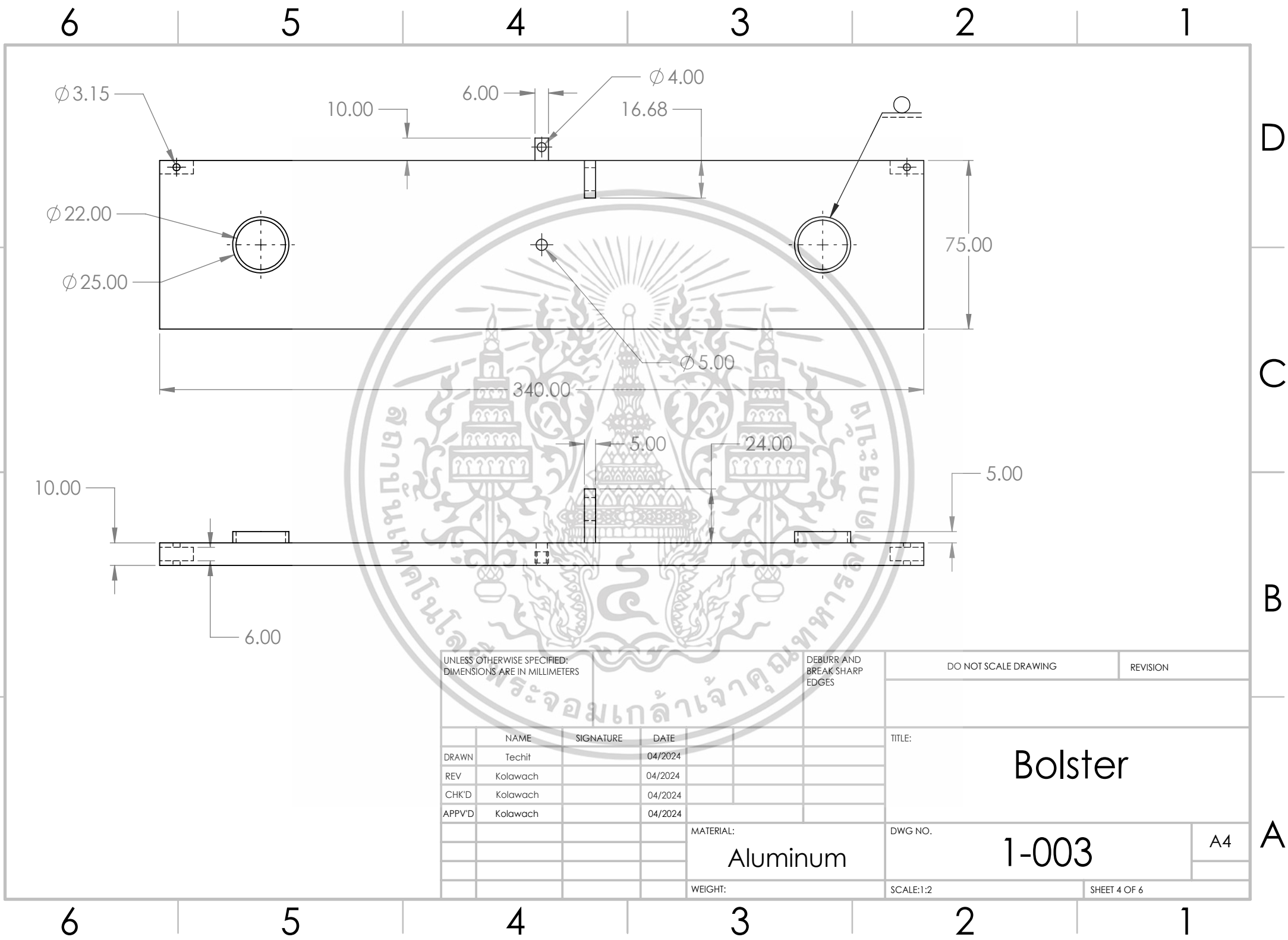
DWG NO. **1-005**

A4

SCALE:1:2

SHEET 6 OF 6





UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:  
DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS

DEBURR AND  
BREAK SHARP  
EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE
DRAWN	Techit		04/2024
REV	Kolawach		04/2024
CHK'D	Kolawach		04/2024
APPVD	Kolawach		04/2024

TITLE:

**Bolster**

MATERIAL:

**Aluminum**

DWG NO.

**1-003**

A4

WEIGHT:

SCALE:1:2

SHEET 4 OF 6

6 5 4 3 2 1

D

D

C

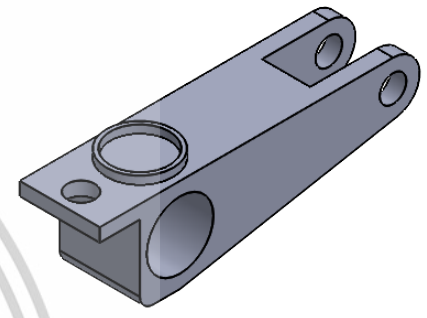
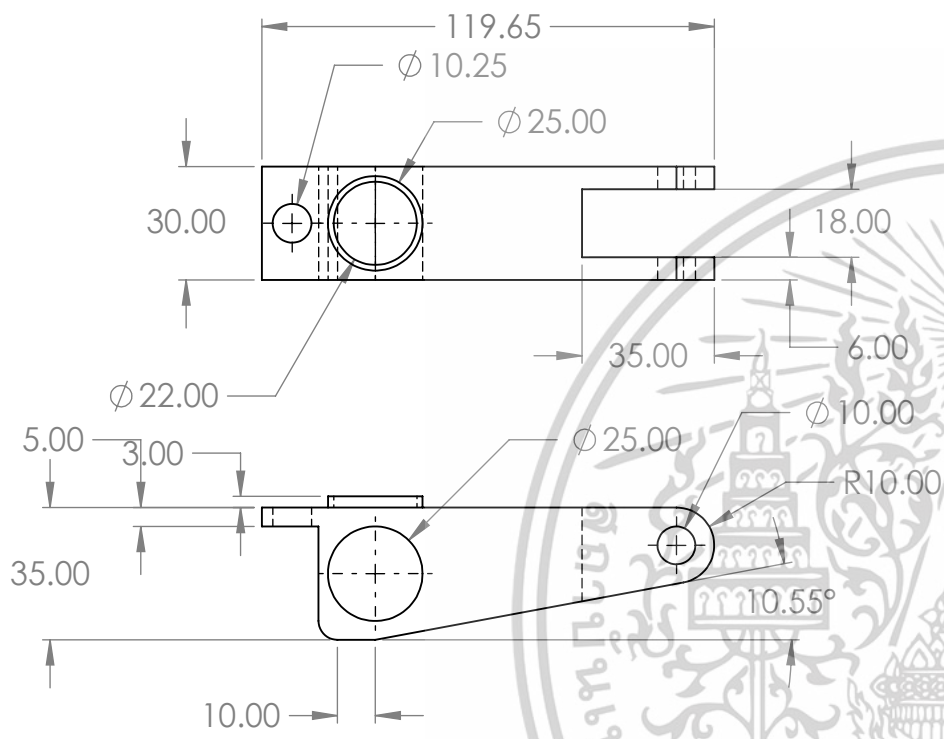
C

B

B

A

A



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:  
DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS

DEBURR AND  
BREAK SHARP  
EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE
DRAWN	Techit		04/2024
REV	Kolawach		04/2024
CHK'D	Kolawach		04/2024
APPVD	Kolawach		04/2024

TITLE:

Swing Arm

MATERIAL:

Aluminum

DWG NO.

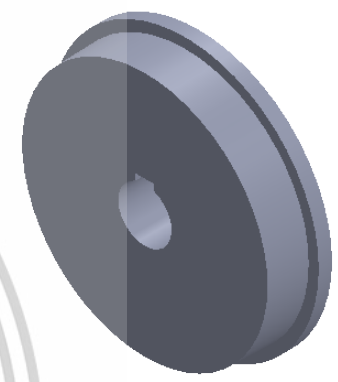
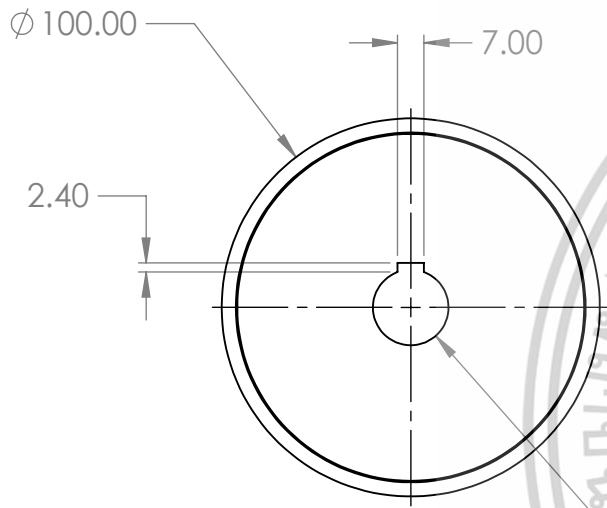
1-001

A4

SCALE:1:2

SHEET 2 OF 6

6 5 4 3 2 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:  
DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS

DEBURR AND  
BREAK SHARP  
EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

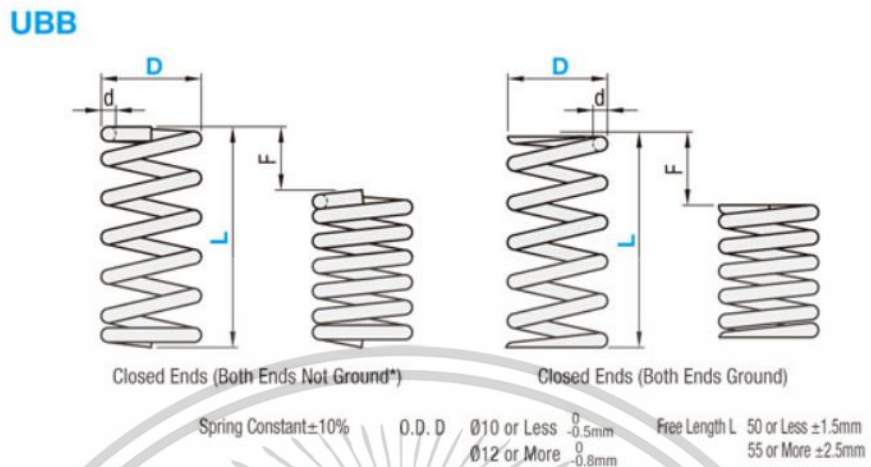
REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE
DRAWN	Techit		04/2024
REV	Kolawach		04/2024
CHK'D	Kolawach		04/2024
APPVD	Kolawach		04/2024

MATERIAL:  
**Steel**

TITLE: <b>Wheel</b>	
DWG NO. <b>1-004</b>	A4
SCALE:1:2	SHEET 5 OF 6

คุณสมบัติสปริง



รูปที่ ข.1 ภาพตัดของสปริง หน่วย mm [30]

ตารางที่ ข.1 แสดงคุณสมบัติสปริง

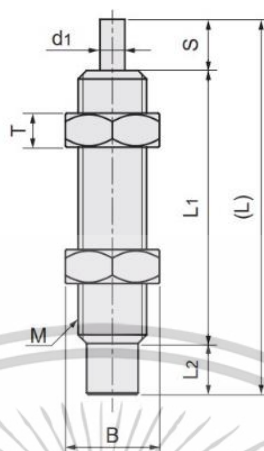
Part Number Type D-L	D	Solid Length	F max	Compression Force max (N)	Fa%	ตำแหน่งที่ติดตั้งในชุดทดลองเครื่องรถไฟขนาดย่อ
UBB20-25	2.9	16.7	6.25	184	25	เชื่อมต่อระหว่าง สวิงอาร์ม กับโครงเครื่องรถไฟ และใช้ในชุดทดสอบใช้ค้อพอย่างง่าย
UBB20-35	3	22.7	8.75	257		เชื่อมต่อระหว่าง ตัวรองรับ กับโครงเครื่องรถไฟ

โดยที่

$$F \text{ max (ระยะยุบตัวสูงสุด)} = L \times Fa\%$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## คุณสมบัติใช้ค้ำ



รูปที่ ข.2 Drawing ของใช้ค้ำ หน่วย mm [31]

ตารางที่ ข.2 แสดงคุณสมบัติใช้ค้ำแต่ละประเภท

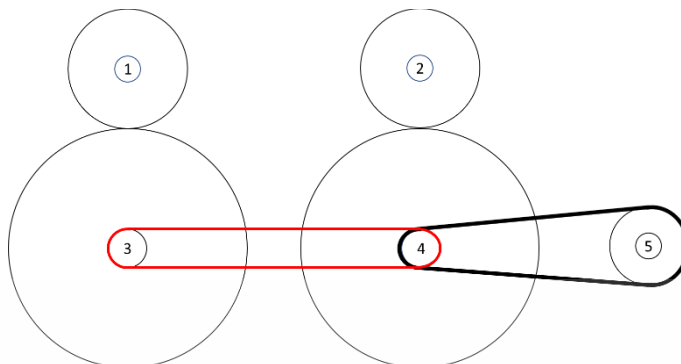
Part Number	Speed	Screw Diameter (M)	Stroke (S)	Maximum energy absorbed per time (J)	Maximum Collision Velocity (m/s)	(L)	(L <sub>1</sub> )	L <sub>2</sub>	d <sub>1</sub>
C-AC1008	L	M10 x 1.0	8	4	0.8	51	37	4	3
	M				1.5				
	H				3				

ตารางที่ ข.3 แสดงประเภทยอร์แดมเปอร์ของแคร่รถไฟขนาดย่อกับ Part number ใช้ค้ำ

ประเภทยอร์แดมเปอร์	Part Number	Speed	ตำแหน่งที่ติดตั้งและหน้าที่ในชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ
Low damping yaw damper	C-AC1008	H	เชื่อมต่อระหว่าง ตัวรองรับ กับ โครงแคร่รถไฟ เสมือนยอร์แดมเปอร์ในระบบรองรับรอง
High damping yaw damper		L	
Medium damping yaw damper		M	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### การคำนวณความเร็วรอบของมอเตอร์ที่เหมาะสมกับชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อ



รูปที่ ข.3 แสดงแผนผังวัตถุอิสระของชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อ

จากรูปที่ ข.3 แสดงให้เห็นถึงแผนผังวัตถุอิสระของชุดทดลองแควร์รถไฟขนาดย่อซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

หมายเลข 1 และ 2 คือ ชุดล้อของแควร์รถไฟขนาดย่อหน้าและหลังตามลำดับ

หมายเลข 3 และ 4 คือ ชุดล้อขับ (Roller driven) ของชุดทดลองด้านหน้าและด้านหลังตามลำดับ ทำหน้าที่ขับเคลื่อนชุดล้อแควร์รถไฟขนาดย่อเสมือนรถไฟวิ่งบนรางตรง

หมายเลข 5 คือ Timing pulley ที่ยึดกับมอเตอร์ส่งกำลัง (Driver)

โดยที่มีสายพานไทม์มิ่ง (Timing belt) ส่งกำลังจาก Timing pulley ที่หมายเลข 5 ไปยังชุดล้อขับหมายเลข 4 และส่งกำลังไปยังชุดล้อขับหมายเลข 3 ผ่านสายพานไทม์มิ่งเช่นกัน จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วรอบของ Pulley กับรัศมีของ Pulley

$$N_m / N_n = R_n / R_m \quad (\text{ข.1})$$

โดยที่

$N_m$  คือ ความเร็วรอบของ Driver pulley หน่วย rpm

$N_n$  คือ ความเร็วรอบของ Driven pulley ซึ่งเท่ากับความเร็วชุดล้อขับ หน่วย rpm

$R_m$  คือ รัศมีของ Driver pulley หน่วย m

$R_n$  คือ รัศมี Driven pulley ที่ยึดติดกับชุดล้อขับ หน่วย m

แทน  $m=5$  (Driver) และ  $n=4$  (Roller driven) ลงในสมการที่ ข.1 จะได้

$$N_5 / N_4 = R_4 / R_5 \quad (\text{ข.2})$$

ในทำนองเดียวกันชุดล้อขับหมายเลข 3 และ 4 ทำหน้าที่ขับเคลื่อนชุดล้อแคร่รถไฟขนาดย่อหมายเลข 1 และ 2 เขียนสมการที่ ข.1 ใหม่จะได้

$$N_4 / N_3 = R_3 / R_4 \quad (\text{ข.3})$$

$$N_4 / N_2 = R_2 / R_4 \quad (\text{ข.4})$$

$$N_3 / N_1 = R_1 / R_3 \quad (\text{ข.5})$$

โดยที่  $N_4 / N_3 = R_3 / R_4 = 1$  เนื่องจากรัศมีของชุดล้อขับมีขนาดเท่ากันจึงมีความเร็วรอบที่เท่ากัน และ  $R_1 = R_2$  และ  $N_1 = N_2$  เนื่องจากรัศมีของชุดล้อแคร่รถไฟขนาดย่อมีขนาดเท่ากันจึงมีความเร็วรอบที่เท่ากันเช่นกัน ดังนั้นแทนสมการที่ ข.4 ลงในสมการที่ ข.2 จะได้

$$N_5 = N_2 \frac{R_2}{R_5} \quad (\text{ข.7})$$

และความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วรอบ  $N$  ความเร็วเชิงมุม  $\omega$  (rad/s) และความเร็วเชิงเส้น  $V$  (m/s)

$$V = \omega R = \frac{60}{2\pi} NR$$

หรือ

$$N = \frac{2\pi V}{60R} \quad (\text{ข.8})$$

แทนสมการที่ ข.8 ลงในสมการที่ ข.7 จะได้

$$N_5 = \frac{2\pi}{60} \times \frac{V_2}{R_5} \quad (\text{ข.9})$$

เพื่อให้ชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อแสดงปรากฏการณ์การสั่นสะเทือนแบบฮันตั้งขณะทำการทดลองความเร็วของชุดล้อแคร่รถไฟขนาดย่อจะต้องเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าความเร็ววิกฤต  $V_{cr}$  ดังนั้นความเร็วรอบของมอเตอร์ที่เหมาะสมกับชุดทดลองแคร่รถไฟขนาดย่อ

$$N_5 > \frac{2\pi}{60} \times \frac{V_{cr}}{R_5} \quad (\text{ข.10})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก ค  
โปรแกรม Matlab แสดงการตอบสนองและ  
สเปกตรัมความถี่ของชุดทดสอบโซ่ค้ำอย่างง่าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

%{
'4 Sep Test Undamped 2 ME3.mat'
'5 Sep Test L damper 5.mat' for high damping yaw damper
'5 Sep Test M damper 4.mat' for medium damping yaw damper
'5 Sep Test H damper 5.mat' for low damping yaw damper
%}

clear
load('5 Sep Test M damper 4.mat')

t = Data1_time_AI_3_AI_3;
z = Data1_AI_3_AI_3;

z_smooth = smoothdata(z,"movmean",2000);
z_plot = -z_smooth;
%%
figure
plot(t,z_plot-mean(z_plot))
xlabel('$t$ [s]','Interpreter','latex')
ylabel('$\ddot{x}$ [m/s^2]','Interpreter','latex')
xlim([3 6])
title('\textbf{Including Shock Absorber Test}','Interpreter','latex')

%%
Fs = Sample_rate; % Sampling frequency
T = 1/Fs; % Sampling period
L = length(t); % Length of signal

%%
Z = fft(z-mean(z));
%%
figure
plot(Fs/L*(0:L-1),abs(Z))
xlim([0 50])
xlabel('$f$ [Hz]','Interpreter','latex')
ylabel('$|x(f)|$','Interpreter','latex')
title('\textbf{Including Shock Absorber Test}','Interpreter','latex')

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล                      เตชิต ศรีตระกูล  
วัน เดือน ปีเกิด                10 ตุลาคม 2542 จังหวัดนครราชสีมา  
ที่อยู่                                 เลขที่ 127 ซอยลาซาล 16 ถนนสุขุมวิท 105 แขวงบางนาใต้ เขตบางนา  
  กรุงเทพมหานคร 10260

### ประวัติการศึกษา:

2555 - 2561                      มัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง 6  
  (ได้รับทุนตลอดปีการศึกษา)  
  โรงเรียนจุฬารัตนราชวิทยาลัย เชียงราย  
2565                                 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมขนส่งทางราง  
  (เกียรตินิยมอันดับ 2)  
  สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

### ประสบการณ์การทำงาน:

2567 – 2568                      เจ้าหน้าที่แผนการปรับปรุงกระบวนการอย่างต่อเนื่อง  
  บริษัท เอ็มเค เรสโตรองค์ กรุ๊ป จำกัด (มหาชน)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้