การสร้างระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงด้วยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่และการประยุกต์ในการเข้ารหัสสื่อสาร

REALIZATION OF HIGH-COMPLEX CHAOTIC SYSTEM BASED ON NEW NONLINEAR FUNCTION AND ITS APPLICATION IN COMMUNICATION CRYPTOGRAPHY



คุณานนต์ คะระวานิช

KHUNANON KARAWANICH

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2567

KMITL-2024-EN-D-018-216

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

REALIZATION OF HIGH-COMPLEX CHAOTIC SYSTEM BASED ON NEW NONLINEAR FUNCTION AND ITS APPLICATION IN COMMUNICATION CRYPTOGRAPHY

KHUNANON KARAWANICH

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF ENGINEERING PROGRAM IN ELECTRICAL ENGINEERING
SCHOOL OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2024

KMITL-2024-EN-D-018-216

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COPYRIGHT 2024
SCHOOL OF ENGINEERING
KINGMONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การสร้างระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงด้วยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่และการประยุกต์ในการเข้ารหัสสื่อสาร
นักศึกษา	นายคุณานนต์ คะระวานิช
รหัสประจำตัว	**64601023**
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	**2567**
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.พิพัฒน์ พรหมมี

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้นำเสนอระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูง ด้วยการดัดแปลงพื้นฐานแบบจำลองการกระตุก ร่วมกับฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่ คือ ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม (Modified rectangular function) ระบบที่ออกแบบมีพฤติกรรมซับซ้อนสูงด้วยลักษณะสี่วงม้วน ถูกยืนยันด้วยค่า มิติ Kaplan-Yorke (D_{KY}) สูงถึง 2.65 เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นที่มีความเกี่ยวข้องกัน ระบบที่นำเสนอสามารถแสดงพฤติกรรมพลวัตได้หลากหลาย มีการตรวจสอบโดยใช้เครื่องมือในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข กราฟิก อย่างครอบคลุม รวมถึงดึงศักยภาพด้านต่างๆของระบบที่ออกแบบออกมาใช้ ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ เช่น แผนภาพ Bifurcation แบบกิ่งขนาน (Bifurcation parallel branches) การวิเคราะห์ความหลายเสถียรภาพร่วมกับ Basin of attraction การใช้ phase portraits แสดงผลเส้นทางสู่เคออส กราฟทดสอบ 0-1 แผนภาพ Poincare การเพิ่มตัวแปรควบคุมขนาดและออฟเซ็ตของระบบเพื่อตรวจสอบคุณสมบัติพิเศษ เป็นต้น นอกจากนี้ สัญญาณเคออสลักษณะสองวงม้วนอีก 2 รูปแบบถูกนำเสนอร่วมด้วย จากการเปลี่ยนตำแหน่งฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นของระบบที่นำเสนอ ในงานนี้มีการออกแบบวงจรเพื่อยืนยันผลการนำไปใช้จริงทางวิศวกรรม วงจรถูกออกแบบโดยใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA ร่วมกับตัวเก็บประจุต่อลงกราวด์ ผลที่ได้จากวงจรถูกเปรียบเทียบกับผลเชิงตัวเลขจากโปรแกรม MATLAB พบว่าผลที่ได้สอดคล้องกันทุกประการ โดยระบบที่ออกแบบมีความซับซ้อนของสัญญาณเคออสที่ค่อนข้างสูงด้วยรูปแบบหลายวงม้วน ทำให้มีความไวต่อสถานะเริ่มต้นสูง ระบบดังกล่าวจึงมีเหมาะสมในการนำไปเพิ่มความปลอดภัยสำหรับการประยุกต์เทคโนโลยีเข้ารหัส (Cryptography)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis	REALIZATION OF HIGH-COMPLEX CHAOTIC SYSTEM BASED ON NEW NONLINEAR FUNCTION AND ITS APPLICATION IN COMMUNICATION CRYPTOGRAPHY
Student	Mr.Khunanon Karawanich
Student ID	**64601023**
Degree	Doctor of Engineering
Program	Electrical Engineering
Year	**2024**
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pipat Prommee

ABSTRACT

This thesis presents a high complex chaotic system with modifying Jerk model in combine with the new nonlinear function viz modified rectangular function. The proposed system has high complex chaos with four-scroll attractor. The complexity can be achieved up to 2.65, as evident in the comparatively high Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}) which higher than related other four-scroll chaotic system. The proposed system has several dynamic behaviors. The examination of dynamical is comprehensively analyzed and simulated through many tools including the bifurcation parallel branches, multistability confirmed with basin of attraction, phase portraits to illustrated route to chaos, 0-1 test chart, Poincare map, amplitude control and offset boosting for special features of chaotic system etc. Additionally, the new two double-scroll chaotic attractor are included by placing nonlinear functions at different positions in the proposed system. The circuits of the proposed chaotic systems can be conveniently realized using commercially available operational transconductance amplifiers (OTAs) and grounded capacitors. The performances of the circuit are also proven through the experimental results compared with the numerical results on MATLAB and are good agreement. The proposed system has high complex signal with multi-scroll (Four-scroll), affect to highly sensitive to initial condition which are suitable for applying in the secure communication for cryptography.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. พิพัฒน์ พรหมมี อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูงที่สุด

ที่ช่วยกรุณาให้คำแนะนำ แนวทางในการแก้ไขปัญหา สอนให้ทำงานหนักและมีหลักการคิดในการดำเนินชีวิตอย่างมีคุณภาพ สอนให้มีระเบียบวินัย รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีความมุมานะในการเจอปัญหาด้านต่างๆ คอยอบรมสั่งสอนทั้งในด้านวิชาการและการใช้ชีวิตประจำวัน อีกทั้งคอยติดตามดูแลงานไม่เคยขาดตกบกพร่อง ฝึกฝนให้ผู้เขียนมีความสามารถในการทำวิทยานิพนธ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและราบรื่นตลอดระยะเวลาที่ศึกษา ทั้งนี้จะขอนำสิ่งที่อาจารย์ที่ปรึกษาได้สั่งสอนไปใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อส่วนตนและส่วนร่วมให้ได้มากที่สุด และสำคัญที่สุด “คนรุ่นใหม่ต้องเก่งกว่าคนรุ่นเก่า”

ขอขอบพระคุณ คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่าน ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ตลอดจนคณาจารย์ในหลักสูตรวิศวกรรมโทรคมนาคม ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังทุกท่าน ที่ได้ถ่ายทอดความรู้ประสบการณ์ตลอดจนให้คำชี้แนะ จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา (รองผู้อำนวยการฝ่ายพยาบาลอันธิกา คะระวานิช และนายแพทย์ปราโมทย์ คะระวานิช) ที่ให้กำเนิดชีวิตและเลี้ยงดูให้ผู้เขียนเติบโตขึ้นมา ทั้งยังสนับสนุนการศึกษาทั้งด้านกำลังทรัพย์และกำลังใจให้กับผู้เขียนตลอดมา รวมถึงน้องสาว (นางสาวพรธิศยา คะระวานิช) และแฟน (นางสาวนภาพร ศีรกุล) ที่คอยเป็นกำลังใจและจัดการธุระสำคัญแทนให้ตลอดการศึกษา ทำให้ผู้เขียนทุ่มเทกับการศึกษาได้อย่างเต็มที่

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ พี่ ๆ น้อง ๆ ชาวห้อง T-108A (T112) ที่คอยให้คำปรึกษาหารือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นทางวิชาการตลอดระยะเวลาที่ผู้เขียนได้ศึกษาอยู่ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง นายจิรัฏฐ์ ฉิมน้อย ดร.ณรงค์ศักดิ์ มโนสิทธิชัย และ ผศ.ดร.ณัฐพงศ์ วงศ์พร้อมมูล ที่ได้ช่วยเหลือ แนะนำวิธีการศึกษา ให้ความรู้แลกเปลี่ยนประสบการณ์ ลงมือปฏิบัติงาน และร่วมแสดงความคิดเห็นตลอดมา

สุดท้ายนี้ผู้เขียนหวังว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้อ่านไม่มากก็น้อย หากมีข้อผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

คุณานนต์ คะระวานิช

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้าที่
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	X
สารบัญตาราง	XXII
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมา เคออส (Chaos)	1
1.1.1. การศึกษาระบบเคออสและเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา	2
1.1.2. การศึกษาวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส	4
1.2 จุดมุ่งหมายและจุดประสงค์ของวิทยานิพนธ์	6
1.3 หลักการใหม่ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์	7
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์	7
1.5 รายละเอียดในวิทยานิพนธ์	8
1.6 เครื่องมือที่เกี่ยวข้อง	8
บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง	9
2.1 บทนำ	9
2.2 ความเสถียรภาพ (Stability)	10
2.2.1 วิเคราะห์ความเสถียรภาพด้วยระบบไม่เป็นเชิงเส้นหนึ่งมิติ (Nonlinear a dimension stability analysis)	11
2.2.2 วิเคราะห์ความเสถียรภาพของระบบพลวัตหรือระบบไม่เป็นเชิงเส้นสามมิติ (analysis stability of dynamical or nonlinear 3-dimension system)	12
2.2.2.1 การแปลงระบบพลวัตกลายเป็นเชิงเส้น (Linearization of dynamic system)	14
2.3 ทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov (Lyapunov exponent)	19
2.3.1 หลักการพื้นฐานของ Lyapunov exponent	20
2.3.2 สเปกตรัมเลขชี้กำลัง Lyapunov (The Lyapunov exponent spectrum)	21
2.3.3. มิติ Lyapunov (Lyapunov Dimension)	22

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้าที่
2.3.4. อัลกอริทึมของเลขชี้กำลัง Lyapunov (Algorithm's Lyapunov exponent)	24
2.4 ทฤษฎีการทดสอบไบนารี่ (0 - 1 test method) สำหรับระบบเคออส	27
2.4.1 หลักการพื้นฐานของ 0 – 1 test สำหรับเคออส	27
2.4.2 หลักการที่ปรับปรุงใหม่ของ 0 – 1 test เพื่อใช้ในระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา	28
2.5 ทฤษฎีการแยกไปสองทาง (The Bifurcation)	31
2.5.1 ช่วงการเกิดทวีค่า (period doubling)	33
2.5.2 การแกว่งรูปแบบเคออส (Chaos aperiodic)	36
2.6 ทฤษฎีความหลายเสถียรภาพ (Multistability)	38
2.6.1 การค้นหาความหลายเสถียรภาพในระบบเคออส (multistability detection in chaotic system)	38
2.6.2. Basin of attraction	41
2.7 ระบบเคออสแบบหลายวงม้วน (Multi-scroll chaotic system)	41
2.7.1 ระบบเคออสหลายวงม้วน แบบจำลอง Chua	42
2.7.2 ความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบเคออสหลายวงม้วน (Sensitive to initial condition of multi-scroll chaotic system)	46
2.7.3 ความหลากหลายของพฤติกรรมพลวัตบนระบบเคออสหลายวงม้วน (The several dynamic behaviors of multi-scroll chaotic system)	49
2.8 ระบบเคออสอนุพันธ์อันดับสูง เคออสแบบไฮเปอร์ (HyperChaotic system)	51
2.8.1. ระบบไฮเปอร์เคออสอันดับสี่จากแบบจำลองของLorenz (The Four-Dimensional Modified Lorenz System)	52
2.8.2 ระบบไฮเปอร์เคออสอันดับห้า (A Novel 5-D Hyperchaotic System)	55
2.8.3 ระบบไฮเปอร์เคออสแบบกระตุกอันดับสี่ (A Novel 4-D HyperJerk System)	57
2.8.3.1 บทนำ	57
2.8.3.2. การออกแบบระบบไฮเปอร์เคออสแบบกระตุกอันดับสี่	58
2.9 วงจรขยายความนำถ่ายโอน (Operational Transconductance Amplifier: OTA)	60
2.9.1 วงจรคู่อีมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล (Differential Pairs)	61

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้าที่
2.9.2 โอทีเอโดยใช้ไบโพลาร์ทรานซิสเตอร์	64
2.10 ทฤษฎีและหลักการกำเนิดสัญญาณ	66
2.10.1 การวิเคราะห์ฟังก์ชันโครงข่ายสำหรับการกำเนิดสัญญาณ	66
2.10.2 หลักการกำเนิดสัญญาณพื้นฐาน	68
2.10.3 หลักการกำเนิดสัญญาณโพลิโนเมียลอันดับสาม	69
2.11 บทสรุป	70
บทที่ 3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	71
3.1 บทนำ	71
3.1.1 โครงสร้างของระบบเคออส (Structure of chaotic system)	71
3.1.2 ความหลากหลายในการศึกษาระบบเคออส (Diversity in the study of chaos systems)	72
3.1.3 ค่าความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออส (Complexity of chaotic behavior)	73
3.1.4 การสร้างวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส (Designing of chaotic oscillator)	74
3.2 ระบบเคออสตัวดึงดูดสี่วงม้วนแบบใหม่ โดยมีสองความเสถียรภาพ	75
3.2.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต	76
3.2.2 ลักษณะความสมมาตร (Symmetric characteristic)	77
3.2.3 การวิเคราะห์พลวัตที่หลากหลายของระบบ	77
3.2.4 การควบคุมขนาดของระบบ (Amplitude control of system)	80
3.2.5 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของ Chunbiao Li	81
3.3 ระบบเคออสแบบใหม่ด้วยลักษณะสี่วงม้วนรูปดาว	83
3.3.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต	84
3.3.2 การออกแบบเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบสี่วงม้วนรูปดาว	86
3.4 ระบบเคออสสามมิติสามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนด้วยฟังก์ชันกำลังสองเป็นชิ้น	88
3.4.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต	89
3.4.1.1 วิเคราะห์การกระจายตัวและความสมมาตร	90
3.4.2 วิเคราะห์ bifurcation และเส้นทางสู่พฤติกรรมสี่วงม้วน	91

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้าที่
3.4.2.1 วิเคราะห์พลวัตเชิงลึกด้วยการตรวจสอบคู่พารามิเตอร์และความหลายเสถียรภาพ (Multistability)	93
3.4.3 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส	95
3.5 ระบบเคออสสามมิติด้วยลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนพร้อมมีการลดรูป	98
3.5.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต	99
3.5.2 คุณสมบัติการจัดรูปเพื่อลดความซับซ้อนของระบบ (The simplified system)	100
3.5.3 การวิเคราะห์ the bifurcation และพฤติกรรมพลวัตต่างๆ	102
3.5.4 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส	105
3.6 บทสรุป	107
บทที่ 4 ระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงด้วยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่	108
4.1 บทนำ	108
4.2 หลักการออกแบบระบบเคออสที่นำเสนอ	109
4.2.1 โครงสร้างระบบเคออสที่นำเสนอโดยดัดแปลงจากแบบจำลองการกระตุก	109
4.2.2 การออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่	111
4.3 วิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานของระบบเคออสที่ออกแบบ	115
4.3.1 วิเคราะห์ความเสถียรภาพ	115
4.3.2 เลขชี้กำลัง Lyapunov และมิติ Kaplan-Yorke	118
4.3.3 วิเคราะห์การกระจายตัวของระบบ (Dissipative of the system)	120
4.3.4 วิเคราะห์ความสมมาตรของระบบ	121
4.4. ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตโดยการจำลองเชิงตัวเลขของระบบเคออสที่ออกแบบ	121
4.4.1 ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบสี่วงม้วนใน (4.3)	121
4.4.1.1. ตรวจสอบพารามิเตอร์ของระบบด้วยแผนภาพ Bifurcation	122
4.4.1.2 เส้นทางสู่พฤติกรรมเคออส (route to chaos behavior) ของระบบสี่วงม้วน	123
4.4.1.3 วิเคราะห์ Bifurcation ที่มีอิทธิจากพารามิเตอร์อื่นของระบบ	126

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้าที่

4.4.1.4 คุณสมบัติพิเศษของระบบสี่วงม้วนจากการควบคุมขนาดและเพิ่มออฟเซ็ตของระบบ 128

4.4.2 การตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบเคออสสองวงม้วนใน (4.1) และ (4.2) 130

4.4.3. การตรวจสอบสถานการณ์หลายเสถียรภาพ 135

4.5 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบที่ออกแบบ 138

4.5.1 ตัวกรองความถี่ต่ำผ่านไบควอดโดยใช้ OTA 139

4.5.2 วงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นดัดแปลงสี่เหลี่ยม โดยใช้ OTA 140

4.5.3 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสที่นำเสนอ 141

4.5.4 ผลการทดลองจริง (Experimental results) 143

4.5.4.1 ผลการกำเนิดสัญญาณเคออสวงจร PCB สำหรับระบบเคออสสี่วงม้วนที่ (4.3) 144

4.5.4.2 ผลการกำเนิดสัญญาณเคออสวงจร PCB สำหรับระบบเคออสสองวงม้วนที่ (4.1) 146

4.5.4.3 ผลการกำเนิดสัญญาณเคออสวงจร PCB สำหรับระบบเคออสสองวงม้วนที่ (4.2) 148

4.6 สัญญาณเคออสลักษณะอื่นจากโครงสร้างที่ออกแบบ และการนำไปประยุกต์ใช้ความปลอดภัยด้านการสื่อสาร (“ส่วนเพิ่มเติม”) 151

4.6.1 การสร้างสัญญาณเคออสสี่วงม้วนโดยใช้สองฟังก์ชันที่แตกต่างกันจากโครงสร้างที่ออกแบบ 151

4.6.1.1 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสและผลการทดลองจริงสำหรับระบบ M1 155

4.6.1.2 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสและผลการทดลองจริงสำหรับระบบ M2 158

4.6.2 การนำระบบเคออสมาประยุกต์ใช้ความปลอดภัยด้านการสื่อสารในการเข้ารหัสรูปภาพ (Image cryptography communication) 162

4.6.2.1 การใช้หน้ากากเคออสในการสื่อสาร (Chaotic Masking communication) 164

4.6.2.2 ประยุกต์ใช้ในการเข้ารหัสลับรูปภาพด้วยระบบเคออส (Chaotic Image cryptography) 169

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้าที่
4.7 บทสรุป	175
บทที่ 5 บทสรุปและข้อเสนอแนะในการพัฒนางานวิจัย	178
5.1 บทสรุป	178
5.2 ข้อเสนอแนะในการพัฒนางานวิจัย	179
เอกสารอ้างอิง	180
ภาคผนวก	188
ภาคผนวก ก โปรแกรมที่ใช้ในการจำลองผลเชิงตัวเลขสำหรับ MATLAB	189
ภาคผนวก ข ผลงานที่ได้รับการตีพิมพ์ระหว่างการศึกษา	200
ประวัติผู้เขียน	268

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของพฤติกรรมเคออสในสาขาต่างๆ	1
รูปที่ 1.2 ตัวอย่างสถานการณ์สำหรับทฤษฎีผลกระทบปีกผีเสื้อ โดยมีจุดเริ่มต้นที่แตกต่างกัน 2 เหตุการณ์	3
รูปที่ 1.3 วงจรอิเล็กทรอนิกส์กำเนิดสัญญาณเคออสวงจรแรก โดย Leon Ong Chua	5
รูปที่ 2.1 แผนผังหัวข้อทฤษฎีที่เกี่ยวข้องของวิทยานิพนธ์	10
รูปที่ 2.2 (ก) กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ -1 และจุดคงที่ x_* (ข) ชนิดของความเสถียรภาพ	11
รูปที่ 2.3 การเคลื่อนที่ลู่เข้าและลู่ออกสำหรับจุดคงที่แบบเสถียรและไม่เสถียร ตามลำดับ	12
รูปที่ 2.4 ภาพจำกัดความพื้นฐานของตัวแปรเลขชี้กำลัง Lyapunov	21
รูปที่ 2.5 ลักษณะของชนิดตัวดึงดูดบนพื้นที่เฟสสามมิติ	23
รูปที่ 2.6 phase portrait แสดงลักษณะวงรอบจำกัดของระบบ Lorenz ที่พารามิเตอร์ ρ =7.5	25
รูปที่ 2.7 แสดงผลการคำนวณเชิงปริมาณเลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบ Lorenz ด้วยอัลกอริทึม Wolf ที่พารามิเตอร์ ρ =7.5 (ก) แสดงผลการคำนวณบนอนุกรมเวลา (ข) แสดงค่าการคำนวณที่ได้ของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งสามค่าบนหน้าต่างคำสั่ง	26
รูปที่ 2.8 phase portrait แสดงลักษณะตัวดึงดูดของระบบ Lorenz ที่พารามิเตอร์ ρ = 2	26
รูปที่ 2.9 แสดงผลการคำนวณเชิงปริมาณเลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบ Lorenz ด้วยอัลกอริทึม Wolf ที่พารามิเตอร์ ρ = 2 (ก) แสดงผลการคำนวณบนอนุกรมเวลา (ข) แสดงค่าการคำนวณที่ได้ของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งสามค่าบนหน้าต่างคำสั่ง	27
รูปที่ 2.10 phase portrait แสดงลักษณะวิถีวงโคจรของระบบ Lorenz บนแกน *x-y-z* โดย (ก) ลักษณะวิถีวงโคจรเมื่อพารามิเตอร์ *c*=7.2 (ข) ลักษณะวิถีวงโคจรเมื่อพารามิเตอร์ *c*=-1	30
รูปที่ 2.11 พล็อต 0 - 1 test บนระนาบ (p, s) ของระบบ Lorenz โดย (ก) *c*=7.2 (*K*=0.0736) (ข) *c*=-1 (*K*=0.7630)	30
รูปที่ 2.12 กราฟแสดงความสัมพันธ์สมการ Logistic map	32
รูปที่ 2.13 แผนภาพการแยกไปสองทาง (Bifurcation diagram)	33
รูปที่ 2.14 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k<1	34
รูปที่ 2.15 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=1.1	34
รูปที่ 2.16 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=2.7	35
รูปที่ 2.17 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=3	35
รูปที่ 2.18 แสดงเส้นวงโคจรที่พารามิเตอร์ k=3	35

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 2.19 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=3.4	36
รูปที่ 2.20 แสดงเส้นวงโคจรที่พารามิเตอร์ k=3.4	36
รูปที่ 2.21 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=3.8	37
รูปที่ 2.22 แสดงเส้นวงโคจรที่พารามิเตอร์ k=3.8	37
รูปที่ 2.23 แผนภาพ Bifurcation ปกติสำหรับ k ในช่วง $0.5 \le k \le 1$ โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเพียงชุดเดียว	39
รูปที่ 2.24 แผนภาพ Bifurcation ปกติสำหรับ k ในช่วง $0.5 \le k \le 1$ โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นต่างกันที่ x_0=0.1 สีดำ และ x_0=-0.1 สีแดง	39
รูปที่ 2.25 ผลลัพธ์บน phase portraits สำหรับ k=1 และ k=0.94 โดยสอดคล้องกับแผนภาพ Bifurcation ในรูปที่ 2.24 (ก) ลักษณะวงรอบจำกัด 2 วงที่ไม่สมมาตร (ข) ลักษณะหนึ่งวงม้วนหนึ่งคู่ที่สมมาตร	40
รูปที่ 2.26 Basin of attraction บนระนาบ x_0-y_0 สำหรับผลลัพธ์ในรูปที่ 2.25 (ก) สอดคล้องกับคู่วงรอบจำกัดในรูปที่ 2.25 (ก) ตามสีดำและสีแดง (ข) สอดคล้องกับคู่หนึ่งวงม้วนในรูปที่ 2.25 (ข) ตามสีดำและสีแดง	41
รูปที่ 2.27 วงจรอิเล็กทรอนิกส์ Chua และลักษณะของฟังก์ชัน PWL	42
รูปที่ 2.28 ผลลัพธ์ของ n-สองวงม้วน (n=2) (ก) ระนาบ V_{C2}-V_{C1} (ข) เอาต์พุต V_{C1} แกนเวลา	43
รูปที่ 2.29 ผลลัพธ์ของ n-สองวงม้วน (n=3) (ก) ระนาบ V_{C2}-V_{C1} (ข) เอาต์พุต V_{C1} แกนเวลา	43
รูปที่ 2.30 เปรียบเทียบลักษณะสัญญาณเคออสระหว่าง สองวงม้วนดั้งเดิมของ Chua และแบบดัดแปลงโดย Suykens แบบ 3-สองวงม้วน	44
รูปที่ 2.31 แผนผังขั้นตอนการโจมตีหรือคัดลอกข้อมูลเพื่อกู้คืนข้อมูลสัญญาณ	45
รูปที่ 2.32 ลักษณะฟังก์ชันสัญลักษณ์พื้นฐานของ Sportt โดยกำหนด A=1, B=0.3	46
รูปที่ 2.33 ลักษณะฟังก์ชันสัญลักษณ์เพิ่มจุดหักฟังก์ชัน โดยกำหนด C=1, D=1	46
รูปที่ 2.34 แสดงลักษณะตัวดึงดูดบนระนาบ x-y (ก) แบบสองวงม้วน ที่ k=0.7 (ข) แบบสี่วงม้วน ที่ k=0.7	47
รูปที่ 2.35 แสดงความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับระบบ “สองวงม้วน” (ก) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับตัวแปรเริ่มต้น x_0 (ข) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับพารามิเตอร์ k	48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 2.36 แสดงความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับระบบ “สี่วงม้วน” (ก) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับตัวแปรเริ่มต้น x_0 (ข) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับพารามิเตอร์ k	48
รูปที่ 2.37 แผนภาพ Bifurcation พร้อมการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตสำหรับพารามิเตอร์ A ของระบบเคออสแบบ “สองวงม้วน”	49
รูปที่ 2.38 แผนภาพ Bifurcation พร้อมการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตสำหรับพารามิเตอร์ C ของระบบเคออสแบบ “สี่วงม้วน”	49
รูปที่ 2.39 ลักษณะตัวดึงดูดไฮเปอร์เคออสของรอสเลอร์ บนแกน x-y	52
รูปที่ 2.40 Lyapunov exponents เทียบกับพารามิเตอร์ d ในช่วง 0 ถึง 0.9 โดยกำหนด c=2.7	53
รูปที่ 2.41 แสดงลักษณะตัวดึงดูดแบบไฮเปอร์ทั้ง 5 ระนาบ โดยกำหนด c=2.7, d=0.44 (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z (ค) ระนาบ x-u (ง) ระนาบ y-u (จ) ระนาบ y-z	54
รูปที่ 2.42 แสดงลักษณะตัวดึงดูดแบบไฮเปอร์เคออสบนระนาบ 3 มิติ ของระบบที่ (2.61) โดยระนาบ x_1-x_3-x_5 (ข) ระนาบ x_1-x_2-x_3 (ค) ระนาบ x_2-x_3-x_4 (ง) ระนาบ x_3-x_4-x_5	56
รูปที่ 2.43 แสดงลักษณะตัวดึงดูดของระบบไฮเปอร์การกระตุกบนระนาบ 2 มิติ (ก) ระนาบ x_1-x_2 (ข) ระนาบ x_1-x_3 (ค) ระนาบ x_2-x_3 (ง) ระนาบ x_1-x_4	59
รูปที่ 2.44 แสดงลักษณะตัวดึงดูดของระบบไฮเปอร์การกระตุกบนระนาบ 3 มิติ (ก) ระนาบ x_1-x_2-x_3 (ข) ระนาบ x_1-x_2-x_4	59
รูปที่ 2.45 (ก) สัญลักษณ์ และ (ข) วงจรสมมูล	60
รูปที่ 2.46 วงจรคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล (ECP) โดยใช้ไบโพลาร์	61
รูปที่ 2.47 กระแสคอลเลคเตอร์ของวงจรคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล โดยป้อนอินพุตแรงดันผลต่าง	63
รูปที่ 2.48 ผลต่างแรงดันเอาต์พุต V_{od} ของวงจรขยายคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล โดยป้อนแรงดันอินพุตผลต่าง	64
รูปที่ 2.49 วงจรไบโพลาร์โอทีเอ (BJT-OTA)	65
รูปที่ 2.50 กระแสเอาต์พุต I_O ของวงจรไบโพลาร์โอทีเอ โดยปรับกระแสไบอัส I_B [20uA 40uA 60uA80uA และ 100uA]	65
รูปที่ 2.51 ค่าความนำถ่ายโอน (gm) ของวงจรไบโพลาร์โอทีเอ โดยปรับกระแสไบอัส I_B [20uA 40uA 60uA 80uA และ 100uA]	66
รูปที่ 2.52 ตัวอย่างโพลและซีโร่ของฟังก์ชันโครงข่าย	66

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 2.53 กราฟฟังก์ชันลู่ออก	67
รูปที่ 2.54 ตำแหน่งโพลและซีโร่ของฟังก์ชันที่เกิดการกำเนิดสัญญาณ	67
รูปที่ 2.55 กราฟฟังก์ชันการกำเนิดสัญญาณ	68
รูปที่ 2.56 ระบบป้อนกลับแบบบวก	68
รูปที่ 3.1 ลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน (Four-scroll attractor) (ก) 3 มิติ (ข) ระนาบ x-y (ค) ระนาบ x-z (ง) ระนาบ y-z	75
รูปที่ 3.2 แผนภาพ Poincaré ที่ระนาบ x-z และ x-y ตามลำดับ โดยที่ (ก) y=-0.7 (ข) z=-3	76
รูปที่ 3.3 ขอบเขตของพฤติกรรมพลวัติต่างๆ สำหรับพารามิเตอร์ a และ b โดยที่ m=1 ในสำหรับพื้นที่สีแดงคือ พฤติกรรมเคออส พื้นที่สีน้ำเงินคือ พฤติกรรมเป็นคาบ (Periodic หรือ ลิ้นของ Arnold) พื้นที่สีเขียวคือ จุดคงที่	78
รูปที่ 3.4 แสดง phase portraits บนระนาบ $y-z$ โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับความสมมาตรที่ $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 1, \mp 1, 1)$ สำหรับสีแดงและสีเขียว ตามลำดับ (ก) ค่สมมาตรวงรอบจำกัด a=4.5, b=8 (ข) คู่วงรอบจำกัด a=8, b=8 (ค) ตัวดึงดูดสองวงม้วนคล้ายปีกผีเสื้อ a=10, b=0 (ง) คู่สมมาตรจุดคงที่ a=0.11, b=2 (จ) คู่วงรอบจำกัด a=0.12, b=2 (ฉ) ตัวดึงดูดสี่วงม้วน a=0.45, b=2	79
รูปที่ 3.5 คู่สมมาตรที่มีอยู่ร่วมกัน (Coexisting symmetric pair) ของตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน เมื่อ a=11,b=-9 (ก) Phase portraits บนระนาบ y-z โดยสีแดงและสีเขียวสอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0) = (0, \pm 1, 0)$ ตามลำดับ (ข) The basin of attraction ที่ x_0=0	80
รูปที่ 3.6 การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดสี่วงม้วนและคู่สมมาตรวงรอบจำกัด เมื่อ a=16.5, b=10 (ก) Phase portraits บนระนาบ y-z โดยสีน้ำเงินสอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ สีแดงและสีเขียว สอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 1, \pm 2.5, 1)$ ตามลำดับ (ข) The basin of attraction ที่ x_0=0	80
รูปที่ 3.7 Phase portraits บนระนาบ x-y โดยปรับขนาดด้วยพารามิเตอร์ m	81
รูปที่ 3.8 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสลักษณะสี่วงม้วน และพารามิเตอร์ปรับขนาด (Amplitude: R_7)	82
รูปที่ 3.9 ลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z	83
รูปที่ 3.10 Phase portraits ของตัวดึดดูดสี่วงม้วนรูปดาว (Stellate) แบบ 2 มิติและ 3 มิติ (ก) ระนาบ x - y (ข) ระนาบ y – z (ค) ระนาบ x – z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z	84

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 3.11 เลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนรูปดาว	85
รูปที่ 3.12 สเปกตรัม Lyapunov โดยปรับพารามิเตอร์ c และคงที่ a=4, b=0.5 (ก) ภาพรวมสเปกตรัม Lyapunov (ข) สเปกตรัม Lyapunov ที่ใหญ่สุดของระบบที่มีค่าเป็นบวกตลอดช่วง	86
รูปที่ 3.13 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบสี่วงม้วนรูปดาวที่นำเสนอ	87
รูปที่ 3.14 สัญญาณเอาต์พุตที่แรงดัน V(x), V(y), V(z) ของวงจร	87
รูปที่ 3.15 Phase portraits 2 มิติของวงจรที่เอาต์พุต (ก) ระนาบ V(x)-V(y) (ข) ระนาบ V(x)-V(z) (ค) ระนาบ V(y)-V(z)	88
รูปที่ 3.16 Phase portraits ของพฤติกรรมสี่วงม้วน (ก) 2 มิติ ระนาบ x-y (ข) 2 มิติ ระนาบ x-z (ค) 2 มิติ ระนาบ y-z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z	89
รูปที่ 3.17 เลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบสี่วงม้วนด้วยฟังก์ชันกำลังสองเป็นชิ้น	90
รูปที่ 3.18 ตรวจสอบพารามิเตอร์ a ในช่วง $0.1 \le a \le 7$ (ก) แผนภาพ Bifurcation บนเอาต์พุต y_{max} ที่สอดคล้องกับ (ข) สเปกตรัม Lyapunov ที่สูงสุดของระบบ	91
รูปที่ 3.19 Phase portraits ของเส้นทางสู่พฤติกรรมเคออส (Route to chaos) โดยปรับพารามิเตอร์ a ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(0, ±5, 0) สำหรับสีเขียวและสีแดงตามลำดับ (ก) เป็นคาบ-1 วงรอบจำกัด ที่ a=0.3 (ข) หนึ่งวงม้วน ที่ a=0.5 (ค) สองวงม้วน ที่ a=2 (ง) เป็นคาบ-1 วงรอบจำกัด ที่ a=2.9 (จ) เป็นคาบ-4 วงรอบจำกัด ที่ a=3 (ฉ) หนึ่งวงม้วน ที่ a=3.5 (ช) สี่วงม้วน ที่ a=5	92
รูปที่ 3.20 แสดงแผนภาพ bifurcation แบบสองพารามิเตอร์ โดยเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงของสองพารามิเตอร์ คือ (ก) พารามิเตอร์ a-b (ข) พารามิเตอร์ c-b (ค) พารามิเตอร์ c-a โดยที่สีชมพู คือพฤติกรรมเป็นคาบ สีน้ำเงิน คือ พฤติกรรมเคออส สีเขียว คือ ไม่มีการกำเนิดสัญญาณ และสีแดง คือไร้ขอบเขต โดยกำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0, 5, 0)	93
รูปที่ 3.21 แสดงแผนภาพความเสถียร Lyapunov (Lyapunov stability diagram) ของคู่พารามิเตอร์สำหรับ (ก) a - b (ข) c - b (ค) c - a โดยกำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0, 5, 0) พื้นที่สีน้ำเงินและสีฟ้าหมายถึง ช่วงพฤติกรรมเป็นคาบ (เลขชี้กำลังเป็นลบ) และพื้นที่สีอื่นๆ หมายถึงพฤติกรรมเคออส (เลขชี้กำลังเป็นบวก)	94

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 3.22 การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดที่แตกต่างกันสี่แบบ หรือ สองคู่สมมาตร (Coexistence of four difference attractor) โดยแสดง (ก-ข) คู่ของตัวดึงดูดเคออส ร่วมกับ (ค-ง) คู่ของเป็นคาบ-3 วงรอบจำกัด รูป ก-ง สอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0)=(0, \pm 1, 0)$ และ $(x_0, y_0, z_0)=(0, \pm 1.35, 0)$ ตามลำดับ	95
รูปที่ 3.23 The basin of attraction ของคู่เงื่อนไขเริ่มต้น คงที่พารามิเตอร์ a=3.573, b=15, c=3.9 โดยกำหนด (ก) x_0=0 (ข) y_0=0 (ค) z_0=0 พื้นที่สีน้ำเงินและเหลือง คือ พฤติกรรมเป็นคาบ พื้นที่สีชมพูและเขียว พฤติกรรมเคออส พื้นที่สีแดง คือ ไร้ขอบเขต	95
รูปที่ 3.24 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสระบบสี่วงม้วนด้วยฟังก์ชันกำลังสองเป็นชิ้น	96
รูปที่ 3.25 Phase portraits ผลการจำลองบน PSpice โดยแสดงลักษณะตัวดึงดูดสองวงม้วน ที่ Ra_1=25kΩ Ra_2=5kΩ (ก) ระนาบ V(x) – V(z) (ข) ระนาบ V(x) – V(z) (ค) ระนาบ V(y) – V(z)	97
รูปที่ 3.26 Phase portraits ผลการจำลองบน PSpice โดยแสดงลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน ที่ Ra_1=10kΩ Ra_2=2kΩ (ก) ระนาบ V(x) – V(z) (ข) ระนาบ V(x) – V(z) (ค) ระนาบ V(y) – V(z)	97
รูปที่ 3.27 Phase portraits ของพฤติกรรมสี่วงม้วนจากระบบ (3.16) (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z (ค) ระนาบ y-z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z	99
รูปที่ 3.28 เลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบที่ (3.16)	100
รูปที่ 3.29 phase portraits ของระบบสี่วงม้วนที่ทำการลดรูปในระบบ (3.23) (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z (ค) ระนาบ y-z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z	101
รูปที่ 3.30 The bifurcation ของพารามิเตอร์ p_4 โดยมีจุด Hopf bifurcation ที่ $p_4 \approx 0.22$	102
รูปที่ 3.31 The bifurcation ของพารามิเตอร์ p_6 (ก) แสดงช่วงพฤติกรรมเคออสในช่วง $0 \leq p_6 \leq 6$ (ข) ขยายช่วง $10 \leq p_6 \leq 15$ เพื่อให้เห็นจุด Hopf bifurcation ที่ $p_6 \approx 12.95$	103
รูปที่ 3.32 The bifurcation ของพารามิเตอร์ p_7 (ก) แสดงช่วงพฤติกรรมเคออสในช่วง $-10 \leq p_7 \leq 20$ (ข) แสดงช่วง $20 \leq p_7 \leq 35$ เพื่อให้เห็นจุด Hopf bifurcation ที่ $p_7 \approx 32.65$	104
รูปที่ 3.33 พลวัตพารามิเตอร์ 2 มิติ โดยแสดงภาพรวมของการเปลี่ยนแปลง 2 พารามิเตอร์พร้อมกัน เพื่อให้เห็นภาพรวมพลวัตของระบบใน (3.23) (ก) $p_4 - p_6$ (ข) $p_4 - p_7$ (ค) $p_7 - p_6$	104
รูปที่ 3.34 สเปกตรัม Lyapunov ของพารามิเตอร์ p_4 ในช่วง -5 ถึง 5 ของระบบ (3.23)	105
รูปที่ 3.35 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบที่นำเสนอ โดยใช้อุปกรณ์ OPAMP	105

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 3.36 ผลการจำลอง phase portraits ด้วยโปรแกรม PSpice (ก) ระนาบ V(x) – V(y) (ข) ระนาบ V(x) – V(z) (ค) ระนาบ V(y) – V(z)	106
รูปที่ 3.37 ผลการทดลอง phase portraits บน Oscilloscope (ก) ระนาบ x – y (ข) ระนาบ x – z (ค) ระนาบ y – z	106
รูปที่ 4.1 ระบบเคออสโครงสร้างแบบจำลองการกระตุก (ก) แบบจำลองการกระตุกต้นฉบับ (ข) แบบจำลองการกระตุกแบบดัดแปลง	109
รูปที่ 4.2 บล็อคไดอะแกรมของระบบที่ดัดแปลง (ก) ใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ตัวแปรสเตท y (ข) ใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ตัวแปรสเตท x และ y	110
รูปที่ 4.3 ตัวอย่างลักษณะเคออสจากฟังก์ชันตรีโกณที่ออกแบบในอดีต (ก) ลักษณะของฟังก์ชัน (ข) Phase portrait เคออสหนึ่งและสองวงม้วนโดยใช้ฟังก์ชันในสมการที่ (4.4)	111
รูปที่ 4.4 ลักษณะของฟังก์ชัน (ก) ฟังก์ชันเชิงเส้น (ข) ฟังก์ชันสี่เหลี่ยม (ค) ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลง	112
รูปที่ 4.5 ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมโดยปรับค่าคงที่ (ก) ปรับค่า B โดยคงที่ค่า A (ข) ปรับค่า A โดยคงที่ค่า B	112
รูปที่ 4.6 ลักษณะของฟังก์ชันประมาณค่าสำหรับฟังก์ชันสี่เหลี่ยม	113
รูปที่ 4.7 (ก) ลักษณะฟังก์ชันประมาณค่าเมื่อปรับค่าคงที่ m (ข) เปรียบเทียบฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมกับฟังก์ชันประมาณค่า โดยปรับค่าคงที่ A และ B	113
รูปที่ 4.8 Phase portraits ลักษณะสองวงม้วนของระบบที่นำเสนอ โดยใช้ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลง (ก) ระบบในสมการที่ (4.1) (ข) ระบบในสมการที่ (4.2)	114
รูปที่ 4.9 Phase portraits ลักษณะสี่วงม้วนของระบบที่นำเสนอ โดยมีพฤติกรรมซับซ้อนสูงในสมการที่ (4.3) (ก) ระนาบ x-z (ข) ระนาบ x-y (ค) ระนาบ z-y (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z	115
รูปที่ 4.10 เลขชี้กำลัง Lyapunov บนแกนเวลาของระบบเคออสที่นำเสนอทั้งสามระบบ	118
รูปที่ 4.11 ตรวจสอบภาพรวมพฤติกรรมพลวัตที่มีผลจากพารามิเตอร์ A ของระบบเคออสสี่วงม้วน (4.3) โดยคงที่ B=2.2 และ k=0.45 (ก) แผนภาพ Bifurcation โดยสีชมพูกำหนด (0.1, 0.1, 0.1) สีเขียวกำหนด (0.1, 0.1, -0.1) (ข) สเปกตรัม Lyapunov	122
รูปที่ 4.12 ตรวจสอบภาพรวมพฤติกรรมพลวัตที่มีผลจากพารามิเตอร์ B โดยคงที่ A=1.2 และ k=0.45 (ก) แผนภาพ Bifurcation โดยสีดำกำหนด (0.1, 0.1, 0.01) สีชมพูกำหนด (0.1, -0.1, 0.01) (ข) สเปกตรัม Lyapunov	123

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 4.13 แสดงเส้นทางสู่พฤติกรรมเคออสของระบบที่นำเสนอสำหรับพารามิเตอร์ k โดยคงที่ A=1.2 และ B=2.2 (ก) แผนภาพ Bifurcation กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(±0.1, 0.1, 0.01) สำหรับสีน้ำเงินและสีแดง ตามลำดับ (ข) สเปกตรัม Lyapunov	124
รูปที่ 4.14 แสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits ของระบบที่ (4.3) โดยปรับพารามิเตอร์ k และผลกระทบจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยอิงจากรูปที่ 4.13 (คงที่พารามิเตอร์ A=1.2 B=2.2) (ก) วงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ k=2 (ข) พฤติกรรมเชิงสองคาบ k=1.95 (ค) พฤติกรรมเชิงสี่คาบ k=1.75 (ง) พฤติกรรมไม่เป็นคาบ k=1.3 (จ) พฤติกรรมไม่เป็นคาบ k=1 (ฉ) ตัวดึงดูดเคออสสองวงม้วน k=0.7 (ช) ตัวดึงดูดเคออสสี่วงม้วน k=0.45 (ซ) สัญญาณเคออสบนแกนเวลาที่ k=0.45	125
รูปที่ 4.15 แสดงพล็อต p, s ของแผนภาพทดสอบ 0 - 1 ของระบบที่นำเสนอโดยปรับพารามิเตอร์ k และคงที่ A=1.2 B=2.2 (ก) การเคลื่อนที่เป็นคาบ หรือ สัญญาณไซน์ k=2 (ข) การเคลื่อนที่แบบบราวเนียน หรือ เคออสสี่วงม้วน k=0.45	126
รูปที่ 4.16 แผนภาพ Poincare ของระบบสี่วงม้วนใน (4.3) โดยสอดคล้องกับผลในรูปที่ 4.9 (ก) phase portrait เคออสสามมิติ แสดงผลคู่กับระนาบของแผนภาพ Poincare (ข) แผนภาพ Poincare บนระนาบ x-y โดยกำหนดระนาบ z=0	126
รูปที่ 4.17 วิเคราะห์ Bifurcation สำหรับพารามิเตอร์ k ในระบบเคออสสี่วงม้วน (4.3) โดยเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ A ของระบบ และคงที่ B=2.2 (ก) A=2 (ข) A=1.6 (ค) A=1.2 (ง) A=0.8 (จ) A=0.2	127
รูปที่ 4.18 แสดงการควบคุมขนาดของระบบสี่วงม้วน (4.3) โดยปรับพารามิเตอร์ α (ก) phase portrait บนระนาบ x-z (ข) สัญญาณเคออสบนแกนเวลาที่เอาต์พุต x	129
รูปที่ 4.19 แสดงการควบคุมออฟเซ็ตของระบบสี่วงม้วน (4.3) โดยปรับพารามิเตอร β_x (ก) phase portrait บนระนาบ x-z (ข) สัญญาณเคออสบนแกนเวลาที่เอาต์พุต x	130
รูปที่ 4.20 ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบ (4.1) โดยตรวจสอบพารามิเตอร์ A B และ k กำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.1) (ก๑) - (ค๑) แผนภาพ Bifurcation บนเอาต์พุต x_{max} (ก๒) – (ค๒) สเปกตรัม Lyapunov	131

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 4.21 แสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits ของระบบที่ (4.1) โดยปรับพารามิเตอร์ k โดยอิงจากรูปที่ 4.20 (ก) (คงที่พารามิเตอร์ A=1.5 B=2.35) (ก) วงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ k=1.5 (ข) พฤติกรรมเชิงหนึ่งคาบ k=1.38 (ค) พฤติกรรมไม่เป็นคาบ k=1.1 (ง) ตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน k=0.65 (จ) ตัวดึงดูดเคออสสองวงม้วน k=0.5 (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต x บนแกนเวลาที่ k=0.5	132
รูปที่ 4.22 ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบ (4.2) โดยตรวจสอบพารามิเตอร์ A B และ k กำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.1) (ก๑) - (ค๑) แผนภาพ Bifurcation บนเอาต์พุต x_{max} (ก๒) – (ค๒) สเปกตรัม Lyapunov	133
รูปที่ 4.23 แสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits ของระบบที่ (4.2) โดยปรับพารามิเตอร์ k โดยอิงจากรูปที่ 4.22 (ก) (คงที่พารามิเตอร์ A=1.7 B=2.35) (ก) จุดคงที่ k=1.5 (ข) พฤติกรรมเชิงสองคาบ k=1.3 (ค) พฤติกรรมเชิงสองคาบ k=1.1 (ง) ตัวดึงดูดเข้าใกล้สองวงม้วน k=0.85 (จ) ตัวดึงดูดเคออสสองวงม้วน k=0.7 (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต x บนแกนเวลา ที่ k=0.7	134
รูปที่ 4.24 แผนภาพ Bifurcation แบบกิ่งขนาน สำหรับการกระจายตัวสูงสุดของตัวแปรสเตท x (x_{max}) คู่กับพารามิเตอร์ k โดยคงที่ A=1.9 B=2.35	136
รูปที่ 4.25 ตัวอย่างของลักษณะตัวดึงดูดไม่สมมาตร 2 ตัวที่เกิดขึ้นจากระบบที่นำเสนอบนระนาบ x-y-z (คงที่ A=1.9 B=2.35) ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นต่างกัน (-0.15, 0.1, 0.1) สำหรับสีเขียว และ (0.15,0.1, 0.1) สำหรับสีชมพู (ก) k=1.28 (ข) k=0.94 (ค) k=0.89 (ง) k=0.68 (จ) k=0.61 (ช) k=0.44 (ซ) k=0.41 (ฉ) k=0.32	137
รูปที่ 4.26 แผนภาพอ่างของแรงดึงดูด โดยกำหนด z_0=0.1 ที่สอดคล้องผลในรูปที่ 4.25 (ช) (ก) ระนาบ x_0-y_0 (ข) ภาพขยายของรูปที่ 4.26 (ก)	138
รูปที่ 4.27 แผนภาพอ่างของแรงดึงดูด โดยกำหนด z_0=0.1 ที่สอดคล้องผลในรูปที่ 4.25 (ซ) (ก) ระนาบ x_0-y_0 (ข) ภาพขยายของรูปที่ 4.27 (ก)	138
รูปที่ 4.28 อินทิเกรเตอร์โหมดกระแส โดยใช้ OTA (ก) ชนิดไม่สูญเสีย (ข) ชนิดสูญเสีย	139
รูปที่ 4.29 ตัวกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับสองไบควอด โหมดกระแส โดยใช้ OTA	140
รูปที่ 4.30 วงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสี่เหลี่ยมดัดแปลง โดยใช้ OTA	141
รูปที่ 4.31 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสที่ออกแบบ โดยสลับตำแหน่งฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างอิสระ	142

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 4.32 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสสี่วงม้วน โดยใช้ OTA สำหรับระบบที่ออกแบบใน (4.3)	142
รูปที่ 4.33 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสสองวงม้วน โดยใช้ OTA (ก) วงจรของระบบที่ออกแบบใน (4.1) (ข) วงจรของระบบที่ออกแบบใน (4.2)	143
รูปที่ 4.34 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออส โดยใช้ OTA LT1228 (ก) วงจร PCB ที่ออกแบบ (ข) ภาพรวมการทดลอง	143
รูปที่ 4.35 เอาต์พุตของวงจรฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมบน Oscilloscope	144
รูปที่ 4.36 แสดงสัญญาณเคออสสี่วงม้วนสองมิติจากวงจร PCB บน Oscilloscope สำหรับระบบที่ (4.3) (ก) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oz} (ข) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oy} (ค) เอาต์พุต I_{Oz}-I_{Oy}	145
รูปที่ 4.37 ผลการทดลองแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของวงจร PCB ระบบเคออสสี่วงม้วนโดยปรับกระแสไบอัส kI_B (ก) kI_B= 200uA (k=2) แสดงวงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ (ข) kI_B=195uA (k=1.95) แสดงพฤติกรรมเชิงสองคาบ (ค) kI_B= 100uA (k=1) แสดงพฤติกรรมไม่เป็นคาบ (ง) kI_B= 70uA (k=0.7) แสดงดึงดูดเคออสสองวงม้วน (จ) kI_B= 45uA (k=0.45) แสดงดึงดูดเคออสสี่วงม้วน โดยสอดคล้องกับ (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต I_{Ox}	146
รูปที่ 4.38 แสดงสัญญาณเคออสสองวงม้วนสองมิติจากวงจร PCB บน Oscilloscope สำหรับระบบที่ (4.1) (ก) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oz} (ข) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oy} (ค) เอาต์พุต I_{Oz}-I_{Oy}	147
รูปที่ 4.39 ผลการทดลองแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของวงจร PCB ระบบเคออสสองวงม้วนโดยปรับกระแสไบอัส kI_B (ก) kI_B= 150uA (k=1.5) แสดงวงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ (ข) kI_B=138uA (k=1.38) แสดงพฤติกรรมเชิงหนึ่งคาบ (ค) kI_B= 110uA (k=1.1) แสดงพฤติกรรมไม่เป็นคาบ (ง) kI_B= 65uA (k=0.65) แสดงดึงดูดเคออสหนึ่งวงม้วน (จ) kI_B= 40uA (k=0.4) แสดงดึงดูดเคออสสองวงม้วน โดยสอดคล้องกับ (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต I_{Ox}	148
รูปที่ 4.40 แสดงสัญญาณเคออสสองวงม้วนสองมิติจากวงจร PCB บน Oscilloscope สำหรับระบบที่ (4.2) (ก) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oz} (ข) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oy} (ค) เอาต์พุต I_{Oz}-I_{Oy}	149

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 4.41 ผลการทดลองแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของวงจร PCB ระบบเคออสสองวงม้วนโดยปรับกระแสไบอัส kI_B (ก) kI_B= 150uA (k=1.5) จุดคงที่ (ข) kI_B= 130uA (k=1.3) แสดงพฤติกรรมเชิงสองคาบ (ค) kI_B= 110uA (k=1.1) แสดงพฤติกรรมเชิงสองคาบ (ง) kI_B= 85uA (k=0.85) แสดงดึงดูดเคออสเข้าใกล้สองวงม้วน (จ) kI_B= 70uA (k=0.7) แสดงดึงดูดเคออสสองวงม้วนโดยสอดคล้องกับ (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต I_{Ox}	150
รูปที่ 4.42 ลักษณะฟังก์ชันสัญลักษณ์ (ก) ความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ C และ D กับฟังก์ชัน (ข) เปรียบเทียบฟังก์ชันสัญลักษณ์กับฟังก์ชันประมาณค่า โดยปรับค่าคงที่ C และ D	152
รูปที่ 4.43 Phase portraits ลักษณะสี่วงม้วนของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติมสำหรับระบบ M1 โดยใช้โครงสร้างพื้นฐานในสมการที่ (4.3) (ก) ระนาบ x-z (ข) ระนาบ x-y (ค) ระนาบ z-y (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z	153
รูปที่ 4.44 Phase portraits ของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติมสำหรับระบบ M2 โดยใช้โครงสร้างพื้นฐานในสมการที่ (4.3) (ก) ลักษณะเคออสสี่วงม้วนที่ k=0.6 (ข) ลักษณะเคออสหกวงม้วนที่ k=0.2	153
รูปที่ 4.45 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสจากโครงสร้างในระบบที่ (4.3) โดยใช้ OPAMP	155
รูปที่ 4.46 วงจรฟังก์ชันสัญลักษณ์โดยใช้ OPAMP	156
รูปที่ 4.47 วงจรฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม โดยใช้ OPAMP	156
รูปที่ 4.48 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสบน PCB โดยใช้ OPAMP (LF347) (ก) ตัวอย่างวงจรบน PCB (ข) ภาพรวมการทดลองจริงสำหรับระบบ M1	157
รูปที่ 4.49 เอาต์พุตแรงดันของวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้ OPAMP (LF347) (ก) ฟังก์ชัน สัญลักษณ์กำหนด R_A = 3kΩ (A=0.6) and R_B = 25kΩ (B=0.2) (ข) ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม กำหนด R_C = 9kΩ (C=1.5), and V_D = 23mV (D=2.35)	157
รูปที่ 4.50 ผลการทดลองบนวงจร PCB สำหรับลักษณะเคออสสี่วงม้วนของระบบ M1 (ก) เอาต์พุต Vox-Voy (ข) เอาต์พุต Vox-Voz (ค) เอาต์พุต Voz-Voy.	158
รูปที่ 4.51 ผลการทดลองจริงโดยใช้ FPAA สำหรับระบบ M2 (ก) การเชื่อมต่อบอร์ด FPAA (ข) ภาพรวมการทดลองจริง	159
รูปที่ 4.52 กำหนดการเชื่อมต่อ CAM บนโปรแกรม Anadigm Designer ของ FPAA สำหรับระบบ M2 ที่ออกแบบ	159

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
รูปที่ 4.53 กำหนดค่าพารามิเตอร์บน CAM สำหรับระบบ M2 ที่ออกแบบ (ก) AN231E04 ตัวแรก (ข) AN231E04 ตัวที่สอง	160
รูปที่ 4.54 แสดงผลการทดลองจริงสำหรับระบบ M2 ที่ออกแบบบน FPAA โดยกำหนดค่า G_k=0.4 (k=0.2) และ G_k=1.2 (k=0.6) (ก) เคออสลักษณะหกวงม้วน ที่เอาต์พุต x-y (ข) เคออสลักษณะสี่วง ม้วน ที่เอาต์พุต x-y (ข) เคออสลักษณะสี่วงม้วน ที่เอาต์พุต x-z (ข) เคออสลักษณสี่วงม้วน ที่เอาต์พุต y-z	161
รูปที่ 4.55 บล็อกไดอะแกรมสำหรับการเข้ารหัสด้วยวิธี CM โดยนำระบบ M1 มาประยุกต์ใช้ และใช้ตัวแปรสเตท z ในการถอดรหัส	166
รูปที่ 4.56 จำลองวิธีการเข้ารหัสด้วยวิธี CM บน Simulink MATLAB โดยใช้ระบบเคออส M1 ในหัวข้อ 4.6.1	167
รูปที่ 4.57 แสดงผลการเข้ารหัสด้วยวิธี CM จากการใช้สัญญาณเคออสจากระบบ M1 โดยในรูปแสดงกรณีการเข้ารหัสสำเร็จ จากการใช้คีย์ตัวแปรสเตท z	168
รูปที่ 4.58 แสดงการเข้ารหัส กรณีถอดรหัสไม่สำเร็จ ด้วยระบบเคออา M1 (ก) กรณีกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้น z_0 ของฝั่งส่งและฝั่งรับไม่ตรงกันเพียง 0.01 (ข) กรณีกำหนดค่าพารามิเตอร์ D ของฝั่งส่งและฝั่งรับไม่ตรงกันเพียง 0.01	169
รูปที่ 4.59 ภาพรวมการทดลองจริงในการประยุกต์ใช้เข้ารหัสรูปภาพโดยใช้เคออสระบบ M2 ร่วมกับอุปกรณ์ FPAA	170
รูปที่ 4.60 บล็อคไดอะแกรมสำหรับการเข้ารหัสรูปภาพโดยใช้ FPAA	172
รูปที่ 4.61 องค์ประกอบของวงจรฝั่งรับและส่งส่งโดยใช้ MCU	172
รูปที่ 4.62 เอาต์พุตสัญญาณในการเข้ารหัส (ก) ภาพรวมสัญญาณ (ข) รายละเอียดของสัญญาณเคออส ($Ct(t)$) (ค) รายละเอียดของสัญญาณข้อมูลขาเข้า ($I(t)$) ที่ได้จากการแปลงรูปภาพ	173
รูปที่ 4.63 ภาพรวมผลลัพธ์การถอดรหัสรูปภาพ กรณีเข้ารหัสถูกต้อง และเข้ารหัสไม่ถูกต้องจากการปรับพารามิเตอร์ไม่ตรงกันของฝั่งรับ	174

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้าที่
ตารางที่ 2.1 ความเสถียรของระบบ Lorenz ณ จุด $E_0(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ c โดยคงที่ $\beta = 1$ และ $\alpha = 10$	17
ตารางที่ 2.2 ความเสถียรของระบบ Lorenz ณ จุด $E_1(x, y, z) = (\sqrt{\beta(c-1)}, \sqrt{\beta(c-1)}, c-1)$ เมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ c โดยคงที่ β=1 และ α=10	18
ตารางที่ 2.3 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_7 กรณี k=1.1	34
ตารางที่ 2.4 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_7 กรณี k=2.7	34
ตารางที่ 2.5 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_{10} กรณี k=3	35
ตารางที่ 2.6 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_4 ถึง x_{13} กรณี k=3.4	36
ตารางที่ 2.7 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_{10} กรณี k=3.8	37
ตารางที่ 2.8 เปรียบเทียบพฤติกรรมพลวัตที่เกิดขึ้นบนระบบสองวงม้วนและสี่วงม้วนจากแบบจำลอง Jerk (ผลจากรูป 2.37 และ 2.38)	50
ตารางที่ 2.9 แสดงลักษณะพฤติกรรมของระบบไฮเปอร์เคออสอันดับสี่ด้วยเครื่องหมายค่า Lyapunov	59
ตารางที่ 3.1 เครื่องมือแต่ละประเภทที่ใช้ในการวิเคราะห์และตรวจสอบพฤติกรรมบนระบบเคออส	73
ตารางที่ 3.2 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนคล้ายปีกผีเสื้อของ Chunbiao Li ที่นำเสนอ	83
ตารางที่ 3.3 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนคล้ายดาวของ I. Pehlivan	88
ตารางที่ 3.4 ค่าลักษณะเฉพาะ ณ จุดสมดุล $E_{1\text{-}4}$	90
ตารางที่ 3.5 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนของ V.R.F. Signing ที่นำเสนอ	98
ตารางที่ 3.6 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนของ A. Akgul ที่นำเสนอ	107
ตารางที่ 4.1 การกำหนดของระบบที่ออกแบบและฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น พร้อมค่าพารามิเตอร์หลักที่นำเสนอ	114
ตารางที่ 4.2 ความเสถียรภาพของระบบที่นำเสนอทั้งสามระบบใน (4.1) (4.2) และ (4.3)	117
ตารางที่ 4.3 ค่าลักษณะเฉพาะสำหรับการปรับค่าพารามิเตอร์ k ในช่วงอื่นๆของระบบที่ออกแบบ (คงที่ค่า A และ B ของแต่ละระบบไว้ดังตารางที่ 4.2)	117
ตารางที่ 4.4 สรุปเลขชี้กำลัง Lyapunov และค่าความซับซ้อนมิติ Kaplan-Yorke ของระบบ (4.1) (4.2) และ (4.3)	119

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

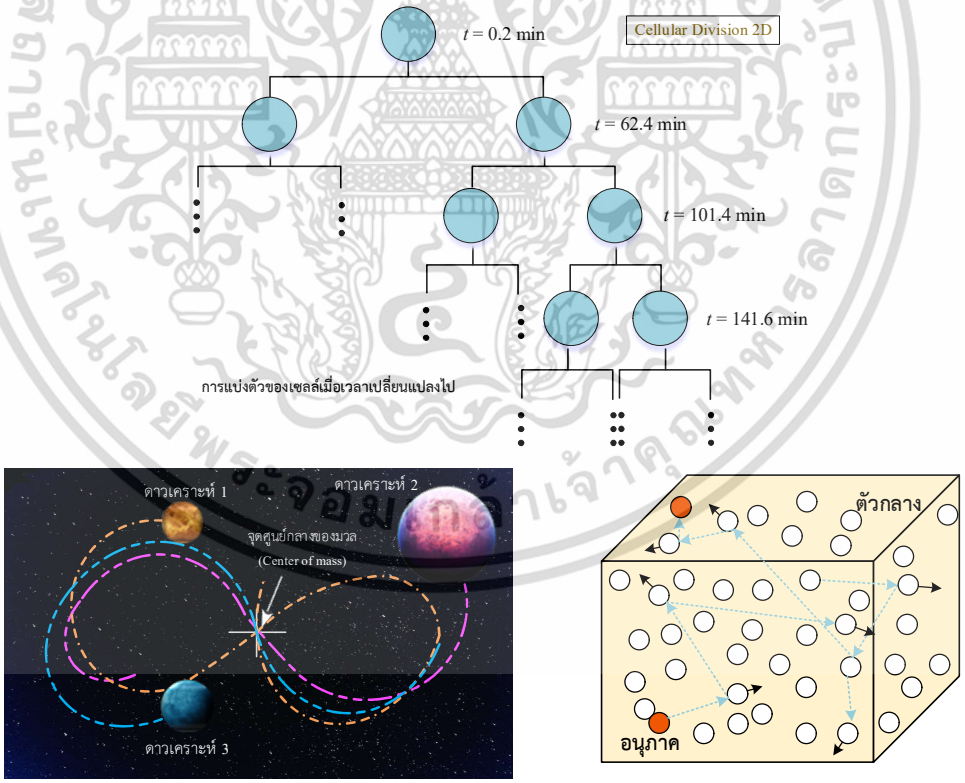
ตารางที่	หน้าที่
ตารางที่ 4.5 ตัวอย่างของระบบเคออสลักษณะสองวงม้วนที่ออกแบบจากแบบจำลองการกระตุก โดยระบุค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0) ค่า *LEs* และค่า D_{KY}	119
ตารางที่ 4.6 สรุปพฤติกรรมพลวัตต่างๆที่เกิดขึ้นบนระบบที่ออกแบบทั้งสาม โดยแสดงจากช่วงการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ k, A และ B	134
ตารางที่ 4.7 ผลลัพธ์ของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติม โดยใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ร่วมกับฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม พร้อมกำหนดค่าพารามิเตอร์หลักที่นำเสนอ	153
ตารางที่ 4.8 แสดงคุณสมบัติพลวัตพื้นฐานของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติม โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ในวิเคราะห์ดังตารางที่ 4.7	154
ตารางที่ 4.9 เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างการสื่อสารสมัยใหม่และการสื่อสารแบบเคออส	162
ตารางที่ 4.10 สรุปภาพรวมของระบบเคออสที่ออกแบบในวิทยานิพนธ์	176
ตารางที่ ก งานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ระหว่างการศึกษา	200

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมา เคออส (Chaos)

เคออสเป็นสาขาวิชาหนึ่งที่อยู่ในระบบพลวัตแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear dynamic) พฤติกรรมที่ซับซ้อนของเคออสสามารถประยุกต์ใช้ได้เป็นอย่างดีกับหลายสาขาวิชา เช่น ดาราศาสตร์ ชีววิทยา กรมอุตุนิยมวิทยา และความปลอดภัยด้านการสื่อสาร [1] เป็นต้น ซึ่งจุดเด่นของพฤติกรรมเคออส คือ ระบบมีการเปลี่ยนแปลงในรูปแบบไม่เป็นเชิงเส้น สามารถคาดเดาได้ยากเมื่อระบบมีการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นอยู่กับเวลา และมีความไวต่อสถานะเริ่มต้น [2] โดยตัวอย่างของระบบพลวัตที่มีการเคลื่อนที่แบบเคออส ได้แก่ การเคลื่อนที่ของวงโคจรดาวเคราะห์ การเคลื่อนที่ของบรรยากาศ การเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศ การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในอะตอม การลุมลามของไฟป่า การแบ่งตัวของเซลล์ (Cell division) การเพิ่มจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิต การแพร่กระจายของแผ่นดินไหว และการจราจรบนพื้นดินและทางอากาศ [3] ตัวอย่างพฤติกรรมเคออสบางส่วนแสดงดังรูปที่ 1.1



วิถีวงโคจรดาวเคราะห์สำหรับปัญหาสามวัตถุรูปแบบเคออส
(Planet trajectory for three-body problem chaos)

การเคลื่อนที่ของอนุภาคไม่ที่เป็นระเบียบแบบบราวเนี่ยน
(Brownian motion of particle)

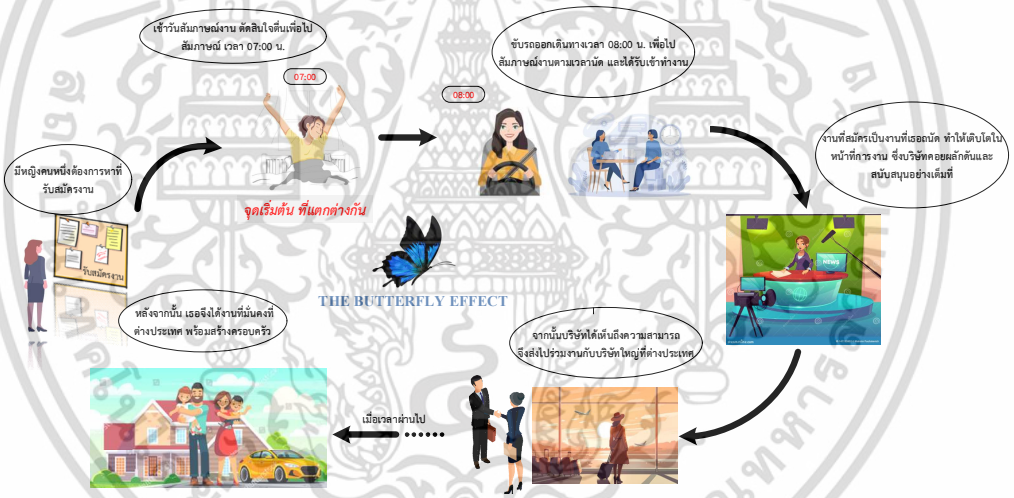
รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของพฤติกรรมเคออสในสาขาต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปแบบของพฤติกรรมเคออสมีลักษณะที่ไม่เป็นระเบียบ แต่มีความเป็นรูปแบบแฝงอยู่ โดยพฤติกรรมเคออสถูกค้นพบทางทฤษฎีครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศสที่ชื่อ Jules Henri Poincaré ในปี ค.ศ. 1905 ด้วยการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีปัญหาสามวัตถุ (The three-body problem) ซึ่ง Poincaré มีบทบาทสำคัญในการเปลี่ยนแปลงและพัฒนาทางวิทยาศาสตร์หลายสาขา [4] ในการค้นพบพฤติกรรมเคออสของ Poincaré ได้พบคุณสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่ง คือ ความไวต่อสถานะเริ่มต้น (Sensitive to initial condition) ด้วยคุณสมบัติทั้งหมดที่กล่าวมา ทำให้ความเคออสเป็นที่นิยมนำมาประยุกต์ใช้ในความปลอดภัยด้านการสื่อสารด้วยการเข้ารหัสลับ

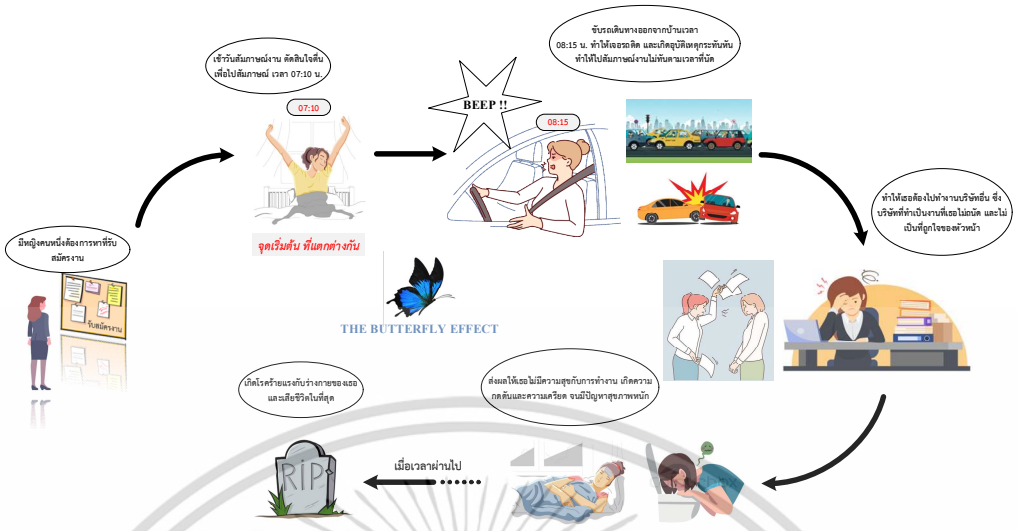
1.1.1. การศึกษาระบบเคออสและเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเคออสถูกค้นพบครั้งแรกโดย Edward Lorenz ในปี ค.ศ.1963 [5] หรือเป็นที่รู้จักกันดีในชื่อทฤษฎี “ผลกระทบปีกผีเสื้อ (Butterfly effect)” ยกตัวอย่างสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีดังรูปที่ 1.2



(ก)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ข)

รูปที่ 1.2 ตัวอย่างสถานการณ์สำหรับทฤษฎีผลกระทบปีกผีเสื้อ โดยมีจุดเริ่มต้นที่แตกต่างกัน 2 เหตุการณ์

จากรูปที่ 1.2 เป็นตัวอย่างของผลกระทบปีกผีเสื้อ ที่จุดเริ่มต้นเพียงเล็กน้อยส่งผลให้เกิดเหตุการณ์ที่ยิ่งใหญ่ได้ โดยหากเปลี่ยนแปลงจุดเริ่มต้นก็สามารถส่งผลให้เกิดผลลัพธ์ที่แตกต่างกันอย่างสิ้นเชิงได้เช่นกัน (*ตัวอย่างดังกล่าวอาจเป็นแง่คิดบางอย่างให้กับผู้อ่านได้ ซึ่งมีหลายบทความ ที่ทฤษฎีเคออสถูกนำมาใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับการดำเนินชีวิตจริงของมนุษย์*) โดย Lorenz ค้นพบส่วนหนึ่งของทฤษฎีเคออสจากการทดลองพยากรณ์สภาพอากาศ โดยนำผลมาจำลองเชิงตัวเลขบนคอมพิวเตอร์ Lorenz พบตัวเลขที่เป็นนัยสำคัญเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าเริ่มต้นของระบบ ผลลัพธ์ปลายทางที่ได้ มีการเปลี่ยนแปลงในระดับเลขทศนิยม 6 ตำแหน่ง เมื่อทดสอบด้วยค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย สิ่งนี้เป็นคุณสมบัติความไวต่อสถานะเริ่มต้นของระบบเคออส จากนั้นระบบเคออสจึงเป็นที่สนใจของนักวิจัยหลายสาขา แบบจำลองระบบเคออสถูกพัฒนาและคิดค้นขึ้นหลายรูปแบบ โดยแต่ละแบบจำลองมีความแตกต่างกันทางสมการคณิตศาสตร์ ด้วยจำนวนตัวแปรสเตทและพจน์ความไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งส่งผลต่อรูปแบบสัญญาณเคออสและความซับซ้อนในการออกแบบระบบ เช่น แบบจำลอง Rossler ในปี ค.ศ.1976 ที่มีจำนวนตัวแปรสเตท 6 พจน์ และความไม่เป็นเชิงเส้นคูณกัน 1 พจน์ [6] แบบจำลอง Chua ในปี ค.ศ. 1984 ที่มีจำนวนตัวแปรสเตท 7 พจน์ และความไม่เป็นเชิงแบบฟังก์ชันเชิงเส้นแบบเป็นชิ้น (Piecewise linear) [7] แบบจำลอง Sportt ในปี ค.ศ. 1994 ที่มีจำนวนตัวแปรสเตท 5 พจน์ และความไม่เป็นเชิงเส้นกำลังสอง 1 พจน์ [8] แบบจำลอง Jerk ในปี ค.ศ. 2000 ที่มีจำนวนตัวแปรสเตท 5 พจน์ และฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นอิสระ [9] เป็นต้น โดยระบบเคออสที่ถูกคิดค้นและออกแบบในอดีต ยังมีอีกหลายระบบ ในการศึกษาระบบเคออสหนึ่งระบบ

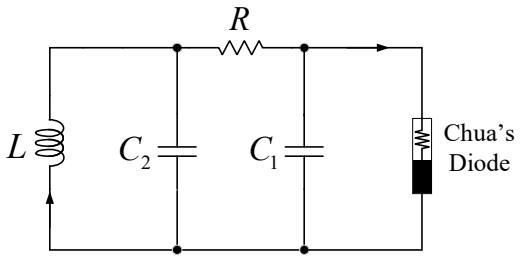
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ละเอียดอย่างท่องแท้ เป็นเรื่องยากและต้องใช้เวลาอย่างสูง เนื่องจากพฤติกรรมพลวัตที่สามารถเกิดขึ้นได้ในระบบเคออสมีหลายรูปแบบไม่ว่าจากการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ เงื่อนไขเริ่มต้น หรือแม้กระทั่งค่าพารามิเตอร์ที่คงที่แต่เงื่อนไขเริ่มต้นต่างกัน หรือเรียกว่า ความหลายเสถียรภาพ (Multistability) โดยลักษณะของพฤติกรรมพลวัต หากมีการดัดแปลงพจน์ไม่เป็นเชิงเส้น หรือตำแหน่งของพารามิเตอร์จากแบบจำลองดั้งเดิมที่มีอยู่ก็สามารถทำให้พฤติกรรมต่างๆของระบบเปลี่ยนแปลงไปได้อย่างสิ้นเชิง ดังนั้นการศึกษาระบบเคออสจำเป็นต้องมีเครื่องมือที่เป็นสากลหลายชนิดในการตรวจสอบและวิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงตัวเลข ยกตัวอย่างเครื่องมือพื้นฐาน เช่น แผนภาพ Bifurcation เลขชี้กำลัง Lyapunov แผนภาพ Phase portraits เป็นต้น ยิ่งมีการวิเคราะห์และศึกษาผลลัพธ์ในเชิงลึกของระบบเคออส ชนิดของเครื่องมือที่ใช้ยิ่งต้องมีความเฉพาะเจาะจง เช่น ในการตรวจสอบพฤติกรรมความหลายเสถียรภาพ ต้องใช้ กิ่งขนาน Bifurcation (Parallel branches) ในการตรวจสอบ หรือในการตรวจสอบตัวดึงดูดที่มีอยู่ร่วม (Coexisting of attractor) จำเป็นต้องใช้เครื่องมือ Basin of attraction ในการตรวจสอบค่าของเงื่อนไขเริ่มต้นอย่างละเอียด เป็นต้น โดยเฉพาะการออกแบบระบบที่สร้างสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ขึ้นมาจำเป็นต้องยืนยันว่าระบบที่ออกแบบใหม่นั้นสามารถสร้างพฤติกรรมเคออสได้จริง โดยการยืนยันด้วยการคำนวณ Stability โดยอิงกฎของ Shilnikov หรือการใช้ผลลัพธ์เชิงตัวเลขในสาขาอื่นมาคำนวณร่วมด้วยเพื่อยืนยันพฤติกรรมเคออสที่สอดคล้องกัน เช่น แผนภาพการเคลื่อนที่แบบ Brownian ที่เป็นการเคลื่อนที่แบบไม่เชิงเส้นจากการเคลื่อนที่แบบสุ่มของอนุภาคที่แขวนลอยอยู่ในของเหลว เป็นต้น จากเนื้อหาที่กล่าวมาข้างต้นการศึกษาในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ส่วนหนึ่งคือการพยายามศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับพฤติกรรมพลวัตต่างๆที่เกิดขึ้นในระบบเคออสอย่างละเอียด และมีการออกแบบ ดัดแปลง ระบบเคออสที่มีมาในอดีตให้สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ที่มีความซับซ้อนของสัญญาณสูงขึ้น แต่มีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เรียบง่าย เครื่องมือที่ใช้วิเคราะห์และจำลองผลลัพธ์จะถูกอธิบายไว้อย่างละเอียดในวิทยานิพนธ์

1.1.2. การศึกษาวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส

เมื่อมีการออกแบบและสร้างระบบเคออสในเชิงตัวเลขแล้ว การสร้างวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส (Chaotic Oscillator) เป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นในการยืนยันผลทางทฤษฎี โดยวงจรอิเล็กทรอนิกส์วงจรแรกของ Leon Ong Chua แสดงการเกิดสัญญาณเคออส ถูกค้นพบในห้องวิจัยซึ่งยังไม่มีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ [7] ดังรูปที่ 1.3 โดยมีการใช้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (Ordinary Differential Equations) สามสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 1.3 วงจรอิเล็กทรอนิกส์กำเนิดสัญญาณเคออสวงจรแรก โดย Leon Ong Chua

ต่อมาวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสแบบโคลพิทส์ (Chaotic Colpitts Oscillator) ได้นำเสนอโดย Kennedy [10] ค้นพบว่าวงจรเกิดสัญญาณรูปแบบไซน์สามารถเกิดสัญญาณเคออสได้ จากนั้น Elwakil และ Kennedy ได้ใช้ กระบวนการกึ่งระบบ มาดัดแปลงวงจรกำเนิดสัญญาณไซน์เป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส โดยมีวงจรกำเนิดสัญญาณไซน์เป็นวงจรหลักและมีการใช้อุปกรณ์แบบไม่เชิงเส้นต่อจากภายนอก เป็นอุปกรณ์จัดเก็บพลังงาน (ตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ) และไดโอด เพื่อสร้างลักษณะฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่สามารถทำให้วงจรกำเนิดสัญญาณไซน์สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสได้ [11] นอกจากนี้ยังมีวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสอีกหลายวงจร เช่น วงจรกำเนิดสัญญาณแบบ Wein-bridge [12] วงจรกำเนิดสัญญาณแบบ Twin-T [13] วงจรกำเนิดสัญญาณด้วย CFOA (Current Feedback OPAMP) [14] เป็นต้น แต่วงจรของ Elwakil และ Kennedy เป็นที่น่าสนใจเนื่องจากมีการปรับเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณที่ง่ายและมีอุปกรณ์ไม่เชิงเส้นที่แยกเป็นอิสระ บางส่วนมีการใช้ CFOA (Current Feedback OPAMP) [15] ต่อร่วมกับความต้านทาน และ ตัวเก็บประจุ เป็นโครงสร้างตัวดึงดูดเคออส (Chaotic Attractor) และ โครงสร้างตัวดึงดูดเคออสใน 6 รูปแบบ [9] ซึ่งวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสในอดีตยังมีการใช้แบบจำลองที่มีโครงสร้างซับซ้อนเนื่องจากมีพารามิเตอร์ควบคุมในการปรับเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณหลายตัว มีจำนวนพจน์ของตัวแปรจากแบบจำลองหลายพจน์ วงจรไม่สามารถปรับค่าทางอิเล็กทรอนิกส์ได้ โดยงานของ Elwakil และ Kennedy ยังไม่สามารถเปลี่ยนรูปแบบของลักษณะฟังก์ชันไม่เชิงเส้นได้ เนื่องจากถูกกำหนดด้วยลักษณะเฉพาะของอุปกรณ์ไม่เชิงเส้น ทำให้มีข้อจำกัดในการออกแบบสัญญาณเคออส

ในวิทยานิพนธ์นี้จะมีการนำระบบเคออสที่ออกแบบมาสร้างวงจร โดยใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA ที่สามารถปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ โดยวงจรจะออกแบบตามโครงสร้างระบบเคออสที่ออกแบบไว้ โดยมีโครงสร้างที่เรียบง่าย สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสได้หลายรูปแบบจากการปรับเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณเพียงตำแหน่งเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 จุดมุ่งหมายและจุดประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาและออกแบบสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ที่มีความซับซ้อนของสัญญาณสูง แต่มีโครงสร้างของระบบที่เรียบง่าย โดยโครงสร้างถูกดัดแปลงจากแบบจำลองการกระตุก (Jerk model) ซึ่งโครงสร้างที่ดัดแปลงสามารถใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้ถึงสองตำแหน่ง ที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x และ ตำแหน่งตัวแปรสเตท y (พื้นฐานแบบจำลองการกระตุกของ Sportt มีการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นเฉพาะบนตำแหน่งตัวแปรสเตท x ของระบบ) ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นของวิทยานิพนธ์เป็นฟังก์ชันที่ถูกออกแบบขึ้นมาใหม่ คือ ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม (Modified rectangular function) เมื่อนำไปใช้ในโครงสร้างที่ดัดแปลงจากแบบจำลองการกระตุกทำให้ได้สัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ถึง 3 ลักษณะภายในโครงสร้างเดียวและใช้เพียงหนึ่งฟังก์ชัน ด้วยการใช้ฟังก์ชันที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x ที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท y และพร้อมกันทั้งสองตำแหน่ง โดยการออกแบบลักษณะสัญญาณเคออสที่ซับซ้อนสูงของวิทยานิพนธ์นี้ มุ่งเน้นไปที่สัญญาณเคออสรูปแบบหลายวงม้วน ซึ่งการใช้ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมที่ออกแบบพร้อมกันทั้งสองตำแหน่ง ทำให้ระบบสามารถสร้างสัญญาณเคออสในลักษณะสี่วงม้วนที่มีความซับซ้อนสูงได้ (ถูกยืนยันด้วยค่า D_{KY} และเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีต) นอกจากนี้ เนื้อหาในวิทยานิพนธ์ยังมุ่งเน้นการศึกษาพฤติกรรมเคออสในเชิงลึก เพื่อตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตต่างๆที่เกิดขึ้นในระบบและพิสูจน์ความซับซ้อนของสัญญาณเคออสที่ออกแบบ ยกตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาเช่น ความเสถียรภาพ (Stability) เลขชี้กำลัง Lyapunov มิติ Kaplan-Yorke แผนภาพ Bifurcation แผนภาพ Poincare แผนภาพทดสอบ 0-1 ความหลายเสถียรภาพ (Multistability) การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดแบบสมมาตรและไม่สมมาตร (Coexisting of symmetry and asymmetry attractor) เครื่องมือ Basin of attraction คุณสมบัติพิเศษสำหรับระบบเคออส อย่าง การควบคุมขนาด (Amplitude control) การเพิ่มออฟเซ็ต (Offset boosting) เป็นต้น (เนื้อหาจะถูกโดยละเอียดไว้ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้) อีกทั้งเมื่อออกแบบระบบเคออสในเชิงตัวเลขและจำลองผลด้วยโปรแกรม MATLAB แล้ว จะนำไปออกแบบเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสเพื่อยืนยันหลักการสร้างในทางทฤษฎีและการนำไปใช้จริงทางวิศวกรรม โดยใช้อุปกรณ์หลัก คือ อุปกรณ์แอกทีฟ OTA (Operational Transconductance Amplifier) เบอร์ LT1228 ผลการทดลองจริงถูกยืนยันผลร่วมกับผลเชิงตัวเลข MATLAB และพบว่าผลที่ได้สอดคล้องกันทุกประการ

มากไปกว่านั้นในส่วนท้ายบทที่ 4 ของวิทยานิพนธ์ยังมี “ส่วนเพิ่มเติม” เพื่อเป็นประโยชน์ในการศึกษาระบบเคออสของวิทยานิพนธ์ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในงานของผู้เขียน โดยจะแสดงการออกแบบระบบเคออสรูปแบบหลายวงม้วน ที่สร้างได้สูงสุดถึงหกวงม้วน จากการใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ (Signum function) ร่วมกับฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมที่ออกแบบของวิทยานิพนธ์ โดยมีการนำไปออกแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ร่วมกับวงจรที่สามารถโปรแกรมค่าได้ ด้วยอุปกรณ์ FPAA (Field Programmable Analog Array) และยังมีการนำไปประยุกต์ใช้ในความปลอดภัยด้านการสื่อสารด้วยวิธี CM (Chaotic Masking) โดยแสดงผลการทดลองด้วยการใช้เข้ารหัสลับรูปภาพ (Image cryptography) ระบบที่ออกแบบเป็นสัญญาณเคออสซับซ้อนสูงด้วยรูปแบบหลายวงม้วน ทำให้เพิ่มความปลอดภัยในการถูกคัดลอกและโจมตีจากภายนอกสำหรับการส่งข้อมูลได้

1.3 หลักการใหม่ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์

1.3.1 ออกแบบสัญญาณเคออสที่มีความซับซ้อนสูงด้วยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงที่ถูกออกแบบใหม่ คือ ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม (modified rectangular function)

1.3.2 โครงสร้างของระบบที่ออกแบบ มีความสามารถสลับตำแหน่งของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นเพียงการเปลี่ยนตำแหน่งฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ตัวแปรสเตท x และ y สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสลักษณะใหม่ได้ถึง 3 ลักษณะ ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่ไม่เคยมีการนำเสนอในอดีต

1.3.3 สัญญาณเคออสที่ออกแบบมีความซับซ้อนสูง ยืนยันด้วยค่า มิติ Kaplan-Yorke และเทียบกับงานวิจัยอื่นในอดีตที่มีความเกี่ยวข้องกัน โดยสัญญาณเคออสลักษณะสี่วงม้วนที่นำเสนอ มีค่า D_{KY}=2.65 และสัญญาณเคออสสองวงม้วนอีก 2 ลักษณะ มีค่า D_{KY}=2.43 และ D_{KY}=2.25

1.3.4 ออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสที่สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสซับซ้อนสูงได้ โดยมีโครงสร้างของวงจรที่เรียบง่าย และปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์

1.3.5 ระบบเคออสที่ออกแบบสามารถแสดงพฤติกรรมพลวัตรูปแบบต่างๆที่เกิดขึ้นเฉพาะบนระบบที่ออกแบบ เช่น การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดแบบสมมาตรและไม่สมมาตรที่เกิดจากความหลายเสถียรภาพของระบบ โดยยืนยันร่วมกับ Basin of attraction

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

งานวิทยานิพนธ์มุ่งเน้นไปที่การออกแบบลักษณะสัญญาณเคออสที่มีความซับซ้อนของสัญญาณสูง ที่ถูกยืนยันด้วยค่า D_{KY} โดยรูปแบบที่นำเสนอหลัก คือ ลักษณะสี่วงม้วน ที่เกิดจากการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่ คือ ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม มาใช้ในโครงสร้างที่ทำการดัดแปลงจากแบบจำลองการกระตุกของวิทยานิพนธ์ จากคุณสมบัติของโครงสร้างที่ออกแบบที่สามารถสลับตำแหน่งฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้ ทำให้สามารถเกิดสัญญาณเคออสลักษณะสองวงม้วนรูปแบบใหม่ได้อีก 2 ลักษณะจากการใช้ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมเพียงหนึ่งฟังก์ชัน โดยมีการศึกษาและตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตที่เกิดขึ้นสำหรับระบบที่ออกแบบอย่างละเอียด ใช้เครื่องมือหลายชนิดในการตรวจสอบ รวมถึงวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานต่างๆที่จำเป็นอย่างครบถ้วน และยืนยันผลการสร้างเชิง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวเลขด้วยการออกแบบเป็นวงจรด้วยอุปกรณ์แอกทีฟ OTA ที่สามารถปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ วงจรและระบบมีโครงสร้างที่เรียบง่าย แต่สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสที่ซับซ้อนได้

1.5 รายละเอียดในวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ แบ่งรายละเอียดออกเป็นทั้งหมด 5 บท ดังต่อไปนี้

บทที่ 1 กล่าวถึง ความเป็นมาของเคออส การศึกษาระบบเคออสและเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา การศึกษาวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส จุดมุ่งหมายและจุดประสงค์ของวิทยานิพนธ์ หลักการใหม่ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ และขอบเขตการศึกษาของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 กล่าวถึง ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง โดยจะแบ่งออกเป็น 4 ส่วนหลัก คือ ทฤษฎีสำหรับวิเคราะห์ระบบเคออสเชิงตัวเลขและเชิงกราฟิก ระบบเคออสพิเศษ (ซับซ้อนสูง) อุปกรณ์ที่ใช้ออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส และทฤษฎีพื้นฐานหลักการกำเนิดสัญญาณ

บทที่ 3 กล่าวถึง งานวิจัยที่มีการออกแบบระบบเคออสสี่วงม้วนในอดีต โดยจะนำมาเปรียบเทียบด้วยปัจจัยสำคัญ 4 อย่าง คือ โครงสร้างของระบบเคออส ความหลากหลายในการศึกษาระบบเคออส ค่าความซับซ้อนของระบบเคออส และองค์ประกอบของวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส

บทที่ 4 กล่าวถึง รายละเอียดในการออกแบบระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูง ลักษณะสี่วงม้วน ด้วยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่ พร้อมการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส โดยจะอธิบายการใช้เครื่องมือต่างๆในการวิเคราะห์พฤติกรรมพลวัตของระบบที่ออกแบบอย่างละเอียด ซึ่งในส่วนท้ายของบท “ส่วนเพิ่มเติม” จะมีการนำเสนอการออกแบบระบบเคออสรูปแบบอื่นของผู้เขียน และการนำระบบเคออสไปประยุกต์ใช้ในความปลอดภัยด้านการสื่อสาร

บทที่ 5 กล่าวถึง บทสรุปและข้อเสนอแนะในการพัฒนาต่องานวิจัยของวิทยานิพนธ์

1.6 เครื่องมือที่เกี่ยวข้อง

1.6.1 เครื่องมือทางคณิตศาสตร์: MATLAB®

1.6.2 เครื่องมือจำลองผล: โปรแกรม PSpice และ Pro

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

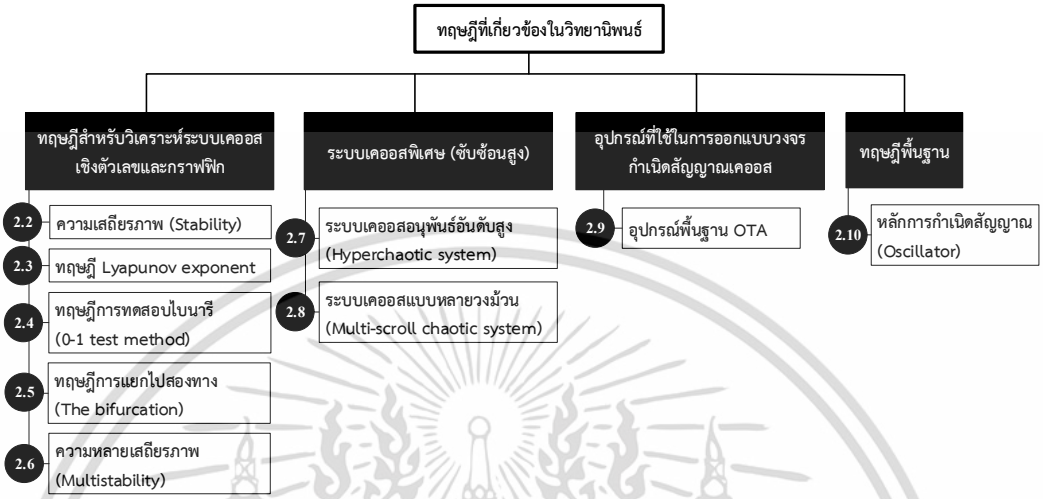
2.1 บทนำ

ทฤษฎีพลวัต (Dynamic theory) เป็นสาขาในวิชาคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของระบบพลวัต (Dynamic system) ที่ซับซ้อน โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ ระบบเคออสถูกจัดอยู่ในสาขาของ ระบบพลวัตแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear dynamical system) ซึ่งพฤติกรรมของระบบเคออสมีรูปแบบพฤติกรรมแบบสุ่มที่สามารถกำหนดได้ทางกายภาพ (stochastic behavior of deterministic physical) โดยระบบมีความอ่อนไหวสูงต่อเงื่อนไขเริ่มต้น ที่ส่งผลให้ระบบเกิดการเปลี่ยนแปลงในระดับเลขชี้กำลัง ทำให้การคาดเดารูปแบบของระบบในระยะยาวแทบเป็นไปไม่ได้เลย คุณสมบัตินี้ถือเป็นจุดเด่นอย่างหนึ่งในระบบเคออสที่ทำให้มีความสามารถที่ไม่เหมือนระบบอื่นในการนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาต่างๆ เช่น วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ (Science computer) การวิเคราะห์ในระบบชีววิทยา (Biological system analysis) ระบบการไหล (Flow system) การเข้ารหัสลับด้านการสื่อสาร (Telecommunication cryptography) เป็นต้น [5] สิ่งที่น่าหลงใหลในทฤษฎีความเป็นเคออสด้วยพฤติกรรมที่มีความซับซ้อนและมีความหลากหลาย แม้กระทั่งการนำทฤษฎีบางอย่างของระบบเคออสไปใช้ควบคู่กับการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ ทำให้มุมมองการศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับทฤษฎีเคออสของนักวิจัยในแต่ละสาขามีความแตกต่างกัน ซึ่งปัจจุบันระบบเคออสส่วนมากมักถูกจัดอยู่ในรูปของแบบจำลองเพื่อใช้ในการศึกษา การตั้งต้นศึกษาพฤติกรรมพลวัตต่างๆของระบบเคออสจึงมักถูกวิเคราะห์จากระบบสมการอนุพันธ์ เครื่องมือและทฤษฎีที่เป็นสากลที่ใช้ในการพิสูจน์พฤติกรรมต่างๆที่เกิดขึ้นภายในระบบ จึงจำเป็นต้องใช้ควบคู่กันเพื่อให้เกิดผลลัพธ์ที่สามารถวิเคราะห์และตีความได้ในเชิงตัวเลขและเชิงปริมาณ ยกตัวอย่างเช่น The bifurcation แผนภาพเฟส (Phase portraits) Basin of attraction ทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov เป็นต้น การออกแบบแบบจำลองที่สามารถแสดงพฤติกรรมพลวัตของระบบเคออสในรูปแบบใหม่ๆ จึงเป็นความสนใจหลักของผู้เขียนวิทยานิพนธ์เล่มนี้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาและการศึกษาเชิงลึกในสาขาพลวัตไม่เป็นเชิงเส้น รวมถึงความสามารถในการนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาต่างๆ

ดังที่กล่าวไปข้างต้น พฤติกรรมของระบบเคออสนับเป็นพฤติกรรมพลวัตที่มีความซับซ้อน การออกแบบระบบเคออสทางคณิตศาสตร์ จึงต้องใช้เครื่องมือและทฤษฎีที่น่าเชื่อถือในการพิสูจน์ผลลัพธ์ออกมาในเชิงตัวเลขหรือกราฟฟิก เพื่ออธิบายพร้อมยืนยันลักษณะต่างๆที่เกิดขึ้นภายในระบบ รวมถึงการนำไปสร้างเป็นวงจรเพื่อการนำไปประยุกต์ใช้จริง โดยในบทที่ 2 ของวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รวบรวมทฤษฎีต่างๆที่เกี่ยวข้องในการศึกษาเกี่ยวกับระบบเคออสที่ทำการออกแบบ โดยจะแบ่งหมวดการศึกษาของทฤษฎีทั้งหมด 4 หมวด โดยแต่ละหัวข้อทฤษฎีถูกจัดไว้ตามหมวดต่างๆ ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แผนผังหัวข้อทฤษฎีที่เกี่ยวข้องของวิทยานิพนธ์

2.2 ความเสถียรภาพ (Stability)

การวิเคราะห์ระบบเคออสหรือระบบพลวัตที่ไม่เป็นเชิงเส้นมีหลายรูปแบบ ซึ่งถูกอธิบายไว้ตามตำราหลายเล่ม [2, 18-22] การวิเคราะห์ระบบพลวัตเพื่อบ่งบอกรูปแบบพฤติกรรมต่างๆที่เกิดขึ้นบนระบบ รวมถึงการนำไปสู่พฤติกรรมเคออส เป็นสิ่งจำเป็นที่ต้องอธิบายเพื่อประโยชน์ในการศึกษาระบบพลวัตนั้นๆ รูปแบบการวิเคราะห์มีทั้งวิเคราะห์ในเชิงกราฟฟิกและวิเคราะห์ในเชิงตัวเลข ซึ่ง” ความเสถียรภาพ” เป็นการวิเคราะห์เชิงตัวเลขอย่างหนึ่งที่นิยม และเป็นประโยชน์ในการศึกษาระบบพลวัตไม่เป็นเชิงเส้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงองค์ประกอบและทฤษฎีต่างๆที่ใช้ในการวิเคราะห์ความเสถียรภาพ พร้อมยกตัวอย่างการวิเคราะห์อย่างละเอียด

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อการศึกษามักถูกออกแบบให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Different Equation: ODE) ไม่ว่าระบบที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นก็จะถูกจัดอยู่ในรูปแบบของสมการ ODE แต่การศึกษาผลลัพธ์จากระบบไม่เป็นเชิงเส้นนั้นยากต่อการคิดวิเคราะห์อย่างตรงไปตรงมา เมื่อเทียบกับระบบที่เป็นเชิงเส้น ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างระบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น คือ ระบบเชิงเส้นสามารถแบ่งออกเป็นส่วนๆเพื่อวิเคราะห์ได้ และมีการเปลี่ยนแปลงของเอาต์พุตที่สัมพันธ์กันเป็นทิศทางเดียวกันกับเงื่อนไขของระบบ ดังนั้นการดำเนินการวิเคราะห์ภาพรวมระบบพลวัตที่ไม่เป็นเชิงเส้นจำเป็นต้องถูกทำให้เป็นระบบเชิงเส้นเสียก่อน (Linearized system) [2, 23] ด้วยการอนุพันธ์ โดยจะเริ่มต้นจากการแสดงตัวอย่างด้วยระบบไม่เป็นเชิงเส้นอันดับหนึ่งหรือหนึ่งมิติ เพื่อหาจุดคงที่ (Fixed point) และบ่งบอกชนิดความเสถียรภาพของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบ จากนั้นจะอธิบายหลักการของระบบอันดับสามหรือสามมิติ โดยหาค่าความสมดุล (Equilibrium) ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue: λ) และเมทริกซ์จาโคเบียน (Matrix Jacobian) [24-26] รวมถึงนิยามของแต่ละตัวแปร เพื่อบ่งบอกความเสถียรภาพของระบบไม่เป็นเชิงเส้นอันดับสาม โดยมีการแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยระบบเคออสจากแบบจำลองลอเรนซ์ (Lorenz model)

2.2.1 วิเคราะห์ความเสถียรภาพด้วยระบบไม่เป็นเชิงเส้นหนึ่งมิติ (Nonlinear a dimension stability analysis)

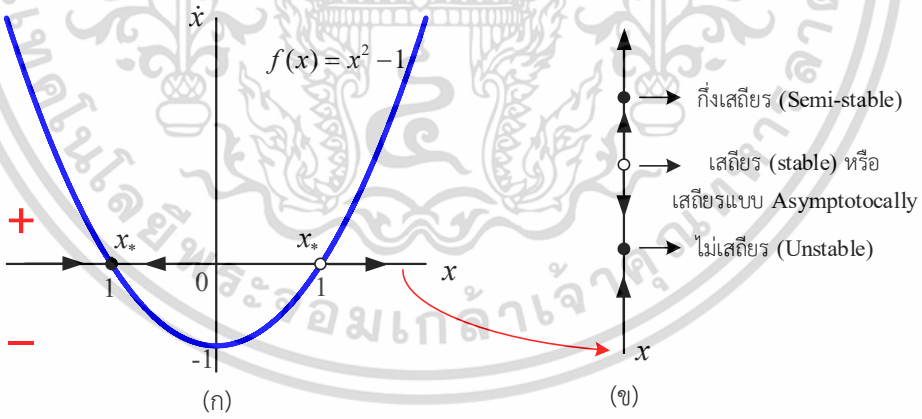
แสดงการวิเคราะห์อย่างง่ายด้วยระบบไม่เป็นเชิงเส้นอันดับหนึ่ง (First-order) หรือหนึ่งมิติ (one-dimension) ดังนี้

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

ที่ $x \in \mathbb{R}^n$ และ f คือฟังก์ชันจำนวนจริง x โดยกำหนด $f(x)$ ดังนี้

$$f(x) = x^2 - 1 \tag{2.2}$$

จากสมการที่ (2.2) $x \in \mathbb{R}^1$ เพื่อหาจุดคงที่ (fixed point) จะกำหนดฟังก์ชันเท่ากับ 0 ($f(x)$=0) ดังนั้น x^2-1=0 จะได้จุดคงที่ คือ $x_* = 1,\ x_* = -1$ แสดงลักษณะฟังก์ชันและจุดคงที่ดังรูปที่ 2.2 (ก) โดยรูปที่ 2.2 (ข) คือลักษณะลูกศรเพื่อบ่งบอกชนิดของความเสถียรภาพ โดยลูกศรชี้ขึ้นหมายถึงช่วงกราฟเป็นบวก และลูกศรชี้ลงหมายถึงช่วงกราฟเป็นลบ ตามเครื่องหมาย ± ในรูปที่ 2.2 (ก)



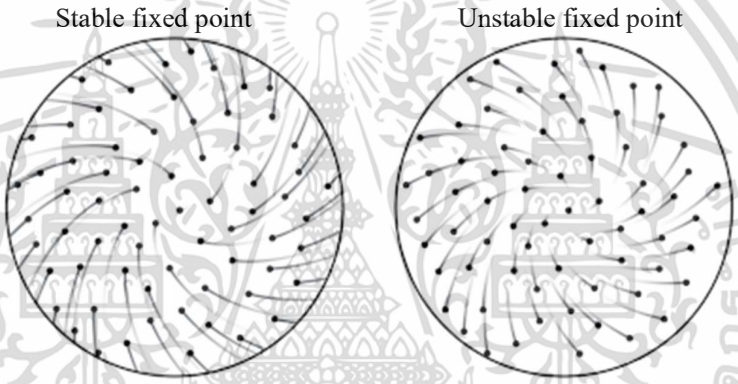
รูปที่ 2.2 (ก) กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 1$ และจุดคงที่ x_* (ข) ชนิดของความเสถียรภาพ

การวิเคราะห์ความเสถียรภาพเชิงเส้น (Linear stability analysis) สามารถวิเคราะห์ได้ด้วยการทำให้สมการกลายเป็นเชิงเส้นด้วยการอนุพันธ์ (derivations) ฟังก์ชันในสมการที่ (2.2) $f'(x) = dx/dt$ โดยแทนที่ $x = x_*$ จะได้

$$f'(x_*) = 2x_* \quad ; x_* = \pm 1 \tag{2.3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนิยาม [27] เมื่อ $f'(x_*) > 0$ ผลลัพธ์อยู่ใกล้ค่า x_* จะลู่ออก (diverge) และเมื่อ $f'(x_*) < 0$ ผลลัพธ์อยู่ใกล้ค่า x_* จะลู่เข้า (Converge) ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ดังนั้นจากสมการที่ (2.3) เมื่อ $f'(-1) = -2$ และ $f'(1) = 2$ จะพบว่าที่ $x_* = 1$ คือ ความไม่เสถียร (Unstable) และ $x_* = -1$ คือ ความเสถียร (Stable) จากตัวอย่างการวิเคราะห์บนระบบอันดับหนึ่ง เป็นการแสดงวิธีการให้เข้าใจโดยง่าย สำหรับสถานะของระบบให้เห็นว่า จุดคงที่ของระบบสามารถบ่งบอกความเสถียรภาพว่ามีความเสถียรและความไม่เสถียรที่จุดใด โดยแสดงตัวอย่างการเคลื่อนที่สำหรับจุดคงที่ทั้งสองแบบดังรูปที่ 2.3 ซึ่งสามารถขยายความได้ คือ จุดคงที่ที่มีความเสถียร เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป การเคลื่อนที่ของฟังก์ชันหรือค่าในระบบจะเข้าสู่จุดใดจุดหนึ่ง แต่จุดคงที่ที่มีความไม่เสถียร เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปค่าของระบบจะมีวิวัฒนาการหรือเปลี่ยนไปอย่างรวดเร็วในระดับเลขชี้กำลัง (Exponential)



รูปที่ 2.3 การเคลื่อนที่ลู่เข้าและลู่ออกสำหรับจุดคงที่แบบเสถียรและไม่เสถียร ตามลำดับ [28]

2.2.2 วิเคราะห์ความเสถียรภาพของระบบพลวัตหรือระบบไม่เป็นเชิงเส้นสามมิติ (analysis stability of dynamical or nonlinear 3-dimension system)

จากหัวข้อก่อนหน้าเป็นตัวอย่างเพื่อให้เห็นภาพโดยง่ายด้วยระบบอันดับหนึ่ง ซึ่งมีลักษณะฟังก์ชันที่ประกอบไปด้วยตัวแปรของระบบเพียงหนึ่งสเตรท โดยทำการหาจุดคงที่ (Fixed point) เพื่อบ่งชี้ความเสถียรภาพของระบบ แต่ระบบพลวัตหรือระบบเคออสเป็นระบบที่ประกอบไปด้วยสามตัวแปรสเตรทขึ้นไป ซึ่งภาพรวมของระบบจะมีความซับซ้อนและยากต่อการศึกษายิ่งขึ้น ในหัวข้อนี้จะแสดงการหาความเสถียรภาพของระบบด้วย จุดสมดุล (Equilibrium points: E) (จุดสมดุลในที่นี้คือจุดคงที่ในหัวข้อ 2.2.1 เมื่อมองในรูปของระบบพลวัตจะถูกเรียกว่า จุดสมดุล) ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue: λ) และชนิดของความเสถียรภาพ เพื่อบ่งชี้ความเสถียรภาพของระบบ โดยรูปแบบสมการพื้นฐานของระบบพลวัตสามารถเขียนเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งอิสระได้ ดังนี้

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) \quad ; \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,\ldots,x_n)\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= f_n(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned} \tag{2.5}$$

ที่ตัวแปร x เป็นตัวแปรใดๆที่มีวิวัฒนาการขึ้นอยู่กับเวลา และ n คือจำนวนมิติของระบบ (Dimension of system) โดยอาจเป็นตำแหน่ง (Coordinates) ความเร็ว (Velocities) โมเมนตา (Momenta) หรือปริมาณอื่นๆ และสิ่งสำคัญที่ประกอบอยู่ในระบบเคออส คือ พจน์ความไม่เป็นเชิงเส้น อาจเป็นฟังก์ชันตรีโกณ (Trigonometric function) ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) เป็นต้น ซึ่งภายในระบบสามารถควบคุมการเปลี่ยนแปลงได้ด้วยพารามิเตอร์

ดังที่กล่าวไปข้างต้น ด้วยการวิเคราะห์ระบบพลวัตที่มีอันดับสามขึ้นไป ค่อนข้างมีความซับซ้อนในการวิเคราะห์ให้ง่ายต่อความเข้าใจ ดังนั้นจะแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองระบบเคออสที่เป็นที่รู้จักกันดี ชื่อว่า แบบจำลองลอเรนซ์ [5, 29] แบบจำลองดังกล่าวเป็นที่รู้จักในวงกว้างของนักวิจัยด้านระบบพลวัตเป็นไม่เชิงเส้น โดยลักษณะสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งอิสระอันดับสามของลอเรนซ์ เขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y-x)\\ \dot{y} &= x(c-z)-y\\ \dot{z} &= xy-\beta z\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

จากรูปแบบในสมการที่ (2.5) เทียบกับสมการที่ (2.6) รูปแบบของตัวแปรถูกแปลงเป็น $(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$ และที่ α,c,β เป็นพารามิเตอร์ของระบบ มีค่าเป็นบวก ที่ xy xz คือพจน์ไม่เป็นเชิงเส้น

ขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์ ทำได้ด้วยการหาจุดสมดุลของแบบจำลองลอเรนซ์ในสมการที่ (5) ซึ่งเป็นระบบอันดับสาม ดังนั้น ที่ $\tilde{x}\in\mathbb{R}^3$ หมายถึง $\tilde{x}=(x,y,z)$ โดยค่าสมดุลหาได้จากกำหนด $f(\tilde{x})=0$ ดังนั้นแบบจำลองลอเรนซ์สามารถเขียนได้เป็น

$$0=\alpha(y-x) \tag{2.7a}$$
$$0=x(c-z)-y \tag{2.7b}$$
$$0=xy-\beta z \tag{2.7c}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยส่วนมากจุดสมดุลแรกของแต่ละระบบ คือจุดกำเนิด (The Origin) หรือ $E_0(0,0,0)$ (ที่ E คือ Equilibrium) จากนั้นจะทำการหาจุดสมดุลอื่นๆ (The rest equilibrium) ของระบบ เริ่มจากสมการที่ (2.7a) เมื่อย้ายข้างสมการจะได้ $x=y$ จากนั้นนำไปแทนในสมการที่ (2.7b) จะได้ $xc-xz-x=0$ (แทน $y=x$) เมื่อจัดรูป จะพบว่า $z=(c-1)$ และสุดท้ายแทนตัวแปรทั้งหมดลงในสมการที่ (2.7c) จะได้ $x^2=\beta(c-1)$ (แทน $y=x$ และ $z=(c-1)$) จัดรูปได้เป็น $x=\pm\sqrt{\beta(c-1)}$ จากเงื่อนไขของสมการที่ (2.7a) จะได้ $x=y=\pm\sqrt{\beta(c-1)}$ เพราะฉะนั้น จุดสมดุลทั้งหมดของระบบลอเรนซ์ในสมการที่ (2.6) มีดังนี้

$$\begin{aligned} E_0(x,y,z) &= (0,0,0), \\ E_1(x,y,z) &= (\sqrt{\beta(c-1)},\sqrt{\beta(c-1)},c-1), \\ E_2(x,y,z) &= (-\sqrt{\beta(c-1)},-\sqrt{\beta(c-1)},c-1); \end{aligned} \tag{2.8}$$

จากจุดสมดุลทั้งสามจุดที่ทำการวิเคราะห์ได้ จะนำไปหาค่าลักษณะเฉพาะของระบบเพื่อบ่งบอกความเสถียรภาพได้ การหาค่าลักษณะเฉพาะ หรือ λ สามารถทำได้ด้วยการทำให้ระบบกลายเป็นเชิงเส้น (Linearization system) เพื่อให้ได้สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) และนำมาวิเคราะห์ถึงค่า λ การทำให้ระบบกลายเป็นเชิงเส้น มีขั้นตอนทางทฤษฎีดังต่อไปนี้

2.2.2.1 การแปลงระบบพลวัตกลายเป็นเชิงเส้น (Linearization of dynamic system) [23]

จากพื้นฐานสมการของระบบพลวัตในสมการที่ (2.5) จะถูกนำมาวิเคราะห์เป็นระบบเชิงเส้นเพื่อบ่งบอกความเสถียรภาพที่จุดสมดุลใดๆ โดยใช้เงื่อนไขที่ $\tilde{x}\in\mathbb{R}^3$ และ $\tilde{x}=(x,y,z)$ จะได้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(\mathrm{X}) \\ \dot{y} &= f_2(\mathrm{X}) \\ \dot{z} &= f_3(\mathrm{X}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

กำหนดให้ $\mathrm{X}=(x,y,z)$ โดยที่ $\mathrm{X_E}=(x_E,y_E,z_E)$ คือจุดสมดุลใดๆ และ $f_1(X_E)=f_2(X_E)=f_3(X_E)=0$ คือชุดฟังก์ชัน ณ จุดสมดุลของระบบ ในเชิงราชาคณิต (Geometrically) วิธีการดังต่อไปนี้ คือการประมาณค่าพื้นที่ผิวที่ซับซ้อนบนพื้นที่เฟส (Phase space) ด้วย Hyperplane (Hyperplane คือ การทำให้ระนาบสองมิติในปริภูมิสามมิติกลายเป็นปริภูมิทางคณิตศาสตร์ในมิติใดก็ได้) ซึ่งการประมาณค่าดังกล่าวจะใช้เพื่อหาพื้นที่ผิวที่อยู่รอบจุดสมดุลใดๆ เพื่อใช้วิเคราะห์ความเสถียรภาพของระบบที่มีมิติสูง ดังนั้นทฤษฎีที่เหมาะสมในการประมาณค่าระบบในสมการที่ (2.9) ณ จุดสมดุลจุดใดจุดหนึ่ง ($\mathrm{X_E}$) คือ ทฤษฎี Taylor (Taylor's theorem) นำสมการมาเขียนใหม่ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\dot{x} = f_1(x_E, y_E, z_E) + (x - x_E)\frac{\partial f_1}{\partial x}\bigg|_{X=X_E} + (y - y_E)\frac{\partial f_1}{\partial y}\bigg|_{X=X_E} + (z - z_E)\frac{\partial f_1}{\partial z}\bigg|_{X=X_E} + \ldots$$

$$\dot{y} = f_2(x_E, y_E, z_E) + (x - x_E)\frac{\partial f_3}{\partial x}\bigg|_{X=X_E} + (y - y_E)\frac{\partial f_2}{\partial y}\bigg|_{X=X_E} + (z - z_E)\frac{\partial f_2}{\partial z}\bigg|_{X=X_E} + \ldots \quad (2.10)$$

$$\dot{z} = f_3(x_E, y_E, z_E) + (x - x_E)\frac{\partial f_3}{\partial x}\bigg|_{X=X_E} + (y - y_E)\frac{\partial f_3}{\partial y}\bigg|_{X=X_E} + (z - z_E)\frac{\partial f_3}{\partial z}\bigg|_{X=X_E} + \ldots$$

ที่พจน์แรกของสมการ คือ $f_1(x_E, y_E, z_E) = f_2(x_E, y_E, z_E) = f_3(x_E, y_E, z_E) = 0$ จากนั้นสามารถเขียนเป็นรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{X=X_E} \begin{pmatrix} x - x_E \\ y - y_E \\ z - z_E \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

หรือจัดรูปได้เป็น

$$\dot{X} = J(X_E)(X - X_E) \quad (2.12)$$

ที่ $J(X_E)$ คือเมทริกซ์จาโคเบียน [24-26] ของระบบ ณ จุดสมดุลใดๆที่ X_E จากสมการที่ (2.12) อินทิเกรททั้งสองฝั่ง โดยที่ $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\int \frac{1}{X - X_E} dX = \int J(X_E) dt \quad (2.13)$$

จะได้

$$\ln(X - X_E) = J(X_E)dt + c \quad (2.14)$$

ที่ c คือค่าคงที่ และที่ $J(X_E)$ ถูกกำหนดให้ $J(X_E) = \lambda$ ดังนั้นจัดรูปสมการที่ (2.14) ให้อยู่ในฟังก์ชันเอ็กโพเนียนเชียล ได้ดังนี้

$$X - X_E = Ae^{\lambda t} \quad (2.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ $Ae^{\lambda t}$ คือ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvector) แทนสมการที่ (2.15) ลงในสมการที่ (2.12) และจัดรูปใหม่ จะได้

$$JAe^{\lambda t} - \lambda Ae^{\lambda t} = (J - \lambda I)Ae^{\lambda t} = 0 \tag{2.16}$$

ที่ J คือเมทริกซ์ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) และ λ คือ ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) โดยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ ($Ae^{\lambda t}$) มักเป็น nontrivial solution ดังนั้น จากสมการที่ (2.16) สิ่งที่เราสนใจ คือ

$$\det(J - \lambda I) = 0 \tag{2.17}$$

จากสมการที่ (2.17) คือ สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) นำมาจัดอยู่ในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{pmatrix} (j_{11} - \lambda) & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & (j_{22} - \lambda) & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & (j_{33} - \lambda) \end{pmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

ที่ j_{ij} คือ ค่าในเมทริกซ์ จากเมทริกซ์ในสมการที่ (2.18) จะได้สมการโพลิโนเมียลอันดับสามดังนี้

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2.19}$$

ที่ a3, a2, a1, a0 คือค่าสัมประสิทธิ์ โดยเมื่อแยกตัวประกอบในสมการที่ (2.19) จะทำให้ได้ค่าลักษณะเฉพาะออกมา 3 ค่า (λ_1, λ_2, λ_3) ค่าที่ได้จะประกอบด้วย ค่าจริงบวกลบ ค่าเชิงซ้อน หรือค่าศูนย์ ซึ่งความเสถียรภาพของระบบอันดับสามจะขึ้นอยู่กับรูปแบบของค่าลักษณะเฉพาะ

จากที่กล่าวมาในหัวข้อ 2.2.2.1 เป็นส่วนทฤษฎีพื้นฐานในการแปลงระบบให้เป็นเชิงเส้นเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ระบบ และได้ค่าลักษณะเฉพาะออกมา เพื่อให้เห็นภาพได้ชัดเจนยิ่งขึ้น จะยกตัวอย่างการวิเคราะห์บนระบบเคออส โดยทำการวิเคราะห์ต่อจากหัวข้อ 2.2.2 หลังจากได้จุดสมดุลของระบบมาแล้ว ก็จะทำการวิเคราะห์ความเสถียรภาพของจุดสมดุลแต่ละจุด จากระบบ Lorenz ในสมการที่ (2.6) เมื่อนำจัดรูปในเมทริกซ์จาโคเบียนจะได้

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ c - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

ที่ J(x, y, z) คือ เมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุลใดๆ ของระบบ Lorenz โดยที่ค่า x, y, z จะขึ้นอยู่กับการวิเคราะห์จุดสมดุลในสมการที่ (2.8) หากวิเคราะห์ที่จุดสมดุล E_0 จะแทนค่าด้วย (x, y, z) = (0, 0, 0) เป็นต้น เมื่อนำเมทริกซ์จาโคเบียนใน (2.20) มาแทนในสมการลักษณะเฉพาะ (det(J - λI)=0) เพื่อหาค่าลักษณะเฉพาะ จะได้ (นิยามว่า $F(\lambda)$ คือ สมการลักษณะเฉพาะ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(\lambda)=\begin{bmatrix} -\alpha-\lambda & \alpha & 0 \\ c-z & -1-\lambda & -x \\ y & x & -\beta-\lambda \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

จากสมการที่ (2.21) จะได้สมการโพลิโนเมียลอันดับสามของค่าลักษณะเฉพาะ ดังนี้

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lambda^3+(\alpha+1+\beta)\lambda^2+(\beta+\alpha+\alpha\beta+x^2-\alpha c+z\alpha)\lambda+..., \\ &\quad \alpha(\beta+xy+x^2-\beta c+\beta z). \end{aligned} \tag{2.22}$$

เมื่อเทียบกับสมการที่ (2.19) ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ของระบบ Lorenz คือ

$$\begin{cases} a_3=1, \\ a_2=(\alpha+1+\beta), \\ a_1=(\beta+\alpha+\alpha\beta+x^2-\alpha c+z\alpha), \\ a_0=\alpha(\beta+xy+x^2-\beta c+\beta z). \end{cases} \tag{2.23}$$

โดยจะเริ่มแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ที่จุดสมดุล E_0 ดังนั้นที่ x, y, z ในสมการ (2.23) คือ $E_0(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ค่าสัมประสิทธิ์สำหรับจุด E_0 จะได้

$$\begin{cases} a_3=1, \\ a_2=(\alpha+1+\beta), \\ a_1=(\beta+\alpha+\alpha\beta-\alpha c), \\ a_0=\alpha(\beta-\beta c). \end{cases} \tag{2.24}$$

พารามิเตอร์แต่ละตัวที่อยู่ในสัมประสิทธิ์ $a_0 - a_3$ ส่งผลต่อความเสถียรภาพของระบบ ซึ่งมีผลต่อการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะที่ได้ เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจจะยกตัวอย่างผลกระทบของพารามิเตอร์ c ที่มีต่อระบบ โดยจะคงที่ค่า β=1 และ α=10 สมการที่ (2.24) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{cases} a_3=1, \\ a_2=12, \\ a_1=(21-10c), \\ a_0=(10-10c). \end{cases} \tag{2.25}$$

จากสมการที่ (2.25) ปัจจัยสำคัญต่อความเสถียรภาพของระบบตอนนี้ คือ ค่าพารามิเตอร์ c โดยแสดงตัวอย่างของค่าลักษณะเฉพาะ เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า c ในระบบ ณ จุด E_0 ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ความเสถียรของระบบ Lorenz ณ จุด $E_0(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ c โดยคงที่ β=1 และ α=10

พารามิเตอร์ c	ค่าลักษณะเฉพาะที่จุด E_0	ความเสถียรภาพ
0.5	$\lambda_1=-10.525,$ $\lambda_2=-0.475,$ $\lambda_3=-1.$	เสถียร
1	$\lambda_1=0,$ $\lambda_2=-1,$ $\lambda_3=-11.$	เสถียร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.1	$\lambda_1 = -11.09,$ $\lambda_2 = 0.09,$ $\lambda_3 = -1.$	ไม่เสถียร
1.5	$\lambda_1 = -11.437,$ $\lambda_2 = 0.437,$ $\lambda_3 = -1.$	ไม่เสถียร
30	$\lambda_1 = -23.395,$ $\lambda_2 = 12.395,$ $\lambda_3 = -1.$	ไม่เสถียร

จากทฤษฎีความเสถียรภาพในระบบเชิงเส้น *"เมื่อค่าลักษณะเฉพาะในระบบมีค่าจริงเป็นลบหรือ ศูนย์ทั้งหมดจะบ่งชี้ว่าระบบมีความเสถียร หรือ stable แต่หากค่าจริงมีค่าบวกอยู่ในระบบร่วมกับค่าจริงลบ จะบ่งชี้ว่าระบบมีความไม่เสถียร หรือ unstable"* [2, 19-20] ซึ่งจากตารางที่ 2.1 จะเห็นว่าเมื่อค่า c=1.1 ระบบเริ่มเข้าสู่ความไม่เสถียรด้วยค่า λ_2=0.09 ดังนั้นเงื่อนไขของค่า c สำหรับความเสถียรภาพของระบบ Lorenz คือระบบจะมีความเสถียรเมื่อ $c \le 0$ และระบบจะมีความไม่เสถียรเมื่อ $c > 0$ โดยความไม่เสถียรของระบบนั้นหมายถึง ระบบเริ่มเกิดพฤติกรรมเป็นคาบ หรือ periodic และเข้าสู่พฤติกรรมเคออสในที่สุด

ตัวอย่างการวิเคราะห์ความเสถียรภาพของระบบ Lorenz ณ จุด E_1 จะแสดงดังนี้

ที่ β=1 และ α=10 ถูกกำหนดให้คงที่เท่าเดิม โดยที่จุด $E_1(x, y, z) = (\sqrt{\beta(c-1)}, \sqrt{\beta(c-1)}, c-1)$ ดังนั้น x, y, z จะถูกแทนในสมการที่ (2.23) ค่าสัมประสิทธิ์ของระบบ Lorenz ณ จุด E_1 เขียนได้ดังนี้

$$\begin{cases} a_3 = 1, \\ a_2 = 12, \\ a_1 = (c+10), \\ a_0 = (20c-20). \end{cases} \tag{2.26}$$

จากสมการที่ (2.26) ใช้ค่าพารามิเตอร์ c เพื่อเปลี่ยนแปลงความเสถียรภาพของระบบเช่นเดิม โดยแสดงตัวอย่างของค่าลักษณะเฉพาะ เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า c ในระบบ ณ จุด E_1 ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 ความเสถียรของระบบ Lorenz ณ จุด $E_1(x, y, z) = (\sqrt{\beta(c-1)}, \sqrt{\beta(c-1)}, c-1)$ เมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ c โดยคงที่ β=1 และ α=10

พารามิเตอร์ c	ค่าลักษณะเฉพาะที่จุด E_0	ความเสถียรภาพ
1	$\lambda_1 = 0,$ $\lambda_2 = -1,$ $\lambda_3 = -11.$	เสถียร
10	$\lambda_1 = -11.612,$ $\lambda_2 = -0.194 + 3.932i,$ $\lambda_3 = -0.194 - 3.932i.$	เสถียรแบบจุด Focus

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

17.5	$\lambda_1 = -12,$ $\lambda_2 = 0 + 5.244i,$ $\lambda_3 = 0 - 5.244i.$	เสถียรแบบจุด Focus
18	$\lambda_1 = -12.023,$ $\lambda_2 = 0.011 + 5.317i,$ $\lambda_3 = 0.011 - 5.317i.$	ไม่เสถียร
30	$\lambda_1 = -12.509,$ $\lambda_2 = 0.254 + 6.804i,$ $\lambda_3 = 0.254 - 6.804i.$	ไม่เสถียร

จากตารางที่ 2.2 ตามทฤษฎีความเสถียรภาพในระบบเชิงเส้น ค่าจริงที่เป็นบวกจะเริ่มที่ c=18 ซึ่งเป็นค่าที่ระบบเกิดความไม่เสถียร โดยสิ่งที่เกิดขึ้นบนระบบ ณ จุด E_1 คือค่าลักษณะเฉพาะมีค่าจินตภาพเกิดขึ้น โดยจุดที่มีค่าจริงเป็นลบหรือศูนย์ทั้งหมด และค่าจินตภาพหนึ่งคู่ (บวก-ลบ) เรียกว่า จุด Focus (Focus point) ซึ่งจะเห็นได้ที่ c=10 และ c=17.5 ส่วนจุดที่มีค่าจริง (λ_1) ที่มีเครื่องหมายตรงข้ามกับค่าจริงที่อยู่ในคู่ของค่าจินตภาพ ($\lambda_{2,3}$) ดังค่าพารามิเตอร์ c=18 และ c=30 จุดนี้เรียกว่า จุดไม่เสถียร หรือ จุดที่ระบบเข้าสู่พฤติกรรมเคออส [2, 19-20]

จากตัวอย่างการวิเคราะห์ของระบบ Lorenz เป็นการแสดงให้เห็นขั้นตอนการวิเคราะห์ความเสถียรภาพของระบบพลวัตอันดับสามด้วยการแปลงเป็นระบบเชิงเส้น เพื่อบ่งชี้ถึงสถานะของความเสถียรภาพของระบบ ที่มีผลกระทบจากพารามิเตอร์ของระบบ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อพิสูจน์พฤติกรรมพลวัตของระบบ ใช้เพื่ออธิบายควบคู่กับผลเชิงกราฟฟิกเพื่อให้ผลลัพธ์สอดคล้องกัน โดยการวิเคราะห์ความเสถียรภาพเป็นพื้นฐานสำคัญในการวิเคราะห์ที่เป็นสากลของระบบพลวัตทุกระบบ ทฤษฎีที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่มักใช้คู่กับการวิเคราะห์ความเสถียรภาพ คือ ทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่สามารถระบุลักษณะของพฤติกรรมพลวัตเป็นเชิงปริมาณได้ ดังจะกล่าวต่อไปนี้

2.3 ทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov (Lyapunov exponent)

ระบบเคออส (Chaos system) เป็นระบบพลวัตแบบไม่เชิงเส้น ลักษณะของพฤติกรรมพลวัตที่แสดงผลบนพื้นที่เฟส (Phase space) หรือ phase portrait มีลักษณะเป็นวิถีวงโคจร ลักษณะของพฤติกรรมพลวัตมีหลายลักษณะขึ้นอยู่กับการออกแบบด้วยแบบจำลองของระบบเคออสที่แตกต่างกัน รวมถึงในหนึ่งระบบสามารถสร้างลักษณะพฤติกรรมพลวัตได้หลายรูปแบบ เช่น วงรอบจำกัด (Limit cycle), จุดเสถียร (The stable focus), ทอรัส (Torus), ช่วงคาบทวีคูณ (The period-doubling), ช่วงคาบกำลังสอง (2-Period doubling), ตัวดึงดูด (Attractor) เป็นต้น การวิเคราะห์และอธิบายลักษณะพฤติกรรมพลวัตต่างๆต้องใช้ทฤษฎีในการรองรับเพื่อยืนยันหลักการสร้างและเพื่อความชัดเจนต่อลักษณะวิถีวงโคจรที่เกิดขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลขชี้กำลัง Lyapunov เป็นทฤษฎีหนึ่งที่สามารถระบุว่า ระบบที่ออกแบบมีลักษณะเป็นเคออสหรือไม่ รวมถึงบ่งชี้ชนิดและความซับซ้อนของตัวดึงดูดเป็นผลลัพธ์เชิงปริมาณได้ หลายงานวิจัยนำไปประยุกต์ใช้เพื่ออธิบายลักษณะและพฤติกรรมพลวัตที่ซับซ้อนของงานที่ออกแบบ [30-32] โดยทฤษฎีนี้ถูกสร้างจากงานวิจัยของนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียที่ชื่อ Floquet และ Poincaré ในปี 1892 [33] เป็นงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับเสถียรภาพการเคลื่อนที่ของคาบที่ไม่เป็นระยะ (The stability of nonperiodic motion) และพัฒนาทฤษฎีพื้นฐานของลักษณะเลขชี้กำลังจนนำไปสู่ทฤษฎีที่ชื่อว่า เลขชี้กำลัง Lyapunov (Lyapunov exponent) การใช้ทฤษฎีนี้ในการวิเคราะห์วิถีวงโคจรของเคออสทำให้เราแยกลักษณะของพฤติกรรมพลวัตแต่ละประเภทได้ และสามารถให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นเชิงปริมาณเพื่อทราบเป็นตัวเลข

โดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงหลักการพื้นฐานในการคำนวณและความหมายของเลขชี้กำลัง Lyapunov แต่ด้วยทฤษฎีของ Lyapunov เป็นหลักการบนพื้นฐานของระบบพลวัตแบบไม่เป็นเชิงเส้น คำศัพท์และวิธีการในการอธิบายอาจมีความซับซ้อนและยากต่อความเข้าใจโดยง่าย ไม่สามารถอธิบายอย่างตรงไปตรงมาเหมือนระบบเชิงเส้นได้ รวมถึงอาจมีการกล่าวถึงทฤษฎีอื่นที่เกี่ยวข้องที่ต้องทำความเข้าใจก่อนเรียนรู้ทฤษฎี Lyapunov ผู้อ่านสามารถเรียนรู้เนื้อหาโดยละเอียดและศึกษาทฤษฎีอื่นๆที่เกี่ยวข้องได้จากหนังสือใน [2, 19-20] ซึ่งในการใช้งานจริงเพื่อพิสูจน์ระบบเคออสรูปแบบการคำนวณของ Lyapunov ถูกพัฒนาเป็นอัลกอริทึมให้ใช้งานบนซอฟแวร์ ทำให้ง่ายต่อการนำไปปฏิบัติ โดยจะอธิบายการใช้งานจริงของการคำนวณ Lyapunov ไว้ในส่วนท้ายของหัวข้อนี้ด้วย

2.3.1 หลักการพื้นฐานของ Lyapunov exponent

เลขชี้กำลัง Lyapunov หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของการแยกตัวจากวิถีวงโคจรสองเส้นที่เกิดขึ้นบน phase portrait ในการนำทฤษฎีนี้ไปใช้ในระบบเคออส ตัวแปร λ_1 ที่เป็นค่าสูงสุดของเลขชี้กำลัง Lyapunov เป็นตัวแปรสำคัญที่บ่งบอกความเป็นเคออสและความเป็นพลวัตของระบบ โดยสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.27) พร้อมแสดงองค์ประกอบของแต่ละตัวแปรดังรูปที่ 2.4

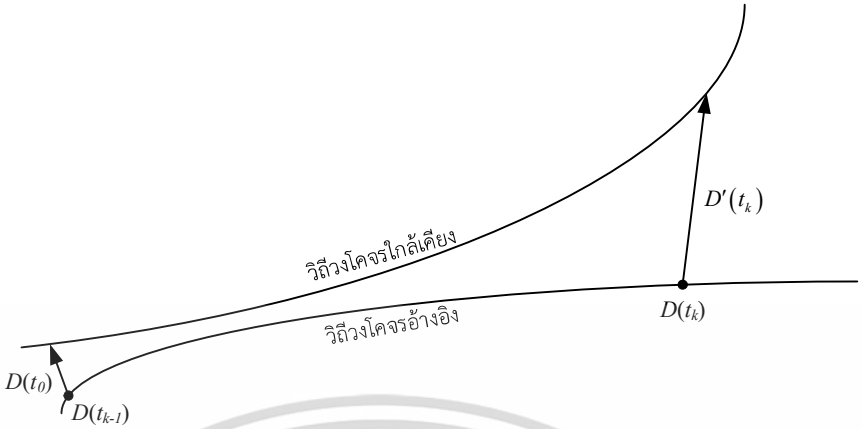
$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^{M} \ln \frac{D'(t_k)}{D(t_{k-1})} \tag{2.27}$$

ที่ $D(t_k)$ คือ ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดของวิถีวงโคตร ที่เวลา t_k

ที่ M คือ จำนวนรอบที่เกิดการวนซ้ำของวิถี

ที่ λ_1 คือ ดัชนีที่บ่งบอกเชิงปริมาณของตัวดึงดูดเคออส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.4 ภาพจำกัดความพื้นฐานของตัวแปรเลขชี้กำลัง Lyapunov

2.3.2 สเปกตรัมเลขชี้กำลัง Lyapunov (The Lyapunov exponent spectrum)

สำหรับระบบที่มี มิติ หรือลำดับอนุพันธ์ที่มากกว่าหนึ่ง จะทำให้ค่า Lyapunov มีมากกว่าหนึ่งตัว ซึ่งชุด Lyapunov ทั้งระบบนั้นจะถูกเรียกว่า สเปกตรัม Lyapunov โดยเลขชี้กำลัง Lyapunov แต่ละตัวจะบ่งบอกทิศทางที่แน่นอนของวิถีวงโคจรทั้งหมดในระบบที่มาบรรจบกัน

โดยการคำนวณจะเริ่มจากการกำหนดรูปแบบการคำนวณเลขชี้กำลัง Lyapunov ให้เกี่ยวข้องกับการคำนวณลักษณะสเปกตรัมทั่วไป กำหนดให้ระบบพลวัตที่มีความต่อเนื่องทางเวลา มีอันดับมิติ (n-dimensional) หรืออันดับอนุพันธ์ของระบบบนพื้นที่เฟส โดยระบบพลวัตที่เกิดการกระจายตัวตลอดเวลา ทางทฤษฎีนิยามว่า “การวิวัฒนาการในระยะยาว (Long-term evolution) ของ n-มิติ รูปทรงกลม (n-sphere) จะถูกเปลี่ยน the ellipsoid [34] ด้วยกฎการเสียรูปทางธรรมชาติ (the nature deformation)” และเนื่องจากวิวัฒนาการของการเสียรูปตามธรรมชาติ จะเกิดการเปลี่ยนทรงกลมให้กลายเป็น ellipsoid ถ้าแกนทั้งหมดในทรงกลมที่จุดศูนย์กลางของตัวดึงดูด ellipsoid ถูกจัดลำดับ โดยเรียงจากความเร็วมากที่สุดไปความเร็วน้อยสุด เลขชี้กำลังของ ith Lyapunov จะถูกกำหนดตามอัตราการเพิ่มขึ้น ($p_i(t)$) ของแกน ith ดังสมการต่อไปนี้ [5-7]

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{p_i(t)}{p_0(t)}\right) \tag{2.28}$$

ที่ λ_i ถูกเรียงจากค่ามากสุดไปน้อยสุด เลขชี้กำลัง Lyapunov จึงสัมพันธ์กับลักษณะการขยายตัวหรือหดตัวของทิศทางวิถีวงโคจรต่างๆบนพื้นที่เฟส เนื่องจากการวางแนวแกนของ ellipsoid มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตามระบบที่เปลี่ยนไปตามเวลา (t) ค่าของ Lyapunov จึงมีค่าที่แตกต่างกันไปตามการเปลี่ยนแปลงของตัวดึงดูด ดังนั้นในทางทฤษฎีจึงไม่สามารถกำหนดทิศทางที่ชัดเจนของค่า Lyapunov ได้ เพียงแต่สามารถบอกลักษณะภาพรวมที่อยู่ในรูปของตัวดึงดูดบนพื้นที่เฟส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยขอบเขตเชิงเส้น (Extend line) ของ ellipsoid มีอัตราการเติบโต คือ $e^{\lambda_1 t}$ จากนั้นพื้นที่บน ellipsoid ของแกนหลักสองแกนแรกมีอัตราการเติบโต คือ $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$ และอัตราการเติบโตของแกนหลักสามแกนแรก คือ $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$

คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นอีกหนึ่งคำจำกัดความของเลขชี้กำลัง Lyapunov

(i) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ หมายความว่า ระบบมีพฤติกรรมที่เป็นเคออส

(ii) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0$ หมายความว่า ระบบพลวัตมีพฤติกรรมเป็นช่วงคาบ

ซึ่งจะขยายความดังนี้ ในระบบพลวัตที่มีการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นอยู่กับเวลา หากระบบไม่มีจุดคงที่ (fixed point) จะต้องมีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov เป็นศูนย์อย่างน้อยหนึ่งตัว [20] และหากการเคลื่อนที่ของระบบพลวัตเกิดความเสถียรภาพจะต้องมีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่ติดลบเกิดขึ้นในระบบ ซึ่งหากภาพรวมของระบบมีการกระจายตัวที่ไม่เป็นเชิงเส้น ผลรวมของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov จะต้องเป็นลบ ซึ่งนั่นบ่งบอกว่าเกิดการรวมตัวของตัวดึงดูดในพื้นใดพื้นที่หนึ่งบนพื้นที่เฟสจากการหดตัวและมีเสถียรภาพอยู่บนบริเวณนั้น ในขณะที่ค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov หนึ่งตัวต้องเป็นบวกเพื่อบ่งบอกว่า มีการขยายตัวเกิดขึ้นบนพื้นที่เฟส โดยมีวิถีวงโคจรกำลังเบี่ยงเบนไปในทางเดียวกันและเกิดการแยกตัวของวิถีวงโคจรที่อยู่ใกล้กันห่างออกจากกันมากขึ้นเรื่อย ๆในระดับเลขชี้กำลัง และมีพฤติกรรมแบบเป็นคาบที่คาดเดาไม่ได้ (unpredictable) ในสภาวะนี้จะเกิดลักษณะตัวดึงดูดที่แปลก (Strange attractor) และเกิดการเคลื่อนไหวที่เรียกว่า เคออส ดังนั้นในระบบพลวัตที่เป็นเคออสจะต้องมีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่เป็นบวกอย่างน้อยหนึ่งตัว

ด้วยเหตุนี้รูปแบบของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov สามารถบ่งบอกถึงชนิดตัวดึงดูดได้ โดยระบบต้องมีเลขชี้กำลัง Lyapunov คือ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (เรียงจากค่ามากไปน้อย) และสามารถอธิบายชนิดตัวดึงดูดได้ดังต่อไปนี้

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-,-,-)$ คือ จุดคงที่ (Fixed point)

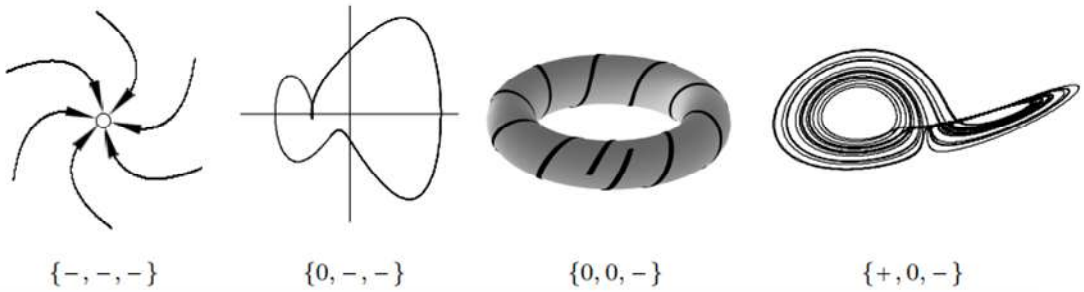
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,-,-)$ คือ วงรอบจำกัด (limit cycle)

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,-)$ คือ ทอรัส (torus)

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+,0,-)$ คือ ตัวดึงดูดแปลก (Strange attractor)

สำหรับเครื่องหมายเลขชี้กำลัง Lyapunov ชุดนี้ แสดงสำหรับระบบสามมิติ โดยแสดงตัวอย่างบน phase portraits ได้ดังรูปที่ 2.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.5 ลักษณะของชนิดตัวดึงดูดบนพื้นที่เฟสสามมิติ

ระบบที่มีมิติสูงกว่าสามมิติ จะทำให้มีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov มากกว่าสามค่า เรียกระบบนั้นว่า ไฮเปอร์ ซึ่งจะเกิดตัวแปร λ_4 , λ_5 หรือมากกว่า อยู่บนระบบพลวัต ขึ้นอยู่กับจำนวนมิติของแต่ละระบบ

2.3.3. มิติ Lyapunov (Lyapunov Dimension)

แนวคิดเกี่ยวกับมิติที่เกี่ยวข้องกับลักษณะของตัวดึงดูดและทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov ถูกเชื่อมโยงด้วยทฤษฎี Ergodic จากนักวิจัยที่ชื่อ J.L. Kaplan และ J.A. Yorke ในปี 1979 [35] ทำให้เราสามารถรับรู้ค่าเชิงปริมาณของความซับซ้อนจากระบบพลวัตที่ออกแบบเป็นค่าเฉลี่ยเพียงหนึ่งค่า ซึ่งสามารถบ่งชี้ได้ถึงปริมาณความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออส และชนิดของระบบเคออสที่มีอันดับสูง

โดย J.L. Kaplan และ J.A. Yorke ได้เริ่มศึกษาจากการใช้ระบบสองมิติที่เรียกว่า Henon [36] และตั้งต้นสมการสำหรับระบบที่มีเลขชี้กำลัง Lyapunov เพียงสองตัว คือ

$$D_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \tag{2.29}$$

ที่ D_L คือ Lyapunov dimension (หรือ D_{KY}: Kaplan-Yorke dimension) และ λ_1, λ_2 คือ ค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov

จากนั้นได้ดัดแปลงสมการที่ (2.29) ให้กลายเป็นรูปทั่วไปที่สามารถประยุกต์ใช้สำหรับระบบที่มากกว่าสองมิติได้ โดยมีสูตรสำหรับระบบ n-มิติ ดังต่อไปนี้

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} = j + \frac{\lambda^{(j)}}{|\lambda_{j+1}|} \tag{2.30}$$

ที่ $j \le n$ คือ ค่าดัชนีที่ใหญ่สุดเมื่อ j-1 โดยเงื่อนไขสำหรับเลขชี้กำลัง Lyapunov คือ $\lambda^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \ge 0$ และ $\lambda_{j+1} < 0$ และจะต้องอยู่ในเงื่อนไข $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3, ..., \lambda_n$ ถ้า $\lambda_1 < 0$ เราจะกำหนดให้ D_L=0 ทันที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะสังเกตเห็นว่าในสมการที่ (2.30) เงื่อนไข $\lambda^{(j)} \geq 0$ หมายความว่า ปริมาณของ มิติ j เพิ่มขึ้นหรืออย่างน้อยมีปริมาณคงที่ในช่วงเฉลี่ย แต่ในขณะที่ปริมาณของ มิติ j+1 นั้นเข้าใกล้ศูนย์ เนื่องจาก $\lambda_{j+1} < 0$ ดังนั้น มิติ D ของตัวดึงดูดต้องอยู่ในช่วง $j \leq D_L < j+1$ ซึ่งในพจน์ของ $\lambda^{(j)} / \left|\lambda_{j+1}\right|$ เป็นตัวบ่องบอกว่าระบบสามารถสร้างลักษณะเป็นตัวดึงดูด ซึ่งต้องมีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่เป็นบวกอย่างน้อยหนึ่งตัว ในหลายงานวิจัยตัวแปร D_L ถูกแทนด้วยตัวแปร D_{KY} ซึ่งหมายถึง มิติ Lyapunov เช่นกัน

2.3.4. อัลกอริทึมของเลขชี้กำลัง Lyapunov (Algorithm's Lyapunov exponent)

ในปี ค.ศ. 1984 Alan Wolf ได้พัฒนาการประมาณค่าของเลขชี้กำลัง Lyapunov ให้กลายเป็นอัลกอริทึมบนซอฟแวร์ โดยสามารถคำนวณและบ่งบอกค่าเป็นเชิงปริมาณของพฤติกรรมบนระบบพลวัตได้ เช่นเดียวกับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ที่สำคัญสามารถแสดงผลเป็นกราฟเพื่อแสดงให้เห็นถึงปริมาณของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่ได้จากการคำนวณของอัลกอริทึม โดยได้เขียนอธิบายหลักการทางทฤษฎีไว้ในงานวิจัยที่ชื่อ "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series" [37]

โดยทางผู้เขียนมีการใช้อัลกอริทึมนี้เป็นหลักในการคำนวณหาค่าเชิงปริมาณของเลขชี้กำลัง Lyapunov สำหรับระบบเคออสที่ออกแบบ ด้วยโปรแกรม MATLAB โดยจะยกตัวอย่างการใช้งานอัลกอริทึมจากแบบจำลองที่เป็นที่รู้จักกันดี คือ แบบจำลอง Lorenz [5] โดยมีสมการอนุพันธ์อันดับสามหรือสามมิติ ดังต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= x(\rho-z)-y, \\ \dot{z} &= xy-\beta z. \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

ที่ x, y, z คือตัวแปรสเตรทของระบบ และ σ, ρ, β คือพารามิเตอร์ควบคุมที่เป็นบวก ในการหาค่าเชิงปริมาณเลขชี้กำลัง Lyapunov จำเป็นต้องจัดรูประบบสมการอนุพันธ์ให้กลายเป็นระบบเชิงเส้นตามทฤษฎี ด้วยเมทริคจาโคเบียน (Matrix jacobian) [24] ซึ่งสูตรพื้นฐานของเมทริคจาโคเบียนเขียนได้ดังสมการที่ (2.32)

$$J_E(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{2.32}$$

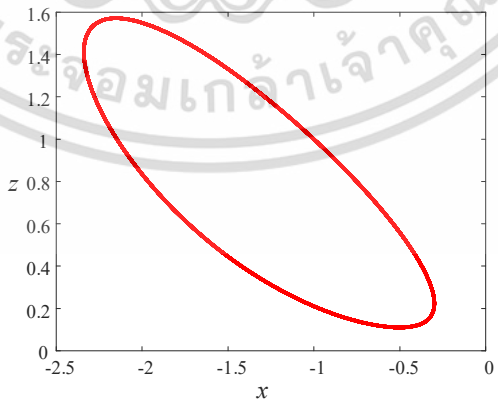
ดังนั้น เมทริคจาโคเบียนของสมการที่ (2.32) สามารถเขียนได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J_E = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+\rho & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

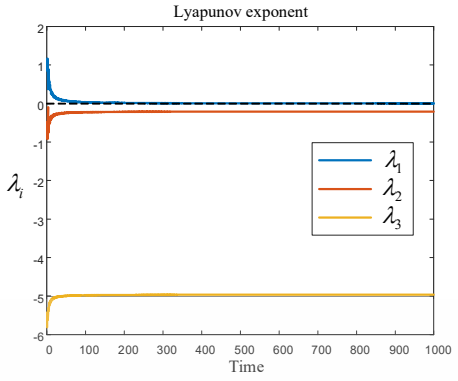
จากสมการที่ (2.33) กำหนดพารามิเตอร์ $\sigma = 10, \beta = 8/3$ และใช้พารามิเตอร์ ρ ในการปรับเพื่อแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของระบบพลวัต ซึ่งในการคำนวณค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov จะนำสมการที่ (2.33) ไปใช้ในการจำลองผลและคำนวณบนอัลกอริทึม โดยจะแสดงลักษณะของตัวดึงดูดบนระบบ Lorenz ให้เห็นความแตกต่างสองลักษณะจากการปรับพารามิเตอร์ ρ โดยเริ่มจากกำหนด $\rho = 7.5$ ลักษณะของวิถีที่แสดงบน phase portrait จะมีลักษณะเป็น วงรอบจำกัด (limit cycle) แสดงบน phase portrait ระนาบ x-z ดังรูปที่ 2.6 และแสดงผลการคำนวณบนโปรแกรม MATLAB ดังรูปที่ 2.7 จากนั้นจะแสดงผลของลักษณะตัวดึงดูดเคออสเมื่อปรับพารามิเตอร์ $\rho = 2$ บน phase portrait ระนาบ x-z ดังรูปที่ 2.8 และแสดงผลการคำนวณบนโปรแกรม MATLAB สำหรับเลขชี้กำลัง Lyapunov ในช่วงพารามิเตอร์ $\rho = 2$ ดังรูปที่ 2.9 โดยในการจำลองผลกำหนดความยาวของ t=1000s

จะเห็นได้ว่าบนลักษณะ วงรอบจำกัด ที่มีการปรับพารามิเตอร์ $\rho = 7.5$ จะได้ค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งสามค่า คือ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.003707, -0.207575, -4.962796)$ ซึ่งสอดคล้องกับเครื่องหมายของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทางทฤษฎีในรูปที่ 2.5 คือ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ โดยที่ค่า λ_1 มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ λ_2, λ_3 มีค่าติดลบ จากนั้นเมื่อปรับพารามิเตอร์ $\rho = 2$ จะทำให้ได้ลักษณะตัวดึงดูดเคออสเกิดขึ้นบน phase portrait ซึ่งค่าของเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่ได้จากการคำนวณบนอัลกอริทึม คือ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.863411, -0.000840, -11.530289)$ ให้ผลที่สอดคล้องกับเครื่องหมายของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทางทฤษฎี $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ คืออยู่ในสภาวะที่เกิดตัวดึงดูดบน phase portrait โดยที่ค่า λ_1 เป็นบวก ค่า λ_2 เข้าใกล้ศูนย์ และค่า λ_3 ติดลบ



รูปที่ 2.6 phase portrait แสดงลักษณะวงรอบจำกัดของระบบ Lorenz ที่พารามิเตอร์ $\rho = 7.5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



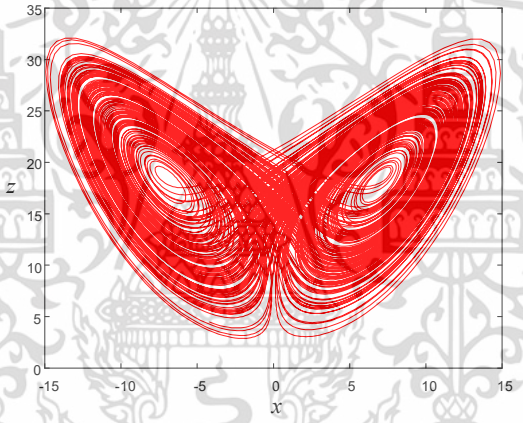
(ก)

Command Window

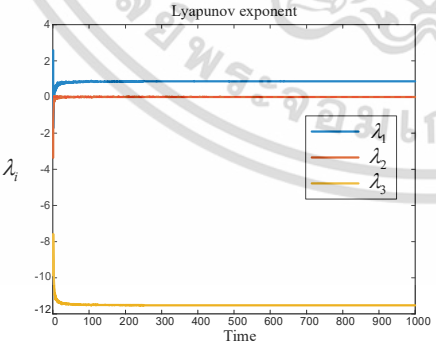
t=950.0000	0.003752	-0.207086	-4.963329
t=955.0000	0.003614	-0.207417	-4.962861
t=960.0000	0.003380	-0.206721	-4.963323
t=965.0000	0.003903	-0.207206	-4.963361
t=970.0000	0.003658	-0.207493	-4.962829
t=975.0000	0.003202	-0.206620	-4.963246
t=980.0000	0.004012	-0.207293	-4.963383
t=985.0000	0.003691	-0.207547	-4.962807
t=990.0000	0.003049	-0.206544	-4.963169
t=995.0000	0.004059	-0.207329	-4.963394
t=1000.0000	0.003707	-0.207575	-4.962796
	λ_1	λ_2	λ_3

(ข)

รูปที่ 2.7 แสดงผลการคำนวณเชิงปริมาณเลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบ Lorenz ด้วยอัลกอริทึม Wolf ที่พารามิเตอร์ $\rho = 7.5$ (ก) แสดงผลการคำนวณบนอนุกรมเวลา (ข) แสดงค่าการคำนวณที่ได้ของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งสามค่าบนหน้าต่างคำสั่ง



รูปที่ 2.8 phase portrait แสดงลักษณะตัวดึงดูดของระบบ Lorenz ที่พารามิเตอร์ $\rho = 2$



(ก)

Command Window

t-950.0000	0.864617	0.000154	-11.530807
t=955.0000	0.863446	0.000637	-11.530120
t=960.0000	0.863229	0.000564	-11.529831
t=965.0000	0.864897	-0.000264	-11.530671
t=970.0000	0.862553	0.001380	-11.529972
t=975.0000	0.863339	0.000552	-11.529928
t=980.0000	0.862672	0.001489	-11.530199
t=985.0000	0.862631	0.001256	-11.529924
t=990.0000	0.863674	0.000329	-11.530041
t=995.0000	0.864411	-0.000493	-11.529954
t=1000.0000	0.863411	0.000840	-11.530289
	λ_1	λ_2	λ_3

(ข)

รูปที่ 2.9 แสดงผลการคำนวณเชิงปริมาณเลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบ Lorenz ด้วยอัลกอริทึม Wolf ที่พารามิเตอร์ $\rho = 2$ (ก) แสดงผลการคำนวณบนอนุกรมเวลา (ข) แสดงค่าการคำนวณที่ได้ของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งสามค่าบนหน้าต่างคำสั่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากวิธีที่กล่าวมาเป็นตัวอย่างการใช้อัลกอริทึม Wolf บนแบบจำลองของ Lorenz ซึ่งให้ผลที่สอดคล้องและถูกต้องตามทฤษฎีข้างต้น โดยผู้เขียนมีการใช้อัลกอริทึมนี้ในการคำนวณและพิสูจน์ระบบเคออสที่ออกแบบ รวมถึงใช้ในการคำนวณเพื่อพิสูจน์การพัฒนาระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนมากขึ้น ในหัวข้อที่ 2.2 และ 2.3 ที่กล่าวมาเป็นการวิเคราะห์เชิงตัวเลขบนระบบพวัต ซึ่งดังที่กล่าวไปในหัวข้อที่ 2.1 การวิเคราะห์เพื่อแสดงพฤติกรรมของระบบพลวัตที่เชิงตัวเลขและเชิงกราฟฟิก ในหัวข้อถัดไปจะแสดงการวิเคราะห์เชิงกราฟฟิกอย่างหนึ่งที่สามารถระบุรูปแบบของพฤติกรรมพลวัตบนระบบได้ ดังจะกล่าวต่อไปนี้

2.4 ทฤษฎีการทดสอบไบนารี่ (0 - 1 test method) สำหรับระบบเคออส

ทฤษฎีนี้เป็นอีกหนึ่งทฤษฎีที่ผู้เขียนใช้ในการยืนยันความเป็นเคออสของระบบที่ออกแบบ โดย 0 - 1 test ถูกคิดค้นจาก Gottwald และ Melbourne ในปี ค.ศ. 2003 [38] เป็นวิธีที่ไม่ต้องใช้การแปลงระบบสมการอนุพันธ์เหมือนกับ Lyapunov exponent และมีโครงสร้างการคำนวณที่ไม่ซ้ำซ้อน ใช้แค่ข้อมูลอินพุตที่เป็นข้อมูลอนุกรมเวลา (Time-series) และได้เอาต์พุตออกมาเป็นข้อมูลไบนารี่ (0-1) โดยลักษณะของเอาต์พุตที่ได้ จะบ่งบอกว่าระบบเป็นเคออสหรือไม่ แต่ในการแยกแยะลักษณะประเภทตัวดึงดูดและการให้ผลลัพธ์เชิงตัวเลขยังคงมีความละเอียดที่น้อยกว่าทฤษฎี Lyapunov exponent หากต้องการพิสูจน์ระบบเคออสในระยะเวลาอันสั้น วิธีนี้เป็นวิธีสากลและนิยมอย่างมากในหลายงานวิจัย [39-41]

2.4.1 หลักการพื้นฐานของ 0 – 1 test สำหรับเคออส

สำหรับ 0 - 1 test ระบบจะเน้นแก้สมการที่มีความต่อเนื่องทางเวลา (Continuous-time) โดยการแก้สมการจะใช้ตัวแปรของระบบ คือ x(t) ในกรณีที่ระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete-time) จะใช้ตัวแปรของระบบ คือ $\phi(x)$ เป็นตัวแปรพื้นฐานบนระบบพลวัต (Dynamic system) การใช้ตัวแปร ϕ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับความหมายที่แท้จริงของตัวแปร เพียงกำหนดขึ้นสำหรับตัวแปรใดๆเพื่อใช้ในระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ถ้า $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ที่ $\phi(x)=x_1$ หรือ $\phi(x)=x_2$ เป็นต้น โดยสมการหลักที่ใช้สำหรับวิธี 0 - 1 test แสดงดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \theta(t) &= ct+\int_0^t \phi(x(s))ds, \\ p(t) &= \int_0^t \phi(x(s))\cos(\theta(s))ds. \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

ที่ $c>0$ เสมอ และที่ $p(t)$ ถูกกำหนดว่า

(i) ผลลัพธ์ของ $p(t)$ จะมีลักษณะขอบเขตที่ถูกจำกัด ถ้าระบบพลวัตไม่เป็นเคออส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ii) ผลลัพธ์ของ $p(t)$ จะมีลักษณะการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน (Brownian motion) [42] ถ้าระบบพลวัตเป็นเคออส

ที่ $p(t)$ ในสมการที่ (2.34) เน้นพิจารณาไปที่ตัวแปร $\phi(x)$ เท่านั้น โดยที่ลักษณะของข้อมูลและมิติ (Dimensions) ของระบบพลวัตที่ถูกป้อนเข้ามาใน (2.34) ไม่เกี่ยวข้องกับการทดสอบ

ต่อมาจะอธิบายหลักการของข้อกำหนด (i) และ (ii) ซึ่งจะสามารถดูได้จากผลลัพธ์ของฟังก์ชัน $p(t)$ ผลลัพธ์ของฟังก์ชันสามารถแสดงได้ด้วย การกระจัดกำลังสองเฉลี่ย (the mean-square displacement :MSD) ดังสมการต่อไปนี้

$$M(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (p(t+\tau) - p(\tau))^2 d\tau \tag{2.35}$$

ถ้า $p(t)$ มีผลลัพธ์การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนหรือมีพฤติกรรมของระบบพลวัตเป็นเคออส ที่ $M(t)$ จะเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรงกับเวลา แต่ถ้า $p(t)$ มีผลลัพธ์แบบถูกจำกัดขอบเขตหรือมีพฤติกรรมพลวัตไม่เป็นเคออส ที่ $M(t)$ จะถูกจำกัดขอบเขตเช่นกัน กำหนดอัตราการเติบโตแบบอะซิงโครนัส (The asynchronous growth) ของ $M(t)$ ดังนี้

$$K = \lim_{t\to\infty} \log M(t) / \log t \tag{2.36}$$

อัตราการเติบโต K=0 เมื่อระบบไม่เป็นเคออส และ K=1 เมื่อระบบเป็นเคออส

แต่เนื่องจากการอินทิทรัล (Integral) ที่ขึ้นอยู่กับเวลา เหมาะสำหรับใช้กับระบบที่ต่อเนื่องทางเวลาเท่านั้น ทำให้การนำไปประยุกต์ใช้ในระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาเป็นไปได้ยาก จึงมีการปรับปรุงวิธี 0 - 1 test ขึ้นมา ซึ่งใช้การบวก (Summing) แทนการอินทิเกรด (Integrating) เพื่อให้ประยุกต์ใช้งานได้ง่ายยิ่งขึ้น

2.4.2 หลักการที่ปรับปรุงใหม่ของ 0 – 1 test เพื่อใช้ในระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

เมื่อพิจารณาข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $\phi(n)$ จำนวนครั้ง $n = 1, 2, 3, \ldots,$ ที่ $\phi(n)$ คือ ชุดข้อมูลแบบ one-dimensional ของระบบพลวัต กำหนดค่าคงที่ $c \in R$ และกำหนด

$$p(n) = \sum_{j=1}^{n} \phi(j)\cos(\theta(j)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.37}$$

$$s(n) = \sum_{j=1}^{n} \phi(j)\sin(\theta(j)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.38}$$

และที่

$$\theta(j) = jc + \sum_{i=1}^{j} \phi(i), \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{2.39}$$

จากนั้น ด้วยพื้นฐานของฟังก์ชัน $p(n)$ และ $s(n)$ นำมากำหนดสมการ การกระจัดกำลังสองเฉลี่ย (MSD) ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$M(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} [p(j+n) - p(j)]^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.40}$$

และเช่นเดิม ถ้าผลลัพธ์ของ $p(n)$ มีการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนหรือมีพฤติกรรมของระบบพลวัตเป็นเคออส (ฟังก์ชัน $s(n)$ จะเหมือนกับ $p(n)$ เสมอ) ที่ $M(n)$ จะเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรง และถ้า $p(n)$ มีผลลัพธ์แบบถูกจำกัดขอบเขตหรือมีพฤติกรรมพลวัตไม่เป็นเคออส ที่ $M(n)$ จะถูกจำกัดขอบเขตเช่นกันกำหนดอัตราการเติบโตแบบอะซิงโครนัส (The asynchronous growth) ของ $M(t)$ ดังนี้

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{\log M(n)}{\log n} \tag{2.41}$$

เงื่อนไขของ K เหมือนกับระบบต่อเนื่องทางเวลา คือ อัตราการเติบโต K=0 เมื่อระบบไม่เป็นเคออส และ K=1 เมื่อระบบเป็นเคออส

สำหรับการพล็อตเพื่อรู้เงื่อนไข K จะเริ่มจากการจำกัดชุดข้อมูลของ $\phi(n)$ ที่ $1 \le n \le N$ ในสมการ (2.40) แสดงดังนี้

$$M(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{j=1}^{N-n} [p(j+n) - p(j)]^2 \tag{2.42}$$

ที่ $1 \le n \le N$ ของ $M(n)$ การพล็อตค่า $\log(M(n)+1)$ เทียบกับ $\log n$ จะสามารถเช็คได้ว่าค่า K เข้าใกล้ 0 (การเคลื่อนที่ปกติหรือไม่เป็นเคออส) หรือเข้าใกล้ 1 (การเคลื่อนที่แบบบราวเนียนหรือเป็นเคออส)

ซึ่งข้อสำคัญของหลักการ 0 - 1 test คือ การตรวจสอบพลวัตบน (p, s) ให้ผลลัพธ์เป็นการแสดงภาพที่ง่ายต่อการเข้าใจ ว่าระบบเป็นเคออสหรือไม่ โดยการแสดงวิถีโคจรที่ได้จากการพล็อตบนระนาบ (p, s) วิถีวงโคจรที่มีการจำกัดขอบเขต บ่งบอกว่า ระบบไม่เป็นเคออส และถ้าวิถีวงโคจรบนระนาบ (p, s) เคลื่อนที่คล้ายกันเคลื่อนที่แบบบราวเนียน บ่งบอกว่า ระบบเป็นเคออส

2.4.3. ตัวอย่างการใช้วิธี 0 - 1 test บนระบบเคออส

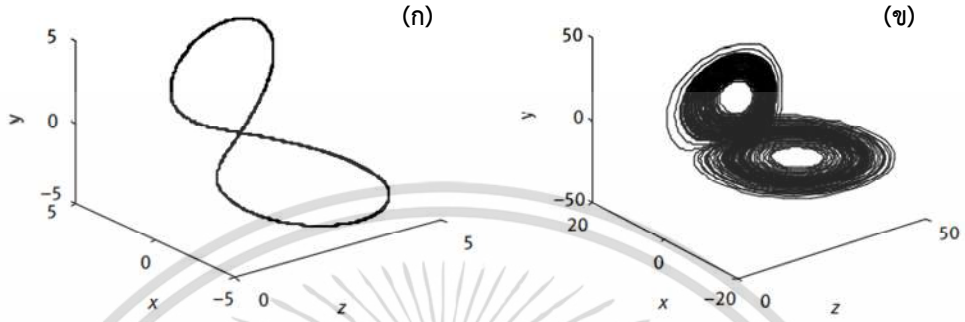
ผู้วิจัยขอยกตัวอย่างการประยุกต์ใช้ 0-1 test เพื่อให้เกิดความเข้าใจและเห็นภาพได้ง่ายยิ่งขึ้น โดยจะนำแบบจำลองที่เป็นที่รู้จักกันดีในสาขาเคออส ชื่อว่า แบบจำลองLorenz (Lorenz model) เป็นแบบจำลองที่สร้างลักษณะเคออสแบบตัวดึงดูดปีกผีเสื้อ (Butterfly attractor) คิดค้นโดย Edward Lorenz [5] ในปี ค.ศ. 1983 โดยมีสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สามสมการ ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= x(c - z) - y \\ \dot{z} &= xy - 8/3z \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

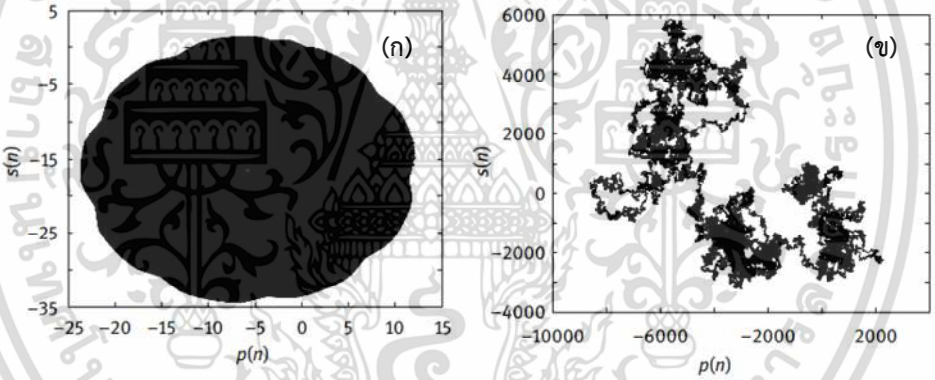
ที่ c คือพารามิเตอร์ที่ไม่ได้ถูกกำหนดค่า โดยจะใช้พารามิเตอร์ c ในการปรับเพื่อชี้ให้เห็นถึงการเปลี่ยนผลลัพธ์ของ 0 - 1 test ในช่วงที่ระบบ Lorenz เป็น คาบปกติ (periodic motion) กับคาบเคออส (Chaotic motion) โดยที่ c=7.2 จะได้ค่าอัตราการเติบโตของ K=0.0736 ซึ่งหมายถึงค่า K

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เข้าใกล้ 0 มีพฤติกรรมของระบบพลวัตที่ไม่เป็นเคออส และที่ c=-1 จะได้ ค่าอัตราการเติบโตของ K=0.7630 หมายถึง K เข้าใกล้ 1 มีพฤติกรรมของระบบพลวัตที่เป็นเคออส แสดงลักษณะวิถีวงโคจรของระบบ Lorenz ดังรูปที่ 2.10 และแสดงผลลัพธ์บนระนาบ (p, s) ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.10 phase portrait แสดงลักษณะวิถีวงโคจรของระบบ Lorenz บนแกน x-y-z โดย (ก) ลักษณะวิถีวงโคจรเมื่อพารามิเตอร์ c=7.2 (ข) ลักษณะวิถีวงโคจรเมื่อพารามิเตอร์ c=-1



รูปที่ 2.11 พล็อต 0 - 1 test บนระนาบ (p, s) ของระบบLorenz โดย
(ก) c=7.2 (K=0.0736) (ข) c=-1 (K=0.7630)

จากรูปที่ 2.11 จะเห็นว่า รูปที่ 2.11 (ก) เป็นการแสดงผลลัพธ์บนระนาบ (p, s) ให้เห็นการเคลื่อนที่แบบมีขอบเขต บ่งบอกว่าในช่วงที่ c=7.2 มีพฤติกรรมที่ไม่เป็นเคออส สอดคล้องกับรูปที่ 2.10 (ก) และรูปที่ 2.11 (ข) แสดงการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนหรือช่วงที่มีพฤติกรรมเป็นเคออสสำหรับ c=-1 สอดคล้องกับรูปที่ 2.10 (ข)

ทฤษฎี 0-1 test เป็นวิธีการวิเคราะห์เชิงกราฟฟิกที่ถูกประยุกต์ใช้ร่วมกับทฤษฎีทางฟิสิกส์จากการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน ซึ่งเป็นวิธีอย่างหนึ่งที่นิยมอย่างแพร่หลายในสาขาพลวัตไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งงานวิจัยของผู้เขียนมีการนำทฤษฎีดังกล่าวมาประยุกต์ใช้เพื่อยืนยันการเกิดพฤติกรรมเคอออสของระบบด้วย โดยผลลัพธ์เชิงกราฟฟิกที่สำคัญและจำเป็นอีกอย่างหนึ่ง ที่ต้องมีเพื่อใช้ในการอธิบายการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

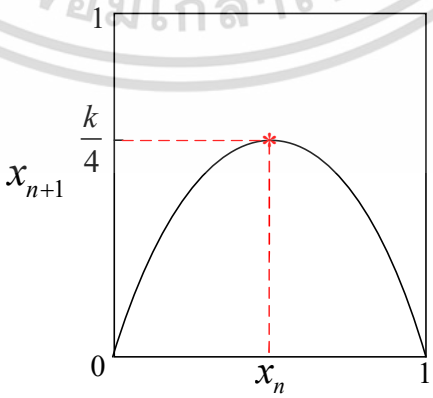
เปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตเป็นวงกว้างจากการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบ คือ ทฤษฎี Bifurcation ดังจะกล่าวดังต่อไปนี้

2.5 ทฤษฎีการแยกไปสองทาง (The Bifurcation)

ในการเกิดสัญญาณเคออส ของระบบพลวัตไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear dynamic system) มีผลทางทฤษฎีอธิบายการเกิดสัญญาณเคออส หลายวิธี เช่น แผนภาพ Poincare, *LE* (เลขชี้กำลัง Lyapunov), The Bifurcation เป็นต้น ในงานวิจัยนี้จะนำเสนอทฤษฎี การแยกไปสองทาง เพื่อพิสูจน์การเกิดสัญญาณเคออส โดยทฤษฎีการแยกไปสอง เป็นทฤษฎีที่อธิบายการกระจายค่าที่ได้จากชุดตัวแปรของสมการที่มี มิติ หรือพูดง่ายๆคือสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งขึ้นไป โดยปัจจัยสำคัญในการแสดงแผนภาพการแยกไปสองทาง คือ รูปแบบของชุดสมการอนุพันธ์ที่ใช้และพารามิเตอร์ที่ควบคุมอยู่ โดยทฤษฎีนี้สามารถบอกภาพรวมของระบบที่เกิดจากการปรับค่าพารามิเตอร์ได้ ทำให้สามารถนำผลการทดลองของวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส ที่มีการปรับค่าพารามิเตอร์ของระบบมายืนยันควบคู่กับแผนภาพการแยกไปสองทาง เพื่อยืนยันความถูกต้องได้

ในหัวข้อนี้จะอธิบายให้เห็นภาพ ด้วยการยกตัวอย่างของสมการไม่เป็นเชิงเส้น 1 มิติ หรืออนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีพารามิเตอร์ควบคุม 1 ตัว เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ โดยคุณสมบัติทั้งหมดจะเกี่ยวข้องกับหัวข้อ 2.2 และ 2.3 ที่เป็นพื้นฐานของระบบเคออส ด้วยลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าที่ไม่คงที่ มีการเปลี่ยนแปลงค่าตามสถานะปันจุบัน (State current) ของตัวแปรเมื่อเวลาผ่านไป โดยรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของแผนภาพการแยกไปสองทาง (Bifurcation diagram) จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วตามเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการที่กำหนด (มีความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้น : Sensitive to initial condition) สมการที่ใช้ตัวอย่าง คือ สมการ Logistic map ดังนี้

$$x_{n+1} = kx_n\left(1-x_n\right) \tag{2.44}$$



รูปที่ 2.12 กราฟแสดงความสัมพันธ์สมการ Logistic map [2]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่ (2.44) คือ สมการ Logistic ที่มีความไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete-time) สมการอยู่ในรูปแบบของตัวแปรสเตท 1 มิติ จากรูปที่ 2.12 เป็นกราฟพาราโบลาที่ได้จากสมการ Logistic ที่มีพจน์ $-kx_n^2$ เนื่องจากรูปสมการเมื่อจัดรูปแล้ว จะได้เป็น

$$x_{n+1} = kx_n - kx_n^2 \tag{2.45}$$

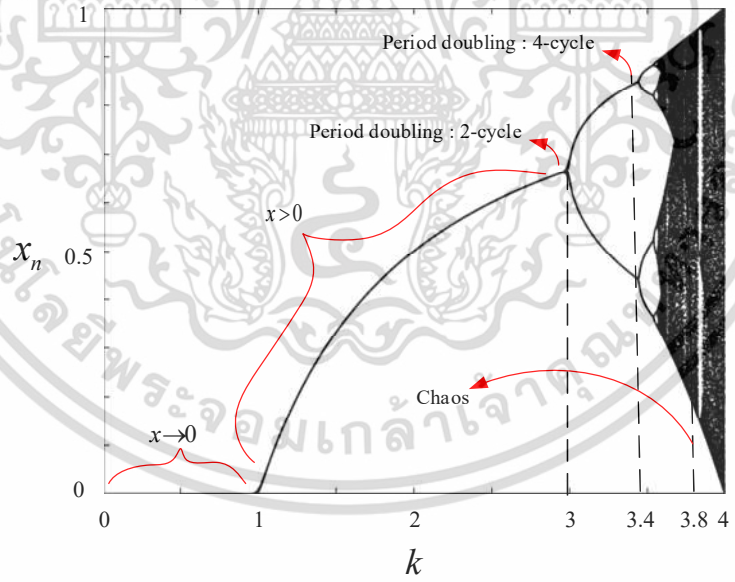
ที่ $0 \le x_n \le 1$ เนื่องจากมีเงื่อนไข (1-x_n) และ k คืออัตราการเติบโตของกราฟ จากรูปที่ 2.16 มีจุดสูงสุดของกราฟพาราโบลา คือ $\frac{k}{4}$ ที่ตำแหน่ง $x_n = \frac{1}{2}$ ค่าพารามิเตอร์ k จึงถูกจำกัดอยู่ในช่วง $0 \le k \le 4$ เพื่อให้ค่า x_n อยู่ในเงื่อนไข ด้วยคุณสมบัติของสมการเมื่อนำไปพล็อตจะสามารถบ่งบอกค่าของตัวแปรสเตทที่เพิ่มขึ้นอย่างไม่เป็นระเบียบโดยมีพารามิเตอร์ควบคุมได้อย่างถูกต้อง

กำหนดให้ k คือ พารามิเตอร์ควบคุมอัตราการเพิ่มของตัวแปรสเตท x_n

x_n คือ ค่าตัวแปรสเตท

x_0 คือ ค่าเริ่มต้น (ในตัวอย่างนี้ จะกำหนด $x_0 = 0.1$)

โดยมีเงื่อนไข $0 \le k \le 4$ และ $0 \le x \le 1$



รูปที่ 2.13 แผนภาพการแยกไปสองทาง (Bifurcation diagram)

จากรูปที่ 2.13 แสดงการแยกไปสองทาง จากสมการ Logistic โดยพล็อตค่า x_n และ k ของสมการ จากแผนภาพ คือ การเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปร State (x_n) เมื่อปรับค่าพารามิเตอร์อยู่ในช่วง $0 \le k \le 1$ คือช่วงที่ค่าตัวแปร ลู่เข้าศูนย์ หรือช่วงที่ยังไม่เกิดการกำเนิดสัญญาณ เมื่อปรับ

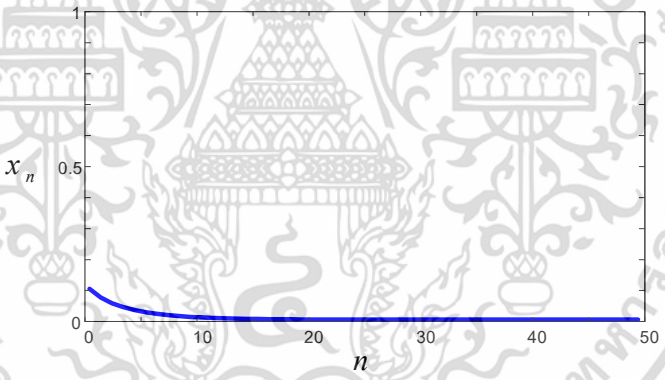
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พารามิเตอร์สูงขึ้น จนอยู่ในช่วง $1 < k < 3$ ค่าตัวแปรจะมีอัตราเพิ่มสูงขึ้นอย่างรวดเร็วอยู่ในระดับเลขชี้กำลัง (Exponential) จนถึงจุดที่ปรับพารามิเตอร์ k=3 เป็นจุดที่เริ่มเกิดการแกว่งของค่าตัวแปร มีเส้นวงโคจรของสัญญาณ 2 วง หรือเรียกช่วง period-2 cycle เมื่อปรับพารามิเตอร์สูงถึง k=3.4 ค่าตัวแปรเกิดการแกว่งจนได้เส้นวงโคจร 4 วง หรือเรียกช่วง period-4 cycle จะสังเกตได้ว่า เมื่อมีการปรับพารามิเตอร์สูงค่าของตัวแปรจะเกิดการแกว่งของค่าที่มากขึ้น จนกระทั่งปรับพารามิเตอร์ถึง k=3.8 ค่าตัวแปรจะแกว่งจนเกือบไม่ซ้ำค่า มีเส้นวงโคจรที่ไม่สามารถคาดเดาได้ เรียกรูปแบบการแกว่งของจุดนี้ว่า เคออส (Chaos) [43]

จากรูปที่ 2.13 จะนำมาขยายแสดงให้เห็นภาพได้ชัดเจนขึ้นในรูปแบบของการเกิดสัญญาณ โดยพล็อตค่า x_n เทียบกับ n แล้วปรับค่าพารามิเตอร์ k ให้เห็นในแต่ละช่วง ดังต่อไปนี้

2.5.1 ช่วงการเกิดทวีค่า (period doubling) [2]

จากรูปที่ 2.13 เมื่อค่าพารามิเตอร์ k อยู่ในช่วง k<1 กำหนดค่า $x_0 = 0.1$ จะได้ค่าตัวแปรสเตรท $x_n \to 0$ ที่ $n \to \infty$ แสดงผลด้วยค่า x_n เทียบกับ n ได้ดังรูปที่ 2.14



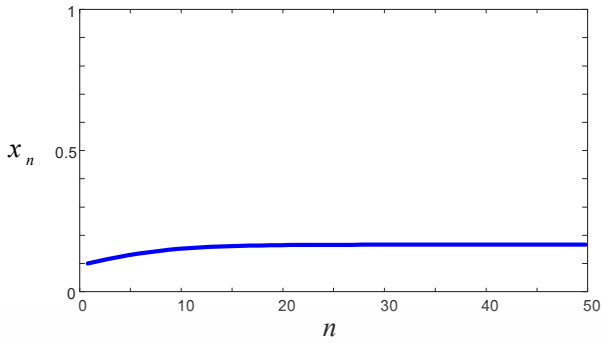
รูปที่ 2.14 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k<1

สำหรับค่าพารามิเตอร์ k ในช่วง $1 < k < 3$ ค่าของ x_n จะเพิ่มขึ้นจนถึงจุดที่ไม่คงที่แล้วเข้าสู่ช่วงเกิดการทวีค่า โดยเริ่มจากค่า $k = 1.1$ จะเห็นได้ว่าค่า x_n เริ่มมีค่ามากขึ้น ดังตารางที่ 2.3 และการแสดงผลในรูปที่ 2.15

ตารางที่ 2.3 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_7 กรณี k=1.1

x_n	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
k=1.1	0.108	0.115	0.122	0.129	0.134	0.141	0.144

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

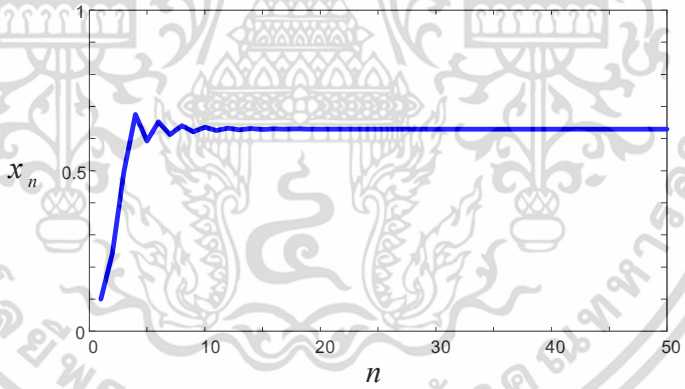


รูปที่ 2.15 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=1.1

ในช่วงค่าพารามิเตอร์ k ที่มากขึ้น ค่าตัวแปรสเตทก็เพิ่มขึ้นเช่นกัน แต่พอถึงช่วง k=2.7 การเพิ่มขึ้นของค่าตัวแปรสเตทเริ่มไม่คงที่ ทำให้เกิดการแกว่งเล็กน้อยของกราฟในช่วงหนึ่ง แสดงในตารางที่ 2.4 และรูปที่ 2.16

ตารางที่ 2.4 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_7 กรณี k=2.7

x_n	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
k=2.7	0.243	0.496	0.674	0.592	0.652	0.612	0.639



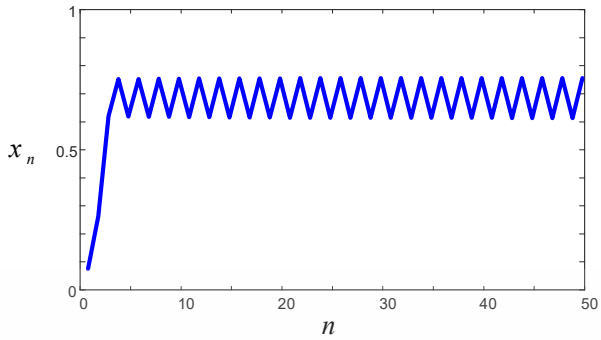
รูปที่ 2.16 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=2.7

จนถึงช่วง k=3 การเพิ่มขึ้นและลดลงของค่าตัวแปรสเตทริ่มคงที่ ดังตารางที่ 2.5 ทำให้เกิดการแกว่งที่คงที่ของกราฟ แสดงผลในรูปที่ 2.17 การแกว่งชนิดนี้ทำให้เกิดค่าที่ซ้ำกันไปมา 2 ค่าในหนึ่งช่วงเวลา เรียกว่า period-2 cycle แสดงให้เห็นในลักษณะของเส้นวงโคจร 1 มิติ บนแกน x ดังรูปที่ 2.18 จะสังเกตเห็นว่าเส้นวงโคจร จะคงที่ 2 วง ที่จุด 0.603 และ 0.727

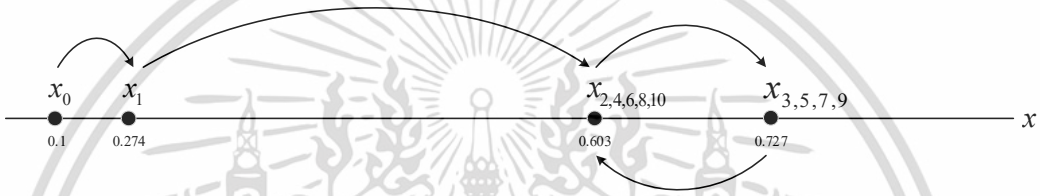
ตารางที่ 2.5 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_{10} กรณี k=3

x_n	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k=3	0.274	0.603	0.727	0.603	0.727	0.603	0.727	0.603	0.727	0.603

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.17 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=3



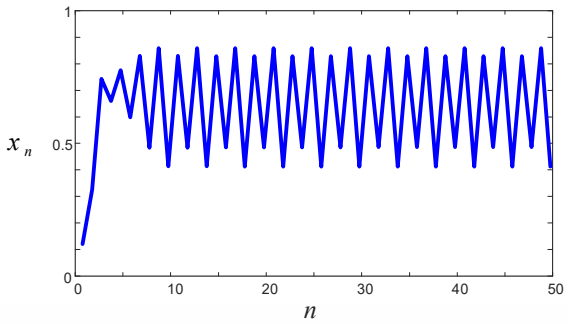
รูปที่ 2.18 แสดงเส้นวงโคจรที่พารามิเตอร์ k=3

ช่วง k=3.4 การเพิ่มขึ้นและลดลงของค่าตัวแปรสเตทเกิดการแกว่งที่มากขึ้น โดยจะเกิดค่าที่ซ้ำกันไปมาถึง 4 ค่าในหนึ่งช่วงเวลา ดังตารางที่ 2.6 ทำให้เกิดการแกว่งของกราฟ แสดงผลในรูปที่ 2.19 การแกว่งรูปแบบนี้ เริ่มเข้าสู่ช่วง period-4 cycle เป็นช่วงที่ค่าเริ่มเกิดความไม่เสถียร (Instability) สูงมาก ซึ่งเป็นช่วงที่การทวีค่า (period doubling) กำลังเข้าสู่ช่วง ความเคออส หรือเรียกว่า เส้นทางสู่เคออส (route to chaos) และแสดงให้เห็นในลักษณะของเส้นวงโคจร (Orbits) 1 มิติบนแกน x ดังรูปที่ 2.20 ลักษณะของเส้นวงโคจรที่พารามิเตอร์ k=3.4 จะเริ่มการแยกออกไป 4 วงที่คงที่

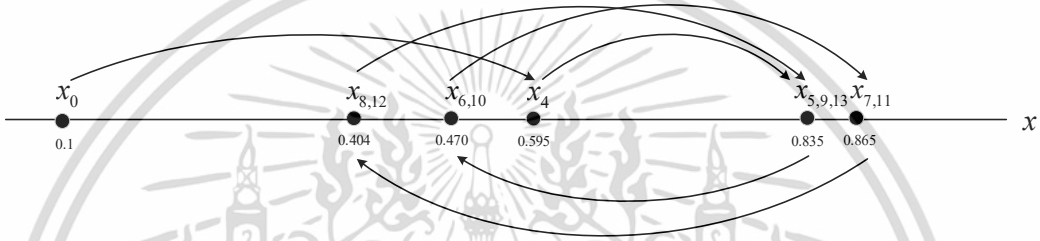
ตารางที่ 2.6 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_4 ถึง x_{13} กรณี k=3.4

x_n	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13
k=3.4	0.595	0.835	0.470	0.865	0.404	0.835	0.470	0.865	0.404	0.835

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.19 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=3.4



รูปที่ 2.20 แสดงเส้นวงโคจรที่พารามิเตอร์ k=3.4

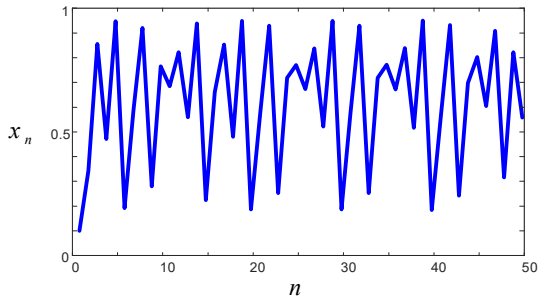
2.5.2 การแกว่งรูปแบบเคออส (Chaos aperiodic)

ช่วง $k = 3.8$ ขึ้นไป การเพิ่มขึ้นและลดลงของ x_n ไม่คงที่และมีพฤติกรรมของช่วงคาบเวลาที่คาดเดาไม่ได้ เรียกว่า ไม่เป็นคาบ (aperiodic) การแกว่งของค่าตัวแปรสเตทในช่วงตั้งแต่ $k = 3.8$ ขึ้นไป ลักษณะการแกว่งจะไม่เกิดการซ้ำค่าของระบบ สังเกตได้ดังตารางที่ 2.7 แสดงเป็นลักษณะของสัญญาณเคออสได้ ดังรูปที่ 2.21 ซึ่งในรูปที่ 2.22 แสดงให้เห็นไลักษณะของเส้นวงโคจร (Orbits) ที่ไม่คงที่ และไม่สามารถคาดเดาทิศทางการเคลื่อนที่ได้ เป็นลักษณะของวิถีวงโคจร (Trajectory) 1 มิติบนแกน x รูปแบบเคออส จากสมการ Logistic

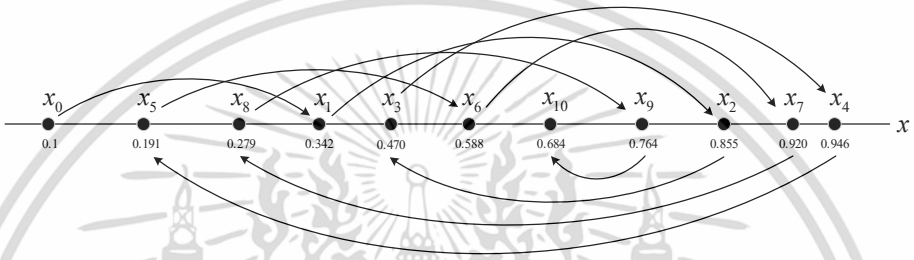
ตารางที่ 2.7 แสดงจำนวนประชากรของ x_n ในช่วง x_1 ถึง x_{10} กรณี k=3.8

x_n	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k=3.8	0.342	0.855	0.470	0.946	0.191	0.588	0.920	0.279	0.764	0.684

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.21 แสดงผลของ x_n แต่ละช่วงเวลาที่พารามิเตอร์ k=3.8



รูปที่ 2.22 แสดงเส้นวงโคจรที่พารามิเตอร์ k=3.8

จากตัวอย่างที่กล่าวมาเป็นหลักการพื้นของทฤษฎี the bifurcation ที่แสดงผลในลักษณะของแผนภาพ (Diagram) โดยใช้สมการ Logistic เพียง 1 มิติ มาแสดงให้เห็นภาพรวมเพื่อง่ายต่อความเข้าใจในการศึกษา ซึ่งหากเป็นระบบเคออสโดยทั่วไปที่ใช้แสดงลักษณะตัวดึงดูด ที่เกิดลักษณะการบิด (Distortion) ที่ชัดเจนจาก State model จะต้องเป็นสมการตัวแปรสเตท 3 มิติ หรือเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสาม ซึ่งมีความซับซ้อนของโครงสร้างสูง รวมถึงลักษณะการควบคุมของพารามิเตอร์จะไม่สามารถอธิบายอย่างตรงไปตรงมาได้แบบระบบ 1 มิติ จำเป็นต้องศึกษาจากพื้นฐานเพื่อให้เกิดความเข้าใจภาพรวม จึงจะสามารถไปประยุกต์ใช้แบบจำลองต่างๆของระบบเคออส และสามารถนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับทฤษฎีได้อย่างถูกต้อง

2.6 ทฤษฎีความหลายเสถียรภาพ (Multistability)

พฤติกรรมที่ค่อนข้างซับซ้อนอย่างหนึ่งที่สามารถเกิดขึ้นได้บนระบบพลวัตแบบไม่เป็นเชิงเส้น เรียกว่า ความหลายเสถียรภาพ (multistability) [44-47] ซึ่งคุณลักษณะความซับซ้อนดังกล่าวนี้ ทำให้ระบบเคออสมีความน่าสนใจมากยิ่งขึ้น คุณสมบัติเฉพาะ (unique properties) ของระบบเคออส คือ ความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์ เมื่อความสัมพันธ์ระหว่างเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์มีความเกี่ยวพันธ์กันโดยตรง ทำให้ระบบยิ่งเกิดความคาดเดายาก กล่าวคือ ณ ขณะที่พารามิเตอร์ถูกคงที่ที่ค่าใดค่าหนึ่ง แต่มีการเปลี่ยนเงื่อนไงเริ่มต้น ณ ขณะนั้น ทำให้เกิดพฤติกรรมพลวัตรูปแบบต่างๆ ที่ไม่เหมือนเดิมขณะที่ยังคงที่พารามิเตอร์เดิมอยู่ เช่น การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดแบบสมมาตรและ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไม่สมมาตร (Coexisting of symmetric and asymmetric attractor) โดยการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขเริ่มต้นทำให้เกิดพฤติกรรมพลวัตที่หลากหลาย ขณะที่ยังคงศึกษาพารามิเตอร์ของระบบในช่วงเดียวกัน ดังนั้นการศึกษาเกี่ยวกับความหลายเสถียรภาพของระบบเคออส จำเป็นต้องตรวจสอบอย่างละเอียดและถือเป็นการศึกษาเชิงลึกอย่างหนึ่งในระบบเคออส ซึ่งในงานวิจัยของวิทยานิพนธ์เล่มนี้มีการค้นพบ ความหลายเสถียรภาพของระบบเคออสที่ออกแบบ โดยในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการค้นหาความหลายเสถียรภาพ การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดทั้งแบบสมมาตรและไม่สมมาตร ร่วมถึงเครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการยืนยันผลสำหรับความหลายเสถียรภาพด้วย

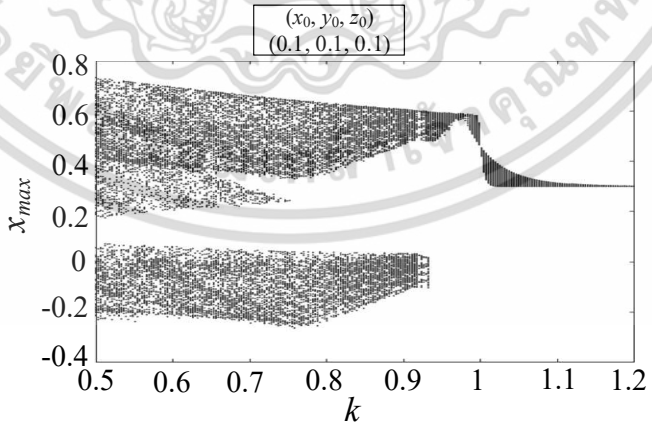
2.6.1 การค้นหาความหลายเสถียรภาพในระบบเคออส (multistability detection in chaotic system)

ปัจจัยสำคัญในการค้นพบปรากฏการณ์ความหลายเสถียรภาพ คือการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของเงื่อนไขเริ่มต้นอย่างละเอียด โดยใช้เครื่องมือหลัก คือ แผนภาพ Bifurcation โดยเป็น Bifurcation แบบกิ่งขนาน (Parallel branch bifurcation)

ในหัวข้อนี้จะขอยกตัวอย่างการค้นหาความหลายเสถียรภาพจากระบบการกระตุก (Jerk system) โดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสัญลักษณ์ (Signum function) [9] ดังสมการที่ (2.46)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - ax + bsign(x). \end{cases} \tag{2.46}$$

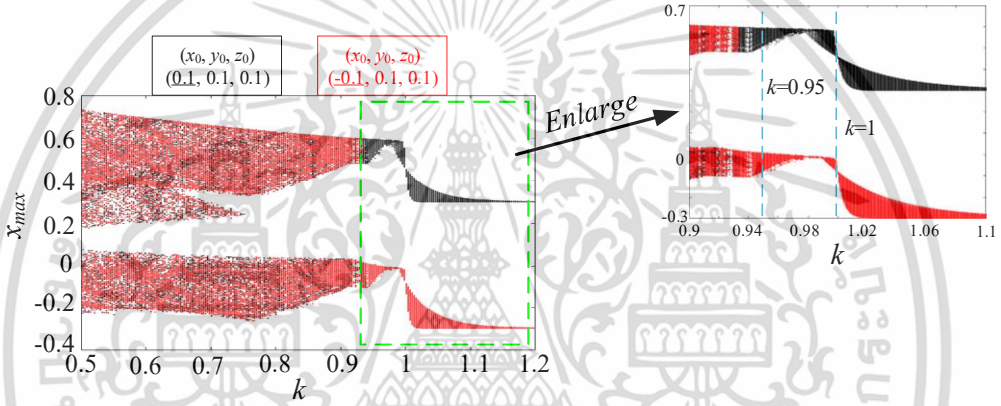
จากสมการที่ (2.46) มีพารามิเตอร์คงที่เป็นบวก 3 ตัว คือ a b และ k โดยจะคงที่ a=1 และ b=0.3 เพื่อค้นหาความหลายเสถียรภาพจากการตรวจสอบพารามิเตอร์ k เป็นหลัก แผนภาพ Bifurcation สำหรับพารามิเตอร์ k ในช่วง $0.5 \le k \le 1$ พร้อมกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.1) แสดงดังรูปที่ 2.23



รูปที่ 2.23 แผนภาพ Bifurcation ปกติสำหรับ k ในช่วง $0.5 \le k \le 1$ โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเพียงชุดเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 2.23 ที่มีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเพียงหนึ่งชุด จะทำการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นใหม่ในการจำลองผล โดยเปลี่ยนค่าที่ตำแหน่งเริ่มต้น x_0 จาก 0.1 เป็น -0.1 จะได้ลักษณะแผนภาพ Bifurcation ดังรูปที่ 2.24 จะเห็นได้ว่าเมื่อทำการเปลี่ยนค่าเริ่มต้นเพียงตัวแปรเดียวที่ x_0 ทำให้เกิดช่วงพฤติกรรมใหม่ขึ้นมา สังเกตได้จากกรอบสีเขียว พฤติกรรมที่เกิดขึ้นในกรอบสีเขียวนี้ เรียกว่า ขอบเขตการมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูด (Coexisting of attractor region) ซึ่งอยู่ในปรากฏการณ์ความหลายเสถียรภาพ โดยจะแสดงผลลัพธ์บน phase portrait ให้เห็นชัดดังรูปที่ 2.25 ส่วนพฤติกรรมในช่วง 0.5 ถึง 0.92 เกิดการทับซ้อนกัน หรือกล่าวคือไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงจากการเปลี่ยนค่าเริ่มต้นในช่วงนี้



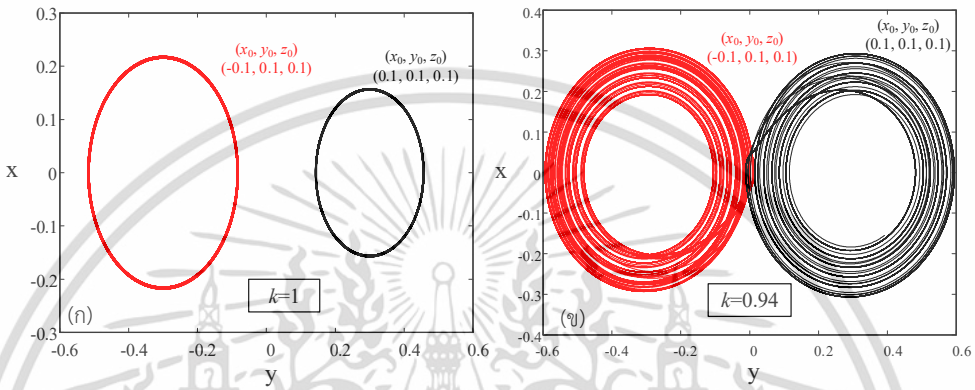
รูปที่ 2.24 แผนภาพ Bifurcation ปกติสำหรับ k ในช่วง $0.5 \le k \le 1$ โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นต่างกันที่ x_0=0.1 สีดำ และ x_0=-0.1 สีแดง

จากรูปที่ 2.24 ขอบเขตความหลายเสถียรภาพอยู่ในช่วง 0.93 ถึง 1.2 (กรอบสีเขียว) โดยจะแสดงตัวอย่างให้เห็นลักษณะที่เกิดขึ้นบน phase portraits ในระนาบ x-y สำหรับค่า k=0.94 และ k=1 ดังรูปที่ 2.25 (ก) และ (ข) ตามลำดับ รูปที่ 2.25 (ก) สำหรับ k=1 เกิดเป็นลักษณะวงรอบจำกัด 2 วง (limit cycle) ที่ไม่สมมาตรกัน หรือเรียกว่า การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดไม่สมมาตร (Coexisting of asymmetric attractor) ส่วนในรูปที่ 2.25 (ข) สำหรับ k=0.94 เกิดลักษณะตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน (single-scroll attractor) หนึ่งคู่ที่สมมาตรกัน หรือเรียกว่า การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดสมมาตร (Coexisting of symmetric attractor) จากผลลัพธ์ทั้ง 2 พฤติกรรมที่กล่าวมาเป็นเพียงตัวอย่างจากพารามิเตอร์ k=1 และ k=0.94 สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(±0.1, 0.1, 0.1) ตามสีดำและสีแดงตามลำดับ โดยคงที่ a=1 และ b=0.3

โดยหากมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ตัวอื่นในระบบ เช่น เปลี่ยน a=1 เป็น a=0.99 หรือ b=0.3 เป็น 0.29 หรือเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขเริ่มต้นที่ตำแหน่งอื่น เช่น y_0 หรือ z_0 หรือแม้แต่เปลี่ยนค่า x_0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็นค่าอื่นที่ไม่ใช่ 0.1 กับ -0.1 ดังที่ยกตัวอย่าง ก็จะส่งผลให้ระบบเกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมที่แตกต่างออกไปอีก ดังนั้นจากที่กล่าวไปข้างต้น การค้นหาความหลายเสถียรภาพเป็นพฤติกรรมที่ซับซ้อนและต้องใช้ความละเอียดในการตรวจสอบ ซึ่งถือเป็นการศึกษาเชิงลึกอย่างหนึ่งในระบบเคออส การค้นพบพฤติกรรมดังกล่าวจะทำให้พบลักษณะพลวัตที่หลากหลายเป็นประโยชน์ในนำไปประยุกต์ใช้ได้หลายสาขา ซึ่งทำให้งานวิจัยเชิงลึกด้านเคออสเป็นที่สนใจมากยิ่งขึ้น

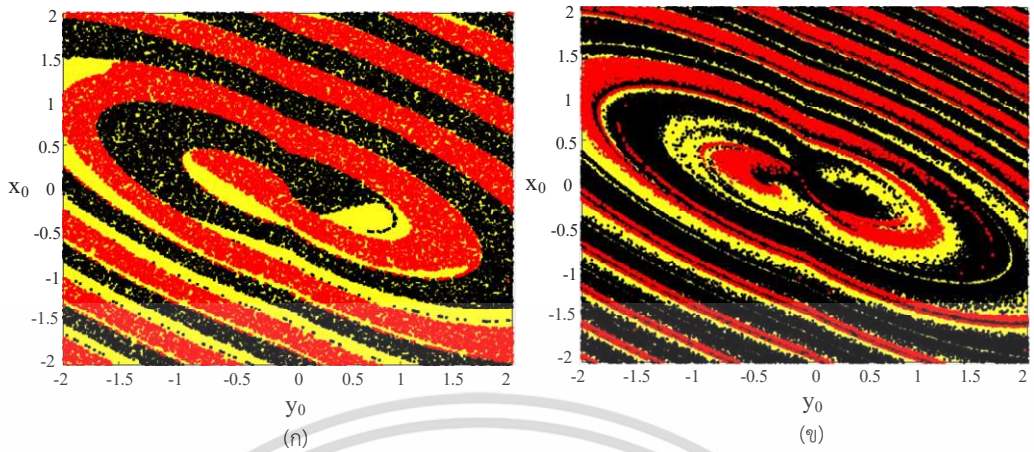


รูปที่ 2.25 ผลลัพธ์บน phase portraits สำหรับ k=1 และ k=0.94 โดยสอดคล้องกับแผนภาพ Bifurcation ในรูปที่ 2.24 (ก) ลักษณะวงรอบจำกัด 2 วงที่ไม่สมมาตร (ข) ลักษณะหนึ่งวงม้วนหนึ่งคู่ที่สมมาตร

2.6.2. Basin of attraction

เนื่องด้วยพฤติกรรมความหลายเสถียรภาพเป็นการศึกษาหลัก เกี่ยวกับผลกระทบจากเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนั้นเมื่อค้นพบช่วงที่สามารถเกิดความหลายเสถียรภาพได้แล้ว จำเป็นต้องขยายผลให้กว้างเพื่อครอบคลุมค่าเงื่อนไขเริ่มต้นอื่นๆที่มีผลกระทบเช่นเดียวกัน ซึ่งเครื่องมือกราฟฟิกที่สำคัญอย่างยิ่งคือ Basin of attraction [48-49] เครื่องมือดังกล่าวใช้ในการแสดงผลลัพธ์ของค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีพฤติกรรมแบบเดียวกัน โดยให้ผลลัพธ์เป็นวงกว้าง แสดงเป็นขอบเขตของสีที่สอดคล้องกับลักษณะ phase portraits โดยจะยกตัวอย่างจากลักษณะ phase portraits ในรูปที่ 2.25 บน Basin of attraction ในรูปที่ 2.26

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.26 Basin of attraction บนระนาบ x_0-y_0 สำหรับผลลัพธ์ในรูปที่ 2.25 (ก) สอดคล้องกับคู่วงรอบจำกัดในรูปที่ 2.25 (ก) ตามสีดำและสีแดง (ข) สอดคล้องกับคู่หนึ่งวงม้วนในรูปที่ 2.25 (ข) ตามสีดำและสีแดง

จากรูปที่ 2.26 พื้นที่สีบน Basin of attraction สอดคล้องกับสีบน phase portraits ในรูปที่ 2.25 โดยพื้นที่สีดำและสีแดงในรูปที่ 4 (ก) ทั้งหมดจะสอดคล้องกับสีของวงรอบจำกัดในรูปที่ 2.25 (ก) ขณะที่คงที่พารามิเตอร์ a=1 b=0.3 และ k=1 และสีบนพื้นที่ในรูปที่ 2.26 (ข) ก็สอดคล้องกับสีของลักษณะหนึ่งวงม้วนในรูปที่ 2.25 (ข) ขณะที่คงที่พารามิเตอร์ a=1 b=0.3 และ k=0.94 ส่วนพื้นที่สีเหลืองของ Basin of attraction คือบริเวณที่สัญญาณไม่เกิดการออสซิเลต

2.7 ระบบเคออสแบบหลายวงม้วน (Multi-scroll chaotic system)

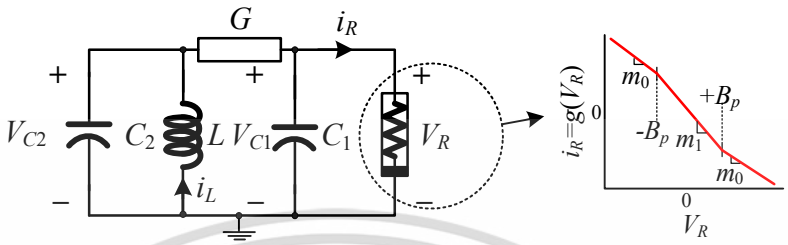
ระบบเคออสแบบหลายวงม้วน เมื่อเปรียบเทียบกับระบบเคออสแบบวงม้วนเดียว อย่างแบบจำลอง Rossler [6] หรือแบบสองวงม้วนทั่วไป อย่างเช่น แบบจำลอง Lorenz [5] แบบจำลอง Chen [50] แบบจำลอง Chua [7] เป็นต้น ด้วยโครงสร้างระบบพลวัตและลักษณะสัญญาณที่ซับซ้อนกว่า รวมถึงพฤติกรรมพลวัตหลากหลายที่เกิดขึ้นบนระบบเคออสแบบหลายวงม้วน ก่อให้เกิดประโยชน์ในการนำไปประยุกต์ใช้เพื่อเพิ่มความปลอดภัยในการเข้ารหัสด้านการสื่อสาร [51-54] สูงกว่าระบบเคออสแบบวงม้วนเดียวและแบบสองวงม้วน ในขณะเดียวกันช่วยให้เกิดประโยชน์ด้านการศึกษาเนื่องจากโครงสร้างพลวัตที่ค่อนข้างมีความหลากหลายภายในระบบ ก่อให้เกิดการพัฒนาด้านทฤษฎีในสาขาพลวัต [55-59]

2.7.1 ระบบเคออสหลายวงม้วน แบบจำลอง Chua

ระบบเคออสหลายวงม้วนถูกค้นพบครั้งแรกในปี ค.ศ. 1993 โดย J.A.K. Suykens และ J. Vandewalle [60] จากการดัดแปลงฟังก์ชัน PWL (Piecewise Linear) บนตัวต้านทานเชิงลบของวงจรอิเล็คทรอนิกส์ Chua ด้วยการเพิ่มจุดหัก (Break points) ของฟังก์ชัน ทำให้เกิดวงม้วนเพิ่มขึ้นใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลักษณะ n-สองวงม้วน (n-double scroll; n=1, 2, 3, 4, …) โดยวงจรอิเล็กทรอนิกส์พื้นฐาน และลักษณะฟังก์ชัน PWL จากตัวต้านทานเชิงลบของ L.O. Chua แสดงดังรูปที่ 2.27 และเขียนสมการจากวงจรได้ดังสมการที่ (2.47)



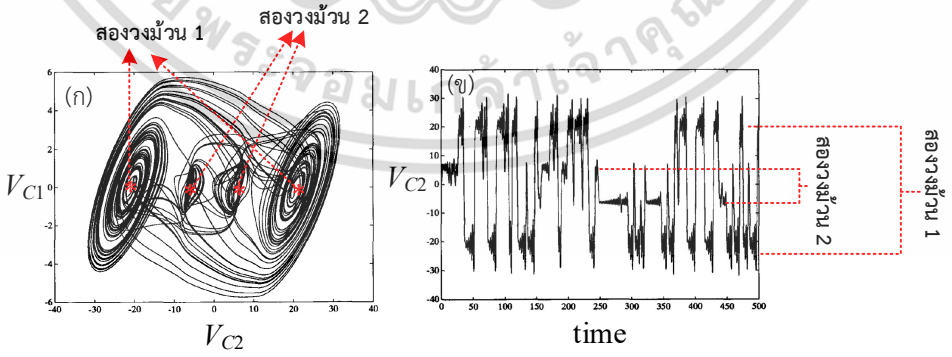
รูปที่ 2.27 วงจรอิเล็กทรอนิกส์ Chua และลักษณะของฟังก์ชัน PWL

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dV_{C1}}{dt} = G(V_{C2} - V_{C1}) - g(V_{C1}) \\ C_2 \dfrac{dV_{C2}}{dt} = G(V_{C1} - V_{C2}) + i_L \\ L \dfrac{di_L}{dt} = -V_{C2} \end{cases} \tag{2.47}$$

จากสมการที่ (2.47) ที่ $g(V_{C1})$ คือฟังก์ชัน PWL ของวงจร โดยประกอบไปด้วยสองจุดหัก ดังนี้

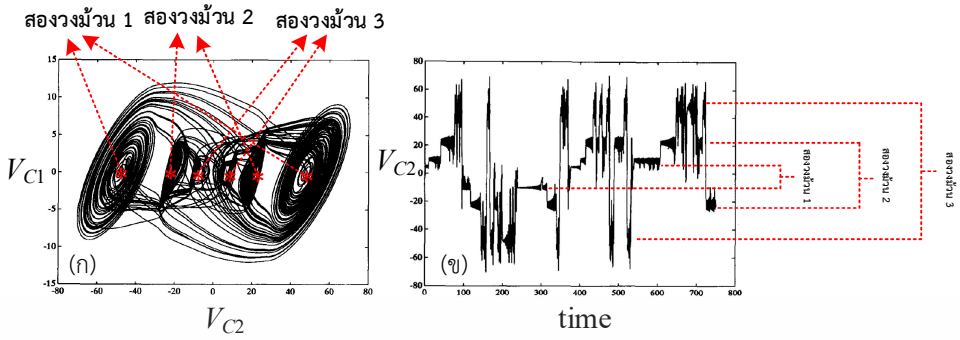
$$g(V_{C1}) = m_0 V_{C1} + 0.5(m_1 - m_0)\left|V_{C1} + B_p\right| + 0.5(m_0 - m_1)\left|V_{C1} - B_p\right| \tag{2.48}$$

ที่ B_p คือจุดหัก (Break point) ของฟังก์ชัน และ m_0 m_1 คือความชันเส้นตรงแต่ละส่วนของฟังก์ชัน จากงานของ Suykens และ Vandewalle ทำการเพิ่มจุดหัก โดยเพิ่มจุด $\pm B_p$ ของฟังก์ชัน ทำให้จำนวนวงม้วนเพิ่มขึ้นทีละสองวงม้วน ตาม n-สองวงม้วน (โดยที่ n=1, 2, 3, 4, …) โดยรูปที่ 2.28 และ 2.29 เป็นผลลัพธ์ของตัวดึงดูดบนระนาบ V_{C2}- V_{C1} และเอาต์พุต V_{C1} บนแกนเวลา โดยรูปที่ 2.28 แสดงลักษณะสี่วงม้วน หรือ 2-สองวงม้วน และรูปที่ 2.29 แสดงลักษณะหกวงม้วน หรือ 3-สองวงม้วน



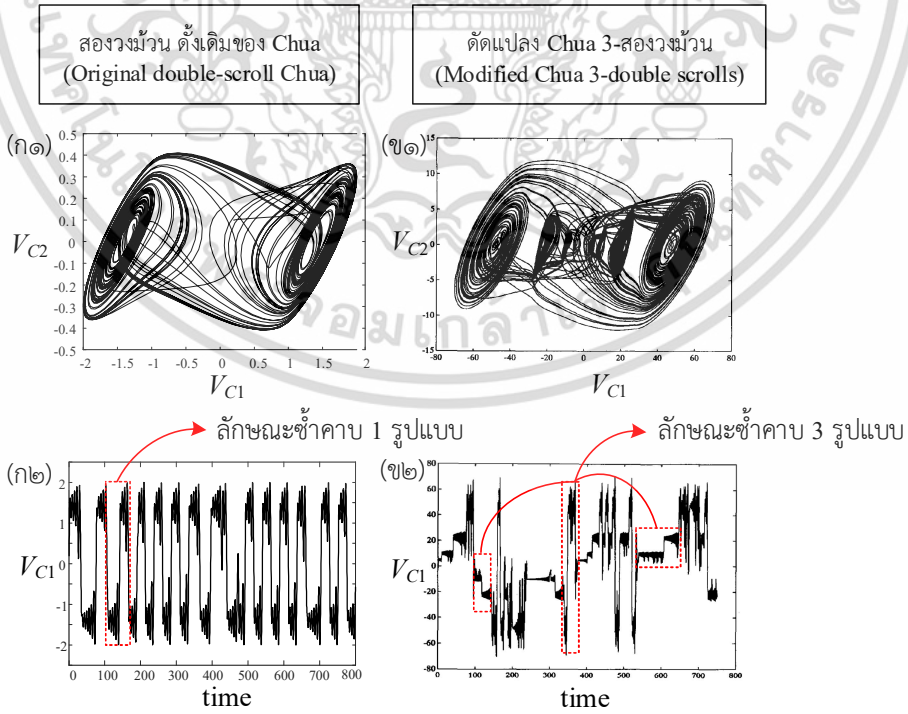
รูปที่ 2.28 ผลลัพธ์ของ n-สองวงม้วน (n=2) (ก) ระนาบ V_{C2}-V_{C1} (ข) เอาต์พุต V_{C1} แกนเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.29 ผลลัพธ์ของ *n*-สองวงม้วน (*n*=3) (ก) ระนาบ V_{C2}-V_{C1} (ข) เอาต์พุต V_{C1} แกนเวลา

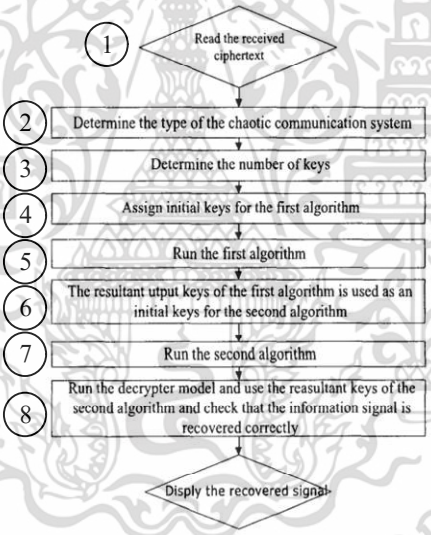
จากรูปที่ 2.28 และ 2.29 เป็นการแสดงผลลัพธ์ของรูปแบบเคออสหลายวงม้วนจากการดัดแปลงฟังก์ชัน PWL ของ Suykens โดยลักษณะสองวงม้วนทั่วไปของ Chua ที่เป็นที่รู้จักกันดี [7] แสดงดังรูปที่ 2.30(ก) ซึ่งในรูปเป็นการเปรียบเทียบให้เห็นถึงความแตกต่างได้ชัดเจนระหว่างลักษณะสองวงม้วนทั่วไปและแบบหกวงม้วน โดยมาจากแบบจำลองเดียวกัน ซึ่งแบบหกวงม้วนดัดแปลงจากการเพิ่มจุดหักของฟังก์ชัน รูปที่ 2.30 (ก๒) จะเห็นได้ชัดว่า ลักษณะการแกว่งของคาบมีการซ้ำกันเพียง 1 รูปแบบด้วยลักษณะวิถีวงโคจรบนระนาบ V_{C2}-V_{C1} เพียงสองวงม้วน แต่ในรูปที่ 2.30 (๒ข) ลักษณะการแกว่งของคาบสัญญาณมีลักษณะที่ต่างกันถึง 3 รูปแบบด้วยลักษณะวิถีวงโคจรบน V_{C2}-V_{C1} ถึงหกวงม้วน การแกว่งของลักษณะคาบสัญญาณที่ไม่ซ้ำกัน ส่งผลให้ยากต่อการถูกคัดลอกหรือโจมตีสัญญาณในการนำไปเข้ารหัสด้านการสื่อสาร [61]



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 2.30 เปรียบเทียบลักษณะสัญญาณเคออสระหว่าง สองวงม้วนดั้งเดิมของ Chua และ แบบดัดแปลงโดย Suykens แบบ 3-สองวงม้วน

จากตัวอย่างอัลกอริทึมการโจมตีระบบเคออสในรูปที่ 2.31 เนื่องจากการคัดลอกสัญญาณสามารถทำได้ด้วยการคาดเดา “ตัวแปรสเตทถัดไป” ของระบบจาก “ผลลัพธ์สุดท้ายของเอาต์พุตก่อนหน้า” โดยตั้งต้นจาก “ตัวแปรสเตทเริ่มต้น” เนื่องจากระบบเคออสมีการเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์ดังสมการ $x_{n+1}=r{\cdot}x_n(1 - x_n)$ ที่ x_n+1 คือตัวแปรสเตทถัดไป x_n คือ ผลลัพธ์สุดท้ายของเอาต์พุตก่อนหน้า x_0 คือ ตัวแปรสเตทเริ่มต้น และ r คือพารามิเตอร์ควบคุมการเปลี่ยนแปลงของระบบ (ตัวอย่างดังกล่าวเป็นเพียงสมการ Logistic อันดับหนึ่ง เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจหลักการคัดลอกสัญญาณ) เมื่อระบบมีการแกว่งที่สูงและไม่ซ้ำคาบ x_n+1 จะถูกคาดเดาได้ยากและใช้เวลาในการประมวลผลนานยิ่งขึ้นในขั้นตอนที่ ⑥ ของรูปที่ 2.31 (สามารถดูข้อมูลการโจมตีการเข้ารหัสโดยละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงของรูปที่ 2.31)



รูปที่ 2.31 แผนผังขั้นตอนการโจมตีหรือคัดลอกข้อมูลเพื่อกู้คืนข้อมูลสัญญาณ [62]

2.7.2 ความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบเคออสหลายวงม้วน (Sensitive to initial condition of multi-scroll chaotic system)

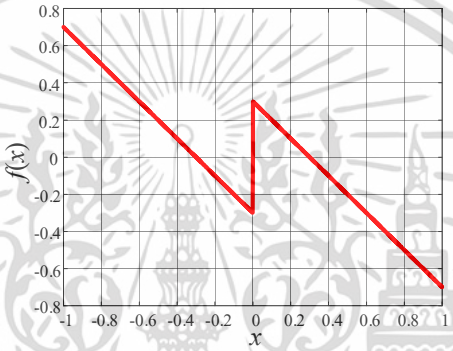
คุณสมบัติที่สำคัญอย่างยิ่งสำหรับระบบเคออสหลายวงม้วน คือ ความไวสูงต่อเงื่อนไขเริ่มต้น (High sensitive to initial condition) ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่รู้จักกันดีในระบบเคออส แต่สำหรับระบบเคออสหลายวงม้วนที่มีลักษณะการแกว่งสัญญาณที่ซับซ้อน ยิ่งส่งผลต่อความไวทั้งเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์ของระบบ โดยจะยกตัวอย่างจากแบบจำลอง Jerk ดังสมการที่ (2.49)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -kz - y + f(x) \end{cases} \tag{2.49}$$

ที่ k คือพารามิเตอร์ของ และ $f(x)$ คือฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นอิสระของระบบ จากแบบจำลองดังกล่าวจะยกตัวอย่างจากการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น 2 แบบบนแบบจำลองเดียวกัน เพื่อแสดงคุณสมบัติความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบเคออสแบบสองวงม้วนกับระบบหลายวงม้วน โดยใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ (Signum) แบบพื้นฐานของ J.C. Sportt ในปี ค.ศ. 2000 [9] ดังสมการที่ (2.50) พร้อมลักษณะฟังก์ชันในรูปที่ 2.32

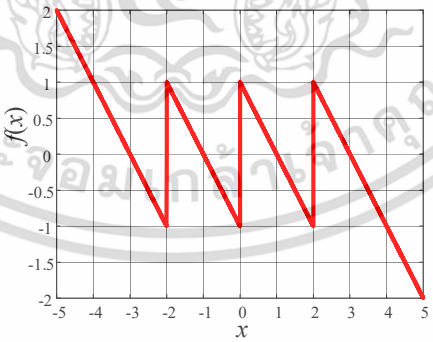
$$f(x) = -Ax + Bsign(x) \quad ; A, B > 0 \tag{2.50}$$



รูปที่ 2.32 ลักษณะฟังก์ชันสัญลักษณ์พื้นฐานของ Sportt โดยกำหนด A=1, B=0.3

และใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์แบบดัดแปลงจุดหักฟังก์ชันของ L. Chunxia และคณะวิจัย ในปี ค.ศ. 2012 [63] ดังสมการที่ (2.51) และแสดงลักษณะฟังก์ชันดังรูปที่ 2.33

$$f(x) = -Cx + Dsign(x) + Dsign(x+2) + Dsign(x-2) \quad ; C, D > 0 \tag{2.51}$$

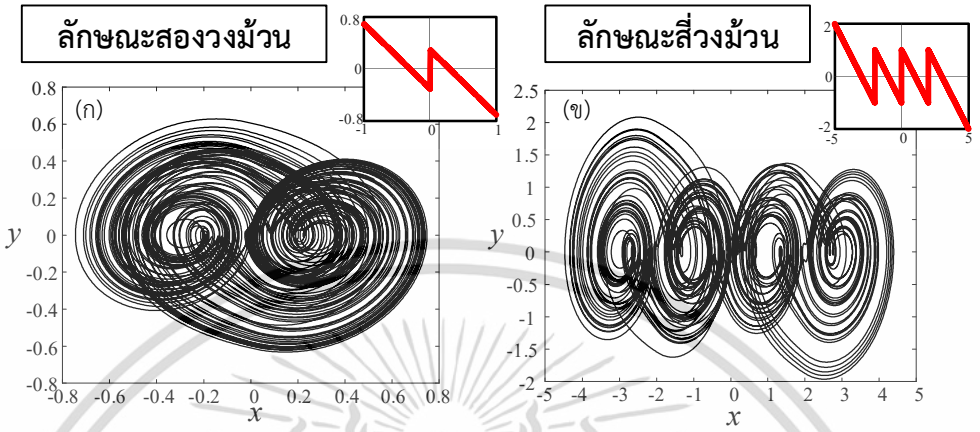


รูปที่ 2.33 ลักษณะฟังก์ชันสัญลักษณ์เพิ่มจุดหักฟังก์ชัน โดยกำหนด C=1, D=1

จากฟังก์ชัน $f(x)$ ในสมการที่ (2.50) และ (2.51) จะถูกนำไปในแทนในสมการที่ (2.49) โดยฟังก์ชันในสมการที่ (2.50) สามารถกำเนิดลักษณะเคออสชนิดสองวงม้วน แสดงตัวดึงดูดบนราบ x-y

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

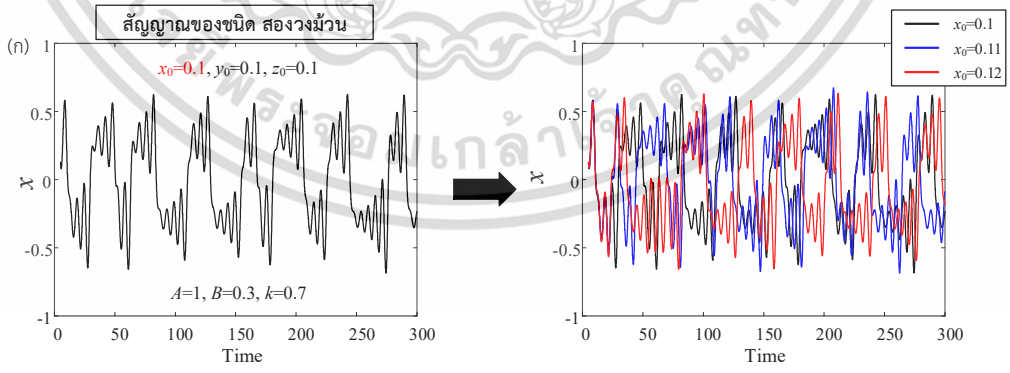
ดังรูปที่ 2.34(ก) และฟังก์ชันในสมการที่ (2.51) แสดงลักษณะเคออสชนิดหลายวงม้วน (สี่วงม้วน) โดยแสดงตัวดึงดูดบนระนาบ x-y ดังรูปที่ 2.34(ข)



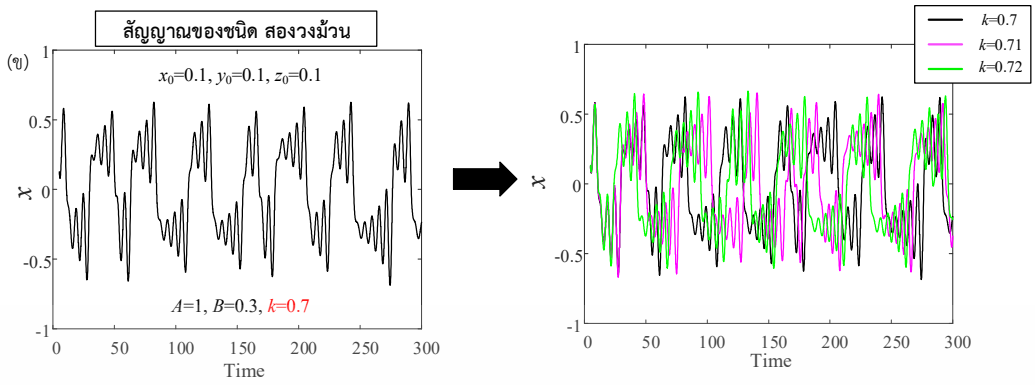
รูปที่ 2.34 แสดงลักษณะตัวดึงดูดบนระนาบ x-y (ก) แบบสองวงม้วน ที่ k=0.7 (ข) แบบสี่วงม้วน ที่ k=0.7

โดยจะชี้ให้เห็นถึงคุณสมบัติความไวสูงต่อเงื่อนไขของระบบระหว่างระบบเคออสทั้ง 2 จากข้อมูลด้านบน ด้วยการแสดงลักษณะสัญญาณที่เอาต์พุต x บนแกนเวลา

โดยรูปที่ 2.35 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณจากระบบสองวงม้วน ด้วยการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของตัวแปรสเตรทเริ่มต้นและพารามิเตอร์เพียงเล็กน้อย ดังรูปที่ 2.35 (ก) และ (ข) ตามลำดับ ซึ่งในรูปที่ 2.35 (ก) เปลี่ยนแปลงค่า x_0 โดยคงที่ y_0 และ z_0 รวมถึงคงที่พารามิเตอร์ในระบบ ส่วนในรูปที่ 2.35 (ข) เปลี่ยนแปลงค่า k โดยคงที่พารามิเตอร์ A และ B รวมถึงเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ

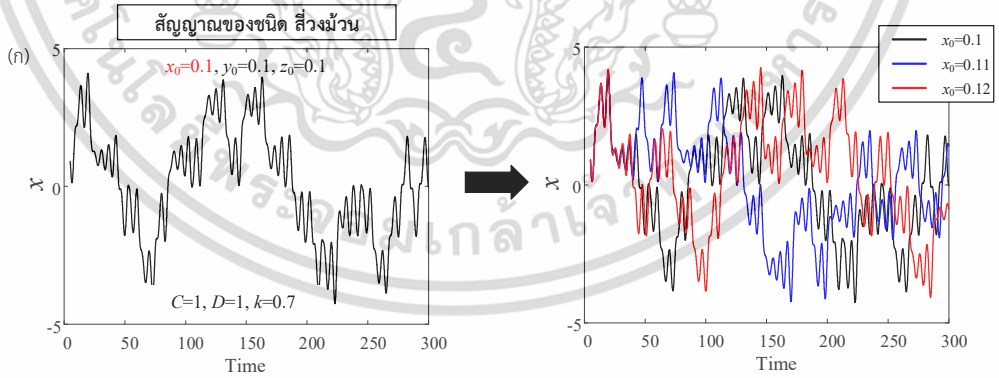


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

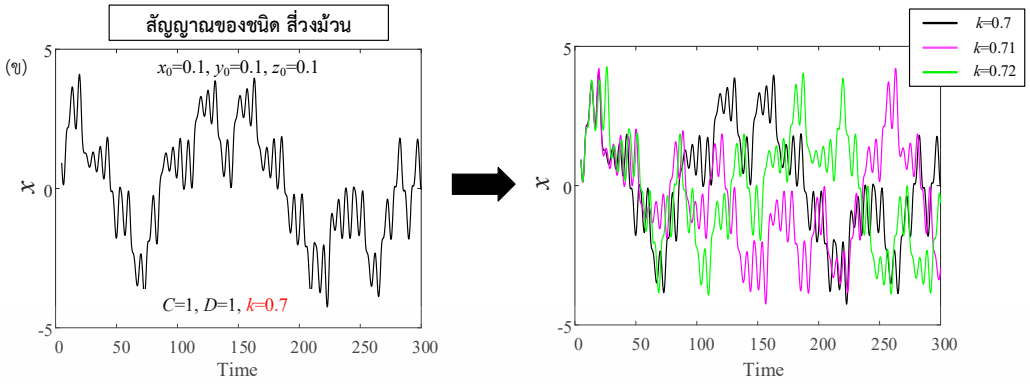


รูปที่ 2.35 แสดงความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับระบบ “สองวงม้วน” (ก) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับตัวแปรเริ่มต้น x_0 (ข) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับพารามิเตอร์ k

ในรูปที่ 2.36 แสดงผลการเปลี่ยนแปลงของระบบสี่วงม้วน โดยมีการเปลี่ยนแปลงสถานะของระบบที่สอดคล้องกันกับรูปที่ 2.35 ด้วยการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของตัวแปรสเตรทเริ่มต้นและพารามิเตอร์เพียงเล็กน้อย ดังรูปที่ 2.36 (ก) และ (ข) ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบผลในรูปที่ 2.35 และ 2.36 จะเห็นได้ชัดจากสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงในรูปทางขวามือของทั้ง 2 ระบบ ว่าในระบบเคออสแบบสองวงม้วนในรูปที่ 2.35 ลักษณะการแกว่งของคาบมีการเปลี่ยนแปลงแต่ยังคงรูปแบบการแกว่งด้วยความแตกต่างของคาบสัญญาณเพียงหนึ่งคู่ ในทางตรงกันข้ามผลการเปลี่ยนแปลงของระบบเคออสแบบสี่วงม้วนในรูปที่ 2.36 มีการเปลี่ยนแปลงของลักษณะการแกว่งของคาบอย่างสิ้นเชิง โดยสเต็ปในการเปลี่ยนแปลงค่าของทั้งสองระบบใช้เท่ากัน คือเปลี่ยนแปลงทีละ 0.01



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



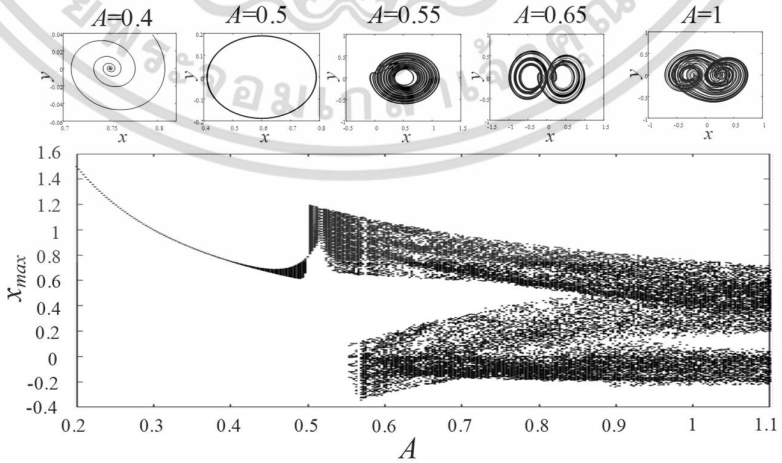
รูปที่ 2.36 แสดงความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับระบบ “สี่วงม้วน” (ก) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับตัวแปรเริ่มต้น x_0 (ข) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเมื่อปรับพารามิเตอร์ k

ดังนั้นสิ่งนี้เป็นการขยายความให้เห็นชัดถึงการคาดเดายากของลักษณะการแกว่งสัญญาณสำหรับระบบเคออสหลายวงม้วน โดยเพิ่มความปลอดภัยในการสื่อสารจากการถูกโจมตี โดยเฉพาะในข้อ ④ ⑤ และ ⑥ ของขั้นตอนการโจมตีระบบสื่อสารในรูปที่ 2.31

2.7.3 ความหลากหลายของพฤติกรรมพลวัตบนระบบเคออสหลายวงม้วน (The several dynamic behaviors of multi-scroll chaotic system)

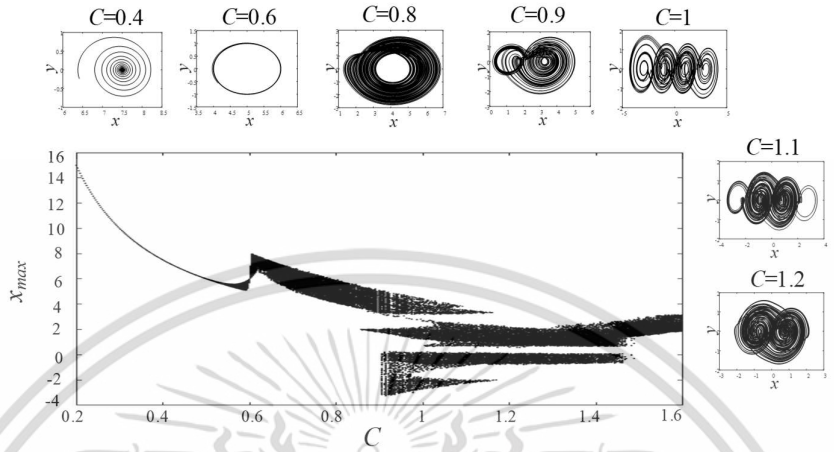
จากหัวข้อ 2.7.2 ด้วยระบบ Jerk ที่ใช้ฟังก์ชันแบบสองวงม้วนและสี่วงม้วน จะนำมาแสดงความแตกต่างของพฤติกรรมพลวัตภายในของระบบเคออสทั้งสองแบบ

จากระบบสองวงม้วน ใช้ฟังก์ชันในสมการที่ (2.50) โดยคงที่พารามิเตอร์ k=0.7 และ B=0.3 และปรับค่า A เพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของระบบ แสดงดังรูปที่ 2.37 และระบบสี่วงม้วน ใช้ฟังก์ชันในสมการที่ (2.51) จะคงที่พารามิเตอร์ k=0.6 และ D=1 และปรับค่า C เพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของระบบ แสดงดังรูปที่ 2.38



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 2.37 แผนภาพ Bifurcation พร้อมการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตสำหรับพารามิเตอร์ A ของระบบอลวนแบบ “สองวงม้วน”



รูปที่ 2.38 แผนภาพ Bifurcation พร้อมการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตสำหรับพารามิเตอร์ C ของระบบอลวนแบบ “สี่วงม้วน”

จากรูปที่ 2.37 และ 2.38 จะเห็นว่าพฤติกรรมพลวัตที่เกิดขึ้นของทั้งสองระบบมีความแตกต่างกัน โดยสรุปภาพรวมไว้ในตารางที่ 2.8

ตารางที่ 2.8 เปรียบเทียบพฤติกรรมพลวัตที่เกิดขึ้นบนระบบสองวงม้วนและสี่วงม้วนจากแบบจำลอง Jerk (ผลจากรูป 2.37 และ 2.38)

ระบบ สองวงม้วน		**ระบบ สี่วงม้วน**	
พารามิเตอร์ *A*	**ชนิดพฤติกรรมพลวัต**	**พารามิเตอร์ *C***	**ชนิดพฤติกรรมพลวัต**
A=0.4	จุดคงที่ (Fixed point)	C=0.4	จุดคงที่ (Fixed point)
A=0.5	วงรอบจำกัด (limit cycle)	C=0.6	วงรอบจำกัด (limit cycle)
A=0.55	หนึ่งวงม้วน (Single-scroll)	C=0.8	หนึ่งวงม้วน (Single-scroll)
A=0.65	สองวงม้วน (Double-scroll)	C=0.9	สองวงม้วนแบบไม่สมมาตร (Asymmetry double-scroll)
A=1	ตัวดึงดูดแปลกสองวงม้วน (Strange double-scroll)	C=1	สี่วงม้วน (Four-scroll)
		C=1.1	สี่วงม้วนแบบไม่สมมาตร (Asymmetry four-scroll)
		C=1.2	ตัวดึงดูดแปลกสองวงม้วน (Strange double-scroll)

จากตารางที่ 2.8 เป็นการชี้ให้เห็นว่าระบบเคออสแบบหลายวงม้วนมีพฤติกรรมพลวัตที่หลากหลายกว่าระบบเคออสแบบสองวงม้วน ซึ่งส่งผลต่อการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีพลวัตต่อระบบเคออสนั้นๆ โดยหากนำความหลากหลายทางพลวัตของระบบเคออสแบบหลายวงม้วนไปควบกับทฤษฎี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลักษณะพิเศษอื่น เช่น ความหลายเสถียรภาพ การควบคุมขนาดสัญญาณ (Amplitude control) หรือแม้กระทั่งระบบเคออสไฮเปอร์ เป็นต้น ยิ่งทำให้เกิดพฤติกรรมพลวัตแปลกใหม่ เกี่ยวกับทฤษฎีเชิงลึกของสาขาพลวัต

จากคุณสมบัติทั้งหมดที่กล่าวมาของระบบเคออสแบบหลายวงม้วน ทำให้ระบบเคออสดังกล่าวเป็นหนึ่งในการศึกษาและทำการออกแบบระบบเคออสของผู้วิจัย โดยมีการออกแบบเชิงตัวเลขและวงจรที่สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสแบบหลายวงม้วน รวมถึงนำประยุกต์ใช้ด้านความปลอดภัยด้านการสื่อสารด้วย

2.8 ระบบเคออสอนุพันธ์อันดับสูง เคออสแบบไฮเปอร์ (HyperChaotic system)

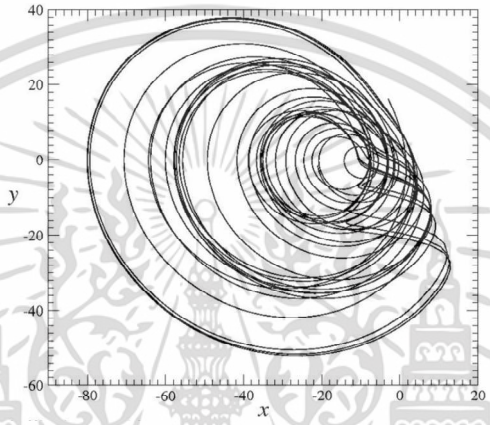
ระบบไฮเปอร์เคออส เป็นระบบเคออสที่มีอนุพันธ์สูงกว่าอันดับสาม ซึ่งระบบเคออสโดยทั่วไปจะเป็นระบบสมการอนุพันธ์อันดับสาม ความแตกต่างที่สำคัญของระบบไฮเปอร์เคออสกับระบบเคออส คือ สามารถสร้างความเป็นพลวัต (Dynamic) ได้มากกว่า เกิดมิติการแกว่งของวิถีวงโคจรที่สูงกว่า มีโครงสร้างหรือจำนวนตัวแปรสเตรทที่เยอะและซับซ้อนมากกว่า เหมาะสำหรับนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาที่ต้องการความพลวัตที่สูงหรือต้องการความซับซ้อนของโครงสร้างตัวแปรที่สูง เช่น ความปลอดภัยด้านการสื่อสาร (Secure in Communication) การเข้ารหัส (Encryption) หรือการถอดรหัส (Decryption) ในด้านการสื่อสารจำเป็นมากที่ต้องการความซับซ้อนของกุญแจสำหรับถอดรหัส เพื่อให้เกิดความปลอดภัยสูงสุดในการซิงโครไนซ์ของระบบ

ระบบไฮเปอร์เคออสถูกค้นพบครั้งแรก ในปี ค.ศ. 1979 โดย Otto E. Rossler จากแบบจำลองของรอสเลอร์เอง [64] โดยรอสเลอร์พบว่าระบบใหม่ที่สร้างขึ้นสามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดรูปแบบใหม่ได้ และมีมิติของตัวแปรสเตรทมากว่า 3 มิติ โดยทฤษฎีในการบ่งบอกพฤติกรรมของระบบพลวัตที่สำคัญและขาดไม่ได้สำหรับยืนยันว่า ระบบเป็นไฮเปอร์เคออส คือ เลขชี้กำลัง Lyapunov โดยระบบที่เป็นไฮเปอร์เคออส จะมีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่เป็นบวกอย่างน้อยสองค่า ซึ่งปกติระบบเคออสทั่วไปจะมีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่เป็นบวกหนึ่งค่า เข้าใกล้ศูนย์หนึ่งค่า และติดลบหนึ่งค่า (+, 0, -) จำนวนของค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov จะขึ้นอยู่กับอันดับอนุพันธ์ของระบบเคออส ซึ่งหมายความว่าระบบไฮเปอร์เคออสจะมีค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov น้อยสุดสี่ค่า คือ บวกสองค่า เข้าใกล้ศูนย์หนึ่งค่า และเป็นลบหนึ่งค่า (+, +, 0, -) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ มีอนุพันธ์ของระบบน้อยที่สุดอันดับสี่ ซึ่งระบบไฮเปอร์เคออสระบบแรกที่ถูกคิดค้นโดยรอสเลอร์ มีรูปแบบสมการอนุพันธ์อันดับสี่ ดังสมการที่ (2.52)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + 0.25y + w, \\ \dot{z} = 3 + xz, \\ \dot{w} = -0.5z + 0.05w. \end{cases} \tag{2.52}$$

ระบบนี้จะประกอบไปด้วยตัวแปรสเตรทสี่ตัว คือ x, y, z และ w พร้อมกับค่า Lyapunov สี่ค่า คือ $\lambda_1 = 0.112, \lambda_2 = 0.019, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -25.188$ จะสังเกตเห็นว่ามีค่าบวกสองค่า คือ λ_1 และ λ_2 ซึ่งบ่งบอกว่าระบบนี้เป็น ไฮเปอร์เคออส



รูปที่ 2.39 ลักษณะตัวดึงดูดไฮเปอร์เคออสของรอสเลอร์ บนแกน x-y

ซึ่งโดยปกติโครงสร้างระบบสมการอนุพันธ์เคออสพื้นฐานสามารถเขียนได้ ดังสมการที่ (2.53)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.53}$$

ที่ f คือ ฟังก์ชันใดๆ และ n คือจำนวนอนุพันธ์ของระบบ ที่ n=3 คือ ระบบเคออส (Chaotic system) และที่ n>3 คือ ระบบไฮเปอร์เคออส (HyperChaotic system) ซึ่งมีตัวอย่างของระบบไฮเปอร์เคออสในหลายงานวิจัย ดังแสดงตัวอย่างต่อไปนี้

2.8.1. ระบบไฮเปอร์เคออสอันดับสี่จากแบบจำลองของLorenz (The Four-Dimensional Modified Lorenz System)

ระบบนี้เป็นระบบไฮเปอร์เคออสอย่างง่ายที่ดัดแปลงจากแบบจำลองต้นแบบ Lorenz ถูกนำเสนอโดย Gao และ Zhang [65] ซึ่งมีรูปแบบสมการอนุพันธ์อันดับสี่ ดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = -xz + u, \\ \dot{z} = xy - c, \\ \dot{u} = -dy. \end{cases} \tag{2.54}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างของระบบนี้เป็นโครงสร้างของระบบอันดับสี่แบบไฮเปอร์เคออสอย่างง่าย เนื่องจากมีการใช้พารามิเตอร์ที่เป็นอิสระ แค่สองตัว คือ c กับ d ในระบบไฮเปอร์เคออสตัวอย่างนี้มีคุณสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ คือ

(i) ในระบบนี้มีพจน์ของตัวแปรสเตรทเจ็ดตัว โดยมีพจน์ไม่เชิงเส้นเพียงสองพจน์ และพารามิเตอร์ควบคุมเพียงสองตัว

(ii) สามารถแสดงลักษณะตัวดึงดูดไฮเปอร์ขนาดใหญ่บนพื้นที่เฟสได้

(iii) สามารถแสดงลักษณะตัวดึงดูดได้หลายชนิด วงรอบจำกัด (limit cycle), วงรอบจำกัดสามรอบ (three limit cycle), ตัวดึงดูดแบบทอรัส (torus attractor) รวมถึงตัวดึงดูดแบบไฮเปอร์

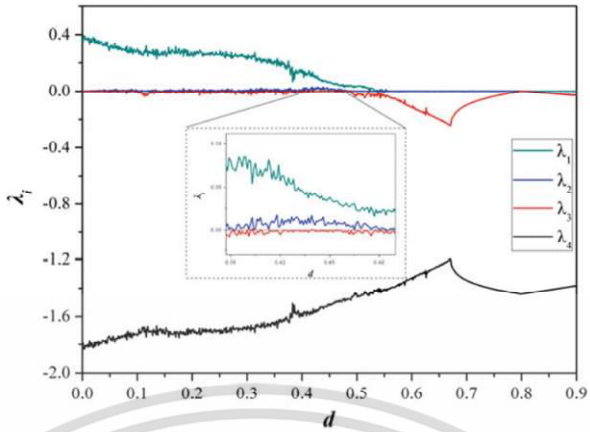
(iv) มีโครงสร้างของตัวดึงดูดที่ซับซ้อน โดยสามารถดูลักษณะตัวดึงดูดด้วยระนาบ 2 มิติบนพื้นที่เฟสได้ถึง 5 ลักษณะ

ด้วยคุณสมบัติที่กล่าวมา ทำให้ระบบสมการที่ (2.54) เป็นที่น่าสนใจและถูกนำมายกตัวอย่างสำหรับระบบที่เป็นไฮเปอร์เคออส โดยต่อไปนี้จะเป็นการแสดงผลเชิงตัวเลขเพื่อยันยันว่าระบบนี้เป็นไฮเปอร์ ด้วยทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov ซึ่งจากหัวข้อที่ 2.3 ที่กล่าวไป ด้วยรูปแบบการคำนวณสมการอนุพันธ์ที่ซับซ้อนและละเอียดอ่อน รูปแบบการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของ Lyapunov ถูกพัฒนาเป็นอัลกอริทึมบนโปรแกรม MATLAB โดย Alan Wolf [37] เพื่อให้สะดวกต่อการใช้งาน โดยกำหนดค่าตัวแปรสเตรทเริ่มต้น $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0.55, -0.49, -0.08, 0.50)$ และกำหนดพารามิเตอร์ c=2.6, d=0.44 ค่า Lyapunov ทั้งสี่ค่าของระบบที่ได้ คือ

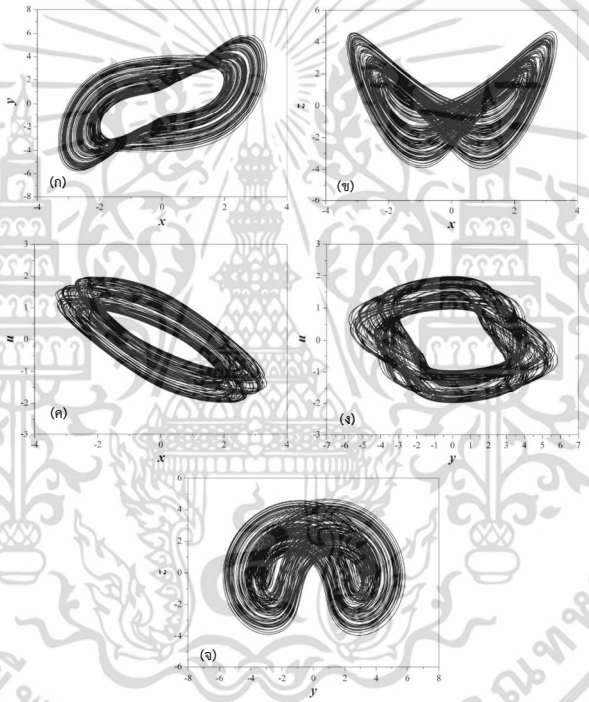
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0704, \\ \lambda_2 &= 0.0128, \\ \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_4 &= -1.0832. \end{aligned} \tag{2.55}$$

ที่ค่า λ_1 และ λ_2 เป็นบวก ที่ λ_3 เข้าใกล้ศูนย์หรือเท่ากับศูนย์ และที่ λ_4 ติดลบ ตามลักษณะทางพลวัตของระบบไฮเปอร์อันดับสี่ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (+, +, 0, -)$ ซึ่งเป็นค่าเชิงปริมาณที่บ่งบอกว่าระบบนี้เป็นไฮเปอร์ด้วยค่า Lyapunov แสดงกราฟทั้งสี่ค่าเทียบกับพารามิเตอร์ d ดังรูปที่ 2.40 และแสดงผลของตัวดึงดูด 2 มิติทั้ง 5 ระนาบสำหรับระบบที่ (2.54) ดังรูปที่ 2.41

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.40 Lyapunov exponents เทียบกับพารามิเตอร์ *d* ในช่วง 0 ถึง 0.9 โดยกำหนด *c*=2.7



รูปที่ 2.41 แสดงลักษณะตัวดึงดูดแบบไฮเปอร์ทั้ง 5 ระนาบ โดยกำหนด *c*=2.7, d=0.44 (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z (ค) ระนาบ x-u (ง) ระนาบ y-u (จ) ระนาบ y-z

และดังที่กล่าวไปในหัวข้อที่ 2.3 ค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่เป็นบวกสามารถบ่งบอกว่าระบบเป็นเคออส และจำนวนค่าที่เป็นบวกที่มากกว่าหนึ่งค่าสามารถบ่งบอกถึงระบบที่เป็นไฮเปอร์ได้ เมื่อต้องการบ่งบอกความซับซ้อนของระบบที่ออกแบบ ต้องมีการนำค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งหมดมาคิดภาพรวมเพื่อบ่งชี้เป็นค่าเชิงปริมาณที่บ่งบอกความซับซ้อนด้วยสูตรของ Kaplan-Yorke โดยสูตรแสดงดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D_{KY} = j + \frac{1}{\left|\lambda_{j+1}\right|}\sum_{i=1}^{j}\lambda_i \tag{2.56}$$

ที่ j คือ ค่าจำนวนเต็มที่สูงสุดเมื่อ i-1

ที่ i คือ ลำดับอนุพันธ์สูงสุดของระบบ

ที่ λ คือ Lyapunov exponents

โดยมีเงื่อนไข ดังนี้ $\sum_{i=1}^{j}\lambda_i \geq 0$ และ $\lambda_{j+1} < 0$ โดยที่ $j \leq D_{KY} < j+1$

ดังนั้น ตัวเลขเชิงปริมาณที่บ่งบอกความซับซ้อนของความเป็นไฮเปอร์เคออสของระบบที่ (2.54) สามารถแสดงด้วย Kaplan-Yorke ดังนี้

$$D_{KY} = 3 + \frac{0.0704 + 0.0128 + 0}{\left|-1.0832\right|} = 3.07680 \tag{2.57}$$

จะเห็นได้ว่า ที่ j และ i จะสูงขึ้นตามอันดับอนุพันธ์ของระบบที่ออกแบบ ค่า D_{KY} จึงสูงขึ้นตามระบบที่มีอันดับอนุพันธ์สูง และค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov (λ) ต้องอยู่ในเงื่อนไขการคำนวณของ Kaplan-Yorke ทำให้ระบบไฮเปอร์เคออสมีค่า D_{KY} ที่สูงกว่าระบบเคออสทั่วไป ด้วยเหตุนี้ทำให้สามารถบ่งบอกความซับซ้อนของระบบเคออสด้วยค่าเชิงปริมาณจากระบบที่ออกแบบได้

2.8.2 ระบบไฮเปอร์เคออสอันดับห้า (A Novel 5-D Hyperchaotic System)

ตัวอย่างงานต่อมาเป็นการออกแบบระบบไฮเปอร์เคออสอันดับห้า ที่ถูกนำเสนอโดย Vaidyanathan [66] ระบบนี้มีการเริ่มออกแบบจากระบบอันดับสี่ก่อน พร้อมด้วยพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นกำลังสอง สองพจน์ และจำนวนพจน์ตัวแปรสเตรททั้งหมด 11 พจน์ เขียนสมการอนุพันธ์อันดับสี่ได้ดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_1x_3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2, \\ \dot{x}_4 = -d(x_1 + x_2). \end{cases} \tag{2.58}$$

ที่ x_1, x_2, x_3, x_4 คือ ตัวแปรสเตรทที่ใช้ในระบบ (2.58) และ a, b, c, d คือ พารามิเตอร์ที่เป็นบวก ระบบนี้ถูกพิสูจน์ความเป็นไฮเปอร์เคออส โดยเริ่มจากระบบอันดับสี่ ซึ่งกำหนดพารามิเตอร์ที่ใช้ คือ a=12, b=4, c=100, และ d=5 เมื่อนำไปคำนวณค่า Lyapunov ด้วยอัลกอริทึมบน MATLAB จะได้ค่า Lyapunov ทั้งสี่ค่า ตามอันดับสี่ที่ออกแบบ คือ

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.3981, \\ \lambda_2 &= 0.2393, \\ \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_4 &= -17.6509. \end{aligned} \tag{2.59}$$

ดังนั้น ค่า Kaplan-Yorke ของระบบอันดันสี่ที่ Vaidyanathan ออกแบบใน (2.58) คำนวณได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D_{KY} = j + \frac{1}{\left|\lambda_{j+1}\right|}\sum_{i=1}^{j}\lambda_i = 3 + \frac{1.3981 + 0.2393 + 0}{\left|-17.6509\right|} = 3.0928 \tag{2.60}$$

จากนั้น Vaidyanathan นำระบบที่ (2.58) มาสร้างเป็นระบบไฮเปอร์เคออสอันดับห้า ด้วยการเพิ่มการควบคุมตัวแปรสเตรทย้อนกลับ (State feedback control) สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_3 + x_4 + x_5, \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_1x_3 + x_4 + x_5, \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2, \\ \dot{x}_4 = -d(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_5 = -p(x_1 + x_2). \end{cases} \tag{2.61}$$

ที่ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 คือ ตัวแปรสเตรทที่ใช้ในระบบ (2.61) และ a, b, c, d, p คือ พารามิเตอร์ที่เป็นบวก และมีจำนวนพจน์ของตัวแปรสเตรททั้งหมด 15 พจน์ โดยระบบไฮเปอร์เคออสอันดับห้านี้ สามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดแบบไฮเปอร์ที่ซับซ้อน ด้วยค่าพารามิเตอร์ a=12, b=4, c=100, d=5 และ p=1 พร้อมกับกำหนดค่าตัวแปรสเตรทเริ่มต้น คือ $\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right)_0 = \left(0.5, 1.1, 0.8, 0.1, 1.2\right)$ คำนวณค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ด้วยอัลกอริทึมบน MATLAB จะได้ค่า Lyapunov ทั้งห้าค่า ตามอันดับห้าที่ออกแบบ ดังนี้

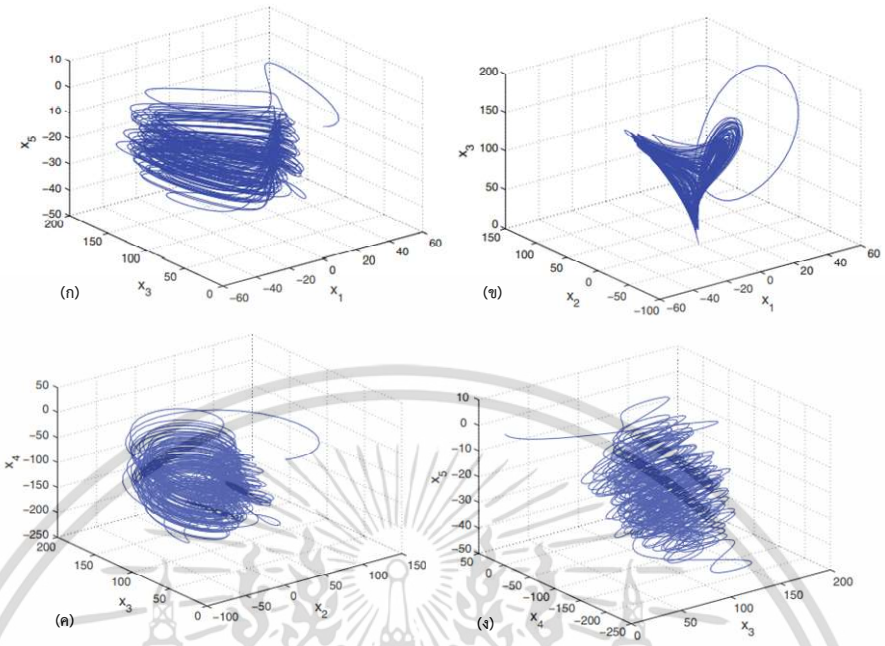
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.2995, \\ \lambda_2 &= 0.2505, \\ \lambda_3 &= 0.0615, \\ \lambda_4 &= 0, \\ \lambda_5 &= -17.5932. \end{aligned} \tag{2.62}$$

ค่า Kaplan-Yorke ของระบบอันดันห้าที่ Vaidyanathan ออกแบบใน (2.61) คำนวณได้ดังนี้

$$D_{KY} = j + \frac{1}{\left|\lambda_{j+1}\right|}\sum_{i=1}^{j}\lambda_i = 4 + \frac{1.2995 + 0.2505 + 0.0615 + 0}{\left|-17.5932\right|} = 4.09159 \tag{2.63}$$

ค่า Lyapunov ของระบบไฮเปอร์เคออสอันดับห้ามีค่าที่เป็นบวกถึงสามค่า คือ λ_1, λ_2 และ λ_3 โดยเมื่อเปรียบเทียบค่า D_{KY} จากสมการที่ (2.60) และ (2.63) จะเห็นได้ชัดเจนว่า ระบบไฮเปอร์เคออสที่มีอันดับห้า มีค่า D_{KY} ที่สูงกว่าระบบไฮเปอร์เคออสอันดับสี่ บ่งบอกว่าความซับซ้อนของความเป็นพลวัตในระบบไฮเปอร์อันดับห้ามีสูงกว่า ด้วยจำนวนพจน์ของตัวแปรสเตรทที่มากกว่า แต่มิติของสมการอนุพันธ์ที่สูงกว่า ส่งผลให้สามารถแสดงลักษณะตัวดึงดูดบนพื้นที่เฟสได้หลายมิติ โดยจะแสดงลักษณะตัวดึงดูดบนระนาบ 3 มิติของระบบที่ (2.61) ให้เห็นดังรูปที่ 2.42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.42 แสดงลักษณะตัวดึงดูดแบบไฮเปอร์เคออสบนระนาบ 3 มิติ ของระบบที่ (2.61) โดย ระนาบ x_1-x_3-x_5 (ข) ระนาบ x_1-x_2-x_3 (ค) ระนาบ x_2-x_3-x_4 (ง) ระนาบ x_3-x_4-x_5

2.8.3 ระบบไฮเปอร์เคออสแบบกระตุกอันดับสี่ (A Novel 4-D HyperJerk System)

2.8.3.1 บทนำ

ผู้วิจัยมีการศึกษาแบบจำลองการกระตุก (Jerk model) เป็นแบบจำลองหลักในการประยุกต์สร้างระบบเคออส ที่จะสามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดรูปแบบใหม่ๆขึ้นมา เนื่องจากแบบจำลองการกระตุกมีโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อน พารามิเตอร์ในการปรับเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณเพียงหนึ่งตัว และสามารถปรับลักษณะฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างอิสระ โดยแบบจำลองการกระตุก ถูกคิดค้นโดย J.C. sportt ในปี 2000 [8] ซึ่งการพัฒนาระบบเคออสเป็นระบบไฮเปอร์เคออส ทางผู้วิจัยมุ่งเน้นไปที่การพัฒนาจากแบบจำลองการกระตุก โดยในงานวิจัยตัวอย่างนี้ ได้ยกมาเพื่อแสดงตัวอย่างระบบไฮเปอร์เคออสอันดับสี่ที่สร้างจากแบบจำลองการกระตุก

ในทางฟิสิกส์ ระบบการกระตุกแบบไฮเปอร์ สามารถเขียนเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงได้ดังนี้

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \varphi\left(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \quad (n \geq 4) \tag{2.64}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่ (3.13) $x(t)$ ถูกแทนที่ด้วย $\frac{dx}{dt}$ คือ ความเร็ว (Velocity) $\frac{d^2x}{dt^2}$ คือ ความเร่ง (acceleration) $\frac{d^3x}{dt^3}$ คือ การกระตุก (Jerk) อันดับอนุพันธ์ที่สูงกว่าเรียกว่า การกระตุกแบบไฮเปอร์ (HyperJerk) ดังนั้นเราจึงให้สมการที่ (2.64) เป็น สมการอนุพันธ์การกระตุกแบบไฮเปอร์

ในการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ (qualitative analysis) เราสามารถแทนสมการการกระตุกแบบไฮเปอร์ (2.64) อยู่ในรูปของระบบตัวแปรเฟส สามารถเขียนสมการการกระตุกแบบไฮเปอร์ ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.65}$$

ระบบการกระตุกทั่วไปเป็นกรณีพิเศษสำหรับระบบการกระตุกแบบไฮเปอร์ เมื่อ n=3 ดังนั้นระบบการกระตุกทั่วไปสามารถเขียนเป็นสมการอนุพันธ์ตัวแปรเฟส ได้ดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = \varphi(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \tag{2.66}$$

มีการประยุกต์ใช้ระบบการกระตุกทั่วไปสำหรับสร้างความเคออสในหลายบทความ [9, 67-69] ในหลายบทความมีการนำเสนอรูปแบบการกระตุกแบบไฮเปอร์ [70-71]

2.8.3.2. การออกแบบระบบไฮเปอร์เคออสแบบกระตุกอันดับสี่

ระบบนี้ถูกนำเสนอโดย Bao et al. [72] สามารถเขียนสมการอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_3 - ax_4 - bx_3x_4 - y. \end{cases} \tag{2.67}$$

ที่ x_1, x_2, x_3, x_4 คือ ตัวแปรสเตรท ที่ a และ b คือ พารามิเตอร์ควบคุม โดยที่ $y = (1 - x_1)x_2$ คือพจน์ไม่เป็นเชิงเส้น ในงานนี้สร้างลักษณะตัวดึงดูดไฮเปอร์ โดยกำหนดพารามิเตอร์ a=0.5, b=0.4 และเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวแปรสเตรท $(x_1, x_2, x_3, x_4)_0 = (0.06, 10^{-6}, 0, 0)$ เมื่อนำไปคำนวณค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov บน MATLAB จะได้ค่า Lyapunov ทั้งสี่ค่า ตามอันดับสี่ที่ออกแบบ ดังนี้

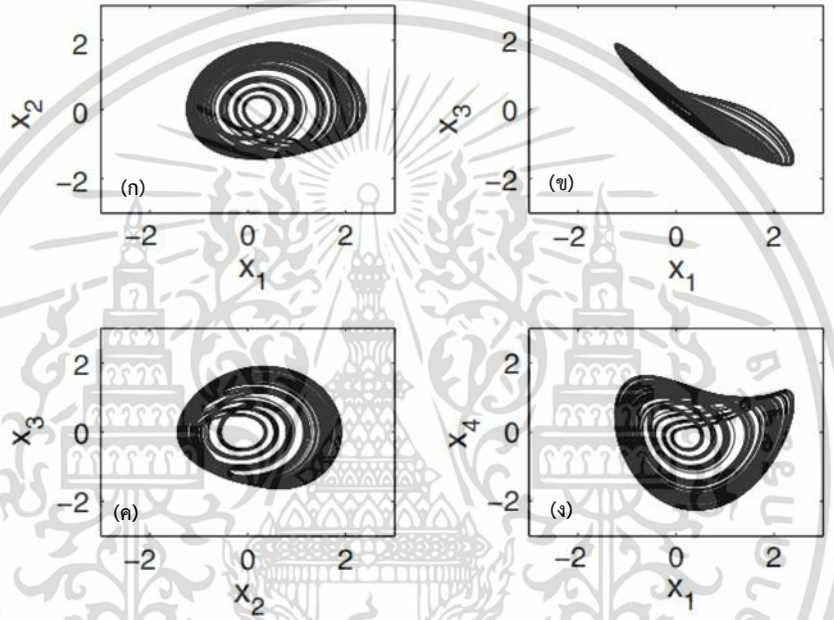
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0730, \\ \lambda_2 &= 0.0018, \\ \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_4 &= -0.5755. \end{aligned} \tag{2.68}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

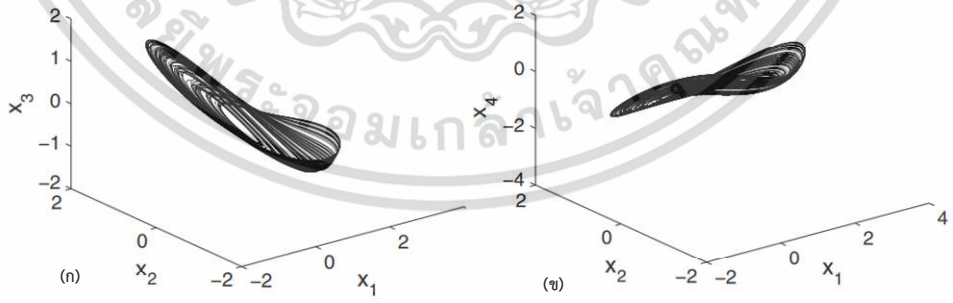
นำค่าในสมการที่ (2.68) มาคำนวณหาค่า Kaplan-Yorke ของระบบไฮเปอร์แบบกระตุกในสมการที่ (2.69) ได้ดังนี้

$$D_{KY} = j + \frac{1}{\left|\lambda_{j+1}\right|}\sum_{i=1}^{j}\lambda_i = 3 + \frac{0.0730 + 0.0018 + 0}{\left|-0.5755\right|} = 3.12997 \qquad (2.69)$$

ระบบนี้แสดงความเป็นไฮเปอร์ด้วยค่า Lyapunov บวกสองค่า และค่า D_{KY}=3.12997 โดยแสดงลักษณะตัวดึงดูดจากการพล็อตของตัวแปรสเตรททั้งสี่บนระนาบ 2 มิติ และ 3 มิติ ดังรูปที่ 2.43 และ 2.44



รูปที่ 2.43 แสดงลักษณะตัวดึงดูดของระบบไฮเปอร์การกระตุกบนระนาบ 2 มิติ (ก) ระนาบ x_1-x_2 (ข) ระนาบ x_1-x_3 (ค) ระนาบ x_2-x_3 (ง) ระนาบ x_1-x_4



รูปที่ 2.44 แสดงลักษณะตัวดึงดูดของระบบไฮเปอร์การกระตุกบนระนาบ 3 มิติ (ก) ระนาบ x_1-x_2-x_3 (ข) ระนาบ x_1-x_2-x_4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยจะสรุปลักษณะของค่า Lyapunov สำหรับระบบไฮเปอร์เคออสอันดับสี่ในแต่ละรูปแบบของเครื่องหมายที่ได้จากค่า Lyapunov ซึ่งมีผลต่อการแสดงลักษณะตัวดึงดูดหรือพฤติกรรมของระบบพลวัต แสดงไว้ดังตารางที่ 2.9

ตารางที่ 2.9 แสดงลักษณะพฤติกรรมของระบบไฮเปอร์เคออสอันดับสี่ด้วยเครื่องหมายค่า Lyapunov

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	พฤติกรรมของระบบ
+	+	0	-	ไฮเปอร์เคออส
+	0	0	-	เคออสแบบสองทอรัส
+	0	-	-	เคออส
0	-	-	-	เชิงคาบ (periodic)
0	0	-	-	สองทอรัส
0	0	0	-	สามทอรัส
-	-	-	-	คาบเสถียร (Stable)

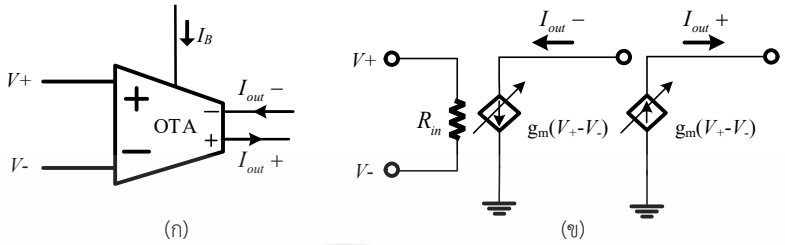
จากตัวอย่างงานวิจัยของระบบไฮเปอร์เคออสที่กล่าวมาข้างต้น เป็นเพียงตัวอย่างงานเพียงส่วนหนึ่ง ซึ่งในปัจจุบันมีการศึกษาและออกแบบระบบไฮเปอร์เคออสอย่างกว้างขวาง ด้วยความซับซ้อนของโครงสร้างระบบและความเป็นพลวัตที่สูง ระบบไฮเปอร์เคออสจึงมีประโยชน์ในการนำไปประยุกต์ใช้ในหลายๆด้าน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ความปลอดภัยด้านการสื่อสาร ซึ่งการมุ่งเน้นที่จะพัฒนาระบบไฮเปอร์เคออสเป็นประเด็นหนึ่งในการศึกษาของผู้วิจัยในการศึกษาเกี่ยวกับระบบเคออส

2.9 วงจรขยายความนำถ่ายโอน (Operational Transconductance Amplifier: OTA)

ทางผู้วิจัยมีการใช้อุปกรณ์แอกทีฟในการสร้างและออกแบบวงจรของงานวิจัย วงจรที่ออกแบบมีคุณสมบัติสามารถปรับอัตราขยายได้ และสามารถนำไปประยุกต์สร้างเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งอุปกรณ์ที่ใช้ออกแบบ คือ วงจรขยายความนำ (Operational transconductance amplifier : OTA) หรือที่เรียกกันว่า โอทีเอ เป็นอุปกรณ์แอกทีฟชนิดหนึ่ง ที่ได้รับความนิยม เนื่องจากมีโครงสร้างไม่ซับซ้อน และสามารถปรับค่าทางอิเล็กทรอนิกส์ได้ โอทีเอจะมีลักษณะเสมือนเป็นอุปกรณ์แหล่งจ่ายกระแส [73] ที่สามารถควบคุมกระแสเอาต์พุตได้จากแรงดันอินพุต (Voltage Control Current Source : VCCS) และค่าความนำถ่ายโอน (g_m) ของอุปกรณ์ อุปกรณ์ดังกล่าวมีคุณสมบัติที่หลากหลาย เช่น สามารถออกแบบในรูป Monolithic ได้ สามารถทำงานได้ทั้งในโหมดกระแส และแรงดัน สามารถปรับค่าความนำได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ และสามารถประยุกต์ใช้กับวงจรต่างๆได้ง่าย [74] จากข้อดีที่กล่าวมาทำให้โอทีเอถูกนำไปใช้งานใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หลากหลายด้าน เช่น ประมวลผลสัญญาณแอนะล็อก การสร้างตัวแปลงแรงดันเป็นกระแส และวงจรกรองความถี่ [75] โดยโอทีเอจะมีสัญลักษณ์แสดงดังรูปที่ 2.45



รูปที่ 2.45 (ก) สัญลักษณ์ และ (ข) วงจรสมมูล

รูปที่ 2.45 (ก) คือ สัญลักษณ์ของอุปกรณ์โอทีเอ และรูปที่ 2.45 (ข) คือ วงจรสมมูลของโอทีเอ ในสถานะอุดมคติ สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ระหว่างกระแส และแรงดันได้แสดงดังนี้

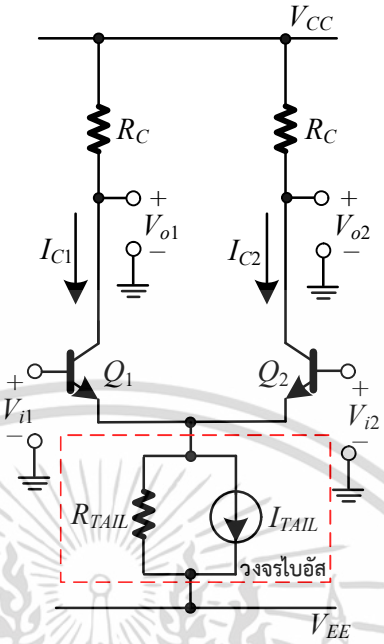
$$I_{out} = g_m(V_+ - V_-) \tag{2.70}$$

จากสมการที่ (2.70) g_m คือค่าความนำ (Transconductance) ที่สามารถปรับได้จากกระแสไบอัสภายนอก หรือเรียกว่ากระแสควบคุม (I_B) ดังรูปที่ 2.45 (ก) ซึ่งส่วนมากค่าความนำ (g_m) และค่ากระแสควบคุม (I_B) จะถูกแสดงในหน่วยของ *us* และ *uA* ตามลำดับ โดยขนาดของเกนแบนด์วิดท์ในช่วงการทำงานจะแปรผันตามกระแสควบคุม (I_B) ซึ่งโอทีเออาจสามารถทำงานได้สูงสุดถึง 100-300 *M*Hz ขึ้นอยู่กับการออกแบบและโมเดลของโอทีเอที่ใช้

2.9.1 วงจรคู่อีมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล (Differential Pairs) [76]

วงจรคู่ดิฟเฟอเรนเชียลเป็นวงจรขยายชนิดหนึ่ง ซึ่งมีการนำมาออกแบบทั้งแบบไบโพลาร์และมอสทรานซิสเตอร์ โดยต่อที่ขาอิมิตเตอร์ หรือ ซอสเข้าด้วยกัน ซึ่งวิธีการใช้ทรานซิสเตอร์คู่แบบดังกล่าวทำให้วงจรสามารถนำมาต่อคาดเคสกันได้โดยไม่ต้องมีตัวเก็บประจุคลับปิ้ง ทำให้มีการนำทรานซิสเตอร์คู่ไปประยุกต์ใช้ในวงจรรวมกันอย่างแพร่หลาย โดยในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างลักษณะของวงจรคู่อีมิตเตอร์ (Emitter-Coupled Pair: ECP) สำหรับทรานซิสเตอร์แบบไบโพลาร์ ดังรูปที่ 2.46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.46 วงจรคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล (ECP) โดยใช้ไบโพลาร์

จากรูปที่ 2.46 วงจรไบอัสในกรอบสีแดงต่อกับขาอิมิตเตอร์คู่ของทรานซิสเตอร์ Q_1 และ Q_2 โดยสามารถใช้ทรานซิสเตอร์เป็นแหล่งจ่ายกระแสได้ กระแสที่ได้จะชื่อ I_{TAIL} หรืออาจจะใช้ R_{TAIL} โดยต้องกำหนด I_{TAIL}=0 หรือสามารถใช้ทั้ง I_{TAIL} และ R_{TAIL} เป็นแหล่งจ่ายพร้อมกันได้ โดยที่ I_{TAIL} จะกลายเป็นวงจรสมมูล Norton

ซึ่งวงจรในรูปที่ 2.46 เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์เราจะกำหนดให้ $R_{TAIL}\rightarrow\infty$ และความต้านทานเอาต์พุตของทรานซิสเตอร์แต่ละตัว $r_0\rightarrow\infty$ ความต้านทานขาเบสของทรานซิสเตอร์ rb=0 เมื่อกำหนดดังนี้ จะทำการ KVL ที่อินพุตลูป จะได้

$$-V_{i2}+V_{be2}-V_{be1}+V_{i1}=0 \tag{2.71}$$

กำหนดให้ RC มีค่าน้อยพอที่จะทำให้ทรานซิสเตอร์ไม่ทำงานในย่านอิ่มตัว โดยที่ $V_{i1}\le V_{CC}$ และ $V_{i2}\le V_{CC}$ ถ้า $V_{be1}\gg V_T$ และ $V_{be2}\gg V_T$ สมการ Ebers-Moll คือ

$$V_{be1}=V_t\ln\left(\frac{I_{C1}}{I_{S1}}\right) \tag{2.72}$$

$$V_{be2}=V_t\ln\left(\frac{I_{C2}}{I_{S2}}\right) \tag{2.73}$$

กำหนดให้ทรานซิสเตอร์ทั้งสองตัวสมพมศ์กัน จะได้ I_{S1}=I_{S2} จากสมการที่ (2.71) พร้อมนำสมการที่ (2.72) ลบกับ (2.73) จะได้

$$\frac{I_{C1}}{I_{C2}}=\exp\left(\frac{V_{i1}-V_{i2}}{V_t}\right)=\exp\left(\frac{V_{id}}{V_t}\right) \tag{2.74}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ $V_{id}=V_{i1}=V_{i2}$ จากนั้นทำการ KCL ที่ขาอิมิตเตอร์ของทรานซิสเตอร์ (จากการกำหนดให้สมพงศ์กัน $\alpha_{F1}=\alpha_{F2}=\alpha_F$) ได้เป็น

$$I_{E1}+I_{E2}=I_{TAIL}=\frac{I_{C1}+I_{C2}}{\alpha_F} \tag{2.75}$$

นำสมการที่ (2.75) และ (2.74) มารวมกัน จะได้เป็น

$$I_{C1}=\frac{\alpha_F I_{TAIL}}{1+\exp\left(-\frac{V_{id}}{V_t}\right)} \tag{2.76}$$

$$I_{C2}=\frac{\alpha_F I_{TAIL}}{1+\exp\left(\frac{V_{id}}{V_T}\right)} \tag{2.77}$$

นำ $\exp(V_{id}/2V_T)$ มาคูณทั้งเศษและส่วนของสมการ (2.76) และนำ $\exp(-V_{id}/2V_T)$ มาคูณทั้งเศษและส่วนของสมการ (2.77) เขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$I_{C1}=\frac{\alpha_F I_{TAIL}\exp\left(\frac{V_{id}}{V_t}\right)}{\exp\left(\frac{V_{id}}{2V_t}\right)+\exp\left(-\frac{V_{id}}{2V_t}\right)} \tag{2.78}$$

$$I_{C2}=\frac{\alpha_F I_{TAIL}\exp\left(-\frac{V_{id}}{2V_t}\right)}{\exp\left(\frac{V_{id}}{2V_t}\right)+\exp\left(-\frac{V_{id}}{2V_t}\right)} \tag{2.79}$$

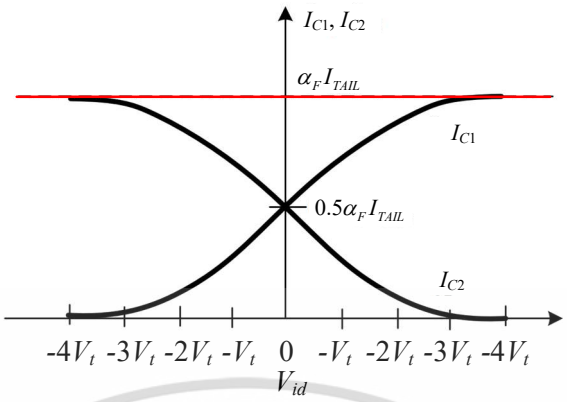
ที่กระแส $I_O=I_{C1}-I_{C2}$ ดังนั้นสมการ I_O เท่ากับ

$$I_O=\alpha_F I_{TAIL}\frac{\exp\left(\frac{V_{id}}{2V_t}\right)-\exp\left(-\frac{V_{id}}{2V_t}\right)}{\exp\left(\frac{V_{id}}{2V_t}\right)+\exp\left(-\frac{V_{id}}{2V_t}\right)} \tag{2.80}$$

นำสมการที่ (2.81) มาประมาณค่าด้วยอนุกรม Taylor จะได้สมการเป็น

$$I_O=\alpha_F I_{TAIL}\tanh\left(\frac{V_{id}}{2V_t}\right)\approx\alpha_F I_{TAIL}\left(\frac{V_{id}}{2V_t}\right) \tag{2.82}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.47 กระแสคอลเลคเตอร์ของวงจรคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล โดยป้อนอินพุตแรงดันผลต่าง

จากรูปที่ 2.47 ที่กระแส I_{C1} และ I_{C2} อยู่ในรูป V_{id} โดยเมื่อขนาด V_{id} มากกว่า $3V_t$ กระแส I_C จะไม่เป็นฟังก์ชันของ V_{id} แต่ถ้า V_{id} น้อยกว่า V_t จะพบว่าวงจรมีพฤติกรรมเกือบเป็นเชิงเส้น สามารถคำนวณแรงดันเอาต์พุตได้ดังนี้

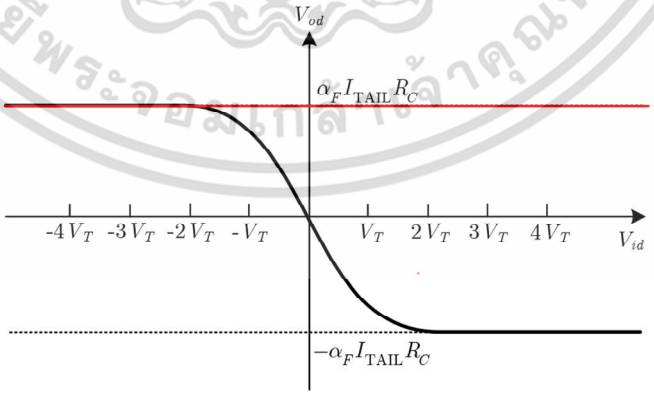
$$V_{O1} = V_{CC} - I_{C1}R_C \tag{2.83}$$

$$V_{O2} = V_{CC} - I_{C2}R_C \tag{2.84}$$

สัญญาณเอาต์พุตที่พิจารณาคือผลต่างของ $V_{od}=V_{o1}-V_{o2}$ จะเขียนสมการได้เป็น

$$I_{od} = \alpha_F I_{TAIL} R_C \tanh\left(\frac{-V_{id}}{2V_t}\right) \approx -\alpha_F I_{TAIL} R_C \left(\frac{V_{id}}{2V_t}\right) \tag{2.85}$$

จากสมการที่ (2.85) เมื่อ $V_{id}=0$ และ $V_{od}=0$ ที่ Q_1 และ Q_2 สมพงศ์กัน โดยตัวต้านทานที่ต่อกับขาคอลเลคเตอร์ของ Q_1 และ Q_2 มีค่าเท่ากัน จากเงื่อนไขที่กล่าวมาถ้านำสมการมาพล็อตกราฟ จะได้กราฟดังรูปที่ 2.48 ซึ่งจะทำให้เห็นข้อดีของวงจรขยายคู่ดิฟเฟอเรนเชียลได้ชัดว่า วงจรสามารถต่อคาดเคดกันได้โดยที่ไม่มีออฟเซ็ต

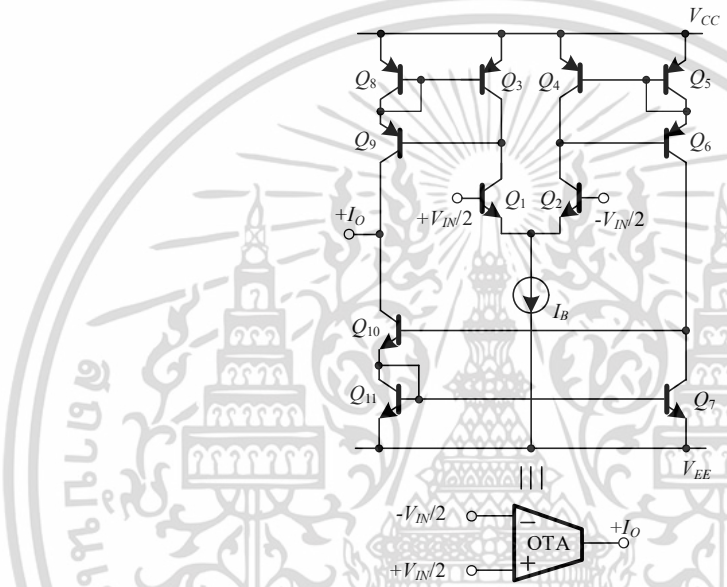


รูปที่ 2.48 ผลต่างแรงดันเอาต์พุต V_{od} ของวงจรขยายคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล โดยป้อนแรงดันอินพุตผลต่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9.2 โอทีเอโดยใช้ไบโพลาร์ทรานซิสเตอร์

หลักการทำงานวงจรโอทีเออย่างง่ายที่สร้างจากไบโพลาร์ทรานซิสเตอร์ ก็คือวงจรขยายคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียลที่อธิบายไว้ในหัวข้อก่อนหน้า โดยมีองค์ประกอบของวงจรสะท้อนของกระแส เพื่อนำผลต่างของกระแสจากคู่ดิฟเฟอเรนเชียลออกมาเป็นเอาต์พุตของโอทีเอ โดยโอทีเอที่ใช้ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้เป็นแบบหนึ่งเอาต์พุตบวก โดยวงจรสะท้อนกระแสจะใช้แบบ Wilson [76] และอิงโครงสร้างวงจรขยายคู่อิมิตเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียลจากรูปที่ 2.46 แสดงโอทีเอหนึ่งเอาต์พุตบวกดังรูปที่ 2.49



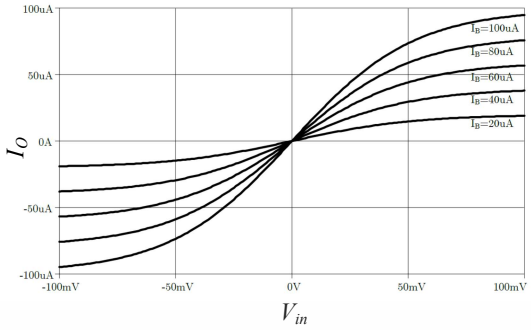
รูปที่ 2.49 วงจรไบโพลาร์โอทีเอ (BJT-OTA) [77]

จากโอทีเอในรูปที่ 2.49 และสมการที่ (2.85) สามารถเขียนสมการเอาต์พุตของโอทีเอได้เป็น

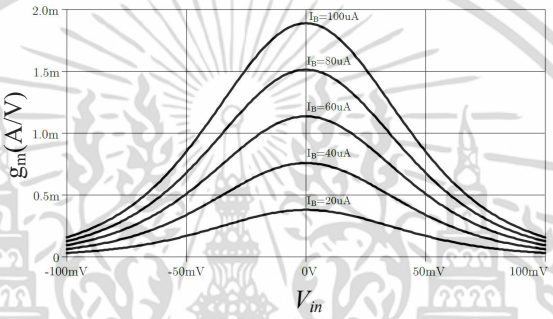
$$I_{Oi} = \alpha_F I_{TAIL} \tanh\left(\frac{V_{id}}{2V_T}\right) \approx v_{id}\left(\frac{I_B}{2V_T}\right) = v_{id} g_m \qquad (2.86)$$

ที่ $\alpha_F \simeq 1$ โดยที่ค่าความนำถ่ายโอน (g_m) สามารถปรับค่าได้ด้วยกระแสไบอัส (I_B) และจากเงื่อนไข $V_{id} < 2V_T$ ทำให้อินพุตมีความเป็นเชิงเส้นจำกัด โดยวงจรไบโพลาร์โอทีเอสามารถแสดงตัวอย่างจำลองการทำงานด้วยแบบจำลองทรานซิสเตอร์อาเรย์ (Model Transistor Array) 3127 และ 3128 [78] โดยแสดงคุณสมบัติไฟตรงของวงจรได้ดังรูปที่ 2.50 และในรูปที่ 2.51 แสดงค่าความนำถ่ายโอน (g_m) เมื่อปรับกระแสไบอัส โดยจะสังเกตเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงของค่าความนำถ่ายโอนมีการเปลี่ยนแปลงคงที่เป็นเชิงเส้นตามการปรับค่ากระแสไบอัส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.50 กระแสเอาต์พุต I_O ของวงจรไบโพลาร์โอทีเอ โดยปรับกระแสไบอัส I_B [20uA 40uA 60uA 80uA และ 100uA]



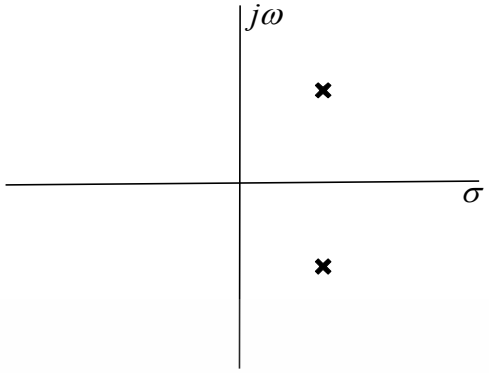
รูปที่ 2.51 ค่าความนำถ่ายโอน (g_m) ของวงจรไบโพลาร์โอทีเอ โดยปรับกระแสไบอัส I_B [20uA 40uA 60uA 80uA และ 100uA]

จะเห็นว่าค่าความนำถ่ายโอนของโอทีเอสามารถปรับได้ตามกระแสไบอัสตามสมการที่ (2.86) ซึ่งการปรับค่าความนำถ่ายโอนได้ด้วยการปรับกระแสไบอัสนั้นคือหนึ่งในลักษณะเฉพาะของอุปกรณ์โอทีเอ และโอทีเอแบบไบโพลาร์ทรานซิสเตอร์นั้น สามารถปรับกระแสได้ค่อนข้างเป็นเชิงเส้น ทำให้อุปกรณ์แอกทีฟไบโพลาร์โอทีเอจึงถูกนำมาใช้เป็นอุปกรณ์หลักในการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ด้วย ซึ่งในการแสดงผลความเป็นพลวัตของระบบเคออสจำเป็นต้องใช้การปรับค่าเพื่อตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของระบบ ดังนั้นการการปรับค่าทรานคอนดัคแตนซ์ได้ด้วยการปรับกระแสไบอัสช่วยให้สะดวกในการตรวจสอบผลของวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส

2.10 ทฤษฎีและหลักการกำเนิดสัญญาณ [76]

2.10.1 การวิเคราะห์ฟังก์ชันโครงข่ายสำหรับการกำเนิดสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.52 ตัวอย่างโพลและซีโร่ของฟังก์ชันโครงข่าย

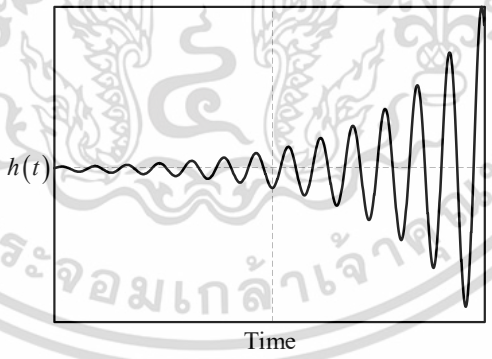
ฟังก์ชันโครงข่ายอันดับสองที่ใช้อธิบายหลักการกำเนิดสัญญาณคือฟังก์ชันที่มีโพลแบบเชิงสังยุคและมีซีโร่อยู่ที่อนันต์ เมื่อนำมาเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนย่อยจะเป็นดังสมการที่ (2.87) และแสดงตำแหน่งโพลและซีโร่ของฟังก์ชันโครงข่ายได้ดังรูปที่ 2.52 สามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ ดังนี้

$$H(s) = \frac{k_1}{s-a-jb} + \frac{k_1}{s-a+jb} \tag{2.87}$$

อินเวิร์สลาปลาซสมการ (2.87) ได้เป็น

$$h(t) = 2K_1 e^{at} \cos bt \tag{2.88}$$

นำสมการ (2.88) มาพล็อตในโดเมนเวลา (time domain) จะได้กราฟที่มีลักษณะลู่ออกตามฟังก์ชันของสมการ ดังรูปที่ 2.53



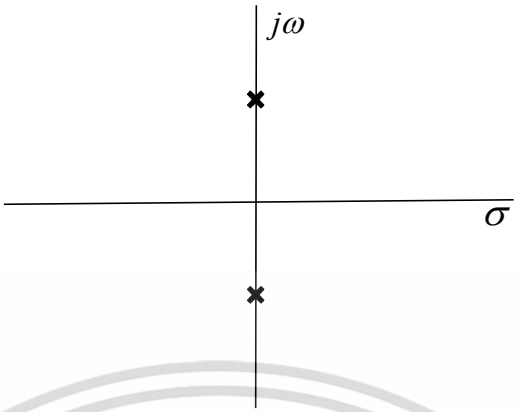
รูปที่ 2.53 กราฟฟังก์ชันลู่ออก

จากสมการที่ (2.88) พจน์ที่ทำให้ฟังก์ชันลู่ออกคือ e^{at} หากทำให้พจน์นี้กลายเป็นค่าคงที่โดยการแทน a ที่เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนจริงของพจน์ให้เท่ากับ 0 ส่งผลให้พจน์ $e^{at} = 1$ กราฟของฟังก์ชันจะไม่เกิดการลู่ออก ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$h(t) = 2K_1 \cos bt \tag{2.89}$$

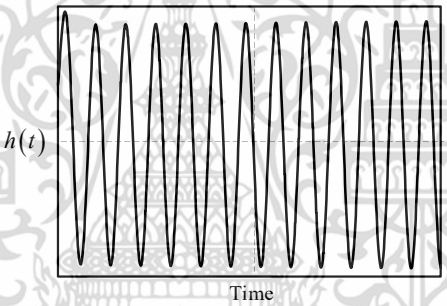
จากสมการ (2.89) ส่งผลให้โพลเปลี่ยนตำแหน่งมาอยู่ที่แกน $j\omega$ ดังรูปที่ 2.54

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.54 ตำแหน่งโพลและซีโร่ของฟังก์ชันที่เกิดการกำเนิดสัญญาณ

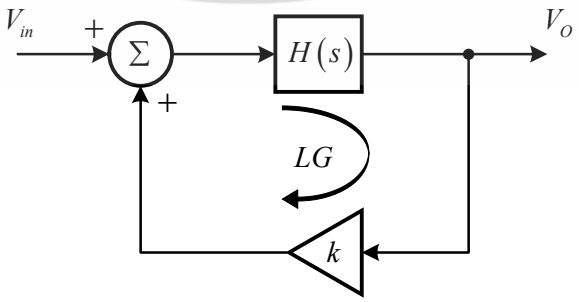
จากสมการที่ (2.89) เมื่อนำมาพล็อตกราฟในโดเมนเวลา (time domain) จะได้ ดังรูปที่ 2.55 ดังนั้นฟังก์ชันโครงข่ายสมการที่ (2.87) สามารถสร้างสัญญาณรูปไซน์ได้ โดยมีความถี่ $\omega = b$ เมื่อ $a = 0$



รูปที่ 2.55 กราฟฟังก์ชันการกำเนิดสัญญาณ

2.10.2 หลักการกำเนิดสัญญาณพื้นฐาน

หลักการกำเนิดสัญญาณของงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ได้นำทฤษฎีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือใช้ในการวิเคราะห์เพื่อประยุกต์ออกแบบและทำการสร้างวงจรกำเนิดสัญญาณ หลักการพื้นฐานของวงจรกำเนิดสัญญาณรูปไซน์อธิบายได้ดังรูปที่ 2.56



รูปที่ 2.56 ระบบป้อนกลับแบบบวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เขียนความสัมพันธ์จากระบบการป้อนกลับแบบบวกในรูปแบบฟังก์ชัน ถ่ายโอนได้ดังสมการที่ (2.90)

$$\frac{V_O}{V_{in}} = \frac{H(s)}{1-kH(s)} = \frac{H(s)}{1-LG} \tag{2.90}$$

จากการพิจารณาเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณของระบบป้อนกลับแบบบวกนั้น จะพิจารณาโดยระบบจะไม่มีสัญญาณอินพุตแต่มีสัญญาณเอาต์พุต กล่าวคือระบบสามารถให้กำเนิดสัญญาณได้ต้องมีอัตราขยายลูปเกน (Loop Gain: LG) มีค่าเป็นไปตามสมการที่ (2.91) คือ

$$LG = kH(s) = 1 \tag{2.91}$$

ตามเงื่อนไข Barkhausen วงจรกำเนิดสัญญาณจะให้กำเนิดสัญญาณรูปไซน์ได้ ต้องมีเงื่อนไขเป็นไปตามข้อกำหนดโดยมีค่าลูปเกนเท่ากับ 1 หรือ $kH(s)= LG = 1$ จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจัดรูปสมการใหม่ ได้ดังนี้

$$1-LG = 1-kH(s) = 0 = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{2.92}$$

2.10.3 หลักการกำเนิดสัญญาณโพลิโนเมียลอันดับสาม

กำหนดให้ $H(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามอันดับสาม โดยที่ $N(s)$ คือ โพลิโนเมียลตัวเศษของสมการ และ $D(s)$ คือโพลิโนเมียลตัวส่วนของสมการ สามารถเขียนสมการในรูปของฟังก์ชันเศษและส่วนได้ ดังนี้

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3} \tag{2.93}$$

จากกฎของ Barkhausen สมการโพลิโนเมียลอันดับสาม นำตัวเศษ N(s) มาเขียนสมการใหม่โดยกำหนดลูปเกนเท่ากับหนึ่ง จะได้เป็น

$$N(s) = 0 = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \tag{2.94}$$

แทนค่า $s = j\omega$ ลงในสมการ จะได้

$$0 = -j\omega^3 a_0 - a_1\omega^2 + j\omega a_2 + a_3 \tag{2.95}$$

ดังนั้น

$$0 = \left(a_3 - a_1\omega^2\right) + j\omega^3\left(a_2 - a_0\omega^2\right) \tag{2.96}$$

จากสมการที่ (2.20) เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์พจน์จำนวนจริง และ พจน์จินตภาพให้มีค่าเท่ากับศูนย์ จะสามารถเขียนสมการเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณ (Condition of Oscillation) ได้ ดังนี้

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0 \tag{2.97}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และสามารถเขียนสมการความถี่การกำเนิดสัญญาณ (Frequency 0f Oscillation) จากเงื่อนไขข้างต้น ได้ดังนี้

$$\omega^2 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{a_3}{a_1} \tag{2.98}$$

จากพื้นฐานหลักการกำเนิดสัญญาณโพลิโนเมียลอันดับสาม ด้วยระบบเคออสเป็นระบบกำเนิดสัญญาณที่ประกอบด้วยพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นและมีอนุพันธ์อันดับสาม (สำหรับระบบเคออสโดยพื้นฐาน) การศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการกำเนิดสัญญาณ เป็นสิ่งจำเป็นในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับระบบเคออสในรูปแบบต่างๆ เนื่องจากระบบเคออสถูกสร้างจากแบบจำลองหลากหลายรูปแบบ เงื่อนไขในการกำเนิดสัญญาณของแต่ละระบบมีจำนวนสัมประสิทธิ์ที่แตกต่างกัน ดังนั้นจำเป็นต้องมีพื้นฐานในเรื่องหลักการกำเนิดสัญญาณ โดยเฉพาะหลักการกำเนิดสัญญาณโพลิโนเมียลอันดับสาม

2.11 บทสรุป

จากทฤษฎีที่เกี่ยวข้องที่กล่าวมาในบทที่ 2 ถูกแบ่งออกเป็น 4 หมวดดังรูปที่ 2.1 เป็นทฤษฎีทั้งหมดที่ใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับการสร้างระบบเคออสของผู้เขียน โดยระบบเคออสพิเศษ (ซับซ้อนสูง) ที่ใช้เป็นหลักของวิทยานิพนธ์ คือ ระบบเคออสแบบหลายวงม้วน บนพื้นฐานระบบอันดับสาม ซึ่งในหมวดทฤษฎีสำหรับวิเคราะห์ระบบเคออสเชิงตัวเลขและกราฟฟิก จะเป็นพื้นฐานในการพิสูจน์พฤติกรรมเคออสและยืนยันค่าความซับซ้อนของระบบเคออสออกมาเป็นตัวเลขและเชิงปริมาณได้ ซึ่งทฤษฎีเหล่านี้จะถูกนำไปใช้วิเคราะห์เพื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของระบบเคออสรูปแบบหลายวงม้วนงานอื่นๆในอดีต ปัจจัยด้านต่างๆที่เป็นข้อสำคัญเพื่อเปรียบเทียบการออกแบบระบบเคออสจะถูกกล่าวไว้ในบทที่ 3 โดยอิงข้อมูลพื้นฐานทั้งหมดจากบทที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3.1 บทนำ

ปัจจุบันมีงานวิจัยที่ออกแบบและสร้างระบบเคออส ไม่ว่าจะด้วยการดัดแปลงระบบเดิมที่มีมาในอดีตหรือการสร้างระบบใหม่ขึ้นมา ซึ่งแนวทางในการนำเสนอระบบเคออสในปัจจุบันจำเป็นต้องมีหลักเกณฑ์ในการสร้างและบ่งชี้ถึงประโยชน์ในการนำระบบเคออสที่ออกแบบไปประยุกต์ใช้ รวมถึงทำการวิเคราะห์ระบบที่นำเสนออย่างละเอียด แนวทางหลักของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ในการออกแบบระบบเคออส คือ มุ่งเน้นไปที่การออกแบบระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงด้วยลักษณะสี่วงม้วน (ระบบเคออสโดยทั่วไปมีลักษณะเพียงหนึ่งหรือสองวงม้วน) มีการวิเคราะห์พฤติกรรมพลวัตอย่างละเอียดและครอบคลุม รวมถึงการนำไปสร้างเป็นวงจรเพื่อยืนยันการใช้งานจริงในทางวิศวกรรม ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่มีการสร้างพฤติกรรมเคออสด้วยลักษณะสี่วงม้วนในรูปแบบต่างๆ โดยจะมีการนำมาเปรียบเทียบด้วยปัจจัยสำคัญ 4 อย่าง คือ โครงสร้างของระบบเคออส ความหลากหลายในการศึกษาระบบเคออส ค่าความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออส และการนำไปออกแบบเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส โดยแต่ละปัจจัยมีรายละเอียดที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

3.1.1 โครงสร้างของระบบเคออส (Structure of chaotic system)

โครงสร้างหรือแบบจำลองที่ใช้ในการออกแบบระบบเคออสเป็นพื้นฐานสำคัญในการต่อยอดการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมเคออส แบบจำลองที่มีความซับซ้อนด้วยจำนวนตัวแปรสเตท จำนวนพารามิเตอร์ วิธีการออกแบบพจน์ความไม่เป็นเชิงเส้น รวมถึงลักษณะสมการอนุพันธ์ของแบบจำลองส่งผลต่อการตีความในการวิเคราะห์แบบจำลอง และข้อจำกัดด้านการออกแบบ โดยข้อดีของแบบจำลองที่มีโครงสร้างซับซ้อนต่ำ มีดังนี้

- ง่ายต่อการเข้าใจ ตีความ และวิเคราะห์ ช่วยให้วิเคราะห์ข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับพฤติกรรมพลวัตที่ซ่อนอยู่ ชนิดของตัวดึงดูด การวิเคราะห์ Bifurcation รวมถึงพฤติกรรมพลวัตอื่นๆบนระบบได้ดียิ่งขึ้น
- ความซับซ้อนในการประมวลผลด้วยโปรแกรมลดลง มีผลสำคัญอย่างยิ่งต่อการประยุกต์ใช้แบบเรียลไทม์ การจำลองผลบนระบบที่มีทรัพยากรจำกัด ซึ่งประสิทธิภาพในการคำนวณเป็นสิ่งสำคัญ
- แบบจำลองที่มีความซับซ้อนต่ำสามารถนำไปวิเคราะห์เพื่อออกแบบและทดลองในเชิงปฏิบัติได้ง่ายขึ้น ผลลัพธ์ในเชิงตัวเลขและการทดลองจริงสามารถเปรียบเทียบและตรวจสอบความ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถูกต้องได้ค่อนข้างตรงไปตรงมา ช่วยเพิ่มความแม่นยำในการวิจัยทางวิทยาศาสตร์และการประยุกต์ใช้ทางวิศวกรรม

- แบบจำลองที่มีความซับซ้อนต่ำเป็นเครื่องมือทางการศึกษาที่สำคัญสำหรับการทำความเข้าใจเกี่ยวกับพฤติกรรมเคออส พลวัตไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งความเรียบง่ายของแบบจำลองส่งผลระยะยาวต่อการทำความเข้าใจในแบบจำลองที่มีความซับซ้อนสูงขึ้น

อย่างไรก็ตามแบบจำลองที่มีโครงสร้างซับซ้อนต่ำ ไม่ได้หมายถึงการสร้างพฤติกรรมเคออสที่มีประสิทธิภาพต่ำ ความท้าทายอย่างหนึ่งคือการสร้างระบบเคออสโครงสร้างซับซ้อนต่ำแต่มีพฤติกรรมพลวัตที่มีความซับซ้อนสูง สิ่งนี้ขึ้นอยู่กับวิธีการออกแบบ โดยเฉพาะพจน์ความไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออสสามารถยืนยันด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่เป็นสากล ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2

3.1.2 ความหลากหลายในการศึกษาระบบเคออส (Diversity in the study of chaos systems)

การนำเสนอระบบเคออสรูปแบบใหม่จำเป็นต้องมีหลักเกณฑ์และความน่าเชื่อถือในการวิเคราะห์ระบบเคออสที่ถูกออกแบบขึ้นมา โดยหลักเกณฑ์ที่เป็นสากลถูกใช้อย่างแพร่หลายในการนำเสนอระบบเคออสระบบใหม่ ถูกตั้งขึ้นมา โดย **Julien Clinton Sprott** ซึ่งกล่าวว่า มาตรฐานที่เพียงพอในการยอมรับให้ตีพิมพ์งานวิจัยเกี่ยวกับระบบที่ถูกออกแบบขึ้นมาใหม่ จำเป็นต้องมีคุณสมบัติอย่างน้อยหนึ่งข้อ [79] จากหลักเกณฑ์ ดังต่อไปนี้

1.) ระบบที่ออกแบบควรสร้างแบบจำลองที่สามารถแก้ไขปัญหาในธรรมชาติ และทำการวิเคราะห์ถึงปัญหานั้นอย่างละเอียด
2.) ระบบควรแสดงพฤติกรรมบางอย่าง ที่ไม่เคยมีการนำเสนอมาก่อน
3.) ระบบควรมีความเรียบง่ายกว่าระบบอื่น เมื่อแสดงพฤติกรรมที่สามารถสังเกตได้

หากยกตัวอย่างระบบ Lorenz ที่ถูกคิดค้นขึ้นในอดีตเป็นแบบจำลองแรกในปี ค.ศ.1963 ที่มีคุณสมบัติทั้งสามข้อครบ โดยสามารถแก้ไขปัญหาบางอย่างในการพยากรอากาศ ด้วยการคำนวณจากคุณสมบัติความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้น และเป็นแบบจำลองที่เรียบง่ายที่สุด โดยที่ไม่มีการนำเสนอในลักษณะดังกล่าวมาก่อน ณ เวลานั้น เมื่อเวลาผ่านไประบบเคออสรูปแบบใหม่ถูกคิดขึ้นและพัฒนามากขึ้นเรื่อยๆเพื่อประยุกต์ใช้ในสาขาต่างๆ พฤติกรรมพลวัตที่เกิดขึ้นบนระบบเคออสมีความซับซ้อนและจำเป็นต้องตรวจสอบอย่างละเอียด เพื่อให้เห็นประโยชน์ในการนำไปประยุกต์ใช้ ระบบเคออสเพียงหนึ่งระบบสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างแพร่หลาย ขึ้นอยู่กับพฤติกรรมพลวัตแต่ละประเภทที่เกิดขึ้นบนระบบ เครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการตรวจสอบและวิเคราะห์จะถูกแบ่งหลักๆออกเป็น 4 กลุ่ม คือใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต ใช้สำหรับตรวจสอบพารามิเตอร์ ใช้สำหรับตรวจสอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเริ่มต้น และเครื่องมือลักษณะพิเศษ (Special features) ที่ใช้ในการแสดงกราฟฟิกเพื่อศึกษาผลลัพธ์เชิงลึกในแง่มุมต่างๆและเป็นการนำการศึกษาในสาขาอื่นมาประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์บนระบบเคออส จากที่ผู้เขียนพยายามรวบรวมเครื่องมือทั้งหมดเท่าที่เป็นไปได้ ที่ใช้เป็นสากลในการวิเคราะห์ระบบเคออส ถูกแสดงพร้อมแยกหมวดหมู่ในการวิเคราะห์ไว้ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 เครื่องมือแต่ละประเภทที่ใช้ในการวิเคราะห์และตรวจสอบพฤติกรรมบนระบบเคออส

เครื่องมือสากลที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบเคออส			
การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต	พารามิเตอร์ (Parameter)	เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition)	คุณสมบัติพิเศษ (Special feature)
- Dissipative of system - Conservative system - Lyapunov exponent - Kaplan-Yorke dimension - Stability analysis - Symmetry and Asymmetry	- Bifurcation diagram - Lyapunov Spectrum - Phase portraits - Feigenbaum - Lyapunov stability diagram	- Bifurcation diagram - Phase portraits - Basin of attraction - Multistability (Coexisting attractor)	- Poincare map - Offset boosting - Amplitude control - 0-1 test chart /Brownian motion

จากตารางที่ 3.1 จะเห็นว่ามีเครื่องมือหลายชนิดที่ใช้ในการวิเคราะห์ ซึ่งเครื่องมือแต่ละประเภทมีความเฉพาะเจาะจงในการวิเคราะห์พฤติกรรมต่างๆ การแสดงพฤติกรรมพลวัตที่หลากหลายบนระบบเคออสแสดงให้เห็นถึงการวิเคราะห์ระบบอย่างละเอียด และมุมมองในการนำเสนอที่ครอบคลุมเกี่ยวกับพฤติกรรมต่างๆที่เกิดขึ้นในระบบเคออส โดยการใช้เครื่องมือวิเคราะห์หลายประเภทเป็นความท้าทายอย่างหนึ่งในงานวิจัยสาขาเคออสและพลวัตไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นการดึงประสิทธิภาพของระบบเคออสภายในหนึ่งระบบออกมาเพื่อประยุกต์ใช้งานในด้านต่างๆ ให้เกิดประโยชน์ได้อย่างเต็มที่

3.1.3 ค่าความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออส (Complexity of chaotic behavior) [20, 80]

เพื่อความเข้าใจโดยง่ายของคำว่า ความซับซ้อนบนระบบเคออส จะต้องแบ่งให้ชัดเจนก่อนว่าความซับซ้อนของโครงสร้างแบบจำลอง และความซับซ้อนของพฤติกรรมในระบบ นั้นคนละอย่างกัน โดยความซับซ้อนของโครงสร้างแบบจำลองนั้นถูกกล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.1.1 เมื่อมีความซับซ้อนต่ำยิ่งมีข้อดีในแง่มุมการศึกษา แต่ความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออสนั้นส่วนทางกัน ไม่ว่าจะด้วยพฤติกรรมหรือลักษณะสัญญาณเคออสบนระบบ หากยิ่งมีความซับซ้อนสูง จะยิ่งส่งผลต่อจุดแข็งของรุบบเคออสในการนำไปประยุกต์ใช้ ซึ่งคุณสมบัติที่สำคัญของระบบเคออส คือ พฤติกรรมที่ไม่สามารถคาดเดาได้ความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์ ความซับซ้อนนี้จะส่งเสริมคุณสมบัติดังกล่าวของระบบเคออส โดยค่าความซับซ้อนของพฤติกรรมในระบบนี้ สามารถยืนยันได้ด้วยการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นสากลด้วยทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov ร่วมกับสูตรการคำนวณที่เป็นสากล คือ Lyapunov

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

dimension หรือ Kaplan-Yorke dimension (D_L หรือ D_{KY}) ผลลัพธ์เชิงตัวเลขนี้จะเป็นตัวบ่งชี้ถึงค่าพฤติกรรมที่ซับซ้อนของระบบเคออส โดยประโยชน์หลักของพฤติกรรมเคออสที่มีความซับซ้อนสูงในด้านต่างๆ [5, 51-54] มีดังนี้

- **ระบบการเข้ารหัส (Cryptography):** ระบบเคออสถูกนำมาใช้ในการเข้ารหัสเพื่อสร้างคีย์ที่ปลอดภัย การเข้ารหัสข้อมูล และการรักษาความลับของข้อมูล การพึ่งพาเงื่อนไขเริ่มต้นและพลวัตที่ซับซ้อนทำให้ระบบเคออสเหมาะสำหรับการสร้างอัลกอริธึมการเข้ารหัสที่มีความปลอดภัย และยากต่อการถูกโจมตีจากภายนอก โดยระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงที่บ่งชี้ด้วยค่า D_{KY} ยิ่งเพิ่มความปลอดภัยสูงในการประยุกต์ใช้สำหรับระบบการเข้ารหัส
- **การสร้างตัวเลขสุ่ม (Random number generation) :** ระบบเคออสถูกใช้ในการสร้างลำดับหรือตัวเลขสุ่มเพื่อวัตถุประสงค์ในการเข้ารหัส การจำลองแบบมอนติคาร์โล และการประยุกต์ใช้อื่นๆ ที่ต้องการการสุ่ม พฤติกรรมสุ่มหลอกของระบบเคออสทำให้ไม่สามารถคาดเดาได้ในขณะที่ถูกกำหนดไว้ ระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงยิ่งเพิ่มประสิทธิภาพในการสุ่มตัวเลขที่ไม่สามารถเคาเดาได้

จากตัวอย่างข้างต้นเป็นเพียงส่วนหนึ่งของประโยชน์ในการนำระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงมาประยุกต์ใช้ จะเห็นว่าระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงสามารถเพิ่มประสิทธิภาพในด้านต่างๆ โดยค่าความซับซ้อนดังกล่าวจะต้องถูกวิเคราะห์และยืนยันด้วยค่าเป็นเชิงปริมาณที่น่าเชื่อถือได้ด้วยค่า D_{KY}

3.1.4 การสร้างวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส (Designing of chaotic oscillator)

การนำระบบเคออสที่ถูกออกแบบในเชิงตัวเลขมายืนยันในการสร้างจริงด้วยวงจร เป็นประโยชน์สำคัญในเชิงปฏิบัติทางวิศวกรรม ซึ่งการจะนำระบบเคออสที่ออกแบบไปประยุกต์ใช้จริง ทั้งในด้านความปลอดภัยด้านการสื่อสารในโทรคมนาคม การประมวลผลสัญญาณ หรือระบบควบคุม จำเป็นต้องนำมาสร้างเป็นวงจรเพื่อพิสูจน์ความเป็นไปได้ทางทฤษฎี โดยอุปกรณ์หลักที่ใช้ในการสร้างเพื่อออกแบบเป็นวงจรมีส่วนสำคัญ ทั้งในด้านความสามารถในการปรับค่า ช่วงการทำงานของวงจร รวมถึงจำนวนอุปกรณ์ที่ใช้ภายในวงจร เพื่อให้วงจรมีขนาดที่เหมาะสมในการนำมาออกแบบจริง โครงสร้างที่เรียบง่ายของวงจรช่วยให้ง่ายต่อการจำลองผลเพื่อวิเคราะห์ในเชิงเปรียบเทียบ สำหรับผลทดลองจริงกับผลทางทฤษฎี ดังนั้นโครงสร้างในการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องจะถูกนำมาเปรียบเทียบข้อดีข้อเสียในวิทยานิพนธ์บทนี้ด้วย

จากปัจจัยสำคัญในการวิเคราะห์ระบบเคออสทั้ง 4 หัวข้อที่กล่าวมา จะถูกนำมาเปรียบเทียบจุดเด่นของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในบทนี้ รวมถึงงานวิจัยของวิทยานิพนธ์ที่จะกล่าวในบทถัดไป งานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

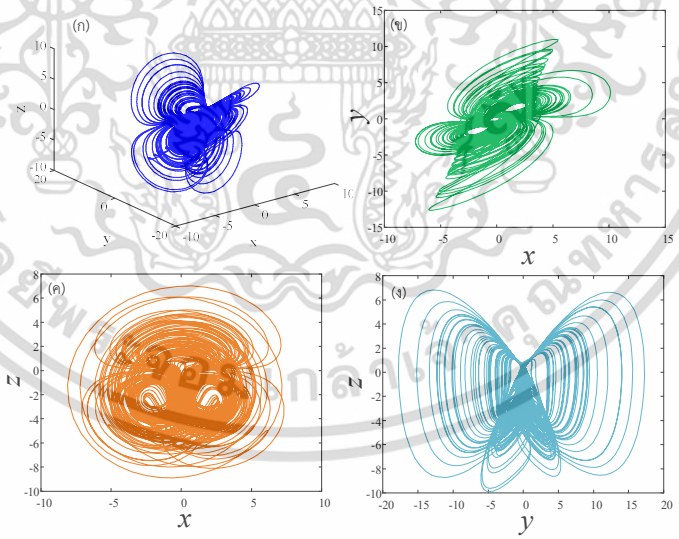
ที่ออกแบบระบบเคออสหลายวงม้วนด้วยลักษณะสี่วงม้วนมีการออกแบบและวิเคราะห์ในรูปแบบต่างๆ ดังต่อไปนี้

3.2 ระบบเคออสตัวดึงดูดสี่วงม้วนแบบใหม่ โดยมีสองความเสถียรภาพ [81]

ในปี ค.ศ. 2015 มีการสร้างแบบจำลองเคออสที่สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสด้วยลักษณะสี่วงม้วนถูกนำเสนอโดย Chunbiao Li และคณะ โดยแบบจำลองถูกออกแบบด้วยระบบอนุพันธ์อันดับสาม พร้อมด้วยพจน์ความไม่เป็นเชิงเส้นกำลังสอง (Quadratic nonlinear term) จำนวนสี่พจน์ ลักษณะสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สามสมการ ของระบบที่นำเสนอแสดงดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + yz, \\ \dot{y} = -xz + yz, \\ \dot{z} = -z - mxy + b; \end{cases} \tag{3.1}$$

ที่ a b m คือพารามิเตอร์บวกของระบบ และพจน์ yz xz ที่มิติ $\dot{x}$ พจน์ yz ที่มิติ $\dot{y}$ และพจน์ mxy ที่มิติ $\dot{z}$ คือพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นกำลังสองจำนวนสี่พจน์ ระบบในสมการที่ (3.1) สามารถสร้างลักษณะเคออสได้ด้วย ตัวดึงดูดสี่วงม้วน โดยกำหนด a=b=m=1 และเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(1, -1, 1) ซึ่งลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนที่งานนี้นำเสนอมีลักษณะคล้ายรูปผีเสื้อ ซึ่งเป็นลักษณะเด่นของงานนี้ แสดงผลลัพธ์บน Phase portraits บนระนาบ 3 มิติ และ 2 มิติ ดังรูปที่ 3.1

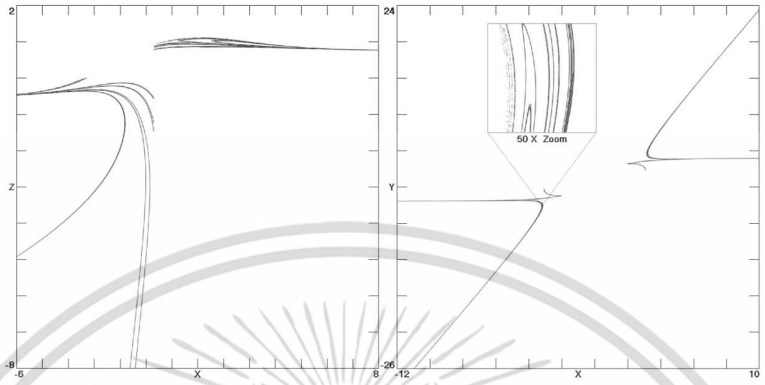


รูปที่ 3.1 ลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน (Four-scroll attractor) (ก) 3 มิติ (ข) ระนาบ x-y (ค) ระนาบ x-z (ง) ระนาบ y-z

ผลลัพธ์เพิ่มเติมของระบบที่นำเสนอ ถูกแสดงด้วยลักษณะแผนภาพ Poincaré ดังรูปที่ 3.2 โดยรูปที่ 3.2 (ก) แสดงบนระนาบ x-z กำหนด y=-0.7 และรูปที่ 3.2 (ข) แสดงบนระนาบ x-y

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนด z=-3 ซึ่งรูปที่ 3.2 (ข) แสดงให้เห็นถึงวิถีที่ถูกพล็อตบนแผนภาพ Poincaré ถูกแยกออกเป็นสี่กิ่งก้าน (Four branches) บ่งชี้ว่าระบบที่นำเสนอมีลักษณะตัวดึงดูดที่มีลักษณะสี่วงม้วน



(ก) (ข)

รูปที่ 3.2 แผนภาพ Poincaré ที่ระนาบ x-z และ x-y ตามลำดับ โดยที่ (ก) y=-0.7 (ข) z=-3

3.2.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต

ในงานนี้มีการคำนวณและวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานของระบบที่นำเสนอโดยมีการวิเคราะห์จุดสมดุลจากการกำหนดสมการที่ (3.1) เท่ากับ 0 ทำให้ได้จุดสมดุล (Equilibrium points: E) ทั้งหมดของระบบดังนี้

$$\begin{aligned}
E_1 &= (0,0,b),\\
E_2 &= \left(-\frac{\sqrt{a+b+1}}{\sqrt{m}},-\frac{\sqrt{a+b+1}}{\sqrt{m}},-(a+1)\right),\\
E_3 &= \left(-\frac{\sqrt{a+b+1}}{\sqrt{m}},\frac{\sqrt{a+b+1}}{\sqrt{m}},-(a+1)\right),\\
E_4 &= \left(-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ma}}i,-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{m}}i,0\right),\\
E_5 &= \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ma}}i,-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{m}}i,0\right);
\end{aligned} \tag{3.2}$$

จากสมการที่ (3.2) จะเห็นว่ามีจุดสมดุลของระบบทั้งหมด 5 จุดสมดุล โดยพารามิเตอร์ที่นำเสนอลักษณะสี่วงม้วนในงานนี้กำหนด a=b=m=1 จากจุดสมดุลที่ได้ประกอบไปด้วยจุดสมดุลค่าจริง 3 จุด ($E_{1\text{-}3}$) และค่าจินตภาพ 2 จุด ($E_{4\text{-}5}$) สามารถหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) จากจุดสมดุลทั้ง 5 ได้ดังนี้

- จุด E_1(0, 0, 1) มีค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 1.4142i.$
- จุด $E_{2,3}$ ($\mp\sqrt{3},\mp\sqrt{3},-2$) มีค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda_1 = -2.4082, \lambda_{2,3} = 0.2041 \pm 2.2229i.$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- จุด $E_{4,5}(\mp i, \pm i, 0)$ มีค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda_1 = 1.5874, \lambda_{2,3} = -0.7937 \pm 1.3747i.$

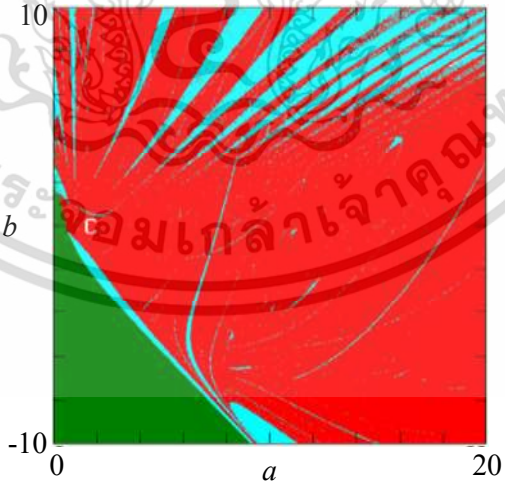
จากค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลทั้ง 5 จุด บ่งชี้ว่า ค่าลักษณะเฉพาะที่จุดสมดุลค่าจริง $E_{1\text{-}3}$ มีค่าจริงเป็นลบหนึ่งค่า และคอนจูเกทเชิงซ้อนหนึ่งคู่พร้อมค่าจริงบวก สิ่งนี้ระบุว่าจุดสมดุล $E_{1\text{-}3}$ คือ Saddle-focus และระบบที่นำเสนอใน (3.1) ณ จุด $E_{1\text{-}3}$ ไม่เสถียร (Unstable) ส่วนค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลจินตภาพ $E_{4,5}$ มีค่าจริงเป็นบวกหนึ่งค่า และคอนจูเกทเชิงซ้อนหนึ่งคู่พร้อมค่าจริงลบ ระบุว่าจุดสมดุลจินตภาพที่ $E_{4,5}$ คือ Saddle-point

3.2.2 ลักษณะความสมมาตร (Symmetric characteristic)

เมื่อสังเกตจากจุดสมดุลที่คำนวณในสมการที่ (3.2) จะสังเกตเห็นว่าค่าคงที่พารามิเตอร์จะถูกเปลี่ยนแปลงตามแกน z ดังนั้นระบบจะมีทั้งบวกและลบขึ้นอยู่กับ x และ y เงื่อนไขความสมมาตรของระบบจะได้ $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ ดังนั้นงานนี้ถูกบ่งชี้ว่ามีพฤติกรรมความสมมาตรอยู่ในระบบ ซึ่งสิ่งที่งานนี้ค้นพบอีกอย่างคือ ตัวแปรที่สามารถปรับขนาด (Amplitude) ได้ถูกซ่อนอยู่ในมิติของ $\dot{z}$ ซึ่ง คือ พารามิเตอร์ m โดยพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถควบคุมขนาด (Amplitude control) ของสัญญาณได้โดยไม่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตระบบ

3.2.3 การวิเคราะห์พลวัตที่หลากหลายของระบบ

ในงานวิจัยนี้มีการวิเคราะห์การเกิดพฤติกรรมพลวัตรูปแบบต่างๆที่เกิดขึ้นบนระบบโดยใช้การจำลอง Lyapunov spectrum ของพารามิเตอร์ a กับ b (m=1) แสดงบนพื้นที่เฟสในลักษณะ Basin of attraction ดังรูปที่ 3.3 โดยการพล็อตในรูปนี้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น x_0, y_0, z_0 จะถูกเลือกแบบสุ่มด้วยการแจกแจงแบบ Gaussians ของค่าเฉลี่ยศูนย์



รูปที่ 3.3 ขอบเขตของพฤติกรรมพลวัติต่างๆ สำหรับพารามิเตอร์ a และ b โดยที่ m=1 ในสำหรับพื้นที่สีแดงคือ พฤติกรรมเคออส พื้นที่สีน้ำเงินคือ พฤติกรรมเป็นคาบ (Periodic หรือ ลิ้นของ Arnold) พื้นที่สีเขียวคือ จุดคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

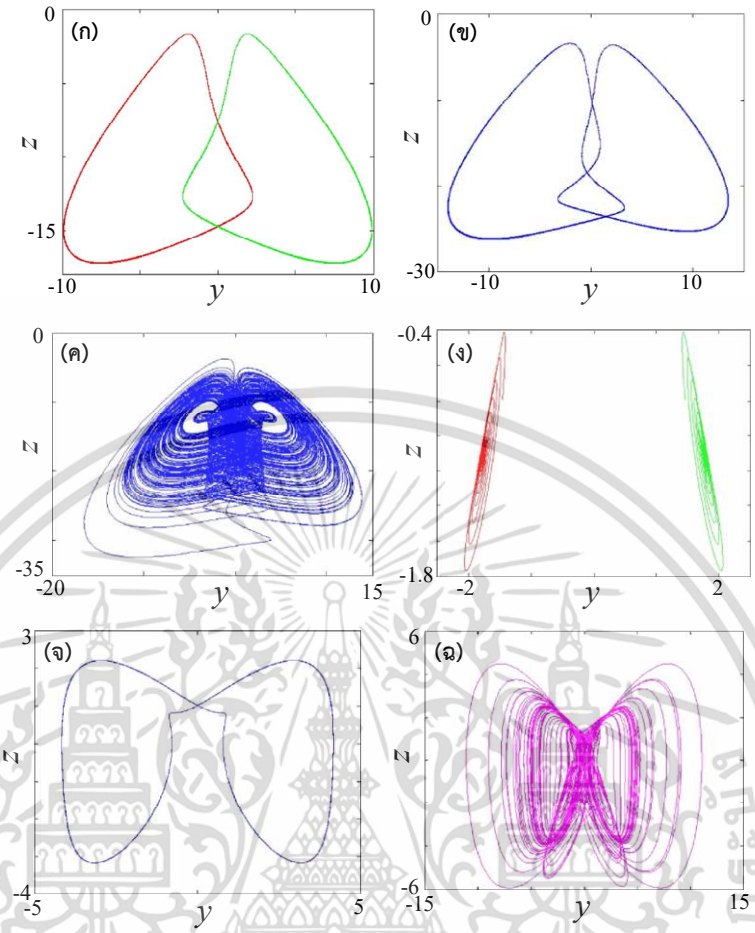
จากลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในรูปที่ 3.3 พื้นที่สีฟ้าที่สลับกับสีแดงมุมบนขวาเป็นรูปแบบการเปลี่ยนแปลงจากพารามิเตอร์สองตัวที่มีพฤติกรรมสองอย่างอยู่ร่วมกันคือ พฤติกรรมเคออสและพฤติกรรมเป็นคาบ (Periodicity) การเปลี่ยนแปลงในพื้นที่ดังกล่าวเรียกว่า ลิ้นของ Arnold (Arnold tongues) เนื่องจากมีลักษณะคล้ายกับลิ้น ซึ่งถูกคิดค้นโดย Vladimir Arnold โดยพฤติกรรมพลวัตต่างๆที่น่าสนใจบนระบบ ถูกแสดงหลักๆดังนี้

ส่วนที่ 1 จากรูป 3.3 พื้นที่พิเศษที่เกิดพฤติกรรมพลวัตที่น่าสนใจ คือ พื้นที่สีเขียวลักษณะสามเหลี่ยมล่างซ้ายของรูป และ พื้นที่สีฟ้า (น้ำเงิน) ด้านบนขวาของรูป คือ ลิ้นของ Arnold ซึ่งพื้นที่ทั้งสองเป็นพื้นที่ของพารามิเตอร์ *a* กับ *b* ที่เกิดลักษณะตัวดึงดูดและพฤติกรรมเป็นคาบตามลำดับ ในพื้นที่ที่มีพฤติกรรมเป็นคาบ เกิดลักษณะวงรอบจำกัด (Limit cycle) ที่แตกต่างกันจากการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ด้วยลักษณะคู่สมมาตรซ้าย-ขวาวงรอบจำกัดและสมมาตรในวงรอบจำกัดเดียวกัน ถูกแสดงดังรูปที่ 4 (ก) - (ข)

ส่วนที่ 2 พื้นที่ที่น่าสนใจอีกส่วน คือ ช่องว่างสีฟ้าระหว่างสีเขียวและสีแดง ด้านล่างซ้าย ส่วนนี้แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงจากจุดคงที่ ไปสู่ พฤติกรรมเป็นคาบ ไปสู่ พฤติกรรมเคออส ซึ่งสื่อถึงจุดแยกออกจากกันบน The bifurcation

ส่วนที่ 3 ในงานนี้มีพฤติกรรมที่เรียกว่า สองเสถียรภาพ (bistability) เกิดขึ้น โดยแสดงให้เห็นจากรูปที่ 3.4 โดยรูปที่ 3.4 (ก) – (ค) คือเส้นทางสู่เคออสแรก (first route to chaos) ที่แสดงการเปลี่ยนแปลงจากลักษณะวงรอบจำกัดไปจนถึงดึงดูดสองวงม้วน และรูปที่ 3.4 (ง) – (ฉ) คือเส้นทางสู่เคออสสอง (second route to chaos) แสดงจุดคงที่ไปจนถึงดึงดูดสี่วงม้วน โดยเส้นทางสู่เคออสแรกเกิดจากการคงที่พารามิเตอร์ b=8 และเพิ่มพารามิเตอร์ a ที่ a=4.5 ได้พฤติกรรมวงรอบจำกัดที่สมมาตรกันหนึ่งคู่ จากนั้น a=8 ได้พฤติกรรมคู่วงรอบจำกัด โดยสุดท้ายตัดพารามิเตอร์ b=0 และกำหนด a=10 ทำให้ได้ลักษณะตัวดึงดูดสองวงม้วน ส่วนเส้นทางสู่เคออสสองเกิดจากการคงที่พารามิเตอร์ b=2 และเพิ่มพารามิเตอร์ a สูงขึ้น ที่ a=0.11 ได้คู่สมมาตรจุดคงที่ a=0.12 ได้คู่วงรอบจำกัด และสุดท้ายที่ a=4.5 พฤติกรรมเข้าสู่ตัวดึงดูดสี่วงม้วน

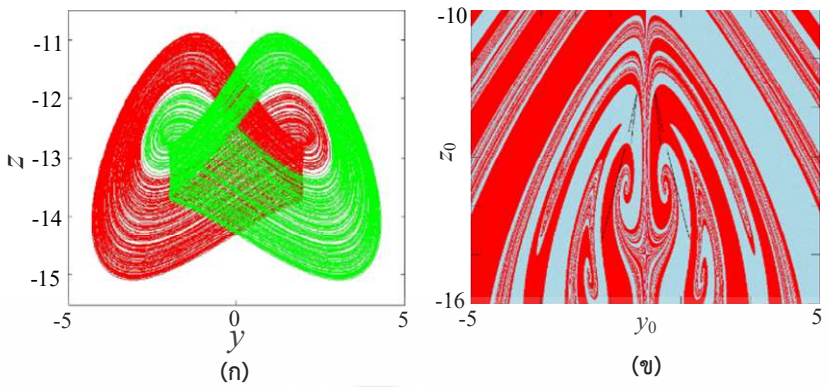
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4 แสดง phase portraits บนระนาบ $y - z$ โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับความสมมาตรที่ $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 1, \mp 1, 1)$ สำหรับสีแดงและสีเขียว ตามลำดับ (ก) คู่สมมาตรวงรอบจำกัด a=4.5, b=8 (ข) คู่วงรอบจำกัด a=8, b=8 (ค) ตัวดึงดูดสองวงม้วนคล้ายปีกผีเสื้อ a=10, b=0 (ง) คู่สมมาตรจุดคงที่ a=0.11, b=2 (จ) คู่วงรอบจำกัด a=0.12, b=2 (ฉ) ตัวดึงดูดสี่วงม้วน a=0.45, b=2

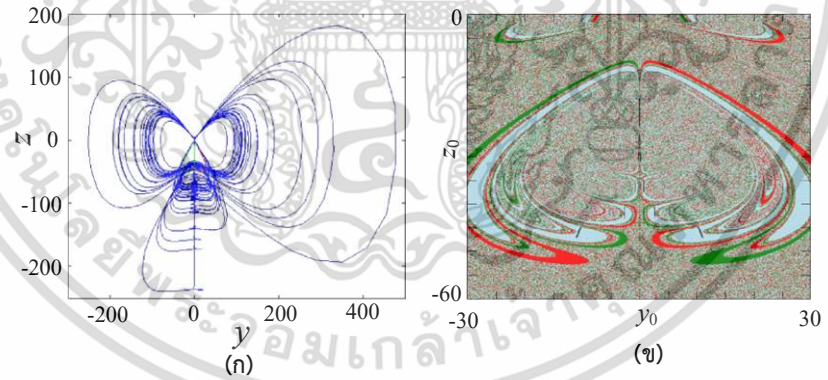
<u>ส่วนที่ 4</u> ดังที่กล่าวไปข้างต้น ระบบที่นำเสนอนี้สามารถแสดงพฤติกรรมสมมาตร คู่สมมาตรที่มีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วนจึงถูกแสดงดังรูปที่ 3.5 โดยกำหนด a=11 และ b=-9 คู่สมมาตรเกิดจากเงื่อนไขเริ่มต้นต่างกันที่ $y_0 = \pm 1$ ผล Phase portraits สีแดงและสีเขียวในรูปที่ 3.5 (ก) ถูกแสดงให้สอดคล้องกับพื้นที่สีแดงและสีเทาบน The basin of attraction ในรูปที่ 3.5 (ข)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.5 คู่สมมาตรที่มีอยู่ร่วมกัน (Coexisting symmetric pair) ของตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน เมื่อ a=11, b=-9 (ก) Phase portraits บนระนาบ y-z โดยสีแดงและสีเขียวสอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0) = (0, \pm 1, 0)$ ตามลำดับ (ข) The basin of attraction ที่ x_0=0

<u>ส่วนที่ 5</u> การมีอยู่ร่วมกันของสามพฤติกรรมพลวัตจากการกำหนด a=16.5, b=10 ถูกแสดงดังรูปที่ 3.6 (ก) โดยหนึ่งคือพฤติกรรมตัวดึงดูดสี่วงม้วน (สีน้ำเงิน) ซึ่งถูกแสดงร่วมกับคู่สมมาตรวงรอบจำกัด (สีแดงและสีเขียว) โดยพื้นที่ใน The basin of attraction พื้นที่สีแดงและเขียวถูกแสดงสอดคล้องกับคู่สมมาตรวงรอบจำกัด พื้นที่สีดำถูกแสดงสอดคล้องกับตัวดึงดูดสี่วงม้วนสีน้ำเงิน และพื้นที่สีฟ้าอ่อน คือ พื้นที่ไร้ขอบเขต (Unbounded)



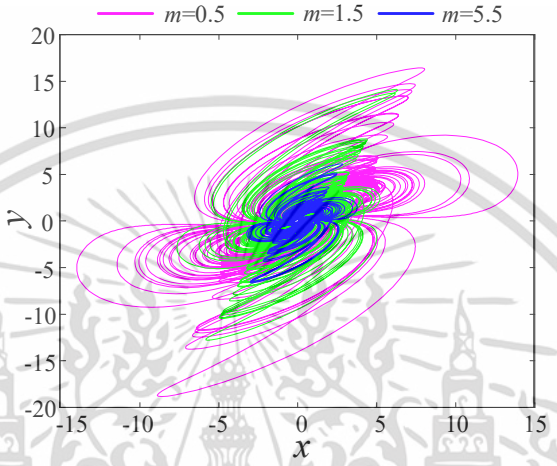
รูปที่ 3.6 การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดสี่วงม้วนและคู่สมมาตรวงรอบจำกัด เมื่อ a=16.5, b=10 (ก) Phase portraits บนระนาบ y-z โดยสีน้ำเงินสอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ สีแดงและสีเขียวสอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 1, \pm 2.5, 1)$ ตามลำดับ (ข) The basin of attraction ที่ x_0=0

3.2.4 การควบคุมขนาดของระบบ (Amplitude control of system)

ดังที่กล่าวไปในหัวข้อ 3.2.2 งานนี้ค้นพบพารามิเตอร์ที่สามารถปรับขนาดสัญญาณของระบบที่นำเสนอ คือ พารามิเตอร์ m ด้วยตำแหน่งของพารามิเตอร์ mxy ในมิติ z และในการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำนวณจุดสมดุลที่ตำแหน่งของพิกัดตัวแปรสเตท z ไม่มีผลกระทบใดๆจากพารามิเตอร์ m สังเกตได้ในสมการที่ (3.2) สิ่งนี้บ่งชี้ว่าพารามิเตอร์ m สามารถควบคุมขนาดของ x และ y ได้โดยไม่ส่งผลกระทบต่อทั้งระบบ โดยแสดง Phase portraits การปรับขนาดของพารามิเตอร์ m ที่ m=0.5 สีแดง m=1.5 สีน้ำเงิน และ m=5.5 สีเขียว ดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 Phase portraits บนระนาบ x-y โดยปรับขนาดด้วยพารามิเตอร์ m

3.2.5 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของ Chunbiao Li

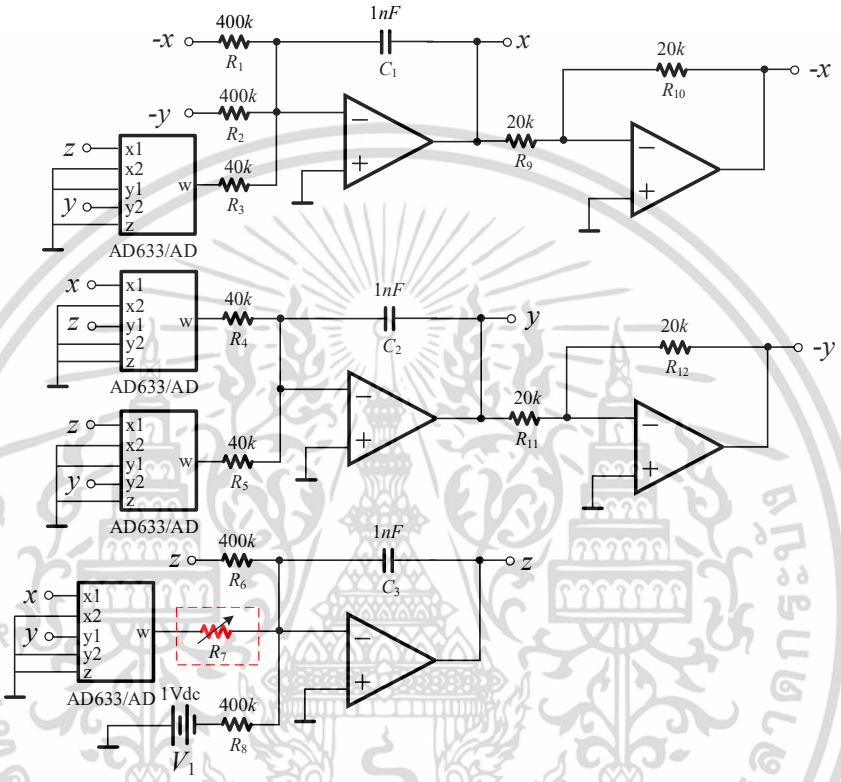
งานนี้มีการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสเพื่อยืนยันหลักการสร้างทางทฤษฎี โดยวงจรที่ออกแบบจะวิเคราะห์และออกแบบตามระบบในสมการที่ (3.1) โดยสมการของวงจรแสดงดังสมการที่ (3.3) และแสดงวงจรที่ออกแบบดังรูปที่ 3.8

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{R_1C_1}x + \dfrac{1}{R_2C_1}y + \dfrac{1}{R_3C_1}yz, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{R_4C_1}xz + \dfrac{1}{R_5C_2}yz, \\ \dot{z} = -\dfrac{1}{R_6C_3}z - \dfrac{1}{R_7C_3}xy + \dfrac{V_3}{R_8C_3}; \end{cases} \tag{3.3}$$

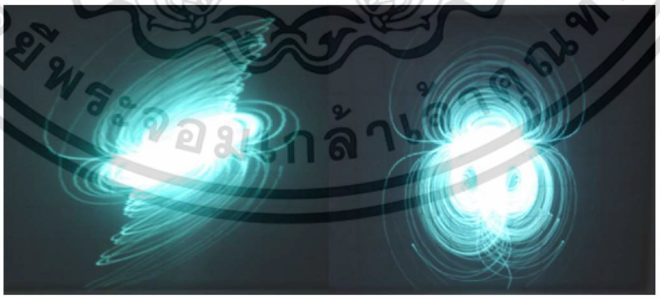
จากวงจรที่ออกแบบมีการใช้ OPAMP (Operational Amplifier) เบอร์ TL081/T1 จำนวน 5 ตัว และตัวคูณแอนาล็อค (Analog Multiplier) เบอร์ AD633/AD จำนวน 4 ตัว วงจรจ่ายแรงดันไฟตรงที่ ±15V จากระบบในสมการที่ (3.1) มีการกำหนดพารามิเตอร์ a=b=m=1 โดยในวงจรจะถูกกำหนด R_1=R_2=R_6=R_8= $400k\Omega$ จากนั้น R_3=R_4=R_5=R_7= $40k\Omega$ และ R_9=R_{10}=R_{11}=R_{12}= $20k\Omega$ โดย V_1=1Vdc ที่ความถี่ของของวงจรตัวเก็บประจุถูกกำหนด C_1=C_2=C_3=1nF จากสมการที่ (3.1) และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(3.3) พารามิเตอร์สำหรับควบคุมขนาดของระบบที่ พารามิเตอร์ m คือ R_7 ของวงจร ซึ่งวงจรสามารถปรับตัวต้าน R_7 ได้โดยไม่กระทบกับการเปลี่ยนแปลงของลักษณะสัญญาณเคออสของวงจร วงจรมีการแสดงผลบนออสซิลโลสโคปเพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ในทางปฏิบัติกับเชิงตัวเลข โดยแสดงผลลัพธ์บนระนาบ x-y และ x-z ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.8 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสลักษณะสี่วงม้วน และพารามิเตอร์ปรับขนาด (Amplitude: R_7)



(ก) (ข)

รูปที่ 3.9 ลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากระบบเคออสตัวดึงดูดสี่วงม้วนของ Chunbiao Li ที่นำเสนอมีภาพรวมองค์ประกอบต่างๆ ในการวิเคราะห์ของระบบดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนคล้ายปีกผีเสื้อของ Chunbiao Li ที่นำเสนอ

<table>
<tr><th colspan="8">องค์ประกอบต่างๆของระบบเคออสสี่วงม้วน Chunbiao Li</th></tr>
<tr><th colspan="2">โครงสร้างของระบบ</th><th colspan="2">การวิเคราะห์พลวัตของระบบ</th><th colspan="2">ค่าความซับซ้อนพฤติกรรมเคออส</th><th colspan="2">องค์ประกอบวงจร</th></tr>
<tr><td>พจน์ของระบบ</td><td>8 พจน์</td><td rowspan="4" colspan="2">1. วิเคราะห์ความสมมาตร (Symmetry)
2. การควบคุมขนาดของระบบ (Amplitude control)
3. แผนภาพ Poincare
4. ความหลายเสถียรภาพ
5. วิเคราะห์ความเสถียรภาพ
6. Phase portraits
7. Basin of attraction
8. เลขชี้กำลัง Lyapunov
รวม 8 เครื่องมือ</td><td rowspan="2">LE^*</td><td rowspan="2">LE_1=0.409,
LE_2=0,
LE_3=-1.773.</td><td>OPAMP</td><td>5 ตัว</td></tr>
<tr><td>พารามิเตอร์</td><td>3 ตัว</td><td>ตัวคูณแอนาล็อค</td><td>4 ตัว</td></tr>
<tr><td>พจน์ NLT*</td><td>4 พจน์</td><td rowspan="2">D_{KY}</td><td rowspan="2">2.231</td><td>R</td><td>12 ตัว</td></tr>
<tr><td>ชนิด NLT*</td><td>กำลังสอง</td><td>C</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td>ES^*</td><td>✓</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="2">รวม 24 ตัว</td></tr>
</table>

NLT* คือ พจน์ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Term), LE^* คือ เลขชี้กำลัง Lyapunov (Lyapunov Exponent), ES^* คือ ผลการทดลองจริง (Experimental Result)

3.3 ระบบเคออสแบบใหม่ด้วยลักษณะสี่วงม้วนรูปดาว [82]

ระบบเคออสอันดับสามที่สามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนรูปแบบใหม่ที่มีลักษณะคล้ายรูปดาว (Stellate) ถูกคิดค้นในปี ค.ศ. 2011 โดย I. Pehlivan สมการของระบบที่นำเสนอถูกเขียนอยู่ในรูปมิติ (Dimension) ด้วยสมการอันดับหนึ่ง สามสมการดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y + yz, \\ \dot{y} = x - ay + bxz, \\ \dot{z} = cz - bxy; \end{cases} \tag{3.4}$$

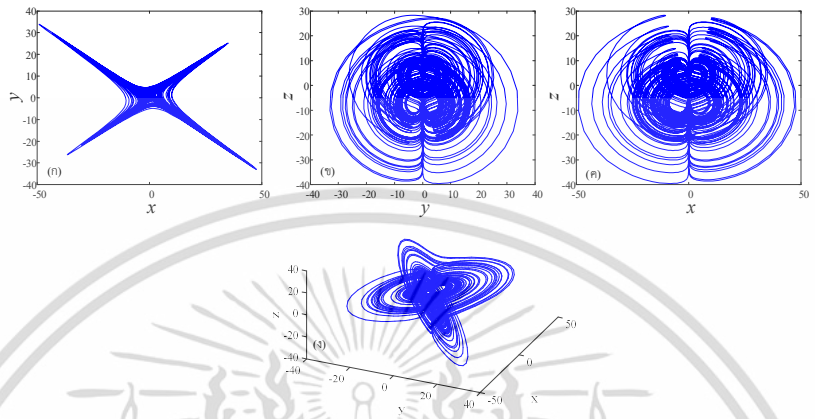
ระบบในสมการที่ (3.4) มีพารามิเตอร์ $a, b, c \in R$ โดยถูกกำหนดสำหรับการสร้างลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน คือ a=4, b=0.5 และ c=0.6 ระบบที่นำเสนอมีการพิสูจน์การกระจายตัวของระบบ (Dissipative of the system) เพื่อยืนยันว่าระบบสามารถสร้างตัวดึงดูดได้ โดยการลู่ออกของสนามเวกเตอร์ (The divergence of vector fields) ได้รับการพิสูจน์ด้วยสมการ

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - a + c, \\ \Delta V &= -2a + c < 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

จากสมการที่ (3.5) การลู่ออกเป็นลบ บ่งชี้ว่าระบบมีการกระจายตัว ซึ่งจะสังเกตว่าระบบจะมีการกระจายตัวเสมอเมื่อ $c < 2a$ โดยลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนของระบบใน (3.4) บน phase portraits ดังรูปที่ 3.10 โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(0.6, 0, 0) และพารามิเตอร์ (a, b,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

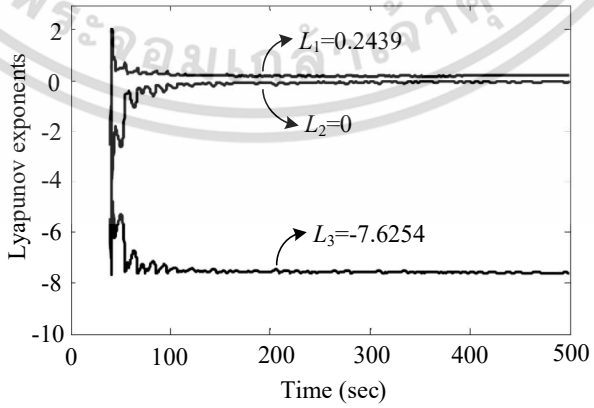
c)=(4, 0.5, 0.6) ลักษณะของตัวดึงดูดที่แสดง โดยเฉพาะในรูปที่ 3.10 (ก) และ (ง) มีลักษณะเป็นสี่วงม้วนคล้ายดาว ซึ่งไม่เคยมีการนำเสนอตัวดึงดูดสี่วงม้วนลักษณะดังกล่าวมาก่อน



รูปที่ 3.10 Phase portraits ของตัวดึดดูดสี่วงม้วนรูปดาว (Stellate) แบบ 2 มิติและ 3 มิติ (ก) ระนาบ x - y (ข) ระนาบ y – z (ค) ระนาบ x – z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z

3.3.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต

ระบบเคออสตัวดึงดูดสี่วงม้วนรูปดาวที่นำเสนอมีการวิเคราะห์คุณสมบัติทางพลวัตพื้นฐานของระบบ โดยมีการพิสูจน์พฤติกรรมเคออสด้วยทฤษฎีที่เป็นสากลด้วยเลขชี้กำลัง Lyapunov โดยกำหนดค่าต่างๆบนอัลกอริทึมจากค่าในรูป phase portraits รูปที่ 3.10 ค่าเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งสามค่าแสดงดังรูปที่ 3.11 ซึ่งบ่งชี้ว่าระบบมีพฤติกรรมเป็นเคออสด้วยค่า L_1 เป็นบวก L_2 เข้าใกล้ศูนย์ และ L_3 ติดลบ โดยผลรวมของทั้งสามค่านั้นเป็นลบซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีพลวัต โดยเมื่อนำค่าเลขชี้กำลังทั้งสามมาคำนวณความซับซ้อนด้วยสูตร D_{KY} จะได้ 2.032



รูปที่ 3.11 เลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนรูปดาว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นมีการวิเคราะห์จุดสมดุลของระบบในสมการที่ (3.4) โดยระบบที่นำเสนอมีจุดสมดุลทั้งหมด 5 จุด ดังนี้

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), \\ E_{1,2} &= (\pm 3.648, \mp 2.361, -7.179), \\ E_{3,4} &= (\pm 2.548, \pm 1.968, 4.179); \end{aligned} \tag{3.6}$$

โดยค่าลักษณะเฉพาะ (λ) ที่สามารถบ่งชี้ความเสถียรภาพของระบบ จะถูกคำนวณจากสมการคุณลักษณะ (Characteristic equation) โดยสมการคุณลักษณะจากจุดสมดุลทั้ง 5 จุด จะแสดงดังต่อไปนี้

ที่จุดสมดุลทั้ง 5 จุด นำไปคำนวณในเมทริกซ์จาโคเบียน จะได้สมการคุณลักษณะของจุดสมดุล E_0-E_4 คือ

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J(E_1)) &= \lambda^3 + 7.4\lambda^2 + 10.2\lambda - 9 = 0, \\ \det(\lambda I - J(E_{2,3})) &= \lambda^3 + 7.4\lambda^2 + 1.312\lambda + 48.928 = 0, \\ \det(\lambda I - J(E_{4,5})) &= \lambda^3 + 7.4\lambda^2 - 1.244\lambda + 28.48 = 0; \end{aligned} \tag{3.7}$$

ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะจากจุดสมดุลทั้ง 5 จุดสามารถสรุปได้เป็น

ณ จุด E_0 ค่าลักษณะเฉพาะทั้งสามค่า คือ

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 0.6$$

ณ จุด $E_{1,2}$ ค่าลักษณะเฉพาะทั้งสามค่า คือ

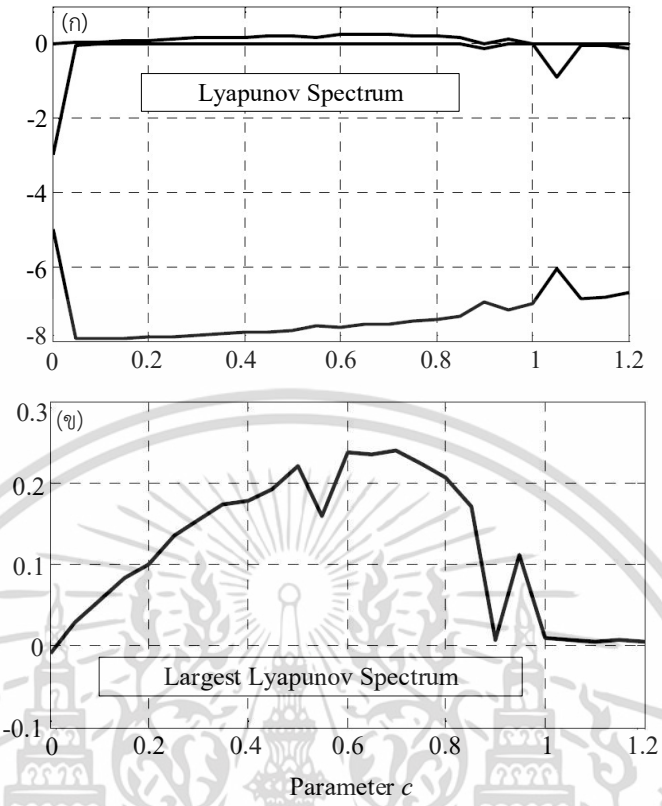
$$\lambda_1 = -8, \quad \lambda_{2,3} = 0.3 \pm 2.455i$$

ณ จุด $E_{3,4}$ ค่าลักษณะเฉพาะทั้งสามค่า คือ

$$\lambda_1 = -8, \quad \lambda_{2,3} = 0.3 \pm 1.863i$$

จากนั้นระบบมีการแสดงผลของสเปกตรัม Lyapunov คู่กับพารามิเตอร์ c โดยกำหนดอยู่ในช่วง $0 \le c \le 1.2$ เพื่อแสดงการเปลี่ยนแปลงของระบบที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ c โดยจะแสดงสเปกตรัมทั้งสามเส้นของระบบ ดังรูปที่ 3.12 (ก) และแสดงภาพขยายของสเปกตรัมที่ใหญ่สุดเป็นบวกของระบบ ดังรูปที่ 3.12 (ข) เพื่อให้เห็นช่วงที่เป็นพฤติกรรมเคออสได้ชัดเจน โดยค่าสำคัญของ Lyapunov ที่บ่งชี้ว่าระบบมีพฤติกรรมเป็นเคออสคือค่าที่เป็นบวก จากรูป 3.12 ค่า c ที่ถูกเลือกใช้ คือ c=0.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.12 สเปกตรัม Lyapunov โดยปรับพารามิเตอร์ c และคงที่ a=4, b=0.5 (ก) ภาพรวมสเปกตรัม Lyapunov (ข) สเปกตรัม Lyapunov ที่ใหญ่สุดของระบบที่มีค่าเป็นบวกตลอดช่วง

3.3.2 การออกแบบเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบสี่วงม้วนรูปดาว

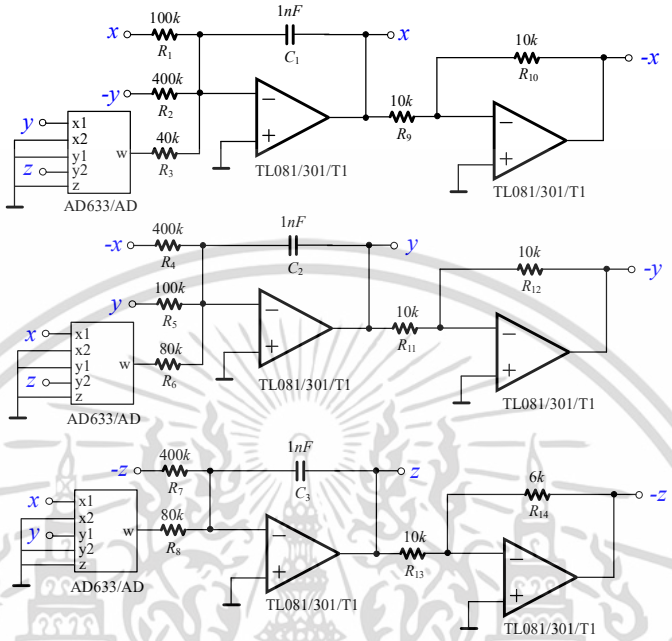
ในงานนี้มีการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสเพื่อยืนยันหลักการสร้างในเชิงตัวเลข ระบบในสมการที่ (3.4) ถูกวิเคราะห์ให้อยู่ในรูปของสมการวงจรดังสมการที่ (3.8) และนำสมการที่ได้ไปออกแบบเป็นวงจร state variable ทั้ง 3 สเตท ได้ดังรูปที่ 3.13

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{R_1C_1}x - \dfrac{1}{R_2C_1}y - \dfrac{1}{R_3C_1}yz, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{R_4C_2}x - \dfrac{1}{R_5C_2}y + \dfrac{1}{R_6C_2}xz, \\ \dot{z} = -\dfrac{1}{R_7C_3}z - \dfrac{1}{R_8C_3}xy; \end{cases} \tag{3.8}$$

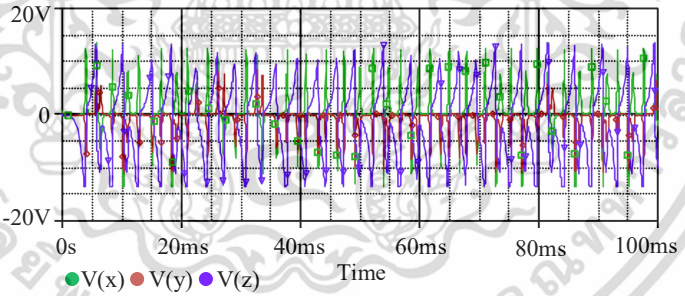
วงจรถูกออกแบบโดยใช้อุปกรณ์ OPAMP เบอร์ TL081/301/T1 จำนวน 6 ตัว ตัวคูณแอนาล็อค AD633/AD จำนวน 3 ตัว แหล่งจ่ายแรงดัน $\pm$15Vdc จากระบบเชิงตัวเลขที่นำเสนอ กำหนดพารามิเตอร์ (a, b, c)=(4, 0.5, 0.6) ตัวต้านทานในวงจรถูกกำหนดให้สอดคล้องกันที่ R_1=R_5=100$k\Omega$ ที่ R_2=R_4=R_7=400$k\Omega$ ที่ R_6=R_8=80$k\Omega$ ที่ R_9=R_{10}=R_{11}=R_{12}=R_{13}=10$k\Omega$ และ ที่ R_3=40$k\Omega$ กับ R_{14}=6$k\Omega$ ย่านการทำงานความถี่ของวงจรถูกกำหนดด้วยตัวเก็บประจุ C_1=C_2=C_3=1nF ผลลัพธ์ของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วงจรถูกจำลองผลด้วยโปรแกรม Orcad-PSpice ผลของสัญญาณเคออสที่เอาต์พุตแรงดัน x, y, z แสดงดังรูปที่ 3.14



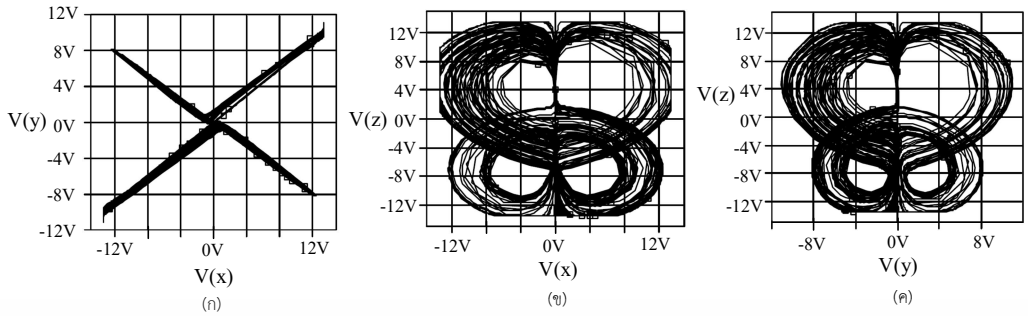
รูปที่ 3.13 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบสี่วงม้วนรูปดาวที่นำเสนอ



รูปที่ 3.14 สัญญาณเอาต์พุตที่แรงดัน V(x), V(y), V(z) ของวงจร

จากผลลัพธ์เชิงตัวเลขบน phase portraits ในรูปที่ 3.10 (ก) – (ค) จะถูกนำมาเปรียบเทียบอย่างชัดเจนด้วยผลลัพธ์ที่ได้จากวงจร โดยจะแสดงบน phase portraits ในระนาบเดียวกัน คือ ระนาบ x-y ระนาบ x-z และระนาบ y-z เอาต์พุตแรงดันแสดงผลลักษณะ 2 มิติของวงจรได้ดังรูปที่ 3.15 จากรูปจะเห็นว่าลักษณะตัวดึงดูดที่ได้บนวงจรและเชิงตัวเลขนั้นสอดคล้องกัน ด้วยลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนคล้ายดาว โดยเฉพาะในรูปที่ 3.15 (ก) และ 3.10 (ก)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.15 Phase portraits 2 มิติของวงจรที่เอาต์พุต (ก) ระนาบ V(x)-V(y) (ข) ระนาบ V(x)-V(z) (ค) ระนาบ V(y)-V(z)

จากระบบเคออสที่สามารถสร้างตัวดึงดูดรูปแบบใหม่ คือ สี่วงม้วนคล้ายดาว หรือ stellate ของ I. Pehlivan สามารถสรุปภาพรวมการวิเคราะห์คุณสมบัติต่างๆของระบบ รวมถึงอุปกรณ์ที่ใช้ในวงจร ได้ดังตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนคล้ายดาวของ I. Pehlivan

<table>
<tr><th colspan="7">องค์ประกอบต่างๆของระบบเคออสสี่วงม้วน I. Pehlivan</th></tr>
<tr><th colspan="2">โครงสร้างของระบบ</th><th colspan="2">การวิเคราะห์พลวัตของระบบ</th><th colspan="2">ค่าความซับซ้อนพฤติกรรมเคออส</th><th colspan="2">องค์ประกอบวงจร</th></tr>
<tr><td>พจน์ของระบบ</td><td>8 พจน์</td><td rowspan="2">1. วิเคราะห์ความเสถียรภาพ
2. Phase portraits
3. เลขชี้กำลัง Lyapunov</td><td rowspan="2">LE^*</td><td rowspan="2">LE_1=0.2439,
LE_2=0,
LE_3=-7.6254.</td><td>OPAMP</td><td>6 ตัว</td></tr>
<tr><td>พารามิเตอร์</td><td>3 ตัว</td><td>ตัวคูณแอนาล็อค</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td>พจน์ NLT*</td><td>3 พจน์</td><td rowspan="3">4. Dissipative ของระบบ
5. สเปกตรัม Lyapunov
รวม 5 เครื่องมือ</td><td rowspan="3">D_{KY}</td><td rowspan="3">2.032</td><td>R</td><td>14 ตัว</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ชนิด NLT*</td><td rowspan="2">กำลังสอง</td><td>C</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td>ES^*</td><td>✖</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td>รวม 26 ตัว</td></tr>
</table>

ES^* คือ ผลการทดลองจริง (Experimental Result)

3.4 ระบบเคออสสามมิติสามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนด้วยฟังก์ชันกำลังสองเป็นชิ้น [83]

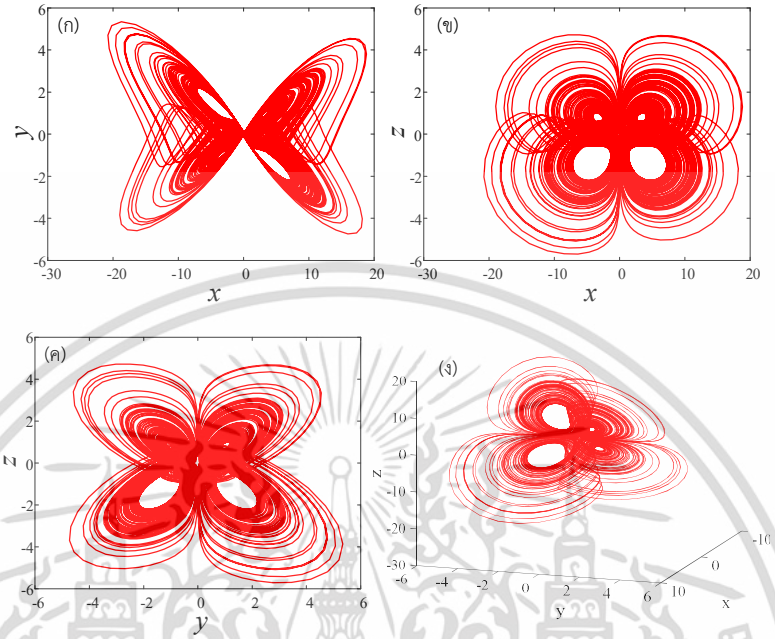
ในปี ค.ศ.2018 V.R.F Signing และคณะวิจัยนำเสนอระบบเคออสสามมิติโดยใช้ความเป็นเชิงเส้นแบบกำลังสองเป็นชิ้น (Piecewise quadratic) สามารถสร้างพฤติกรรมเคออสสี่วงม้วนได้ รวมถึงพฤติกรรมการมีอยู่ร่วมของตัวดึงดูดต่างๆในระบบ สมการของระบบถูกเขียนในรูปมิติอันดับหนึ่ง สมการ ดังนี้

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + byz, \\ \dot{y} = -dy|y| - y + exz, \\ \dot{z} = cz - xy. \end{cases} \tag{3.9}$$

ที่พารามิเตอร์ $a, b, c, d, e \in R^+$โดยระบบในสมการที่ (3.9) ประกอบไปด้วยพารามิเตอร์ทั้งหมด 5 ตัว และพจน์ไม่เชิงเส้นแบบกำลังสอง 4 พจน์ ได้แก่ $yz, xz, y|y|$ และ xy ซึ่งระบบที่นำเสนอนี้สามารถพฤติกรรมเคออสได้สูงสุดถึงสี่วงม้วน โดย phase portraits 3 มิติ และ 2 มิติ ด้วยเงื่อนไข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เริ่มต้น $(x_0, y_0, z_0)=(0, 5, 0)$ และพารามิเตอร์ $a=5$, $b=15$, $c=3.9$, $d=10$, และ $e=4$ ถูกแสดงดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 Phase portraits ของพฤติกรรมสิ่งวงม้วน (ก) 2 มิติ ระนาบ x-y (ข) 2 มิติ ระนาบ x-z (ค) 2 มิติ ระนาบ y-z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z

3.4.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต

คุณสมบัติทางพลวัตถูกวิเคราะห์อย่างละเอียดและครอบคลุม จุดสมดุลของระบบถูกวิเคราะห์เป็นอันดับแรก โดยการนำสมการใน (3.9) เท่ากับ 0 ทั้งสามมิติ ทำให้ได้จุดสมดุลทั้งหมด 5 จุด ดังนี้

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), \\ E_{1,2} &= (\pm 3.078, \pm 0.9554, 0.7858), \\ E_{3,4} &= (\mp 3.7308, \pm 1.3276, -1.2701); \end{aligned} \tag{3.10}$$

จากนั้นค่าลักษณะจะถูกคำนวณจากพื้นฐานจุดสมดุลทั้ง 5 จุด โดยเมทริกซ์จาโคเบียนของระบบ ณ จุดสมดุลใดๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$J_E = \begin{pmatrix} -a & a+bz & by \\ ez & -dy|y| - dysign(y) - 1 & ex \\ -y & -x & c \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

จากเมทริกซ์จาโคเบียน ณ จุดสมดุล E_0 สมการคุณลักษณะ $\det(\lambda I - J(E_0))$ จะได้

$$\lambda^3 - (c-1-a)\lambda^2 - (c+ca-a)\lambda - ac = 0 \tag{3.12}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

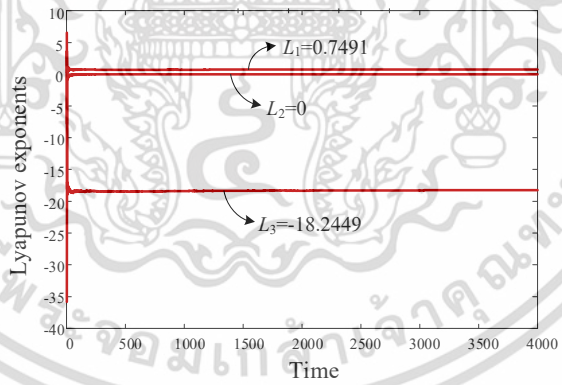
จากสมการที่ (3.12) ค่าลักษณะเฉพาะจะได้ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -a, \lambda_3 = c$ ที่พารามิเตอร์ a และ c เป็นบวก หมายถึงว่า λ_1, λ_2 จะเป็นจำนวนจริงลบ และ λ_3 เป็นจำนวนจริงบวก บ่งชี้ว่าระบบ ณ จุด E_1 คือ saddle point และมีความไม่เสถียร ณ จุดสมดุลอื่นๆ ค่าลักษณะเฉพาะที่ได้แสดงดังตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.4 ค่าลักษณะเฉพาะ ณ จุดสมดุล $E_{1\text{-}4}$

E_1	E_2	E_3	E_4
$\lambda_1 = -22.297$	$\lambda_1 = -22.297$	$\lambda_1 = -29.5324$	$\lambda_1 = -29.5324$
$\lambda_2 = 0.5434 + 5.3515i$	$\lambda_2 = 0.5434 + 5.3515i$	$\lambda_2 = 0.4402 + 6.88041i$	$\lambda_2 = 0.4402 + 6.88041i$
$\lambda_3 = 0.5434 - 5.3515i$	$\lambda_3 = 0.5434 - 5.3515i$	$\lambda_3 = 0.5434 - 6.8804i$	$\lambda_3 = 0.5434 - 6.8804i$

เลขชี้กำลัง Lyapunov ถูกคำนวณด้วยอัลกอริทึมจากการกำหนดค่าที่สอดคล้องกับ phase portraits ในรูปที่ 3.16 ค่าเลขชี้กำลังที่ได้แสดงดังรูปที่ 3.17 ค่าเลขชี้กำลังทั้งสามค่าสอดคล้องทางทฤษฎีพลวัตด้วยค่าแรกเป็นบวก ค่าสองเป็นศูนย์ และค่าสามติดลบ โดยเมื่อนำทั้งสามค่ามาคำนวณพฤติกรรมเคออสที่ซับซ้อนด้วยสูตร D_{KY} จะได้

$$D_{KY} = j + \frac{1}{\left|LE_{j+1}\right|}\sum_{i=1}^{j} LE_i = 2 + \frac{0.7491 - 0}{\left|-18.2449\right|} = 2.041 \tag{3.13}$$



รูปที่ 3.17 เลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบสี่วงม้วนด้วยฟังก์ชันกำลังสองเป็นชิ้น

3.4.1.1 วิเคราะห์การกระจายตัวและความสมมาตร

สภาวะการกระจายของระบบพลวัต คือ อัตราการหดตัวของปริมาตร ระบบใน (3.9) สามารถวิเคราะห์การกระจายตัวได้ดังนี้

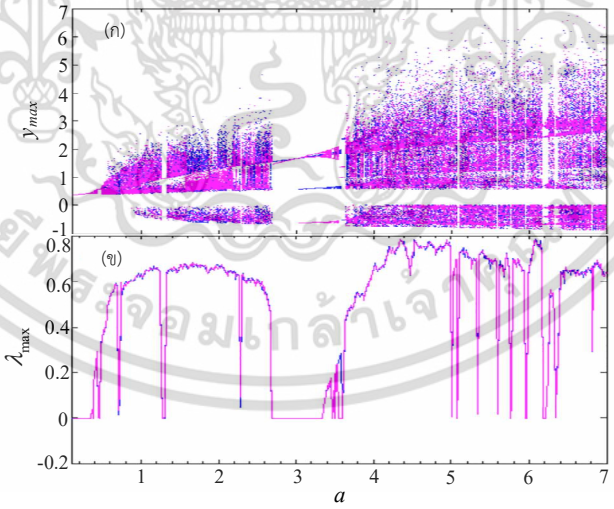
$$\Delta V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - 1 + c - 10(|y| + ysign(y)) \tag{3.14}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (3.14) นั้นเป็นลบ ซึ่งหมายความว่าระบบใน (3.9) นั้นเกิดการกระจายตัว สามารถสร้างตัวดึงดูดของระบบได้ โดยความสมมาตรของตัวดึงดูดที่เกิดขึ้นบนระบบวิเคราะห์ได้จากการ $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ ระบบดังกล่าวมีการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน z หมายถึงวิถีวงโคจรของตัวดึงดูดจะมีความสมมาตรอยู่บนพิกัด x และ y สังเกจได้จากลักษณะจุดสมดุลในสมการที่ (3.10) ดังนั้นระบบใน (3.9) จะมีดึงดูดที่สมมาตรกันอยู่ในระบบ

3.4.2 วิเคราะห์ bifurcation และเส้นทางสู่พฤติกรรมสี่วงม้วน

สิ่งหนึ่งที่ใช้ในการตรวจสอบและวิเคราะห์พฤติกรรมพลวัตที่หลากหลายของระบบเคออส คือ เครื่องมือแผนภาพ bifurcation เครื่องมือดังกล่าวใช้สำหรับตรวจสอบผลกระทบที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ต่างๆของระบบ โดยสามารถระบุช่วงที่เกิดลักษณะพฤติกรรมพลวัตต่างๆ เช่น วงรอบจำกัด พฤติกรรมเป็นคาบ พฤติกรรมไม่เป็นคาบ ไปจนถึงพฤติกรรมเคออส ซึ่งเริ่มจากการแสดง bifurcation คู่กับสเปกตรัม Lyapunov สูงสุด (Largest Lyapunov Spectrum) ดังรูปที่ 3.18 โดยคงที่พารามิเตอร์ b=15 และ c=3.9 และกำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0, 5, 0) ในการแสดงผลใช้เทคนิคการกวาดค่า (Sweep value) ของระบบเพื่อตรวจสอบพฤติกรรมที่เกิดขึ้นอย่างละเอียดด้วยการกวาดค่าพารามิเตอร์ a ไปด้านหน้า (Forward) จาก 0 ไปถึง 7 ด้วยสีน้ำเงิน และกวาดค่ากลับด้านหลัง (Downward) จาก 7 ไปถึง 0 ด้วยสีชมพู เมื่อสังเกตจากผลลัพธ์ ตัวดึงดูดสี่วงม้วนจะเกิดขึ้นเมื่อเพิ่มพารามิเตอร์ a สูงขึ้น

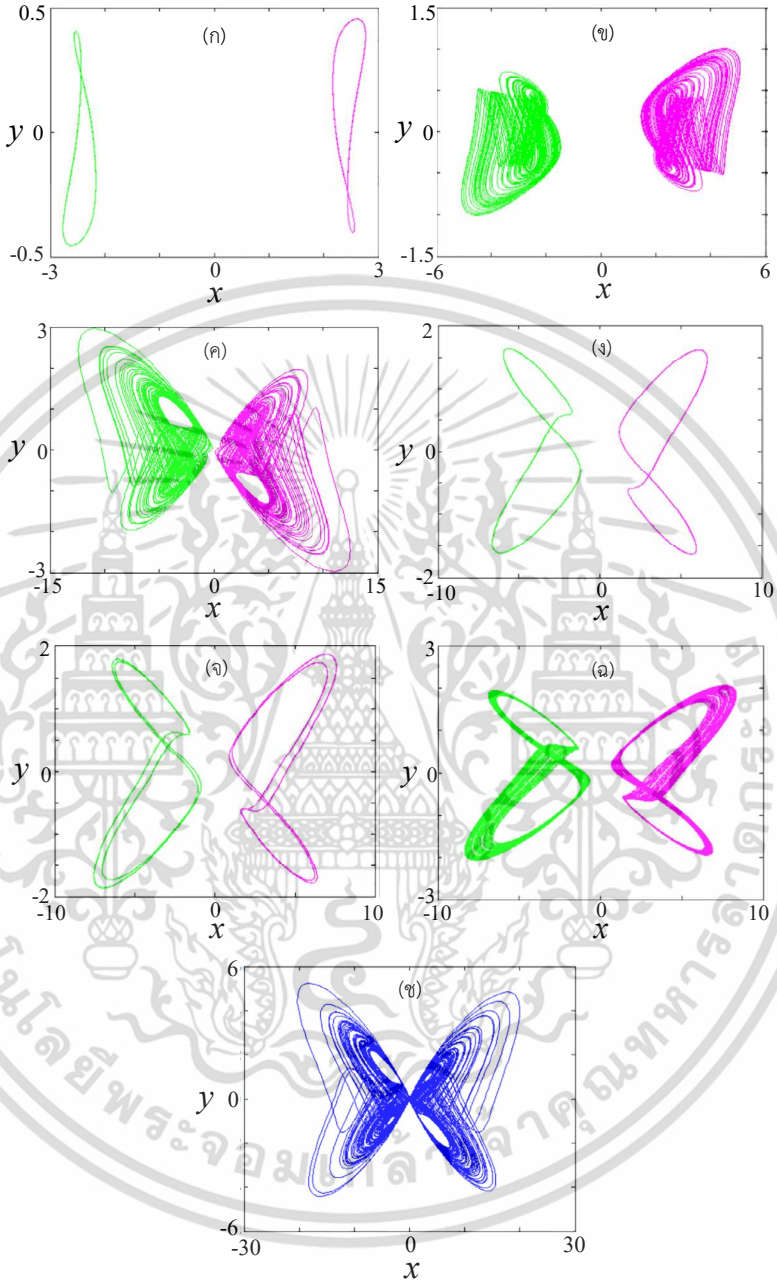


รูปที่ 3.18 ตรวจสอบพารามิเตอร์ a ในช่วง $0.1 \leq a \leq 7$ (ก) แผนภาพ Bifurcation บนเอาต์พุต y_{max} ที่สอดคล้องกับ (ข) สเปกตรัม Lyapunov ที่สูงสุดของระบบ

จากรูปที่ 3.18 ผลลัพธ์บน phase portraits บางส่วนถูกแสดงดังรูปที่ 3.19 โดยตัวดึงดูดสี่วงม้วนแสดงดังรูปที่ 3.19 (ช) ด้วย a=5 และพฤติกรรมการมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดรูปแบบต่างๆ ในช่วง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

a=0.3 ถึง a=3.5 ในรูปที่ 3.19 (ก) - (ฉ) ซึ่งแสดงถึงความหลากหลายของพฤติกรรมพลวัตที่เกิดจากการปรับพารามิเตอร์ a พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน

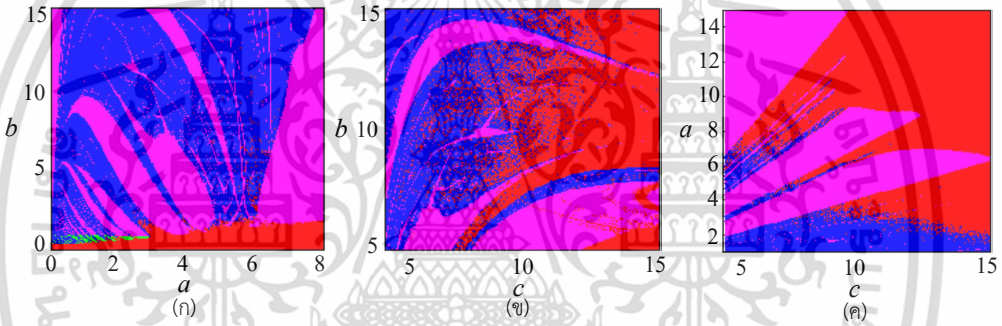


รูปที่ 3.19 Phase portraits ของเส้นทางสู่พฤติกรรมเคออส (Route to chaos) โดยปรับพารามิเตอร์ a ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(0, ±5, 0) สำหรับสีเขียวและสีแดง ตามลำดับ (ก) เป็นคาบ-1 วงรอบจำกัด ที่ a=0.3 (ข) หนึ่งวงม้วน ที่ a=0.5 (ค) สองวงม้วน ที่ a=2 (ง) เป็นคาบ-1 วงรอบจำกัด ที่ a=2.9 (จ) เป็นคาบ-4 วงรอบจำกัด ที่ a=3 (ฉ) หนึ่งวงม้วน ที่ a=3.5 (ช) สี่วงม้วน ที่ a=5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.2.1 วิเคราะห์พลวัตเชิงลึกด้วยการตรวจสอบคู่พารามิเตอร์และความหลายเสถียรภาพ (Multistability)

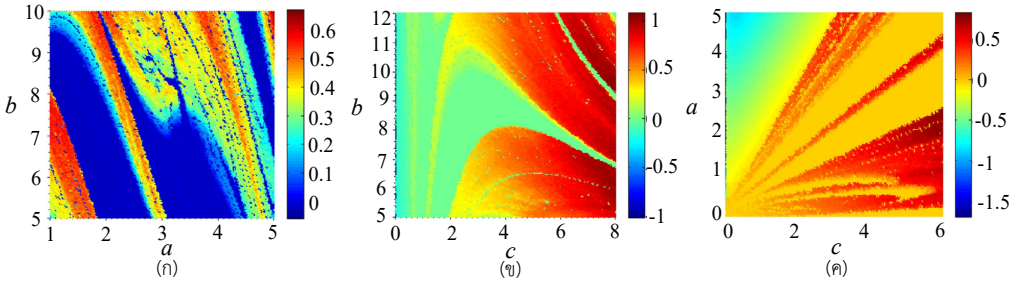
พารามิเตอร์และเงื่อนไขเริ่มต้นบนระบบเคออสมีผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบนระบบอย่างมาก โดยการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์หนึ่งตัวของระบบขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ตัวอื่นๆของระบบด้วย รวมถึงค่าเงื่อนไขเริ่มต้นใดๆที่กำหนด ส่งผลกระทบต่อภาพรวมระบบทั้งสิ้น ดังนั้นการตรวจสอบในมุมมองผลลัพธ์ที่กว้างขึ้นนั้น ทำให้สังเกตพฤติกรรมของระบบได้กระชับมากขึ้น การตรวจสอบพารามิเตอร์สองตัวพร้อมกัน จึงเป็นผลลัพธ์อย่างหนึ่งที่เป็นสากล แผนภาพ Bifurcation ที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์สองตัวพร้อมกัน ถูกแสดงดังรูปที่ 3.20 โดยแสดงคู่พารามิเตอร์ a - b, c – b, และ c – a ในรูปที่ 3.20 (ก) – (ค) ตามลำดับ แต่ละพื้นที่สีของรูปบ่งบอกพฤติกรรมต่างๆในแต่ละช่วงคู่พารามิเตอร์ ถูกระบุไว้ดังคำอธิบายใต้รูป



รูปที่ 3.20 แสดงแผนภาพ bifurcation แบบสองพารามิเตอร์ โดยเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงของสองพารามิเตอร์ คือ (ก) พารามิเตอร์ a-b (ข) พารามิเตอร์ c-b (ค) พารามิเตอร์ c-a โดยที่สีชมพู คือ พฤติกรรมเป็นคาบ สีน้ำเงิน คือ พฤติกรรมเคออส สีเขียว คือ ไม่มีการกำเนิดสัญญาณ และสีแดง คือ ไร้ขอบเขต โดยกำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0, 5, 0)

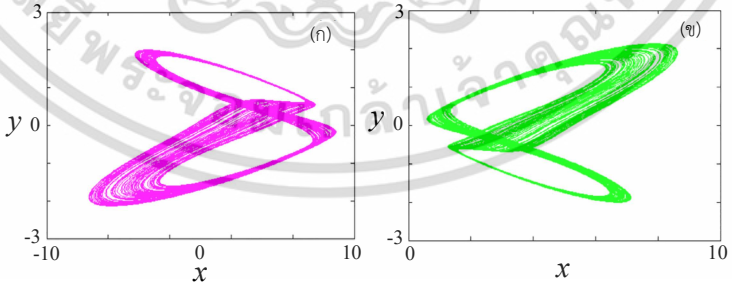
ผลลัพธ์อีกมุมมองด้วยการพล็อตการเปลี่ยนแปลงของคู่พารามิเตอร์ ถูกแสดงด้วยแผนภาพความเสถียรภาพ Lyapunov ซึ่งผลลัพธ์ดังกล่าวใช้หลักการเปลี่ยนแปลงของทฤษฎีเลขชี้กำลัง Lyapunov ที่เป็นบวกและเป็นลบ ซึ่งตามทฤษฎีเลขชี้กำลังที่เป็นบวก หมายถึงระบบมีพฤติกรรมเป็นเคออส และค่าเลขชี้กำลังที่เป็นลบมีพฤติกรรมเป็นคาบ หรือ periodic โดยตัวเลขที่ระบุค่าเลขชี้กำลังบอกไว้ตรงแถบสีด้านขวาของรูปที่ 3.21 (ก) – (ค) แต่ละรูปแสดงคู่พารามิเตอร์ a - b, c – b, และ c – a ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

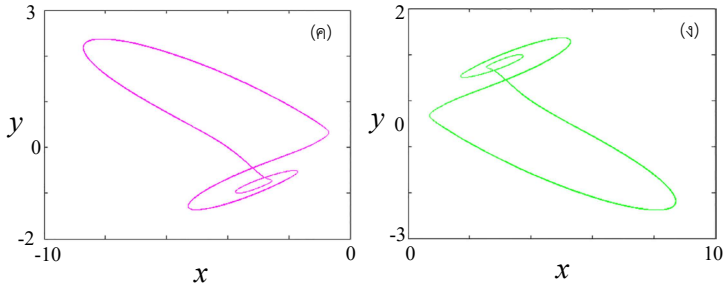


รูปที่ 3.21 แสดงแผนภาพความเสถียร Lyapunov (Lyapunov stability diagram) ของคู่พารามิเตอร์สำหรับ (ก) a - b (ข) c - b (ค) c - a โดยกำหนด $(x_0, y_0, z_0)=(0, 5, 0)$ พื้นที่สีน้ำเงินและสีฟ้าหมายถึง ช่วงพฤติกรรมเป็นคาบ (เลขชี้กำลังเป็นลบ) และพื้นที่สีอื่นๆ หมายถึงพฤติกรรมเคออส (เลขชี้กำลังเป็นบวก)

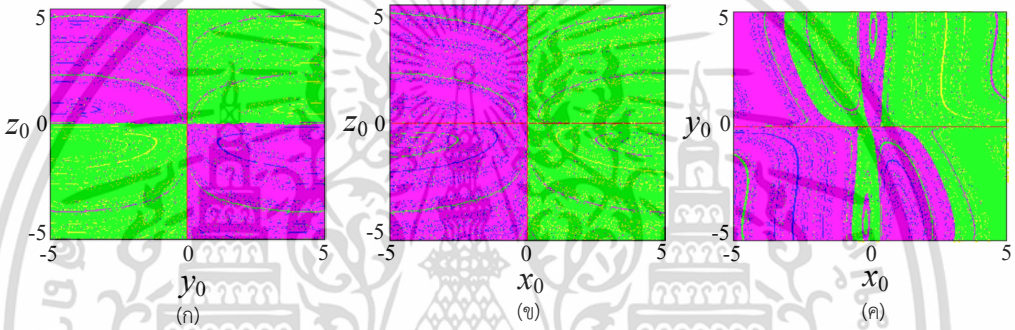
พฤติกรรมพลวัตต้องใช้การวิเคราะห์เชิงลึกและมีความซับซ้อนในการวิเคราะห์ถูกแสดงสำหรับระบบที่นำเสนอใน (3.9) ด้วย คือ ความหลายเสถียรภาพ พฤติกรรมดังกล่าวเป็นการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ โดยคงที่พารามิเตอร์ ณ จุดนั้นๆไว้ ซึ่งสามารถแสดงถึงสถานการณ์การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดหลายชนิด ณ พารามิเตอร์ค่าเดียวกันได้ รูปที่ 3.18 สามารถสังเกตพฤติกรรมความหลายเสถียรภาพได้ ในช่วง $3.544 \leq a \leq 3.578$ ซึ่งมีช่วงที่ไม่ทับซ้อนกันของสีน้ำเงินและสีชมพู ตัวอย่างของการมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดที่แตกต่างกันสี่แบบ ณ พารามิเตอร์ a=3.573 พร้อมกับค่า b=15, c=3.9 ดังรูปที่ 3.22 โดยคำอธิบายลักษณะตัวดึงดูดที่เกิดขึ้นพร้อมค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกันถูกระบุไว้ใต้รูป 3.22 จากสีของตัวดึงดูดสีชมพูและสีเขียวจะสอดคล้องกับสีบนพื้นที่ของ Basin of attraction ในรูปที่ 3.23 ซึ่งผลลัพธ์บน Basin of attraction ช่วยระบุถึงค่าเงื่อนไขเริ่มต้นอื่นๆเป็นวงกว้างที่มีลักษณะตัวดึงดูดแบบเดียวกันสำหรับพื้นที่สีเดียวกัน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.22 การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดที่แตกต่างกันสี่แบบ หรือ สองคู่สมมาตร (Coexistence of four difference attractor) โดยแสดง (ก-ข) คู่ของตัวดึงดูดเคออส ร่วมกับ (ค-ง) คู่ของเป็นคาบ-3 วงรอบจำกัด รูป ก-ง สอดคล้องกับ $(x_0, y_0, z_0)=(0, \pm 1, 0)$ และ $(x_0, y_0, z_0)=(0, \pm 1.35, 0)$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.23 The basin of attraction ของคู่เงื่อนไขเริ่มต้น คงที่พารามิเตอร์ a=3.573, b=15, c=3.9 โดยกำหนด (ก) x_0=0 (ข) y_0=0 (ค) z_0=0 พื้นที่สีน้ำเงินและเหลือง คือ พฤติกรรมเป็นคาบ พื้นที่สีชมพูและเขียว พฤติกรรมเคออส พื้นที่สีแดง คือ ไร้ขอบเขต

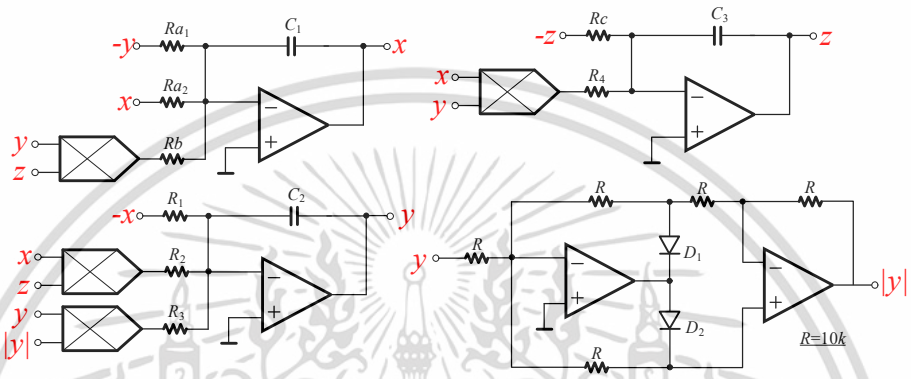
3.4.3 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส

เพื่อยืนยันหลักการสร้างของระบบที่ออกแบบทางทฤษฎีในสมการที่ (3.9) การออกแบบเป็นวงจรเพื่อยืนยันผลลัพธ์ที่สอดคล้องกันจะถูกนำเสนอในส่วนนี้ โดยสมการในระบบเชิงตัวเลขถูกแบบเป็นวงจรได้ดังรูปที่ 3.24 วงจรประกอบไปด้วยอุปกรณ์หลัก คือ OPAMPเบอร์ TL082 และ TL084 ตัวต้านทาน ตัวเก็บประจุ และไดโอดสำหรับสร้างเป็นวงจรค่าสัมบูรณ์เพื่อออกแบบพจน์ไม่เป็นเชิงเส้น $|y|$ เมื่อทำการ KCL วงจร จะได้สมการดังนี้

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{5}{R_{a1}C_1}y - \dfrac{1}{R_{a2}C_1}x + \dfrac{5}{R_bC_1}yz, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{R_1C_2}y - \dfrac{1}{R_2C_2}y|y| + \dfrac{1}{5R_3C_2}xz, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{R_cC_3}z - \dfrac{1}{5R_4C_3}xy. \end{cases} \tag{3.15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

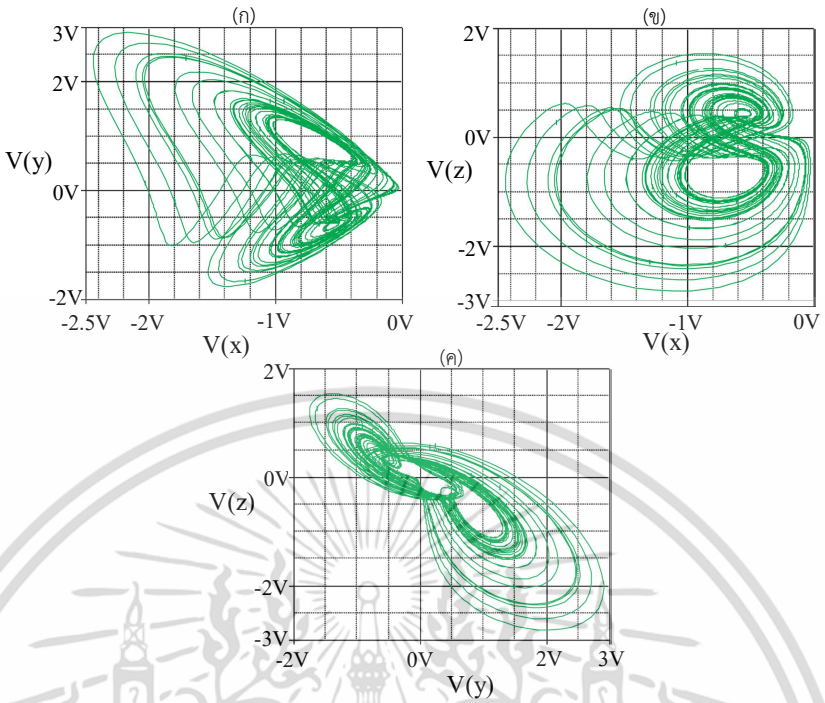
โดยที่ $x=5V_1, y=V_2, z=V_3$ สมการที่ในระบบที่ (3.9) และ (3.15) จะถูกกำหนดพารามิเตอร์และอุปกรณ์ในวงจรให้มีค่าที่สอดคล้องกัน โดยกำหนด $C_1=C_2=C_3=C_4=C=10$nF ที่ $R=10k$ ที่ $R_1=R$ ที่ $R_2=R/10$ ที่ $R_4=R/5$ โดยพารามิเตอร์ $a=5R/Ra_1$ และ $a=5R/Ra_2$ ที่พารามิเตอร์ $b=5R/Rb$ ที่พารามิเตอร์ $c=R/Rc$ แหล่งจ่ายแรงดันอุปกรณ์กำหนด ±15Vdc



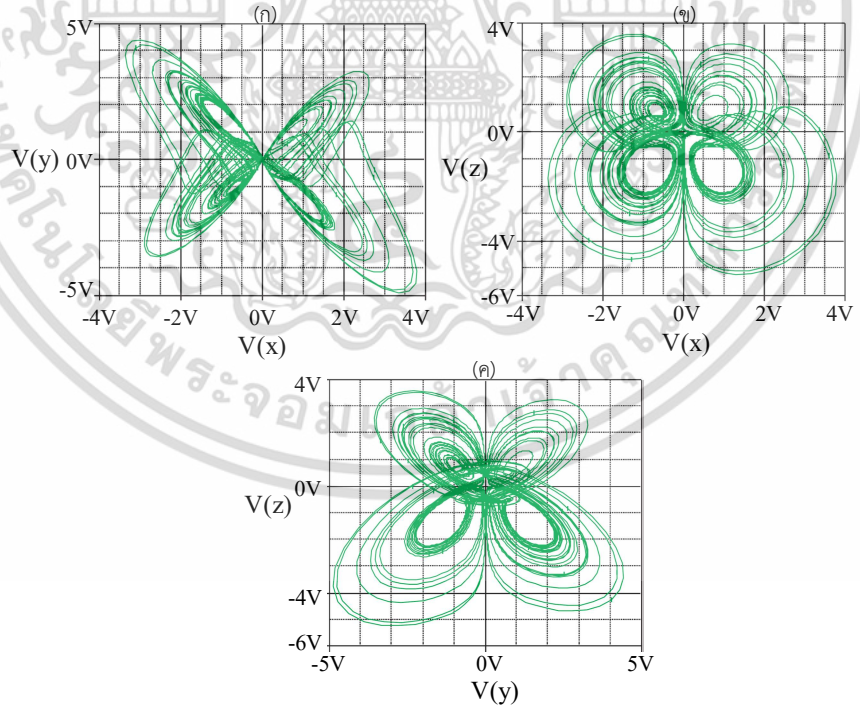
รูปที่ 3.24 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสระบบสี่วงม้วนด้วยฟังก์ชันกำลังสองเป็นชิ้น

ผลลัพธ์ของวงจรถูกจำลองด้วยโปรแกรม PSpice โดยจะแสดงผลลัพธ์สองส่วน คือ ตัวดึงดูดสองวงม้วน และสี่วงม้วน จากการกำหนด $Rb=3.333k\Omega$ $Rc=2.56k\Omega$ ดังรูปที่ 3.25 และ 3.26 ตามลำดับ โดยผลลักษณะตัวดึงดูดสองวงม้วนถูกเปลี่ยนเป็นลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนได้ด้วยการเริ่มกำหนดค่าตัวต้านทาน $Ra_1=25k\Omega$ และ $Ra_2=5k\Omega$ (สำหรับรูป 3.25) ลดลงเป็น $Ra_1=10k\Omega$ และ $Ra_2=2k\Omega$ (สำหรับรูป 3.26) จะเห็นได้ชัดว่าลักษณะเด่นของตัวดึงดูดสี่วงม้วนบน PSpice รูปที่ 3.26 สอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในรูปที่ 3.16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.25 Phase portraits ผลการจำลองบน PSpice โดยแสดงลักษณะตัวดึงดูดสองวงม้วน ที่ Ra_1=25$k\Omega$ Ra_2=5$k\Omega$ (ก) ระนาบ V(x) – V(z) (ข) ระนาบ V(x) – V(z) (ค) ระนาบ V(y) – V(z)



รูปที่ 3.26 Phase portraits ผลการจำลองบน PSpice โดยแสดงลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน ที่ Ra_1=10$k\Omega$ Ra_2=2$k\Omega$ (ก) ระนาบ V(x) – V(z) (ข) ระนาบ V(x) – V(z) (ค) ระนาบ V(y) – V(z)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากระบบเคออสตัวดึงดูดสี่วงม้วนด้วยฟังก์ชันกำลังสองเป็นชิ้นของ V.R.F. Signing ที่นำเสนอมีภาพรวมองค์ประกอบต่างๆในการวิเคราะห์ของระบบดังตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.5 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนของ V.R.F. Signing ที่นำเสนอ

<table>
<tr><th colspan="6">องค์ประกอบต่างๆของระบบเคออสสี่วงม้วน V.R.F. Signing</th></tr>
<tr><th colspan="2">โครงสร้างของระบบ</th><th>การวิเคราะห์พลวัตของระบบ</th><th colspan="2">ค่าความซับซ้อนพฤติกรรมเคออส</th><th colspan="2">องค์ประกอบวงจร</th></tr>
<tr><td>พจน์ของระบบ</td><td>8 พจน์</td><td rowspan="5">1. วิเคราะห์ความสมมาตร (Symmetry)
2. สเปกตรัม Lyapunov
3. แผนภาพ Bifurcation
4. แผนภาพ Bifurcation แบบ 2 พารามิเตอร์
5. ความหลายเสถียรภาพ
6. วิเคราะห์ความเสถียรภาพ
7. Phase portraits
8. แผนภาพ Lyapunov stability
9. Basin of attraction
10. Dissipative ของระบบ
11. เลขชี้กำลัง Lyapunov
รวม 11 เครื่องมือ</td><td rowspan="2">LE^*</td><td rowspan="2">LE_1=0.7491,
LE_2=0,
LE_3=-18.2449.</td><td>OPAMP</td><td>5 ตัว</td></tr>
<tr><td>พารามิเตอร์</td><td>5 ตัว</td><td>ตัวคูณแอนาล็อค</td><td>4 ตัว</td></tr>
<tr><td>พจน์ NLT*</td><td>4 พจน์</td><td rowspan="3">D_{KY}</td><td rowspan="3">2.041</td><td>ไดโอด</td><td>2 ตัว</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ชนิด NLT*</td><td rowspan="3">กำลังสอง</td><td>R</td><td>13 ตัว</td></tr>
<tr><td>C</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td>ES^*</td><td>×</td></tr>
<tr><td colspan="6">รวม 27 ตัว</td></tr>
</table>

ES^* คือ ผลการทดลองจริง (Experimental Result)

3.5 ระบบเคออสสามมิติด้วยลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วนพร้อมมีการลดรูป [84]

ในปี ค.ศ. 2016 A. Akgul นำเสนอระบบเคออสอันดับสามที่สามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดเคออสรูปแบบใหม่ ด้วยระบบที่ประกอบไปด้วยตัวแปรจำนวน 9 พจน์ และฟังก์ชันกำลังสอง 4 พจน์ พร้อมพารามิเตอร์ทั้งหมด 9 ตัว ระบบสมการอนุพันธ์ที่นำเสนอสามารถเขียนในรูปแบบหนึ่งมิติสามสมการ ได้ดังนี้

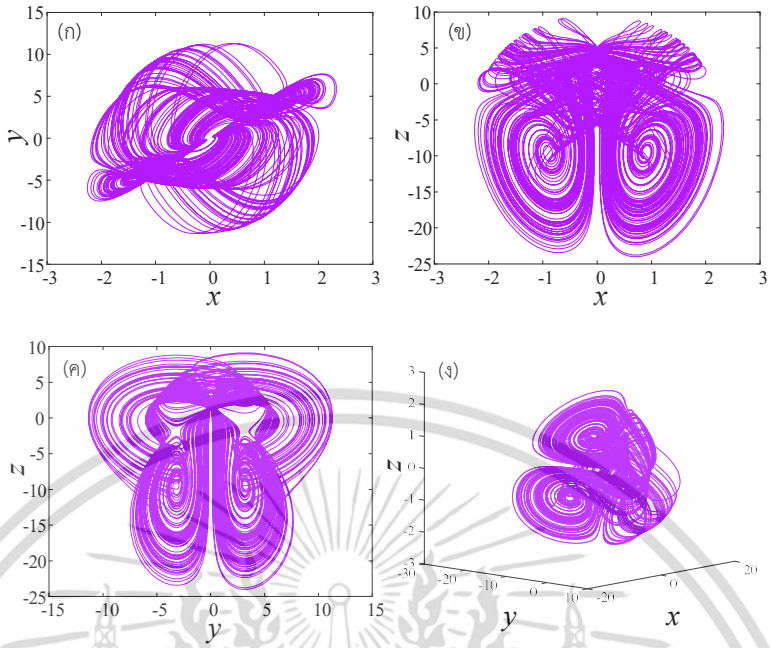
$$\begin{cases} \dot{x} = p_1 y - p_2 x + p_3 xz, \\ \dot{y} = -p_4 xz - p_5 x + p_6 yz + p_7 x, \\ \dot{z} = p_8 - p_9 y^2. \end{cases} \tag{3.16}$$

ที่ $p_1 - p_9$ คือ พารามิเตอร์ของระบบ และพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นกำลังสอง 4 พจน์ คือ xz 2 พจน์ yz และ y^2 พารามิเตอร์แต่ละตัวถูกกำหนดสำหรับสร้างลักษณะสี่วงม้วน ดังสมการที่ (3.17)

$$\begin{aligned} &p_1 = 1, \quad p_2 = 0.7, \quad p_3 = 0.3, \quad p_4 = 4, \quad p_5 = 4.4 \\ &p_6 = 1, \quad p_7 = 0.1, \quad p_8 = 10, \quad p_9 = 1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

โดยแสดงตัวอย่างลักษณะสี่วงม้วนของระบบที่นำเสนอใน (3.16) บน phase portraits ดังรูปที่ 3.27 ซึ่งลักษณะสี่วงม้วนดังกล่าวเป็นรูปแบบใหม่ ไม่มีการนำเสนอมาก่อนในอดีต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.27 Phase portraits ของพฤติกรรมสั่วงม้วนจากระบบ (3.16) (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z (ค) ระนาบ y-z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z

3.5.1 การวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต

ระบบที่นำเสนอมีการวิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานทางพลวัต โดยเริ่มต้นด้วยการวิเคราะห์จุดสมดุล จากระบบในสมการที่ (3.16) โดยกำหนดให้สมการเท่ากับ 0 จุดสมดุลที่เกิดขึ้นในระบบมี 3 จุด คือ E_0=(0, 0, 0) และ $E_{1,2}$=($X_{e\pm}$, Y_e, $Z_{e\pm}$) ซึ่งจุดสมดุล $E_{1,2}$ มีค่าจุดคงที่ (จุด $X_{e\pm}$, Y_e, $Z_{e\pm}$ ที่อยู่ภายใน $E_{1,2}$ จะเรียกว่า จุดคงที่) ดังนี้

$$X_{e\pm}=\frac{p_1Y_e}{p_2-p_3Z_{e\pm}},\quad Y_e=\pm\sqrt{\frac{p_8}{p_9}},\quad Z_{e\pm}=\frac{p_2p_6-p_1p_4}{2p_3p_6}\pm\frac{\sqrt{disc(Z_e)}}{2p_3p_6}. \tag{3.18}$$

โดยที่ $disc(Z_e)=(p_2p_6\text{-}p_1p_4)^2\text{-}4p_3p_6p_1(p_5\text{-}p_7)$ จากลักษณะจุดคงที่ในสมการที่ (3.18) สามารถวิเคราะห์ความสมมาตรได้ว่า $(x, y, z)=(-x, y, -z)$ เนื่องจากที่ Y_e สามารถกำหนดเป็น ± ได้อิสระ ดังนั้นพฤติกรรมความสมมาตรที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับ X_e และ Z_e ซึ่งอยู่บนมิติของ x และ z

จากจุดคงที่ในสมการที่ (3.18) ทำให้ระบบมีจุดสมดุล 3 จุด ดังนี้

$$\begin{aligned}
E_0&=(0,0,0),\\
E_1&=\left(\frac{p_1Y_e}{p_2-p_3Z_{e+}},\ \sqrt{\frac{p_8}{p_9}},\ \frac{p_2p_6-p_1p_4}{2p_3p_6}+\frac{\sqrt{disc(Z_e)}}{2p_3p_6}\right),\\
E_2&=\left(\frac{p_1Y_e}{p_2-p_3Z_{e-}},\ \sqrt{\frac{p_8}{p_9}},\ \frac{p_2p_6-p_1p_4}{2p_3p_6}-\frac{\sqrt{disc(Z_e)}}{2p_3p_6}\right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อนำมาวิเคราะห์ความเสถียรภาพโดยทำให้ระบบเป็นเชิงเส้น (Linear stability) ด้วยเมทริกซ์จาโคเบียน เพื่อหาค่าลักษณะเฉพาะ จะได้สมการลักษณะเฉพาะ ดังนี้

$$\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0 \tag{3.20}$$

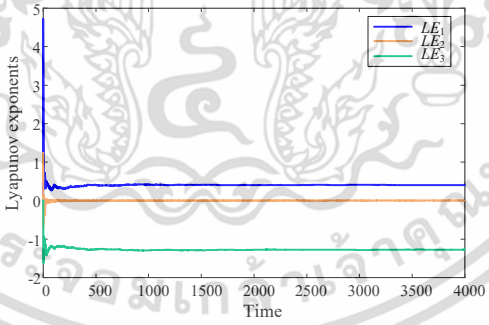
โดยที่

$$\begin{aligned} A_2 &= p_2 - Z_e(p_3 + p_6), \\ A_1 &= \frac{2p_9X_eY_e(p_5 - p_7)}{Z_e}, \\ A_0 &= \frac{2p_8[p_1(p_5 - p_7) - p_3p_6Z_e^2]}{Z_e}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

ที่เงื่อนไข $disc(Z_e)$ เมื่อ $disc(Z_e) = 0$ ทำให้ระบบเกิด saddle-node bifurcation และที่ $disc(Z_e) < 0$ ระบบจะไม่มีจุดคงที่ แต่เมื่อ $disc(Z_e) > 0$ จะทำให้ระบบมีจุดคงที่ 2 ชุด สำหรับจุดสมดุล $E_{1,2}$ ดังนั้นความเสถียรภาพของระบบจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ $p_{1\text{-}9}$ เมื่อเงื่อนไขระบบเข้าสู่เงื่อนไข $disc(Z_e) > 0$

เลขชี้กำลัง Lyapunov ถูกคำนวณด้วยอัลกอริทึม โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ด้วยสมการที่ (3.17) ค่าเลขชี้กำลังที่ได้แสดงดังรูปที่ 3.28 ค่าเลขชี้กำลังทั้งสามค่าสอดคล้องทางทฤษฎีพลวัตด้วยค่าแรกเป็นบวก ค่าสองเป็นศูนย์ และค่าสามติดลบ คือ LE_1=0.3107, LE_2=0, LE_3=-1.265 โดยเมื่อนำทั้งสามค่ามาคำนวณพฤติกรรมเคออสที่ซับซ้อนด้วยสูตร D_{KY} จะได้ดังสมการที่ (3.22)

$$D_{KY} = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|}\sum_{i=1}^{j} LE_i = 2 + \frac{0.3107 - 0}{|-1.265|} = 2.2456. \tag{3.22}$$



รูปที่ 3.28 เลขชี้กำลัง Lyapunov ของระบบที่ (3.16)

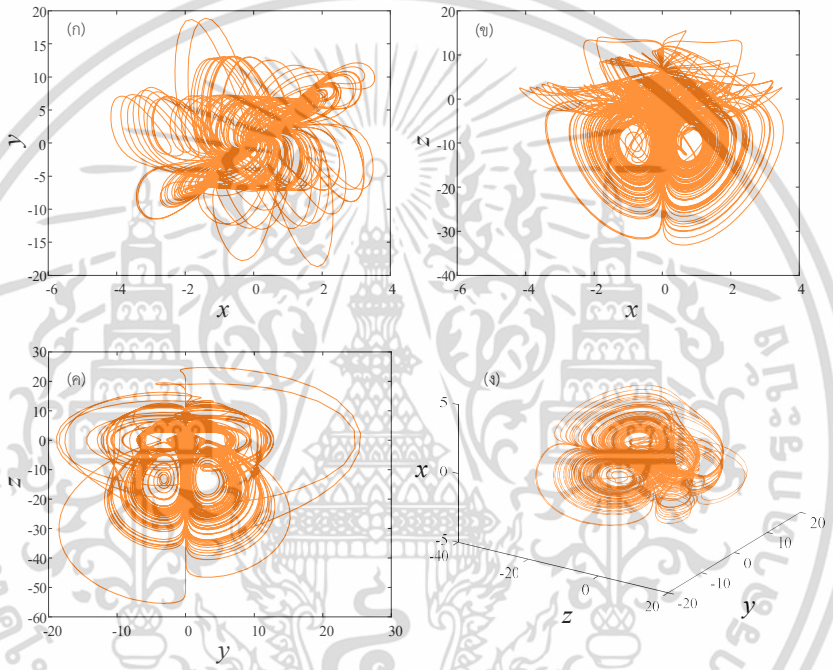
3.5.2 คุณสมบัติการจัดรูปเพื่อลดความซับซ้อนของระบบ (The simplified system)

ระบบที่นำเสนอใน (3.16) มีการนำเสนอเทคนิคการจัดรูปเพื่อลดจำนวนพจน์ของระบบ โดยยังคงพฤติกรรมเคออสในลักษณะคล้ายสี่วงม้วนในรูปที่ 3.27 ด้วยการกำหนดพารามิเตอร์ p_2=0 และ p_5=0 ทำให้พจน์ของระบบที่นำเสนอใน (3.16) หายไป 2 พจน์ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{cases} \dot{x} = p_1 y + p_3 xz, \\ \dot{y} = -p_4 xz + p_6 yz + p_7 x, \\ \dot{z} = p_8 - p_9 y^2. \end{cases} \tag{3.23}$$

จากสมการที่ (3.23) ถูกลดจำนวนพจน์จากสมการที่ (3.16) ที่มีจำนวน 9 พจน์ เหลือ 7 พจน์ รวมถึงพารามิเตอร์ในระบบจาก 9 ตัว เหลือ 7 ตัว ระบบดังกล่าวยังคงพฤติกรรมเคออสด้วยลักษณะสี่วงม้วน แสดงลักษณะ phase portraits ดังรูปที่ 3.29 โดยพารามิเตอร์ถูกกำหนดเหมือนกับสมการที่ (3.17) ยกเว้น p_2 และ p_5 ที่ถูกกำหนดเท่ากับ 0



รูปที่ 3.29 phase portraits ของระบบสี่วงม้วนที่ทำการลดรูปในระบบ (3.23) (ก) ระนาบ x-y (ข) ระนาบ x-z (ค) ระนาบ y-z (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z

การวิเคราะห์ความเสถียรภาพของระบบนี้ ที่จุดคงที่ Y_e ในสมการที่ (3.18) ยังคงเดิม แต่ X_e ถูกเปลี่ยนเป็น

$$X_{e\pm} = -\frac{p_1 Y_e}{p_3}\left(\frac{1}{Z_{e\pm}}\right) \tag{3.24}$$

ซึ่งจุดคงที่ Z_e หาได้จาก

$$p_3 p_6 Z_e^2 + p_1 p_4 Z_e - p_1 p_7 = 0 \tag{3.24}$$

เมื่อได้จุดคงที่ของ X_e, Y_e, Z_e แล้ว สมการลักษณะเฉพาะของระบบที่ (3.23) สามารถเขียนได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\lambda^3 + B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0 = 0 \tag{3.24}$$

โดยที่

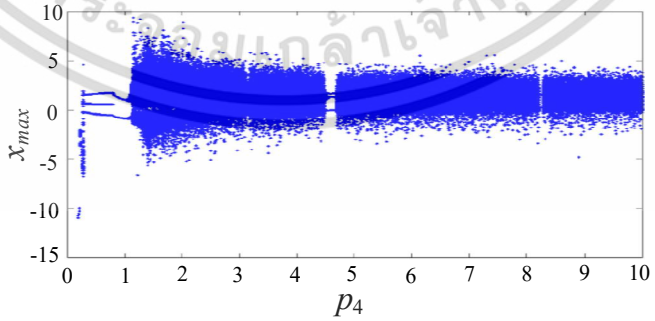
$$\begin{aligned} B_2 &= Z_e(p_3 + p_6), \\ B_1 &= \frac{-2p_7 p_9 X_e Y_e}{Z_e}, \\ B_0 &= \frac{2p_1 p_8 (p_4 Z_e - 2p_7)}{Z_e}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

โดยระบบ (3.23) จะถูกนำมาวิเคราะห์พฤติกรรมพลวัตหลักของระบบที่นำเสนอ โดยจะวิเคราะห์ the bifurcation เพื่อสังเกตพฤติกรรมต่างๆที่เกิดขึ้นบนระบบ

3.5.3 การวิเคราะห์ the bifurcation และพฤติกรรมพลวัตต่างๆ

เพื่อตรวจสอบพลวัตในช่วงพารามิเตอร์ต่างๆของระบบ the bifurcation เป็นเครื่องมือกราฟฟิกที่สำคัญในการแสดงให้เห็นถึงผลลัพธ์เป็นวงกว้างในช่วงของค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในส่วนนี้จะทำการตรวจสอบพารามิเตอร์ 3 ตัวของระบบในสมการที่ (3.23) คือ p_4 p_6 และ p_7 โดยพารามิเตอร์อื่นๆถูกกำหนดคงที่ไว้ดังสมการที่ (3.17) ยกเว้น p_2 และ p_5 ที่ถูกกำหนดเป็น 0 ทุกพารามิเตอร์ที่ทำการตรวจสอบจะแสดงให้เห็นถึงจุด Hopf bifurcation ของแต่ละพารามิเตอร์ เนื่องจาก Hopf bifurcation เป็นจุดที่ส่งผลต่อการวิเคราะห์ความเสถียรภาพ โดยจุดดังกล่าวสามารถบ่งบอกได้ถึงค่าพารามิเตอร์ที่เปลี่ยนจากสภาวะเสถียร ไปเป็น ไม่เสถียร (หรือ ภาวะเข้าสู่พฤติกรรมเคออส) โดยในงานนี้มีการตรวจสอบพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัวในช่วง [-50, 50] อย่างละเอียด โดยจะถูกนำมาแสดงเฉพาะช่วงที่มีปัจจัยสำคัญเท่านั้น

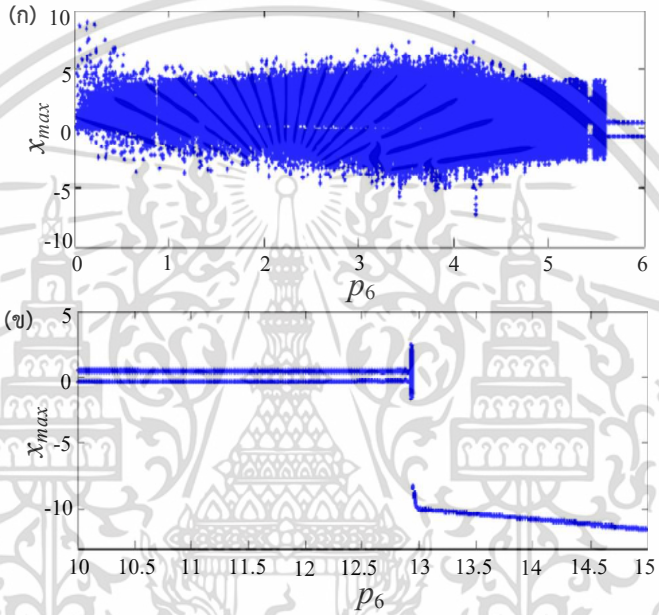
พารามิเตอร์ p_4 ถูกตรวจสอบในช่วง $0 \le p_4 \le 10$ โดยแสดงบนเอาต์พุต x_{max} ดังรูปที่ 3.30 พฤติกรรมเคออสบนพารามิเตอร์ p_4 แสดงให้เห็นชัดได้ตั้ง 1.5 ถึง 10 โดยมีจุด Hopf bifurcation ที่ $p_4 \approx 0.22$ ซึ่งค่าพารามิเตอร์ p_4 ที่แสดงลักษณะสี่วงม้วนที่นำเสนอถูกเลือกที่ p_4=4



รูปที่ 3.30 The bifurcation ของพารามิเตอร์ p_4 โดยมีจุด Hopf bifurcation ที่ $p_4 \approx 0.22$

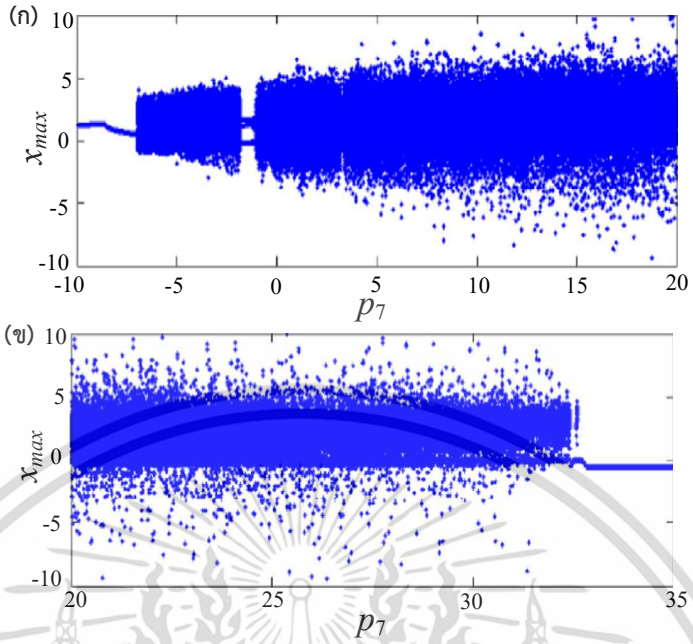
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่พารามิเตอร์ p_6 และ p_7 จะมีการแสดงผลเป็นสองส่วน โดยส่วนแรกจะแสดงเฉพาะช่วงพฤติกรรมเคออสที่ชัดเจน และส่วนที่สองจะแสดงผลที่เกิดจุด Hopf bifurcation พารามิเตอร์ p_6 ถูกแสดงบนเอาต์พุต x_{max} ดังรูปที่ 3.31 และพารามิเตอร์ p_7 ถูกแสดงบนเอาต์พุต x_{max} ดังรูปที่ 3.32 จุด Hopf bifurcation ของทั้งสองพารามิเตอร์ถูกแสดงไว้ใต้คำอธิบายของรูป สำหรับพารามิเตอร์ p_6 แสดงพฤติกรรมเคออสที่เป็นลักษณะสี่วงม้วนที่ชัดเจนได้ในช่วง 0.5 ถึง 3 ซึ่งในงานนี้เลือกใช้ p_6=1 สำหรับพารามิเตอร์ p_7 แสดงพฤติกรรมเคออสที่เป็นลักษณะสี่วงม้วนที่ชัดเจนได้ในช่วง -6 ถึง 20 ซึ่งในงานนี้เลือกใช้ p_7=0.1



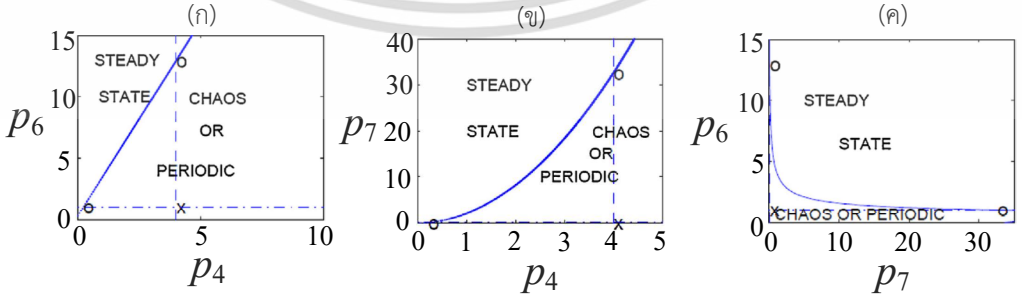
รูปที่ 3.31 The bifurcation ของพารามิเตอร์ p_6 (ก) แสดงช่วงพฤติกรรมเคออสในช่วง $0 \le p_6 \le 6$ (ข) ขยายช่วง $10 \le p_6 \le 15$ เพื่อให้เห็นจุด Hopf bifurcation ที่ $p_6 \approx 12.95$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.32 The bifurcation ของพารามิเตอร์ p_7 (ก) แสดงช่วงพฤติกรรมเคออสในช่วง $-10 \le p_7 \le 20$ (ข) แสดงช่วง $20 \le p_7 \le 35$ เพื่อให้เห็นจุด Hopf bifurcation ที่ $p_7 \approx 32.65$

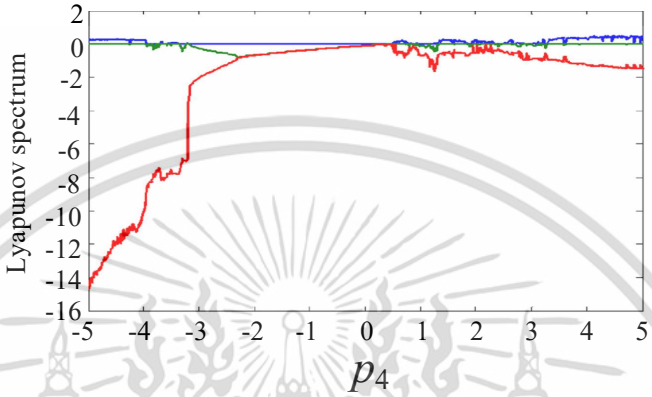
เพื่อให้เห็นภาพรวมโดยง่ายของพฤติกรรมพลวัตทั้ง 3 พารามิเตอร์ คือ p_4 p_6 p_7 ผลลัพธ์ของการแสดง 2 พารามิเตอร์พร้อมกัน ถูกแสดงดังรูปที่ 3.33 ที่จุดวงกลม (o) ในรูป คือจุด Hopf bifurcation ของแต่ละพารามิเตอร์ จุดกากบาท (x) คือจุดพารามิเตอร์ที่ถูกเลือกใช้แสดงพฤติกรรมเคออสลักษณะสี่วงม้วนของระบบ โดยเส้นทึบสีน้ำเงินเป็นเส้นระหว่างจุด Hopf bifurcation ของพารามิเตอร์ทั้งสองตัว ซึ่งเป็นเส้นแบ่งของสถานะความเสถียรภาพ โดย Steady state คือ พื้นที่พารามิเตอร์ที่มีความเสถียรของระบบ และ Chaos or Periodic คือ พื้นที่พารามิเตอร์ที่มีความไม่เสถียรของระบบ



รูปที่ 3.33 พลวัตพารามิเตอร์ 2 มิติ โดยแสดงภาพรวมของการเปลี่ยนแปลง 2 พารามิเตอร์พร้อมกัน เพื่อให้เห็นภาพรวมพลวัตของระบบใน (3.23) (ก) $p_4 - p_6$ (ข) $p_4 - p_7$ (ค) $p_7 - p_6$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

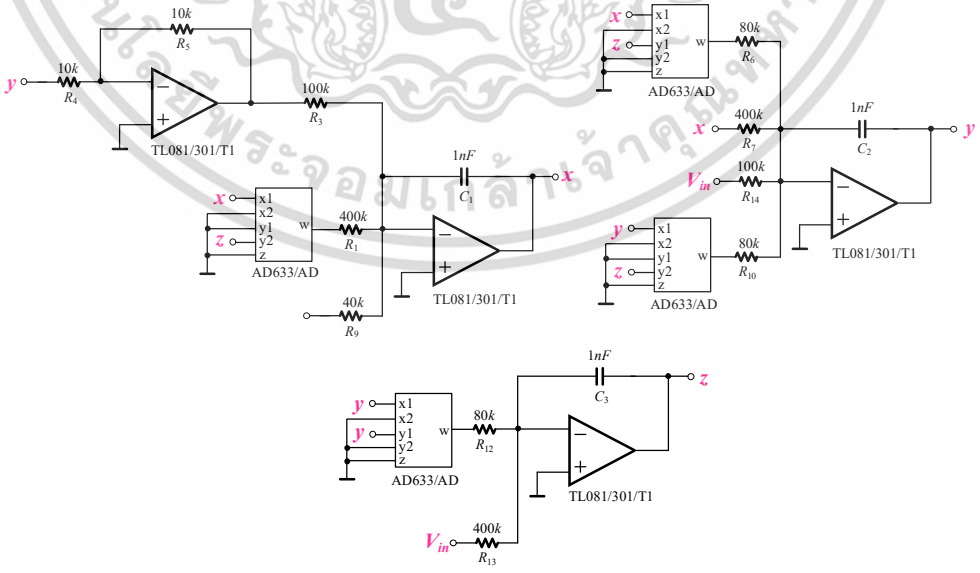
สเปกตรัม Lyapunov ถูกใช้เพื่อตรวจการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ เพื่อสังเกตถึงค่าบวก *LE* ที่บ่งบอกถึงช่วงที่มีพฤติกรรมเป็นเคออส สเปกตรัม Lyapunov ของระบบที่นำเสนอ (3.23) ถูกแสดงสำหรับพารามิเตอร์ p_4 ดังรูปที่ 3.34



รูปที่ 3.34 สเปกตรัม Lyapunov ของพารามิเตอร์ p_4 ในช่วง -5 ถึง 5 ของระบบ (3.23)

3.5.4 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส

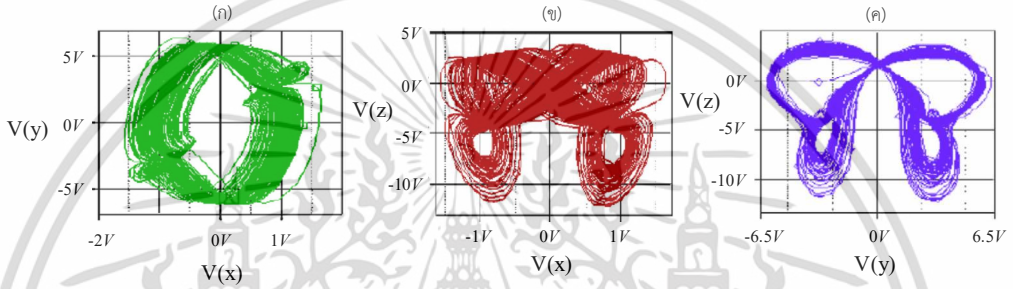
เพื่อยืนยันหลักการสร้างของระบบที่ออกแบบทางทฤษฎีในสมการที่ (3.23) การออกแบบเป็นวงจรเพื่อยืนยันผลลัพธ์ที่สอดคล้องกันจะถูกนำเสนอในส่วนนี้ โดยผลลัพธ์ของวงจรจะถูกจำลองผลด้วยโปรแกรม OrCAD-PSpice และผลลัพธ์การทดลองจริงโดยแสดงผลบน Oscilloscope แบบจำลองเชิงตัวเลขในสมการที่ (3.23) ถูกออกแบบเป็นวงจรดังรูปที่ 3.35



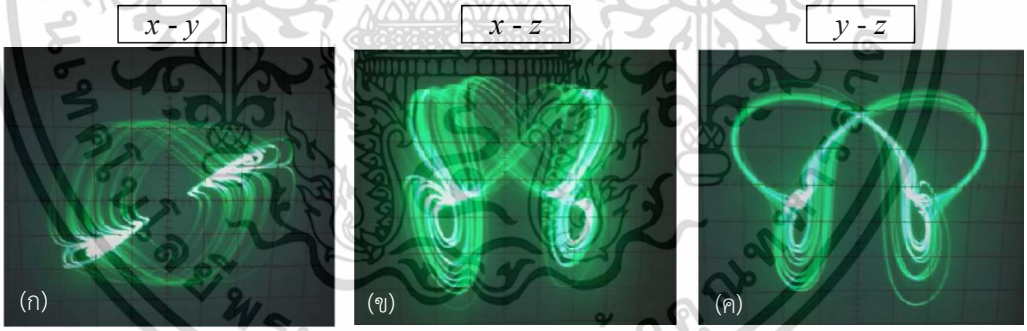
รูปที่ 3.35 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบที่นำเสนอ โดยใช้อุปกรณ์ OPAMP

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

องค์ประกอบพื้นฐานของวงจร ประกอบไปด้วย แอปแอมป์ เบอร์ TL081/301/T1 ตัวคูณแอนาล็อค AD633 ตัวต้านทาน และตัวเก็บประจุ แหล่งจ่ายไฟตรงของวงจร ถูกกำหนด ±15Vdc ค่าตัวต้านทานของวงจรถูกหนดให้สอดคล้องกับพารามิเตอร์ในสมการที่ (3.17) โดยกำหนด R_1=133.3 R_3=400k R_4=100k R_5=77k R_6=10k R_7=90.9k R_9=571.9k R_{10}= R_{12}=40k R_{13}=600k R_{14}=10M และ C_1=C_2=C_3=1nF จากค่าที่กำหนด ผลการจำลองบน PSpice สำหรับ phase portraits ถูกแสดงดังรูปที่ 3.36 และผลการทดลองจริงของวงจร ถูกแสดงผลลัพธ์บน Oscilloscope ดังรูปที่ 3.37



รูปที่ 3.36 ผลการจำลอง phase portraits ด้วยโปรแกรม PSpice (ก) ระนาบ V(x) – V(y) (ข) ระนาบ V(x) – V(z) (ค) ระนาบ V(y) – V(z)



รูปที่ 3.37 ผลการทดลอง phase portraits บน Oscilloscope (ก) ระนาบ x – y (ข) ระนาบ x – z (ค) ระนาบ y – z

จากระบบเคออสตัวดึงดูดสี่วงม้วนของ A. Akgul ที่นำเสนอมีภาพรวมองค์ประกอบต่างๆในการวิเคราะห์ของระบบดังตารางที่ 3.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.6 คุณสมบัติของระบบตัวดึงดูดสี่วงม้วนของ A. Akgul ที่นำเสนอ

<table>
<tr><th colspan="8">องค์ประกอบต่างๆของระบบเคออสสี่วงม้วน A. Akgul</th></tr>
<tr><th colspan="2">โครงสร้างของระบบ</th><th colspan="2">การวิเคราะห์พลวัตของระบบ</th><th colspan="2">ค่าความซับซ้อนพฤติกรรมเคออส</th><th colspan="2">องค์ประกอบวงจร</th></tr>
<tr><td>พจน์ของระบบ</td><td>9/7 พจน์</td><td rowspan="4">1. ความสมมาตร (Symmetry)
2. วิเคราะห์ความเสถียรภาพ
3. เลขชี้กำลัง Lyapunov
4. แผนภาพ bifurcation
5. Phase portraits
6. สเปกตรัม Lyapunov
7. พลวัตพารามิเตอร์ 2 มิติ
8. คุณสมบัติลดรูปของระบบ</td><td rowspan="2">LE^*</td><td rowspan="2">LE_1=0.3107,
LE_2=0,
LE_3=-1.265.</td><td>OPAMP</td><td>4 ตัว</td></tr>
<tr><td>พารามิเตอร์</td><td>9/7 ตัว</td><td>ตัวคูณแอนาล็อค</td><td>4 ตัว</td></tr>
<tr><td>พจน์ NLT*</td><td>4 พจน์</td><td rowspan="3">D_{KY}</td><td rowspan="3">2.2456</td><td>R</td><td>11 ตัว</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ชนิด NLT*</td><td rowspan="2">กำลังสอง</td><td>C</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td>ES^*</td><td>✓</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>รวม 8 เครื่องมือ</td><td></td><td></td><td>รวม 22 ตัว</td></tr>
</table>

ES^* คือ ผลการทดลองจริง (Experimental Result)

3.6 บทสรุป

ในบทนี้กล่าวถึงงานวิจัยที่มีการออกแบบระบบเคออสรูปแบบสี่วงม้วนลักษณะต่างๆในอดีต โดยแต่ละงานวิจัยมีการออกแบบโครงสร้างของระบบที่แตกต่างกัน รวมถึงมีคุณสมบัติพื้นฐานทางพลวัตที่แตกต่างกัน ซึ่งปัจจัยสำคัญ 4 อย่างที่ใช้ในการเปรียบเทียบสำหรับการออกแบบระบบเคออสขององแต่ละงานวิจัย ได้แก่ โครงสร้างของระบบ ความหลากหลายในการศึกษาระบบเคออส (จำนวนเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา) ค่าความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออส และองค์ประกอบของวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส โดยรายละเอียดในแต่ละปัจจัยที่ถูกนำมาเปรียบเทียบถูกอธิบายไว้ในหัวข้อที่ 3.1 คุณสมบัติของแต่ละงานวิจัยถูกสรุปไว้ดังตารางที่ 3.2 3.3 3.4 และ 3.5 สำหรับงานวิจัยทั้งสี่งานตามลำดับ

ในงานของวิทยานิพนธ์ คือ การออกแบบระบบเคออสที่มีค่าความซับซ้อนสูง เพื่อประโยชน์ในการนำไปประยุกต์ใช้สำหรับลักษณะสัญญาณเคออสที่มีการแกว่งของคาบที่คาดเดาได้ยาก โดยระบบที่ออกแบบมีการสร้างลักษณะเคออสรูปแบบสี่วงม้วนที่เป็นลักษณะเด่นของวิทยานิพนธ์ ซึ่งเป็นรูปแบบใหม่ที่ไม่เคยมีการออกแบบมาในอดีต รวมถึงมีคุณสมบัติอื่นๆที่เป็นข้อดีในการออกแบบเมื่อเทียบกับงานวิจัยอื่น โดยงานของวิทยานิพนธ์จะถูกนำมาเปรียบเทียบด้วยปัจจัยสำคัญ 4 อย่าง ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
ระบบเคออสที่มีพฤติกรรมซับซ้อนสูงด้วยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่

4.1 บทนำ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้นำเสนอระบบเคออสด้วยพื้นฐานแบบจำลองการกระตุก โดยนำแบบจำลองการกระตุกมาดัดแปลง พร้อมกับออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่ คือ ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม (Modified rectangular function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ไม่เคยถูกนำเสนอมาก่อนในอดีต แบบจำลองการกระตุกที่นำมาดัดแปลงสามารถสลับตำแหน่งของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างง่ายดาย ทำให้สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสแบบใหม่ได้หลากหลายรูปแบบ หนึ่งในลักษณะเด่นของระบบเคออสที่ออกแบบ คือ สามารถสร้างสัญญาณเคออสลักษณะสี่วงม้วนที่ซับซ้อนสูง เมื่อเทียบค่าความซับซ้อนกับงานวิจัยอื่นที่มีมาในอดีต ค่าความซับซ้อนของพฤติกรรมเคออสถูกยืนยันด้วยค่ามิติ Kaplan-Yorke (D_{KY}) ระบบที่ออกแบบสามารถแสดงพฤติกรรมพลวัตได้หลากหลายจากการปรับพารามิเตอร์ควบคุมเพียงหนึ่งตัว ยกตัวอย่างพฤติกรรมพลวัต เช่น พฤติกรรมเชิงคาบ (periodic) พฤติกรรมไม่ซ้ำคาบ (non-periodic) ตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน (Single-scroll attractor) ตัวดึงดูดสองวงม้วน (Double-Scroll attractor) จนถึงลักษณะตัวดึงดูดสี่วงม้วน (Four-scroll attractor) ระบบที่นำเสนอมีการตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตอย่างละเอียดด้วยการคำนวณทางทฤษฎีและกราฟฟิกจากการจำลองผลเชิงตัวเลขผ่านโปรแกรม MATLAB เครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ ตัวอย่างเช่น แผนภาพ Bifurcation แบบกิ่งขนาน (Bifurcation Parallel Branches) เส้นทางสู่เคออส (Route to chaos) Phase portraits แผนภาพทดสอบ 0-1 (0-1 test chart) แผนภาพ Poincare เป็นต้น มากกว่านั้น ระบบที่นำเสนอมีการวิเคราะห์การมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดแบบสมมาตรและอสมมาตร โดยยืนยันร่วมกับ Basin of attraction ซึ่งเป็นผลลัพธ์เชิงลึกในสาขาพลวัตไม่เป็นเชิงเส้น คุณสมบัติพิเศษ (Special features) ถูกใช้ในการวิเคราะห์เพื่อดึงศักยภาพเพิ่มเติมของระบบเคออสที่ออกแบบมาประยุกต์ใช้ เช่น การเพิ่มออฟเซ็ต (Offset boosting) การควบคุมขนาด (Amplitude control) เป็นต้น โดยระบบเคออสที่ออกแบบมีการสร้างวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสเพื่อยืนยันหลักการสร้างทางทฤษฎีในการนำไปใช้จริง วงจรใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA ร่วมกับตัวเก็บประจุต่อลงกราวด์ในการสร้างสามารถปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ โดยผลที่ได้จากวงจรจะถูกเปรียบเทียบอย่างชัดเจนกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขจากโปรแกรม MATLAB

มากกว่านั้นในงานของวิทยานิพนธ์เล่มนี้มีการสร้างสัญญาณเคออสในลักษณะอื่นจากโครงสร้างของระบบที่ออกแบบ โดยใช้ฟังก์ชันรูปแบบใหม่ (ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม) ร่วมกับฟังก์ชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

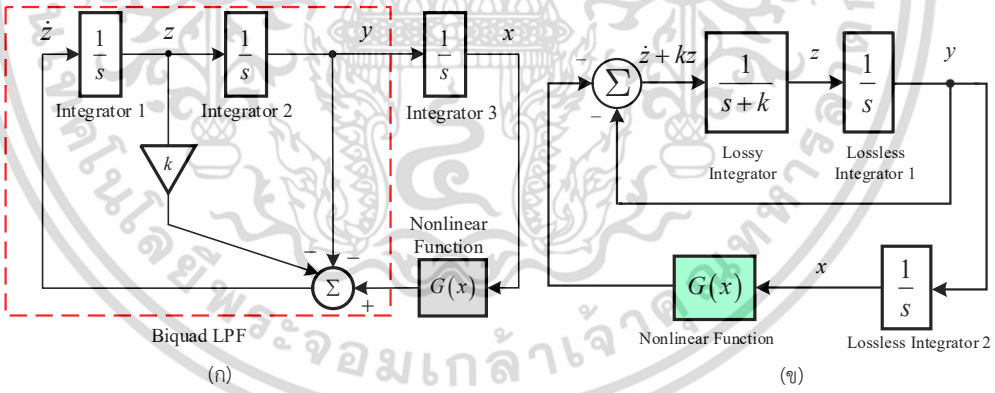
สัญลักษณ์ (Signum function) ซึ่งสามารถสร้างพฤติกรรมเคออสที่ซับซ้อนสูงได้ถึงลักษณะตัวดึงดูดหกวงม้วน (Six-scroll attractor) มีการใช้อุปกรณ์ FPAA (Field Programmable Analog Array) ในการยืนยันผลลัพธ์ทางวงจร ร่วมถึงมีการนำไปประยุกต์ใช้ความปลอดภัยด้านการสื่อสาร ซึ่งจะถูกกล่าวไว้ใน “ส่วนเพิ่มเติม” ท้ายบทที่ 4 ของวิทยานิพนธ์

4.2 หลักการออกแบบระบบเคออสที่นำเสนอ

จากที่กล่าวไปข้างต้น ระบบเคออสที่นำเสนอสามารถสลับตำแหน่งของฟังก์ชันได้โดยง่าย ทำให้ออกแบบสัญญาณเคออสได้หลากหลาย โดยระบบดัดแปลงจากพื้นฐานแบบจำลองการกระตุก และมีการออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่มาประยุกต์ใช้ในระบบที่ออกแบบ โดยจะกล่าวถึงหลักการสร้างดังต่อไปนี้

4.2.1 โครงสร้างระบบเคออสที่นำเสนอโดยดัดแปลงจากแบบจำลองการกระตุก

แบบจำลองการกระตุกพื้นฐานเป็นระบบเคออสอันดับสามและมีโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อน มีค่าสัมประสิทธิ์เพียงหนึ่งตัว (k) และสามารถออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างอิสระ ($G(x)$) โดยในระบบที่ออกแบบมีการดัดแปลงแบบจำลองการกระตุกใหม่ แสดงดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ระบบเคออสโครงสร้างแบบจำลองการกระตุก (ก) แบบจำลองการกระตุกต้นฉบับ (ข) แบบจำลองการกระตุกแบบดัดแปลง

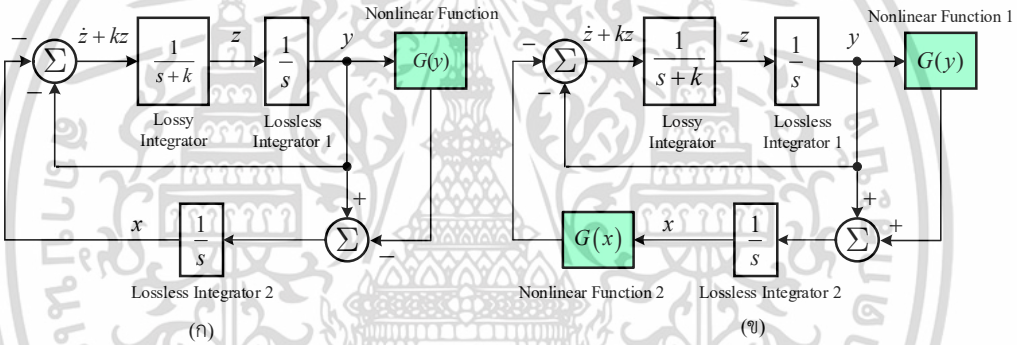
โดยในรูปที่ 4.1 (ก) คือ ต้นแบบแบบจำลองการกระตุกที่ถูกคิดค้นโดย J.C. Sportt [9] โดยทำการดัดแปลงด้วยการยุบบล็อคไดอะแกรมในกรอบสีแดง คือ ฟังก์ชันกรองความถี่ผ่านอันดับสองไบควอด (ω_0=1) ให้กลายเป็นรูปที่ 4.1 (ข) โดยสมการอนุพันธ์อันดับสามอิสระของระบบที่ออกแบบสามารถเขียนได้ ดังสมการที่ (4.1) [85]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x); \end{cases} \tag{4.1}$$

ที่ x, y, z คือ ตัวแปรสเตทของระบบ ที่ k คือ สัมประสิทธิ์ และ $G(x)$ คือ ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ออกแบบได้อิสระ

จากบล็อคไดอะแกรมที่ออกแบบในรูปที่ 4.1 (ข) มีการออกแบบให้สามารถปรับเปลี่ยนตำแหน่งของฟังก์ชันได้ที่ตำแหน่งของตัวแปรสเตทอื่นของระบบ ทำให้ได้ลักษณะสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ โดยในรูปที่ 4.1 (ข) เป็นการใช้ฟังก์ชันที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x ($G(x)$) แต่ในรูปที่ 4.2 ทำการออกแบบโดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท y ($G(y)$) ดังรูปที่ 4.2 (ก) และใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x และ y ($G(y)$) พร้อมกัน ดังรูปที่ 4.2 (ข)



รูปที่ 4.2 บล็อคไดอะแกรมของระบบที่ดัดแปลง (ก) ใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ตัวแปรสเตท y (ข) ใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ตัวแปรสเตท x และ y

ระบบทั้ง 2 แบบในรูปที่ 4.2 ใช้โครงสร้างเดิมในรูปที่ 4.1 (ข) เพียงทำการเปลี่ยนตำแหน่งของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น การออกแบบดังกล่าวทำให้ระบบสามารถสร้างสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่โดยที่สามารถใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นเดียวกันในระบบ สมการอนุพันธ์อันดับสามอิสระของรูปที่ 4.2 (ก) และ (ข) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (4.2) และ (4.3) [85] ตามลำดับ

$$\begin{cases} \dot{x} = y - G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - x; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y + G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x); \end{cases} \tag{4.3}$$

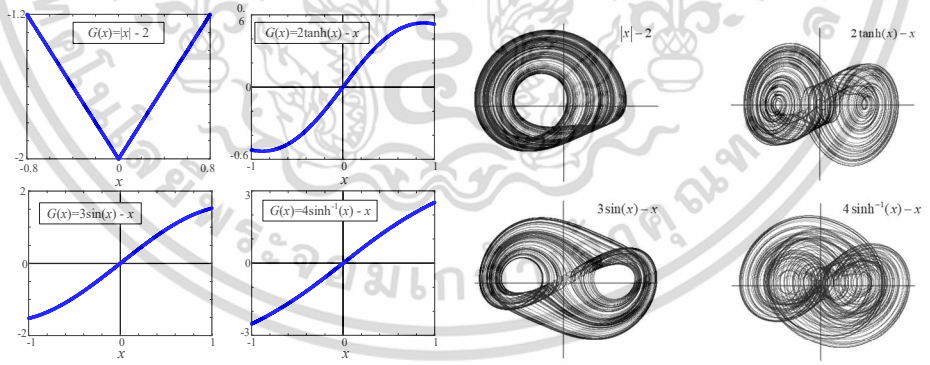
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากระบบที่ออกแบบทั้ง 3 แบบ ดังสมการที่ (4.1) (4.2) และ (4.3) สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสได้ถึง 3 รูปแบบจากการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นเดียวกัน ซึ่งใช้ฟังก์ชันที่ชื่อว่า “ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมในหัวข้อที่ 4.2.2” โดยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ใช้ใน $G(x)$ และ $G(y)$ จะถูกออกแบบขึ้นมาใหม่ แสดงการออกแบบดังต่อไปนี้

4.2.2 การออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่

ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ใช้สำหรับระบบเคออสมีหลายรูปแบบ เช่น ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic) ฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นชิ้น (Piecewise linear function) รวมถึงฟังก์ชันตรีโกณรูปแบบต่างๆ [85-87] แสดงตัวอย่างฟังก์ชันตรีโกณที่เคยมีการออกแบบสำหรับแบบจำลองการกระตุกพร้อมกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ k ดังสมการที่ (4.4) ลักษณะของฟังก์ชันแสดงดังรูปที่ 4.3 (ก) ซึ่งฟังก์ชันสามารถสร้างลักษณะเคออสสองวงม้วนได้ดังรูปที่ 4.3 (ข) ตัวอย่างดังกล่าวคือส่วนหนึ่งของการใช้ฟังก์ชันตรีโกณในการออกแบบลักษณะสัญญาณเคออสด้วยแบบจำลองการกระตุก จะเห็นว่าสามารถเปลี่ยนฟังก์ชัน $G(x)$ ได้อิสระ โดยสามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสได้หลากหลายรูปแบบ [67]

$$G(x)=\begin{cases} |x|-2 & ;k=0.6 \\ 2\tanh(x)-x & ;k=0.19 \\ 4\sinh^{-1}(x)-x & ;k=0.24 \\ 3\sin(x)-x & ;k=1 \end{cases} \tag{4.4}$$



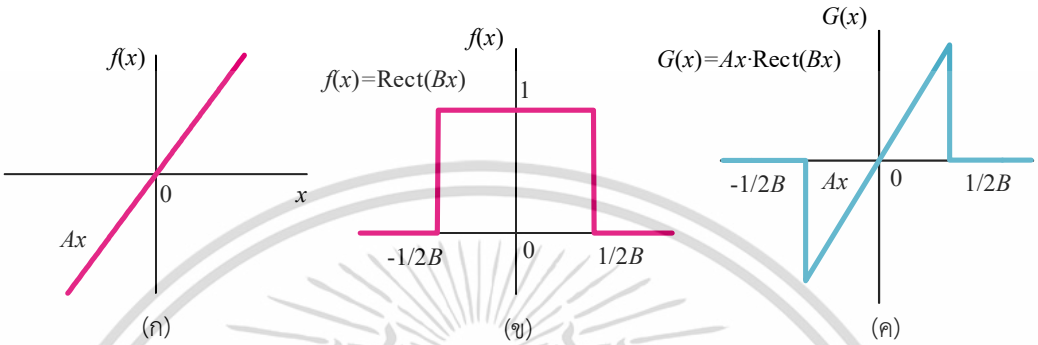
(ก) (ข)

รูปที่ 4.3 ตัวอย่างลักษณะเคออสจากฟังก์ชันตรีโกณที่ออกแบบในอดีต (ก) ลักษณะของฟังก์ชัน (ข) Phase portrait เคออสหนึ่งและสองวงม้วนโดยใช้ฟังก์ชันในสมการที่ (4.4)

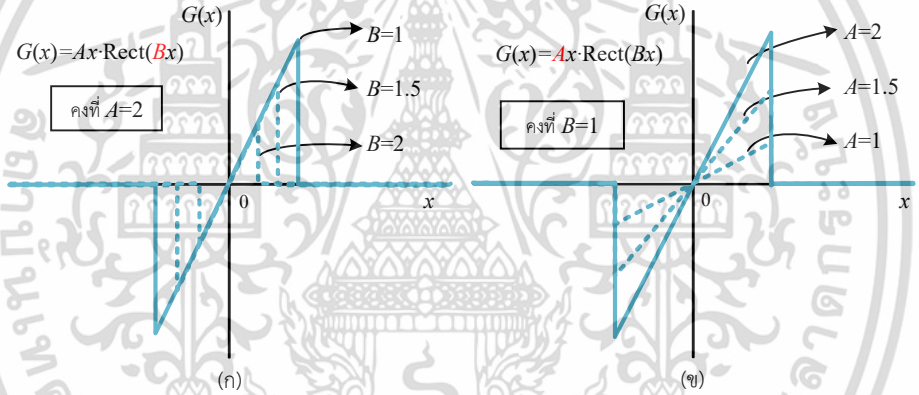
โดยฟังก์ชันที่ทำการออกแบบขึ้นใหม่ เป็นฟังก์ชันรูปแบบเชิงเส้นเป็นชิ้น ออกแบบจากการคูณกันของฟังก์ชันเชิงเส้นและฟังก์ชันสี่เหลี่ยม ดังรูปที่ 4.4 (ก) – (ค) ค่าคงที่ของฟังก์ชัน ได้แก่ เกน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(A) และขอบเขต ($1/2B$) ของฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลงในรูปที่ 4.4 (ค) สามารถปรับได้อย่างอิสระ แสดงการปรับค่าคงที่ดังรูปที่ 4.5 (ก) - (ข) โดยค่าคงที่ทั้งสองตัว (A และ B) ส่งผลต่อลักษณะสัญญาณเคออสของระบบที่ออกแบบ



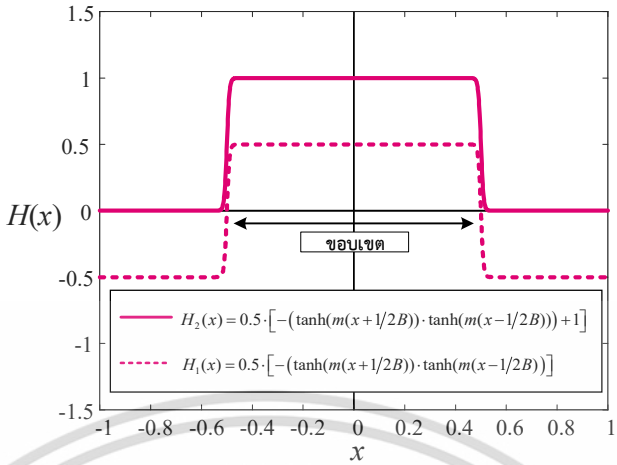
รูปที่ 4.4 ลักษณะของฟังก์ชัน (ก) ฟังก์ชันเชิงเส้น (ข) ฟังก์ชันสี่เหลี่ยม (ค) ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลง



รูปที่ 4.5 ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมโดยปรับค่าคงที่ (ก) ปรับค่า B โดยคงที่ค่า A (ข) ปรับค่า A โดยคงที่ค่า B

ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 พฤติกรรมพลวัตจำเป็นต้องมีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อพิสูจน์ลักษณะต่างๆที่เกิดขึ้นบนระบบเคออส ดังนั้นฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ออกแบบจำเป็นจะต้องแปลงรูปเพื่อให้สามารถวิเคราะห์ได้ทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในส่วนของตัวฟังก์ชันสี่เหลี่ยมจะถูกแปลงด้วยฟังก์ชันตรีโกณ $\tanh(x)$ และระบุโครงสร้างของฟังก์ชันได้ดังรูปที่ 4.6 (ที่ m ถูกกำหนดเท่ากับ 100 เสมอ) [85-87]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

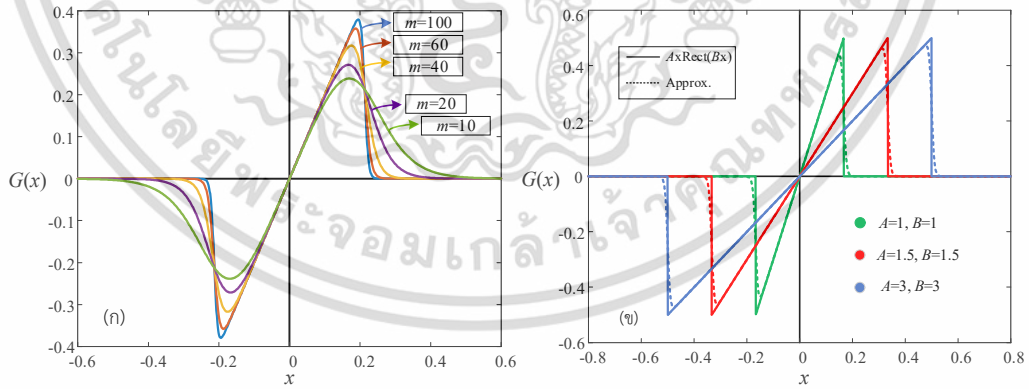


รูปที่ 4.6 ลักษณะของฟังก์ชันประมาณค่าสำหรับฟังก์ชันสี่เหลี่ยม

จากรูปที่ 4.6 หลังออกแบบลักษณะฟังก์ชันประมาณค่าแล้ว ฟังก์ชันในรูปที่ 4.4 (ค) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$G(x) = Ax\text{Rect}(Bx) \approx \frac{Ax}{2}\cdot\left(-\left(\tanh(m(x+1/2B))\cdot\tanh(m(x-1/2B))\right)+1\right) \qquad (4.5)$$

ฟังก์ชันในสมการที่ (4.5) แสดงตัวอย่างการปรับค่า m ได้ดังรูปที่ 4.7 (ก) โดยในงานนี้เลือก m=100 ในการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ และเปรียบเทียบฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมกับฟังก์ชันประมาณค่า โดยปรับค่าคงที่ A และ B ดังรูปที่ 4.7 (ข)



รูปที่ 4.7 (ก) ลักษณะฟังก์ชันประมาณค่าเมื่อปรับค่าคงที่ m (ข) เปรียบเทียบฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมกับฟังก์ชันประมาณค่า โดยปรับค่าคงที่ A และ B

ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลงที่ออกแบบจะถูกนำไปใช้ในระบบที่ออกแบบไว้ในหัวข้อ 2.2.1 สำหรับตำแหน่ง $G(x)$ และ $G(y)$ ในสมการที่ (4.1) – (4.3) ซึ่งสามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ได้ถึง 3 รูปแบบจากเพียงหนึ่งฟังก์ชัน โดยจะเห็นว่าในระบบมีค่าคงที่ทั้งหมดเพียง 4 ตัว

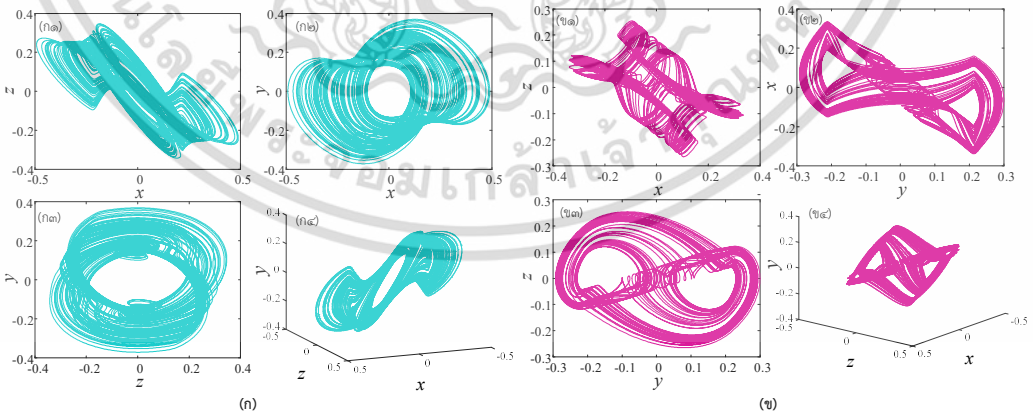
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(A, B, k, m) สังเกตได้จากสมการที่ (4.1) – (4.3) และ (4.5) โดยจะกำหนด m=100 เสมอ โดยระบบที่ออกแบบสามารถสร้างพฤติกรรมเคออสได้ 3 ลักษณะที่เป็นรูปแบบใหม่ไม่เคยมีการนำเสนอในอดีต ด้วยลักษณะสองวงม้วนและสี่วงม้วน ค่าพารามิเตอร์ที่ถูกเลือกนำเสนอพร้อมกับรูป phase portraits ถูกสรุปไว้ดังตารางที่ 4.

ตารางที่ 4.1 การกำหนดของระบบที่ออกแบบและฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น พร้อมค่าพารามิเตอร์หลักที่นำเสนอ

Phase portraits	ระบบที่ออกแบบ”		พารามิเตอร์	ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น	ลักษณะเคออส
รูปที่ 4.8 (ก)	$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=-kz-y-G(x);\end{cases}$	(4.1)	A=1.5 B=2.35 k=0.4		สองวงม้วน
รูปที่ 4.8 (ข)	$\begin{cases}\dot{x}=y-G(y),\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=-kz-y-x;\end{cases}$	(4.2)	A=1.7 B=2.35 k=0.7	$G(x)\approx\frac{Ax}{2}\cdot(-(\tanh(m(x+1/2B))\cdot,\ldots$ $\tanh(m(x-1/2B)))+1)$	สองวงม้วน
รูปที่ 4.9	$\begin{cases}\dot{x}=y+G(y),\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=-kz-y-G(x);\end{cases}$	(4.3)	A=1.2 B=2.2 k=0.45		สี่วงม้วน

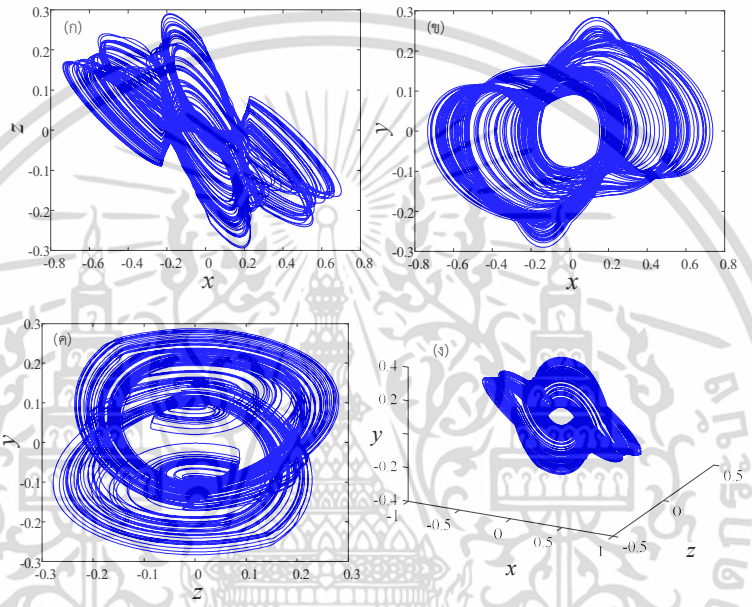
จากตารางที่ 4.1 ถูกสรุประบบที่ออกแบบทั้ง 3 ระบบในสมการที่ (4.1) – (4.3) พร้อมกับฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ออกแบบใหม่ โดยใช้เพียงหนึ่งฟังก์ชัน และกำหนดพารามิเตอร์เพียง 3 ตัวในระบบ ลักษณะเคออสที่สร้างได้ถูกแสดงบน phase portraits ดังรูปที่ 4.8 และ 4.9 โดยลักษณะเคออสในรูปที่ 4.8 เป็นเคออสลักษณะสองวงม้วนรูปแบบใหม่ ถูกแสดงบนระนาบ x-z ระนาบ x-y ระนาบ y-z และ 3 มิติ ระนาบ x-y-z สำหรับรูปที่ 4.8 (ก๑) - (ก๔) และรูปที่ 4.8 (ข๑) – (ข๔) ตามลำดับ



รูปที่ 4.8 Phase portraits ลักษณะสองวงม้วนของระบบที่นำเสนอ โดยใช้ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลง (ก) ระบบในสมการที่ (4.1) (ข) ระบบในสมการที่ (4.2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในรูปที่ 4.9 เป็นเคออสลักษณะสี่วงม้วน ที่เป็นลักษณะเด่นของระบบที่ออกแบบ มีความซับซ้อนสูงด้วยเคออสรูปแบบหลายวงม้วน (Multi-scroll) ลักษณะดังกล่าวถูกสร้างในระบบที่ (4.3) ด้วยการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นพร้อมกันที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x และ y ทำให้เกิดลักษณะสัญญาณเคออสที่มีความซับซ้อนสูงกว่าระบบอื่น (ข้อดีของระบบเคออสหลายวงม้วนถูกกล่าวไว้ในบทที่ 2 และ 3) แต่มีการปรับพารามิเตอร์เพียง 3 ตัวในระบบ โดยระบบที่นำเสนอจะถูกวิเคราะห์เชิงตัวเลขและยืนยันผลค่าความซับซ้อนในทางทฤษฎีอย่างละเอียดในหัวข้อถัดไป



รูปที่ 4.9 Phase portraits ลักษณะสี่วงม้วนของระบบที่นำเสนอ โดยมีพฤติกรรมซับซ้อนสูงในสมการที่ (4.3) (ก) ระนาบ x-z (ข) ระนาบ x-y (ค) ระนาบ z-y (ง) 3 มิติ ระนาบ x-y-z

4.3 วิเคราะห์คุณสมบัติพื้นฐานของระบบเคออสที่ออกแบบ

4.3.1 วิเคราะห์ความเสถียรภาพ

ในส่วนนี้คือการวิเคราะห์เชิงตัวเลขทางคณิตศาสตร์ เพื่อยืนยันว่าระบบที่นำเสนอมีพฤติกรรมที่เป็นเคออสด้วยการวิเคราะห์ความเสถียรภาพโดยใช้ร่วมกับกฎของ Shilnikov [2, 19-20] โดยเริ่มจากการวิเคราะห์ค่าสมดุล (Equilibrium) และค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue: λ) เพื่อนำไปสู่ค่าความเสถียรภาพของระบบ ซึ่งความเสถียรภาพของระบบสามารถบ่งบอกถึงความเสถียรและไม่เสถียรที่มีปัจจัยจากพารามิเตอร์ของระบบได้ โดยในการวิเคราะห์จะนำระบบที่ (4.3) ที่ใช้ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลง โดยมีลักษณะเด่นคือเคออสสี่วงม้วนมาวิเคราะห์ให้ดูโดยละเอียด

ค่าสมดุลของระบบที่นำเสนอใน (4.3) สามารถคำนวณได้ โดยกำหนดสมการที่ (4.3) เท่ากับ 0 สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{cases} f_1 = y + G(y) = 0 \\ f_2 = z = 0 \\ f_3 = -kz - y - G(x) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

จากสมการที่ (4.6) f_n=0 จุดสมดุลในสมการที่ (4.6) มีเพียงจุดเดียว คือ จุดสมดุลดั้งเดิม (Origin equilibrium) $E_0(0, 0, 0)$ เนื่องจากที่ f_1 จะได้ y=-$G(y)$ และที่ f_3 จะได้ -y=$G(x)$ เมื่อแทน y จาก f_1 ลงใน f_3 จะได้ $G(y) = G(x)$ หรือ $G(y) - G(x) = 0$ ซึ่ง $G(y)$ และ $G(x)$ คือฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมในสมการที่ (4.5)

จากจุดสมดุล E_0 จะถูกนำมาวิเคราะห์เพื่อหาค่าลักษณะเฉพาะ (λ) และบ่งบอกชนิดของเสถียรภาพ ค่าความเสถียรภาพของระบบที่นำเสนอสามารถวิเคราะห์ได้ โดยใช้เมททริกซ์จาโคเบียน [24-26] ดังนี้

$$J_E(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{4.7}$$

เมททริกซ์จาโคเบียนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบที่นำเสนอได้ดังนี้

$$J_E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1+(w(y)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(w(x)) & -1 & -k \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{4.8}$$

ที่ $w(y) = \frac{\partial G(y)}{\partial y} = -0.5A \cdot \left[\begin{array}{l} y\left(m\sec h^2(my + \frac{m}{2B}) \cdot \tanh(my - \frac{m}{2B}) + m\sec h^2(my - \frac{m}{2B}) \cdot \tanh(my + \frac{m}{2B}) \right) \\ + \tanh(my + \frac{m}{2B}) \cdot \tanh(my - \frac{m}{2B}) \end{array} \right]$

และ $w(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial x} = -0.5A \cdot \left[\begin{array}{l} x\left(m\sec h^2(mx + \frac{m}{2B}) \cdot \tanh(mx - \frac{m}{2B}) + m\sec h^2(mx - \frac{m}{2B}) \cdot \tanh(mx + \frac{m}{2B}) \right) \\ + \tanh(mx + \frac{m}{2B}) \cdot \tanh(mx - \frac{m}{2B}) \end{array} \right]$

กำหนดให้ A=1.2 B=2.2 k=0.45 และ m=100.

จากการกำหนดของสมการที่ (4.8) ค่าลักษณะเฉพาะของระบบ ณ จุด E_0 สามารถวิเคราะห์ได้ ดังนี้

$$J_{E_0(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1+(0.6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(0.6) & -1 & -0.45 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

จากสมการที่ (4.9) สมการคุณลักษณะ (Characteristic equation: $F(\lambda)$) สามารถวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีเชิงเส้น Algebra [23] กำหนด $F(\lambda)$ =det(J_E-λI)=0 ที่ λ คือ ค่าลักษณะเฉพาะ และ I คือเมททริกซ์ระบุ (Identify matrix) สมการคุณลักษณะสามารถวิเคราะห์ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(\lambda)_{E_0} = \det\left(J_{E_0} - \lambda I\right) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1+(0.6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(0.6) & -1 & -0.45 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$F(\lambda)_{E_0} = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1+(0.6) & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -(0.6) & -1 & -0.45-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 0.45\lambda^2 + \lambda + 0.96 \qquad (4.10)$$

ค่าลักษณะเฉพาะของระบบเคออสสี่วงม้วน ณ จุด E_0 คือ

$$\lambda_1 = -0.7701,\ \lambda_2 = 0.16 + 1.1049i,\ \lambda_3 = 0.16 - 1.1049i \qquad (4.10)$$

ในสมการที่ (4.10) จากกฎของ Shilnikov [88] เงื่อนไขของค่าลักษณะเฉพาะถูกกำหนดให้ $\lambda_1=q$ และ $\lambda_{2,3}=p+i\omega$ โดยที่ $qp<0$ และ $\omega\neq 0$ ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะที่ได้ของระบบสอดคล้องตามกฎของ Shilnikov เนื่องจากประกอบด้วยหนึ่งค่าจริงของลักษณะเฉพาะและคู่ซับซ้อนคอนจูเกทของลักษณะเฉพาะ โดยค่าเสถียรภาพอยู่ในประเภทของ Stable saddle-focus index 2 [2, 19-20] ซึ่งบ่งชี้ว่าระบบที่นำเสนอมีพฤติกรรมเป็นเคออส

ตารางที่ 4.2 ความเสถียรภาพของระบบที่นำเสนอทั้งสามระบบใน (4.1) (4.2) และ (4.3)

คุณสมบัติพลวัต	ระบบ (4.1)	ระบบ (4.2)	ระบบ (4.3)
พารามิเตอร์ในการวิเคราะห์	A=1.5 B=2.35 k=0.4	A=1.7 B=2.35 k=0.7	A=1.2 B=2.2 k=0.45
สมการคุณลักษณะ ณ จุด E_0 $(F(\lambda)_{E_0})$	$\lambda^3 + 0.4\lambda^2 + \lambda - 0.75$	$\lambda^3 + 0.7\lambda^2 + \lambda - 0.15$	$\lambda^3 + 0.45\lambda^2 + \lambda + 0.96$
ค่าลักษณะเฉพาะ ณ จุด E_0	λ_1=0.511 $\lambda_{2,3}$=-0.455±1.121i	λ_1=0.135 $\lambda_{2,3}$=-0.417±0.968i	λ_1=-0.7701 $\lambda_{2,3}$=0.16±1.1049i
ชนิดของความเสถียรภาพ	Stable saddle-focus	Stable saddle-focus	Stable saddle-focus

ตารางที่ 4.3 ค่าลักษณะเฉพาะสำหรับการปรับค่าพารามิเตอร์ k ในช่วงอื่นๆของระบบที่ออกแบบ (คงที่ค่า A และ B ของแต่ละระบบไว้ดังตารางที่ 4.2)

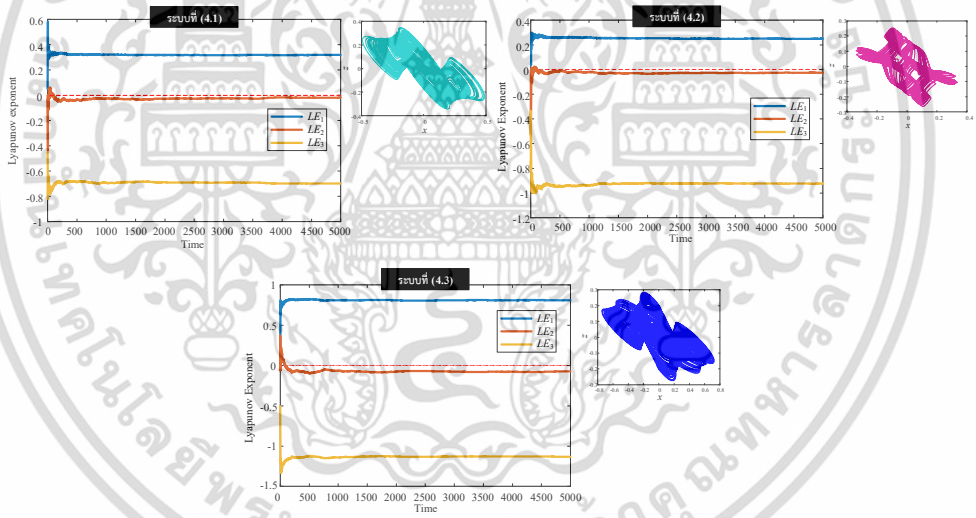
ค่าพารามิเตอร์ k	ค่า λ ณ จุด E_0 ของระบบที่ (4.1)	ค่า λ ณ จุด E_0 ของระบบที่ (4.2)	ค่า λ ณ จุด E_0 ของระบบที่ (4.3)
k=2	λ_1=0.389 $\lambda_{2,3}$=-1.194±0.709i	λ_1=0.119 $\lambda_{2,3}$=-1.06±0.361i	λ_1=-1.742 $\lambda_{2,3}$=-0.129±0.731i
k=1.4	λ_1=0.423 $\lambda_{2,3}$=-0.912±0.97i	λ_1=0.126 $\lambda_{2,3}$=-0.763±0.781i	λ_1=-1.224 $\lambda_{2,3}$=-0.088±0.881i
k=1	λ_1=0.452 $\lambda_{2,3}$=-0.726±1.063i	λ_1=0.131 $\lambda_{2,3}$=-0.565±0.910i	λ_1=-0.979 $\lambda_{2,3}$=-0.01±0.99i
k=0.7	λ_1=0.496 $\lambda_{2,3}$=-0.59±1.103i	λ_1=0.135 $\lambda_{2,3}$=-0.417±0.968i	λ_1=-0.851 $\lambda_{2,3}$=0.075±1.059i
k=0.4	λ_1=0.511 $\lambda_{2,3}$=-0.455±1.121i	λ_1=0.139 $\lambda_{2,3}$=-0.27±1.001i	λ_1=-0.756 $\lambda_{2,3}$=0.178±1.112i
k=0.1	λ_1=0.552 $\lambda_{2,3}$=-0.326±1.119i	λ_1=0.145 $\lambda_{2,3}$=-0.122±1.01i	λ_1=-0.685 $\lambda_{2,3}$=0.293±1.147i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.2 เลขชี้กำลัง Lyapunov และมิติ Kaplan-Yorke

ในส่วนนี้จะวิเคราะห์พฤติกรรมเคออสของระบบที่นำเสนอโดยบ่งบอกเป็นเชิงปริมาณด้วยเลขชี้กำลัง Lyapunov (*LE*) ซึ่งทฤษฎีดังกล่าวจะอาศัยพฤติกรรมแบบเอกซ์โพเนนเชียลที่ต่างกันหรือลู่เข้าหากันของเส้นทางโคจรที่อยู่ใกล้เคียงในเฟสสเปซ (Phase space) กล่าวอีกนัยหนึ่ง *LE* เป็นคำอธิบายเชิงปริมาณของการผลักกันและแรงดึงดูดระหว่างวิถี [89] มีหลายวิธีในการคำนวณค่า *LE* ซึ่งค่า *LE* ใช้สำหรับพิสูจน์ว่าระบบที่ออกแบบมีพฤติกรรมเป็นเคออสหรือไม่ [90] โดยมิติ Kaplan-Yorke สามารถใช้ค่า *LE* นำมาคำนวณในสูตรเพื่อบ่งบอกถึงปริมาณความซับซ้อนของระบบเคออสที่ออกแบบ

ในการคำนวณค่า *LE* จะใช้อัลกอริทึม Wolf ด้วยโปรแกรม MATLAB [37] กำหนดพารามิเตอร์ในการคำนวณของทั้งสามระบบดังตารางที่ 4.2 ค่า *LE* ที่คำนวณได้แสดงดังรูปที่ 4.10 และแสดงค่า LE_1 LE_2 LE_3 ไว้ในตารางที่ 4.4 ซึ่งระบบเคออสที่นำเสนอในงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้มีพฤติกรรมเป็นเคออสด้วยค่า LE_1 เป็นบวก และผลรวมของค่า *LEs* ทั้งสามเป็นลบ



รูปที่ 4.10 เลขชี้กำลัง Lyapunov บนแกนเวลาของระบบเคออสที่นำเสนอทั้งสามระบบ

เมื่อพิสูจน์คุณสมบัติพื้นฐานว่าระบบเคออสที่นำเสนอมีพฤติกรรมเป็นเคออสด้วยค่า *LEs* แล้ว จะนำค่า *LEs* มาพิสูจน์ประสิทธิภาพความซับซ้อนของระบบด้วยมิติ Kaplan-Yorke *LEs* (D_{KY}) [20] ด้วยสูตรดังนี้

$$D_{KY} = j + \frac{1}{\left|LE_{j+1}\right|}\sum_{i=1}^{j} LE_i \tag{4.11}$$

ที่ j คือค่าจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดของอันดับระบบที่นำเสนอ โดยเงื่อนไข คือ $\sum_{i=1}^{j} LE_i \geq 0$ และ $LE_{j+1} < 0$ รวมถึงค่า D_{KY} จะต้องอยู่ในเงื่อนไข $j \leq D_{KY} < j+1$ โดยค่า D_{KY} สำหรับระบบเค

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ออสอันดับสามจะอยู่ในช่วง $2 \le D_{KY} < 3$ ซึ่งค่า D_{KY} ของระบบเคออสที่ออกแบบสำหรับระบบที่ (4.3) ที่เป็นลักษณะเคออสแบบสี่วงม้วน มีค่าสูงถึง 2.65 ซึ่งหมายความว่าระบบเคออสดังกล่าวมีความซับซ้อนค่อนข้างสูงเมื่อเทียบกับค่าความซับซ้อนของระบบเคออสด้วยลักษณะสี่วงม้วนในอดีต รวมถึงระบบเคออสแบบสองวงม้วนในระบบที่ (4.1) และ (4.2) ที่ออกแบบที่เป็นลักษณะเคออสเพียงสองวงม้วน เมื่อเปรียบเทียบค่าความซับซ้อนกับระบบเคออสที่มีสองวงม้วนที่ใช้แบบจำลองการกระตุก ยังถือว่ามีความซับซ้อนสูงกว่าระบบอื่นๆในอดีต เปรียบเทียบให้เห็นดังตารางที่ 4.5

ตารางที่ 4.4 สรุปเลขชี้กำลัง Lyapunov และค่าความซับซ้อนมิติ Kaplan-Yorke ของระบบ (4.1) (4.2) และ (4.3)

ระบบที่ออกแบบ	*LEs* (LE_1, LE_2, LE_3)	D_{KY}
ระบบ (4.1)	(0.318522, -0.018625, -0.699897)	$D_{KY} = 2 + \frac{0.318522 - 0.018625}{\lvert -0.699897 \rvert} = 2.43$
ระบบ (4.2)	(0.248395, -0.018395, -0.929970)	$D_{KY} = 2 + \frac{0.248395 - 0.018395}{\lvert -0.929970 \rvert} = 2.25$
ระบบ (4.3)	(0.809254, -0.071406, -1.132508)	$D_{KY} = 2 + \frac{0.809254 - 0.071406}{\lvert -1.132508 \rvert} = 2.65$

ตารางที่ 4.5 ตัวอย่างของระบบเคออสลักษณะสองวงม้วนที่ออกแบบจากแบบจำลองการกระตุก โดยระบุค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0) ค่า *LEs* และค่า D_{KY}

อ้างอิง	ระบบเคออสด้วยแบบจำลองการกระตุก รูปแบบต่างๆ	เงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)	*LEs*	D_{KY}
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.6z - y + \lvert x \rvert - 2;$	(-1, -1, 1)	(0.043626, 0, -0.644702)	2.07
[91]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -1z - y + (3\sin(x) - x);$	(0, 1, 0)	(0.110073, 0, -1.110093)	2.09
[91]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -1z - y + (6\tan^{-1}(x) - 2x);$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.115681, 0, -0.915642)	2.12
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.6z - y + (-6\max(x,0) + 0.5);$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.085, 0, -0.583728)	2.14
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.5z - y + (-x + sign(x));$	(0, 1, 0)	(0.152, 0, -0.652)	2.23
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.6z - y + (x - 0.3sign(x));$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.166648, 0, -0.666884)	2.25
[67]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.24z - y + (-x + 4\sinh(x));$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.110274, 0, -0.351230)	2.31

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[91]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.19z - y + (-x + 2\tanh(x));$	(0, 1, 0)	(0.128, 0, -0.318)	2.40

4.3.3 วิเคราะห์การกระจายตัวของระบบ (Dissipative of the system)

การวิเคราะห์เบื้องต้นสำหรับระบบพลวัตไม่เชิงเส้นที่สามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดได้อย่างระบบเคออส สามารถทำได้ด้วยการตรวจสอบอัตราการหดตัวของปริมาตร (The ratio of the volume contraction) ในพื้นที่เฟส (Phase space) [92] โดยอัตราการหดตัวปริมาตรของระบบพลวัตที่ต่อเนื่องทางเวลาจะกำหนด $v = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\dot{v} = F(v)$ และ $F(v) = (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})^{\mathrm{T}}$ โดยที่การลู่ออก (The divergence) ของระบบจะต้องเป็นลบเพื่อบ่งบอกว่า เมื่อเวลาผ่านไป วิถีวงโคจรของระบบมีการกระจายตัวออกและกลับมาบรรจบกันในที่สุด (The convergence) ซึ่งเป็นลักษณะของตัวดึงดูดที่แสดงบนพื้นที่เฟส (Phase space) ดังนั้นการลู่ออกของระบบที่ออกแบบสำหรับ (4.1) (4.2) และ (4.3) แสดงได้ดังสมการที่ (4.12) (4.13) และ (4.14) ตามลำดับ

$$\Lambda_1 = \nabla \cdot F(v) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

$$\Lambda_1 = \nabla \cdot F(v) = \frac{\partial(y)}{\partial x} + \frac{\partial(z)}{\partial y} + \frac{\partial\left[-kz - y - \left\{Ax/2 \cdot \left(-\left(\tanh\left(m(x+1/2B)\right) \cdot \tanh\left(m(x-1/2B)\right)\right)+1\right)\right\}\right]}{\partial z}$$

$$\Lambda_1 = \nabla \cdot F(v) = -k < 0. \tag{4.12}$$

$$\Lambda_2 = \nabla \cdot F(v) = \frac{\partial\left[y - \left\{Ay/2 \cdot \left(-\left(\tanh\left(m(y+1/2B)\right) \cdot \tanh\left(m(y-1/2B)\right)\right)+1\right)\right\}\right]}{\partial x} + \frac{\partial(z)}{\partial y} + \frac{\partial\left[-kz - y - x\right]}{\partial z}$$

$$\Lambda_2 = \nabla \cdot F(v) = -k < 0. \tag{4.13}$$

และ

$$\Lambda_3 = \nabla \cdot F(v) = \frac{\partial\left[y + \left\{Ay/2 \cdot \left(-\left(\tanh\left(m(y+1/2B)\right) \cdot \tanh\left(m(y-1/2B)\right)\right)+1\right)\right\}\right]}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial(z)}{\partial y} + \frac{\partial\left[-kz - y - \left\{Ax/2 \cdot \left(-\left(\tanh\left(m(x+1/2B)\right) \cdot \tanh\left(m(x-1/2B)\right)\right)+1\right)\right\}\right]}{\partial z}$$

$$\Lambda_3 = \nabla \cdot F(v) = -k < 0. \tag{4.14}$$

โดยที่ Λ_1 Λ_2 และ Λ_3 คือพารามิเตอร์การลู่ออกของระบบที่ (4.1) (4.2) และ (4.3) ตามลำดับ จากพารามิเตอร์การลู่ออก (Λ) ของทั้งสามระบบ จะเห็นว่ามีเงื่อนไขเป็นลบ ซึ่งบ่งชี้ว่าระบบที่ออกแบบเกิดการกระจายและสามารถสร้างลักษณะตัวดึงดูดได้ [2, 93]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.4 วิเคราะห์ความสมมาตรของระบบ

ความสมมาตรและความไม่สมมาตรบนระบบเคออสเป็นการศึกษาเชิงลึกอย่างหนึ่งที่นำไปสู่ความหลายเสถียรภาพ โดยการแสดงความหลายเสถียรภาพของระบบเคออส จะแสดงถึงการมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดสองตัวขึ้นไป จะเป็นแบบสมมาตรหรือไม่สมมาตร ขึ้นอยู่กับระบบที่ออกแบบ ระบบเคออสบางระบบไม่สามารถแสดงพฤติกรรมสมมาตรได้ ดังนั้นจำเป็นต้องตรวจสอบเบื้องต้นถึงการมีอยู่ของมัน โดยจากระบบที่ออกแบบประกอบไปด้วยตัวแปรสเตท (x, y, z) ซึ่งจะทำการเปลี่ยนผ่านตัวแปรโดยใช้เงื่อนไข $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, -z)$ โดยจะอิงจากจุดคงที่ของระบบที่ $E_0(0, 0, 0)$ หากลักษณะตัวดึงดูดมีความสมมาตรจากจุด E_0 จะหมายถึงระบบสามารถแสดงลักษณะสมมาตรได้ (นำเงื่อนไขไปจำลองผลเชิงตัวเลขด้วยระบบที่ออกแบบบน MATLAB เพื่อวิเคราะห์) ซึ่งสำหรับความไม่สมมาตรจำเป็นต้องตรวจสอบเพิ่มเติมจากพารามิเตอร์บางตัวของระบบด้วยการใช้ Bifurcation แบบกิ่งขนานในการตรวจสอบ และแสดงผลลัพธ์บน phase portraits โดยระบบเคออสที่ออกแบบของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ มีการตรวจสอบและแสดงผลทั้งความสมมาตรและไม่สมมาตรของตัวดึงดูดที่มีอยู่ร่วมกันของระบบที่ออกแบบใน (4.1) – (4.3) ด้วย

4.4. ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตโดยการจำลองเชิงตัวเลขของระบบเคออสที่ออกแบบ

4.4.1 ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบสี่วงม้วนใน (4.3)

ในหัวข้อนี้จะแสดงการจำลองผลลัพธ์เชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB เพื่อพิสูจน์พฤติกรรมพลวัตต่างๆของระบบที่ออกแบบ รวมถึงพฤติกรรมเคออส โดยจะนำระบบที่ (4.3) ที่เป็นระบบเคออสแบบสี่วงม้วนที่ออกแบบมาวิเคราะห์ให้ดูอย่างละเอียด ซึ่งจะตรวจสอบอิทธิพลของพารามิเตอร์ในระบบ (A B และ k) และผลกระทบของเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0\ y_0\ z_0)$ การตรวจสอบดังกล่าวทำให้พบพฤติกรรมพลวัตที่หลากหลายของระบบที่ออกแบบ [43, 94] เครื่องมือที่ใช้ในการตรวจสอบได้แก่ แผนภาพ Bifurcation Phase portraits และสเปกตรัม Lyapunov อีกทั้งเครื่องมือที่ใช้ในการยืนยันพฤติกรรมเคออสแบบกราฟิก ได้แก่ แผนภาพทดสอบ 0-1 และแผนภาพ Poincare อีกทั้งยังแสดงผลลัพธ์ของคุณสมบัติพิเศษสำหรับระบบเคออสสี่วงม้วนที่ออกแบบ โดยแสดงการควบคุมขนาดและการเพิ่มออฟเซ็ตของระบบ

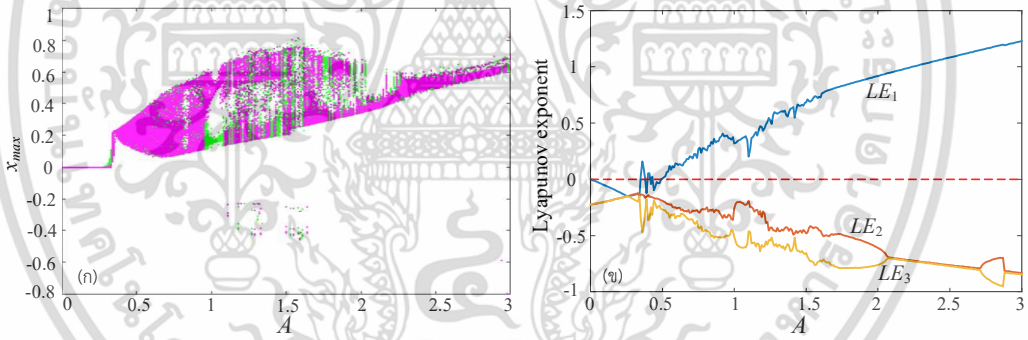
โดยในส่วนท้ายของหัวข้อนี้จะแสดงการตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบสองวงม้วนที่ออกแบบสำหรับระบบในสมการที่ (4.1) และ (4.2) รวมถึงแสดงพลวัตเชิงลึกด้วยการตรวจสอบความหลายเสถียรภาพของระบบ (4.1) ที่เป็นพฤติกรรมที่ส่งผลมาจากเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ ซึ่งแสดงถึงการมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดทั้งแบบสมมาตรและไม่สมมาตร โดยถูกแสดงผลควบคู่กับ Basin of attraction

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4.1.1. ตรวจสอบพารามิเตอร์ของระบบด้วยแผนภาพ Bifurcation

ระบบเคออสที่ออกแบบในสมการที่ (4.3) มีพารามิเตอร์ที่สำคัญต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบทั้งหมดสามตัว (A B k) เริ่มต้นการตรวจสอบจากพารามิเตอร์ A โดยใช้แผนภาพ Bifurcation ยืนยันร่วมกับสเปกตรัม Lyapunov พารามิเตอร์ A ถูกตรวจสอบอยู่ในช่วง $0 \leq A \leq 3$ แผนภาพ Bifurcation กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกันเพื่อให้เห็นผลกระทบจากเงื่อนไขเริ่มต้นด้วย โดยการเกิดลักษณะการกระจายตัวของ Bifurcation ที่แตกต่างกันบนแผนภาพเดียวกัน เรียกว่า Bifurcation แบบกิ่งขนาน (Parallel branches bifurcation) ฟจากรูปที่ 4.11 (ก) และ (ข) แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตที่สอดคล้องกัน

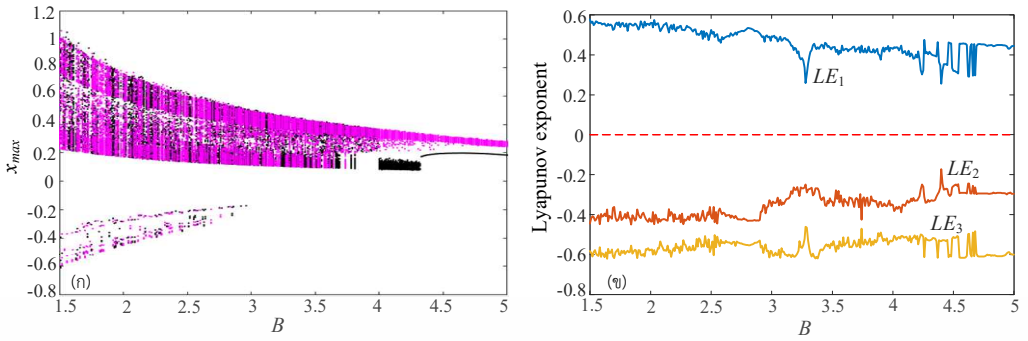
จากแผนภาพ Bifurcation ในช่วง $0.9 \leq A \leq 2.25$ สามารถสังเกตได้ถึงพฤติกรรมที่สมมาตรและไม่สมมาตรกันจากการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นแตกต่างกัน 2 ชุด ซึ่งการตรวจสอบดังกล่าวจะนำไปสู่ไปการค้นพบพฤติกรรมที่ซับซ้อนอย่างความหลายเสถียรภาพ การมีอยู่รวมกันของตัวดึงดูดและการเลือกค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมในการสร้างลักษณะสัญญาณเคออสของระบบสี่วงม้วนที่ออกแบบ ซึ่งค่า A ที่ถูกเลือกในงานนี้คือ A=1.2 ซึ่งเป็นค่าที่เกิดพฤติกรรมพลวัตได้หลากหลายและมีลักษณะสี่วงม้วนที่ชัดเจน



รูปที่ 4.11 ตรวจสอบภาพรวมพฤติกรรมพลวัตที่มีผลจากพารามิเตอร์ A ของระบบเคออสสี่วงม้วน (4.3) โดยคงที่ B=2.2 และ k=0.45 (ก) แผนภาพ Bifurcation โดยสีชมพูกำหนด (0.1, 0.1, 0.1) สีเขียวกำหนด (0.1, 0.1, -0.1) (ข) สเปกตรัม Lyapunov

ในทำนองเดียวกัน พารามิเตอร์ B ถูกตรวจสอบด้วยแผนภาพ Bifurcation ร่วมกับสเปกตรัม Lyapunov ถูกกำหนดในช่วง $1.5 \leq B \leq 5$ และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน 2 ชุดเพื่อให้เห็นผลกระทบ ดังรูปที่ 4.12 พฤติกรรมที่เป็นเคออสที่ชัดเจนของพารามิเตอร์ B ถูกสังเกตได้ในช่วง $0 \leq B \leq 3.6$ ซึ่งค่าพารามิเตอร์ B ที่ถูกเลือกใช้ในงานนี้คือ B=2.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

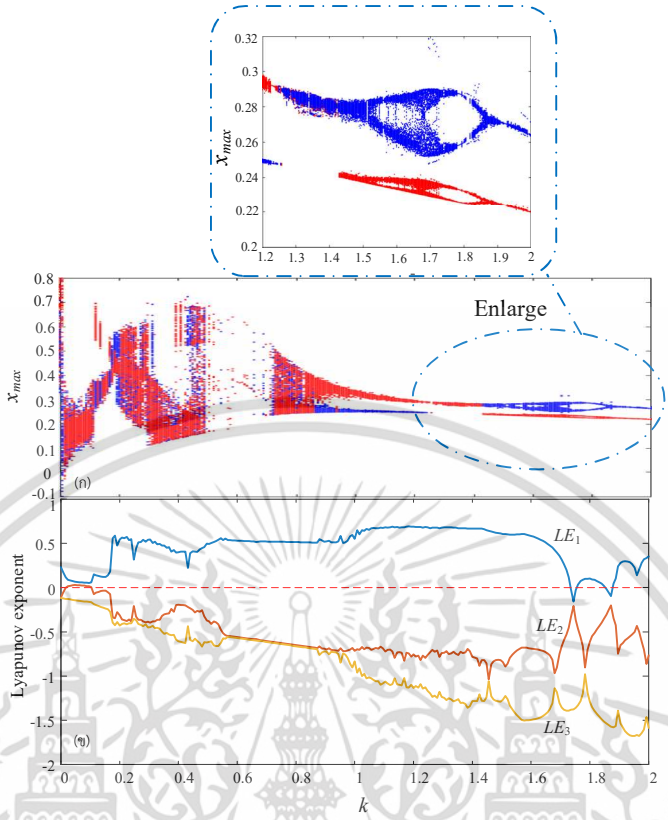


รูปที่ 4.12 ตรวจสอบภาพรวมพฤติกรรมพลวัตที่มีผลจากพารามิเตอร์ B โดยคงที่ A=1.2 และ k=0.45 (ก) แผนภาพ Bifurcation โดยสีดำกำหนด (0.1, 0.1, 0.01) สีชมพูกำหนด (0.1, -0.1, 0.01) (ข) สเปกตรัม Lyapunov

4.4.1.2 เส้นทางสู่พฤติกรรมเคออส (route to chaos behavior) ของระบบสี่วงม้วน

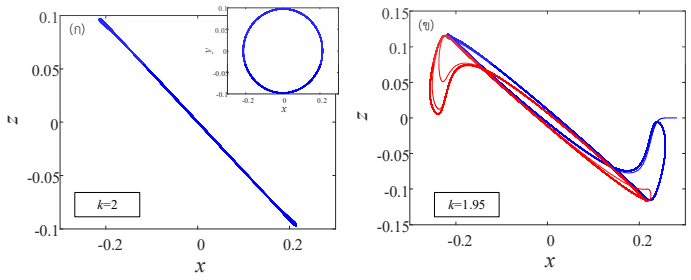
หลังจากตรวจสอบพารามิเตอร์ A และ B แล้ว พารามิเตอร์หลักที่ใช้ในการแสดงพฤติกรรมพลวัตต่างๆจนถึงพฤติกรรมที่เป็นเคออสของระบบนี้ คือ พารามิเตอร์ k โดยแผนภาพ Bifurcation ที่สอดคล้องกับสเปกตรัม Lyapunov ของพารามิเตอร์ k ถูกแสดงในช่วง $0 \le k \le 2$ ดังรูปที่ 4.13 โดยแผนภาพ Bifurcation กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น สีน้ำเงิน (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.01) และสีแดง (x_0, y_0, z_0)=(-0.1, 0.1, 0.01) โดยในระบบสี่วงม้วนที่ออกแบบใน (4.3) จะมีพฤติกรรมพลวัตของระบบสองช่วง คือ ช่วงที่เกิดลักษณะสองวงม้วน และช่วงที่เกิดลักษณะสี่วงม้วน โดยจากรูปที่ 4.13 (ก) ในช่วงที่ทำการขยาย $1.2 \le k \le 2$ คือช่วงที่เกิดการแยกสองคาบ (Period-doubling) ไปจนถึงลักษณะสองวงม้วน และเกิดลักษณะสี่วงม้วนที่ชัดเจนในช่วง $0 \le k \le 5$ ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits จากการปรับพารามิเตอร์ k จะแสดงให้เห็นในรูปที่ 4.14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

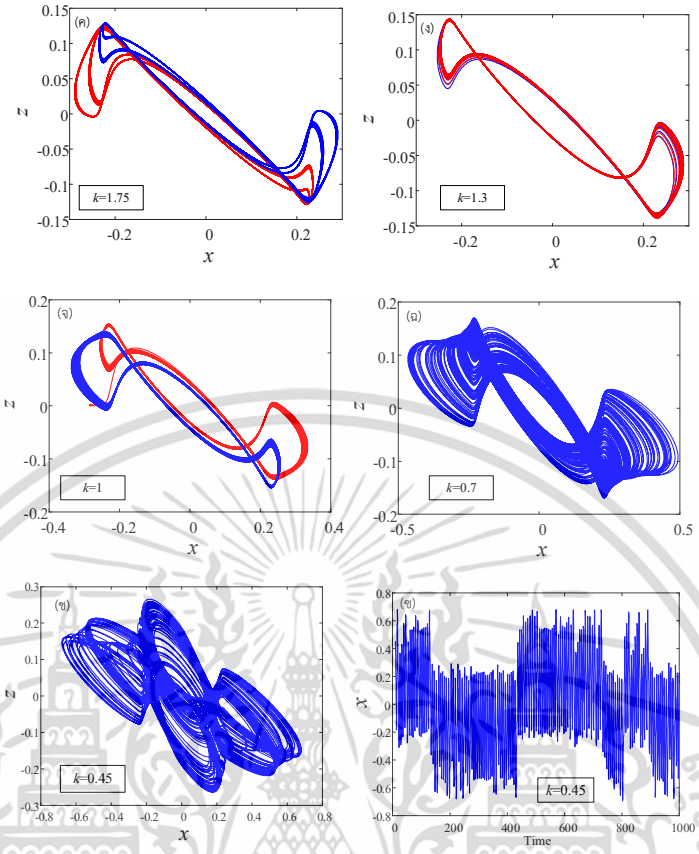


รูปที่ 4.13 แสดงเส้นทางสู่พฤติกรรมเคออสของระบบที่นำเสนอสำหรับพารามิเตอร์ k โดยคงที่ A=1.2 และ B=2.2 (ก) แผนภาพ Bifurcation กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)=(±0.1, 0.1, 0.01) สำหรับสีน้ำเงินและสีแดง ตามลำดับ (ข) สเปกตรัม Lyapunov

จากรูปที่ 4.14 จะแสดงตัวอย่างของพฤติกรรมพลวัตต่างๆจากการปรับพารามิเตอร์ k เพื่อให้เห็นผลลัพธ์ที่ชัดเจนมากขึ้นบน phase portraits บนระนาบ $x-z$ ดังรูปที่ 4.14 (ก) – (ซ) โดยแสดงการเปลี่ยนแปลงเริ่มจากระบบเป็นสัญญาณไซน์หรือวงรอบจำกัดที่ k=2 จนกระทั่งแสดงพฤติกรรมเป็นเคออสสี่วงม้วนที่ชัดเจนที่ k=0.45 โดยจากรูปที่ 4.13 ในช่วง $0.85 \le k \le 2$ เกิดพฤติกรรมที่มีผลกระทบของเงื่อนไขเริ่มต้น คือ พฤติกรรมสมมาตร แสดงดังรูปที่ 4.14 (ข) (ค) และ (จ)



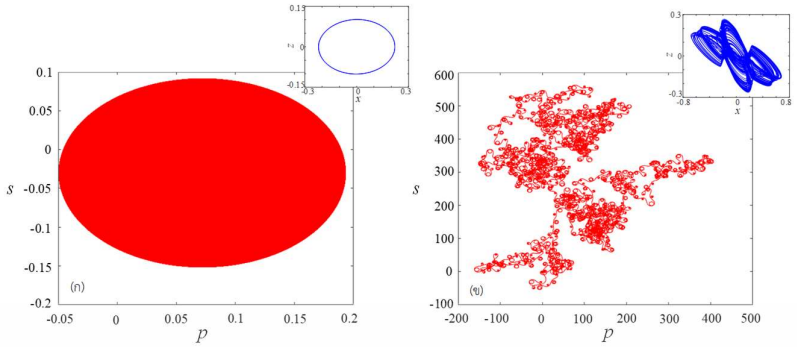
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.14 แสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits ของระบบที่ (4.3) โดยปรับพารามิเตอร์ k และผลกระทบจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยอิงจากรูปที่ 4.13 (คงที่พารามิเตอร์ A=1.2 B=2.2) (ก) วงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ k=2 (ข) พฤติกรรมเชิงสองคาบ k=1.95 (ค) พฤติกรรมเชิงสี่คาบ k=1.75 (ง) พฤติกรรมไม่เป็นคาบ k=1.3 (จ) พฤติกรรมไม่เป็นคาบ k=1 (ฉ) ตัวดึงดูดเคออสสองวงม้วน k=0.7 (ช) ตัวดึงดูดเคออสสี่วงม้วน k=0.45 (ซ) สัญญาณเคออสบนแกนเวลาที่ k=0.45

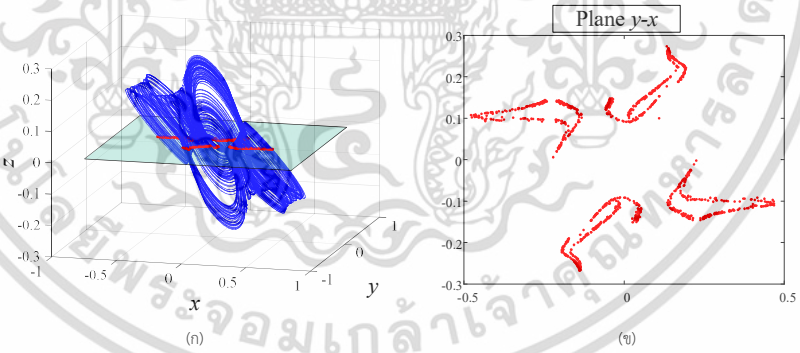
ในระบบสี่วงม้วนที่ออกแบบมีการใช้ผลกราฟิกรูปแบบอื่นมายืนยันร่วมกับการแสดงผล เพื่อแสดงข้อมูลที่น่าเชื่อถือมากขึ้นในการแสดงพฤติกรรมที่เป็นเคออส โดยดังรูปที่ 4.15 ใช้ทฤษฎีทางฟิสิกส์ที่เรียกว่าแผนภาพทดสอบ 0 – 1 ซึ่งทฤษฎีดังกล่าวเป็นการแสดงผลการเคลื่อนที่บนแกน p, s เพื่อระบุรูปแบบการเคลื่อนที่ในทางฟิสิกส์ที่สอดคล้องกับทางพลวัต โดยพฤติกรรมที่เป็นเคออสจะมีการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน โดยระบบที่นำเสนอถูกนำมาแสดงตัวอย่างบนแผนภาพทดสอบ 0 – 1 [39-40] โดยปรับพารามิเตอร์ k ดังรูปที่ 4.15 (ก) และ (ข)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 แสดงพล็อต p, s ของแผนภาพทดสอบ 0 - 1 ของระบบที่นำเสนอโดยปรับพารามิเตอร์ k และคงที่ A=1.2 B=2.2 (ก) การเคลื่อนที่เป็นคาบ หรือ สัญญาณไซน์ k=2 (ข) การเคลื่อนที่แบบบราวเนียน หรือ เคออสสี่วงม้วน k=0.45

มากไปกว่านั้นผลลัพธ์เพิ่มเติมอีกส่วนหนึ่งเรียกว่า แผนภาพ Poincare [95] เป็นการแสดงภาพตัดที่ได้จากวิถีโคจรของสัญญาณเคออสที่เป็นลักษณะตัวดึงดูด (Attractor) หรือสัญญาณเคออสสองมิติ โดยภาพที่ได้บนระนาบ Poincare เป็นการยืนยันว่าลักษณะของวิถีโคจรที่ได้มีขอบเขตและลักษณะของตัวดึงดูดที่ชัดเจน ไม่ใช่เป็นลักษณะของสัญญาณสุ่ม (Random signal) โดยสามารถระบุชนิดของตัวดึงดูดถึงจำนวนกิ่งที่แสดงบนระนาบว่าเป็น ชนิดสี่วงม้วน แผนภาพ Poincare ของระบบที่ออกแบบ แสดงดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 แผนภาพ Poincare ของระบบสี่วงม้วนใน (4.3) โดยสอดคล้องกับผลในรูปที่ 4.9 (ก) phase portrait เคออสสามมิติ แสดงผลคู่กับระนาบของแผนภาพ Poincare (ข) แผนภาพ Poincare บนระนาบ x-y โดยกำหนดระนาบ z=0

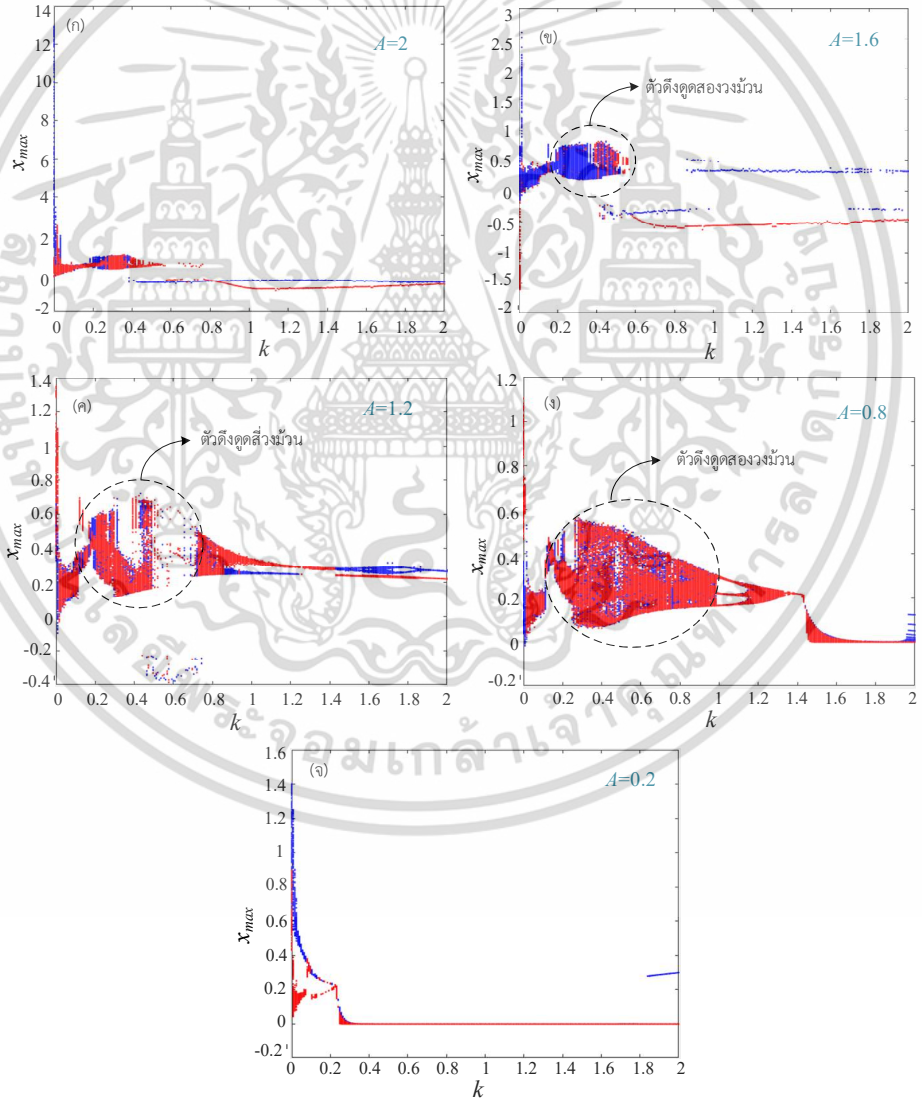
4.4.1.3 วิเคราะห์ Bifurcation ที่มีอิทธิจากพารามิเตอร์อื่นของระบบ

พฤติกรรมพลวัตบนระบบเคออสมีการเปลี่ยนแปลงภายในระบบที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ทุกตัว เมื่อวิเคราะห์พารามิเตอร์ใดพารามิเตอร์หนึ่งอยู่ จำเป็นต้องคงที่พารามิเตอร์ตัวอื่นๆของระบบ หากเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ตัวอื่นเพียงเล็กน้อยจะส่งผลให้พฤติกรรมพลวัตเกิดการเปลี่ยนแปลงสำหรับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พารามิเตอร์ที่กำลังวิเคราะห์ ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ชุดหลักที่ถูกเลือกใช้จำเป็นต้องผ่านการวิเคราะห์อย่างละเอียดเพื่อให้ได้ค่าที่เหมาะสมในการนำเสนอผลลัพธ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบนแผนภาพ Bifurcation ขณะตรวจสอบพารามิเตอร์ k ของระบบเคออสสี่วงม้วนใน (4.3) โดยมีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ A ทั้งหมด 5 ค่า (สำหรับ A=2 A=1.6 A=1.2 A=0.8 และ A=0.2) โดยที่สังเกตการเปลี่ยนแปลงบนพารามิเตอร์ k ในช่วง $0 \leq k \leq 2$ และยังคงที่พารามิเตอร์ B=2.2 ไว้ เงื่อนไขเริ่มต้น 2 ชุด ถูกกำหนดให้เห็นการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นสำหรับ สีน้ำเงิน (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.01) และสีแดง (x_0, y_0, z_0)=(-0.1, 0.1, 0.01) ผลลัพธ์ถูกแสดงดังรูปที่ 4.17



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.17 วิเคราะห์ Bifurcation สำหรับพารามิเตอร์ k ในระบบเคออสสี่วงม้วน (4.3) โดยเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ A ของระบบ และคงที่ B=2.2 (ก) A=2 (ข) A=1.6 (ค) A=1.2 (ง) A=0.8 (จ) A=0.2

จากรูปที่ 4.17 จะเห็นว่าหากมีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ตัวใดตัวนึงของระบบ ขณะกำลังตรวจสอบพารามิเตอร์อีกตัวอยู่ จะส่งผลให้พฤติกรรมพลวัตเปลี่ยนแปลงอย่างสิ้นเชิง ซึ่งแผนภาพ Bifurcation ในรูปที่ 4.17 (ค) คือช่วงพารามิเตอร์ k ที่ถูกเลือกใช้สำหรับระบบสี่วงม้วนที่ออกแบบ เนื่องจากสามารถเกิดลักษณะเคออสสี่วงม้วน ขณะที่แผนภาพ Bifurcation สำหรับการกำหนด A ที่ค่าอื่นๆ ไม่สามารถสร้างลักษณะเคออสสี่วงม้วนได้ โดยจากการวิเคราะห์สำหรับระบบที่ออกแบบมีพารามิเตอร์เพียง 3 ตัว ในการวิเคราะห์รูปแบบดังกล่าวจะทำการคงที่ไว้แค่พารามิเตอร์ B เพื่อดูการเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์กันระหว่างพารามิเตอร์ k และ A ซึ่งหากในระบบที่มีพารามิเตอร์หลายตัวจะยิ่งส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ตัวอื่นของระบบทำให้ยากต่อการวิเคราะห์ การจำกัดจำนวนพารามิเตอร์ของระบบที่ออกแบบจึงเป็นองค์ประกอบสำคัญในการสร้างระบบเคออส

4.4.1.4 คุณสมบัติพิเศษของระบบสี่วงม้วนจากการควบคุมขนาดและเพิ่มออฟเซ็ตของระบบ

ในส่วนนี้แสดงคุณสมบัติพิเศษของระบบเคออสสี่วงม้วนที่ออกแบบใน (4.3) โดยจะแสดงคุณสมบัติการควบคุมขนาดของสัญญาณเคออสของระบบและปรับออฟเซ็ตของสัญญาณ โดยแสดงการออกแบบสำหรับคุณสมบัติพิเศษ ดังนี้

- **การควบคุมขนาด (Amplitude control) [85, 87, 96]**

การควบคุมขนาดของระบบเคออสเป็นสิ่งจำเป็นในการประยุกต์ใช้ในทางวิศวกรรมเนื่องจากการนำสัญญาณไปประยุกต์ใช้ เช่น ในการประมวลผลสัญญาณ การเข้ารหัสด้านการสื่อสาร จำเป็นต้องจำกัดขนาดของสัญญาณเพื่อประยุกต์ใช้ในบางเทคนิค โดยเฉพาะการนำระบบเคออสไปสร้างเป็นวงจร ข้อจำกัดด้านอุปกรณ์อิเล็คทรอนิกส์ทำให้จำเป็นต้องควบคุมขนาดของสัญญาณที่จะนำไปใช้ สิ่งสำคัญ คือ การควบคุมขนาดบนระบบเคออสไม่สามารถทำได้ทุกระบบ ซึ่งการเพิ่มตัวแปรหรือพารามิเตอร์สำหรับควบคุมขนาดเข้าไปในระบบ จะต้องไม่กระทบกับเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณเคออส ซึ่งระบบเคออสสี่วงม้วนที่ออกแบบใน (4.3) สามารถเพิ่มตัวแปรสำหรับการควบคุมขนาดของสัญญาณเคออสได้โดยไม่กระทบกับการกำเนิดสัญญาณ ระบบสำหรับควบคุมขนาดสัญญาณของระบบ (4.3) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

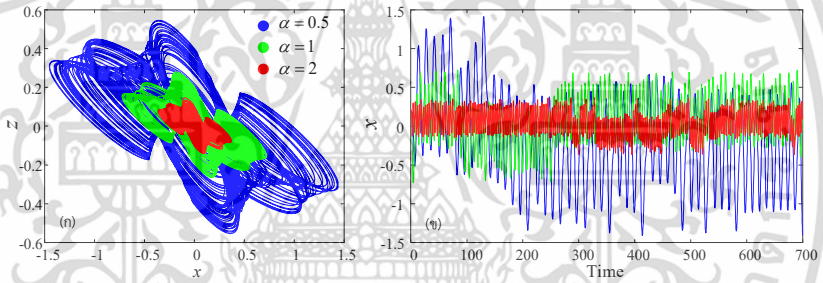
$$\begin{cases} \dot{x}_A = y_A + G(y_A), \\ \dot{y}_A = z_A, \\ \dot{z}_A = -kz_A - y_A - G(x_A); \end{cases} \tag{4.15}$$

โดยที่ $G(x_A)$ และ $G(y_A)$ กำหนดดังนี้

$$G(y_A) = Ay_A \mathrm{Rect}(By_A) \approx \frac{Ay_A}{2} \cdot \left(-\left(\tanh m\left(y_A + \frac{1}{2B} \right) \cdot \tanh m\left(y_A - \frac{1}{2B} \right) \right) + 1 \right) \text{ และ}$$

$$G(x_A) = Ax_A \mathrm{Rect}(Bx_A) \approx \frac{Ax_A}{2} \cdot \left(-\left(\tanh m\left(x_A + \frac{1}{2B} \right) \cdot \tanh m\left(x_A - \frac{1}{2B} \right) \right) + 1 \right)$$

ที่ตัวแปรสเตท x y และ z ถูกแทนที่ด้วยตัวแปรสำหรับควบคุมขนาดสัญญาณของระบบ โดยกำหนด $x = \alpha \cdot x_A$, $y = \alpha \cdot y_A$ และ $z = \alpha \cdot z_A$ ที่ตัวแปร α คือ พารามิเตอร์สำหรับควบคุมขนาด โดยแสดงการปรับขนาดของตัวดึงดูดสี่วงม้วนของระบบที่ออกแบบ กำหนด α=0.5 α=1 และ α=2 แสดงสำหรับตัวดึงดูดบน phase portraits และสัญญาณเคออส สีน้ำเงิน สีเขียว และสีแดง ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.18



รูปที่ 4.18 แสดงการควบคุมขนาดของระบบสี่วงม้วน (4.3) โดยปรับพารามิเตอร์ α (ก) phase portrait บนระนาบ x-z (ข) สัญญาณเคออสบนแกนเวลาที่เอาต์พุต x

- **เพิ่มออฟเซ็ต (Offset boosting) [85-87, 97]**

การเพิ่มออฟเซ็ตของระบบเคออสเป็นคุณสมบัติพิเศษเช่นเดียวกับการควบคุมขนาด สามารถประยุกต์ใช้ได้เป็นอย่างดีในการปรับสัญญาณจาก Unipolar เป็น Bipolar มีประโยชน์ในการประยุกต์ใช้ทางวิศวกรรม เช่น ด้านการประมวลผลสัญญาณ การเข้ารหัสบนระบบที่ต้องประมวลสัญญาณดิจิตอล ซึ่งเช่นเดียวกับที่กล่าวไปในการควบคุมขนาด การเพิ่มตัวแปรสำหรับปรับออฟเซ็ตของระบบเคออสไม่สามารถทำได้ทุกระบบ เนื่องจากการเพิ่มตัวแปรใหม่เข้าไปในระบบ จำเป็นต้องไม่กระทบเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณเดิมของระบบที่ออกแบบไว้ ด้วยความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์ของระบบเคออส อาจจะทำให้ระบบสูญเสียพฤติกรรมพลวัตได้อย่างสิ้นเชิง การเพิ่มตัวแปรออฟเซ็ตเข้าไปในระบบ หมายถึง การควบคุมตัวแปรบางสเตทของระบบให้สามารถเคลื่อนที่ไปทางซ้าย หรือ ขวา ได้ ซึ่งคือการควบคุมตัวดึงดูดบนระนาบของตัวแปรสเตทที่เกี่ยวข้องให้สามารถ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เคลื่อนไปบน phase portraits ตามตัวแปรออฟเซ็ตที่ปรับ โดยการเพิ่มตัวแปรออฟเซ็ตสามารถเพิ่มในลักษณะ $x_i \rightarrow x_i + c$ โดยที่ตัวแปร c คือตัวแปรออฟเซ็ตที่สามารถควบคุมตัวแปรสเตท x ได้ ดังนั้นระบบเคออสสี่วงม้วนที่ออกแบบใน (4.3) สามารถเพิ่มตัวแปรออฟเซ็ตเข้าไปในระบบโดยไม่กระทบต่อการกำเนิดสัญญาณเคออสเดิม ด้วยการเพิ่ม β_x ที่เป็นตัวแปรออฟเซ็ตเข้าไปที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x ระบบที่ (4.3) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

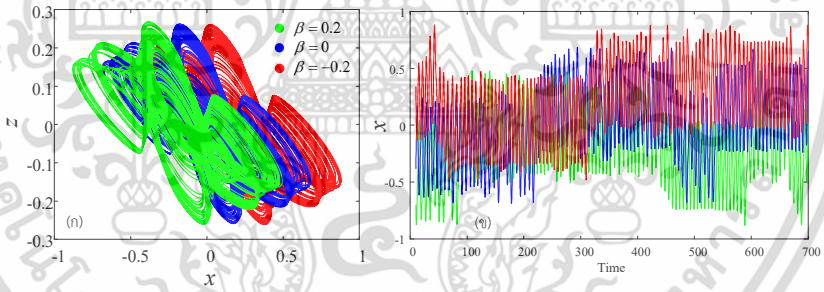
$$\begin{cases} \dot{x} = y + G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x + \beta_x); \end{cases} \tag{4.16}$$

โดยที่ $G(x+\beta_x)$ กำหนดดังนี้

$$G(x) = A(x + \beta_x)\text{Rect}(B(x + \beta_x))...$$

$$\approx \frac{A(x+\beta_x)}{2} \cdot \left(-\left(\tanh m\left((x+\beta_x) + \frac{1}{2B} \right) \cdot \tanh m\left((x+\beta_x) - \frac{1}{2B} \right) \right) + 1 \right)$$

สำหรับการปรับออฟเซ็ต แสดงตัวอย่างด้วยการปรับพารามิเตอร์ β_x โดยปรับ β_x=-0.2 β_x=-0 และ β_x=0.2 สำหรับสีแดง น้ำเงิน และเขียว ตามลำดับ แสดงตัวดึงดูดบน phase portrait และสัญญาณเคออส ดังรูปที่ 4.19 จะเห็นว่าสัญญาณที่ถูกปรับด้วย β_x =±0.2 มีลักษณะเป็น Bipolar



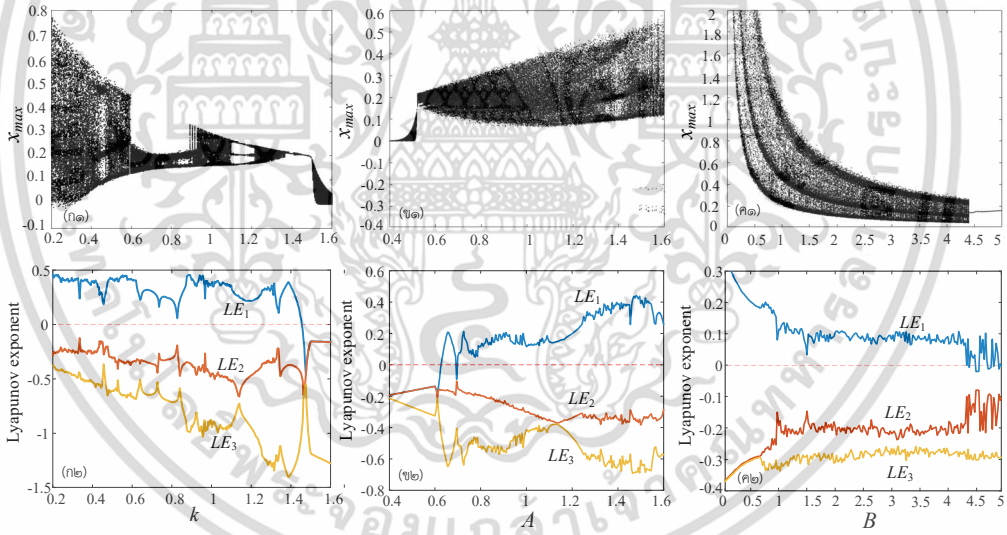
รูปที่ 4.19 แสดงการควบคุมออฟเซ็ตของระบบสี่วงม้วน (4.3) โดยปรับพารามิเตอร์β_x (ก) phase portrait บนระนาบ x-z (ข) สัญญาณเคออสบนแกนเวลาที่เอาต์พุต x

4.4.2 การตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบเคออสสองวงม้วนใน (4.1) และ (4.2)

จากที่กล่าวไปข้างต้นระบบที่ออกแบบสามารถสร้างลักษณะเคออสรูปแบบใหม่ได้ถึง 3 ลักษณะจากการเปลี่ยนฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมที่ออกแบบ ดังระบบที่ (4.1) – (4.3) ซึ่งทั้ง 3 ระบบใช้พารามิเตอร์ควบคุมเพียง 3 ตัวในระบบ คือ A B และ k โดยในหัวข้อที่ 4.4.1 เป็นการตรวจพฤติกรรมพลวัตโดยละเอียดสำหรับระบบสี่วงม้วนที่เป็นลักษณะเด่นของวิทยานิพนธ์ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบสองวงม้วนสำหรับระบบ (4.1) และ (4.2) โดยใช้แผนภาพ Bifurcation ร่วมกับสเปกตรัม Lyapunov และแสดงลักษณะพลวัตที่เกิดขึ้นบน phase portraits

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับระบบ (4.1) จะทำการตรวจสอบช่วงการเกิดพฤติกรรมพลวัตสำหรับพารามิเตอร์ A B และ k โดยพารามิเตอร์ k กำหนดในช่วง $0.2 \le k \le 1.6$ (โดยคงที่ A=1.5 และ B=2.35) จากนั้นพารามิเตอร์ A ถูกกำหนดในช่วง $0.4 \le A \le 1.6$ (โดยคงที่ k=0.4 และ B=2.35) สุดท้ายพารามิเตอร์ B ถูกกำหนดในช่วง $0 \le B \le 5$ (โดยคงที่ A=1.5 และ k=0.4) โดยการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของทั้งสามพารามิเตอร์ใช้ (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.1) เท่ากันหมด แผนภาพ Bifurcation และสเปกตรัม Lyapunov ของทั้งสามพารามิเตอร์ถูกแสดงในช่วงที่สอดคล้องกันดังรูปที่ 4.20 ซึ่งค่าที่ถูกเลือกใช้สำหรับพารามิเตอร์ A B และ k ของระบบสองวงม้วนใน (4.1) คือ A=1.5 B=2.35 และ k=0.4 เนื่องจากเป็นช่วงที่แสดงลักษณะตัวดึงดูดสองวงม้วนได้ชัดเจน และมีค่าความซับซ้อน D_{KY} ค่อนข้างสูง (หากเลือกช่วงของพารามิเตอร์ที่มีการกระจายตัวของ Bifurcation ที่สูงขึ้น หรือช่วงที่มีค่าบวก LE_1 ของสเปกตรัม Lyapunov สูงขึ้น อาจส่งผลให้ค่า D_{KY} สูงขึ้นตาม แต่จะส่งผลต่อลักษณะตัวดึงดูดที่ได้ของระบบ ซึ่งจากการตรวจสอบ ค่าที่ถูกเลือกมีลักษณะตัวดึงดูดที่ชัดเจนสำหรับการแสดงผลลัพธ์)

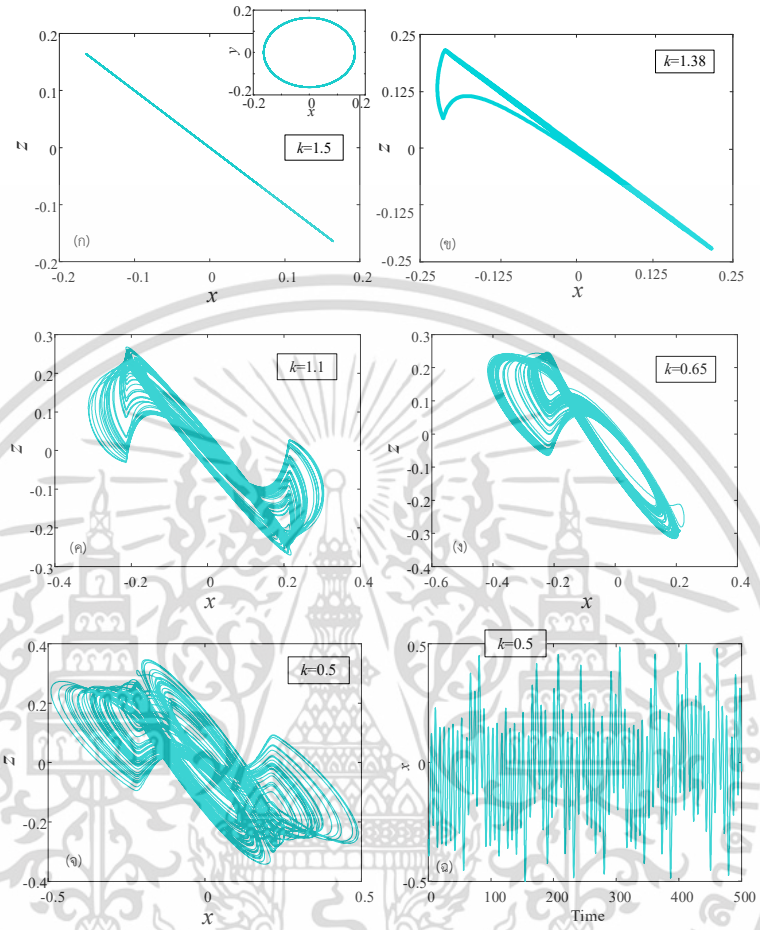


รูปที่ 4.20 ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบ (4.1) โดยตรวจสอบพารามิเตอร์ A B และ k กำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.1) (ก๑) - (ค๑) แผนภาพ Bifurcation บนเอาต์พุต x_{max} (ก๒) – (ค๒) สเปกตรัม Lyapunov

จากการตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตในรูปที่ 4.19 จะแสดงเส้นทางสู่เคออสด้วยการปรับพารามิเตอร์ k ของระบบ โดยแสดงการเปลี่ยนแปลงบน phase portraits บนระนาบ $x-z$ ดังรูปที่ 4.21 ซึ่งแสดงตั้งแต่ลักษณะวงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ของระบบที่ k=1.5 ดังรูปที่ 4.21 (ก) ไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

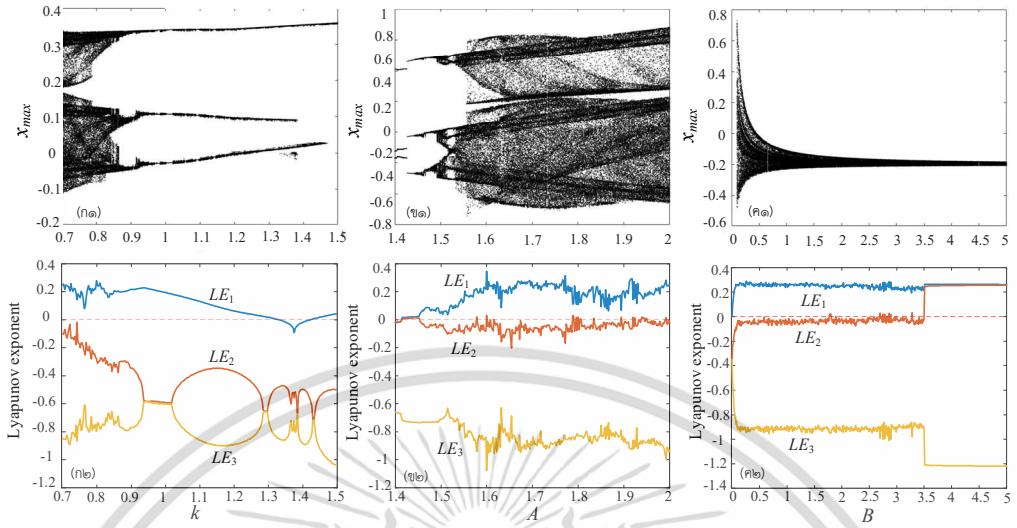
จนถึงลักษณะตัวดึงดูดเคออสสองวงม้วนพร้อมกับสัญญาณเคออสบนแกนเวลา สำหรับ k=0.5 ดังรูปที่ 4.21 (จ) และ (ฉ) ตามลำดับ



รูปที่ 4.21 แสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits ของระบบที่ (4.1) โดยปรับพารามิเตอร์ k โดยอิงจากรูปที่ 4.20 (ก) (คงที่พารามิเตอร์ A=1.5 B=2.35) (ก) วงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ k=1.5 (ข) พฤติกรรมเชิงหนึ่งคาบ k=1.38 (ค) พฤติกรรมไม่เป็นคาบ k=1.1 (ง) ตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน k=0.65 (จ) ตัวดึงดูดเคออสสองวงม้วน k=0.5(ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต x บนแกนเวลาที่ k=0.5

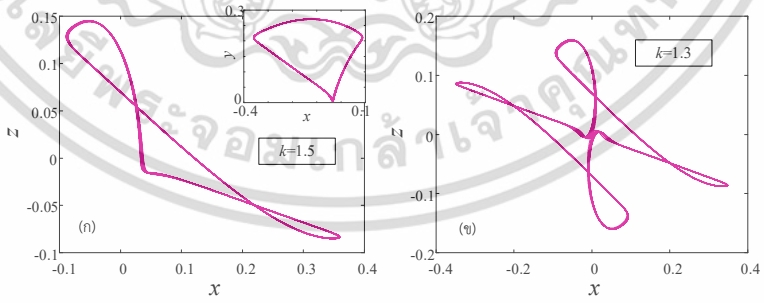
สำหรับระบบ (4.2) จะทำการตรวจสอบช่วงการเกิดพฤติกรรมพลวัตสำหรับพารามิเตอร์ A B และ k โดยพารามิเตอร์ k กำหนดในช่วง $0.7 \le k \le 1.5$ (โดยคงที่ A=1.7 และ B=2.35) จากนั้นพารามิเตอร์ A ถูกกำหนดในช่วง $1.4 \le A \le 2$ (โดยคงที่ k=0.7 และ B=2.35) สุดท้ายพารามิเตอร์ B ถูกกำหนดในช่วง $0 \le B \le 5$ (โดยคงที่ A=1.7 และ k=0.7) แผนภาพ Bifurcation และสเปกตรัม Lyapunov แสดงดังรูปที่ 4.22 ค่าที่ถูกเลือกใช้สำหรับพารามิเตอร์ A B และ k ของระบบสองวงม้วนใน (4.2) คือ A=1.7 B=2.35 และ k=0.7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

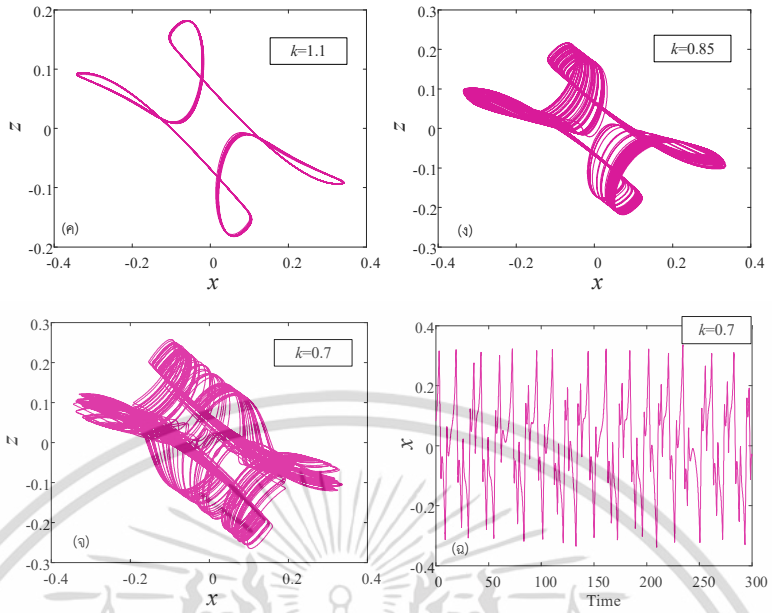


รูปที่ 4.22 ตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของระบบ (4.2) โดยตรวจสอบพารามิเตอร์ A B และ k กำหนด (x_0, y_0, z_0)=(0.1, 0.1, 0.1) (ก๑) - (ค๑) แผนภาพ Bifurcation บนเอาต์พุต x_{max} (ก๒) – (ค๒) สเปกตรัม Lyapunov

หลังจากตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตด้วยแผนภาพ Bifurcation และสเปกตรัม Lyapunov สำหรับระบบที่ (4.2) แล้ว จะแสดงตัวอย่างลักษณะพลวัตที่เกิดขึ้นบน phase portraits บนระนาบ x – z ด้วยการปรับพารามิเตอร์ k ดังรูปที่ 4.23 ในระบบที่ (4.2) จุดเริ่มต้นสำหรับพารามิเตอร์ k ของระบบไม่ใช่ลักษณะสัญญาณไซน์หรือวงรอบจำกัด แต่เป็นลักษณะจุดคงที่ โดยเริ่มที่ k=1.5 ดังรูปที่ 4.23 (ก) แสดงถึงไปจนถึงลักษณะตัวดึงดูดสองวงม้วนพร้อมสัญญาณเคออสบนแกนเวลา ที่ k=0.7 ดังรูปที่ 4.23 (จ) – (ฉ) ตามลำดับ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.23 แสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits ของระบบที่ (4.2) โดยปรับพารามิเตอร์ k โดยอิงจากรูปที่ 4.22 (ก) (คงที่พารามิเตอร์ A=1.7 B=2.35) (ก) จุดคงที่ k=1.5 (ข) พฤติกรรมเชิงสองคาบ k=1.3 (ค) พฤติกรรมเชิงสองคาบ k=1.1 (ง) ตัวดึงดูดเข้าใกล้สองวงม้วน k=0.85 (จ) ตัวดึงดูดเคออสสองวงม้วน k=0.7 (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต x บนแกนเวลา ที่ k=0.7

จากการตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตของทั้งสามระบบที่ออกแบบ สามารถสรุปลักษณะของพฤติกรรมพลวัตในแต่ละช่วงพารามิเตอร์ของแต่ละระบบได้ ดังตารางที่ 4.6 โดยค่าพารามิเตอร์และเงื่อนไขเริ่มต้นที่ถูกแสดงไว้ในตารางเป็นค่าหลักที่ใช้ในการแสดงผลลัพธ์ของทั้งสามระบบ ซึ่งหากมีการเปลี่ยนแปลงค่าใดค่าหนึ่งเพียงเล็กน้อยจะส่งผลให้ภาพรวมพฤติกรรมพลวัตของทั้งระบบเปลี่ยนแปลงอย่างสิ้นเชิง

ตารางที่ 4.6 สรุปพฤติกรรมพลวัตต่างๆที่เกิดขึ้นบนระบบที่ออกแบบทั้งสาม โดยแสดงจากช่วงการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ k, A และ B

ระบบที่ออกแบบ	พารามิเตอร์	คงที่พารามิเตอร์	เงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0)	ของเขต	พฤติกรรมพลวัต*1
ระบบที่ (4.1)	k	A=1.5 B=2.35	(0.1,0.1,0.1)	[1.6, 1.28] [1.28, 0.93] [0.92, 0.75] [0.74, 0.2]	วงรอบจำกัด พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน ตัวดึงดูดสองวงม้วน
	A	k=0.4 B=2.35	(0.1,0.1,0.1)	[0.4, 0.49] [0.5, 0.81]	วงรอบจำกัด พฤติกรรมเชิงคาบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

				[0.82, 1.6]	ตัวดึงดูดสองวงม้วน
	B	*A*=1.5 *k*=0.4	(0.1,0.1,0.1)	[5, 4.42] [4.41, 0.1]	พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดสองวงม้วน
ระบบที่ (4.2)	*k*	*A*=1.7 *B*=2.35	(0.1,0.1,0.1)	[1.5, 1.39] [1.38, 0.87] [0.86, 0.7]	จุดคงที่ พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดสองวงม้วน
	A	*k*=0.7 *B*=2.35	(0.1,0.1,0.1)	[1.4, 1.45] [1.46, 1.57] [1.58, 2]	จุดคงที่ พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดสองวงม้วน
	B	*A*=1.5 *k*=0.7	(0.1,0.1,0.1)	[0.1, 5]	ตัวดึงดูดสองวงม้วน
ระบบที่ (4.3)	*k*	*A*=1.2 *B*=2.2	(0.1,0.1,0.01)	[2, 1.92] [1.91, 1.88] [1.87, 1.79] [1.78, 1.72] [1.71, 0.78] [0.77, 0.55] [0.54, 0.23]	วงรอบจำกัด จุดคงที่ พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน ตัวดึงดูดสองวงม้วน พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดสี่วงม้วน
	A	*k*=0.45 *B*=2.2	(0.1,0.1,0.1)	[0.2, 0.49] [0.5, 2.8]	พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดสี่วงม้วน
	B	*A*=1.2 *k*=0.45	(0.1,0.1,0.01)	[5, 4.26] [4.25, 3.7] [3.6, 3] [2.9, 1.5]	พฤติกรรมเชิงคาบ ตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน ตัวดึงดูดสองวงม้วน ตัวดึงดูดสี่วงม้วน

*1 ลักษณะของพฤติกรรมพลวัตแต่ละรูปแบบสามารถดูได้โดยละเอียดในบทที่ 2 ของวิทยานิพนธ์

4.4.3. การตรวจสอบสถานการณ์หลายเสถียรภาพ

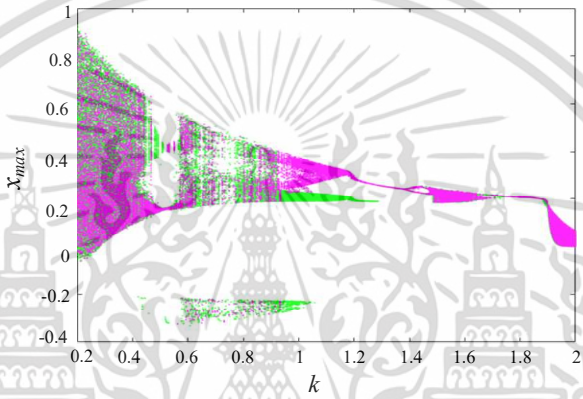
ความหลายเสถียรภาพ (Multistability) เป็นพฤติกรรมอย่างหนึ่งที่เกิดขึ้นได้บนระบบเคออส ซึ่งการตรวจสอบความหลายเสถียรภาพเป็นการศึกษาเชิงลึกและจำเป็นต้องตรวจสอบอย่างละเอียด สำหรับระบบเคออสที่ออกแบบ ความหลายเสถียรภาพสามารถนิยามอย่างง่ายได้ว่า เป็นพฤติกรรมที่เกิดจากผลกระทบของเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ในขณะที่ค่าพารามิเตอร์คงที่ ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวมีประโยชน์ด้านของวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ [44 - 47]

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการตรวจสอบความหลายเสถียรภาพของระบบเคออสสองวงม้วน ในระบบที่ (4.1) ด้วยแผนภาพ Bifurcation แบบกิ่งขนาน (กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นมากกว่าหนึ่งเงื่อนไขในหนึ่งแผนภาพ) พฤติกรรมที่สำคัญที่เกิดขึ้นในความหลายเสถียรภาพ คือ ความสมมาตรและไม่สมมาตรของพฤติกรรมพลวัตบน phase portraits ซึ่งผลกระทบที่เกิดจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกันจำเป็นต้องยืนยันอย่างครอบคลุม ซึ่งจะถูกยืนยันผลของความหลายเสถียรภาพด้วย Basin of attraction [48, 49] โดย Basin of attraction เป็นเครื่องมือเฉพาะทางที่ใช้ตรวจสอบผลกระทบของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นวงกว้าง เพื่อบ่งบอกความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงระหว่างตัวแปรเงื่อนไขเริ่มต้นสองตัวพร้อมกัน ดังนั้นเมื่อมีการศึกษาความหลายเสถียรภาพแล้ว เครื่องมือ Basin of attraction จึงเป็นสิ่งจำเป็นในการนำมาอธิบายร่วมกัน เพื่อให้การแสดงผลลัพธ์ครอบคลุม

ในหัวข้อนี้มุ่งเน้นไปที่การตรวจสอบการมีอยู่ร่วมกันของตัวดึงดูดไม่สมมาตร (Coexisting asymmetric attractors) บนระบบ โดยเริ่มจากการจำลองแผนภาพ Bifurcation แบบกิ่งขนานที่เกิดขึ้นสำหรับพารามิเตอร์ k ของระบบ (4.1) ในช่วง $0.2 \leq k \leq 2$ ดังรูปที่ 4.24 โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้นต่างกันที่ (-0.15, 0.1, 0.1) สำหรับสีเขียว และ (0.15, 0.1, 0.1) สำหรับสีชมพู และคงที่พารามิเตอร์ A=1.9 B=2.35

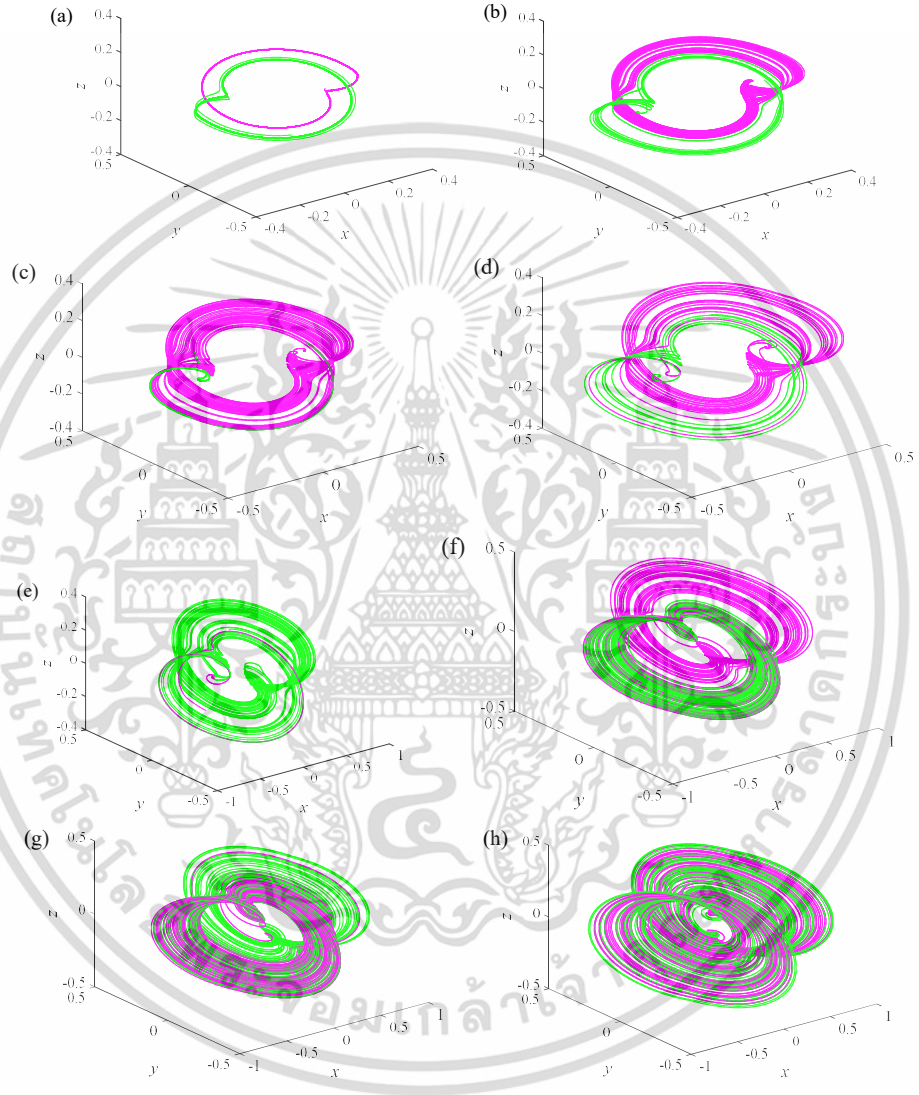


รูปที่ 4.24 แผนภาพ Bifurcation แบบกิ่งขนาน สำหรับการกระจายตัวสูงสุดของตัวแปรสเตท x (x_{max}) คู่กับพารามิเตอร์ k โดยคงที่ A=1.9 B=2.35

จากรูปที่ 4.24 ระบบสามารถพบความไม่สมมาตรที่เกิดขึ้นบนระบบ จากเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกันสองชุด โดยจะแสดงลักษณะตัวดึงดูดเคออสที่ไม่สมมาตรพร้อมปรับพารามิเตอร์ k ให้เห็นดังรูปที่ 4.25 (ก) – (ฉ) ซึ่งลักษณะของตัวดึงดูดเคออสที่เกิดขึ้นบน phase portraits ที่แสดงในรูปที่ 4.25 ได้แก่ พฤติกรรมเชิงคาบเดียว (period-1) วงม้วนแบบโมโน (mono-scroll) พฤติกรรมเชิงแปดคาบ (period-8) ลักษณะคล้ายตัวดึงดูดเคออส (chaotic like attractor) ตัวดึงดูดหนึ่งวงม้วน (Single-scroll) และ ตัวดึงดูดเคออส (Chaotic attractor) ซึ่งความไม่สมมาตรที่เกิดขึ้น คือ ภายในหนึ่งรูปสามารถแสดงลักษณะถึงสองลักษณะพร้อมกันภายใต้พารามิเตอร์เดียวกันแต่ต่างเงื่อนไขเริ่มต้น เช่น ในรูปที่ 4.25 (ข) เป็นการอยู่ร่วมกันของพฤติกรรมเชิงแปดคาบและวงม้วนแบบโมโน ซึ่ง เงื่อนไขเริ่มต้น คือ (-0.15, 0.1, 0.1) สำหรับสีเขียว และ (0.15, 0.1, 0.1) สำหรับสีชมพู คงที่ k=0.94 A=1.9 และ B=2.35 เป็นต้น โดยพฤติกรรมดังกล่าวมีการยืนยันร่วมกับผลอ่างของแรงดึงดูดบนระนาบ x_0 – y_0 โดยสีของพฤติกรรมพลวัตในรูปที่ 4.25 สอดคล้องกับสีแอ่งของแรงดึงดูดในรูปที่ 4.26 และ 4.27 โดยรูปที่ 4.26 สอดคล้องกับ phase portraits ในรูปที่ 4.25 (ช) และรูปที่ 4.27 สอดคล้องกับ phase portraits ในรูปที่ 4.25 (ซ) และพื้นที่ในโซนสีเหลืองหมายถึงขอบเขตของสัญญาณลู่ออก

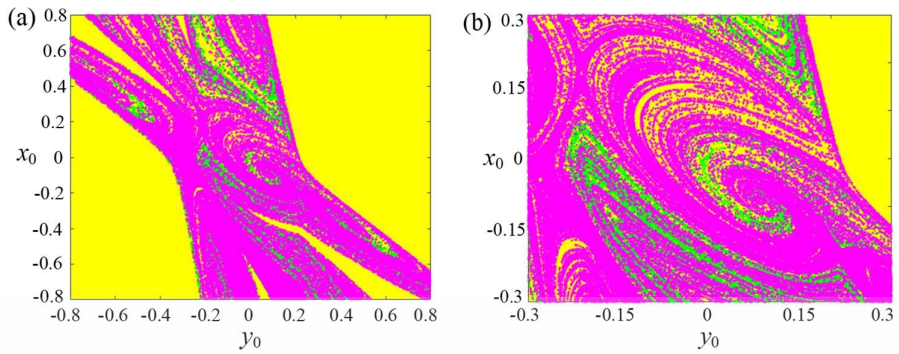
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในหัวข้อนี้แสดงตัวอย่างของสถานการณ์หลายเสถียรภาพที่เกิดขึ้นบนระบบเคออสสองวงม้วนใน (4.1) โดยมุ่งเน้นพฤติกรรมความไม่สมมาตรที่มีอยู่ร่วมกัน พฤติกรรมดังกล่าวมีประโยชน์ในด้านแหล่งจ่ายสุ่ม (Source of randomness) และการกระยุกต์ใช้ด้านการสื่อสาร รวมถึงการกำเนิดสัญญาณสุ่ม (Random signal generator) [98, 99] เป็นต้น

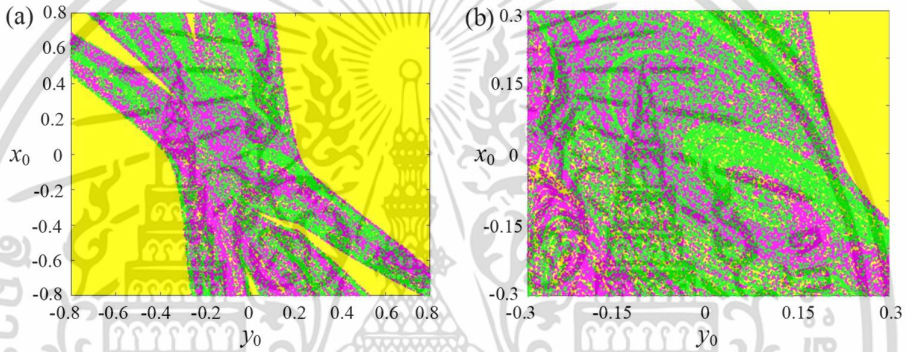


รูปที่ 4.25 ตัวอย่างของลักษณะตัวดึงดูดไม่สมมาตร 2 ตัวที่เกิดขึ้นจากระบบที่นำเสนอ บนระนาบ *x*-*y*-z (คงที่ A=1.9 B=2.35) ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นต่างกัน (-0.15, 0.1, 0.1) สำหรับสีเขียว และ (0.15, 0.1, 0.1) สำหรับสีชมพู (ก) k=1.28 (ข) k=0.94 (ค) k=0.89 (ง) k=0.68 (จ) k=0.61 (ช) k=0.44 (ซ) k=0.41 (ฉ) k=0.32

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.26 แผนภาพอ่างของแรงดึงดูด โดยกำหนด z_0=0.1 ที่สอดคล้องผลในรูปที่ 4.25 (ช) (ก) ระนาบ x_0-y_0 (ข) ภาพขยายของรูปที่ 4.26 (ก)



รูปที่ 4.27 แผนภาพอ่างของแรงดึงดูด โดยกำหนด z_0=0.1 ที่สอดคล้องผลในรูปที่ 4.25 (ช) (ก) ระนาบ x_0-y_0 (ข) ภาพขยายของรูปที่ 4.27 (ก)

4.5 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบที่ออกแบบ

เมื่อมีการแบบระบบเคออสในทางคณิตศาสตร์ และทำการวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขและกราฟฟิกเพื่อยืนยันพฤติกรรมพลวัตต่างๆที่เกิดขึ้นในระบบแล้ว การนำไปออกแบบวงจรก็เป็นสิ่งสำคัญเพื่อยืนยันการนำไปประยุกต์ใช้จริงในทางวิศวกรรม

โดยในหัวข้อนี้อธิบายการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบที่ออกแบบโดยใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA ในการออกแบบวงจรรวมแอนาลอก ประสิทธิภาพของวงจรในโหมดกระแสมีข้อดีกว่าโหมดแรงดันในเรื่อง แรงดันต่ำ แบนวิดธ์กว้างกว่า และโครงสร้างของวงจรขนาดเล็กกว่า เนื่องจากสามารถลดจำนวนอุปกรณ์พาสซีฟอย่างตัวต้านทานได้ โดยเฉพาะอุปกรณ์แอกทีฟโหมดกระแส OTA เป็นอุปกรณ์ที่สามารถปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ โดยสามารถปรับค่าความนำได้จากการปรับกระแสไบอัส จึงเป็นอุปกรณ์ที่ในงานวิจัยนี้นำมาออกแบบเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส

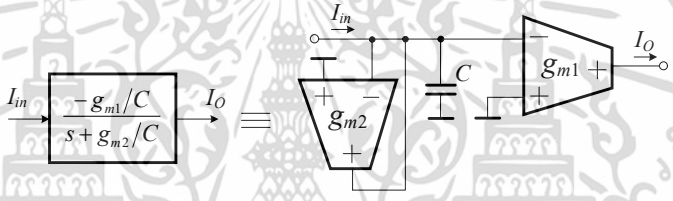
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.1 ตัวกรองความถี่ต่ำผ่านไบควอดโดยใช้ OTA

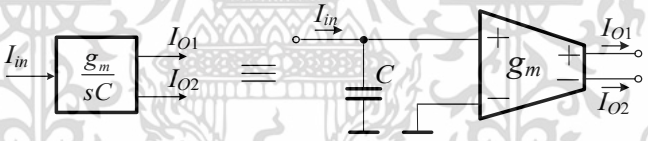
จากบล็อคไดอะแกรมที่ออกแบบในรูปที่ 4.1 ในงานนี้มีการนำตัวกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับสองไบควอดมาคาสเคดกับอินทิเกรเตอร์ชนิดไม่สูญเสียเพื่อออกแบบในวงจรกำเนิดสัญญาณเคออส โดยตัวกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับสองไบควอดสร้างจากอินทิเกรเตอร์แบบสูญเสียและไม่สูญเสียในโหมดกระแส [100] ซึ่งอุปกรณ์ OTA ที่ใช้ออกแบบเป็นอุปกรณ์เชิงพาณิชย์รุ่น LT1228 [101] วงจรอินทิเกรเตอร์ชนิดไม่สูญเสียและชนิดสูญเสียแสดงดังรูปที่ 4.28 (ก) และ (ข) ตามลำดับ โดยฟังก์ชันส่งผ่านสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{I_O}{I_{in}} = \frac{-g_{m1}/C}{s+g_{m2}/C} \tag{4.17}$$

$$\frac{I_{O1}}{I_{in}} = \frac{-I_{O2}}{I_{in}} = \frac{g_m}{sC} \tag{4.18}$$



(ก)



(ข)

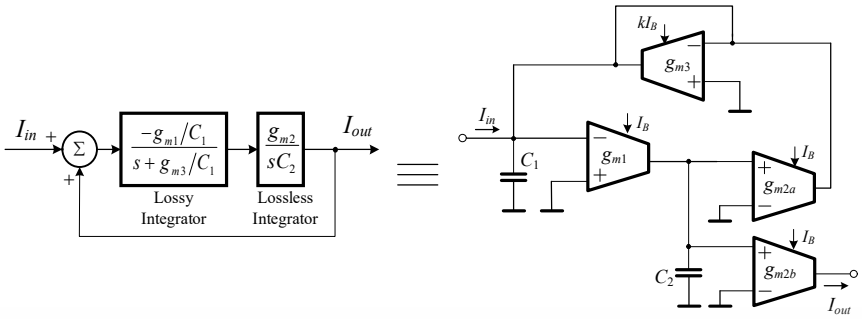
รูปที่ 4.28 อินทิเกรเตอร์โหมดกระแส โดยใช้ OTA (ก) ชนิดไม่สูญเสีย (ข) ชนิดสูญเสีย

ฟังก์ชันส่งผ่านของตัวกรองความต่ำผ่านอันดับสองแสดงดังสมการที่ (4.19) ความถี่ตอบสนอง (ω_0) ของวงจรสามารถปรับได้จากกระแสไบอัส I_{B1} (g_{m1}) และ I_{B2} (g_{m2}) โดยตัวประกอบคุณภาพ (Q) สามารถปรับได้จาก I_{B3} (g_{m3}) ตัวกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับสองไบควอดโดยใช้ OTA ที่ออกแบบ แสดงดังรูปที่ 4.29

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{-\frac{g_{m1}g_{m2}}{C_1C_2}}{s^2+\left(\frac{g_{m3}}{C_1}\right)s+\frac{g_{m1}g_{m2}}{C_1C_2}} \tag{4.19}$$

ที่ $g_{mi} = \sqrt{KI_{Bi}} = \sqrt{\mu C_{ox}(W/L)I_{Bi}}$, C_1=C_2=C และ g_{m1}=g_{m2}=g_m ดังนั้น $\omega_0 = \frac{KI_B}{C}$ และ $1/Q$=g_{m3}/g_m=k.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.29 ตัวกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับสองไบควอด โหมดกระแส โดยใช้ OTA

4.5.2 วงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นดัดแปลงสี่เหลี่ยม โดยใช้ OTA [85]

การกำเนิดสัญญาณเคออสที่ซับซ้อนสูง การออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นในระบบเป็นสิ่งสำคัญ โดยฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสี่เหลี่ยมดัดแปลงที่ออกแบบในงานนี้ มีการนำมาออกแบบเป็นวงจรด้วยอุปกรณ์แอกทีฟ OTA ด้วย เพื่อสร้างวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสตามหลักการที่ออกแบบเชิงตัวเลข รูปที่ 4.30 แสดงวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสี่เหลี่ยมดัดแปลงที่ออกแบบโดยใช้ OTA ในวงจร 5 ตัว พารามิเตอร์ A และ B สามารถปรับได้ด้วยกระแสไบอัส (I_B) และขอบเขตแรงดัน ($\pm V_B$) ตามลำดับ ที่ OTA_5 และ OTA_6 สามารถสร้างลักษณะฟังก์ชันแรงดันเปรียบเทียบ (Voltage comparator) ซึ่งสามารถปรับขอบเขตได้ด้วย $\pm V_B$ เอาต์พุตแรงดันที่โหนด 1 และ 2 คือแรงดันอิ่มตัว (saturation voltage: $\pm V_{SAT}$) ที่เอาต์พุตของ OTA_7 และ OTA_8 ถูกแปลงจากแรงดันเป็นกระแสและนำกระแสเอาต์พุตมารวมกันเพื่อสร้างฟังก์ชันสี่เหลี่ยม จากนั้นที่ OTA_9 สามารถสร้างลักษณะฟังก์ชันเชิงเส้น และสามารถปรับกระแสไบอัส I_{Rect} โดนที่เอาต์พุตกระแส (I_O) ของ OTA_9 แสดงลักษณะฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลงที่สอดคล้องกับรูปที่ 4.4 (ค) นอกจากนี้แรงดันและกระแสที่โหนดต่างๆ สามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$V_1 = (V_{in} - V_B)V_{sat} \tag{4.20}$$

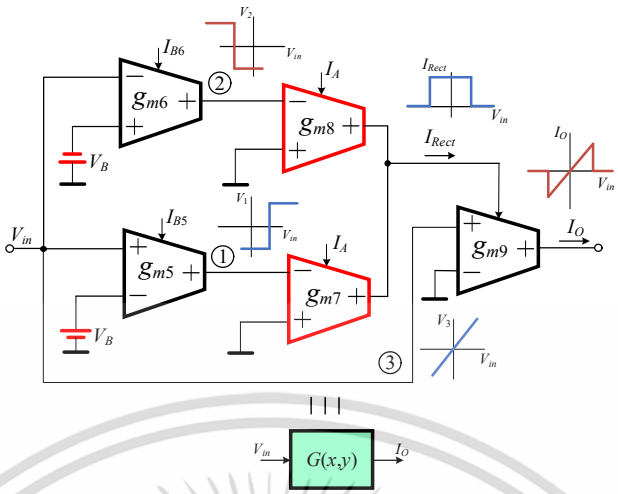
$$V_2 = -(V_{in} + V_B)V_{sat} \tag{4.21}$$

$$I_{\text{Rect}} = \begin{cases} 2g_{m7,8}V_{sat} & ;V_{in} < |V_B| \\ 0 & ;V_{in} > |V_B| \end{cases} \tag{4.22}$$

$$I_O = \begin{cases} g_{m9}V_{in} & ;V_{in} < |V_B| \\ 0 & ;V_{in} > |V_B| \end{cases} \tag{4.23}$$

ที่ $g_{m7,8} \approx \sqrt{I_A \mu C_{ox}(W/L)}$ และ $g_{m9} \approx \sqrt{I_{\text{Rect}} \mu C_{ox}(W/L)}$

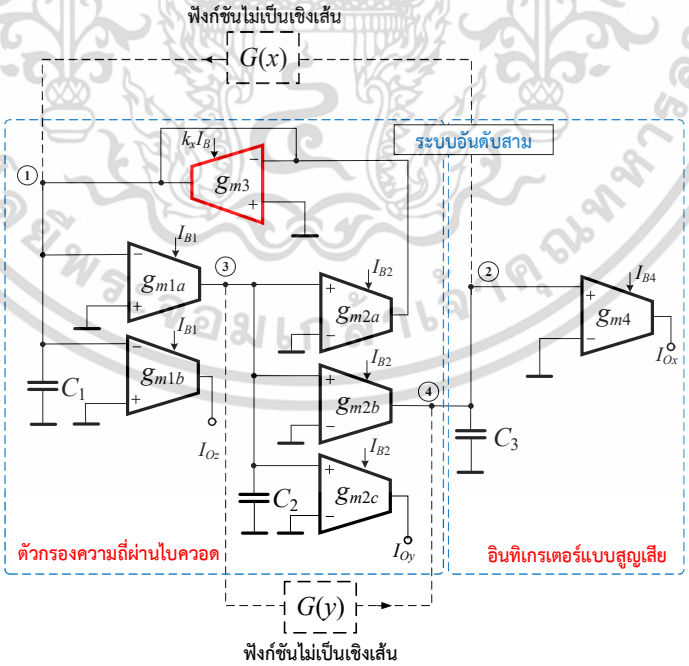
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.30 วงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสี่เหลี่ยมดัดแปลง โดยใช้ OTA

4.5.3 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสที่นำเสนอ [85]

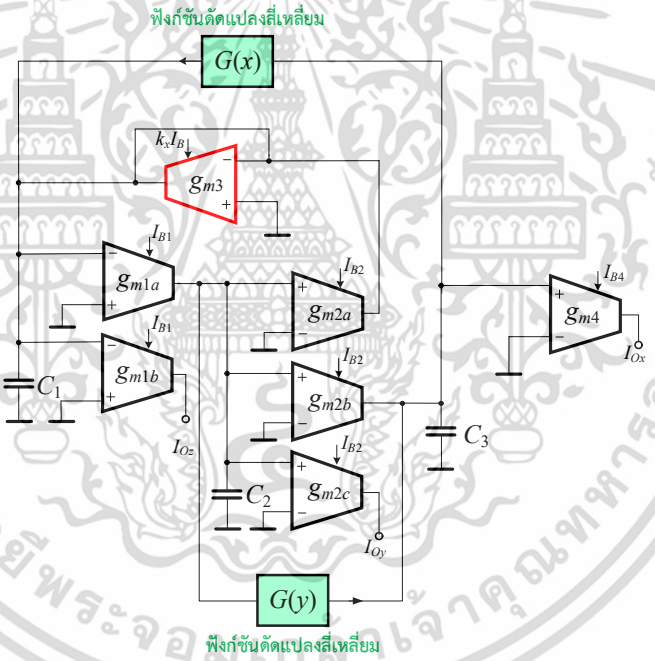
จากหัวข้อที่ 4.5.1 เมื่อนำวงจรย่อยที่ออกแบบมารวมกันตามหลักการที่ออกแบบในรูปที่ 4.1 – 4.2 จะได้วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสดังรูปที่ 4.31 ซึ่งวงจรสามารถขนานวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น $G(x)$ และ $G(y)$ เข้ากับวงจรระบบอันดับสามได้อย่างอิสระเนื่องจากเป็นโหนดกระแส โดยสามารถต่อวงจร $G(x)$ ได้ที่โหนด 1 กับ 2 และสามารถต่อวงจร $G(y)$ ที่ได้โหนด 3 กับ 4 โดยที่ตำแหน่งฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นจะขึ้นอยู่กับวงจรที่ออกแบบ โดยในวงจรจะกำหนด $I_{B1}=I_{B2}=I_{B4}=I_B$ และ $C_1=C_2=C_3=C$



รูปที่ 4.31 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสที่ออกแบบ โดยสลับตำแหน่งฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างอิสระ

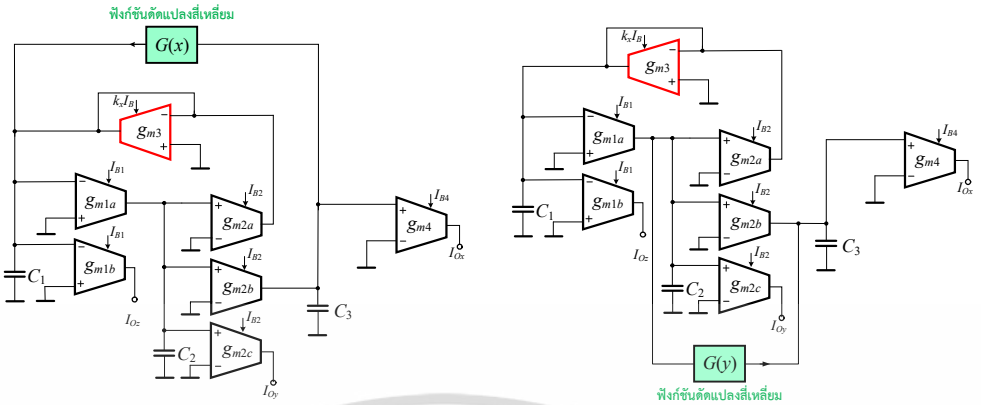
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยวงจรสำหรับระบบเคออสที่ออกแบบในสมการที่ (4.1) – (4.3) ที่เป็นระบบเคออสสี่วงม้วนและสองวงม้วน จะนำวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสี่เหลี่ยมดัดแปลงในรูปที่ 4.29 มาใช้ในวงจรรูปที่ 4.31 โดยระบบเคออสที่เป็นลักษณะเด่นด้วยเคออสสี่วงม้วนของวิทยานิพนธ์ โดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเส้นพร้อมกันสองตำแหน่งจากระบบที่ (4.3) สามารถสร้างเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสได้ดังรูปที่ 4.32 และระบบเคออสสองวงม้วนในสมการที่ (4.1) และ (4.2) โดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นหนึ่งตำแหน่งสร้างเป็นวงจรได้ดังรูปที่ 4.33 (ก) และ (ข) ตามลำดับ วงจรสามารถปรับลักษณะสัญญาณเคออสของวงจรได้ด้วยพารามิเตอร์ A B และ k ซึ่งสามารถปรับได้จากกระแสไบอัส (I_A) ขอบเขตแรงดัน (V_B) และตัวประกอบคุณภาพของตัวกรองความถี่ต่ำผ่านไบควอด (kI_B) ตามลำดับ สัญญาณเคออสสามารถดูได้ที่เอาต์กระแสของ OTA_1 OTA_2 และ OTA_3 สำหรับเอาต์พุต x y และ z ตามลำดับ



รูปที่ 4.32 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสสี่วงม้วน โดยใช้ OTA สำหรับระบบที่ออกแบบใน (4.3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



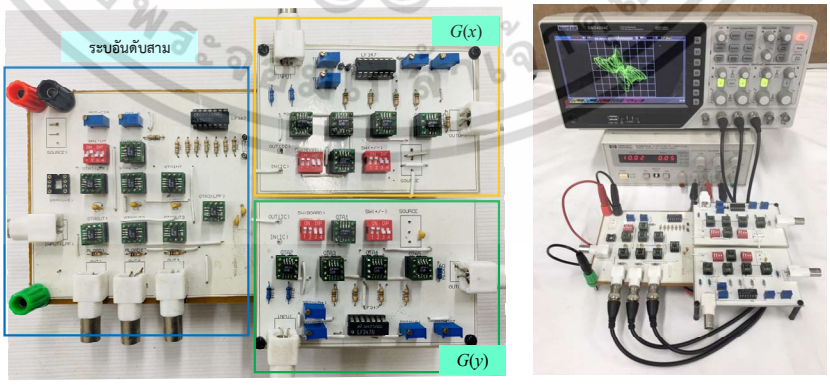
(ก) (ข)

รูปที่ 4.33 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสสองวงม้วน โดยใช้ OTA (ก) วงจรของระบบที่ออกแบบใน (4.1) (ข) วงจรของระบบที่ออกแบบใน (4.2)

วงจรที่ออกแบบโดยใช้ OTA สามารถปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ ทำให้สามารถตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตเพื่อเปรียบเทียบกับผลในทางทฤษฎีได้อย่างสะดวก โดยจะแสดงผลลัพธ์ทางวงจรด้วยผลการทดลองจริง วงจรที่ออกแบบในหัวข้อ 4.5.3 จะถูกนำไปออกแบบเป็นวงจร PCB ได้ดังนี้

4.5.4 ผลการทดลองจริง (Experimental results)

ในหัวข้อนี้จะนำหลักการที่ออกแบบในหัวข้อที่ 4.5.1 – 4.5.3 มาออกแบบเป็นวงจร PCB โดยใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA ที่มีขายในเชิงพาณิชย์ LT1228 แสดงวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสบน PCB และภาพรวมการทดลอง ดังรูปที่ 4.34 (ก) และ (ข) ตามลำดับ วงจรใช้ไฟเลี้ยงสำหรับอุปกรณ์แอกทีฟ OTA $\pm 10V$ และกำหนดตัวเก็บประจุเท่ากับ 50nF เท่ากันทุกตัว กระแสไบอัส (I_B) ของ OTAs กำหนด 100μA ยกเว้น OTA_3, OTA_7, และ OTA8 ซึ่งไว้ปรับพารามิเตอร์ (A B k) ของระบบ

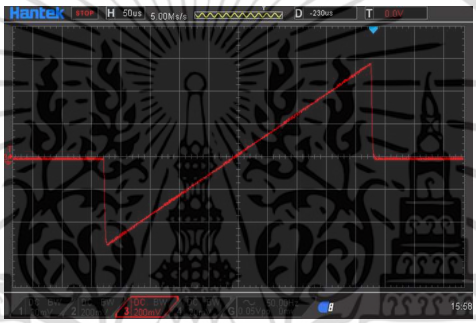


(ก) (ข)

รูปที่ 4.34 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออส โดยใช้ OTA LT1228 (ก) วงจร PCB ที่ออกแบบ (ข) ภาพรวมการทดลอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.34 (ก) แสดงวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสบน PCB ที่ออกแบบ โดยประกอบด้วยตัวกรองความถี่ต่ำผ่านแบบไบควอดและอินทิเกรเตอร์แบบสูญเสีย และฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น ($G(x)$ และ $G(y)$) โดยในส่วนวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสี่เหลี่ยมดัดแปลงที่ออกแบบสามารถแสดงลักษณะเอาต์พุตสำหรับผลการทดลองจริง โดยยกตัวอย่างสำหรับค่าพารามิเตอร์ A=1.5 และ B=2.35 จากการกำหนด I_A=150μA และ V_B=±17mV ตามลำดับ แสดงดังรูปที่ 4.35 โดยแสดงเอาต์พุตกระแส (I_o) ของ OTA_9 ลักษณะฟังก์ชันที่ได้ตรงตามทฤษฎีที่ออกแบบ และใช้สำหรับการกำเนิดลักษณะสัญญาณเคออสที่นำเสนอในการทดลองจริง



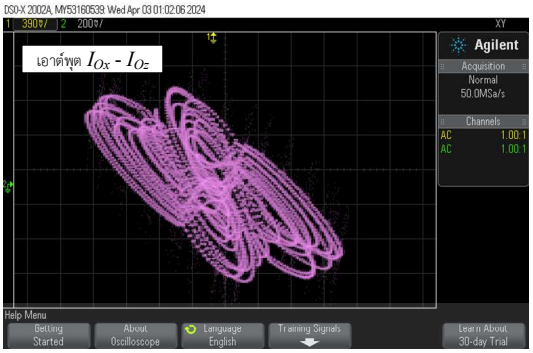
รูปที่ 4.35 เอาต์พุตของวงจรฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมบน Oscilloscope

โดยวงจรฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม $G(x)$ และ $G(y)$ ในรูปที่ 4.34 (ก) สามารถสลับตำแหน่งเพื่อออกแบบวงจรเคออสของทั้งสามระบบดังรูปที่ 4.32 และ 4.33 ได้ ซึ่งหากมีการใช้วงจร $G(x)$ และ $G(y)$ พร้อมกันจะทำให้สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสสี่วงม้วนดังระบบที่ (4.3) โดยผลลัพธ์ของวงจร PCB จะถูกแสดงเพื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแต่ละระบบที่ออกแบบใน (4.1) – (4.3) ดังต่อไปนี้

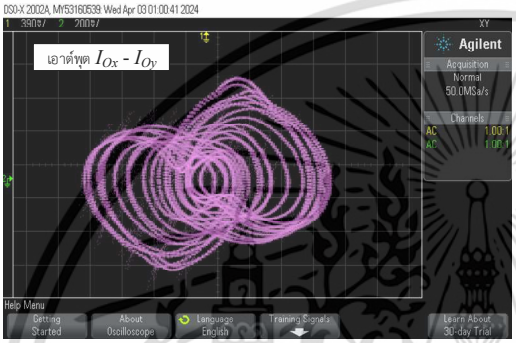
4.5.4.1 ผลการกำเนิดสัญญาณเคออสวงจร PCB สำหรับระบบเคออสสี่วงม้วนที่ (4.3)

ในส่วนแรกจะแสดงผลลัพธ์ประสิทธิภาพของวงจร PCB สำหรับการสร้างสัญญาณเคออสสี่วงม้วนที่เป็นลักษณะเด่นของวิทยานิพนธ์ จากระบบที่ (4.3) โดยวงจรอิงตามรูปที่ 4.32 โดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น $G(x)$ และ $G(y)$ พร้อมกัน โดยกำหนดกระแสไบอัสในวงจร I_B=100μA ที่ I_A=120μA (A=1.2) แรงดัน V_B=±18mV (B=2.2) และกระแสไบอัส kI_B=45uA (k=0.45) สัญญาณเคออสลักษณะสี่วงม้วนบนวงจร PCB ถูกแสดงบน Oscilloscope สองมิติ ดังรูปที่ 4.36 ซึ่งผลลัพธ์สอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขดังรูปที่ 4.9

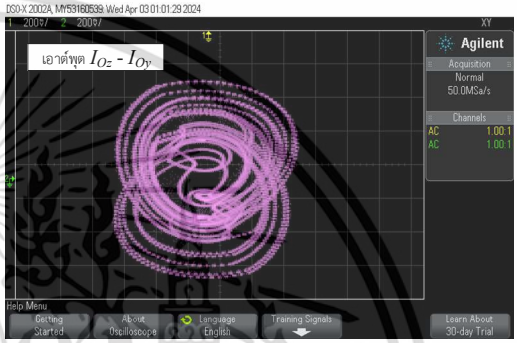
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



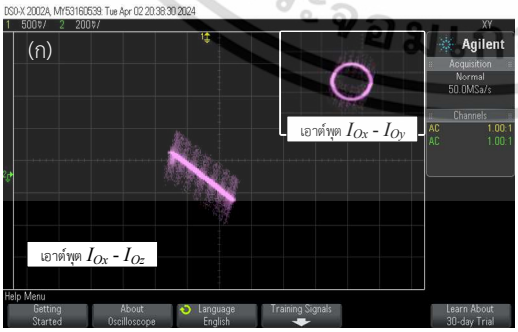
(ข)

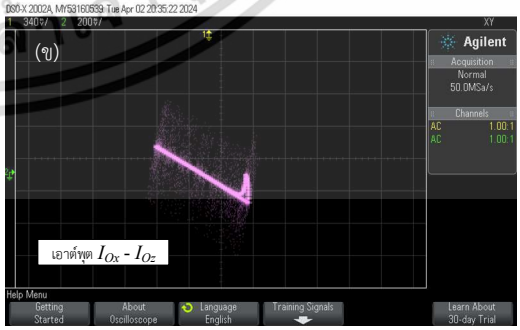


(ค)

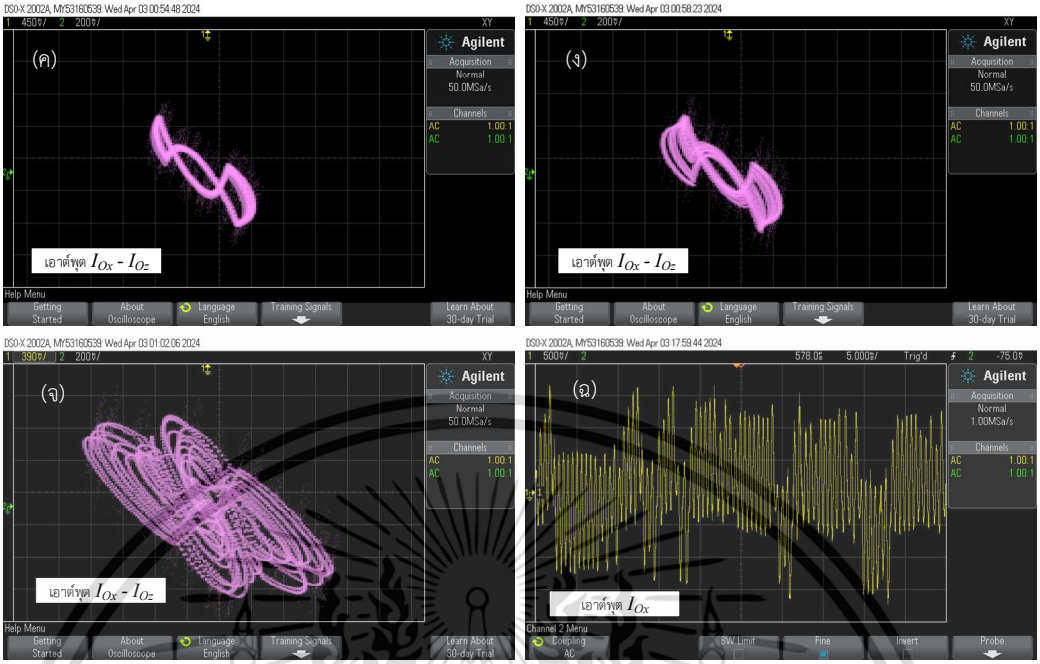
รูปที่ 4.36 แสดงสัญญาณเคออสสี่วงม้วนสองมิติจากวงจร PCB บน Oscilloscope สำหรับระบบที่ (4.3) (ก) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oz} (ข) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oy} (ค) เอาต์พุต I_{Oz}-I_{Oy}

การตรวจสอบพฤติกรรมพลวัตสำหรับเส้นทางสู่เคออสสี่วงม้วนบนวงจร PCB ของระบบที่ (4.3) ถูกแสดงดังรูปที่ 4.37 โดยปรับกระแสไบอัส kI_B ซึ่งแสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเคออสเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขบางรูป ในรูปที่ 4.14 โดยพฤติกรรมพลวัตในแต่ละค่ากระแสไบอัส kI_B ถูกแสดงไว้ในคำอธิบายใต้รูป 4.37 ผลลัพธ์ที่ได้พบว่าสอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลข





เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

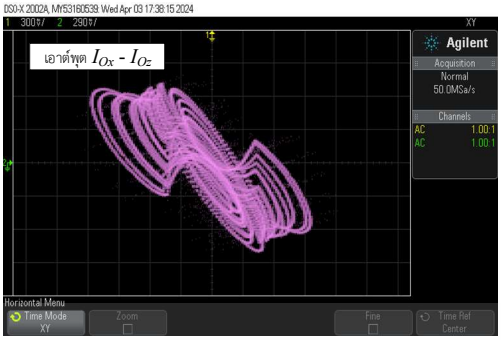


รูปที่ 4.37 ผลการทดลองแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของวงจร PCB ระบบเคออสสี่วงม้วน โดยปรับกระแสไบอัส kI_B (ก) kI_B= 200uA (k=2) แสดงวงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ (ข) kI_B= 195uA (k=1.95) แสดงพฤติกรรมเชิงสองคาบ (ค) kI_B= 100uA (k=1) แสดงพฤติกรรมไม่เป็นคาบ (ง) kI_B= 70uA (k=0.7) แสดงดึงดูดเคออสสองวงม้วน (จ) kI_B= 45uA (k=0.45) แสดงดึงดูดเคออสสี่วงม้วน โดยสอดคล้องกับ (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต I_{Ox}

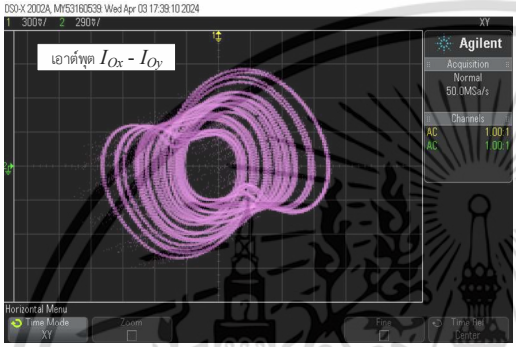
4.5.4.2 ผลการกำเนิดสัญญาณเคออสวงจร PCB สำหรับระบบเคออสสองวงม้วนที่ (4.1)

ในส่วนนี้จะแสดงผลลัพธ์ประสิทธิภาพของวงจร PCB สำหรับการสร้างสัญญาณเคออสสองวงม้วน จากระบบที่ (4.1) โดยวงจรอิงตามรูปที่ 4.33 (ก) โดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น $G(x)$ ตำแหน่งเดียว โดยกำหนดกระแสไบอัสในวงจร I_B=100μA ที่ I_A=150μA (A=1.5) แรงดัน V_B=±17mV (B=2.35) และกระแสไบอัส kI_B=40uA (k=0.4) สัญญาณเคออสลักษณะสองวงม้วนบนวงจร PCB ถูกแสดงบน Oscilloscope สองมิติ ดังรูปที่ 4.38 ซึ่งผลลัพธ์สอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขดังรูปที่ 4.8 (ก)

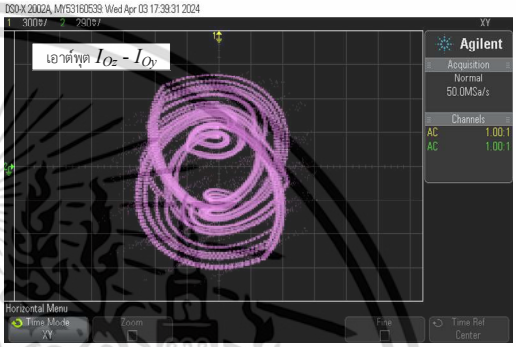
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



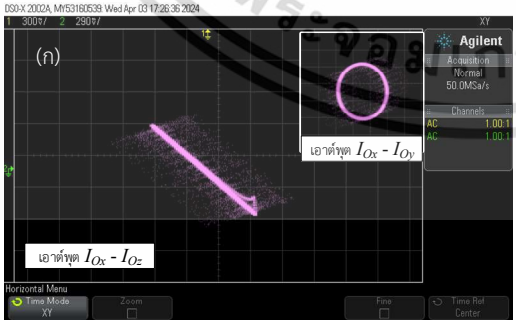
(ข)

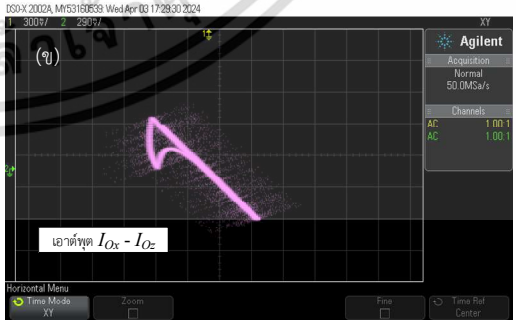


(ค)

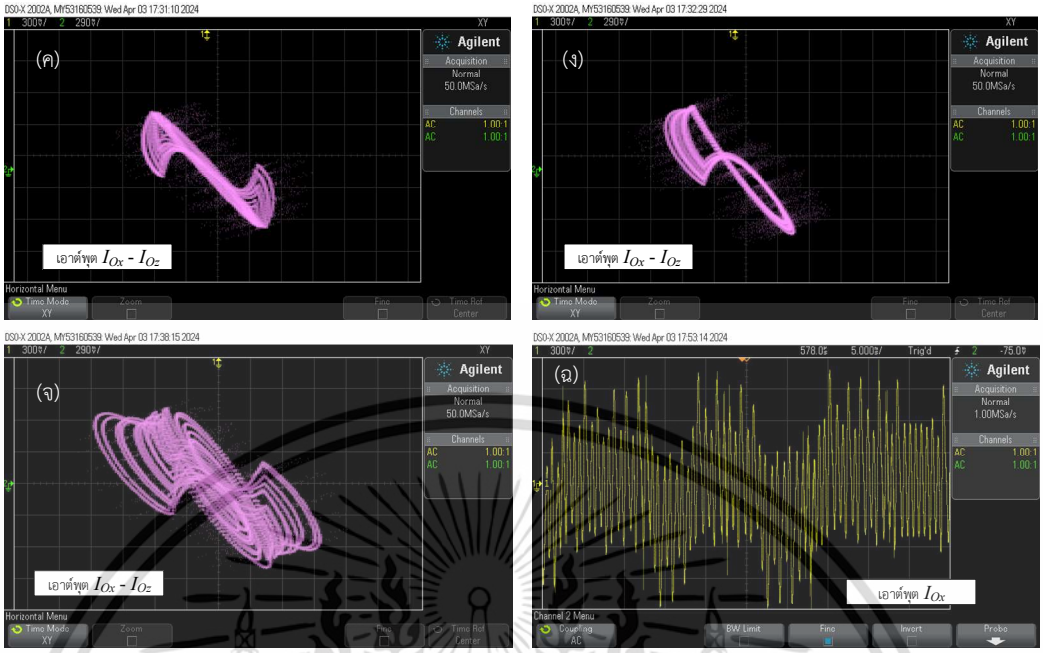
รูปที่ 4.38 แสดงสัญญาณเคออสสองวงม้วนสองมิติจากวงจร PCB บน Oscilloscope สำหรับระบบที่ (4.1) (ก) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oz} (ข) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oy} (ค) เอาต์พุต I_{Oz}-I_{Oy}

การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตสำหรับวงจร PCB ของระบบที่ (4.1) โดยปรับกระแสไบอัส kI_B ถูกแสดงดังรูปที่ 4.39 ลักษณะพฤติกรรมพลวัตในแต่ละค่ากระแสไบอัส kI_B ถูกแสดงไว้ในคำอธิบายใต้รูป ผลลัพธ์ที่ได้ของวงจรถูกเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในรูปที่ 4.21 และพบว่าผลที่ได้สอดคล้องกันเป็นอย่างดี ซึ่งวงจร PCB สำหรับระบบที่ (4.1) สามารถสร้างลักษณะเคออสสองวงม้วนได้





เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

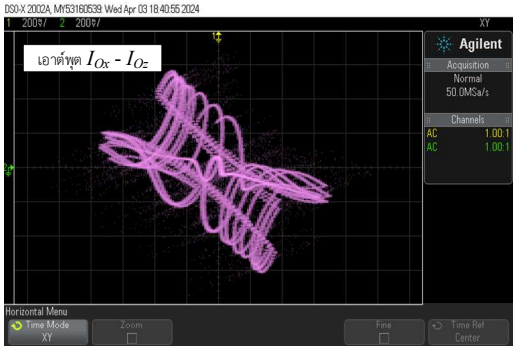


รูปที่ 4.39 ผลการทดลองแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของวงจร PCB ระบบเคออสสองวงม้วนโดยปรับกระแสไบอัส kI_B (ก) kI_B= 150uA (k=1.5) แสดงวงรอบจำกัดหรือสัญญาณไซน์ (ข) kI_B= 138uA (k=1.38) แสดงพฤติกรรมเชิงหนึ่งคาบ (ค) kI_B= 110uA (k=1.1) แสดงพฤติกรรมไม่เป็นคาบ (ง) kI_B= 65uA (k=0.65) แสดงดึงดูดเคออสหนึ่งวงม้วน (จ) kI_B= 40uA (k=0.4) แสดงดึงดูดเคออสสองวงม้วน โดยสอดคล้องกับ (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต I_{Ox}

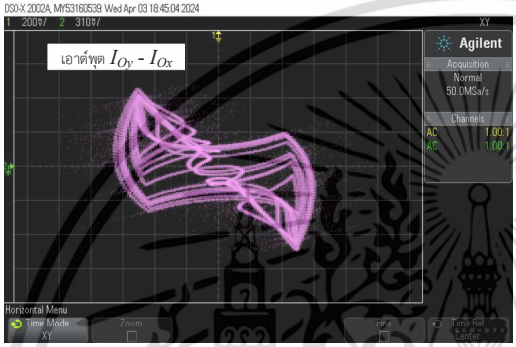
4.5.4.3 ผลการกำเนิดสัญญาณเคออสวงจร PCB สำหรับระบบเคออสสองวงม้วนที่ (4.2)

ในส่วนนี้จะแสดงผลลัพธ์ประสิทธิภาพของวงจร PCB สำหรับการสร้างสัญญาณเคออสสองวงม้วน จากระบบที่ (4.2) โดยวงจรอิงตามรูปที่ 4.33 (ข) โดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น $G(y)$ ตำแหน่งเดียว โดยกำหนดกระแสไบอัสในวงจร I_B=100μA ที่ I_A=170μA (A=1.7) แรงดัน V_B=±17mV (B=2.35) และกระแสไบอัส kI_B=70uA (k=0.7) สัญญาณเคออสลักษณะสองวงม้วนบนวงจร PCB ถูกแสดงบน Oscilloscope สองมิติ ดังรูปที่ 4.40 ซึ่งผลลัพธ์สอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขดังรูปที่ 4.8 (ข)

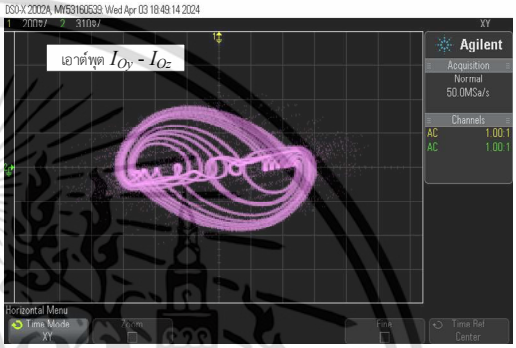
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



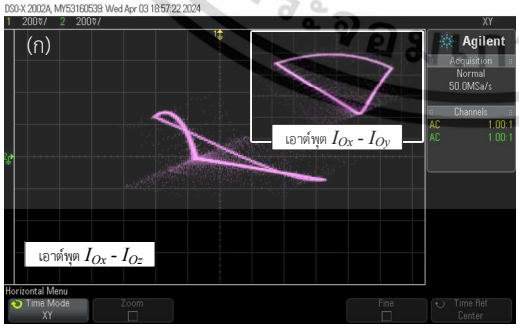
(ข)

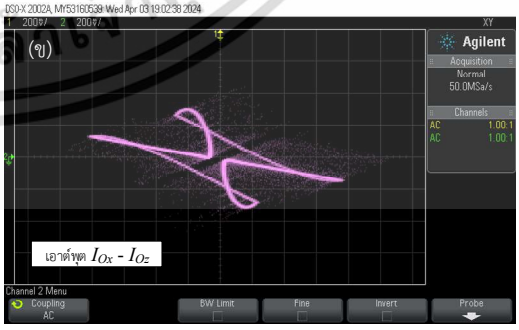


(ค)

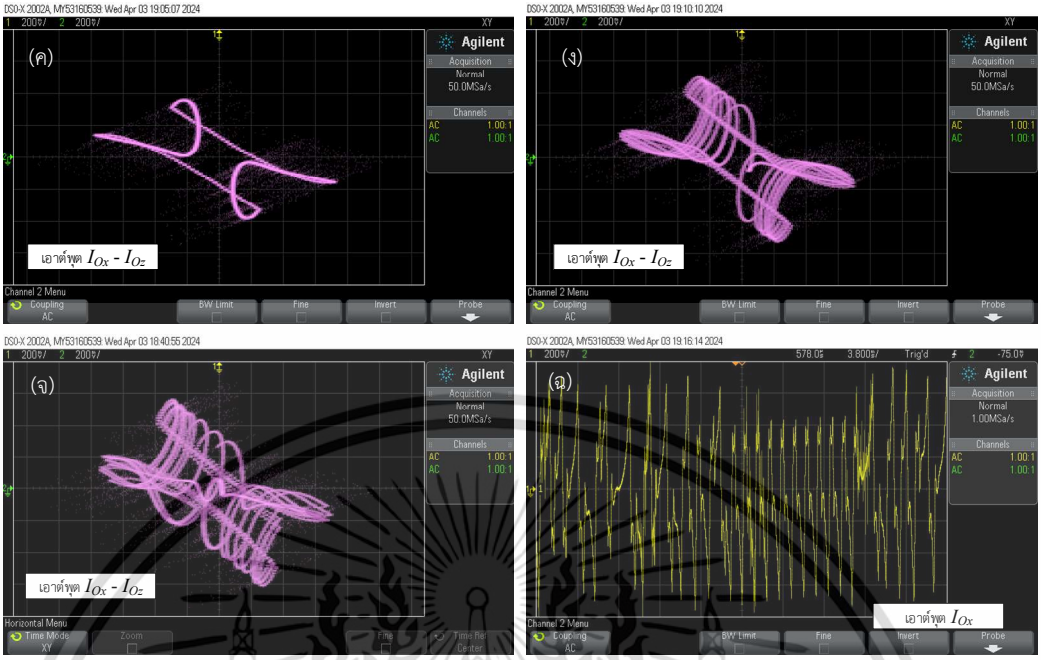
รูปที่ 4.40 แสดงสัญญาณเคออสสองวงม้วนสองมิติจากวงจร PCB บน Oscilloscope สำหรับระบบที่ (4.2) (ก) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oz} (ข) เอาต์พุต I_{Ox}-I_{Oy} (ค) เอาต์พุต I_{Oz}-I_{Oy}

การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตสำหรับวงจร PCB ของระบบที่ (4.2) โดยปรับกระแสไบอัส kI_B ถูกแสดงดังรูปที่ 4.41 ลักษณะพฤติกรรมพลวัตในแต่ละค่ากระแสไบอัส kI_B ถูกแสดงไว้ในคำอธิบายใต้รูป ผลลัพธ์ที่ได้ของวงจรถูกเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในรูปที่ 4.23 และพบว่าผลที่ได้สอดคล้องกันเป็นอย่างดี ซึ่งวงจร PCB สำหรับระบบที่ (4.2) สามารถสร้างลักษณะเคออสสองวงม้วนได้





เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.41 ผลการทดลองแสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมพลวัตของวงจร PCB ระบบเคออสสองวงม้วนโดยปรับกระแสไบอัส kI_B (ก) kI_B= 150uA (k=1.5) จุดคงที่ (ข) kI_B= 130uA (k=1.3) แสดงพฤติกรรมเชิงสองคาบ (ค) kI_B= 110uA (k=1.1) แสดงพฤติกรรมเชิงสองคาบ (ง) kI_B= 85uA (k=0.85) แสดงดึงดูดเคออสเข้าใกล้สองวงม้วน (จ) kI_B= 70uA (k=0.7) แสดงดึงดูดเคออสสองวงม้วนโดยสอดคล้องกับ (ฉ) สัญญาณเคออสเอาต์พุต I_{Ox}

วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสของระบบที่ออกแบบสามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสได้สอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขทุกประการ โดยวงจรสามารถตรวจพฤติกรรมพลวัตได้อย่างสะดวกจากการใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA ที่สามารถปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งวงจรมีการปรับค่ากระแสไบอัส kI_B (คงที่ I_A และ V_B ไว้) เพื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในการปรับพารามิเตอร์ k (คงที่พารามิเตอร์ A และ B ไว้) โดยจากโครงสร้างที่ออกแบบในรูปที่ 4.2 – 4.3 ที่ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสามารถสลับตำแหน่งภายในโครงสร้างเพื่อสร้างสัญญาณเคออสได้หลายรูปแบบจากโครงสร้างเดียว ซึ่งสอดคล้องกับตามวงจรในรูปที่ 4.32 – 4.33 ที่ออกแบบให้สามารถสลับตำแหน่งของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้อย่างง่ายเช่นกัน เนื่องจากเอาต์พุตของ OTA เป็นโหนดกระแส ดังนั้นผลลัพธ์สัญญาณเคออสซับซ้อนสูงด้วยลักษณะสี่วงม้วนที่เป็นลักษณะเด่นของวิทยานิพนธ์ และสัญญาณเคออสสองวงม้วนทั้งสองระบบ สามารถยืนยันหลักการสร้างจริงทางวิศวกรรมได้ จากผลของวงจร PCB ที่ออกแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6 สัญญาณเคออสลักษณะอื่นจากโครงสร้างที่ออกแบบ และการนำไปประยุกต์ใช้ความปลอดภัยด้านการสื่อสาร (“ส่วนเพิ่มเติม”)

ในหัวข้อนี้จะแสดงการสร้างสัญญาณเคออสลักษณะอื่นของผู้เขียน ซึ่งเป็นลักษณะเคออสซับซ้อนสูงด้วยรูปแบบสี่วงม้วนและหกวงม้วน โดยใช้ระบบที่ออกแบบในสมการที่ (4.3) หรือ รูปที่ 4.2 (ข) เป็นหลัก โดยมีการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่ที่ออกแบบ คือ ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม ร่วมกับฟังก์ชันลักษณะอื่น คือ ฟังก์ชันสัญลักษณ์ [9] ที่เป็นฟังก์ชันพื้นฐานของแบบจำลองการกระตุก เมื่อนำทั้งสองฟังก์ชันมาใช้ในสมการที่ (4.3) จะทำให้ได้ลักษณะสัญญาณเคออสสี่วงม้วนที่เป็นรูปแบบใหม่ถึง สองลักษณะ ซึ่งเป็นหนึ่งในงานของผู้เขียนที่ทำการออกแบบและตีพิมพ์งานวิจัยนานาชาติในวารสาร Nonlinear Dyn [87] และ Int. J. Electron. Commun. (AEÜ) [86] มากกว่านั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำระบบเคออสที่ออกแบบไปประยุกต์ใช้ในความปลอดภัยด้านการสื่อสารโดยใช้วิธี Chaotic-Masking (CM) [90] ในการเข้ารหัสรูปภาพ (Image cryptography) รวมถึงการใช้อุปกรณ์ FPAA ที่เป็นอุปกรณ์ที่สามารถโปรแกรมค่าได้สะดวกในการยืนยันผลเชิงตัวเลขของระบบเคออสที่ออกแบบด้วย

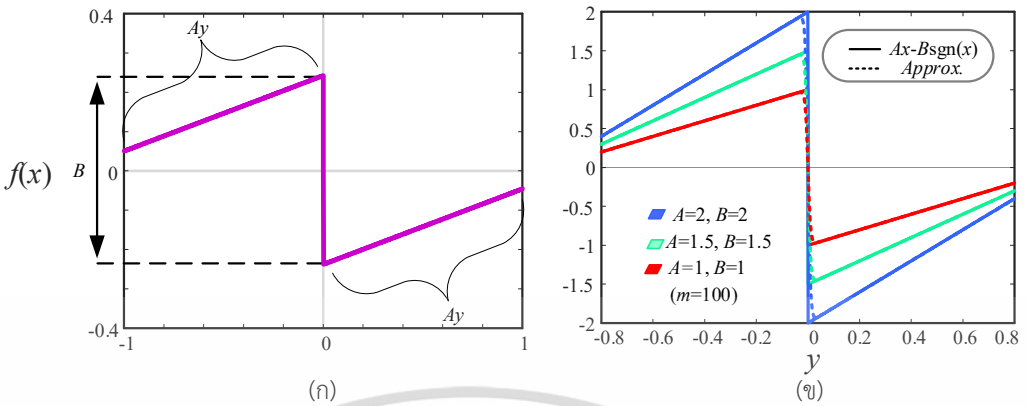
4.6.1 การสร้างสัญญาณเคออสสี่วงม้วนโดยใช้สองฟังก์ชันที่แตกต่างกันจากโครงสร้างที่ออกแบบ

จากสมการที่ (4.3) เป็นโครงสร้างที่สามารถใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นพร้อมได้ในระบบได้ 2 ฟังก์ชันที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x และ y โดยในงานวิจัยที่มีการออกแบบนอกเหนือจากที่นำเสนอไว้ในหัวข้อที่ 4.2 – 4.5 คือมีการใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ร่วมกับฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมที่ออกแบบในระบบที่ (4.3) โดยฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมถูกอธิบายไว้ในหัวข้อที่ 4.2.2 และสมการของฟังก์ชันสัญลักษณ์แสดงดังนี้

$$G(x) = Cx\text{-}D\text{sign}(x) \approx Cx - D\tanh(mx) \tag{4.24}$$

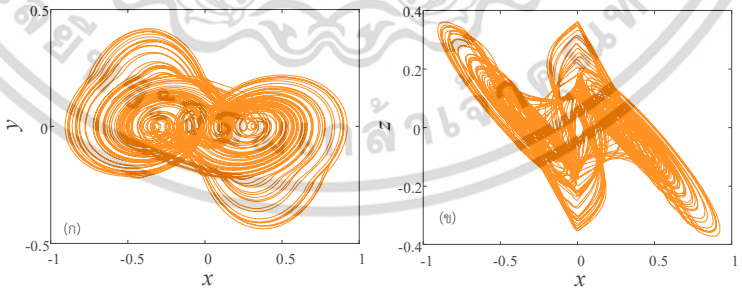
ที่ฟังก์ชัน Sign(x) ถูกแปลงเป็น tanh(mx) เพื่อให้วิเคราะห์ระบบทางคณิตศาสตร์ได้ โดยที่ m คือ พารามิเตอร์ที่มีค่าสูง โดยกำหนด m=100 เสมอ รูปฟังก์ชันสัญลักษณ์สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

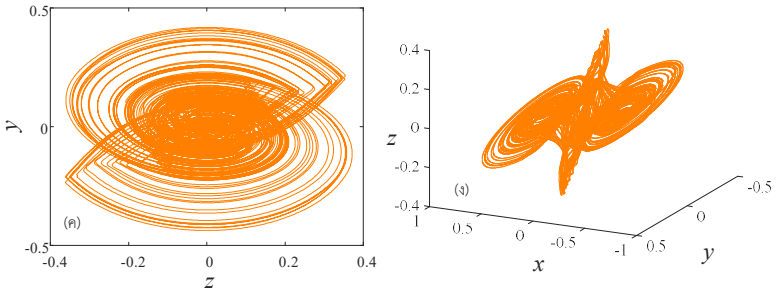


รูปที่ 4.42 ลักษณะฟังก์ชันสัญลักษณ์ (ก) ความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ C และ D กับฟังก์ชัน (ข) เปรียบเทียบฟังก์ชันสัญลักษณ์กับฟังก์ชันประมาณค่า โดยปรับค่าคงที่ C และ D

โดยระบบที่ออกแบบเพิ่มเติมจากการใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ในสมการที่ (4.24) ร่วมกับฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมในสมการที่ (4.5) มาใช้ในระบบที่ (4.3) สามารถแสดงผลลัพธ์ได้ดังรูปที่ 4.43 และ 4.44 พร้อมสรุปค่าพารามิเตอร์และลักษณะของสัญญาณเคออสที่ได้ไว้ดังตารางที่ 4.7 โดยระบบดังกล่าวมีพารามิเตอร์ทั้งหมด 5 ตัวในระบบ ที่พารามิเตอร์ A และ B คือ พารามิเตอร์ของฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม และพารามิเตอร์ C และ D คือพารามิเตอร์ของฟังก์ชันสัญลักษณ์ สุดท้ายคือพารามิเตอร์ k ที่เป็นพารามิเตอร์หลักของระบบ โดยระบบแรกถูกออกแบบโดยใช้ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท y และฟังก์ชันสัญลักษณ์ใช้ที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x ของระบบ (4.3) สามารถสร้างลักษณะเคออสสี่วงม้วนได้ ดังรูปที่ 4.43 โดยระบบแรกอยู่ในตารางที่ 4.7 แถวที่ 1 ตั้งชื่อว่า “ระบบ M1” ระบบดังกล่าวถูกตีพิมพ์ไว้ในงานวิจัย [86]

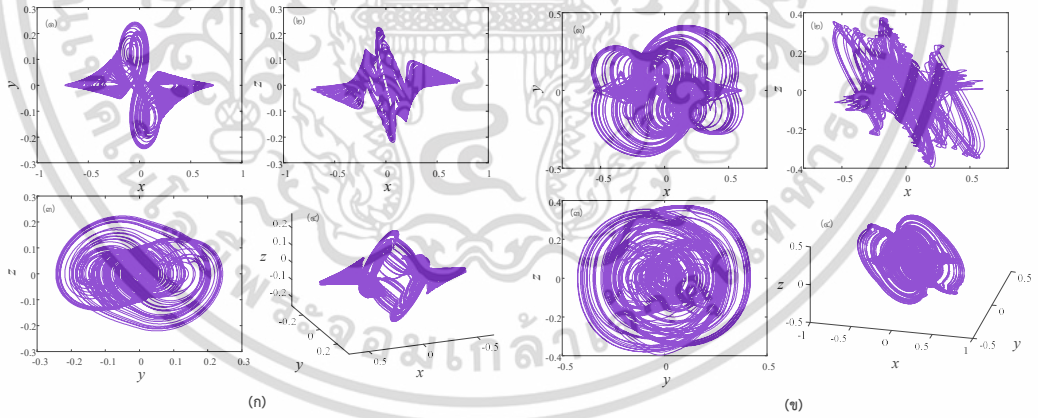


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.43 Phase portraits ลักษณะสี่วงม้วนของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติมสำหรับระบบ M1 โดยใช้โครงสร้างพื้นฐานในสมการที่ (4.3) (ก) ระนาบ *x*-*z* (ข) ระนาบ *x*-*y* (ค) ระนาบ *z*-*y* (ง) 3 มิติ ระนาบ *x*-*y*-*z*

ระบบที่สองเป็นการสลับตำแหน่งของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นจากระบบ M1 ซึ่งเป็นหนึ่งในข้อดีของคุณสมบัติจากระบบที่ออกแบบใน (4.3) ที่สามารถสลับตำแหน่งของฟังก์ชันได้อย่างอิสระ ทำให้ได้ลักษณะสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ โดยสลับตำแหน่งฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมไว้ที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท *x* และนำฟังก์ชันสัญลักษณ์ไว้ที่ตัวแปรสเตท *y* ระบบนี้ตั้งชื่อว่า “ระบบ M2” โดยระบบนี้สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสที่ซับซ้อนสูงสี่วงม้วนและสามารถสร้างได้ถึงหกวงม้วน แสดงดังรูปที่ 4.44 (ก) และ (ข) ตามลำดับ โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์และการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นไว้ดังตารางที่ 4.7 แถวที่ 2 (ระบบดังกล่าวถูกตีพิมพ์ไว้ในงานวิจัย [87])



รูปที่ 4.44 Phase portraits ของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติมสำหรับระบบ M2 โดยใช้โครงสร้างพื้นฐานในสมการที่ (4.3) (ก) ลักษณะเคออสสี่วงม้วนที่ *k*=0.6 (ข) ลักษณะเคออสหกวงม้วนที่ *k*=0.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.7 ผลลัพธ์ของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติม โดยใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ร่วมกับฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม พร้อมกำหนดค่าพารามิเตอร์หลักที่นำเสนอ

Phase portraits	ระบบที่ออกแบบ	พารามิเตอร์		ตำแหน่งของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น (G(x) และ G(y))	ลักษณะเคออส
ระบบ M1 รูปที่ 4.43	$\begin{cases}\dot{x}=y+G(y),\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=-kz-y-G(x);\end{cases}$ (4.3)	A=1.5 B=2.35 C=0.6 D=0.2 k=0.6		$G(y)\approx\frac{Ay}{2}\cdot(-(\tanh(m(y+1/2B))\cdot,\ldots$ $\tanh(m(y-1/2B)))+1)$ $G(x)\approx Cx-D\tanh(mx)$	สี่วงม้วน
ระบบ M2 รูปที่ 4.44 (ก) (ข)		A=1 B=2.5 C=0.6 D=0.2	k=0.6	$G(x)\approx\frac{Ax}{2}\cdot(-(\tanh(m(x+1/2B))\cdot,\ldots$ $\tanh(m(x-1/2B)))+1)$ $G(y)\approx Cy-D\tanh(my)$	สี่วงม้วน
			k=0.2		หกวงม้วน

โดยคุณสมบัติพื้นฐานทางพลวัตของระบบ M1 และ M2 ถูกสรุปไว้ดังตารางที่ 4.8 เพื่อยืนยันว่าระบบที่ออกแบบมีพฤติกรรมเป็นเคออสในเชิงตัวเลขและทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสำหรับระบบ M1 และ M2 มีค่าลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Shilnikov ด้วย $\lambda_1=q$ และ $\lambda_{2,3}=p\pm i\omega$ โดยที่ $qp<0$ และ $\omega\neq0$ พร้อมบ่งชี้เป็นเชิงปริมาณด้วยเลขชี้กำลัง Lyapunov ทั้งสามตัวของระบบ โดยที่มี LE_1 เป็นบวก และผลรวมของ LEs เป็นลบ อีกทั้งพิสูจน์ค่าความซับซ้อนของระบบที่ออกแบบด้วย D_{KY} สามารถดูการวิเคราะห์โดยละเอียดได้ใน [86-87] สำหรับระบบ M1 และ M2 ตามลำดับ

(จะเห็นว่าระบบ M2 ที่มีลักษณะเคออสหกวงม้วน มีค่าสูงถึง 2.45 แต่น้อยกว่ารูปแบบสี่วงม้วนของระบบที่นำเสนอหลักที่เป็นลักษณะเด่นของวิทยานิพนธ์ในหัวข้อ 4.2.2 สิ่งนี้บ่งชี้ว่าค่าความซับซ้อนไม่ได้ขึ้นอยู่กับจำนวนวงม้วนของระบบแบบ multi-scroll ด้วยเหตุนี้ค่าความซับซ้อนจึงจำเป็นต้องถูกพิสูจน์ด้วยตัวเลขเชิงปริมาณที่เป็นสากลด้วย D_{KY})

ตารางที่ 4.8 แสดงคุณสมบัติพลวัตพื้นฐานของระบบที่ออกแบบเพิ่มเติม โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ในวิเคราะห์ดังตารางที่ 4.7

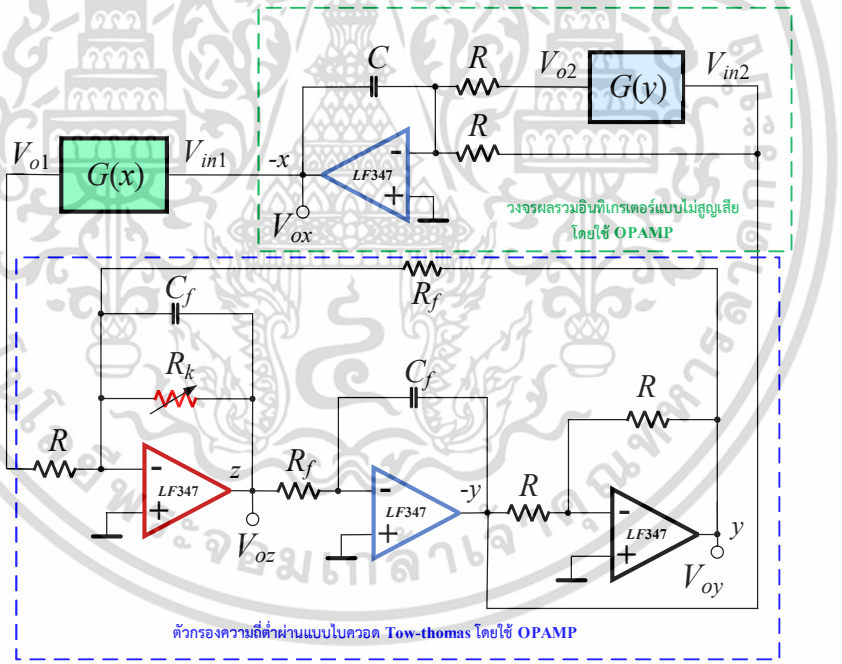
คุณสมบัติพื้นฐานพลวัต	ระบบ M1	ระบบ M2 (สำหรับลักษณะหกวงม้วน)
สมการลักษณะเฉพาะ ณ จุด E_0	$F(\lambda)_{E_0}=\det(J_{E_0}-\lambda I)=\lambda^3+0.6\lambda^2+\lambda+33.95$	$F(\lambda)_{E_0}=\det(J_{E_0}-\lambda I)=\lambda^3+0.2\lambda^2+\lambda+10.2$
ค่าลักษณะเฉพาะ ณ จุด E_0	λ_1=-3.341 $\lambda_{2,3}$=1.37±2.878i	λ_1=-2.079 $\lambda_{2,3}$=0.939±2.006i
ชนิดของเสถียรภาพ	Index 2 (Stable saddle-focus)	Index 2 (Stable saddle-focus)
เลขชี้กำลัง Lyapunov	LE_1=0.204894 LE_2=-0.06 LE_3=-0.480620	LE_1=0.241701 LE_2=-0.04 LE_3=-0.448254
มิติ Kaplan-Yorke (D_{KY})	$2+\frac{0.204894-0.06}{\lvert-0.480620\rvert}=2.30$	$2+\frac{0.241701-0.04}{\lvert-0.448254\rvert}=2.45$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอกจากนี้ระบบที่ออกแบบเพิ่มเติม M1 และ M2 เมื่อมีการออกแบบระบบในทางคณิตศาสตร์แล้ว ยังถูกนำไปออกแบบเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสเพื่อยืนยันหลักการสร้างในการนำไปใช้จริงทางวิศวกรรม ซึ่งทั้งสองระบบถูกแบบด้วยวงจรที่ต่างคุณสมบัติกัน สำหรับระบบ M1 ออกแบบวงจรจากอุปกรณ์พื้นฐานแอนาลอก OPAMP และสำหรับระบบ M2 นำไปยืนยันด้วยวงจรที่สามารถโปรแกรมการตั้งค่าได้อย่างสะดวกด้วยอุปกรณ์ FPAA โดยแสดงการนำไปสร้างเป็นวงจรของทั้งสองระบบทั้งต่อไปนี้

4.6.1.1 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสและผลการทดลองจริงสำหรับระบบ M1

ระบบ M1 ถูกออกแบบเป็นวงจรด้วยอุปกรณ์ OPAMP เบอร์ LF347 [102] โดยอิงหลักการสร้างจากบล็อคไดอะแกรมในรูปที่ 4.2 (ข) สำหรับระบบที่ (4.3) ในวงจรมีการใช้ตัวกรองความถี่ต่ำผ่านแบบไบควอด Tow-Thomas [103] คาดเคสกับวงจรผลรวมอินทิเกรเตอร์แบบไม่สูญเสีย ดังรูปที่ 4.45 โดยที่วงจรสามารถปรับความถี่ตอบสนอง (Frequency response: ω_0) ของวงจรได้ที่ตัวต้านทาน R_f และตัวเก็บประจุ C_f โดยที่ตัวประกอบคุณภาพ (Quality factor: Q) สามารถปรับได้ที่ R_k เพื่อปรับเงื่อนไขการกำเนิดสัญญาณเคออสเปรียบเทียบกับพารามิเตอร์ k ของระบบ



รูปที่ 4.45 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสจากโครงสร้างในระบบที่ (4.3) โดยใช้ OPAMP

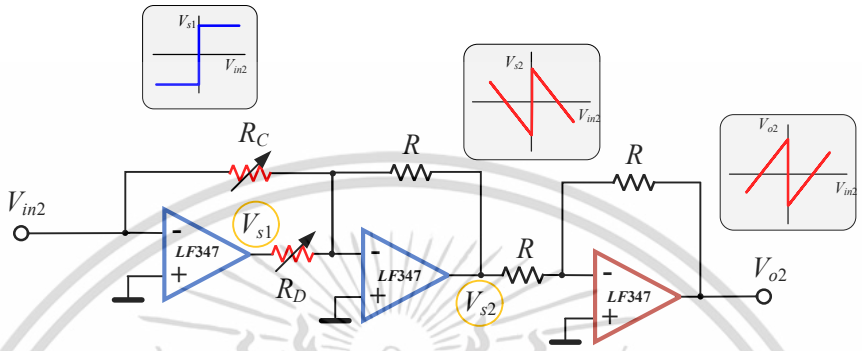
ฟังก์ชันส่งผ่านของตัวกรองความถี่ต่ำผ่านไบควอด Tow-Thomas เขียนได้ดังนี้

$$\frac{V_{oy}}{V_{o1}} = -\frac{R_k}{R} \cdot \frac{1/R_f^2 C_f^2}{s^2 + s\left(1/R_k C_f\right) + 1/R_f^2 C_f^2} \tag{4.25}$$

โดยที่ $\omega_0 = 1/R_f C_f$ และ $1/Q = R_f/R_k$

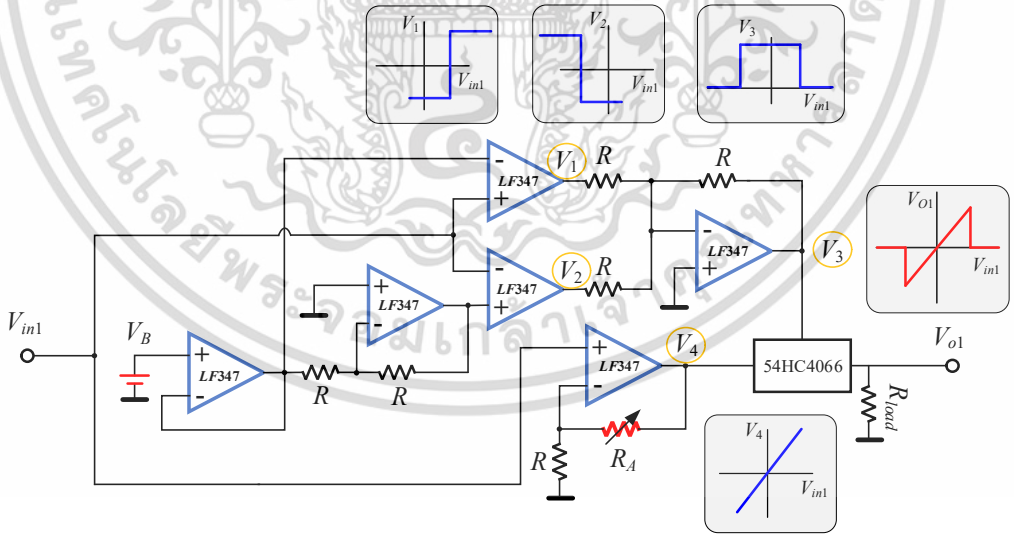
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ฟังก์ชัน $G(x)$ สำหรับระบบ M1 จะใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ โดยสามารถออกแบบเป็นวงจรโดยใช้ OPAMP ได้ดังรูปที่ 4.46 โดยที่ความชันของฟังก์ชันสามารถปรับได้ด้วย R_C (สอดคล้องกับพารามิเตอร์ C) และขนาดของฟังก์ชันสามารถปรับได้ที่ R_D (สอดคล้องกับพารามิเตอร์ D)



รูปที่ 4.46 วงจรฟังก์ชันสัญลักษณ์โดยใช้ OPAMP

ที่ฟังก์ชัน $G(y)$ สำหรับระบบ M1 จะใช้ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม สามารถออกแบบเป็นวงจรด้วย OPAMP ได้ดังรูปที่ 4.47 สำหรับพารามิเตอร์ A และ B ของฟังก์ชันสำหรับปรับความชันและขอบเขตดังรูปที่ 4.4 – 4.5 สามารถปรับได้ R_A และ V_B ของวงจร ตามลำดับ โดยวงจรมีการใช้อุปกรณ์ OPAMP ร่วมกับสวิตช์ 54HC4066 [104] เพื่อให้ได้เอาต์พุตของลักษณะฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม



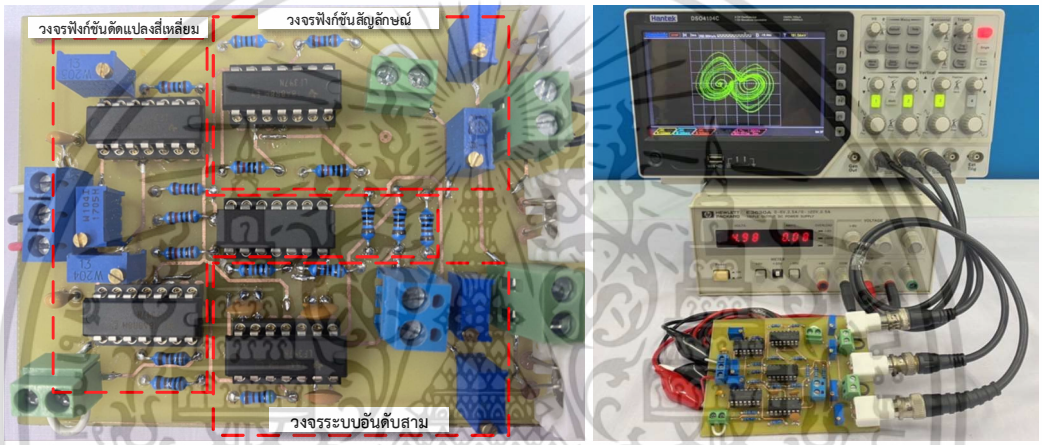
รูปที่ 4.47 วงจรฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม โดยใช้ OPAMP

จากวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสที่ออกแบบโดยใช้ OPAMP ดังรูปที่ 4.45 – 4.47 สำหรับระบบ M1 สามารถปรับค่าพารามิเตอร์ $A\ B\ C\ D$ และ k ได้ที่ $R_A\ V_B$ ของวงจรฟังก์ชันดัดแปลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สี่เหลี่ยม R_C R_D ของวงจรฟังก์ชันสัญลักษณ์ และ R_k ของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านไบควอด ตามลำดับ วงจรสามารถดูเอาต์พุตของสัญญาณเคออสสำหรับ x y และ z ได้ที่ Vox Voy และ Voz

โดยผลการทดลองจริงจะนำหลักการสร้างจากวงจรในรูปที่ 4.45 – 4.47 มาออกแบบบน PCB โดยตัวอย่างวงจรที่ออกแบบบน PCB แสดงดังรูปที่ 4.48 (ก) และภาพรวมการทดลองจริงแสดงดังรูปที่ 4.49 (ข) วงจรที่ออกแบบใช้อุปกรณ์ OPAMP ที่มีขายทั่วไปตามท้องตลาด เบอร์ LF347 ร่วมกับสวิตซ์แอนาลอก 54HC4066 โดยวงจรใช้แหล่งจ่ายแรงดัน $\pm 5V$ ตัวเก็บประจุภายในวงจรกำหนดเท่ากับ 50nF ตัวต้านทานทั้งหมดกำหนดเท่ากับ $1k\Omega$ ยกเว้น R_A R_B R_C และ R_k



(ก) (ข)

รูปที่ 4.48 วงจรกำเนิดสัญญาณเคออสบน PCB โดยใช้ OPAMP (LF347) (ก) ตัวอย่างวงจรบน PCB (ข) ภาพรวมการทดลองจริงสำหรับระบบ M1

เอาต์พุตแรงดันของวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นที่ถูกออกแบบโดยใช้ OPAMP ทั้งสองฟังก์ชันแสดงดังรูปที่ 4.49 โดยฟังก์ชันสัญลักษณ์แสดงตัวอย่างสำหรับการกำหนด R_A = 3kΩ (A=0.6) and R_B = 25kΩ (B=0.2) แสดงผลดังรูปที่ 4.49 (ก) และฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยมแสดงตัวอย่างสำหรับการกำหนด R_C = 9kΩ (C=1.5), and V_D = 23mV (D=2.35) แสดงผลดังรูปที่ 4.49 (ข)

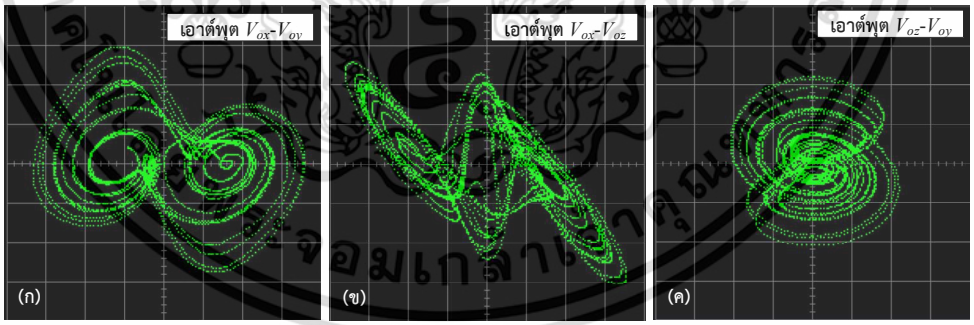
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก) (ข)

รูปที่ 4.49 เอาต์พุตแรงดันของวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้ OPAMP (LF347) (ก) ฟังก์ชันสัญลักษณ์กำหนด R_A = 3kΩ (A=0.6) and R_B = 25kΩ (B=0.2) (ข) ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม กำหนด R_C = 9kΩ (C=1.5), and V_D = 23mV (D=2.35)

เมื่อกำหนดค่าตัวต้านทานและแรงดันของวงจรฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับแสดงลักษณะสัญญาณเคออสที่นำเสนอดังรูปที่ 4.49 แล้ว ค่าตัวต้านทานหลักของวงจร คือ R_k โดยจากผลลัพธ์บน phase portrait ในรูปที่ 4.43 ที่เป็นผลลัพธ์ในเชิงตัวเลข ถูกกำหนด k=0.6 ในวงจรจะกำหนด Rk เท่ากับ 1.15kΩ แสดงผลลักษณะสัญญาณเคออสสองมิติ ดังรูปที่ 4.50 จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากผลการทดลองจริงของวงจรที่ออกแบบบน PCB โดยใช้ OPAMP มีผลที่สอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในรูปที่ 4.43 ทุกประการ (โดยผลลัพธ์ที่แสดงเป็นเพียงตัวอย่างส่วนหนึ่งของการนำเสนอระบบที่ออกแบบเพิ่มเติม M1 สามารถดูผลลัพธ์โดยละเอียดได้ในอ้างอิงของงานวิจัยที่กล่าวไว้ข้างต้น)



รูปที่ 4.50 ผลการทดลองบนวงจร PCB สำหรับลักษณะเคออสสี่วงม้วนของระบบ M1 (ก) เอาต์พุต V_{ox}-V_{oy} (ข) เอาต์พุต V_{ox}-V_{oz} (ค) เอาต์พุต V_{oz}-V_{oy}.

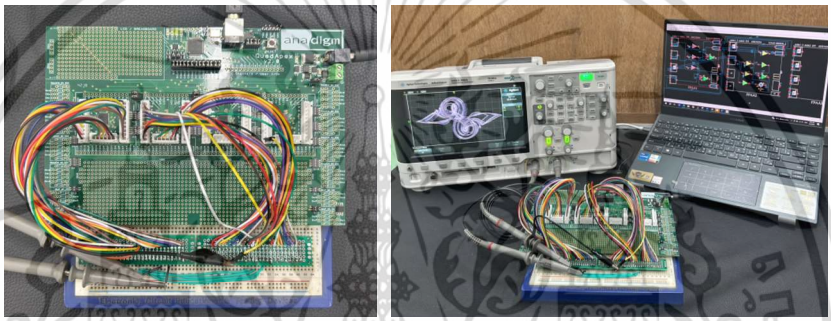
4.6.1.2 การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสและผลการทดลองจริงสำหรับระบบ M2

ระบบ M2 ถูกออกแบบเป็นวงจรโดยใช้อุปกรณ์ FPAA ในการสร้างลักษณะสัญญาณเคออสที่นำเสนอในรูปที่ 4.44 โดย FPAA เป็นวงจรดิจิตอลชนิดหนึ่งหรือเป็นวงจรแอนาลอกที่สามารถ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดค่าได้ด้วยโปรแกรม โดยข้อดีของวงจรดิจิตอลสามารถประมวลผลได้แม่นยำสูง มีความยืดหยุ่นในการประมวลสัญญาณที่มีความซับซ้อนสูง และใช้พลังงานต่ำ ด้วยความสามารถในการตั้งค่าโปรแกรมได้ ทำให้การใช้ FPAA สามารถตรวจพฤติกรรมพลวัตสำหรับระบบเคออสนำมาออกแบบได้อย่างละเอียดและง่ายดาย [105]

โดยอุปกรณ์ FPAA ที่ใช้จะประกอบด้วยชิปรุ่น AN231E04 จำนวน 4 ชิป เป็นบอร์ดรุ่น Anadigm QuadApex board v2.0 [106] โดยโปรแกรมที่ใช้สำหรับ FPAA คือ AnadigmDesigner2 ตัวอย่างการเชื่อมต่อ FPAA สำหรับระบบ M2 ที่ออกแบบแสดงดังรูปที่ 4.51 (ก) และภาพรวมการทดลองในการใช้ FPAA เพื่อแสดงผลลักษณะสัญญาณเคออสของระบบ M2 แสดงดังรูปที่ 4.51 (ข)

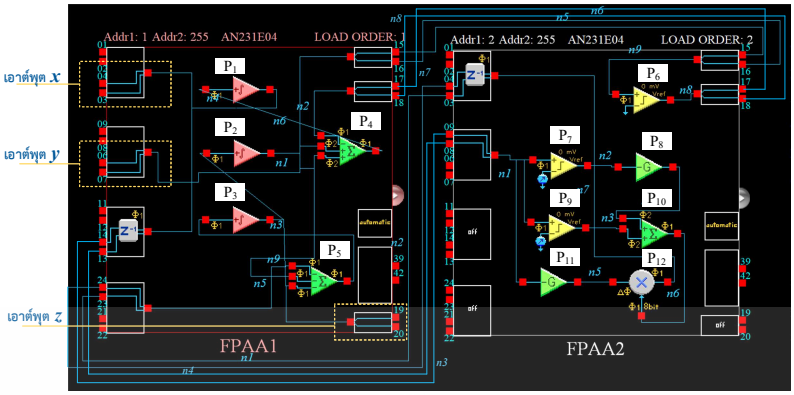


(ก) (ข)

รูปที่ 4.51 ผลการทดลองจริงโดยใช้ FPAA สำหรับระบบ M2 (ก) การเชื่อมต่อบอร์ด FPAA (ข) ภาพรวมการทดลองจริง

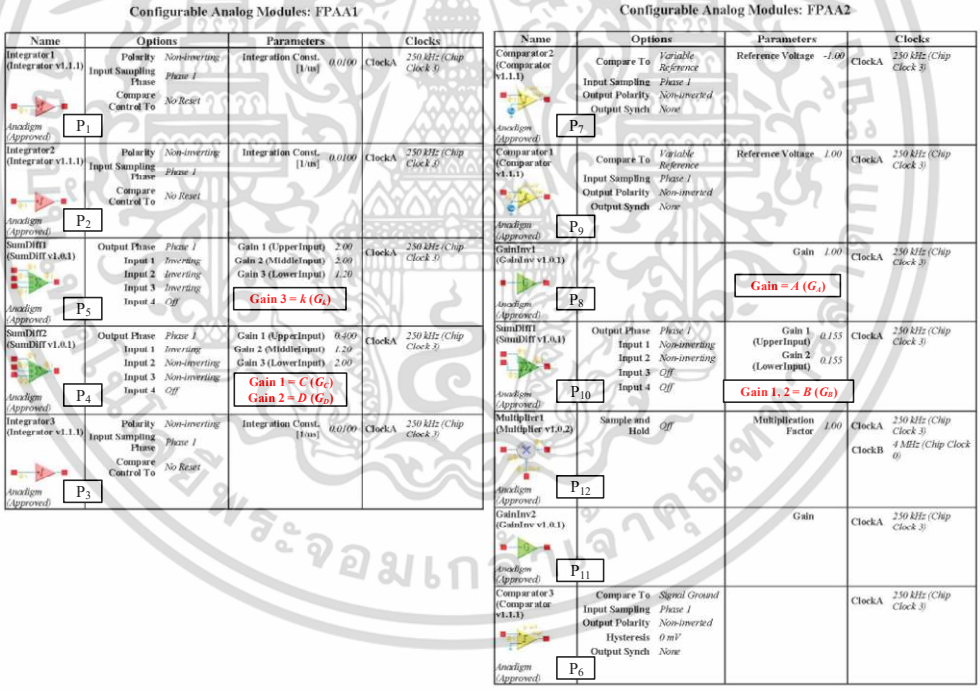
ในการใช้งาน FPAA จะต้องกำหนดการเชื่อมต่อภายในบอร์ดผ่านโปรแกรม AnadigmDesigner2 ซึ่งภายในโปรแกรมจะประกอบไปด้วย CAM (Configurable Analog Modules) ที่เป็นโมดูลแอนาลอกประเภทต่างๆ เช่น บล็อคอินทิเกรเตอร์ บล็อคผลรวม (Summing) บล็อคตัวคูณ (Multipier) เป็นต้น ซึ่งเป็นบล็อคพื้นฐานทางวงจรไฟฟ้า โดยที่สามารถตั้งค่าต่างๆภายในบล็อคได้ สิ่งนี้เรียกว่า CAMs ซึ่งการเชื่อมต่อ CAM ในรูปที่ 4.52 จะออกแบบตามบล็อคไดอะแกรมในรูปที่ 4.2 (ข) ที่เป็นระบบที่ออกแบบ ภายในชิปแต่ละตัวของบอร์ด FPAA มีจำนวน CAMs ที่จำกัดในการออกแบบ ดังนั้นในงานนี้มีการใช้ CAM จำนวน 12 ตัว ซึ่งต้องการชิป จำนวน 2 ชิป การเชื่อมต่อและการตั้งค่าของ CAM สำหรับระบบ M2 บนโปรแกรมแสดงดังรูปที่ 4.52 โดย CAM แต่ละตัวจะถูกหนดชื่อ คือ P_1 - P_{12} พารามิเตอร์ที่กำหนดภายใน CAMs แต่ละตัว แสดงดังรูปที่ 4.53 ค่าที่กำหนดใน CAM ถูกทดลองและคำนวณให้สอดคล้องกับค่าพารามิเตอร์จากระบบเชิงตัวเลข ดังตารางที่ 4.8 สำหรับระบบ M2 พารามิเตอร์แต่ละตัวใน CAM ถูกกำหนด ดังนี้ k (G_k) A (G_A) B (G_B) C (G_C) และ D (G_D)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.52 กำหนดการเชื่อมต่อ CAM บนโปรแกรม Anadigm Designer ของ FPAA สำหรับระบบ M2 ที่ออกแบบ

จากรูปที่ 4.53 CAMs หลักที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์หลักของระบบ คือ CAM P_5 สำหรับพารามิเตอร์ G_k (k) CAM P_4 สำหรับพารามิเตอร์ G_C (C) G_D (D) CAM P_8 สำหรับพารามิเตอร์ G_A (A) และ CAM P_{10} สำหรับพารามิเตอร์ G_B (B)



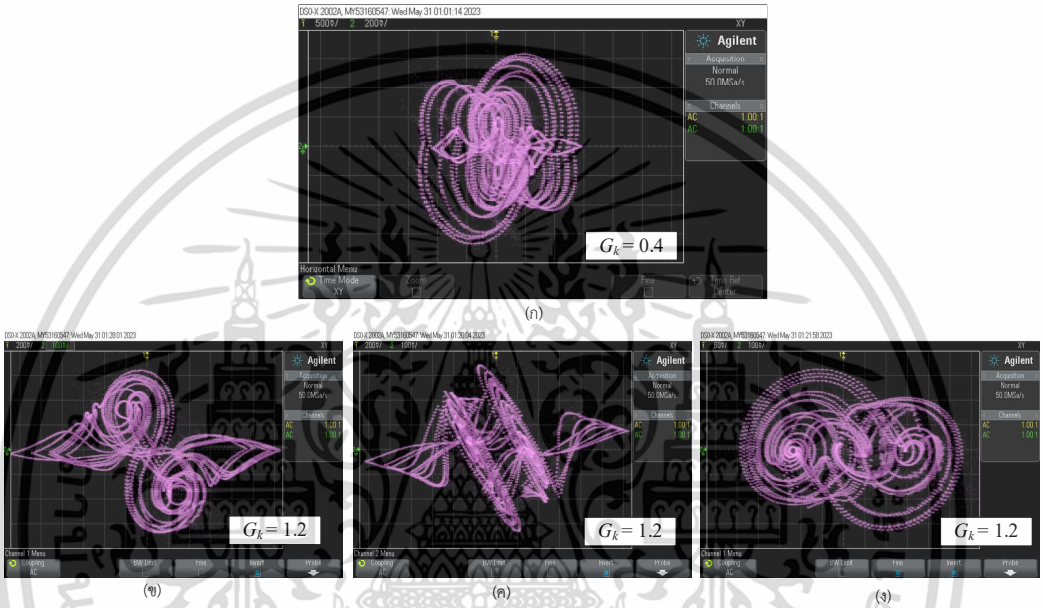
(ก) (ข)

รูปที่ 4.53 กำหนดค่าพารามิเตอร์บน CAM สำหรับระบบ M2 ที่ออกแบบ (ก) AN231E04 ตัวแรก (ข) AN231E04 ตัวที่สอง

ผลการทดลองจริงของระบบ M2 ที่ออกแบบบน FPAA จะกำหนดพารามิเตอร์ภายใน CAMs ดังนี้ G_C = 1.2 (C=0.6) G_D = 0.4 (D=0.2) G_A = 1 (A=1) G_B = 0.155 (B=2.35) โดยจะเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในรูปที่ 4.44 และอิงตามพารามิเตอร์ของระบบ M2 ในตารางที่ 4.8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลักษณะหกวงม้วน ถูกกำหนด G_k=0.4 (k=0.2) และลักษณะสี่วงม้วนถูกกำหนด G_k=1.2 (k=0.4) ผลลัพธ์สัญญาณเคออสถูกแสดงด้วยลักษณะสองมิติบน Oscilloscope ดังรูปที่ 4.54 จะเห็นว่าลักษณะเคออสหกวงม้วนในรูปที่ 4.54 (ก) สอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในรูปที่ 4.44 (ข๑) และลักษณะสี่วงม้วนสอดคล้องกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขในรูปที่ 4.44 (ก๑-๓) (โดยผลลัพธ์ที่แสดงเป็นเพียงตัวอย่างส่วนหนึ่งของการนำเสนอระบบที่ออกแบบเพิ่มเติม M2 สามารถดูผลลัพธ์โดยละเอียดได้ในอ้างอิงของงานวิจัยที่กล่าวไว้ข้างต้น)



รูปที่ 4.54 แสดงผลการทดลองจริงสำหรับระบบ M2 ที่ออกแบบบน FPAA โดยกำหนดค่า G_k=0.4 (k=0.2) และ G_k=1.2 (k=0.6) (ก) เคออสลักษณะหกวงม้วน ที่เอาต์พุต x-y (ข) เคออสลักษณะสี่วงม้วน ที่เอาต์พุต x-y (ข) เคออสลักษณะสี่วงม้วน ที่เอาต์พุต x-z
(ข) เคออสลักษณสี่วงม้วน ที่เอาต์พุต y-z

จากที่กล่าวมาในหัวข้อที่ 4.6.1 คือข้อมูลเพิ่มเติมของวิทยานิพนธ์ โดยเป็นการแสดงการออกแบบระบบเคออสรูปแบบหลายวงม้วนด้วยลักษณะสี่วงม้วนและหกวงม้วนที่มีความซับซ้อนสูง โดยใช้โครงสร้างหลักจากระบบที่ออกแบบไว้ในสมการที่ (4.3) ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวมีข้อดีคือสามารถออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นพร้อมกันได้สองตำแหน่ง และสามารถสลับตำแหน่งได้อย่างอิสระ ซึ่งระบบที่แสดงให้เห็นในหัวข้อ 4.6.1 คือ มีการใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นสองรูปแบบที่ต่างกัน โดยใช้ฟังก์ชันสัญลักษณ์ร่วมกับฟังก์ชันหลักของวิทยานิพนธ์ คือฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม ด้วยความสามารถในการสลับตำแหน่งฟังก์ชันของโครงสร้าง (4.3) ทำให้ได้ลักษณะสัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ถึงสองรูปแบบ โดยตั้งชื่อว่าระบบ M1 และ M2 ทั้งสองระบบมีการนำเสนอวิเคราะห์เชิงตัวเลขทางพลวัต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์พฤติกรรมเคออสด้วยคุณสมบัติพื้นฐานอย่างครบถ้วน รวมถึงมีการนำไปสร้างเป็นวงจรด้วย OPAMP และ FPAA เพื่อยืนยันหลักการสร้างทางคณิตศาสตร์ ซึ่งในหัวข้อนี้เป็นการแสดงข้อมูลเพิ่มเติมสำหรับข้อดีของโครงสร้างระบบที่ออกแบบใน (4.3) ว่าสามารถออกแบบลักษณะสัญญาณเคออสได้หลากหลาย และสามารถสร้างสัญญาณที่มีความซับซ้อนสูงด้วยการใช้ฟังก์ชันสองฟังก์ชันพร้อมกัน

โดยข้อมูลเพิ่มเติมในส่วนถัดไปจะแสดงการนำไปประยุกต์ใช้จริงในทางวิศวกรรมอีกหนึ่งอย่าง คือ การประยุกต์ใช้ความปลอดภัยด้านการสื่อสาร โดยจะกล่าวถึงพื้นฐานทางทฤษฎีสำหรับหลักการเข้ารหัสด้วยระบบเคออส ไปจนถึงการนำไปใช้จริงในการเข้ารหัสด้วยรูปภาพ เพื่อบ่งชี้ให้เห็นถึงข้อดีในการนำระบบเคออสมาประยุกต์ใช้ ซึ่งจะอธิบายโดยละเอียด ดังต่อไปนี้

4.6.2 การนำระบบเคออสมาประยุกต์ใช้ความปลอดภัยด้านการสื่อสารในการเข้ารหัสรูปภาพ (Image cryptography communication)

ในหัวข้อนี้เป็นหนึ่งในข้อมูลเพิ่มเติมที่เป็นส่วนหนึ่งในงานวิจัยของวิทยานิพนธ์ โดยจะอธิบายถึงการประยุกต์ใช้ระบบเคออสในด้านความปลอดภัยด้านการสื่อสาร โดยคุณสมบัติที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่งของระบบเคออส คือ ความไวต่อสถานะเริ่มต้น และความไวต่อพารามิเตอร์ภายในระบบ ด้วยคุณสมบัตินี้ทำให้เกิดการคาดเดาไม่ได้ของระบบ เหมาะแก่การนำไปใช้กับระบบที่ต้องการความปลอดภัย เช่น การซิงโครไนซ์ ซึ่งในอดีตนักวิจัยศึกษาว่า คุณสมบัติความไวต่อสถานะเริ่มต้นและพารามิเตอร์ของระบบเคออส เป็นสิ่งที่ควบคุมไม่ได้ จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1990 นักวิทยาศาสตร์ชาวอเมริกัน Grebogi และ Yorke ได้เสนอวิธี OGY เพื่อควบคุมระบบเคออส [107] ภายในปีเดียวกัน Pecora และ Carroll ได้เสนอวิธี การซิงโครไนซ์ตัวเอง (Self-synchronizing) สำหรับระบบเคออส [108] และการซิงโครไนซ์ระหว่างระบบเคออสสองระบบที่เกิดจาก ตัวขับ-ตัวตอบสนอง (Drive-Response) สามารถทำได้ในปีต่อมา [109] ซึ่งทำให้ทฤษฎีจากคุณสมบัติความไวต่อสถานะเริ่มต้นและพารามิเตอร์ ของระบบเคออสถูกศึกษาใหม่ว่า เป็นคุณสมบัติที่สามารถควบคุมและนำมาซิงโครไซน์ได้ รวมถึงยังเป็นพื้นฐานสำหรับการส่งข้อมูลและประมวลผลด้วย จากคุณสมบัติความไวต่อสถานะเริ่มต้นพารามิเตอร์ และไม่สามารถคาดเดาลักษณะสัญญาณได้ในระยะยาว (Long-term unpredictability) ทำให้ระบบเคออสนั้นยากต่อการถูกโจมตีและเข้ารหัสจากภายนอก เมื่อมีการนำมาประยุกต์ใช้ในความปลอดภัยด้านการสื่อสาร เข้าให้เกิดความปลอดภัยสูงในการเข้ารหัส โดยการสื่อสารแบบเคออส (Chaos communication) เมื่อเทียบกับการสื่อสารสมัยใหม่ (Modern communication) มีข้อดีและความแตกต่างหลายประการ โดยเมื่อเปรียบเทียบกันแล้วการสื่อสารแบบเคออสมีข้อดีกว่าอย่างชัดเจน ในเรื่องประสิทธิภาพในการนำไปประยุกต์ใช้และแนวทางในการพัฒนาต่อ แสดงการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เปรียบเทียบดังตารางที่ 4.9 [90] อย่างไรก็ตาม การสื่อสารแบบเคออสยังเป็นเทคโนโลยีใหม่ที่ต้องค้นคว้าเพิ่ม และแก้ไขปัญหาที่สำคัญอีกหลายประการ

ตารางที่ 4.9 เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างการสื่อสารสมัยใหม่และการสื่อสารแบบเคออส

หัวข้อ	การสื่อสารสมัยใหม่	การสื่อสารแบบเคออส
ประวัติ	เป็นเทคโนโลยีที่มีการศึกษามามากกว่า 100 ปี	เป็นเทคโนโลยีใหม่ที่เพิ่งมีประมาณ 20 กว่าปี
ฐานอุตสาหกรรม	เป็นการศึกษาหลักในสาขาเทคโนโลยีสารสนเทศ	เป็นหัวข้อวิจัยที่กำลังนิยมในปัจจุบัน
ความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีกับเทคโนโลยี	- หมวดหมู่/หัวข้อในการศึกษาชัดเจน - มีความสมบูรณ์ของข้อมูลในการศึกษา (จากทฤษฎีสารสนเทศไปสู่เทคโนโลยีการสื่อสาร - จากซอฟแวร์การสื่อสารไปสู่การสร้างเป็นวงจรจริง)	อยู่ในระหว่างการพัฒนาเพื่อคิดค้นวิธีการใหม่และรูปแบบใหม่ โดยปัจจุบันมีรูปแบบการสื่อสารที่ถูกนำเสนอแล้ว ตัวอย่างเช่น การสร้างเป็นวงจรและเครือข่ายคอมพิวเตอร์
พื้นฐานเทคโนโลยีความปลอดภัย (Security technology Fundation)	วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน	วิธีการที่ซับซ้อนที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมความเคออส
เทคโนโลยีการรักษาความปลอดภัยที่สำคัญ (Key Security technology)	DES, IDEA, 3DES, RSA	Chaos masking, chaos switching, chaos modulation
ความสามารถในการรักษาความลับของข้อมูล (Confidentiality)	มีประสิทธิภาพดี แต่มีจุดด้อยเนื่องจากกระบวนการตัวเลขสุ่ม (Random number) สามารถถอดรหัสได้ แต่ใช้เวลานานและค่าใช้จ่ายสูง	- รูปแบบระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น - คาดเดายากในระยะยาว - มีความไวต่อสถานะเริ่มต้น ทำให้ความสามารถในการรักษาความลับของข้อมูลถอดรหัสได้ยากมากขึ้น
ความแข็งแกร่ง (Robustness) ในระบบสื่อสาร	มีความแข็งแกร่งในระดับนึง	ระบบสามารถประยุกต์ใช้เคออสและไฮเปอร์เคออส เพื่อเพิ่มความแข็งแกร่งได้ ยากต่อการถูกโจมตี
พลังงาน (Power)	ใช้พลังงานสูง	ใช้พลังงานต่ำและความสามารถในการสังเกต (Observational ability)
ค่าใช้จ่ายอุปกรณ์	สูง	ค่อนข้างต่ำ
ประเด็นด้านความปลอดภัยของระบบรักษาความปลอดภัย	- มีช่องโหว่ของซอฟต์แวร์ - การป้องกันการโจมตีที่ไม่มีประสิทธิภาพ - ตัวสร้างเลขสุ่มที่ไม่ดี	กำลังศึกษาและคาดว่ากำลังมีการแก้ไขปัญหาที่สำคัญ เช่น สัญญาณรบกวน ความผิดเพี้ยนของช่องสัญญาณ ปัญหาของช่องสัญญาณหลายช่องและผู้ใช้หลายคน

โดยในการนำระบบเคออสมาเข้ารหัส ระบบที่มีความซับซ้อนสูงด้วยลักษณะสัญญาณ รวมถึงมีโครงสร้างซับซ้อนและพารามิเตอร์หลายตัวในระบบ ยิ่งทำให้เกิดความปลอดภัยสูงในการเข้ารหัส [51-54, 61-62] (*การมีโครงสร้างซับซ้อนและพารามิเตอร์หลายตัว มีทั้งข้อดีและข้อเสียในแต่ละมุมมองในทางปฏิบัติสำหรับระบบเคออส หากออกแบบเพื่อศึกษาหรือนำไปสร้างเป็นวงจร ระบบที่มีโครงสร้างซับซ้อนจะทำให้ยากต่อการนำไปใช้ ซึ่งหากออกแบบให้มีความซับซ้อนด้วยลักษณะ*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญญาณ เช่น สัญญาณเคออสแบบหลายวงม้วน หรือซับซ้อนสูงด้วยค่า D_{KY} จะทำให้มีข้อดีทั้งในแง่การศึกษาและประยุกต์ใช้จริง) เป้าหมายในการพัฒนาระบบเคออสให้มีความซับซ้อนจึงจำเป็นต่อการนำมาประยุกต์ในด้านการสื่อสาร ซึ่งเคออสสำหรับความปลอดภัยในด้านการสื่อสารถูกแบ่งออกเป็นหลักๆสองส่วน คือ

- **การสื่อสารอลวนแบบแอนาลอก (Chaos Analog Communication)**

การสื่อสารอลวนแบบแอนาลอกมักนิยมใช้กับการสร้างเป็นวงจรที่มีส่วนประกอบของวงจรไม่เป็นเชิงเส้น แต่การประยุกต์ใช้เป็นวงจรจริงเป็นไปได้ยาก เนื่องจากต้องใช้มาตรฐานสูงในการออกแบบเป็นวงจรไฟฟ้าเพราะต้องมีความแม่นยำในการออกแบบและผลิต รวมถึงการซิงโครไนซ์สำหรับวงจรจริงเป็นเรื่องที่ยากเช่นกัน ซึ่งวิธีที่นิยมใช้ในการสื่อสารอลวนแบบแอนาลอก คือ วิธี Chaotic Masking (CM)

- **การสื่อสารอลวนแบบดิจิทัล (Chaos Digital Communication)**

การสื่อสารอลวนแบบดิจิทัลเป็นวิธีที่ค่อนข้างนิยมกว่าแบบแอนาลอก เนื่องจากใช้องค์ประกอบของวงจรที่น้อยกว่า สามารถประมวลบนคอมพิวเตอร์ ช่วยให้การรับ-ส่งข้อมูลมีความรวดเร็วและแม่นยำ และลดความผิดพลาดของข้อมูล รวมถึงสามารถประยุกต์ใช้งานได้หลากหลาย [110] วิธีในการสื่อสารอลวนแบบดิจิทัล ประกอบด้วย Chaos Shift Keying (CSK) การแพร่กระจายสเปกตรัมแบบอลวน (Chaos Spread Spectrum) การโมดูเลชันแบบอลวน (Chaos Modulation)

โดยในหัวข้อนี้ของวิทยานิพนธ์จะนำวิธีการสื่อสารแบบแอนาลอกมาแสดงตัวอย่างในนำระบบเคออสมาประยุกต์ใช้ ดังนี้

4.6.2.1 การใช้หน้ากากเคออสในการสื่อสาร (Chaotic Masking communication)

รูปแบบการใช้ Chaotic Masking หรือ CM ในการสื่อสาร เป็นวิธีที่ง่ายสุดในการสื่อสารแบบเคออสด้วยการสื่อสารเคออสแบบแอนาลอก โดยสัญญาณข้อมูล (Information signal) จะถูกซ้อนทับและปิดบังด้วยข้อมูลสัญญาณเคออสโดยตรง [90] แสดงแผนภาพบล็อคไดอะแกรมดังรูปที่ 4.55 การซิงโครไนซ์สามารถสร้างโดยใช้ระบบย่อยสองส่วน คือ ระบบส่ง และ ระบบรับ สัญญาณข้อมูลที่สร้างขึ้นจะต้องมีขนาดของสัญญาณที่เล็กกว่าสัญญาณเคออสไม่น้อยกว่า 20dB เพื่อที่สัญญาณเคออสจะซ้อนทับสัญญาณข้อมูลให้กลายเป็นลักษณะสัญญาณรบกวน (Noise signal) ได้อย่างสมบูรณ์ ด้วยวิธีนี้จะทำให้เกิดความปลอดภัยค่อนข้างสูงสำหรับสัญญาณข้อมูลที่ส่งมา ซึ่งในการสร้าง ภาคส่ง จะต้องมีระบบส่ง ที่เป็นระบบเคออสขึ้นมาหนึ่งระบบ โดยมีการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวแปรสเตท รวมถึงกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ จากนั้นจะมีการกำหนด ภาครับ โดยเป็นการโคลนระบบจากระบบส่งเพื่อกำหนดตัวแปรสเตทเริ่มต้นและพารามิเตอร์ทั้งสองระบบให้เท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ด้วยวิธีนี้สัญญาณที่ได้จาก ภาคส่ง จะถูกลบออกด้วยสัญญาณเคออส ภาครับ และจะได้สัญญาณข้อมูลกลับมาอย่างถูกต้อง ระบบจะไม่สามารถลบสัญญาณออกได้อย่างถูกต้อง หากมีความผิดเพี้ยนของค่าเงื่อนไขเริ่มและพารามิเตอร์ของระบบเพียงเล็กน้อย ทำให้ยากต่อการถูกโจมตีและถอดรหัสจากภายนอก

โดยวิธีการเข้ารหัสด้วย CM จะแสดงตัวอย่างโดยนำระบบ M1 ในหัวข้อที่ 4.6.1 ที่เป็นระบบเคออสสี่วงม้วนมาประยุกต์ใช้ *ซึ่งการใช้ระบบเคออสรูปแบบหลายวงม้วนในการเข้ารหัส (ได้กล่าวโดยละเอียดไว้ในบทที่ 2) ทำให้มีข้อดี คือ มีความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์สูงกว่าระบบเคออสสองวงม้วนปกติ เนื่องจากลักษณะสัญญาณที่มีจำนวนคาบการแกว่งที่สูงกว่า เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าภายในระบบเพียงเล็กน้อยรูปแบบการแกว่งของสัญญาณจะเปลี่ยนอย่างสิ้นเชิง ยิ่งส่งผลให้ยากต่อการถูกคัดลอกสัญญาณหรือโจมตีในการถอดรหัส* โดยสมการฝั่งส่งของระบบ M1 สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\begin{cases} \dfrac{dx_t}{dt} = y_t + (Ay_t \cdot \mathrm{Rect}(By_t)), \\ \dfrac{dy_t}{dt} = z_t, \\ \dfrac{dz_t}{dt} = -(kz_t) - (y_t) - (C(x_t + \delta_{xt}) - D\,\mathrm{sgn}(x_t + \delta_{xt})), \\ S(t) = I(t) + G_t \cdot C_t(t). \end{cases} \tag{4.26}$$

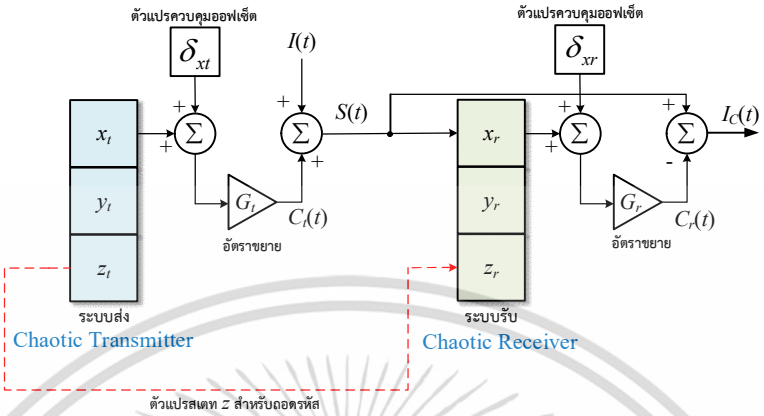
ที่ $x_t\, y_t\, z_t$ คือตัวแปรสำหรับฝั่งส่ง กำหนดพารามิเตอร์ฝั่งส่ง A=1.5 B=2.35 C=0.6 D=0.2 และ k=0.6 พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0, z_0) =(0.1, 0.1, 0.1) โดยบล็อคไดอะแกรมสำหรับวิธี CM ที่นำระบบ M1 มาประยุกต์ใช้เขียนได้ดังรูปที่ 4.55 สมการที่ฝั่งรับ โดยใช้ตัวแปรสเตท z ในการซิงโครไนซ์เป็นคีย์ในการถอดรหัสระหว่างสองฝั่ง แสดงดังสมการที่ (4.27) พารามิเตอร์ในฝั่งรับจะถูกกำหนดให้เท่ากับฝั่งส่งสำหรับกรณีในการถอดรหัสสำเร็จ

$$\begin{cases} \dfrac{dx_r}{dt} = y_r + (Cy_r \cdot \mathrm{Re}\,ct(Dy_r)), \\ \dfrac{dy_r}{dt} = z_t, \\ \dfrac{dz_r}{dt} = -(kz_t) - (y_r) - (A(x_r + \delta_{xr}) - B\,\mathrm{sgn}(x_r + \delta_{xr})), \\ I_C(t) = S(t) - G_r \cdot C_r(t). \end{cases} \tag{4.27}$$

ที่ $x_r\, y_r\, z_r$ คือตัวแปรสำหรับฝั่งรับ โดยที่ $I(t)$ คือ สัญญาณข้อมูลขาเข้า $C_t(t)$ คือ สัญญาณเคออสระบบส่ง $S(t)$ คือ สัญญาณลับที่เกิดจากสัญญาณข้อมูลรวมกับสัญญาณเคออสระบบส่ง $C_r(t)$ คือ สัญญาณเคออสระบบรับ และ $I_C(t)$ คือ สัญญาณข้อมูลขาออก และ G คืออัตราขยายของระบบ (Gain) จากหัวข้อที่ 4.4.1.4 ที่มีการกล่าวถึงการควบคุมตัวแปรออฟเซ็ตของระบบเคออสเพื่อแปลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

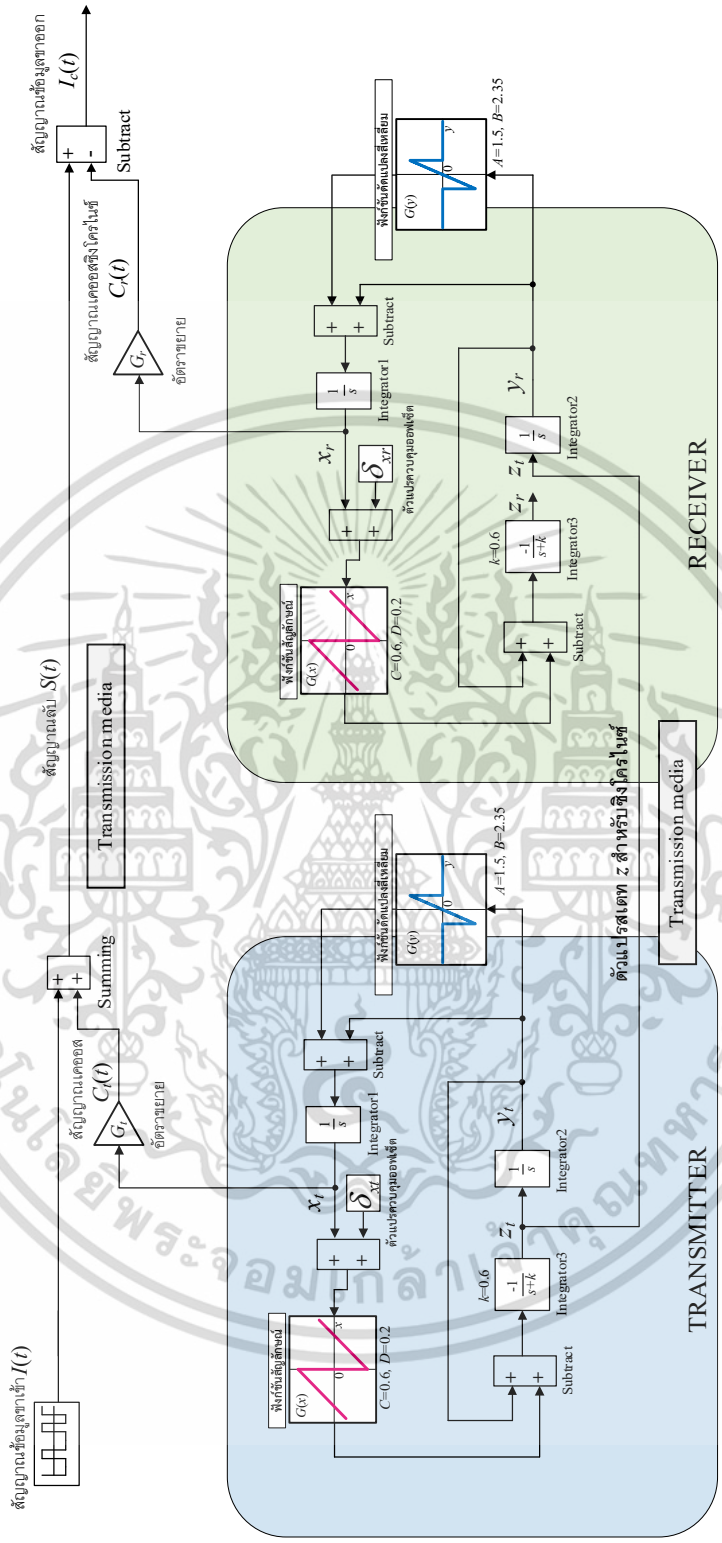
สัญญาณจาก Unipolar เป็น Bipolar ในหัวข้อนี้จะนำมาประยุกต์ใช้ในระบบ M1 ด้วย โดยกำหนดตัวแปรควบคุมออฟเซ็ต คือ พารามิเตอร์ δ_x



รูปที่ 4.55 บล็อกไดอะแกรมสำหรับการเข้ารหัสด้วยวิธี CM โดยนำระบบ M1 มาประยุกต์ใช้ และใช้ตัวแปรสเตท z ในการถอดรหัส

โดยการจำลองผลการเข้ารหัสจากบล็อคไดอะแกรมรูปที่ 4.55 จะจำลองด้วยเครื่องมือ Simulink บนโปรแกรม MATLAB ดังรูปที่ 4.56 โดยสัญญาณข้อมูลขาเข้าแบบสัญญาณไบนารี ($I(t)$) ถูกกำหนดขนาด 0.1V และกำหนดอัตราข้อมูลในการส่ง 1,900bit/s สัญญาณเคออส ($C_t(t)$) ถูกแปลงเป็นสัญญาณ Bipolar โดยกำหนด $\delta_x = 0.8$ และกำหนดขนาดสัญญาณ 0.8V จากการกำหนด G=0.5 ซึ่งเงื่อนไขในการใช้สัญญาณเคออสปิดบังสัญญาณข้อมูลของวิธี CM ต้องกำหนดให้ขนาดสัญญาณเคออสสูงกว่าสัญญาณข้อมูลอินพุต 20dB ถึง 30dB [111] แสดงผลการเข้ารหัส-ถอดรหัสดังรูปที่ 4.57

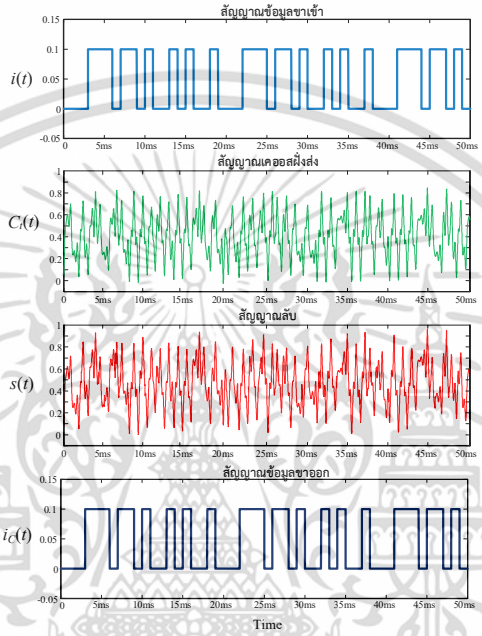
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.56 จำลองวิธีการเข้ารหัสด้วยวิธี CM บน Simulink MATLAB โดยใช้ระบบเดอส M1 ในหัวข้อ 4.6.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

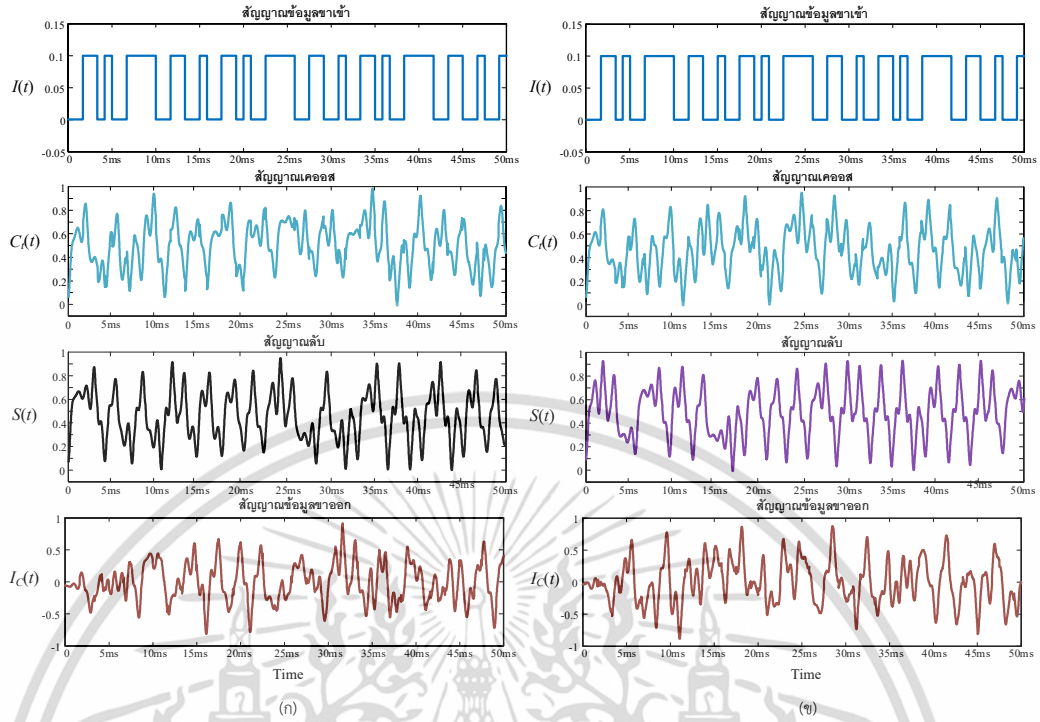
จากรูปที่ 4.57 แสดงสัญญาณข้อมูลขาเข้า ($I(t)$) สัญญาณเคออสฝั่งส่ง ($C_i(t)$) สัญญาณลับที่เกิดจากสัญญาณข้อมูลรวมกับสัญญาณเคออสระบบส่ง ($S(t)$) และสัญญาณข้อมูลขาออก ($I_C(t)$) โดยแสดงกรณีการกำหนดพารามิเตอร์ของฝั่งส่งและฝั่งรับตรงกัน ทำให้ระบบเข้ารหัส-ถอดรหัสได้สำเร็จ จากการใช้สัญญาณเคออสในระบบ M1 ซึ่งจะเห็นว่าสัญญาณข้อมูลขาออกและสัญญาณข้อมูลขาเข้ามีจำนวนบิตและขนาดของสัญญาณที่ตรงกันชัดเจน



รูปที่ 4.57 แสดงผลการเข้ารหัสด้วยวิธี CM จากการใช้สัญญาณเคออสจากระบบ M1 โดยในรูปแสดงกรณีการเข้ารหัสสำเร็จ จากการใช้คีย์ตัวแปรสเตท z

จากรูปที่ 4.58 แสดงกรณีการเข้ารหัสไม่สำเร็จ ด้วยการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์ที่ไม่ตรงกันของฝั่งส่งและฝั่งรับ โดยแสดงผลได้ดังรูปที่ 4.58 โดยกำหนดพารามิเตอร์ของฝั่งส่ง คือ A=1.5 B=2.35 C=0.6 D=0.2 และ k=0.6 พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ ซึ่งในรูปที่ 4.58 (ก) มีการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของฝั่งรับ $z_0 = 0.11$ และรูปที่ 4.58 (ข) กำหนดพารามิเตอร์ของฝั่งรับ D=0.21 ซึ่งทั้งค่าเงื่อนไขเริ่มต้น z_0 และค่าพารามิเตอร์ B เปลี่ยนแปลงจากฝั่งส่งเพียง 0.01 จะเห็นว่าสัญญาณข้อมูลขาออก ($I_C(t)$) ผิดเพี้ยนสัญญาณข้อมูลขาเข้า ($I(t)$) ทันที สิ่งนี้บ่งชี้ว่าการนำระบบเคออสมาประยุกต์ใช้ในการสื่อสาร มีความปลอดภัยสูงด้วยคุณสมบัติเฉพาะของระบบเคออส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.58 แสดงการเข้ารหัส กรณีถอดรหัสไม่สำเร็จ ด้วยระบบเคออา M1 (ก) กรณีกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้น z_0 ของฝั่งส่งและฝั่งรับไม่ตรงกันเพียง 0.01 (ข) กรณีกำหนดค่าพารามิเตอร์ D ของฝั่งส่งและฝั่งรับไม่ตรงกันเพียง 0.01

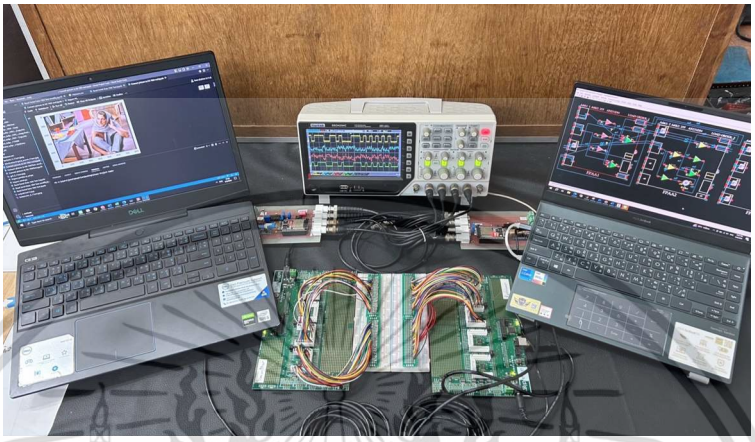
ในหัวข้อที่ 4.6.2.1 เป็นการแสดงพื้นฐานในการเข้ารหัสด้วยวิธีการใช้หน้ากากเคออส หรือ Chaotic masking โดยอธิบายหลักการทางทฤษฎี องค์ประกอบที่สำคัญในการเข้ารหัส และจำลองผลด้วยเครื่องมือ Simulink บนโปรแกรม MATLAB โดยนำระบบเคออสที่ออกแบบเพิ่มเติมที่เป็นระบบเคออสแบบสี่วงม้วน คือ ระบบ M1 มาประยุกต์ใช้ ซึ่งการแสดงผลดังกล่าวเป็นการจำลองเชิงตัวเลขบนโปรแกรม ในหัวข้อถัดไปเป็นจะการแสดงการเข้ารหัสในการทดลองจริง โดยใช้รูปภาพร่วมกับอุปกรณ์ไมโครคอนโทรลเลอร์ในการเข้ารหัส ซึ่งจะใช้ระบบเคออส M2 มาประยุกต์ใช้ในการแสดงตัวอย่าง แสดงดังต่อไปนี้

4.6.2.2 ประยุกต์ใช้ในการเข้ารหัสลับรูปภาพด้วยระบบเคออส (Chaotic Image cryptography)

ในส่วนนี้จะแสดงการนำระบบเคออสที่ออกแบบมาประยุกต์ใช้ในการทดลองจริง โดยนำมาเข้ารหัสรูปภาพ ระบบเคออสที่ออกแบบ M2 ที่ใช้ FPAA ในการยืนยันผลทางวงจรในหัวข้อที่ 4.6.1 จะถูกนำใช้ในหัวข้อนี้ โดยในการเข้ารหัสจะใช้พื้นฐานด้วยวิธี CM จากหัวข้อที่ 4.6.2.1 โดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนประกอบที่ใช้ในการประยุกต์เข้ารหัสรูปภาพ ได้แก่ วงจร PCB สำหรับฝั่งส่งและฝั่งรับ โดยมี MCU ไอซี LM358 และ ไอซี LF347 (ไอซีถูกใช้ร่วมกับวงจรขยาย) อุปกรณ์ FPAA โดยใช้แหล่งจ่าย +5V ยกเว้น LF347 ใช้ ±12V ภาพรวมอุปกรณ์ในการทดลองเข้ารหัสรูปภาพแสดงดังรูปที่ 4.59



รูปที่ 4.59 ภาพรวมการทดลองจริงในการประยุกต์ใช้เข้ารหัสรูปภาพโดยใช้เคออสระบบ M2 ร่วมกับอุปกรณ์ FPAA

จากที่กล่าวไปข้างต้นในการประยุกต์เข้ารหัสรูปภาพจะใช้ระบบเคออส M2 ที่ออกแบบเพิ่มเติมไว้ในหัวข้อที่ 4.6.1 ดังนั้นสมการฝั่งส่งและฝั่งรับสามารถเขียนโดยใช้หลักการ CM จากหัวข้อที่ 4.6.2.1 ได้ดังนี้

สมการฝั่งส่งสำหรับระบบ M2 :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_t}{dt} = y_t + (C(y_t) - D\,\mathrm{sgn}(y_t)), \\ \dfrac{dy_t}{dt} = z_t, \\ \dfrac{dz_t}{dt} = -(kz_t) - (y_t) - (Ax_t \cdot \mathrm{Rect}(Bx_t)), \\ S(t) = I(t) + Ct(t). \end{cases} \tag{4.28}$$

สมการฝั่งรับสำหรับระบบ M2 :

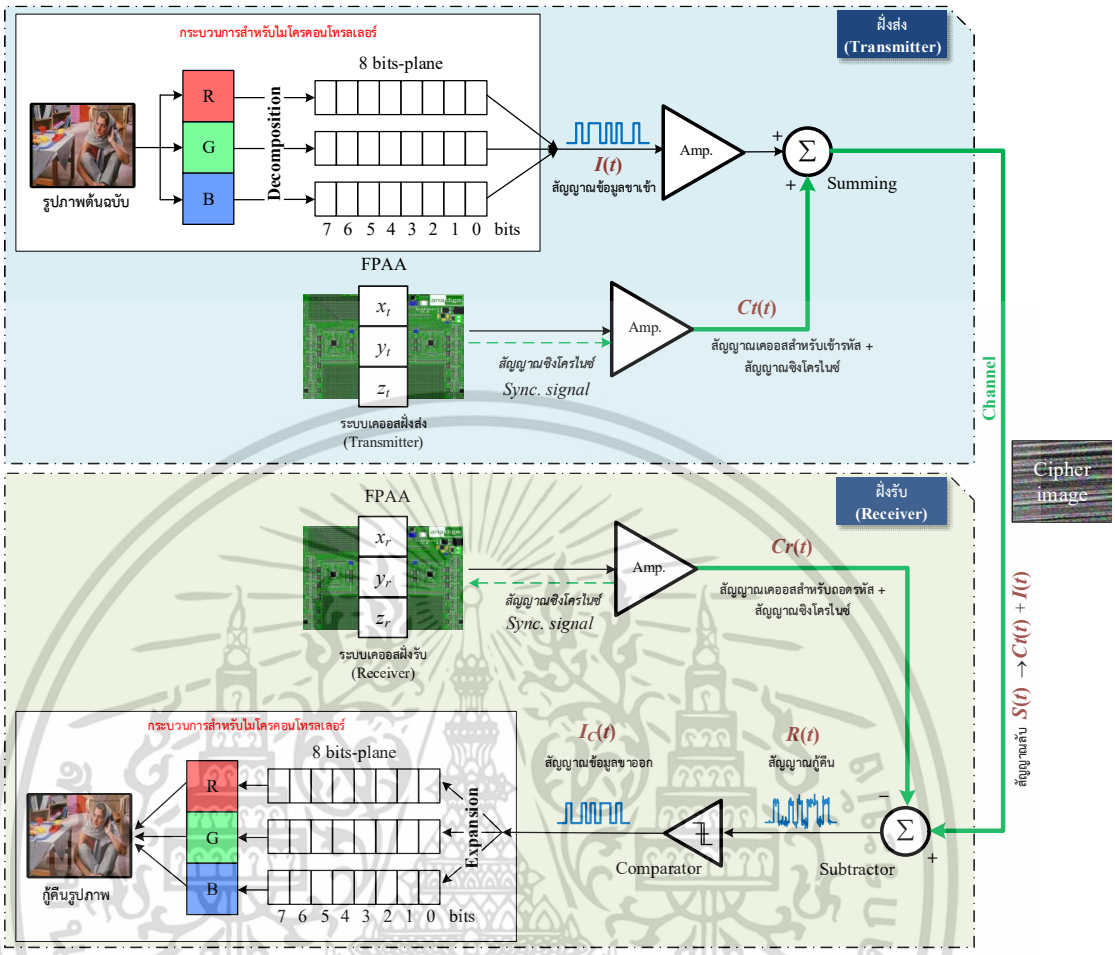
$$\begin{cases} \dfrac{dx_r}{dt} = y_r + (Cy_r - D\,\mathrm{sgn}(y_r)), \\ \dfrac{dy_r}{dt} = z_t, \\ \dfrac{dz_r}{dt} = -(kz_t) - (y_r) - (Ax_r \cdot \mathrm{Re}ct(Bx_r)), \\ R(t) = S(t) - Cr(t), \\ I'(t) = R(t). \end{cases} \tag{4.29}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

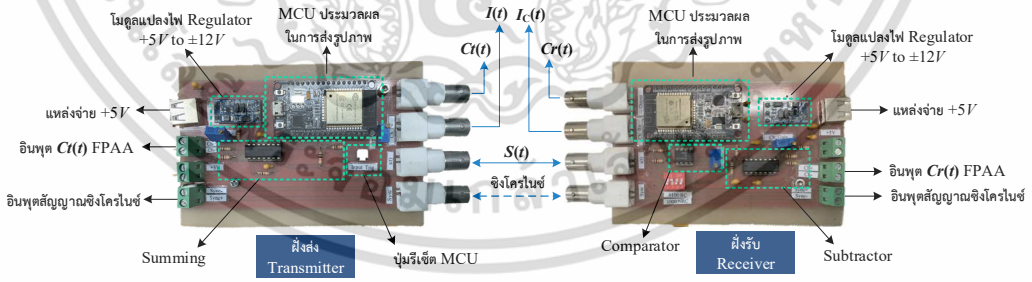
ระบบเคออส M2 ที่ใช้ร่วมกับ FPAA จะถูกกำหนดพารามิเตอร์ภายใน CAM ตามรูปที่ 4.53 โดยความถี่ Clock ของ CAM จะถูกเปลี่ยนจาก 250*k*Hz เป็น 1,000*k*Hz สำหรับ ClockA และเปลี่ยนจาก 4*M*Hz เป็น 16*M*Hz สำหรับ ClockB สำหรับการเข้ารหัสรูปภาพ (รายละเอียด Clock เดิมสามารถดูได้ในรูปที่ 4.53) โดยในการซิงโครไนซ์ระบบ จะใช้ตัวแปรสเตท z ในสำหรับสัญญาณซิงโครไนซ์ (z_r=z_t) โดยพารามิเตอร์ฝั่งส่งที่ถูกกำหนดใน CAMs คือ G_A=1.2 G_B=0.4 G_C=1 G_D=0.155 และ G_k=0.3 โดยกรณีเข้ารหัสรูปภาพไม่สำเร็จจะทำการปรับพารามิเตอร์ G_k ในฝั่งรับให้ไม่ตรงกับฝั่งส่ง

ในการทดลองภาพรวมการเชื่อมต่อกระบวณการเข้ารหัสรูปภาพแสดงเป็นบล็อคไดอะแกรมได้ดังรูปที่ 4.60 และวงจร PCB สำหรับใช้ในการเข้ารหัสฝั่งส่งและฝั่งรับ แสดงดังรูปที่ 4.61 โดยรูปภาพที่ใช้ในกระบวณการเข้ารหัส ชื่อว่า *Barbara* RBG [112] มีพิกเซลของรูป 814x542 เมื่อถูกแปลงเป็นบิตด้วย MCU จะได้บิตจำนวน 10,588,512 บิต ซึ่งสัญญาณไบนารีข้อมูลขาเข้า $I(t)$ ที่ได้จากรูป *Barbara* จะถูกกำหนดขนาดเท่ากับ 0.7V และใช้อัตราการส่งข้อมูล 9,600 บิต/s ขนาดของสัญญาณเคออสฝั่งส่งและฝั่งรับถูกกำหนดเท่ากับ 3Vpp ความถี่ของสัญญาณข้อมูลขาเข้า คือ 4.81kHz และความถี่ของสัญญาณเคออส คือ 27.70kHz แสดงดังรูปที่ 4.62 กระบวณการเข้ารหัสจะใช้โปรแกรม Python ในการเขียนบน MCU โดยใช้เวลาในการถอดรหัสต่อ 1 รูปภาพประมาณ 24 นาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

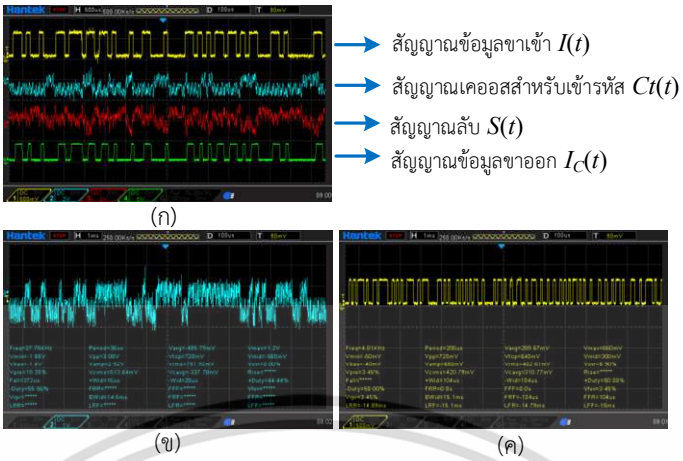


รูปที่ 4.60 บล็อคไดอะแกรมสำหรับการเข้ารหัสรูปภาพโดยใช้ FPAA



รูปที่ 4.61 องค์ประกอบของวงจรฝั่งรับและสั่งส่งโดยใช้ MCU

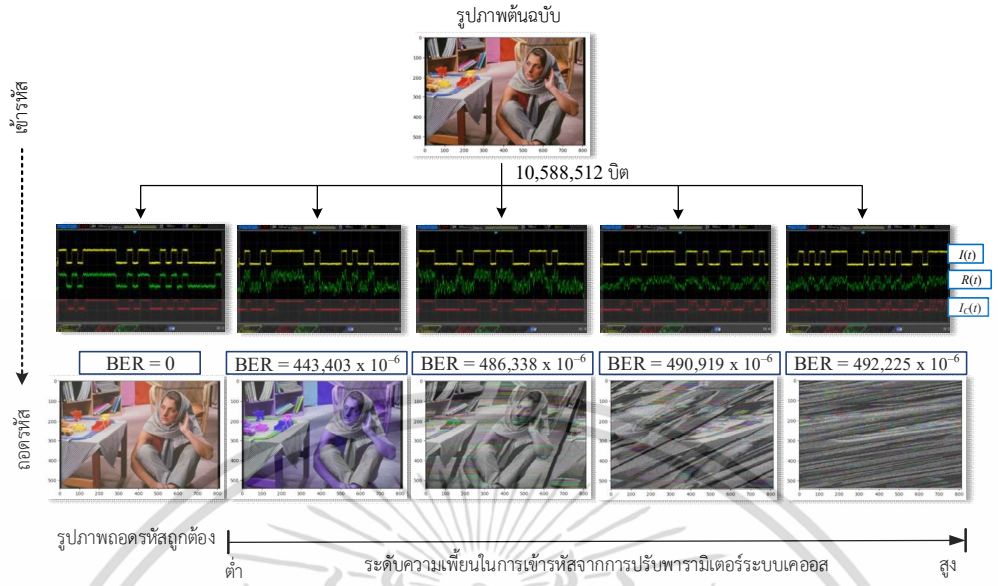
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.62 เอาต์พุตสัญญาณในการเข้ารหัส (ก) ภาพรวมสัญญาณ (ข) รายละเอียดของสัญญาณเคออส ($Ct(t)$) (ค) รายละเอียดของสัญญาณข้อมูลขาเข้า ($I(t)$) ที่ได้จากการแปลงรูปภาพ

ผลลัพธ์การเข้ารหัสรูปภาพแสดงดังรูปที่ 4.63 โดยผลลัพธ์แสดงสำหรับรูปภาพ *Barbara* RGB ที่นำมาใช้ โดยจะแสดงสัญญาณที่ได้ในแต่ละกระบวณการสำหรับสัญญาณ $I(t)$ $R(t)$ และ $I_C(t)$ (ตำแหน่งของแต่ละสัญญาณสามารถดูได้ที่รูป 4.60 และ 4.61) โดยในกรณีที่เข้ารหัสรูปภาพได้อย่างถูกต้องในรูปล่างซ้ายมือ พารามิเตอร์ของฝั่งส่งและฝั่งรับ G_k ถูกกำหนดให้เท่ากันที่ 0.3 โดยในกรณีที่รูปภาพถอดรหัสไม่สำเร็จจะแสดงระดับจากการปรับพารามิเตอร์ G_k ในฝั่งรับ โดยปรับที่ G_k=0.55 G_k=0.68 G_k=0.73 และ G_k=0.95 โดยไล่ระดับจากรูปด้านล่างซ้ายไปขวา ตามลำดับ ซึ่งในกรณีที่รูปภาพเกิดการถอดรหัสไม่สำเร็จ อัตราบิตผิดพลาด (Bit Error Rate: BER) คือ 443,403 x 10^{-6} สำหรับ G_k = 0.55 อัตราบิตผิดพลาด 486,338 x 10^{-6} สำหรับ G_k = 0.68 อัตราบิตผิดพลาด 490,919 x 10^{-6} สำหรับ G_k = 0.73 และอัตราบิตผิดพลาด 492,225 x 10^{-6} สำหรับ G_k = 0.95 ซึ่งในกรณีรูปภาพถอดรหัสสำเร็จจะมีอัตราบิตผิดพลาด คือ 0 จะเห็นได้ชัดจากสัญญาณข้อมูลขาออก $I_C(t)$ เปรียบเทียบกับสัญญาณข้อมูลขาเข้า $I(t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.63 ภาพรวมผลลัพธ์การถอดรหัสรูปภาพ กรณีเข้ารหัสถูกต้อง และเข้ารหัสไม่ถูกต้องจากการปรับพารามิเตอร์ไม่ตรงกันของฝั่งรับ

ในหัวข้อนี้จะเป็นการแสดงข้อมูลเพิ่มเติมสำหรับการนำระบบเคออสมาประยุกต์ใช้ในความปลอดภัยด้านการสื่อสาร มีการนำมาทดลองจริงด้วยการเข้ารหัสรูปภาพร่วมกับการใช้อุปกรณ์แอนาลอกที่สามารถโปรแกรมค่าได้ FPAA โดยนำระบบเคออส M2 ที่ออกแบบเพิ่มเติมของวิทยานิพนธ์มาประยุกต์ใช้ ซึ่งการศึกษาสำหรับการนำระบบเคออสไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆ เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษาของผู้เขียน โดยนำข้อดีและจุดแข็งของระบบเคออสที่ออกแบบมาใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด

อย่างไรก็ตามในหัวข้อ 4.6 ที่กล่าวมาเป็นข้อมูลส่วนเพิ่มเติมที่ถูกเพิ่มข้อมูลที่เป็นประโยชน์ให้กับผู้ที่อ่านวิทยานิพนธ์เล่มนี้ โดยจุดประสงค์ในการนำเสนอหลักของวิทยานิพนธ์ คือการออกแบบโครงสร้างระบบเคออสในหัวข้อที่ 4.2 – 4.5 เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นๆในอดีต โดยสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.7 บทสรุป

ระบบเคออสที่ออกแบบของวิทยานิพนธ์สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสที่ซับซ้อนสูง โดยใช้ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบใหม่ คือ ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดัดแปลง และมีความสามารถในการสลับตำแหน่งของฟังก์ชันได้ที่ตำแหน่งตัวแปรสเตท x และ y โดยลักษณะที่ซับซ้อนสูงสุดของงาน คือ เคออสรูปแบบสี่วงม้วนถูกยืนยันด้วยค่า D_{KY}=2.65 พฤติกรรมพลวัตต่างๆสามารถตรวจสอบได้จากพารามิเตอร์เพียงสามตัว (A B และ k) คุณสมบัติพื้นฐานของระบบถูกวิเคราะห์โดยใช้ความเสถียรภาพตามกฎของ Shilnikov ว่าระบบมีพฤติกรรมเป็นเคออส ระบบที่ออกแบบมีการวิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรม MATLAB เพื่อแสดงพฤติกรรมพลวัตต่างๆ เครื่องมือที่ใช้ ได้แก่ แผนภาพ bifurcation ซึ่งนำไปสู่การค้นพบพฤติกรรมที่ซับซ้อนอย่างความหลายเสถียรภาพ ความสมมาตรและไม่สมมาตร แผนภาพ phase portraits เพื่อแสดงลักษณะพฤติกรรมพลวัตรูปแบบต่างๆ แผนภาพทดสอบ 0-1 เพื่อยืนยันความเป็นเคออสด้วยทฤษฎีทางฟิสิกส์ แผนภาพ Poincare แสดงชนิดของตัวดึงดูดที่เป็นรูปแบบสี่วงม้วน รวมถึงการเพิ่มคุณสมบัติพิเศษของระบบสี่วงม้วนด้วย การควบคุมขนาดและการเพิ่มออฟเซ็ตของระบบ นอกจากนี้ระบบยังสามารถสร้างเคออสรูปแบบสองวงม้วนได้อีกสองลักษณะ ด้วยค่า D_{KY}=2.25 และ D_{KY}=2.43 จากการใช้ฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม โดยสุดท้ายระบบที่ออกแบบมีการนำไปออกแบบเป็นวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสด้วยผลการทดลองจริง โดยใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA (LT1228) โหมดกระแส ร่วมกับตัวเก็บประจุต่อลงกราวด์ผลลัพธ์ที่ได้จากวงจรเปรียบเทียบกับผลลัพธ์เชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB พบว่าผลที่ได้สอดคล้องกันเป็นอย่างดี สามารถสรุปองค์ประกอบต่างๆของระบบเคออสที่ออกแบบ โดยอิงจากปัจจัยสำคัญที่ถูกกล่าวไว้ในบทที่ 3 ได้ดังตารางที่ 4.10 (ไม่รวม “ส่วนเติมเพิ่ม” ในหัวข้อที่ 4.6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.10 สรุปภาพรวมของระบบเคออสที่ออกแบบในวิทยานิพนธ์

<table>
<tr><th colspan="8">องค์ประกอบต่างๆของระบบเคออสที่ออกแบบของวิทยานิพนธ์</th></tr>
<tr><th colspan="2">โครงสร้างแบบจำลอง</th><th colspan="2">การวิเคราะห์พลวัตของระบบ</th><th colspan="2">ค่าความซับซ้อนพฤติกรรมเคออส</th><th colspan="2">องค์ประกอบวงจร</th></tr>
<tr><td colspan="8">(นำเสนอหลัก) ลักษณะเคออส “สี่วงม้วน” ของระบบ (4.3)</td></tr>
<tr><td>พจน์ของระบบ</td><td>6 พจน์</td><td rowspan="4">1. ความสมมาตรและไม่สมมาตร
2. Dissipative ของระบบ
3. วิเคราะห์ความเสถียรภาพ
4. วิเคราะห์ความหลายเสถียรภาพ
5. เลขชี้กำลัง Lyapunov
6. แผนภาพ bifurcation
7. Phase portrait
8. สเปกตรัม Lyapunov
9. Basin of attraction
10. ควบคุมขนาดและออฟเซ็ต
11. แผนภาพ Poincare

รวม 11 เครื่องมือ</td><td rowspan="2">LE^*</td><td rowspan="2">LE_1=0.809254,
LE_2=-0.071406,
LE_3=-1.132508.</td><td>OTA</td><td>12 ตัว</td></tr>
<tr><td>พารามิเตอร์</td><td>3 ตัว</td><td>C</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td>พจน์ NLT*</td><td>2 พจน์</td><td rowspan="2">D_{KY}</td><td rowspan="2">2.65</td><td>ES^*</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>ชนิด NLT*</td><td>ปรับฟังก์ชันได้อิสระ</td><td colspan="2">รวม 15 ตัว</td></tr>
<tr><td colspan="8">ลักษณะเคออสสองวงม้วน ของระบบ (4.1)</td></tr>
<tr><td>พจน์ของระบบ</td><td>5 พจน์</td><td rowspan="4">1. ความสมมาตรและไม่สมมาตร
2. Dissipative ของระบบ
3. วิเคราะห์ความเสถียรภาพ
4. วิเคราะห์ความหลายเสถียรภาพ
5. เลขชี้กำลัง Lyapunov
6. แผนภาพ bifurcation
7. Phase portrait
8. สเปกตรัม Lyapunov
9. Basin of attraction
10. ควบคุมขนาดและออฟเซ็ต
11. แผนภาพ Poincare

รวม 11 เครื่องมือ</td><td rowspan="2">LE^*</td><td rowspan="2">LE_1=0.318522,
LE_2=-0.018625,
LE_3=-699897.</td><td>OTA</td><td>12 ตัว</td></tr>
<tr><td>พารามิเตอร์</td><td>3 ตัว</td><td>C</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td>พจน์ NLT*</td><td>1 พจน์</td><td rowspan="2">D_{KY}</td><td rowspan="2">2.43</td><td>ES^*</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>ชนิด NLT*</td><td>ปรับฟังก์ชันได้อิสระ</td><td colspan="2">รวม 15 ตัว</td></tr>
<tr><td colspan="8">ลักษณะเคออสสองวงม้วน ของระบบ (4.2)</td></tr>
<tr><td>พจน์ของระบบ</td><td>5 พจน์</td><td rowspan="3">1. ความสมมาตรและไม่สมมาตร
2. Dissipative ของระบบ
3. วิเคราะห์ความเสถียรภาพ</td><td rowspan="2">LE^*</td><td rowspan="2">LE_1=0.248395,
LE_2=-0.018395,
LE_3=-0.929970.</td><td>OTA</td><td>12 ตัว</td></tr>
<tr><td>พารามิเตอร์</td><td>3 ตัว</td><td>C</td><td>3 ตัว</td></tr>
<tr><td>พจน์ NLT*</td><td>1 พจน์</td><td>D_{KY}</td><td>2.25</td><td>ES^*</td><td>✓</td></tr>
</table>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชนิด NLT*	ปรับฟังก์ชันได้อิสระ	4. วิเคราะห์ความหลายเสถียรภาพ 5. เลขชี้กำลัง Lyapunov 6. แผนภาพ bifurcation 7. Phase portrait 8. สเปกตรัม Lyapunov 9. Basin of attraction 10. ควบคุมขนาดและออฟเซ็ต 11. แผนภาพ Poincare รวม 11 เครื่องมือ			รวม 15 ตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะในการพัฒนางานวิจัย

5.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์เล่มนี้นำเสนอระบบเคออสที่สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสซับซ้อนสูงด้วยรูปแบบสี่วงม้วน ยืนยันด้วยค่า D_{KY}=2.65 ซึ่งมีค่าความซับซ้อนสูงที่สุดเมื่อเปรียบกับงานวิจัยอื่นที่สร้างสัญญาณรูปแบบสี่วงม้วนในอดีต ข้อดีของระบบเคออสที่มีความซับซ้อนสูง คือ เพิ่มความซับซ้อนการแกว่งของคาบสัญญาณทำให้ยากต่อการคาดเดา ส่งผลให้เพิ่มความไวต่อเงื่อนไขเริ่มต้นและพารามิเตอร์ สิ่งนี้ทำให้ประยุกต์ใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในด้านความปลอดภัยด้านการสื่อสาร หรือการสร้างชุดตัวเลขแบบสุ่ม เป็นต้น โดยการออกแบบระบบเคออสของวิทยานิพนธ์เป็นการดัดแปลงโครงสร้างจากแบบจำลองการกระตุก ทำให้สามารถออกแบบฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้นได้ถึง สองตำแหน่ง อีกทั้งยังสลับตำแหน่งของฟังก์ชันได้อย่างอิสระ ทำให้สร้างลักษณะสัญญาณเคออสได้หลายรูปแบบและฟังก์ชันดัดแปลงสี่เหลี่ยม คือ ฟังก์ชันที่ถูกออกแบบใหม่ไม่เคยมีการนำเสนอในอดีต มากกว่าไปนั้น การวิเคราะห์พฤติกรรมพลวัตอย่างละเอียดของวิทยานิพนธ์ มีการใช้เครื่องมือในการวิเคราะห์ถึง 11 เครื่องมือ (ข้อดีของการใช้เครื่องมือหลากหลายประเภทถูกกล่าวในไว้หัวข้อ 3.1 บทที่ 3) สุดท้ายระบบเคออสที่ออกแบบมีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์และโครงสร้างทางวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสที่เรียบง่าย เมื่อเทียบกับงานวิจัยที่มีความเกี่ยวข้องกันในอดีต รวมถึงมีคุณสมบัติด้านต่างๆที่เป็นข้อได้เปรียบของระบบที่ออกแบบในวิทยานิพนธ์ ซึ่งจะนำงานวิจัยที่มีการออกแบบสัญญาณเคออสด้วยรูปแบบสี่วงม้วน มาเปรียบเทียบกับงานของวิทยานิพนธ์ที่ออกแบบสัญญาณเคออสสี่วงม้วนซับซ้อนสูง แสดงดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 เปรียบเทียบคุณสมบัติของระบบเคออสสี่วงม้วนที่มีการออกแบบในอดีตกับระบบที่นำเสนอ

งานวิจัย	โครงสร้างของระบบ				เครื่องมือวิเคราะห์พลวัต	ค่าความซับซ้อน (D_{KY})	องค์ประกอบวงจรกำเนิดสัญญาณ				ความสามารถสลับ NLT
	NTs*	NPs*	จำนวน NLT*	ชนิด NLT			TD*	NDs*	ET*	ER*	
3.2 [81]	8 พจน์	3 ตัว	4 พจน์	กำลังสอง	8 เครื่องมือ	2.231	OP AMP	24 ตัว	×	✓	×
3.3 [82]	8 พจน์	3 ตัว	3 พจน์	กำลังสอง	5 เครื่องมือ	2.032	OP AMP	26 ตัว	×	×	×
3.4 [83]	8 พจน์	5 ตัว	4 พจน์	กำลังสอง	11 เครื่องมือ	2.041	OP AMP	27 ตัว	×	×	×
3.5 [84]	9/7 พจน์	9/7 ตัว	4 พจน์	กำลังสอง	8 เครื่องมือ	2.2456	OP AMP	22 ตัว	×	✓	×
ระบบที่นำเสนอ	6 พจน์	3 ตัว	2 พจน์	ฟังก์ชันอิสระ	11 เครื่องมือ	2.65	OTA	15 ตัว	✓	✓	✓

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NTs* คือ จำนวนพจน์ (Number of terms) NPs* คือ จำนวนพารามิเตอร์ (Number of parameters) NLT* คือ พจน์ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear term) TD* คือ ชนิดของอุปกรณ์ (Type of device) NDs* คือ จำนวนอุปกรณ์ (Number of devices) ET* คือ ปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ (Electronically Tunability) ER* คือ ผลการทดลองจริง (Experimental Result)

จากตารางที่ 5.1 คุณสมบัติของงานวิจัยในอดีตถูกสรุปไว้ในตารางที่ 3.2 – 3.5 โดยความสำคัญของแต่ละปัจจัยที่นำมาเปรียบเทียบถูกระบุข้อดีและข้อเสียไว้ในหัวข้อที่ 3.1 โดยละเอียด จะเห็นว่าระบบเคออสรูปแบบสี่วงม้วนที่ออกแบบของวิทยานิพนธ์มีโครงสร้างของระบบทางคณิตศาสตร์ที่เรียบง่ายจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ในระบบน้อยกว่างานวิจัยในอดีต โดยพจน์ไม่เป็นเชิงเส้น (NLT) สามารถออกแบบได้อิสระในลักษณะของฟังก์ชันตรีโกณ โครงสร้างทางวงจรกำเนิดสัญญาณไม่ซับซ้อนด้วยการใช้อุปกรณ์แอกทีฟ OTA สามารถปรับค่าได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ ด้วยการออกแบบระบบและวงจรที่เรียบง่ายที่สามารถสร้างลักษณะสัญญาณเคออสที่ซับซ้อนสูงได้ถึง D_{KY}=2.65 อีกทั้งยังมีการวิเคราะห์คุณสมบัติทางพลวัตอย่างละเอียดและครอบคลุมด้วยการใช้เครื่องในรูปแบบต่างๆ ถึง 11 เครื่องมือในงานวิจัย

5.2 ข้อเสนอแนะในการพัฒนางานวิจัย

ข้อเสนอแนะในการพัฒนางานวิจัยของวิทยานิพนธ์มีข้อแนะนำ ดังต่อไปนี้

5.2.1 ด้วยการสร้างลักษณะสัญญาณรูปแบบหลายวงม้วน เป็นสัญญาณที่มีการแกว่งของคาบที่สัญญาณซ้อนสูงสามารถไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆให้เกิดประโยชน์ได้ ซึ่งในการศึกษาของผู้เขียนมีการนำไปประยุกต์ใช้ในความปลอดภัยด้านการสื่อสาร หากจะก่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด อาจนำสัญญาณรูปแบบสี่วงม้วนที่ออกแบบไปประยุกต์ใช้ในด้านอื่นๆ เช่น ประมวลผลสัญญาณ การวิเคราะห์ระบบเศรษฐกิจและการเงิน เป็นต้น

5.2.2 ใน “ส่วนเพิ่มเติม” ของบทที่ 4 ที่มีการนำฟังก์ชันดัดแปลงไปใช้คู่กับฟังก์ชันสัญลักษณ์ของระบบที่ออกแบบใน (4.3) ทำให้ได้ลักษณะสัญญาณเคออสสูงถึงหกวงม้วน การนำฟังก์ชันในรูปแบบอื่นมาใช้ในระบบ (4.3) พร้อมกันสองฟังก์ชันอาจจะทำให้สัญญาณเคออสรูปแบบใหม่ที่ซับซ้อนกว่าเดิม

5.2.3 ในระบบที่ออกแบบของงานวิจัยยังไม่มีการศึกษาเกี่ยวกับ ตัวดึงดูดแบบ Hidden (Hidden attractor) และตัวดึงดูดแบบ Self-excited (Self-excited attractor) การศึกษาตัวดึงดูดทั้งสองลักษณะที่กล่าวมาในระบบที่มีความซับซ้อนสูงที่ออกแบบ อาจนำไปสู่การประยุกต์ใช้ในด้านอื่นๆ เพิ่มเติมได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] C. Pak, L. Huang, “A new color image encryption using combination of the 1D chaotic map,” Signal Process, vol.138, pp.129–37, 2017.

[2] S.H. Strogatz, “Nonlinear dynamics and chaos,” Taylor & Francis Group, 1994.

[3] J.C. Sprott, “Chaos and Time-series Analysis,” New York: Oxford Univ. Press., 2003.

[4] T.C. Esteban, “Engineering Applications of FPGAs Chaotic Systems, Artificial Neural Networks, Random Number Generators, and Secure Communication Systems,” Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[5] E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow," Journal of the Atmospheric Sciences, vol.20, no.2, pp.130-141, 1963

[6] O. E. Rossler, "An Equation for Continuous Chaos," Physics Letters, vol.57A, no. 5, pp. 397-398, 1976.

[7] T. Matsumoto, "A Chaotic Attractor from chua's Circuit," IEEE. Trans. Circuits Syst., vol. CAS-31, no.12, pp.1056-1058, DEC. 1984.

[8] J. C. Sprott, "Some simple chaotic flows," American. J. Phys., vol.50, no.2, pp.647-650, Jan. 1994.

[9] J.C. Sprott, "A new class of chaotic circuit," Physics Letters A, vol.266, pp.19-23, Feb 2000.

[10] M. P. Kennedy, “Chaos in the Colpitts oscillator,” IEEE Trans. Circuit Syst.-I, Vol.41, pp.771–774, 1994. –14, 2006.

[11] A. S. Elwakil, and M. P. Kennedy, “A Semi-Systematic Procedure for Producing Chaos from Sinusoidal Oscillators Using Diode-Inductor and FET-Capacitor Composites,” IEEE Trans. Circuit Syst.-I, vol.47, pp.582-590, 2000.

[12] T. Arunas, “Modified Wien-bridge oscillator for chaos,” Electronics Letters, vol.31, no.5, pp.335-336, 1995.

[13] A. S. Elwakil, and A. M. Soliman, “Two twin-T based op amp oscillators modified for Chaos”, J. Franklin Inst, Vol.335B, pp.771-787, 1998.

[14] V. W. Leung and G. W. Roberts Effects of transistor nonidealities on high order log-domain ladder filter frequency responses. IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol.47, no.5, pp.373-387, 2000.

[15] A. S. Elwakil, and A. M. Soliman, “Chaotic oscillators derived from sinusoidal oscillators based on the current feedback opamp,” Analog Integr Circuits Signal Process., Vol.24, pp.239-251, 2000.

[16] D. R. Frey, “Log-domain filtering: An approach to current-mode filtering,” Proc. IEE, part-G, vol.140, no.6, pp. 406–416, 1993.

[17] J. C. Sprott, “Simple chaotic systems and circuits,” American. J. Phys. vol.68, no.8, pp.758 - 763, 2000.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[18] R. Gantmacher, “The Theory of Matrices,” Ams Chelsea publishing American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2000.

[19] A.H. Nayfeh and B. Balachandran, "Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods," Wiley, New York, 1995.

[20] J. Argyris, G. Faust and M. Haase "An Exploration of Chaos," Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015.

[21] J. Gleick, “CHAOS MAKING A NEW SCIENCE,” Open Road Integrated Media, New York, 2008

[22] Peter Woolf et al., “CHEMICAL PROCESSDYNAMICS AND CONTROLS,” University of Michigan, 2024.

[23] J. Hefferon. “Linear algebra. In: Mathematics and Statistics,” 4th Ed. Orthogonal Publishing; 2020.

[24] D.W. Hollar. “Jacobian matrices and Lyapunov exponents. In: Trajectory Analysis in Health Care,” Springer, pp. 163–78, 2018.

[25] A. Bayani, K. Rajakopal, A.J.M. Klalaf, S. Jafari, G.D. Leutcho, J. Kengne, “Dynamical analysis of a new multistable chaotic system with hidden attractor: antimonotonicity, coexisting multiple attractors, and offset boosting,” Phys Lett A, 383:1450–6, 2019.

[26] A.M. Mathai, “Jacobian of matrix transformations and functions of matrix argument,” Available online. Singapore: World Scientific Publishing; 1997.

[27] R. Bellman. “Stability Theory of differential equation,” McGRAW-HILL INC. book, New York Toronto London, 1953.

[28] Wikipedia. “Stability Theory,” update post on lasted on 31 October 2023. Online Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Stability_theory

[29] D.C Jones. “STABILITY ANALYSIS OF THE CHAOTIC LORENZ SYSTEM WITH A STATE-FEEDBACK CONTROLLER,” A Thesis Submitted to the Graduate Faculty of Georgia Southern University, STATESBORO, GEORGIA 2009.

[30] F. Zhang, "Analysis of a Lorenz-Like Chaotic System by Lyapunov Functions," Hindawi, complexity, pp.6, 2019.

[31] S. Vaidyanathan, A.Sambas, M. Mamat and M.S. WS, "Analysis, synchronisation and circuit implementation of a novel jerk chaotic system and its application for voice encryption," Int. J. Modelling, Identification and Control, Vol.28, No.2, 2017.

[32] X. Zhang, H. Zhu and H. Yao, "Analysis of a new three-dimensional chaotic system," Nonlinear Dyn., Vol.67, pp.335-343, 2012.

[33] G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques,"Annales scientifiques de l’É.N.S. 2esérie, Vol.12, pp. 47-88, 1883.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[34] Wikipedia. “Ellipsoid,” 13 Feb. 2022. Online Available: en.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid.

[35] J. Kaplan and J. Yorke, "Chaotic behavior of multidimensional difference equations," in: Functional Differential Equations and the Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, vol.49, no.185, 1983.

[36] H. Wen,"A review of the Henon map and its physical interpretations," NONLINEAR DYNAMIC, Scourse project, spring semester 2014.

[37] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano, “Determining Lyapunov exponents from a time series,” Phys. D., vol.16, pp.285–317, 1985.

[38] G.A. Gottwald and I. Melbourne,"A new test for chaos in deterministic systems," Proc. R. Soc. Lond. A, vol.460, pp.603-611, 2004.

[39] S. Ke-Hui, L. Xuan, and Z. Cong-Xu, “The 0-1 test algorithm for chaos and its applications,” Chinese Physics B, vol.19, no.11, 110510, 2010.

[40] G.A. Gottwald and I. Melbourne, “The 0-1 Test for Chaos: A review,” in book chapter: Chaos Detection and Predictability, Springer, Berlin, Heidelberg, 2016.

[41] A. Chithra and I.R. Mohamed,"Multiple attractors and strange nonchaotic dynamical behavior in a periodically forced system," Nonlinear Dyn., vol.105, pp.3615-3635, 2021

[42] K. Basu and K. Baishya,"Brownian Motion: Theory and Experiment A simple classroom measurement of the diffusion coefficient," Resonance, Vol.8, No.3, pp.71-80, March 2003.

[43] B. Geoff, “Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems:Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction,” Systems, vol.4, no.37, 2016.

[44] G.D. Leutcho, J. Kengne. “A unique chaotic snap system with a smoothly adjustable symmetry and nonlinearity: chaos, offset-boosting, antimonotonicity, and coexisting multiple attractors,” Chaos Solitons Fractals, Vol.113, pp. 275–93, 2018.

[45] F. Yuan, G.Y. Wang, X.W. Wang. “Extreme multistability in a memristor-based multi-scroll hyper-chaotic system, Chaos, Vol.26, no.7. ID:073107, 2016.

[46] C. Hens, S.K. Dana, U. Feudel. “Extreme multistability: attractor manipulation and robustness,” Chaos, Vol.25, no.5, ID:053112, 2015.

[47] M.S Patel, U. Patel, A. Sen, G.C. Sethia, C. Hens, S.K. Dana, U. Feudel, K. Showalter, C.N. Ngonghala, R.E. Amritkar. “Experimental observation of extreme multistability in an electronic system of two coupled Rossler oscillators,” Phys Rev E. , Vol.89, no.2, ID:022918, 2014.

[48] J.C. Sprott, A. Xiong. “Classifying and quantifying basins of attraction,” Chaos Interdiscip J Nonlinear Sci, Vol.25, ID:083101, 2015.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[49] M. Marwan, V.D. Santos, M.Z. Abidin, A. Xiong. “Coexisting attractor in a gyrostat chaotic system via basin of attraction and synchronization of two nonidentical mechanical systems,” Mathematics, Vol.10, no.11, 2022.

[50] J. Lu and G. Chen, “A new chaotic attractor coined,” International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol. 12, no. 3, pp. 659–661, 2002.

[51] L.G. Guzmán, C.C. Hernandez, R.M.L. Gutierrez, E.E.G. Guerrero. “Synchronization of Chua’s Circuits with Multi-Scroll Attractors: Application to Communication,” Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., Vol.14, pp.2765–2775, 2009.

[52] Y. Zhou, C. Li, W. Li, H. Li, W. Feng, K. Qian. “Image encryption algorithm with circle index table scrambling and partition diffusion,” Nonlinear Dyn., Vol.103, pp.2043–2061, 2021.

[53] C.L. Li, Y. Zhou, H.M. Li, W. Feng, J. Du. “Image encryption scheme with bit-level scrambling and multiplication diffusion,” Multimed. Tools Appl., Vol.80, pp.18479–18501, 2021.

[54] H. Yang, X. Xu, G. Jiang, R. Luo. “A Novel Multi-User Carrier Index Differential Chaos Shift Keying Modulation Scheme,” J. Circuits Syst. Comput., Vol.31, 2350009, 2022.

[55] P. Ding, X. Feng. “Generation of Multi-Scroll Chaotic Attractors from a Jerk Circuit with a Special Form of a Sine Function,” Electronics, Vol.9, no.842, 2020.

[56] D. Mathale, E. Goufo, M. Khumalo. “Coexistence of multi-scroll chaotic attractors for a three-dimensional quadratic autonomous fractional system with non-local and non-singular kernel,” Alex. Eng. J., Vol.60, pp.3521–3538, 2021.

[57] C.L. Li, S. Yu, X. Luo. “A ring-scroll Chua system,” Int. J. Bifurc. Chaos, Vol.23, 1350170, 2023.

[58] K. Altun. “Multi-Scroll Attractors with Hyperchaotic Behavior Using Fractional-Order Systems,” J. Circuits Syst. Comput., Vol.31, 2250085, 2022.

[59] E.Z. Serrano, J.M.M. Pacheco, F.E. Serrano, L.A.S. Gaspariano, C. Volos. “Experimental verification of the multi-scroll chaotic attractors synchronization in PWL arbitrary-order systems using direct coupling and passivity-based control,” Integr. VLSI J., Vol.81, pp.56–70, 2021.

[60] J. Suykens, J. Vandewalle. “Generation of n-double scrolls (n=1,2,3,4,...),” IEEE Trans. Circuits Syst.-I, Vol.40, pp.861–867, 1993.

[61] J. Deogirikar, and A. Vidhate. "Security Attacks inIoT: A Survey," International conference on I-SMAC (IoT in Social, Mobile, Analytics and Cloud), pp.32-37, 2017.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[62] M. I. Sobhy, and A.R. Shehata. "Methods of Attacking Chaotic Encryption and Countermeasures," IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No.01CH37221), pp.1001-1004, 2001.

[63] L. Chunxia, Y. Jie, X. Xiangchun, A. Limin, Q. Yan, F. Yongqing. "Research on the Multi-Scroll Chaos Generation Based on Jerk Mode," Procedia Engineering Vol.29, pp.957 – 961, 2012.

[64] O.E. Rossler. "An equation for hyperchaos," Physics, Vol.71, no.2-3, pp.155-157, 1979.

[65] Z. Gao, and C. Zhang. "A novel hyperchaotic system," J Jishou Univ (Natural Science Edition), Vol.32, pp.65–68, 2011.

[66] S. Vaidyanathan. "Qualitative analysis and control of an eleven-term novel 4-D hyperchaotic system with two quadratic nonlinearities," Int J Control Theory Appl, Vol.7, pp.35–47, 2014.

[67] T. Siriburanon, B. Srisuchinwong and T. Nontapradit. "Compound Structures of Six New Chaotic Attractors in a Solely-Single-Coefficient Jerk Model with Arctangent Nonlinearity," in Proc. of Chinese Control and Decision Conference (CCDC 2010), Xuzhou, China, pp.985-990, 26-28 May, 2010.

[68] B. Srisuchinwong, and C.H. Liou. "Improved Implementation of Sprott's Chaotic Oscillators Based on Current-Feedback Op Amps," ECTI-CON 2007.

[69] T. Sririburanon, B. Srisuchinwong, and T. Nontapradit. "Compound Structures of Six New Chaotic Attractors in a Solely-Single-Coefficient Jerk Model with Arctangent Nonlinearity," ICT, Chinese Control and Decision Conference, 2010.

[70] K.E. Chlouverakis, and J.C. Sportt. "Chaotic hyperjerk systems," Chaos, Solitons and Fractals, Vol.28, pp.739-746, 2006.

[71] Mujiarto, S. Vaidyanathan, S. Zhang, A. Sambas, Sukono, A.S. Praiwi, and Subiyanto, "A hyperchaotic hyperjerk system with four nonlinearities, its dynamical analysis and circuit realization," IOP Conf. Series, Materials Science and Eng., Vol.567, 2019.

[72] B. Bao, and X. Zou. "Generalized memory element and chaotic memory system," International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.23, no.8, 2013.

[73] E. Saising and P. Prommee, "Fully Tunable all-pass filter using OTA and its application," Proc. of 39th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP2016), Vienna, Austria, 27-29 June,

[74] W. Tao, H. Jianjun and Z. Yuhui, "Using Operational Transconductance Amplifiers for Chua's circuit," Proceedngs of IEEE TENCON, no.2, 2002

[75] K. Montree and D. Kobchai, "Voltage-Mode Low-pass, High-pass, Band-pass Biquad Filter Using Simple CMOS OTAs," International Instrumentation and Measurement Technology Conference Singapore, 5-7 May, 2009.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[76] พิพัฒน์ พรหมมี, “หลักการตัวกรองความถี่อนาลอก,” คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2553.

[77] P. Prommee, and T. Pattanatadapong, “Realization of Tunable Pole-Q Current-Mode OTA-C Universal Filter," Circuits, Systems, and Signal Processing, Vol. 29, No. 5, pp.913-924, October, 2010.

[78] Datasheet for Model transistor array 3127 and 3128, Online Available: https://www.intersil.com/content/dam/Intersil/documents/mm30/mm3046.pdf

[79] J.C. Sportt. “A PROPOSED STANDARD FOR THE PUBLICATION OF NEWCHAOTIC SYSTEMS,” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 21, No. 9, pp.2391–2394, 2011.

[80] K.E. Chlouverakis, J.C. Sprott. “A comparison of correlation and lyapunov dimensions,” Physica D, Vol.200, no.1–2, pp.156–64, 2005.

[81] C. Li, I. Pehlivan, J.C. Sportt, and A. Akgul. “A novel four-wing strange attractor born in bistability,” IEICE Electronic Express, Vol.12, no.4, pp.1-12, 2015.

[82] I. Pehlivan. “Four-scroll stellate new chaotic system,” OPTOELECTRONICS AND ADVANCED MATERIALS – RAPID COMMUNICATIONS Vol. 5, No. 9, p. 1003 – 1006, 2011.

[83] V.R. Folifack Signing, J. Kengne, L.K. Kana. “Dynamic analysis and multistability of a novel four-wing chaotic system with smooth piecewise quadratic nonlinearity,” Chaos, Solitons and Fractals, Vol.113, pp.263–274, 2018.

[84] A. Akgulb, I. Moroz, I Pehlivan, S. Vaidyanathan. “A new four-scroll chaotic attractor and its engineering applications,” Optik, Vol.127, pp.5491–5499, 2016.

[85] K. Karawanich and P. Prommee, "High-complex chaotic system based on new nonlinear function and OTA-based circuit realization,” Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 162, 112536, September 2022, (IF2021=9.922)

[86] K. Karawanich, M. Kumngern, J. Chimnoy, and P. Prommee, “A four-scroll chaotic generator based on two nonlinear functions and its telecommunications cryptography application,” AEU - International Journal of Electronics and Communications, Vol.157, 154439, pp.1-18, Dec. 2022. (IF2021=3.169)

[87] K. Karawanich, J. Chimnoy, F. Khateb, M. Marwan, P. Prommee, “Image cryptography communication using FPAA-based multi-scroll chaotic system,” Nonlinear Dyn, Vol.112, pp.4951-4976, March. 2024. (IF2023=5.6)

[88] P. Glendinning, C. Sparrow. “Shilnikov's saddle-node bifurcation,” Int J Bifurcation Chaos, Vol.6, no.6, pp.1153–60, 1996.

[89] H.W. Lorenz. “Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion,” 2nd Ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1993.

[90] K. Sun, “Chaotic Secure Communication”, De Gruyter, Berlin, Germany, 2016.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[91] J.C. Sprott. “Simplifications of the Lorenz attractor,” Nonlinear Dyn, Vol.13, no.3, pp.271–8, 2009.

[92] Y.A. Kuznetsov. “Elements of applied bifurcation theory,” New York: Springer-Verlag; 1995.

[93] J.M. Malasoma. “What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which isparity invariant?,” Phys Lett A, Vol.264, pp.383–9, 2000.

[94] N.A. Saeed, M.S. Mohamed, S.K. Elagan. “Periodic, Quasi-Periodic, and Chaotic Motions to Diagnose a Crack on a Horizontally Supported Nonlinear Rotor System,” Symmetry Vol. 12:2059, 2020.

[95] P. Holmes “POINCARE CELESTIAL MECHANICS, DYNAMICAL-SYSTEMS THEORY AND CHAOS,” PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters), Vol.193, no.3, pp.137-163, 1990.

[96] C. Li, J.C. Sprott, Z.Y. Yuan, H. Li. “Constructing chaotic systems with Total amplitude control,” Int. J. Bifurc. Chaos, Vol.25, no.10, ID:1530025, 2015.

[97] C. Li, Y. Jiang, X. Ma. “On offset boosting in chaotic system,” Chaos, Vol.3, no.2, pp.47–54 , 2021.

[98] L. Ying, D. Huang, Y.C. Lai. “Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices,” PHYSICAL REVIEW E, Vol.93, 062204, 2016.

[99] A.N. Pisarchik, R.J. Reátegui, C.R. Flores, J.H.G. Lópezc, G.H. Cuellar, F.J. Martín-Pasquín . “Secure chaotic communication based on extreme multistability,” Journal of the Franklin Institute, Vol.358, pp.2561-2575. 2021.

[100] P. Prommee, K. Dejhan. “An integrable electronic-controlled quadrature sinusoidal oscillator using CMOS operational transconductance amplifier,” International Journal of Electronics, Vol.89, no.5, 2002.

[101] Data sheet: LT1228–100 MHz Current Feedback Amplifier with DC Gain Control, Linear Technology Corporation, 2012. Online Available: http://www.linear.com /product/LT1228.

[102] Datasheet: LF347-4MHz WIDE Bandwidth Quad J-FET operational amplifers. Online Available: http://alldatasheet.com/datasheetpdf/view/ 11651/MOTOROLA/LF347.html.

[103] L.P. Huesman. “Active and passive analog filter design: an introduction,” International edition; June 30, 1993.

[104] Datasheet: 54HC4066 rad-hard quad bilateral switch. Available online. STMicroelectronics. https://datasheetspdf.com/datasheet/54HC4066.html.

[105] R. Caponetto, A.D. Mauro, L. Fortuna, M. Frasca. “Field programmable analog array to implement a programmable Chua’s circuit,” Int. J. Bifurc. Chaos, Vol.15, no.5, pp.1829–1836, 2005.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[106] AN231E04 Datasheet Rev 1.5. Online Available Anadigm; 2007. https://www.anadigm.com/_doc/UM231004-K002.pdf

[107] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yourke. “Controlling Chaos,” Phys. Rev. Lett., Vol.64, no.1196, 1990.

[108] T.L. Carroll and L.M. Pecora. “Synchronizing Chaotic Circuits,” IEEE trans. on Circuits and sys., Vol.38, no.4, 1991.

[109] K.M. Coumo, A.V. Oppenheim and S.H. Strogatz. “Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications,” IEEE trans. on Cir. and Sys.-II, Analog and Digital signal processing, vol.40, no.10, 1993.

[110] B. Santo. “Chaos synchronization and cryptography for secure communications,” New York, Hershey, 2010.

[111] T. Yang. “A survey of chaotic secure communication systems,” Int J Compt Cognit, Vol.2, pp.81–130. 2004.

[112] Image *Barbara* Online Available https://www.hlevkin.com/hlevkin/06testimages.htm

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก ก

โปรแกรมที่ใช้ในการจำลองผลเชิงตัวเลขสำหรับ MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก๑

ในภาคผนวก ก๑ คือ โปรแกรมคำนวณเลขชี้กำลัง Lyapunov โดยจะแบ่งออกเป็นสี่ส่วน คือ

1. ส่วนอัลกอริทึม Wolf
2. ส่วนโครงสร้างสมการเมทริกซ์จาโคเบียน
3. ส่วนแสดงผลเลขชี้กำลัง Lyapunov
4. ส่วนแสดงผลสเปกตรัม Lyapunov

ในส่วนที่ 1 และ 2 จำเป็นต้องใช้คู่กันเพื่อแสดงผลสำหรับส่วนที่ 3 และ 4 แสดงรายละเอียดโปรแกรมดังต่อไปนี้

อัลกอริทึมเลขชี้กำลัง Lyapunov ของ Wolf

```
   function
[Texp,Lexp]=lyapunov(n,rhs_ext_fcn,fcn_integrator,tstart,stept,tend,ystart,i
outp);
   %
   %    Lyapunov exponent calcullation for ODE-system.
   %
   %    The alogrithm employed in this m-file for determining Lyapunov
   %    exponents was proposed in
   %
   %        A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano,
   %        "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," Physica D,
   %        Vol. 16, pp. 285-317, 1985.
   %
   %    For integrating ODE system can be used any MATLAB ODE-suite methods.
   % This function is a part of MATDS program - toolbox for dynamical system
investigation
   %    See:    http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/
   %
   %    Input parameters:
   %      n - number of equation
   %      rhs_ext_fcn - handle of function with right hand side of extended
ODE-system.
   %              This function must include RHS of ODE-system coupled with
   %              variational equation (n items of linearized systems, see
Example).
   %      fcn_integrator - handle of ODE integrator function, for example:
@ode45
   %      tstart - start values of independent value (time t)
   %      stept - step on t-variable for Gram-Schmidt renormalization
procedure.
   %      tend - finish value of time
   %      ystart - start point of trajectory of ODE system.
   %      ioutp - step of print to MATLAB main window. ioutp==0 - no print,
   %              if ioutp>0 then each ioutp-th point will be print.
   %
   %    Output parameters:
   %      Texp - time values
   %      Lexp - Lyapunov exponents to each time value.
   %
   %    Users have to write their own ODE functions for their specified
   %    systems and use handle of this function as rhs_ext_fcn - parameter.
   %
   %    Then, the variational equation has a form:
   %
   %    F = J*Y
   %    where Y is a square matrix with the same dimension as J.
   %    Corresponding m-file:
   %
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%         f(4:12)=Jac*Y;
%
%    Run Lyapunov exponent calculation:
%
%    [T,Res]=lyapunov(3,@lorenz_ext,@ode45,0,0.5,200,[0 1 0],10);
%
% ------------------------------------------------------------------------
% Copyright (C) 2004, Govorukhin V.N.
% This file is intended for use with MATLAB and was produced for MATDS-
program
% http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/
% lyapunov.m is free software. lyapunov.m is distributed in the hope that
it
% will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY.
%
%       n=number of nonlinear odes
%       n2=n*(n+1)=total number of odes
%
n1=n; n2=n1*(n1+1);
%  Number of steps
nit = round((tend-tstart)/stept);
% Memory allocation
y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y;
gsc=cum; znorm=cum;
% Initial values
y(1:n)=ystart(:);
for i=1:n1 y((n1+1)*i)=1.0; end;
t=tstart;
% Main loop
for ITERLYAP=1:nit
% Solutuion of extended ODE system
  [T,Y] = feval(fcn_integrator,rhs_ext_fcn,[t t+stept],y);
  t=t+stept;
  y=Y(size(Y,1),:);
  for i=1:n1
      for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i); end;
  end;
%
%       construct new orthonormal basis by gram-schmidt
%
  znorm(1)=0.0;
  for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end;
  znorm(1)=sqrt(znorm(1));
  for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1); end;
  for j=2:n1
      for k=1:(j-1)
          gsc(k)=0.0;
          for l=1:n1 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k); end;
      end;
      for k=1:n1
          for l=1:(j-1)
              y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);
          end;
      end;
      znorm(j)=0.0;
      for k=1:n1 znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2; end;
      znorm(j)=sqrt(znorm(j));
      for k=1:n1 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j); end;
  end;
%
%       update running vector magnitudes
%
  for k=1:n1 cum(k)=cum(k)+log(znorm(k)); end;
%
%       normalize exponent
%
  for k=1:n1
      lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    end;
  % Output modification
    if ITERLYAP==1
       Lexp=lp;
       Texp=t;
    else
       Lexp=[Lexp; lp];
       Texp=[Texp; t];
    end;
    if (mod(ITERLYAP,ioutp)==0)
       fprintf('t=%6.4f',t);
       for k=1:n1 fprintf(' %10.6f',lp(k)); end;
       fprintf('\n');
    end;
    for i=1:n1
        for j=1:n1
            y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
        end;
    end;
  end;
```

โครงสร้างสมการเมทริกซ์จาโคเบียน

```
function f=JACO_ext(t,X)

% Values of parameters

global k A B

x=X(1); y=X(2); z=X(3);

Y= [X(4), X(7), X(10);
    X(5), X(8), X(11);
    X(6), X(9), X(12)];

f=zeros(9,1);

%Jerk equation

f(1)=y+A*y/2.*(-((tanh(100*y+50/B)).*(tanh(100*y-50/B)))+1);
f(2)=z;
f(3)=-k*z-y-(A*x/2.*(-((tanh(100*x+50/B)).*(tanh(100*x-50/B)))+1));

%Linearized system

     Jac=[ 0,  1-0.5*A*(y.*((m*sech(m*y+n/B).^2).*tanh(m*y-n/B)+(m*sech(m*y-
n/B).^2).*tanh(m*y+n/B))+....
         tanh(m*y+n/B).*tanh(m*y-n/B)),    0;
        0,    0,    1;
         0.5*A*(x.*((m*sech(m*x+n/B).^2).*tanh(m*x-n/B)+(m*sech(m*x-
n/B).^2).*tanh(m*x+n/B))+....
         tanh(m*x+n/B).*tanh(m*x-n/B)) ,     -1, -k];

%Variational equation
f(4:12)=Jac*Y;
%Output data must be a column vector
```

ส่วนแสดงผลเลขชี้กำลัง Lyapunov

```
clc
clear

global k A B

A=1.2;
B=2.2;
k=0.4;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
[T,Res]=lyapunov(3,@JACO_ext,@ode45,0,0.01,10000,[0.1 0.1 0.01],10);

Figure;

plot(T,Res,'linewidth',2);

hold on;
grid on
```

ส่วนแสดงผลสเปกตรัม Lyapunov

```
clc;
clear;

global k A B

B=2.2;
A=1.2;

K=0.2:0.005:1.6;
L=length(K);
ly=zeros(3,L);
for i=1:L
k=K(i);
[T,Res]=lyapunov(3,@JACO_ext,@ode45,0,0.6,1000,[0.1 0.1 0.01],10);
ly(:,i)=Res(end,:);
%tspan average 0:0.5:500
End

figure(1);
plot(K,ly,'r');
hold on;
plot(xlim,[0,0],'r--');
```

วิธีใช้ ให้สร้าง Folder สำหรับวิเคราะห์เลขชี้กำลัง Lyapunov โดยเฉพาะ โดยนำโปรแกรมทั้ง 4 ส่วน ไว้ใน Folder เดียวกัน จากนั้น Copy โปรแกรมลงใน Notepad และเปลี่ยนนามสกุลเป็น .m ตั้งชื่อไฟล์ Notepad ให้ตรงกับชื่อฟังก์ชันในโปรแกรม เช่น ในส่วนที่ 1 ต้องตั้งชื่อว่า Lyapunov.m ส่วนที่ 2 ตั้งชื่อว่า JACO_ext.m จากนั้นใช้ส่วนที่ 3 และ 4 ในการ Run บนโปรแกรม MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก๒

ในภาคผนวก ก๒ คือ โปรแกรมแสดงผลสัญญาณเคออสจากแบบจำลอง โดยแสดงลักษณะตัวดึงดูดบน Phase portraits โปรแกรมจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนหลัก คือ

1. ส่วนโครงสร้างสมการอนุพันธ์
2. ส่วนแสดงผล phase portrait

โดยส่วนที่ 1 และ 2 จำเป็นต้องใช้คู่กัน แสดงรายละเอียดโปรแกรมดังนี้

<u>โปรแกรมส่วนโครงสร้างสมการอนุพันธ์</u>

```
function f=Soliton_ext(t,y)

%Y(1)=x ,Y(2)=y ,Y(3)=z

global k A B

a=A*(y(2))/2.*(-((tanh(100*(y(2))+50/B).*(tanh(100*(y(2))-50/B)))+1);
b=A*(y(1))/2.*(-((tanh(100*(y(1))+50/B).*(tanh(100*(y(1))-50/B)))+1);

f=zeros(3,1);

f(1)=(y(2))+a;
f(2)=(y(3));
f(3)=-k*(y(3))-(y(2))-b;
```

<u>โปรแกรมส่วนแสดงผล phase portrait</u>

```
clc
clear
global k A B

k=0.4;
A=1.2;
B=2.2;

[T,Y]=ode45(@Soliton_ext,0:0.01:1000,[.1 .1 .01]);

figure(2);
%plot(T(1000:end),(Y(1000:end,1)),'b')
plot(Y(1000:end,1),(Y(1000:end,3)),'b')
%plot3(Y(1000:end,1),Y(1000:end,2),Y(1000:end,3),'b')
```

<u>วิธีใช้</u> ให้สร้าง Folder สำหรับแสดงผล phase portrait โดยนำโปรแกรมทั้ง 2 ส่วนไว้ใน Folder เดียวกัน ตั้งชื่อไฟล์ Notepad ให้ตรงกับชื่อฟังก์ชันในโปรแกรม เช่น ในส่วนที่ 1 ต้องตั้งชื่อว่า Soliton_ext.m ส่วนที่ 2 ตั้งชื่อว่าอะไรก็ได้ โดยใช้ส่วนที่ 2 ในการ Run บนโปรแกรม MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก๓

ในภาคผนวก ก๓ คือ โปรแกรมแสดงแผนภาพทดสอบ 0-1 (0-1 test chart) มีรายละเอียดโปรแกรมดังนี้

<u>โปรแกรมแสดงผล 0-1 test chart</u>

```
clc
clear

global k A B

k=0.43;
A=1.2;
B=2.2;

[T,Y]=ode45(@Soliton_ext,0:0.01:85000,[0.1 0.1 0.1]);
xt=Y(10000:end,1);
n=length(xt)-5;
n=floor(n/15);
th=zeros(1,n+1);
p=th;
s=p;
o=p;
m=p;
for i=2:n+1
th(i)=c+th(i-1)+xt(i);%
end
for i=2:n+1
p(i)=p(i-1)+xt(i)*cos(th(i));
end
for i=2:n+1
s(i)=s(i-1)+xt(i)*sin(th(i));
end
plot(p,s,'r')
xlabel('p')
ylabel('s')
```

<u>วิธีใช้</u> ใช้ร่วมกับโปรแกรมส่วนที่ 1 ในภาคผนวก ก๒ ที่เป็นส่วนสมการอนุพันธ์ โดยใช้โปรแกรมด้านบน ในการ Run บน MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก๔

ในภาคผนวก ก๔ คือ โปรแกรมแสดงผลแผนภาพ Poincare แสดงรายละเอียดโปรแกรม ดังนี้

<u>โปรแกรมแผนภาพ Poincare</u>

```
clc
clear

global c M N

M=1.2;
N=2.2;
c=0.45;

[t,Y]=ode45(@Soliton_ext,0:0.01:2000,[0.1 0.1 0.01]);
A=3; % z
B=2; % y
D=1; % x
m=0.0005; %value of the section
n=length(Y);
for k=1:n-1
if (Y(k,A)>m&&Y(k+1,A)<m)||(Y(k,A)<m&&Y(k+1,A)>m)
%choose a plane on z axis
a=(Y(k+1,A)-Y(k,A))/(t(k+1)-t(k));
% the chosen plane
b=(Y(k,A)*t(k+1)-Y(k+1,A)*t(k))/(t(k+1)-t(k));
% t=0, Intercept of z line (coordinates)
c=(Y(k+1,B)-Y(k,B))/(t(k+1)-t(k));
% slope of y line
d=(Y(k,B)*t(k+1)-Y(k+1,B)*t(k))/(t(k+1)-t(k));
% t=0 Intercept of y line (coordinates)
e=(Y(k+1,D)-Y(k,D))/(t(k+1)-t(k));
% slope of x line
f=(Y(k,D)*t(k+1)-Y(k+1,D)*t(k))/(t(k+1)-t(k));
% t=0 Intercept of x line (coordinates)x
g=(m-b)/a; % z=10, the time needed
q=e*g+f; % z=10, the value of x
p=c*g+d; % z=10, the value of y plot(q,p);

figure(2);
plot(q,p,'r.','markersize',8);

hold on;
end
end
```

<u>วิธีใช้</u> ใช้ร่วมกับโปรแกรมส่วนที่ 1 ในภาคผนวก ก๒ ที่เป็นส่วนสมการอนุพันธ์ โดยใช้โปรแกรมด้านบน ในการ Run บน MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก๕

ในภาคผนวก ก๕ คือ โปรแกรมแผนภาพ Bifurcation แสดงรายละเอียดโปรแกรม ดังนี้

<u>โปรแกรมแผนภาพ Bifurcation</u>

```
clc
clear

global k A B

%k=0.45; %k
A=0.2; %A
B=2.2; %B


K=0:0.008:2;

L=length(K);
for i=1:L
k=K(i);
[T,Y]=ode45(@Soliton_ext,0:0.01:1000,[-0.1 0.1 0.01]);
data=Y(10000:end,1);
    for j=2:(length(data)-1)
        if data(j)>data(j-1)&&data(j)>data(j+1)
            plot(k,data(j),'r.','markersize',3.5);
            hold on;
            if j==30
            break;
            end
        end
    end
end

figure(1);
xlabel('\itD')
ylabel('\itxmax')
```

<u>วิธีใช้</u> ใช้ร่วมกับโปรแกรมส่วนที่ 1 ในภาคผนวก ก๒ ที่เป็นส่วนสมการอนุพันธ์ โดยใช้โปรแกรมด้านบน ในการ Run บน MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก๖

ในภาคผนวก ก๖ คือ โปรแกรมสำหรับแสดงผล Basin of attraction แสดงรายละเอียดโปรแกรม ดังนี้

โปรแกรมแสดงผล Basin of attraction

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  %%% Code for Basins of Attraction %%%
  %%% Dr. Muhammad Marwan & %%%
       %%% Anda Xiang %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
M=51; % previous step
 N=50000; % Next step
 % In the next step please change M to 51 and N to your desired point. For
 % example M=51; N=100
 % Dont close figure window, so that your previous data and new data both
 % can be printed

 A= 1.9;
 B= 2.35;
 k= 0.94;

x_min = -0.3;
x_max = 0.3;
y_min = -0.3;
y_max = 0.3;

E2=[0.269737842,-0.048139728,0.039979884];  %m
E1=[-0.269544879,7.07E-06,2.60E-07];  %g  zz=0.1 A=1.9; B=2.35; k=0.94;

dd=0.08; % distance
zz=0.1; % cutting z-axis on a point
tic
parfor i = M:N % Also use parfor instead of for loop for fast calculation
like parfor i=M:N,
    a0(i) = rand(1)*(x_max-x_min)+x_min;
    b0(i) = rand(1)*(y_max-y_min)+y_min;
    f = @(t,x) [x(2);x(3);-k*x(3)-x(2)-A*(x(1))*0.5*(-
(tanh(100*x(1)+50/B)*tanh(100*x(1)-50/B))+1)];
    %f = @(t,x) [x(2); a*x(3);-k-b*x(2)-c*x(3)+x(1)-x(1)*abs(x(1))];
    %f=@(t,x) is your chaotic system. Here for example, we have above
system%
t_final=100;
options = odeset('RelTol',1e-7,'AbsTol',[1e-7 1e-7 1e-7]);
[t,x]=ode45(f,[0,t_final],[a0(i),b0(i),zz],options);
    xf(i) = x(end,1);
    yf(i) = x(end,2);
    dist_xf_cm = sqrt((E1(1)-xf(i))^2);
    dist_yf_cm = sqrt((E1(2)-yf(i))^2);
    %---------------------------------%
       dist_xf_cm2 = sqrt((E2(1)-xf(i))^2);
       dist_yf_cm2 = sqrt((E2(2)-yf(i))^2);
% %     %---------------------------------%
%       dist_xf_cm3 = sqrt((E3(1)-xf(i))^2);
%       dist_yf_cm3 = sqrt((E3(2)-yf(i))^2);
%     %---------------------------------%
%      dist_xf_cm4 = sqrt((E4(1)-xf(i))^2);
%       dist_yf_cm4 = sqrt((E4(2)-yf(i))^2);
% %     %---------------------------------%
%       dist_xf_cm5 = sqrt((E5(1)-xf(i))^2);
%       dist_yf_cm5 = sqrt((E5(2)-yf(i))^2);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    %-----------------------------------%
    if  dist_xf_cm <dd  && dist_yf_cm <dd
        basin(i) = 1;
      else if dist_xf_cm2 <dd  && dist_yf_cm2 <dd
          basin1(i) = 1;
%       else if dist_xf_cm3 <dd  && dist_yf_cm3 <dd
%           basin2(i) = 1;
%            else if dist_xf_cm4 <dd  && dist_yf_cm4 <dd
%           basin3(i) = 1;
%       else if dist_xf_cm5 <dd  && dist_yf_cm5 <dd
%           basin4(i) = 1;
    else

         basin(i) = 0;
           basin1(i) = 0;
%           basin2(i) = 0;
%           basin3(i) = 0;
%           basin4(i) = 0;


     end
%      end
%      end
%      end
    end
    %-------------------------------------%
 end
toc
x0_basin = a0(logical(basin));
y0_basin = b0(logical(basin));
%---------------------%
 x01_basin = a0(logical(basin1));
 y01_basin = b0(logical(basin1));
%---------------------%
% x02_basin = a0(logical(basin2));
% y02_basin = b0(logical(basin2));
% %---------------------%
% x03_basin = a0(logical(basin3));
%  y03_basin = b0(logical(basin3));
%  %---------------------%
%    x04_basin = a0(logical(basin4));
%    y04_basin = b0(logical(basin4));
% %---------------------%
figure(25);

plot(x0_basin,y0_basin,'.',...
    'MarkerEdgeColor','g',...
    'MarkerFaceColor','g',...
    'MarkerSize',5')
hold on
   plot(x01_basin,y01_basin,'.',...
       'MarkerEdgeColor','m',...
       'MarkerFaceColor','m',...
       'MarkerSize',5')
  hold on

set(gca,'color','y')
```

โปรแกรม Basin of attraction เป็นลิขสิทธิ์ของ Dr.Muhammad Marwan และ Dr.Anda Xiang โดยผู้เขียนนำมาเผยแพร่ไว้ในวิทยานิพนธ์ เพื่อเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่านที่กำลังศึกษาเกี่ยวกับระบบเคออสอย่างจริงจัง โดยหวังว่าจะนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุดเพื่อพัฒนางานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข

ผลงานที่ได้รับการตีพิมพ์ระหว่างการศึกษา

1. **K. Karawanich** and P. Prommee, "High-complex chaotic system based on new nonlinear function and OTA-based circuit realization," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 162, 112536, September **2022**, (IF2021=9.922)
2. **K. Karawanich**, M. Kumngern, J. Chimnoy, and P. Prommee, "A four-scroll chaotic generator based on two nonlinear functions and its telecommunications cryptography application," AEU - International Journal of Electronics and Communications, Vol.157, 154439, pp.1-18, Dec. **2022**. (IF2021=3.169)
3. **K. Karawanich**, J. Chimnoy, F. Khateb, M. Marwan, P. Prommee, "Image cryptography communication using FPAA-based multi-scroll chaotic system," Nonlinear Dyn, Vol.112, pp.4951-4976, March. **2024.** (IF2023=5.6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chaos, Solitons and Fractals 162 (2022) 112536

Contents lists available at ScienceDirect

Chaos, Solitons and Fractals

journal homepage: www.elsevier.com/locate/chaos

High-complex chaotic system based on new nonlinear function and OTA-based circuit realization

Khunanon Karawanich, Pipat Prommee *

Department of Telecommunications Engineering, School of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

ARTICLE INFO

Keywords:
New nonlinear
Complex dynamic system
Jerk model
Kaplan-Yorke
Electronically-controlled chaotic circuits

ABSTRACT

This research proposes a chaotic system using a new modified rectangular nonlinear function based on the principle of the third-order jerk concept. The dynamic behaviors can be realized by manipulating only one parameter from periodic, non-periodic, single-scroll, and double-scroll attractors. The proposed chaotic system can achieve relatively high-complexity chaotic behavior, as evident in the comparatively high Kaplan-Yorke dimension ($D_{KY} = 2.43$) with the existing jerk systems. The performances of the proposed chaotic system are also computed and simulated through the MATLAB numerical analysis, including scenarios of bifurcations branches, Lyapunov exponents, route to chaos, phase portraits, 0–1 test charts, and Poincaré map. The proposed system analyzes the coexistence of asymmetric or symmetric attractors confirmed with basins of attraction to highlight the presence of multiple attractors, which influence initial conditions. In addition, the system's offset boosting and amplitude control are included. Furthermore, a double-scroll attractor and a four-scroll attractor can also be achieved by placing nonlinear functions at different positions in the third-order system., The circuits of the proposed chaotic systems can be conveniently realized using commercially available operational transconductance amplifiers (OTAs) and capacitors. The performances of the circuit are also proven through the experimental results compared with the numerical results. The experimental results exhibit the ease of construction based on the new nonlinear function and are suitable for applying in the data encryptions.

1. Introduction

The relationship between the atmospheric heat convection and weather patterns was first discovered in 1963 and subsequently named the Lorenz model. The model consists of seven coefficients in three-dimensional (3D) nonlinear quadratic equation [1]. In 1976, the Rössler model, a 3D ordinary differential equation (ODE) with seven coefficients in nonlinear quadratic equation, was used to generate the right-hand side attractor [2]. In 1985, Chua's nonlinear diode-based chaotic oscillator was.

proposed to generate double-scroll attractor [3,4]. In [5–8], the 3D chaotic systems with multiple coefficients and nonlinear terms were developed to generate the chaotic signal.

The 3D chaotic system based on the third-order system (jerk model) was later proposed to generate the chaotic signal. The advantages of the third-order system-based chaotic system include fewer coefficients and versatility (i.e., applicable to various nonlinear functions). Besides, the circuit can simply be realized without the multiplier function [9]. The jerk equation can be written in the third-order differentiation of mechanical displacement as

$$\dddot{x} = F(\ddot{x}, \dot{x}, x) \tag{1}$$

where x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ and $\dddot{x}$ are the displacement position, velocity, acceleration, and jerk, respectively. The third-order system also comprises a coefficient (k) and a nonlinear function ($G(x)$). The third-order differential equation can thus be expressed as

$$\dddot{x} = -k\ddot{x} - \dot{x} + G(x) \tag{2}$$

The third-order system is commonly adopted in the design and development of a chaotic system because of its straightforwardness. In [10,11], a simple autonomous chaotic oscillator prototype was constructed by using operational amplifiers (OA). To achieve the chaotic behavior, $G(x)$ could take the form of the following nonlinear functions, given the specific coefficients (k), as shown in Table 1 [12,13].

More recently, the nonlinear functions based on the third-order system (Eq.(2)) have been increasingly adopted in the chaotic systems.

* Corresponding author.
E mail address: pipat.pr@kmitl.ac.th (P. Prommee).

https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112536
Received 14 May 2022; Received in revised form 2 August 2022; Accepted 3 August 2022
Available online 17 August 2022
0960-0779/© 2022 Elsevier Ltd. All rights reserved.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 1
Example some chaotic jerk systems indicated Lyapunov exponents (*LEs*), Kaplan-Yorke Dimension (D_{KY}) and initial conditions (x_0, y_0, z_0).

Reference	Third-order ODE jerk systems	Initial conditions (x_0, y_0, z_0)	*LEs*	D_{KY}
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.6z - y + \lvert x\rvert - 2;$	(−1, −1, 1)	(0.043626, 0, −0.644702)	2.07
[12]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -1z - y + (3sin(x) - x);$	(0, 1, 0)	(0.110073, 0, −1.110093)	2.09
[12]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -1z - y + (6tan^{-1}(x) - 2x);$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.115681, 0, −0.915642)	2.12
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.6z - y + (-6max(x, 0) + 0.5);$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.085, 0, −0.583728)	2.14
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.5z - y + (-x + sign(x));$	(0, 1, 0)	(0.152, 0, −0.652)	2.23
[9]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.6z - y + (x - 0.3sign(x));$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.166648, 0, −0.666884)	2.25
[13]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.24z - y + (-x + 4sinh(x));$	(0.1, 0.1, 0.1)	(0.110274, 0, −0.351230)	2.31
[12]	$\dot{x} = y,$ $\dot{y} = z,$ $\dot{z} = -0.19z - y + (-x + 2tanh(x));$	(0, 1, 0)	(0.128, 0, −0.318)	2.40

Specifically, the circuits based on the third-order system with modified signum function were realized using OA [14] and current-feedback operational amplifiers (CFOA) [15]. However, these circuits encounter certain drawbacks, including non-orthogonal tunability, excessive passive elements.

High-complexity chaotic systems are normally adopted for high-security digital encryption in modern communications. In [16–18], the high-complexity chaotic systems were realized based on the multiple dimensions proportional to the order of state equation, such as the hyperchaotic systems. Besides, the strange attractor can also indicate the system's complexity. The Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}) of an attractor quantifies its complexity in geometrical terms [19,20]. The Kaplan-Yorke dimension can be calculated from obtaining the values of all the system's Lyapunov exponent (*LE*) [21]. This is one that we use to concentrate on quantifying the complexity of the system in this work. In addition, the complex and various behavior dynamics of newly designed chaotic systems are needed to investigate. This paper also uses the multistability phenomena to prove the complex dynamics of chaotic system [22–25]. This behavior provides two or more coexisting solutions (periodic, non-periodic, or chaotic attractors) with the same set of parameters while the initial conditions are different. The characteristic of multistability indicates the sensitivity to initial conditions of system [26,27]. This unique characteristic can sometimes be investigated and justified by the symmetry property of the model, parallel of bifurcation branches, and the basins of attraction. This feature is thus essential when dealing with coexisting attractors in nonlinear systems.

Specifically, this research proposes a new modified rectangular function integrated with the third-order system to realize the high-performance chaotic system. The proposed chaotic system can generate attractors by varying three coefficients while requiring no multipliers. Numerical results are also carried out by using MATLAB. The performance of the proposed chaotic system is verified by the stability analysis, Lyapunov exponent (*LE*), Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}), scenarios of bifurcation branches, and 0–1 test charts, Poincaré map. Analysis of the coexistence of asymmetric or symmetric attractors confirm with basins of attraction are included. Besides, the chaotic circuits can be readily realized using operational transconductance amplifiers OTAs (LT1228), and capacitors. Finally, the experimental results are validated compared with the simulation results through the circuit realization.

2. The system description and basic properties of the proposed chaotic system

2.1. New rectangular nonlinear function

The nonlinear function suitable for the typical chaotic system is either piecewise linear function or nonlinear quadratic function. In this research, the nonlinear function is of piecewise linear type, i.e., the modified rectangular function, which is an amalgamation between a linear function and a rectangular function, as shown in Fig. 1(a)-(c). Besides, the gain (A) and boundary ($1/2B$) of the modified rectangular function ($G(x)$) can be independently manipulated, as shown in Fig. 2. Both parameters (A and B) are the coefficients of the proposed chaotic systems in subsequent sections.

In this research, for ease of the numerical analysis of the chaotic system, an approximating function is used in place of the modified rectangular function ($G(x)$). Specifically, the modified rectangular function ($G(x)$) is transformed into trigonometric form (i.e., the approximating function $sign \approx tanh(mx)$), whereas m is a slope of boundary constant ($m = 100$) [28,29]. The rectangular function can thus be replaced by the tanh(mx), as shown in Fig. 3.

From Fig. 3, the amplitude and the boundary ($1/2B$) of the rectangular function are given at 0.5 and ± 0.5, respectively. The approximating of the rectangular function of Fig. 1(c) can be rewritten as

$$G(x) = Ax\mathrm{Rect}(Bx) \approx \frac{Ax}{2}\cdot(-(tanh(m(x+1/2B))\cdot tanh(m(x-1/2B)))+1) \tag{3}$$

The example of approximating the function of (3) with different m is shown in Fig. 4(a). In this work, the acceptable parameter $m = 100$ is utilized for further analyses. The modified rectangular and approximating functions are compatible, as shown in Fig. 4(b).

2.2. Chaotic systems based on the third-order system

As seen in Eq. (2), the chaotic system based on the conventional jerk model is of 3D state equation, consisting the coefficient k and the nonlinear function ($G(x)$). The advantage of the conventional jerk model lies in the ease of chaotic signal generation through manipulation of k, given a nonlinear function, such as modified *sign*(x), tanh(x) [12].

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

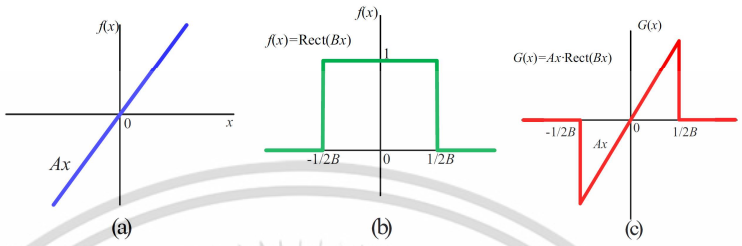


Fig. 1. (a) Linear function, (b) rectangular function, (c) modified rectangular function.

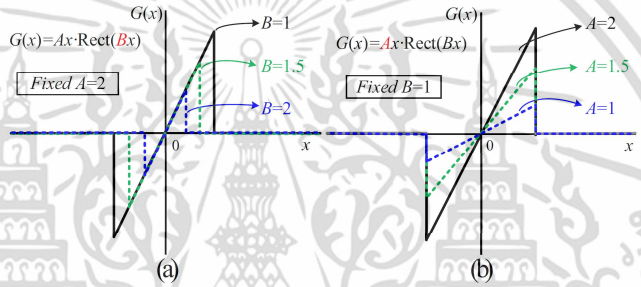


Fig. 2. Modified rectangular function under varying parametric values: (a) variable B given $A = 2$, (b) variable A given $B = 1$.

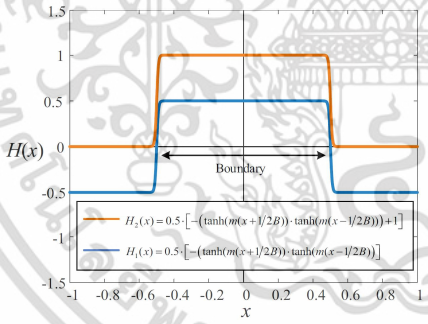


Fig. 3. The identity of approximating functions for the rectangular function.

Alternatively, the conventional jerk model can be rewritten shown as in Fig. 5.

In Fig. 5(a), the block diagram in the red dash-line rectangular box, which functions as a normalized biquad low-pass filter ($\omega_0 = 1$), can be replaced by a lossy and a lossless integrator with negative feedback. Fig. 5(b) illustrates the block diagram of the proposed chaotic system, which is realized by incorporating the negative biquad low-pass filter and the modified rectangular function (Fig. 1). The ODE of the proposed chaotic systems is expressed in Eq. (4).

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x); \end{cases} \tag{4}$$

where $G(x) = Ax\text{Rect}(Bx) \approx \frac{Ax}{2}(-(\tanh(m(x+1/2B))\cdot\tanh(m(x-1/2B)))+1)$, all coefficients (A, B, k) are positive integer, and $m = 100$.

2.3. Symmetry property

The proposed chaotic system (4) is invariant under the transformation: $(x, y, z) \Leftrightarrow (-x, -y, z)$. In fixed point $E_0(0, 0, 0)$, the complete attractor in phase space has symmetry by inversion with respect to the origin. Otherwise, pairs of incomplete attractors might be generated that is symmetrical with the complete attractor. Besides, the existence of an asymmetric attractor is made possible by some model parameters. For in-depth complex dynamics, the symmetry and non-symmetry with the coexisting attractors in phase space are numerically analyzed by bifurcation, computation of phase portraits, and basins of attraction.

2.4. Dissipative and existence of attractors

A preliminary analysis of the existence of attractors in the system can be examined by evaluating the rate of volume contraction (or expansion) in the state space [30]. The volume contraction rate of a continuous-time dynamical system described by $v = (x, y, z)^T$, $\dot{v} = F(v)$ and $F(v) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$. Thus, the divergence of the system (4) can be easily derived as follows:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

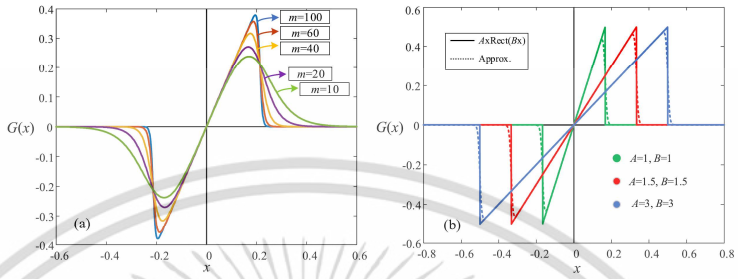


Fig. 4. (a) The characteristic of approximating functions with varying m (b)The compatibility between the original modified rectangular and approximating functions for $m = 100$ with varying A and B.

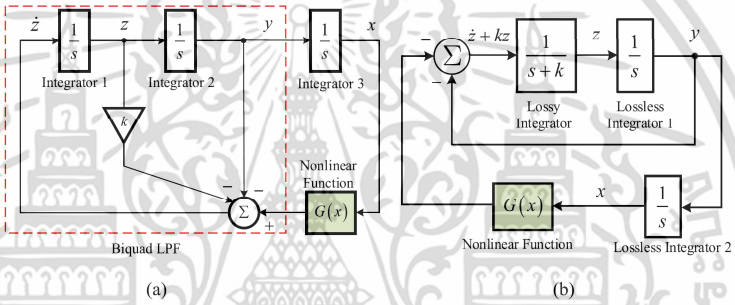


Fig. 5. The chaotic system based on the jerk model (a) conventional version (b) modified version.

$$\Lambda = \nabla \cdot F(v) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

$$\Lambda = \nabla \cdot F(v) = \frac{\partial (y)}{\partial x} + \frac{\partial (z)}{\partial y} + \frac{\partial \left[-kz - y - \left\{ \frac{Ax}{2} \cdot \left(-\left(tanh\left(mx + \frac{m}{2B} \right) \cdot tanh\left(mx - \frac{m}{2B} \right) \right) + 1 \right) \right\} \right]}{\partial z}$$

$$\Lambda = \nabla \cdot F(v) = -k < 0. \tag{5}$$

Eq. (5) indicates that the divergence parameter is always negative for any position (x, y, z) in phase space. Consequently, system (4) is dissipative (convergent) and can generate attractors [31,32].

2.5. Fixed point and stability analysis

The first study of the system's dynamics analyzes the possible states of equilibrium and their stability. Note that the equilibriums constitute the most straightforward cases of steady state; thus, it is possible to detect the existence of other more complicated dynamic properties [32–34]. The calculated eigenvalues can determine the stability of the dynamic system by assuming the system is in the equilibrium state. The equilibrium points of the proposed chaotic system (4) are obtained by solving:

$$\begin{cases} f_1 = y = 0 \\ f_2 = z = 0 \\ f_3 = -kz - y - G(x) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Given (x, y, z) = (0,0,0) and $f_n = 0$, the proposed chaotic system has the origin equilibrium point is E_0(0, 0, 0). The rest equilibrium points are assumed $E_1 = (x_{E1}, 0, 0)$ and $E_2 = (x_{E2}, 0, 0)$ where x_{E1} and x_{E2} are the non-zero fixed point solutions of Eq. (7):

$$G(x) = \frac{Ax}{2} \cdot \left(-\left(tanh(m(x + 1/2B)) \cdot tanh(m(x - 1/2B)) \right) + 1 \right) \tag{7}$$

where $A = 1.5$, $B = 2.35$, and $m = 100$. Given $G(x) = 0$, $(mx + m/2B) = \alpha$, and $(mx\text{-}m/2B) = \beta$, the rest equilibrium points can be calculated by

$$0 = -\left(tanh(\alpha) \cdot tanh(\beta) \right) + 1 \tag{8}$$

Hence, the parameters $(\alpha, \beta) >> 1$ and $(\alpha, \beta) << 1$ then the $G(x) = 0$. The parameters $(\alpha, \beta) = \pm 3$ are given, two solutions of the equilibrium points are E_1(0.638297871,0,0) and E_2(−0.638297871,0,0). Note that E_1 and E_2 is symmetric with respect to the origin, which is advantage to identify the stability range.

The stability properties of system are investigated from the equilibrium points, firstly the dynamic system is then linearized by using the Jacobian matrix [35–37] in Eq. (9).

$$J_E(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{9}$$

The Jacobian matrix of the proposed chaotic system is expressed in Eq. (10).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J_E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(u(x)) & -1 & -k \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{10}$$

where

$$u(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial x} = -0.5A\cdot\left[\begin{array}{l} x\left(msech^2\left(mx+\frac{m}{2B}\right)\cdot tanh\left(mx-\frac{m}{2B}\right)+msech^2\left(mx-\frac{m}{2B}\right)\cdot tanh\left(mx+\frac{m}{2B}\right)\right) \\ +tanh\left(mx+\frac{m}{2B}\right)\cdot tanh\left(mx-\frac{m}{2B}\right) \end{array}\right]$$

and given $A = 1.5$, $B = 2.35$, $k = 0.4$ with $m = 100$.

Given the coefficients mentioned earlier, the eigenvalue of the proposed chaotic system can be found by solving the Jacobian matrix in Eq. (9). The equilibrium point at $E_0(0,0,0)$ of the Jacobian matrix (Eq. (9)) for the proposed chaotic system can be rewritten as:

$$J_{E_0(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(0.75) & -1 & -0.4 \end{pmatrix} \tag{11}$$

For the rest equilibrium points $E_{1,2} \cong (\pm 0.64,0,0)$, the Jacobian matrix (Eq. (9)) can be rewritten as:

$$J_{E_{1,2}(\pm 0.64,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(-0.75) & -1 & -0.4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

In Eqs. (11)–(12), the characteristic equation $F(\lambda)$ can be derived by using the linear algebra theorem [38] $F(\lambda) = \det(J_E - \lambda I) = 0$, where λ is an eigenvalue, and I is an identity matrix.

$$\begin{aligned} F(\lambda)_{E_0} &= det\left(J_{E_0} - \lambda I\right) \\ &= \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(0.75) & -1 & -0.4 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \\ F(\lambda)_{E_0} = 0 &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -(0.75) & -1 & -0.4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 0.4\lambda^2 + \lambda + 0.75 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} F(\lambda)_{E_{1,2}} &= det\left(J_{E_{1,2}} - \lambda I\right) \\ &= \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(-0.75) & -1 & -0.4 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \\ F(\lambda)_{E_{1,2}} = 0 &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -(-0.75) & -1 & -0.4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 0.4\lambda^2 + \lambda - 0.75 \end{aligned} \tag{14}$$

The eigenvalues of the proposed chaotic system at E_0 and $E_{1,2}$ are listed in Table 2, following the Shilnikov theorem [39], given $\lambda_1 = q$ and $\lambda_{2,3} = p + i\omega$ where $qp < 0$ and $\omega \neq 0$. The eigenvalues of the proposed chaotic system comply with the Shilnikov theorem because the characteristic equation consists of one real eigenvalue and a pair of complex conjugate eigenvalues, given $|q| > |p|$. Besides, $F(\lambda)$ at the equilibrium point E is of the stable saddle-focus type of index 2 [32–34]. As a result, the behavior of the proposed system is of a chaotic type.

Table 3 shows a set of eigenvalues to complement and support the above analyzes by varying k in the range $0.2 \leq k \leq 2$ with $A = 1.5$ and $B = 2.35$. In origin equilibrium point E_0 (0,0,0), the eigenvalues (λ_i) are compiled to Shilnikov's theorem ($qp < 0$ and $\omega \neq 0$), which are unstable under the condition $0.2 < k < 2$. However, this system has the rest equilibrium point $E_{1,2}$ ($\pm 0.64,0,0$), eigenvalues (λ_i) are compiled to Shilnikov's theorem ($qp < 0$ and $\omega \neq 0$), which are unstable under the condition $0.2 < k < 0.5$. Therefore, it is evident that the system (4) can generate self-excited attractors within the condition $0.2 < k < 0.5$ [40–44].

2.6. Lyapunov exponent and Kaplan-Yorke dimension

The Lyapunov exponents (*LE*) rely on the exponentially divergent or convergent behavior of neighboring trajectories in the phase space. In other words, the *LE* is a quantitative description of mutual repulsion and attraction between trajectories [45]. There exist many methods to calculate the *LE*, and the Lyapunov exponents are commonly used to prove whether or not a system is chaotic [46].

In this research, the *LE* is calculated using Wolf's algorithm in

Table 2
Tabulates the dynamic properties of the proposed chaotic system by given $A = 1.5$, $B = 2.35$ and $k = 0.4$, initial condition (0.1, 0.1, 0.1).

Dynamic properties	The proposed chaotic system
Eigenvalue at the origin $E_0(0,0,0)$	$\lambda_1 = 0.511$ $\lambda_{2,3} = -0.455 \pm 1.121i$
Eigenvalue at the two fixed points $E_{1,2}(\pm 0.64,0,0)$	$\lambda_1 = -0.647$ $\lambda_{2,3} = 0.123 \pm 1.069i$
Type of index	Index 2 (Stable saddle-focus)
Lyapunov exponents	$LE_1 = 0.318522$ $LE_2 = -0.018625$ $LE_3 = -0.699897$
Kaplan-Yorke dimension (D_{KY})	$2 + \frac{0.318522 - 0.018625}{\lvert -0.699897\rvert} = 2.43$

Table 3
Eigenvalues and stability of fixed point computed for some discrete values of the control parameter k with $A = 1.5$, $B = 2.35$.

Value of parameter k	Eigenvalues at the origin E_0 (0, 0, 0)	Eigenvalues at non-zero fixed points $E_{1,2} \cong (\pm 0.64, 0, 0)$
$k = 2$	$\lambda_1 = 0.388$ $\lambda_{2,3} = -1.194 \pm 0.7086i$ *(Unstable)*	$\lambda_1 = -1.670$ $\lambda_{2,3} = -0.165 \pm 0.649i$ *(stable)*
$k = 1.4$	$\lambda_1 = 0.423$ $\lambda_{2,3} = -0.912 \pm 0.969i$ *(Unstable)*	$\lambda_1 = -1.108$ $\lambda_{2,3} = -0.146 \pm 0.809i$ *(stable)*
$k = 0.8$	$\lambda_1 = 0.469$ $\lambda_{2,3} = -0.635 \pm 1.092i$ *(Unstable)*	$\lambda_1 = -0.768$ $\lambda_{2,3} = -0.015 \pm 0.987i$ *(stable)*
$k = 0.5$	$\lambda_1 = 0.5$ $\lambda_{2,3} = -0.5 \pm 1.118i$ *(Unstable)*	$\lambda_1 = -0.672$ $\lambda_{2,3} = 0.086 \pm 1.053i$ *(Unstable)*
$k = 0.4$	$\lambda_1 = 0.511$ $\lambda_{2,3} = -0.455 \pm 1.121i$ *(Unstable)*	$\lambda_1 = -0.647$ $\lambda_{2,3} = 0.123 \pm 1.069i$ *(Unstable)*
$k = 0.2$	$\lambda_1 = 0.537$ $\lambda_{2,3} = -0.368 \pm 1.122i$ *(Unstable)*	$\lambda_1 = -0.603$ $\lambda_{2,3} = 0.202 \pm 1.097i$ *(Unstable)*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

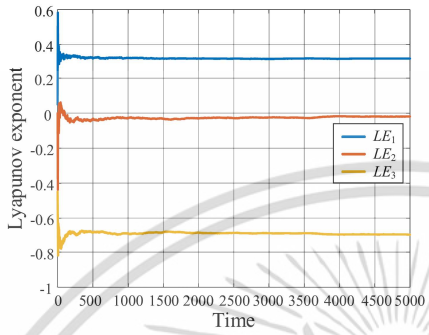


Fig. 6. Lyapunov exponents of the proposed chaotic system.

MATLAB [47], given $A = 1.5$, $B = 2.35$, and $k = 0.4$. The LE of the proposed chaotic system is calculated based on the initial conditions (x_0, y_0, z_0). Fig. 6 and Table 2 show the first, second, and third LE (LE_1, LE_2, LE_3) time series of the proposed chaotic system ($\Delta t = 0.001$). To achieve the chaotic behavior, LE_1 must be positive, while the sum of LE ($LE_1 + LE_2 + LE_3$) must be negative. The chaotic behavior becomes increasingly unpredictable as LE_1 becomes more positive and $LE_1 + LE_2 + LE_3$ more negative.

The complexity of chaos signal is the key determinant of the performance of chaotic system. Specifically, the higher the complexity of chaos signal (i.e., attractor), the higher the performance. The complexity of attractor is determined by the Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}) based on Lyapunov exponents [34].

$$D_{KY} = j + \frac{1}{|L_{j+1}|}\sum_{i=1}^{j} L_i \tag{15}$$

where j is the largest integer satisfying $\sum_{i=1}^{j} L_i \geq 0$ and $L_{j+1} < 0$ given $j \leq D_{KY} < j+1$. The Kaplan-Yorke dimensions (D_{KY}) of the proposed chaotic system is 2.43. Subsequent sections verify the complexity of the chaotic system based on attractors and waveforms.

2.7. Other chaotic systems based on the modified original system

In addition, the new nonlinear function rectangular function can be applied in different positions of the jerk system. Therefore, the different attractors can be obtained as the new chaotic systems. In this work, two different chaotic systems (systems #A and #B) are achieved by applying the new nonlinear rectangular function at y-dimension and xy-dimension [48], as shown in Fig. 7(a)-(b). The different chaotic systems #A and #B can be expressed as Eqs. (16)–(17), respectively.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - x; \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y + G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x); \end{cases} \tag{17}$$

where $G(x) = A\text{xRect}(Bx) \approx \frac{Ax}{2}\cdot\left(-\left(tanh\left(mx + \frac{n}{B}\right)\cdot tanh\left(mx - \frac{n}{B}\right)\right) + 1\right)$ and $G(y) = A\text{yRect}(By) \approx \frac{Ay}{2}\cdot\left(-\left(tanh\left(my + \frac{n}{B}\right)\cdot tanh\left(my - \frac{n}{B}\right)\right) + 1\right)$.

In order to realize the chaotic behavior, the nominal coefficients of the different chaotic systems are given as follows: $A = 1.7$, $B = 2.35$, $k = 0.7$ (chaotic system #A), and $A = 1.2$, $B = 2.2$, $k = 0.45$ (chaotic system #B). The numerical results regarding the dynamic system properties of chaotic systems #A and #B are listed in Table 4. Thus, the D_{KY} of the chaotic system in Table 4 indicates that chaotic system #B is the most complex due to the combination of two nonlinear functions [49].

3. Numerical analysis of the proposed system

This section concerns the numerical studies on the proposed chaotic

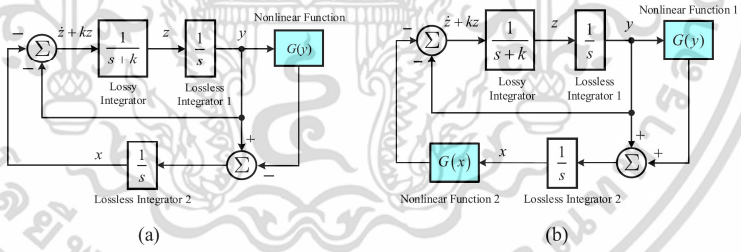


Fig. 7. Block diagrams of the different chaotic systems (a) system #A (b) The system #B.

Table 4
Dynamic properties of chaotic systems #A and #B.

Dynamic properties	Chaotic system #A	Chaotic system #B
Eigenvalue at the origin $E(0,0,0)$	$\lambda_1 = -2.691$ $\lambda_{2,3} = 0.995 \pm 2.316i$	$\lambda_1 = -5.942$ $\lambda_{2,3} = 2.746 \pm 5.108i$
Type of index	Index 2 (Stable saddle-focus)	Index 2 (Stable saddle-focus)
Lyapunov exponents	$LE_1 = 0.248395$ $LE_2 = -0.018395$ $LE_3 = -0.929970$	$LE_1 = 0.809254$ $LE_2 = -0.071406$ $LE_3 = -1.132508$
Kaplan-Yorke dimension (D_{KY})	$2 + \frac{0.248395 - 0.018425}{\lvert -0.929970\rvert} = 2.25$	$2 + \frac{0.809254 - 0.071406}{\lvert -1.132508\rvert} = 2.65$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

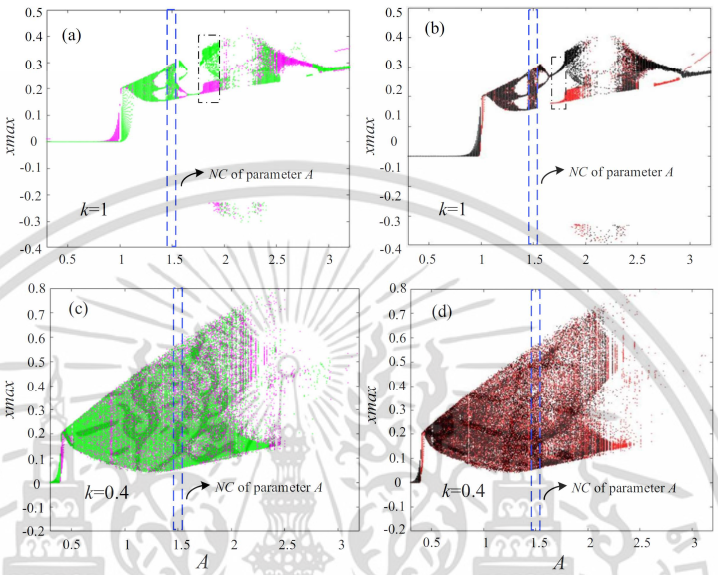


Fig. 8. Bifurcation diagrams of local maxima of the coordinate x versus parameter A computed with $B = 2.35$ for two different values of parameter k ($k = 0.4, 1$). (a) Magenta and green colors starting with initial condition ($\pm 0.1, 0.1, 0.1$) (b) red and black colors starting with initial condition ($\pm 0.2, \mp 0.2, 0.1$), respectively. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

system (4). The system's complex behaviors are investigated using the Runge-Kutta algorithm based on MATLAB. The routes to chaos are displayed from monitoring parameters along with initial conditions (using the bifurcation and Lyapunov spectrum). These results indicate that A, B, and k influence their dynamical behaviors, such as limit cycle, stable point, and period-doubling beyond the non-periodic [50,51]. Multistability or occurrence of the multiple coexisting attractors [22–25] in the proposed system is also studied. The results of the several chaotic behaviors of the system are shown in nonlinear graphics analysis tools such as phase portraits and basin of attraction. The proposed system's amplitude control and offset boosting features are also presented [52–54].

3.1. Bifurcation analysis and scenario of chaos

The bifurcation diagram represents an appropriate tool to visualize various scenarios of chaos in the system as a control parameter is varied, in each bifurcation diagram consists of the local maxima of the state variable x (x_{max}) plotted against the control parameter. These diagrams are produced by performing upward sweeping. The first study is verified by monitoring for parameter A. Fig. 8 provides a bifurcation diagram of parameter A in range 0.3–3.2, and fixed-parameter $B = 2.35$ and vary A, with different parameters k (i.e., $k = 0.4, 1$) and different initial conditions. Fig. 8(a-b) defines parameter $k = 1$, and Fig. 8(c-d) defines parameter $k = 0.4$. In Fig. 8(a) and (c), two different of initial conditions are displayed in magenta and green colors ($(x_0, y_0, z_0) = (\pm 0.1, 0.1, 0.1)$). In Fig. 8(b) and (d), two different of initial conditions are displayed in red and black colour ($(x_0, y_0, z_0) = (\pm 0.2, 0.2, 0.1)$). It is apparent that for $k = 1$, coexisting symmetric behaviors can be found in the range 1.52 to 1.89, and for $k = 1$ and $k = 0.4$ the coexisting asymmetric behaviors can be found in the range from 1.9 onwards. Besides, the regular chaotic behaviors are included in the other range. The superimposed chaotic behavior is found around $A = 1.4$ (nominal coefficient: NC of this work). The main bifurcation diagram of parameter A is shown again, corresponding with the Lyapunov spectrum in Fig. 9.

Fig. 9 shows the wide variety of dynamical behaviors under parameter A by using the following conditions, $k = 0.4$ and $B = 2.35$, and varying the parameter A within the range 0.3–2.5. The bifurcation diagram and the corresponding Lyapunov spectra are illustrated in Fig. 9 (a) and (b). The following behaviors can be found along the varying parameter A, the limit cycle ($A = 0.41$), the period-2 cycle ($A = 0.465$), the non-periodic ($A = 0.47$ and $A = 0.61$), and the system becomes chaotic ($0.62 < A < 2.4$). The Lyapunov spectrum LE_1 (blue line) is evidenced by a positive sign corresponding with the bifurcation counterpart. Note that the coexisting asymmetric attractor appeared at $1.9 < A < 2.4$.

Fig. 10 shows the influence of parameter B by using the following conditions, $k = 0.4$ and $A = 1.4$, and varying the parameter B within the range 0–20. From Fig. 10(a), the bifurcation scenario and symmetry behavior are investigated according to the different colors (initial conditions), yellow (0.1, 0.1, 0.1), cyan (0.1, −0.1, 0.1), and magenta (−0.1, 0.1, −0.1), respectively. Parameter B has small influences on the dynamics behavior but affects the amplitude of the chaotic signal. The bifurcation for magenta in Fig. 10(a) displayed the chaotic phase behavior corresponding with Lyapunov spectra in Fig. 10(b). The chaotic behavior begins at $B = 9$ backward, evidenced by positive LE_1 (blue line). Therefore, this work chooses $B = 2.35$ for NC, providing acceptable chaotic phase behavior for different initial conditions.

The complex behavior regarding parameter k is necessary to confirm the applicable NC and study more complex behaviors. The different values of parameter A (i.e., $A = 1$, 1.4, 1.5, and 2) with two different initial conditions (± 0.1, 0.1, 0.1) are used in the scenarios. Each

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

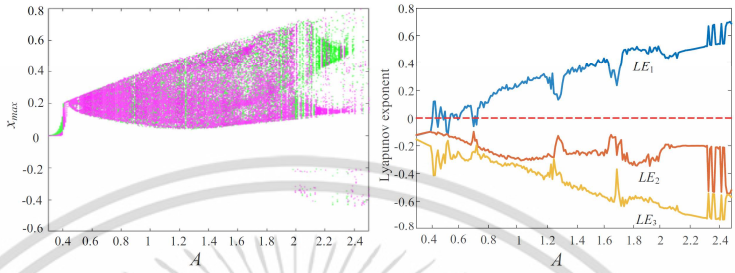


Fig. 9. (a) The bifurcation of the proposed system for parameter A by define $k = 0.4$ and $B = 2.35$, with the initial condition (0.1, 0.1, 0.1) magenta, and (0.1, −0.1, 0.1) green, (b) Lyapunov spectrum. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

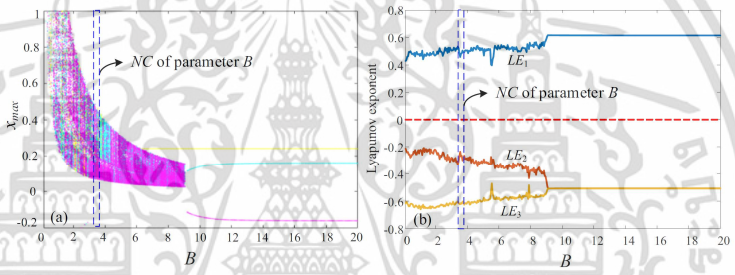


Fig. 10. (a) The bifurcation of the proposed system for parameter B by define $k = 0.4$ and $A = 1.4$, with the initial condition (−0.1, 0.1, −0.1) magenta, (0.1, −0.1, 0.1) cyan and (0.1, 0.1, 0.1) yellow, (b) Lyapunov spectrum. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

bifurcation diagram consists of local maxima of the state variable x (x_{max}) plotted against the control parameter of $0.2 < k < 2$. Meanwhile, the regular, symmetric, and asymmetric attractors can be found in different scenarios while varying the parameter k. Fig. 11(a) notice that the system has a not quite wide behavioral dynamics range for $A = 1$. In Fig. 11(b), the system has a relatively complete overlay of bifurcation, and the system quite had wide dynamic behavior for regular attractor for $A = 1.4$. In Fig. 11(c), the system generates the symmetric behaviors for $A = 1.5$ by the period-doubling bifurcations appeared at $k = 1.4$ and $k = 1.5$ based on the different initial conditions (0.1, 0.1, 0.1) and (−0.1, 0.1, 0.1) which are represented in blue and red bifurcation colors, respectively. For $k \leq 1.5$ (The route to chaos), the system has provided several dynamic phenomena scrupulously described in the next section (see Section 3.2). In Fig. 11(d), the partially bifurcation overlaps are observed, and some periods of bifurcation are disappeared. As a result, the system occurs with the coexisting asymmetric attractor for $A = 2$. From the scenarios of bifurcation parameter k, the period for always chaotic behavior without affecting other parameters and initial conditions be in the range of about 0.25 to 0.4. Thus, in this work choose NC of parameter k is 0.4.

3.2. Route to chaos

In Section 3.2, the main results of the route to chaos can be obtained by varying k from 0.2 to 1.6 (given $A = 1.5$ and $B = 2.35$) with two initial conditions (±0.1, 0.1, 0.1). From Fig. 11(c), the bifurcation is redrawn into Fig. 12(a) and discusses the behaviors along the range $0.2 < k < 1.6$. The corresponding Lyapunov spectrum is shown in Fig. 12(b). The various phase portraits for the x-z and z-y planes of the proposed chaotic system are illustrated in Fig. 13 compared to the bifurcation in Fig. 12 (a). The limit cycle, period-2, period-4, and non-periodic phase portraits are illustrated in Fig. 13(a)-(d) by decreasing parameter k. The first limit cycle appears at $k = 1.5$, as shown in Fig. 13(a). The period-2, period-4 and non-periodic are found at $k = 1.38$, $k = 1.28$, and $k = 1.1$ as shown in Fig. 13(b), (c) and (d), respectively. Two symmetric single scroll attractors are found at $k = 0.88$ and $k = 0.65$, as shown in Fig. 13(e) and (f). For $k = 0.4$, the double-scroll attractor and corresponding waveform at x dimension is shown in Fig. 13(g) and (h), respectively. From these studies' coefficients and intervals of the proposed chaotic system are tabulated in Table 5.

The dynamic behaviors in this table illustrates for bifurcation and Lyapunov in Figs. 9, 10 and 12.

As a result, the initial conditions affect the dynamic behaviors. All attractors, including limit cycles, period, non-periodic, and/or strange

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

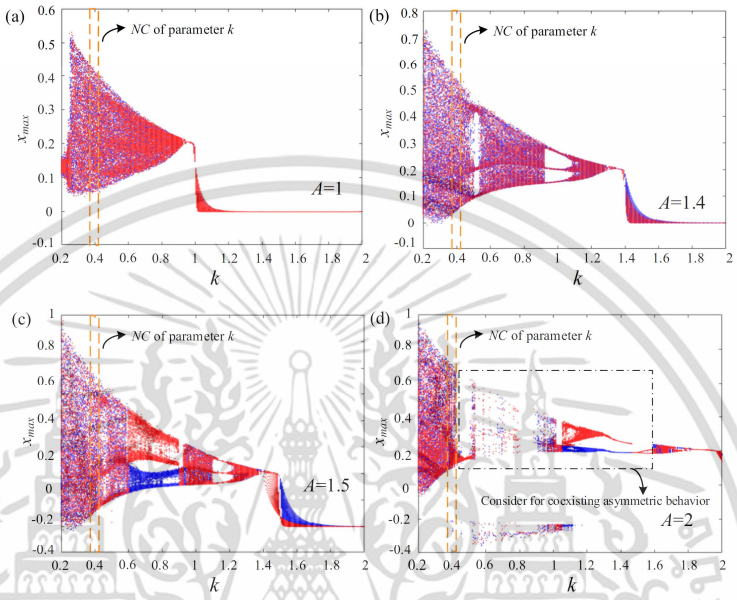


Fig. 11. Bifurcation diagrams of local maxima (x_{max}) of the coordinate x versus parameter k computed with $B = 2.35$ with two initial conditions (± 0.1, 0.1, 0.1) for (a) $A = 1$ (b) $A = 1.4$ (c) $A = 1.5$ (d) $A = 2$.

attractors, are surrounded by a basin of attraction representing the set of initial conditions in the state space whose orbits approach and map out the attractor as the time approaches infinity [55,56]. Fig. 14 shows the coexisting symmetric attractor using the basin of attraction of Fig. 13(f) based on $k = 0.65$, $A = 1.5$, and $B = 2.35$ to confirm the influence of initial conditions (0.1, $\pm$0.1, 0.1). The results are agreeable with the phase portrait in Fig. 13(f).

Fig. 15 illustrates the translation components plots of the proposed chaotic systems' 0–1 test chart by varying k and given the nominal coefficients ($A = 1.5$, $B = 2.35$). The results show the unbounded trajectory similar to the Brownian motion. The 0–1 test chart is respectively shown the period motion (Fig. 15(a)), non-periodic motion (Fig. 15(b)) and Brownian motion (Fig. 15(c)) by varying $k = 1.5$, 1.2 and 0.4. Fig. 16(c) indicates that the behavior of the proposed system is chaotic [57,58]. The proposed chaotic system's nominal coefficients (NC) are as follows: $k = 0.4$, $A = 1.5$, and $B = 2.35$, presented as an interesting attractor on x-z, x-y, y-z and 3D planes in Fig. 16(a)-(c).

The Poincaré map of the proposed system is calculated with the trajectory 3D phase space, as shown in Fig. 17(a). The multitude of points (Poincaré map) observed on the cross-section of the phase space trajectory is depicted in Fig. 17(b) [59].

3.3. The coexisting asymmetric dynamics study

Multistability or the occurrence of multiple coexisting attractors [22–25] for the same values of parameters is an essential property found in nonlinear dynamical systems from variety fields of science and engineering. The analysis of system (4) reveals the multistability results from the presence of parallel bifurcation branches. Considering coexistence behaviors are difficult to judiciously explained, then it is interesting to investigate by the basins of attraction of various competing attractors for study more information about the stability of an orbit with respect to initial conditions [26,27]. This section reports the occurrence of multiple coexisting attractors for the asymmetric dynamics compared to the corresponding bifurcation.

To investigate the coexisting asymmetric attractors of the system, the bifurcation Fig. 11(d) with the varying of k in range $0.2 \leq k \leq 2$ is redrawn as shown in Fig. 18. The bifurcation describes the asymmetric dynamic behaviors which classified by green and magenta colors by different initial conditions (−0.15, 0.1, 0.1) and (0.15, 0.1, 0.1), respectively.

Considering the parameter k in Fig. 18, the system can observe asymmetric behaviors with different initial conditions for (0.15, 0.1, 0.1) magenta and (−0.15, 0.1, 0.1) green. Fig. 19 (a)-(c) demonstrates five asymmetric coexisting attractors by decreasing parameter k in the range $0.2 \leq k \leq 2$, including period-1 cycle, mono-scroll attractor coexisting with period-8 cycle, chaotic attractor coexisting with period-1 cycles, chaotic like attractor coexisting with single-scroll attractor, period-1 cycle coexisting with chaotic attractor, respectively. Fig. 19(f)-(g) shows two similarly different directions of chaotic attractors coexisting with single-scroll attractors. Finally, two strange attractors are found in Fig. 19(h). As a result, the proposed system (same conditions)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

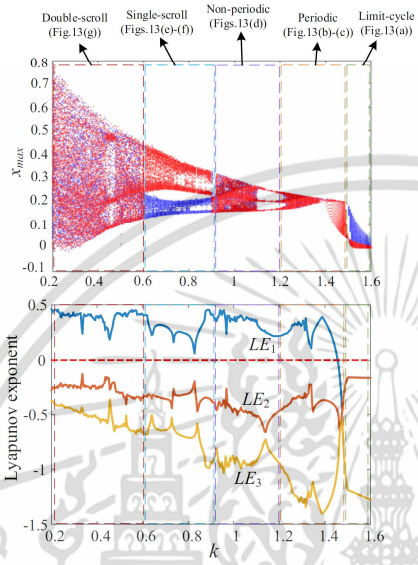


Fig. 12. Route to chaos of the proposed chaotic system for the varying of k ($0.2 \geq k \geq 1.6$ and given $A = 1.5$, $B = 2.35$) (a) Bifurcation diagram showing local maximum coordinate x (x_{max}) (b) Lyapunov exponents (LE).

can produce multiple coexisting attractors by changing the initial conditions. The dynamic behavior of initial conditions has been confirmed by the basin of attraction on x_0-y_0 planes. Fig. 19 (f) and (g) are plotted as examples indicating the coexistence of single-scroll attractor coexisting chaotic attractor by the attractor's colors corresponding with the colors of the basin of attraction in Fig. 20 and Fig. 21, respectively. The yellow zone of basins is related to unbounded dynamics, the occurrence of multiple attractors represents an additional source of randomness, and obvious potential applications include chaos-based secure communication and random signal generation [60,61].

3.4. Amplitude control and offset boosting

3.4.1. Amplitude control

The amplitude control of chaotic signals is essential for engineering applications since appropriate amplitude must be obtained for signal processing. However, amplitude control in the state variables of a dynamical system is not always possible. In the proposed system, the attractor's size can be adjusted. This feature is handy in practical applications. Once a chaotic system is designed, an additional linear transformation is usually necessary to obtain the desired attractor size so that the amplitude does not exceed the limitation of the circuit elements. Due to the broadband nature of chaotic signals, the linear amplifier is challenging to design. Moreover, the amplitude control through the several parameters or coefficients in the system must not disturb the chaotic generator's condition. To demonstrate the effectiveness of total amplitude control in the system (4), applying the following parameters, $x = \alpha \cdot x_A$, $y = \alpha \cdot y_A$ and $z = \alpha \cdot z_A$, we obtain new Eq. (18) in variables x_A, y_A, and z_A, as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = y_A, \\ \dot{y}_A = z_A, \\ \dot{z}_A = -kz_A - y_A - G(x_A); \end{cases} \tag{18}$$

The following modified rectangular function $G(x)$:

$$G(x_A) = Ax_A \mathrm{Rect}(Bx_A) \approx \frac{Ax_A}{2} \cdot \left(- \left(tanhm\left(x_A + \frac{1}{2B} \right) \cdot tanhm\left(x_A - \frac{1}{2B} \right) \right) + 1 \right).$$

By monitoring the value of α, it is possible to simultaneously modify the amplitude of all state variables shown in Fig. 22. The system adjusted the amplitude for $\alpha = 1$, $\alpha = 1.5$, and $\alpha = 2$ corresponding to the green, blue and red colors of attractors, respectively.

3.4.2. Offset boosting system

The offset boosting is such an essential issue in the chaotic system since it gives a direct way for an engineer to transform a bipolar chaotic signal into a unipolar signal suitable for practical signal processing. The offset variable of chaotic systems belongs to a new dynamical system category. For the attractor in phase space, amplitude control typically involves offset boosting. Offset boosting means that the attractor is moved in phase space in any direction, indicating that the corresponding variable's signal is shifted accordingly. In a differential equation, a simple substitution of $x_i \rightarrow x_i + c$ shifts the signal x_i to the right/left-hand side by the constant parameter c; hence, it looks straightforward in the mathematical view. In the proposed system (4), the state variable x appears the possible to control the corresponding signal without affecting others. State variable x is offset-boosted by changing x into $x + b_x$, where b_x denotes a constant. Then, the system (4) is rewritten as:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x + \beta_x); \end{cases} \tag{19}$$

For adjusting the offset-boosting of the chaotic attractor, the system can be controlled by parameter β_x. As a result, chaotic signal output state x can be shifted from a bipolar signal to a unipolar signal, as illustrated in Fig. 23.

3.5. Some numerical results of additional chaotic systems

Considering the chaotic system #A with Eq. (16) with modified rectangular function on y-dimension ($A = 1.7$, $B = 2.35$, $k = 0.7$), and the initial condition (x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1), the double-scroll attractor on x-z, x-y, z-y and 3D planes are illustrated in Fig. 24(a). The chaotic system #B are incorporated two nonlinear functions in two dimensions of the third-order system, resulting in period-doubling cascade and four-scroll attractors [62–65]. Using Eq. (17) with two identical modified rectangular functions on x- and y-dimensions ($A = 1.2$, $B = 2.2$, $k = 0.45$), and initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$. Specifically, in this research, multi-scroll attractors can be generated. The chaotic behavior is transformed from single-scroll to double-scroll and four-scroll attractors by varying k. The four-scroll attractor on x-z, x-y, z-y, and 3D planes are illustrated in Fig. 24(b). From these studies, the coefficients and intervals of the chaotic systems #A and #B are tabulated in Table 6.

4. Circuit realization of the chaotic systems

This section concerns the design and realization of the proposed chaotic generator based on OTA. In modern analog integrated circuit design, the current-mode circuit's performance is considerably better than voltage-mode circuits such as low-voltage, wide-bandwidth, and compact structures. The operational transconductance amplifier (OTA) is a preferable commercial current-mode active device that can control

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

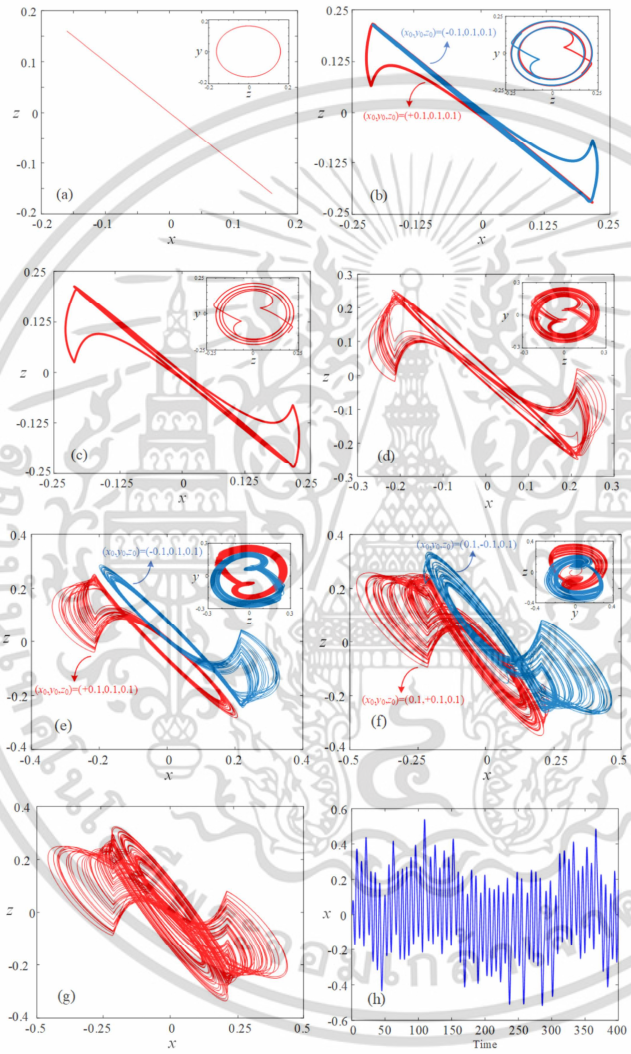


Fig. 13. Transition of phase portraits of the proposed chaotic system (given $A = 1.5$, $B = 2.35$ with nominal initial condition (0.1, 0.1, 0.1), red and blue colors represent the different initial conditions (a) limit cycle for $k = 1.5$, (b) period-2 for $k = 1.38$, (c) period-4 for $k = 1.28$, (d) non-periodic for $k = 1.1$, (e) single-scroll for $k = 0.88$, (f) single-scroll for $k = 0.65$ and (g) double-scroll for $k = 0.4$ (h) output waveform. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 5
The dynamics of the proposed chaotic system under variable k, A and B.

Coefficient	Interval	Dynamics
k	[1.6, 1.5]	Limit cycle
	[1.49, 1.21]	Periodic
	[1.2, 0.91]	non-periodic
	[0.9, 0.6]	Single-scroll attractor
	[0.59, 0.2]	Double-scroll attractor
A	[0.3, 0.49]	Limit cycle
	[0.5, 0.81]	Periodic
	[0.82, 1]	non-periodic
	[1.1, 2.4]	Double-scroll attractor
B	[20, 9.1]	No boundaries
	[9, 0.1]	Double-scroll attractor

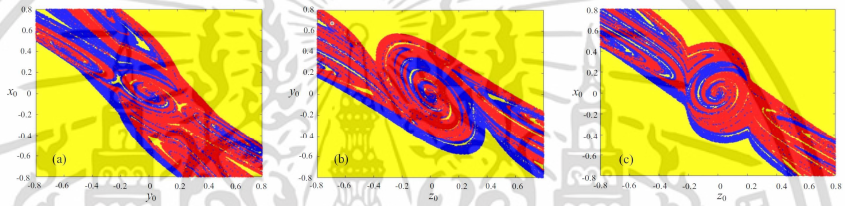


Fig. 14. The basin of attraction of the proposed system (4) with $k = 0.65$, $A = 1.5$, and $B = 2.35$, where the regions colored by red and blue represent the pair single-scroll chaotic attractors, yellow zone relate to unbounded dynamics. (a) the x_0–y_0 plane, (b) the y_0–z_0 plane. (c) the x_0–z_0 plane. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

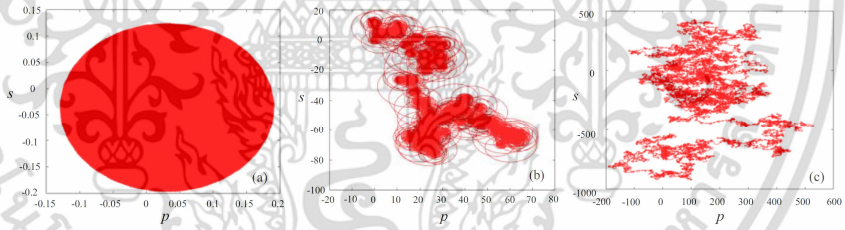


Fig. 15. The (p, s) plot of the 0–1 test chart of the proposed chaotic system for coefficients $A = 1.5$, $B = 2.35$ (a) Period motion for $k = 1.5$, (b) non-periodic motion for $k = 1.2$, (c) Brownian motion for $k = 0.4$.

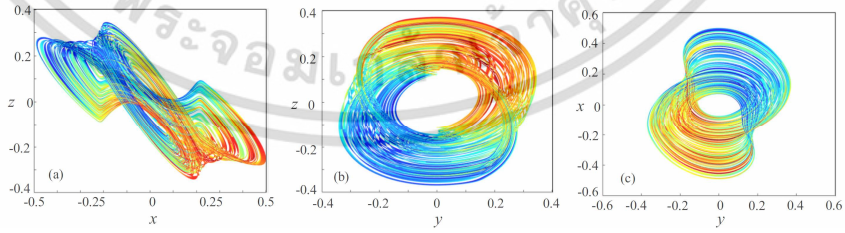


Fig. 16. The attractors of the proposed chaotic system by given $A = 1.5$, $B = 2.35$ and $k = 0.4$, with the initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ (a) x-z plane, (b) y-z plane, (c) y-x plane,.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

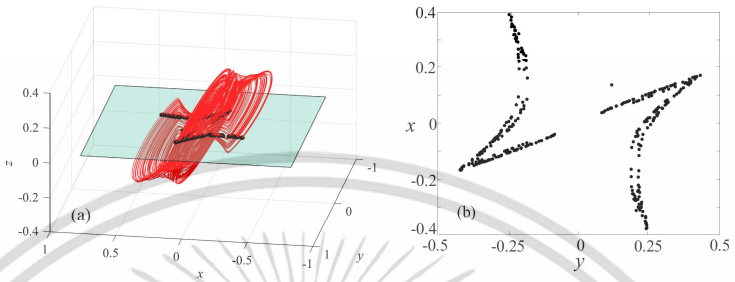


Fig. 17. Given $A = 1.5$, $B = 2.35$, $k = 0.4$ and initial condition (0.1, 0.1, 0.1) (a) 3-D attractor x-y-z planes couple with cross section Poincaré (b) Poincaré map on the x-y plane with the cross section $z = 0$.

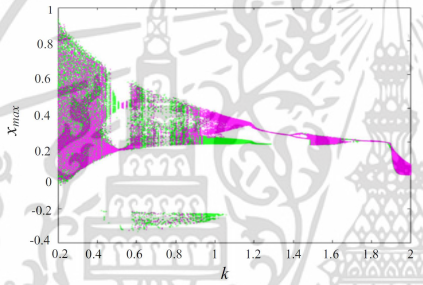


Fig. 18. The bifurcation diagram showing local maxima of the coordinate x versus k for coexistence of asymmetric behaviors, by given $A = 1.9$, $B = 2.35$. Defined initial conditions are (0.15, 0.1, 0.1) magenta, and (−0.15, 0.1, 0.1) green. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

its transconductance through the bias current. In OPAMP circuits, the output suffers from slew rate, requires one OPAMP for the summing amplifier, is unable electronic tunability, uses excessive resistors, and has low bandwidth. In CCII circuits, required is imputable electronic tunability required and more resistors. On the other hand, the current-mode circuit effortlessly combines and subtracts features based on Kirchhoff's current law (KCL) and does not require an additional active device. Additionally, the proposed chaotic circuit is very compact and conveniently summing and subtracting in voltage-mode/current-mode and can be electronically tuned to the parameters through the bias current of OTA.

4.1. OTA-based biquad low-pass filter

The principal active device of the proposed chaotic system is OTA. From block diagrams in Fig. 5, the primary circuits are a lossy integrator and lossless integrator [66] that can be constructed by commercially available OTAs (LT1228) [67]. Fig. 25(a) and (b) shows the current-mode OTA-based tunable lossy and lossless integrators. The transfer functions of the lossy and lossless integrators are expressed as

$$\frac{I_O}{I_{in}} = \frac{-g_{m1}/C}{s + g_{m2}/C} \tag{20}$$

$$\frac{I_{O1}}{I_{in}} - \frac{-I_{O2}}{I_{in}} - \frac{g_m}{sC} \tag{21}$$

Fig. 26 shows the current-mode biquad low-pass filter consisting of a lossy and a lossless integrator, and its transfer function is expressed in Eq. (22). The frequency response (ω_0) can be tuned through the bias currents I_{B1} (g_{m1}) and I_{B2} (g_{m2}), while the quality factor (Q) can be tuned through I_{B3} (g_{m3}).

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{\frac{g_{m1}g_{m2}}{C_1C_2}}{s^2 + \left(\frac{g_{m1}}{C_1}\right)s + \frac{g_{m1}g_{m2}}{C_1C_2}} \tag{22}$$

where $g_{mi} = \sqrt{KI_{Bi}} = \sqrt{\mu C_{ox}(W/L)I_{Bi}}$, $C_1 = C_2 = C$ and $g_{m1} = g_{m2} = g_m$, then $\omega_0 = \frac{KI_B}{C}$ and $1/Q = g_{m3}/g_m = k$.

4.2. OTA-based modified rectangular-function circuit

To generate high-complexity chaos signal, the modified rectangular function is utilized in the proposed chaotic system. The modified rectangular function is an amalgamation of a linear function and a rectangular function.

Fig. 27. depicts the modified rectangular-function circuit consisting of five OTAs. The nonlinear parameters (A and B) can be electronically tuned through OTA bias currents (I_B) and boundary voltage ($\pm V_B$), respectively. OTA_5 and OTA_6 function as the voltage comparators, given the boundary voltage of $\pm V_B$. The output voltage at nodes 1 and 2 are saturation voltage ($\pm V_{SAT}$) and the transition points are regulated by their respective boundary voltages (V_B). The outputs of the comparators are fed to the subsequent voltage-to-current converters (OTA_7 and OTA_8). The rectangular current output (I_{Rect}) can be obtained by summing the output currents of OTA_7 and OTA_8. The output of OTA_9 is linear and proportional to V_{in} and is tunable through the bias current (I_{Rect}). In essence, the current output (I_O) is an amalgamation of linear and rectangular functions. In addition, the voltage and current of different nodes and branches can be mathematically expressed as

$$V_1 = (V_{in} - V_B)V_{sat} \tag{23}$$

$$V_2 = -(V_{in} + V_B)V_{sat} \tag{24}$$

$$I_{\text{Rect}} = \begin{cases} 2g_{m7,8}V_{sat} & ; V_{in} < |V_B| \\ 0 & ; V_{in} > |V_B| \end{cases} \tag{25}$$

$$I_O = \begin{cases} g_{m9}V_{in} & ; V_{in} < |V_B| \\ 0 & ; V_{in} > |V_B| \end{cases} \tag{26}$$

where $g_{m7,8} \approx \sqrt{I_A\mu C_{ox}(W/L)}$ and $g_{m9} \approx \sqrt{I_{\text{Rect}}\mu C_{ox}(W/L)}$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Fig. 19. Sample phase portraits 3D plane x-y-z of the coexistence of two different asymmetric attractors for varying parameter k (fixed $A = 1.9$, $B = 2.35$), with different initial conditions (± 0.15, 0.1, 0.1) magenta and green. (a) $k = 1.28$, (b) $k = 0.94$, (c) $k = 0.89$, (d) $k = 0.68$, (e) $k = 0.61$, (f) $k = 0.44$, (g) $k = 0.41$, (h) $k = 0.32$. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

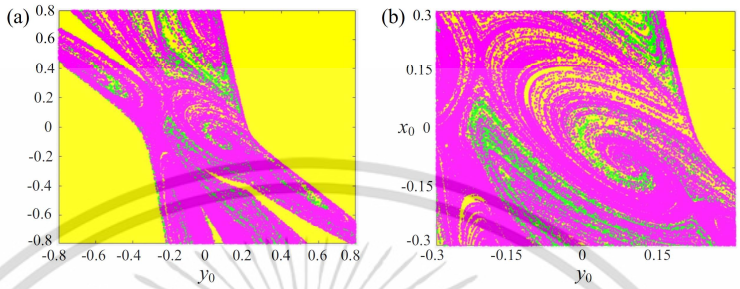


Fig. 20. Cross sections of the basin of attraction by computed for $z_0 = 0.1$, corresponding with coexisting asymmetric attractors in Fig. 19(f). (a) x_0-y_0 plane (b) displays enlargements of x_0-y_0 plane.

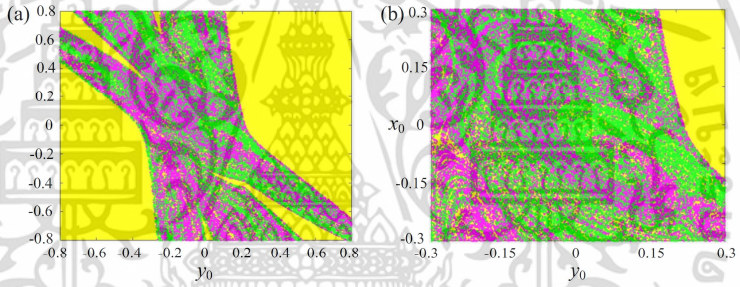


Fig. 21. Cross sections of the basin of attraction by computed for $z_0 = 0.1$, corresponding with coexisting asymmetric attractors in Fig. 19(g). (a) x_0-y_0 plane (b) displays enlargements of x_0-y_0 plane.

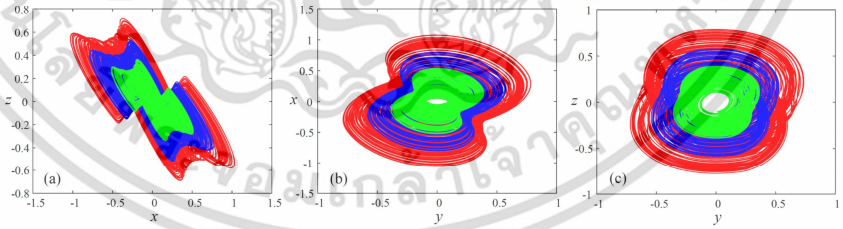


Fig. 22. The phase portraits showing the controlling amplitude of the proposed chaotic system by given $A = 1.5$, $B = 2.35$ and $k = 0.4$, with the initial conditions (x_0, y_0, z_0) = (0.1,0.1,0.1) (a) x-z plane, (b) y-z plane, (c) y-x plane. (For interpretation of the references to color in this figure, the reader is referred to the web version of this article.)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

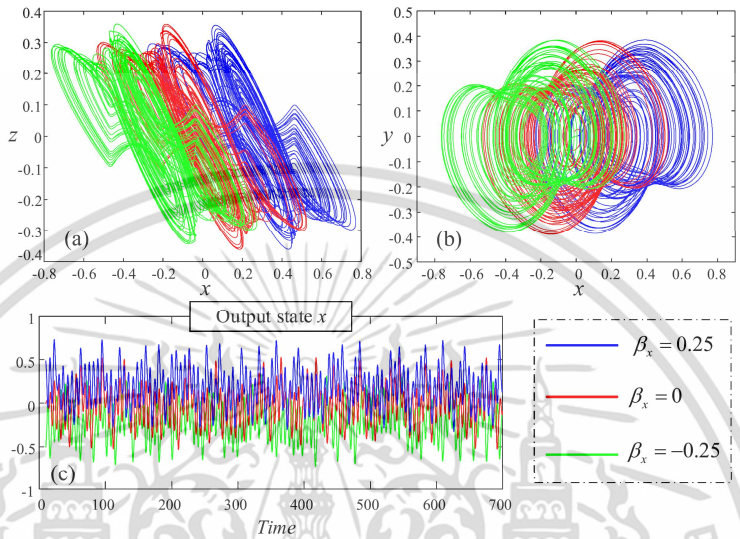


Fig. 23. Offset-boosting of the chaotic attractor by varying the control parameter β_x, given $A = 1.5$, $B = 2.35$ and $k = 0.4$, with the initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ (a) x-z plane, (b) x-y plane, (c) waveform at state x.

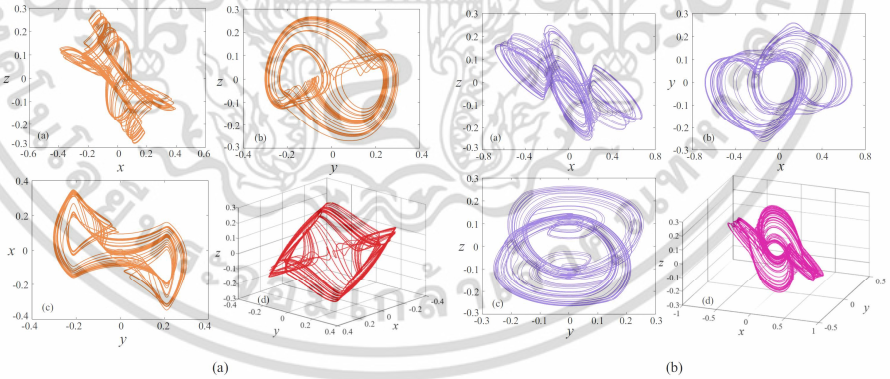


Fig. 24. The attractor results of the additional chaotic systems, (a) chaotic system #A for $A = 1.7$, $B = 2.35$ and $k = 0.7$, (b) chaotic system #B for $A = 1.2$, $B = 2.2$ and $k = 0.45$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 6
The dynamics of the additional chaotic systems under variable k, A and B.

System	Coefficients	Interval	Dynamics
Additional chaotic system #A	k	[1.5, 1.39]	Stable point
		[1.38, 0.87]	Periodic orbit
		[0.86, 0.7]	Double-scroll attractor
	A	[1.4, 1.45]	Stable point
		[1.46, 1.57]	Periodic orbit
		[1.58, 2]	Double-scroll attractor
	B	[0.1, 5]	Double-scroll attractor
Additional chaotic system #B	k	[2, 1.92]	Limit cycle
		[1.91, 1.88]	Stable point
		[1.87, 1.79]	Periodic orbit
		[1.78, 1.72]	Single-scroll attractor
		[1.71, 0.78]	double-scroll attractor
		[0.77, 0.55]	Periodic orbit
		[0.54, 0.23]	Four-scroll attractor
	A	[0.2, 0.49]	Periodic orbit
		[0.5, 2.8]	Four-scroll attractor
	B	[5, 4.26]	Periodic orbit
		[4.25, 3.7]	Single-scroll attractor
		[3.6, 3]	Double-scroll attractor
		[2.9, 1.5]	Four-scroll attractor

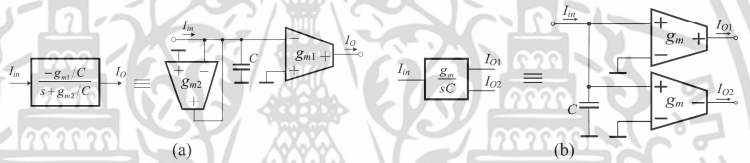


Fig. 25. OTA-based integrators: (a) lossy, (b) lossless.

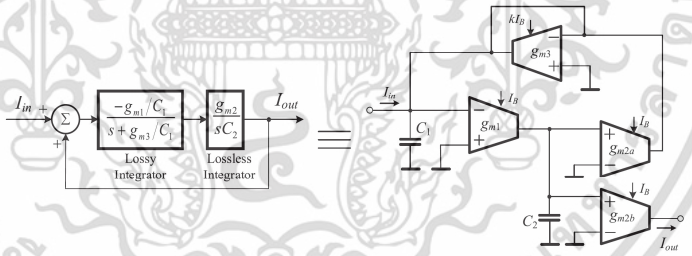


Fig. 26. Current-mode OTA-based biquad low-pass filter.

4.3. MO-OTA-based of the proposed chaotic system

The proposed chaotic system can conveniently be constructed based on the circuit in Fig. 28, given $I_{B1} = I_{B2} = I_{B4} = I_B$ and $C_1 = C_2 = C_3 = C$. Fig. 28 illustrate the chaotic third-order system based on the modified rectangular functions (Eq. (4)). The chaotic signal of the proposed system can be realized by independently tuning the coefficients of the chaotic systems (A, B, and k) through bias current (I_A), boundary voltage (V_B), and Quality factor of biquad low-pass filter (kI_B), respectively. The 3D (x-, y-, and z-*dimension*) outputs are the current outputs of OTA_1, OTA_2, and OTA_4, respectively.

4.4. Circuit realizations of chaotic systems #A and #B

The chaotic systems #A and #B in Fig. 7(a)-(b) can conveniently be constructed based on the circuits in Fig. 29(a) and (b), given $I_{B1} = I_{B2} =$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

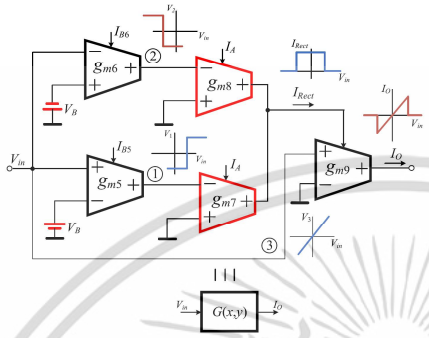


Fig. 27. OTA-based modified rectangular-function circuit.

$I_{B4} = I_B$ and $C_1 = C_2 = C_3 = C$. The modified rectangular function in Fig. 27 is incorporated with the third-order core system at y and x-y dimensions. The chaotic signal of the additional systems can be realized by independently tuning the coefficients of the chaotic systems (A, B, and k) through bias current (I_A), boundary voltage (V_B), and quality factor of biquad low-pass filter (kI_B). The 3D (x-, y-, and z-*dimensions*) outputs are the current outputs of OTA_4, OTA_2, and OTA_1, respectively.

5. Experimental results

Off-the-shelf passive and active components construct the circuit realization in PCB compared with the numerical results for confirming the operation of the proposed chaotic systems. The circuit diagrams in Figs. 28 and 29 are implemented on the PCB prototype, as shown in Fig. 30(a). The measurement setup of the prototype is exhibited in Fig. 30(b). The circuit prototype used in the experiment comprises of the commercially available OTA (LT1228) with ±10 V power supplies, and all capacitors are 50 nF. The bias current (I_B) of the OTAs is 100 μA, excepting the OTA_3, OTA_7, and OTA8, which are tunable parameters.

Fig. 30 shows the proposed chaotic prototype based on the third-order system (biquad low-pass filter and lossless integrator) and nonlinear functions ($G(x)$ and $G(y)$), which are identical modified rectangular-function. The bias current of OTA_5 and OTA_6 is equally set at 100 mA. The OTA_5 and OTA_6 are operated as voltage comparators with the boundary voltage (V_B) of 25 mV. The output voltage of the comparators (V_1 and V_2) is applied to the input of OTA_7 and OTA_8. As a result, OTA_9 obtains the modified rectangular output (I_O). Fig. 31 illustrates the current output of the modified rectangular-function circuits of the proposed chaotic system, respectively, given $I_A = 150$ μA ($A = 1.5$), $V_B = \pm 17$ mV ($B = 2.35$).

5.1. The proposed chaotic oscillator circuit

The performance of the proposed OTA-based chaotic system (see in Fig. 30) is assessed using experimental, given $I_B = 100$ μA, $I_A = 150$ μA ($A = 1.5$), and $V_B = \pm 17$ mV ($B = 2.35$). Fig. 32 illustrates the transition of phase portraits at an output current I_{Ox}-I_{Oz} and I_{Oy}-I_{Oz} planes under varying the bias current (kI_B). Fig. 32(a)-(g) shows the phase portraits' transition at the output current I_{Ox}-I_{Oz} plane. Fig. 32(a) shows the beginning of the limit cycle or period-1 for $kI_B = 150$ μA. Fig. 32(b)-(c) displays the period-2 and period-4 for $kI_B = 135$ μA and $kI_B = 130$ μA. Fig. 32(d) shows the non-periodic behavior for $kI_B = 120$ μA. Fig. 32(e)-(f) shows the light single-scroll and enhanced single-scroll for $kI_B = 90$ μA and $kI_B = 60$ μA, respectively. Fig. 32(g) and (h) show the double-scroll attractor and its output waveform I_{Ox} for $kI_B = 40$ μA. Three-

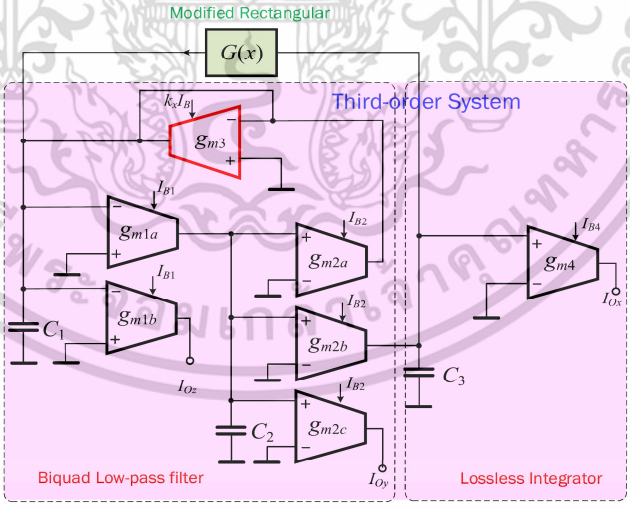


Fig. 28. The proposed OTA-based chaotic system.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

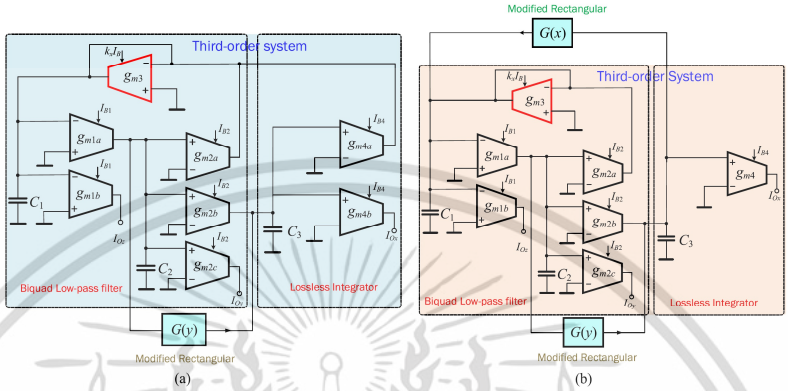


Fig. 29. OTA-based circuit of (a) the chaotic system #A, (b) the chaotic system #B.

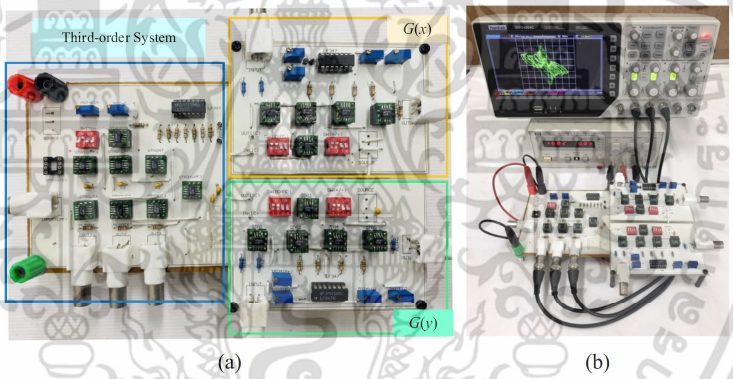


Fig. 30. The chaotic circuit prototype based on OTA (LT1228) (a) Circuit prototypes (b) Experimental Setup.

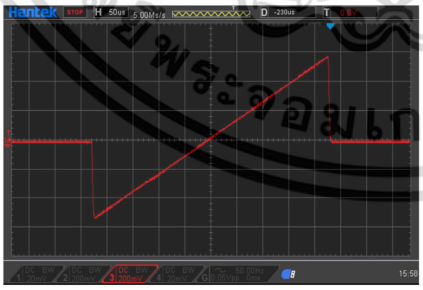


Fig. 31. The output of the modified rectangular circuit obtained from experimental: $I_A = 150$ μA ($A = 1.5$), $V_B = \pm 17$ mV ($B = 2.35$).

dimension attractors and output waveforms of the proposed chaotic system are exhibited in Fig. 33. The dynamic behaviors of the proposed chaotic system can be manipulated by biased current kI_B, which is in good agreement with the simulation results in Fig. 14.

5.2. The additional chaotic oscillator circuits

The performance of the OTA-based additional chaotic systems #A and B (see in Fig. 29) are assessed by the experimental, fixed bias currents $I_B = 100$ μA, by given $I_A = 170$ μA ($A = 1.7$), $V_B = \pm 17$ mV ($B = 2.35$), $kI_B = 70$ μA ($k = 0.7$) for the chaotic oscillator #A, and given $I_A = 120$ μA ($A = 1.2$), $V_B = \pm 18.5$ mV ($B = 2.2$), $kI_B = 45$ μA ($k = 0.45$) for the chaotic oscillator #B. Fig. 34(a) shows the double-scroll attractor on I_{Ox}-I_{Oz}, I_{Ox}-I_{Oy}, and I_{Oy}-I_{OOz} planes of the chaotic oscillator #A. Fig. 34(b) shows the four-scroll attractor on I_{Ox}-I_{Oz}, I_{Ox}-I_{Oy}, and I_{Oy}-I_{Oz} planes of the chaotic oscillator #B. The results experimental of two additional chaotic oscillators are in good agreement with the simulation results in Fig. 24.

As a result, the proposed nonlinear function can be completely

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

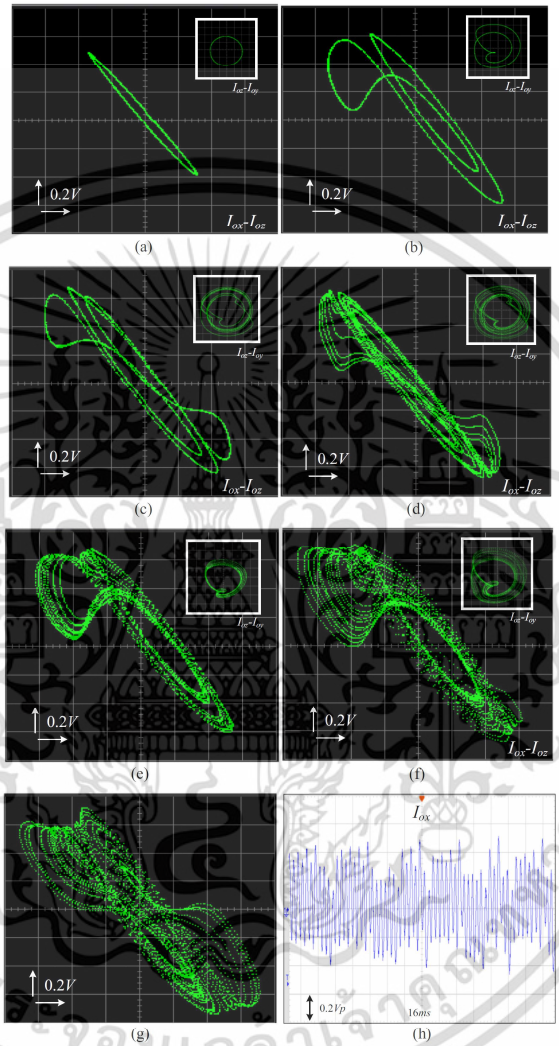


Fig. 32. The experimental results of transition of phase portraits (given $I_A = 140$ μA and $V_B = \pm 17$ mV).
(a) period-1 for $kI_B = 140$ μA, (b) period-2 for $kI_B = 135$ μA, (c) period-4 for $kI_B = 130$ μA, (d) non-periodic for $kI_B = 120$ μA, (e) single-scroll for $kI_B = 90$ μA, (f) single-scroll for $kI_B = 60$ μA, (g) double-scroll corresponding with (h) output waveform for $kI_B = 40$ μA.

applied in the jerk system. According to the theory, the experimental results realized by the commercially available components confirm the practical use. Furthermore, the relatively high complexity of the system ($D_{KY} = 2.43$) is verified compared with the existing jerk-based nonlinear functions. Besides, the proposed nonlinear function can also obtain alternative schemes of chaotic systems. For example, system #B can generate a four-scroll attractor with highly complex ($D_{KY} = 2.65$) based on three coefficients. Due to the simple structure of the proposed nonlinear function, it is suitable for integration but not limited to the OTAs and passive elements.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

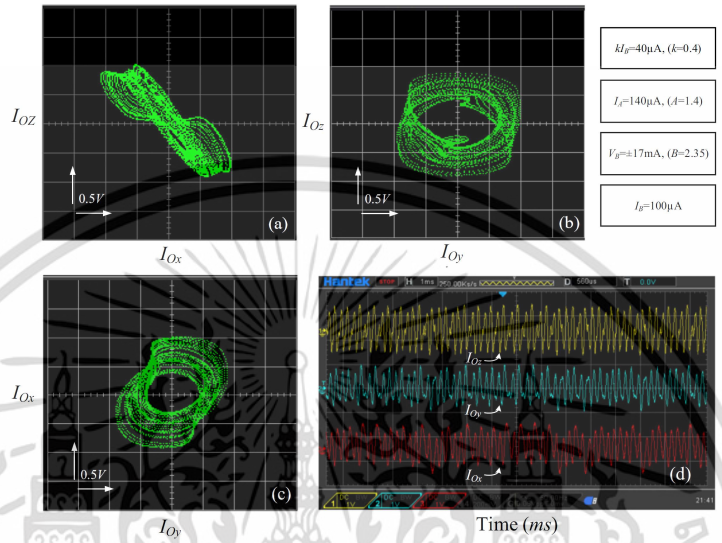


Fig. 33. The experimental results of attractors at (a) I_{Ox}-I_{Oz} plane, (b) I_{Ox}-I_{Oy} plane, (c) I_{Oy}-I_{Oz} plane, (d) three output waveforms I_{Ox}, I_{Oy}, I_{Oz}.

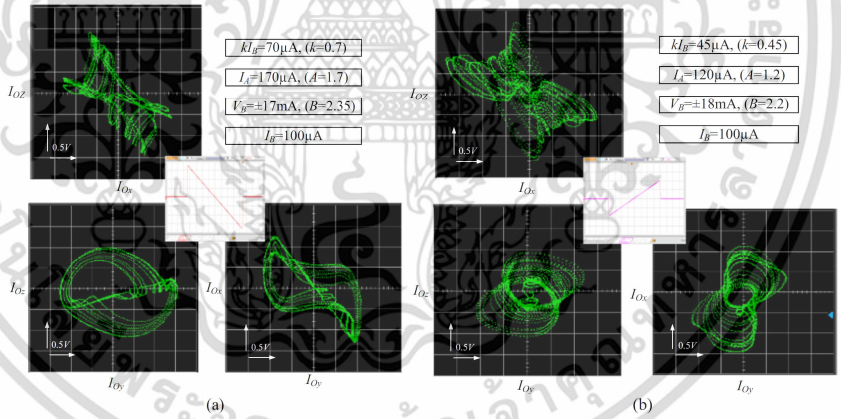


Fig. 34. The experimental chaotic attractors in I_{Ox}-I_{Oz}, I_{Ox}-I_{Oy}, I_{Oy}-I_{Oz} planes of the additional chaotic system. (a) chaotic system #A, (b) chaotic system #B.

6. Conclusion

This research presents a third-order chaotic system based on a modified rectangular function. The modified rectangular function is incorporated in the x-dimension. The chaotic behavior can be readily realized by manipulating either one of three coefficients (A, B, and k), and the complexity is comparatively higher than among previous jerk systems, as evidenced by D_{KY}. The basic properties of the system are verified by symmetry, dissipation, and stability analysis. The proposed chaotic system's numerical analysis reveals various complex dynamic behaviors. The system demonstrates scenarios of bifurcations branches, route to chaos, 0–1 test charts, Poincaré map, amplitude control, and offset boosting. The system analyzes some of the more complex behaviors by monitoring the coexistence of asymmetric attractors for specific parameter ranges when

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

changing only the initial conditions. Basins of attraction of different competing attractors were computed to highlight the presence of multiple attractors, which influence initial conditions. In addition, the other chaotic systems are incorporated by changing the positions of the nonlinear function. The numerical analyses in the theory of the proposed chaotic system agree with the MATLAB and experimental results. The OTA is an outstanding active device which is an advantage in voltage-mode and current-mode operation. The proposed chaotic system requires only OTAs (LT1228) and capacitors in the circuit realization. The chaos signals of circuit realization can electronically be tuned through bias currents $I_A(A)$, $kI_B(k)$, and $V_B(B)$. The proposed chaotic system required no multiplier, resulting in a low-complexity structure and low-cost implementation. Furthermore, the proposed new chaotic circuit could utilize as a chaos generator for communication security applications such as message coding, image encryption, and random signal generation [68]. Compared with the existing chaotic systems, the proposed one can achieve high-complexity chaotic behavior, as evidenced by *the* D_{KY} of 2.43.

CRediT authorship contribution statement

Category 1 Conception and design of study: P. Prommee; acquisition of data: K. Karawanich; analysis and/or interpretation of data: K. Karawanich P. Prommee.

Category 2 Drafting the manuscript: P. Prommee; revising the manuscript critically for important intellectual content: K. Karawanich P. Prommee.

Category 3 Approval of the version of the manuscript to be published (the names of all authors must be listed): K. Karawanich P. Prommee.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

No data was used for the research described in the article.

Acknowledgments

This research was funded by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang under grant 2565-02-01-027. Authors would like to thank Dr. Marwan M. from Zhejiang Normal University for his valuable contributions in the basins of attraction.

References

[1] Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. J Atmos Sci 1963;20(2):130–41.
[2] Rössler OE. An equation for continuous chaos. Phys Lett A 1976;57(5):397–8.
[3] Matsumoto TA. Chaotic attractor from Chua's circuit. IEEE Trans Circuits Syst 1984;CAS-31(12):1056–8.
[4] Matsumoto T, Chua LO, Kumoro M. The double scroll. IEEE Trans Circuits Syst 1985:CAS-32:8.
[5] Sprott JC. Some simple chaotic flows. Am J Phys 1994;50(2):647–50.
[6] Singh JP, Roy BK. A more chaotic and easily hardware implementable new 3-D chaotic system in comparison with 50 reported systems. Nonlinear Dyn 2018;93:1121–48.
[7] Wu Y, Zhou X, Chen J, Hui B. Chaos synchronization of a new 3D chaotic system. Chaos, Solitons Fractals 2009;42:1812–9.
[8] Li C, Li H, Tong Y. Analysis of a novel three-dimensional chaotic system. Optik 2013;124(13):1516–22.
[9] Sprott JC. A new class of chaotic circuit. PhysLett A 2000;266:19–23.
[10] Sprott JC. Simple chaotic systems and circuits. Am J Phys 2000;68(8):758–63.
[11] Sprott JC. A proposed standard for the publication of new chaotic systems. Int J Bifurcation Chaos 2011;21(9):2391–4.
[12] Sprott JC. Simplifications of the Lorenz attractor. Nonlinear Dyn 2009;13(3):271–8.
[13] Siriburanon T, Srisuchinwong B, Nontapradit T. Compound structures of six new chaotic attractors in a solely-single-coefficient jerk model with arctangent nonlinearity. In: Proc. of Chinese control and decision conference; 2010. p. 985–90. Xuzhou China.
[14] Srisuchinwong B, Liou CH. High-frequency implementation of Sprott's chaotic oscillators using current-feedback Op amps. ISSCS 2007;1:97–9.
[15] Srisuchinwong B, Liou CH, Klongkumnuankan T. Prediction of dominant frequencies of CFOA-based Sprott's sinusoidal and chaotic oscillators. In: Proc of CHAOS International Conference, Chania, Crete, Greece, June 3-6; 2008.
[16] Sajjadi SS, Baleanu D, Jajarmi A, Pirouz HM. A new adaptive synchronization and hyperchaos control of a biological. Chaos, Solitons Fractals 2020;138:09919.
[17] Gao T, Gu Q, Chen Z. Analysis of the hyper-chaos generated from Chen's system. Chaos Solitons Fractals 2009;39:1849–55.
[18] Tam LM, Chen JH, Chen HK, Tou WMS. Generation of hyperchaos from the Chen-Lee system via sinusoidal perturbation. Chaos, Solitons Fractals 2008;38:826–39.
[19] Frederickson P, Kaplan JL, Yorke ED. The liapunov dimension of strange attractors. J Differ Equ 1983;49:185–207.
[20] Grassberger P, Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D 1983;9:189–208.
[21] Pchelintsev A. An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems 2020;9(2):207–21.
[22] Leutcho GD, Kengne J. A unique chaotic snap system with a smoothly adjustable symmetry and nonlinearity: chaos, offset-boosting, antimonotonicity, and coexisting multiple attractors. Chaos Solitons Fractals 2018;113:275–93.
[23] Yuan F, Wang GY, Wang XW. Extreme multistability in a memristor-based multi-scroll hyper-chaotic system. Chaos 2016;26(7):073107.
[24] Hens C, Dana SK, Feudel U. Extreme multistability: attractor manipulation and robustness. Chaos 2015;25(5):053112.
[25] Patel MS, Patel U, Sen A, Sethia GC, Hens C, Dana SK, Feudel U, Showalter K, Ngonghala CN, Amritkar RE. Experimental observation of extreme multistability in an electronic system of two coupled Rössler oscillators". Phys Rev E. 2014;89(2):022918.
[26] Hens C, Dana SK, Feudel U. Extreme multistability: attractors manipulation and robustness. Chaos 2015;25:053112.
[27] Bao BC, Xu B, Bao H, Chen M. Extreme multistability in amemristive circuit. Electron Lett 2016;52(12):1008–10.
[28] Kemthong P, San-Um W, Srisuchinwong B, Tachibana M. A simple current-reversible chaotic jerk circuit using inherent tanh(x) of an opamp. IEICE Electron Express 2017;14(17):1–7.
[29] Khanbilvardi M, Mahmoudi M, Eliasi H. Optimal sliding mode control for seismic control of buildings equipped with atmd. Int J Optim Civil Eng 2020;10(1):1–15.
[30] Kuznetsov YA. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer-Verlag; 1995.
[31] Malasoma JM. What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which isparity invariant? Phys Lett A 2000;264:383–9.
[32] Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos. Taylor & Francis Group; 1994.
[33] Nayfeh AH, Balachandran B. Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods. New York: Wiley; 1995.
[34] Argyris J, Faust G, Haase M. An exploration of chaos. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 2015.
[35] Hollar DW. Jacobian matrices and Lyapunov exponents. In: Trajectory Analysis in Health Care. Springer; 2018. p. 163–78.
[36] Bayani A, Rajagopal K, Khalaf AJM, Jafari S, Leutcho GD, Kengne J. Dynamical analysis of a new multistable chaotic system with hidden attractor: antimonotonicity, coexisting multiple attractors, and offset boosting. Phys Lett A 2019;383:1450–6.
[37] Mathai AM. Jacobian of matrix transformations and functions of matrix argument. Available online. Singapore: World Scientific Publishing; 1997.
[38] Heffernon J. Linear algebra. In: Mathematics and Statistics. 4th Ed. Orthogonal Publishing; 2020.
[39] Glendinning P, Sparrow C. Shilnikov's saddle-node bifurcation. Int J Bifurcation Chaos 1996;6(6):1153–60.
[40] Leonov GA, Kuznetsov NV. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. Int J Bifurc Chaos 2013;23. 133000239-1–69.
[41] Leonov GA, Kuznetsov NV, Mokaev TN. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion. Eur Phys J Spec Top 2015;224:1421–58.
[42] Jafari S, Sprott JC, Nazarimehr F. Recent new examples of hidden attractors. Eur Phys J Spec Top 2015;224:1469–76.
[43] Jafari S, Pham VT, Kapitaniak T. Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3D system without equilibrium. Int J Bifurcation Chaos 2016;26:1650031.
[44] Jafari S, Sprott JC, Molaie M. A simple chaotic flow with a plane of equilibria. Int J Bifurcation Chaos 2016;26:1650098.
[45] Lorenz HW. Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. 2nd Ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1993.
[46] Sun K. Chaotic secure communication. Berlin, Germany: De Gruyter; 2016.
[47] Wolf A, Swift JB, Swinney HL, Vastano JA. Determining lyapunov exponents from a time series. Physica D 1985;16:285–317.
[48] Gandhi G, Roska T. MOS-integrable circuitry for multi-scroll chaotic grid realization: a SPICE-assisted proof. Int J Circ Theory Appl 2009;37:473–83.
[49] Chlouverakis KE, Sprott JC. A comparison of correlation and lyapunov dimensions. Physica D 2005;200(1–2):156–64.
[50] Boeing G. Visual analysis of nonlinear dynamical systems: chaos, fractals, self-similarity and the limits of prediction. Systems 2016;4(37).
[51] Saeed NA, Mohamed MS, Elagan SK. Periodic, quasi-periodic, and chaotic motions to diagnose a crack on a horizontally supported nonlinear rotor system. Symmetry 2020;12:2059.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[52] Li C, Jiang Y, Ma X. On offset boosting in chaotic system. Chaos 2021;3(2):47–54.
[53] Li C, Sprott JC, Akgul A, Lu HC, Zhao Y. A new chaotic oscillator with free control. Chaos 2017;27:083101.
[54] Li C, Sprott JC, Yuan ZY, Li H. Constructing chaotic systems with Total amplitude control. Int J Bifurcation Chaos 2015;25(10):1530025.
[55] Sprott J, Xiong A. Classifying and quantifying basins of attraction. Chaos Interdiscip J Nonlinear Sci 2015;25:083101.
[56] Marwan M, Santos VD, Abidin MZ, Xiong A. Coexisting attractor in a gyrostat chaotic system via basin of attraction and synchronization of two nonidentical mechanical systems. Mathematics 2022;10:1914.
[57] Ke-Hui S, Xuan L, Cong-Xu Z. The 0–1 test algorithm for chaos and its applications. Chin Phys B 2010;19(11):110510.
[58] Boeing G. The 0-1 test for chaos: a review. in: Chaos detection and predictability. Berlin, Heidelberg: Springer; 2016.
[59] Holmes P. Poincare, celestial mechanics, Dyn-Syst Theory Chaos Phys Rep (Rev Sect Phys Lett) 1990;193(3):137–63.
[60] Ying L, Huang D, Lai YC. Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices. Phys Review E 2016;93:062204.
[61] Pisarchik AN, Reátegui RJ, Flores CR, López JHG, Cuellar GH, Martín-Pasquín FJ. Secure chaotic communication based on extreme multistability. J Franklin Inst 2021;358:2561–75.
[62] Akgul A, Moroz I, Pehlivan I, Vaidyanathan S. A new four-scroll chaotic attractor and its engineering applications. Optik 2016;127(13):5491–9.
[63] Sander E, Yorke JA. A period-doubling cascade precedes chaos for planar maps. Chaos 2013;23:033113.
[64] Xiong L, Zhang S, Zeng Y, Liu B. Dynamics of a new composite four-Scroll chaotic system. Chin J Phys 2018;56(5):2381–94.
[65] Sander E, Yorke JA. Connecting period-doubling cascades to chaos. Int J Bifurcation Chaos 2012;22(2):1250022.
[66] Prommee P, Dejhan K. An integrable electronic-controlled quadrature sinusoidal oscillator using CMOS operational transconductance amplifier. Int J Electron 2002; 89(5).
[67] Data sheet: LT1228–100 MHz current feedback amplifier with DC gain control. Available online. Linear Technology Corporation; 2012. http://www.linear.com/product/LT1228.
[68] Mogue Tagne RL, Kengne J, Nguomkam Negou A. Multistability and chaotic dynamics of a simple jerk system with a smoothly tuneable symmetry and nonlinearity. Int J Dyn Control 2019;7:476–95.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Int. J. Electron. Commun. (AEÜ) 157 (2022) 154439

Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of Electronics and Communications

journal homepage: www.elsevier.com/locate/aeue

A four-scroll chaotic generator based on two nonlinear functions and its telecommunications cryptography application

Khunanon Karawanich, Montree Kumngern, Jirat Chimnoy, Pipat Prommee *

Department of Telecommunications Engineering, School of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

ARTICLE INFO

Keywords:
Chaotic system
Nonlinear dynamics
Jerk model
4-scroll attractor
Cryptography

ABSTRACT

This paper describes a new chaotic jerk system based on two different nonlinear functions. The modified signum and rectangular functions are incorporated into the system at different positions. The system can generate double-scroll and new four-scroll chaotic attractors by adjusting only one coefficient (k). The chaotic behaviors of the proposed system are investigated by the Lyapunov spectrum and period distribution of state variable × of the bifurcations. The complexity of the proposed chaotic system is computed by the Kaplan-Yorke dimension of 2.30. The coexisting attractors and basin of attraction are also included to verify the system's dynamic to the initial conditions. The PCB prototype's commercially available OPAMP and passive components are realized to confirm the numerical studies. The experimental results and the numerical results are agreeable in signals and attractors. The chaotic masking method is applied for encrypting the data for secure communication. The efficient encrypted signal can be obtained, and the decrypted data can be correctly received after successful synchronization.

1. Introduction

A chaotic system is nonlinear science research that plays essential roles in computer sciences, power systems protection, biomedical systems analysis, flow dynamics, and telecommunications cryptography [1–3]. In general, the chaos system is always sensitive to initial conditions; even two identical chaotic systems evolve from almost the same initial conditions, but the long-term system is very different in results. Since a chaotic system has excellent properties about unpredictable signals, a chaotic system has considerable attention in secure communications. Recently, various chaotic systems with their dynamic behaviors were introduced and physically implemented [4–7]. Many chaotic systems produced double-scroll attractors based on ordinary-three dimensions (3D) variables [8–11]. The chaotic system with multi-scroll attractors has received a fascinating topic because multi-scroll attractors have higher complexity and better modification. Recently research has been developed to increase the system's complexity by designing multi-scroll chaotic circuits [12–24] called *n*-scroll attractors using generalized multi-breakpoint piecewise linear functions in existing circuits. Other implementations have been designed for two-dimensional or three-dimensional *n*-Scroll-Grid attractors reported in [25–26]. Yu et al. obtained grid multi-scroll chaotic attractors by modifying the Chua circuit [27]. Yalcin et al. introduced an approach to generating multi-scroll chaotic attractors based on the jerk system using Josephson junctions [28]. The multi-scroll attractor can be generated based on Josephson junctions (high-frequency sine function). The multi-scroll chaotic attractors are generated via the summation of symbolic functions based on the jerk system [29]. The advantages of the jerk model are low-complicate structure and applicability to various nonlinear symbolic functions, enabling the design of multiple scrolls. The jerk equation form can be written in the third-order differentiation of mechanical displacement as $\dddot{x} = F(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ where $\times$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ and x are the displacement position, velocity, acceleration, and jerk, respectively. The third-order system also comprises a coefficient (k) and a nonlinear function ($G(x)$) [30]. The third-order differential equation can thus be expressed as

$$\dddot{x} + k\ddot{x} + \dot{x} - G(x) = 0 \tag{1}$$

However, numerical studies of chaotic systems are required to investigate their performances. The most prominent Lyapunov exponent [31] provides the quantitative predictability of chaos in a dynamical system. A system with a positive Lyapunov exponent is usually chaotic, and the Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}) of an attractor can be verified complexity in geometrical terms by obtaining the values of all the system's Lyapunov exponent (*LE*) [32,33]. The multistability phenomenon

* Corresponding author.
E-mail address: pipat.pr@kmitl.ac.th (P. Prommee).

https://doi.org/10.1016/j.aeue.2022.154439
Received 7 September 2022; Accepted 8 October 2022
Available online 13 October 2022
1434-8411/© 2022 Elsevier GmbH. All rights reserved.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

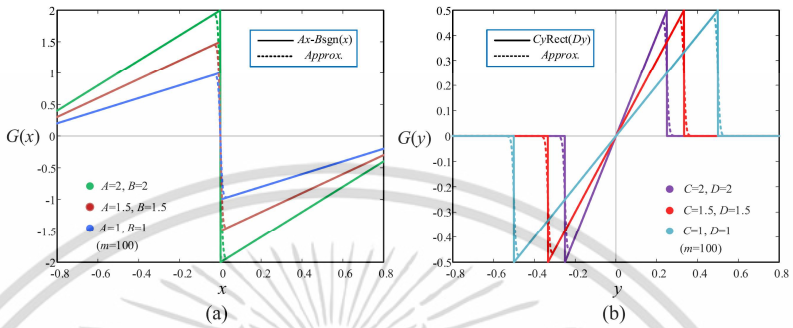


Fig. 1. The compatibility between the proposed functions and approximating functions for $m = 100$ with varying A, B, C, and D (a) modified signum function (b) modified rectangular function.

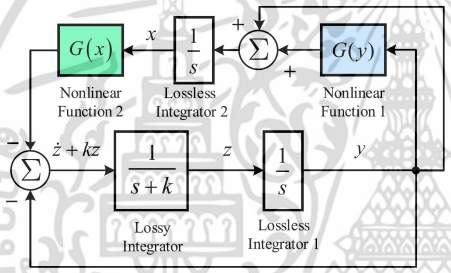


Fig. 2. Block diagram of the proposed chaotic system.

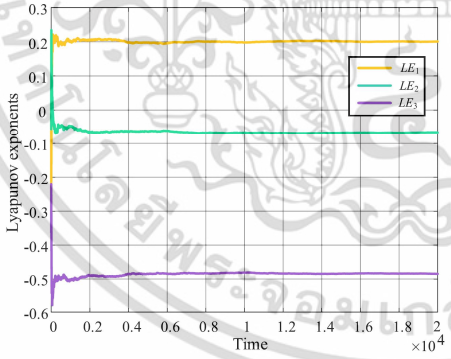


Fig. 3. Lyapunov exponents of the proposed chaotic system.

is used to prove the complex dynamics of a chaotic system [34–37]. This phenomenon indicated the presence of two or more coexisting attractors (periodic, non-periodic, or chaotic attractors) that cooperated with the same set of parameters while the initial conditions were different. Many solutions can also verify the investigation of this phenomenon, for example, the symmetry property of the model, parallel bifurcation branches, phase portraits, and the basins of attraction.

Table 1
Summarize of different procedures used to obtain coexisting bifurcation diagrams in each parameter with different initial conditions of the proposed system.

Number of Fig.	Color graph	Value of parameter	Parameter range	Initial condition (x_0, y_0, z_0)
Fig. 4a(i)	*Red*	$A = 0.6$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0 \le B \le 0.4$	(0.1, 0.1 0.1)
	Black	$A = 0.6$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0 \le B \le 0.4$	(−0.1, 0.1 0.1)
Fig. 4b(i)	*Red*	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0.3 \le C \le 15$	(0.1, 0.1 0.1)
	Black	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0.3 \le C \le 15$	(−0.1, 0.1 0.1)
Fig. 4c(i)	*Red*	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $k = 0.6$	$0.5 \le D \le 3.5$	(0.1, 0.1 0.1)
	Black	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $k = 0.6$	$0.5 \le D \le 3.5$	(−0.1, 0.1 0.1)
Fig. 5a	*Blue*	$B = 0.2$, $C = 1.5$, $A = 0.6$, $k = 0.6$	$0.2 \le A \le 1$	(0.55, 0.1 0.22)
	Magenta	$B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0.2 \le A \le 1$	(−0.55, 0.1–0.22)
Fig. 5b	*Blue*	$B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0.2 \le A \le 1$	(0.55, 0.1 0.22)
	Magenta	$B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0.2 \le A \le 1$	(−0.55, 0.1–0.22)
Fig. 5c	*Blue*	$B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0.2 \le A \le 1$	(0.55, 0.1 0.22)
	Magenta	$B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$	$0.2 \le A \le 1$	(−0.55, 0.1–0.22)
Fig. 6a	*Blue*	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$	$0.2 \le k \le 1.6$	(0.1, 0.1 0.1)
	Green	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$	$0.2 \le k \le 1.6$	(−0.1, 0.1–0.22)
Fig. 9	*Red*	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 6$, $D = 2.35$	$0.3 \le k \le 1.8$	(0.1, 0.1 0.1)
	Green	$A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 6$, $D = 2.35$	$0.3 \le k \le 1.8$	(0.1, −0.1–0.1)

This research describes the designs of a 3D chaotic jerk system to generate a double-scroll and a new four-scroll attractor with modified two unique nonlinear functions with five parameters. The metamorphosis double-scroll evolves into a four-scroll attractor obtained from controlled by only one coefficient (k). The basic dynamic properties of the proposed system were analyzed, viz., the dissipative, the stability, Lyapunov exponents (LEs), etc. The complexity attractor was proved by the Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}). This work proves the possibility of various chaotic behavior by analysis of bifurcation. The bifurcation diagram and Lyapunov spectrum with the route to the chaos

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

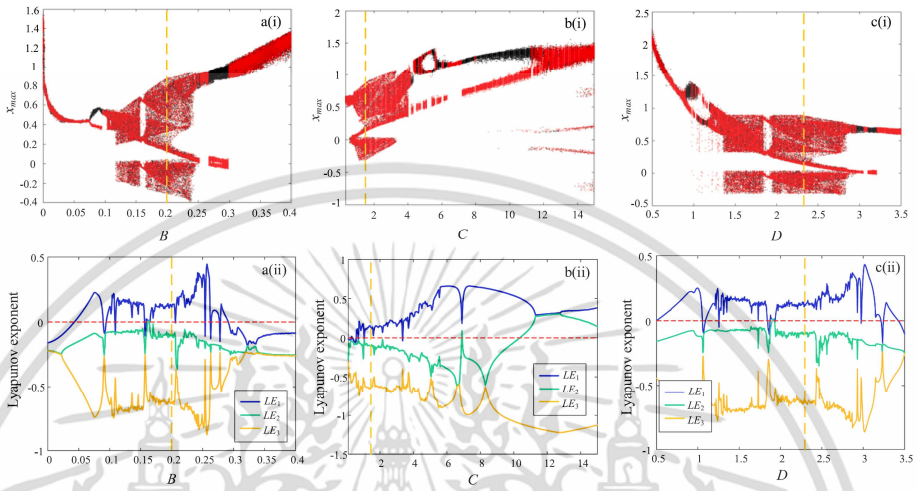


Fig. 4. Bifurcation diagram with different initial conditions (±0.1, 0.1 0.1) corresponding red and black colors, respectively, and Lyapunov spectrum of the proposed system (a) varying parameter B and given $A = 0.6$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$ (b) varying parameter C and given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $D = 2.35$, $k = 0.6$ (c) varying parameter D and given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $k = 0.6$.

verify the chaotic behavior, while the basin of attraction investigates the proposed system's multistability. The chaotic system's customization to offset boosting is included. In order to verify the numerical results of the designed chaotic system, the chaotic circuits are prototyped by off-the-shelf components, operational amplifiers (LF347), and an analog switch (54HC4066). Finally, this work also presents the application of telecommunication cryptography for the proposed system by the chaotic masking method. The results confirm that the performance of the proposed system is in good agreement with the theoretical.

2. The mathematical model and fundamental property of the chaotic system

2.1. Approximate nonlinear function of the proposed system

Piecewise-linear or symbolic functions are preferred non-linear functions in a chaotic jerk system. Modifying the ordinary function affects the chaotic signal pattern, including the system's complexity. This work customizes jerk models using two non-linear functions resulting in highly complex signals. The nonlinear functions (modified signum function $G(x)$ and modified rectangular function $(G(y))$, contains the coefficients of slope (A) and amplitude (B) for $G(x)$ and the gain (C) and boundary $(1/2D)$ for $G(y)$ [38].

In the numerical analysis of the proposed system, an approximating function of the modified signum function $(G(x))$ and the modified rectangular function $(G(y))$ are transformed into trigonometric form (Hyperbolic tangent function). In contrast, m is a slope of boundary constant $(m = 100)$ [39]. The approximating function can be rewritten as Eqs. (2) and (3).

$$G(x) = Ax - B\text{sign}(x) \approx Ax - B\tanh(mx) \tag{2}$$

$$G(y) = Cy\cdot\text{Rect}(Dy) \approx C(y/2)\cdot(-(\tanh(m(y+1/2D))\cdot\tanh(m(y-1/2D))) + 1) \tag{3}$$

The proposed function and approximating the function of (2) and (3) are compatible, as shown in Fig. 1(a) and (b), respectively. Therefore, the acceptable parameter $m = 100$ is utilized for further analyses in this work.

2.2. Proposed 3D jerk chaotic system

The advantage of the 3D jerk model [30] is a low-complicate structure that can control the condition of oscillation by only one coefficient (k) and modified independently nonlinear function $(G(x))$ see in Eq. (1). For this reason, the proposed system opted 3D jerk model to generate a four-scroll chaotic attractor. The model is reconstructed by using two nonlinear functions in the system to obtain a more complex chaotic signal [40]. The $G(x)$ and $G(y)$ nonlinear functions are used in the designed conformation in Section 2.1.

Fig. 2 illustrates the block diagram of the proposed chaotic system, which is realized by incorporating the modified signum function $(G(x))$, and the modified rectangular function $(G(y))$ in the system. The ODE of the proposed system is expressed in Eq. (4).

$$\begin{cases} \dot{x} = y + G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x); \end{cases} \tag{4}$$

where, $G(y) = Ay\text{Rect}(By) \approx \frac{Ay}{2}\cdot(-(\tanh(m(y+1/2B))\cdot\tanh(m(y-1/2B))) + 1)$

$,G(x) = Ax - B\text{sgn}(x) \approx Ax - B\tanh(mx)$, all coefficients (A, B, C, D, k) are positive integer, and $m = 100$.

2.3. Dissipative and existence of attractors

In a preliminary analysis, the existence of attractors in the system can be examined by evaluating the rate of volume contraction (or expansion) in the state space. The volume contraction rate of a continuous-time dynamical system described by $w = (x, y, z)^T$, $\dot{w} = h(w)$ and $h(w) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$. Thus, the divergence of the system (4) can be easily derived

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

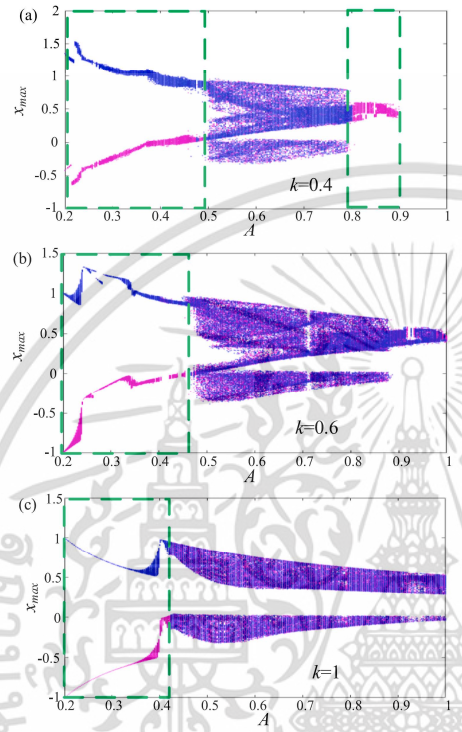


Fig. 5. Analysis of bifurcation diagram of parameter A (Given $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$) for different k with different initial conditions (± 0.55, 0.1, ± 0.22) in blue and magenta, by varying A (a) $k = 0.4$ (b) $k = 0.6$ (c) $k = 1$.

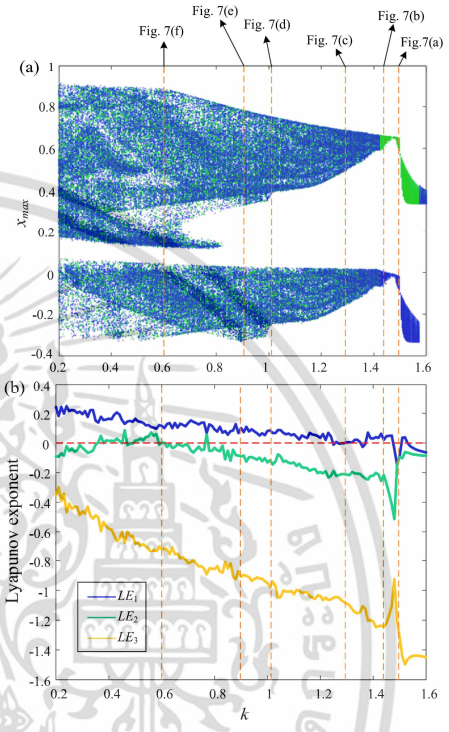


Fig. 6. Route to the chaos of parameter k in range $0.2 \leq k \leq 1.6$ (Given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$) (a) Bifurcation diagram showing local maximum coordinate × (x_{max}) with different initial conditions (± 0.1, 0.1, 0.1) in blue and green, (b) Lyapunov spectrum

as follows:

$$\Lambda = \nabla \cdot h(w) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

$$\Lambda = \nabla \cdot h(w) = \frac{\partial\left[y - \left\{\frac{Cy}{2}\cdot\left(-\left(\tanh m\left(y+\frac{1}{2D}\right)\cdot\tanh m\left(y-\frac{1}{2D}\right)\right)+1\right)\right\}\right]}{\partial x} + \frac{\partial(z)}{\partial y} + \frac{\partial[-kz - y - \{Ax - B\tanh(mx)\}]}{\partial z}$$

$$\Lambda = \nabla \cdot h(w) = \quad k < 0. \tag{5}$$

The proposed system is dissipative (convergent) and can generate attractors [41,42].

2.4. Dynamical analysis of the proposed system

The calculated eigenvalues can determine the stability of the dynamic system by assuming the system is in the equilibrium state [38,43–45]. The equilibrium points of the proposed chaotic system are obtained by solving:

$$\begin{cases} f_1 = y + G(y) = 0 \\ f_2 = z = 0 \\ f_3 = -kz - y - G(x) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Given $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ and $f_n = 0$, the proposed chaotic system has the origin equilibrium point is $E_0(0, 0, 0)$. The rest equilibrium points are assumed $E_1=(x_{E1}, y_{E1}, 0)$ and $E_2=(x_{E2}, y_{E2}, 0)$ where x_{E1}, x_{E2}, y_{E1}, and y_{E2} are the non-zero fixed point solutions of Eq. (7):

$$G(y) - G(x) = \left[\frac{Cy}{2}\cdot(-(\tanh(m(y+1/2D))\cdot\tanh(m(y-1/2D)))+1) - [Ax - B\tanh(mx)]\right] = 0 \tag{7}$$

where $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$ and $m = 100$. Given $G(y)$-$G(x) = 0$, ($my + m/2D$) $= \alpha$, and (my-$m/2D$) $= \beta$, [38] the rest equilibrium points can be calculated by

$$0 = -(\tanh(\alpha)\cdot\tanh(\beta)) + 1 \tag{8}$$

Hence, the parameters $(\alpha, \beta) \gg 1$ and $(\alpha, \beta) \ll 1$ then the $G(y) = 0$. The parameters $(\alpha, \beta) = \pm 3$ are given. For $G(x) = 0$, the rest equilibrium

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

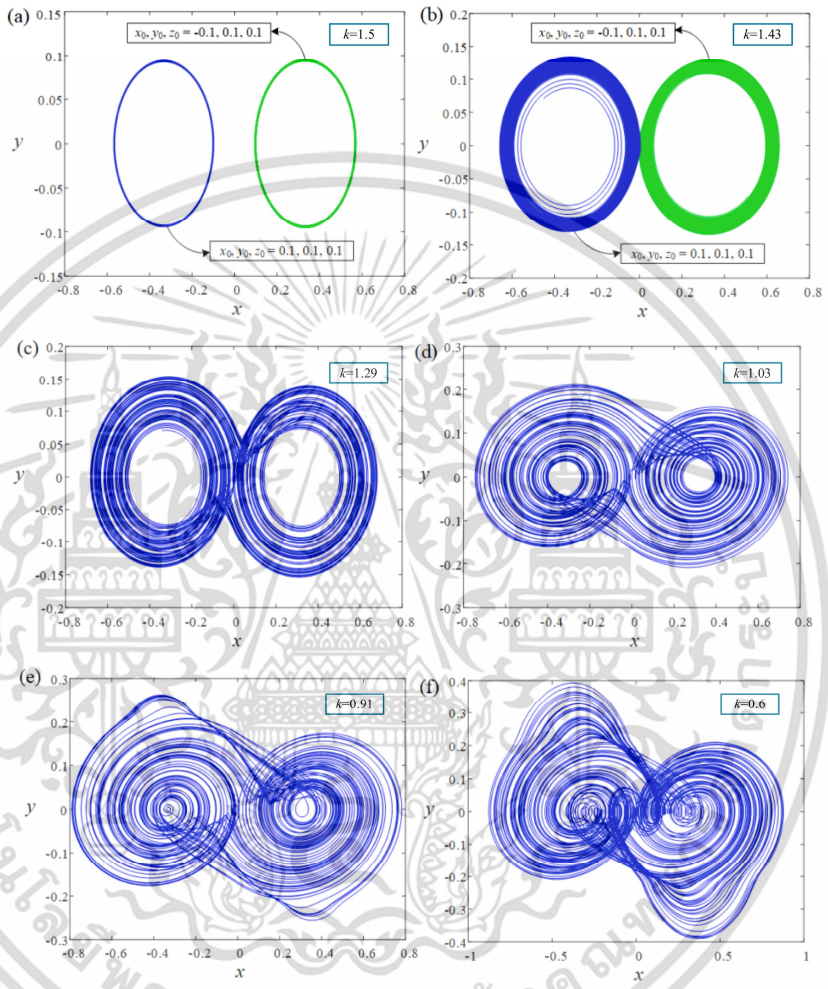


Fig. 7. Route to the chaos of phase portraits of the proposed system by varying k (a) limit-cycle, (b) Rössler-like attractor, (c) double-scroll attractor, (d) strange double-scroll attractor, (e) approach to four-scroll, and (f) strange four-scroll attractor.

points can be found at $x_{E1,2}=\pm 0.33$; thus, two solutions of the rest equilibrium points are $E_1(0.33,0.638297871,0)$ and $E_2(-0.33, -0.638297871,0)$. Note that E_1 and E_2 are symmetric with respect to the origin, which is an advantage in identifying the stability range.

The stability properties of the system are investigated from the equilibrium points [38]. The Jacobian matrix of the proposed chaotic system is expressed in Eq. (9).

$$J_E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1+(v(y)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(u(x)) & -1 & -k \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{9}$$

where $v(y) = \frac{\partial G(y)}{\partial x} = -A + B{\cdot}m{\cdot}\mathrm{sech}^2(m{\cdot}x)$, $u(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial x} = -0.5{\cdot}C{\cdot}$

$$\left[x\left(m\mathrm{sech}^2(mx+\frac{m}{2D}){\cdot}\tanh(mx-\frac{m}{2D}) + m\mathrm{sech}^2(mx-\frac{m}{2D}){\cdot}\tanh(mx+\frac{m}{2D})\right) + \tanh(mx+\frac{m}{2D}){\cdot}\tanh(mx-\frac{m}{2D}) \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

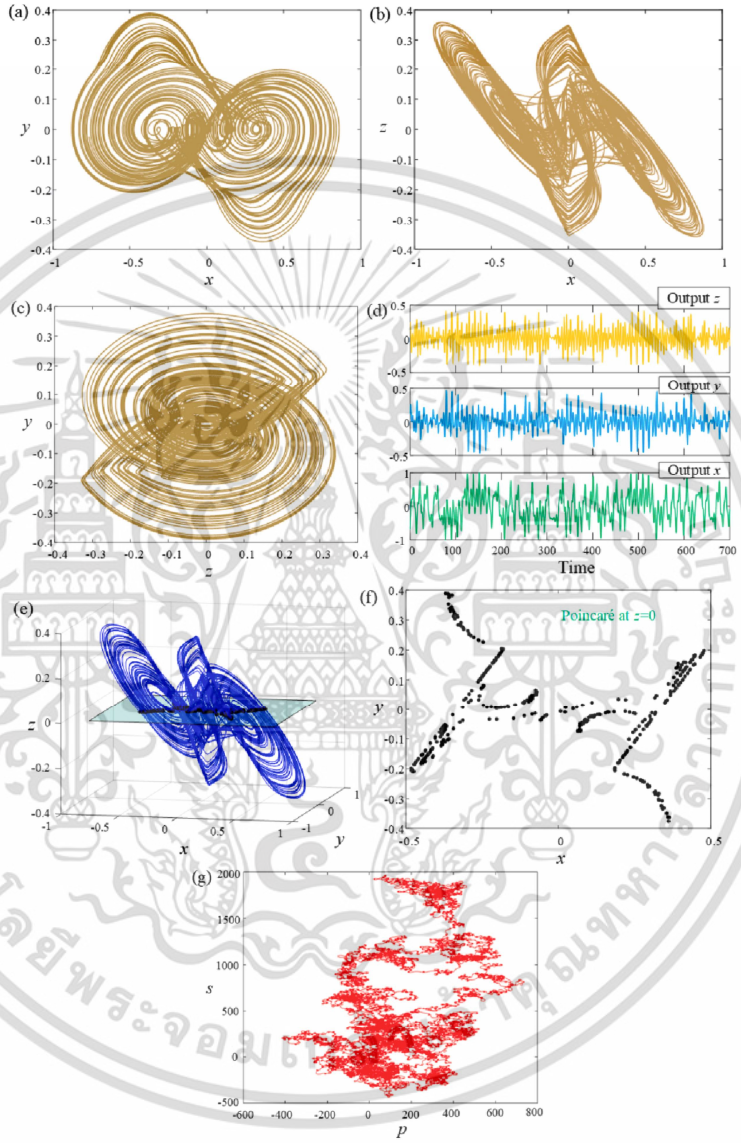


Fig. 8. Four-scroll attractor on phase portraits 2D (a) *x*-*y* (b) *x*-*z* (c) *y*-*z* (d) waveform outputs (e) 3D four-scroll attractor couple with cross section Poincaré (f) Poincaré map on *x*-*y* plane at cross section $z = 0$ (g) (p, s) plot of the 0–1 test chart.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

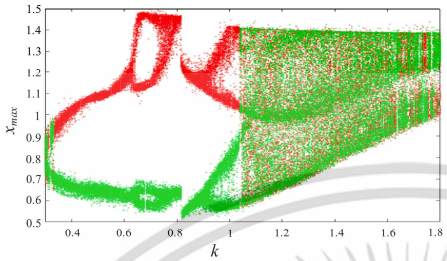


Fig. 9. The bifurcation diagram showing local maxima of the coordinate × versus k for coexisting attractor, given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 6$ and $D = 2.35$. Defined initial conditions are (0.1, 0.1, 0.1) red, and (0.1, −0.1, −0.1) green.

and given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$ with $m = 100$.

Given the coefficients mentioned earlier, the eigenvalue of the proposed chaotic system can be found by solving the Jacobian matrix in Eq. (9). The equilibrium point at $E_0(0,0,0)$ for the proposed chaotic system can be expressed as

$$J_{E_0(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1+(0.75) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(19.4) & -1 & -0.6 \end{pmatrix} \tag{10}$$

For the rest equilibrium points $E_{1,2} \cong (\pm 0.33, \pm 0.64, 0)$ can be express as

$$J_{E_{1,2}(\pm 0.33,\pm 0.64,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1+(-0.75) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(-0.6) & -1 & -0.6 \end{pmatrix} \tag{11}$$

In Eqs. (10)–(11), the characteristic equation $F(\lambda) = \det(J_E - \lambda I)$ associate to the above Jacobian matrix J_{E0} and $J_{E1,2}$ can be derived by using the linear algebra theorem [46] as follow:

$$F(\lambda)_{E_0} = \det\left(J_{E_0} - \lambda I\right) = \lambda^3 + 0.6\lambda^2 + \lambda + 33.95 \tag{12}$$

$$F(\lambda)_{E_{1,2}} = \det\left(J_{E_{1,2}} - \lambda I\right) = \lambda^3 + 0.6\lambda^2 + \lambda - 0.15 \tag{13}$$

The eigenvalues of the proposed chaotic system for E_0 are $\lambda_1 =$ -3.341 and $\lambda_{2,3} = 1.37 \pm 2.878i$ and the eigenvalues for $E_{1,2}$ are $\lambda_1 = 0.136$ and $\lambda_{2,3} =$ -0.368 ± 0.982i, following the Shilnikov theorem [47], given $\lambda_1 = q$ and $\lambda_{2,3} = p + i\omega$ where $qp < 0$ and $\omega \neq 0$. The eigenvalues of the proposed chaotic system comply with the Shilnikov theorem because the characteristic equation consists of one real eigenvalue and a pair of complex conjugate eigenvalues, given $|q| > |p|$. Moreover, from the eigenvalues of the proposed chaotic system at the equilibrium point, E_0 and $E_{1,2}$ are evident that unstable saddle focus [43–45]. As a result, the behavior of the proposed system is of a chaotic type.

2.5. Complexity quantitative by Lyapunov exponent and Kaplan-Yorke dimension

In this research, the *LE* is calculated using Wolf's algorithm in MATLAB [48–50], given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$ and $k = 0.6$ with the initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$. Fig. 3 shows the first, second, and third *LE* (LE_1, LE_2, LE_3) of the proposed system in time series ($\Delta t = 0.001$). To achieve the chaotic behavior, LE_1 must be positive, while the sum of *LE* ($LE_1 + LE_2 + LE_3$) must be negative.

The complexity of the chaos signal is the critical determinant of the performance of a chaotic system. Specifically, the higher the complexity of the chaos signal (i.e., attractor). The complexity of the attractor is determined by the Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}) based on Lyapunov exponents [45].

$$D_{KY} = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|}\sum_{i=1}^{j} LE_i \tag{14}$$

where j is the largest integer satisfying $\sum_{i=1}^{j} LE_i \geqslant 0$ and $LE_{j+1} < 0$ given $j \leqslant D_{KY} < j + 1$The Kaplan-Yorke dimensions (D_{KY}) of the proposed chaotic system can be expressed as

$$D_{KY} = 2 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3|} = 2 + \frac{0.204894 - 0.06}{|-0.480620|} = 2.30 \tag{15}$$

The Kaplan-Yorke dimensions of the proposed chaotic system are obtained at 2.30. To verify the complexity of the chaotic system based on attractors and waveforms.

3. Numerical study

Mathematical modeling and numerical simulation of a nonlinear dynamic system are necessary to examine the system and the possibility of further practical realization. The careful analysis demonstrates the various dynamics phenomena that are carried out in the proposed system. The simulation uses the Runge-Kutta algorithm based on MATLAB. The numerical results in this work are presented in the bifurcation analysis, the route to the chaos, the coexisting attractor for multistability [30–33], and the offset boosting system [51,52]. In addition, the display of numerical results for the various behaviors carries out by nonlinear graphics analysis tools viz phase portraits and basin of attraction.

3.1. Bifurcation analysis of the proposed system

The bifurcation diagram represents an appropriate tool to visualize various system chaos scenarios. The bifurcation diagram is the plot of the local maxima of state variable × (x_{max}) versus the control parameter and conditions. The summaries of different scenarios of the bifurcation analysis of the proposed system are listed in Table 1.

The first study is verified by monitoring for parameters B, C, and D in Fig. 4 to steady some parameters for analysis of various system behaviors. Fig. 4a(i) and Fig. 4a(ii) show a bifurcation diagram and Lyapunov spectrum of parameter B, and fixed-parameter $A = 0.6$, $C = 2.35$, $D = 2.35$, and $k = 0.6$, with different initial conditions. Fig. 4b(i) and Fig. 4b (ii) illustrate a bifurcation diagram and Lyapunov spectrum of parameter C, and fixed-parameter $A = 0.6$, $B = 0.2$, $D = 2.35$, and $k = 0.6$, with different initial conditions. Fig. 4c(i) and Fig. 4c(ii) display a bifurcation diagram and Lyapunov spectrum of parameter D, and fixed-parameter $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, and $k = 0.6$, with different initial conditions. This work chooses NCs (Nominal Coefficients) [38] of parameters B, C, and D for steady parameters $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, and $k = 0.6$ according to the yellow line in Fig. 4.

In a steady system, the analysis of complex dynamic behaviors is investigated. In Fig. 5, the bifurcation diagram reveals the multistability of the system from monitoring parameter A in the range $0.2 \leq A \leq 1$, with different initial conditions and varying k. Three bifurcations are demonstrated (for $k = 0.4$, $k = 0.6$ and $k = 1$) with two different initial condition are $((x_0, y_0, z_0) = (0.55, 0.1, 0.22))$ blue, and $((x_0, y_0, z_0) = (-0.55, 0.1, -0.22))$ magenta in Fig. 5(a-c), respectively. Fig. 5(a) represents the coexistence of symmetry and asymmetry behaviors in a green border at $k = 0.4$. Likewise, in Fig. 5(b-c) can be observed coexistence from parallel bifurcation branches that symmetry and asymmetry in some period for $k = 0.6$ and $k = 1$, respectively. Thus, the proposed system demonstrates multistability, which provides the coexisting attractor influenced by different initial conditions, substantiated with the basin of attraction in Section 3.3.

3.2. Route to the chaos

For the route to the chaos of the proposed system, parameter k serves

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

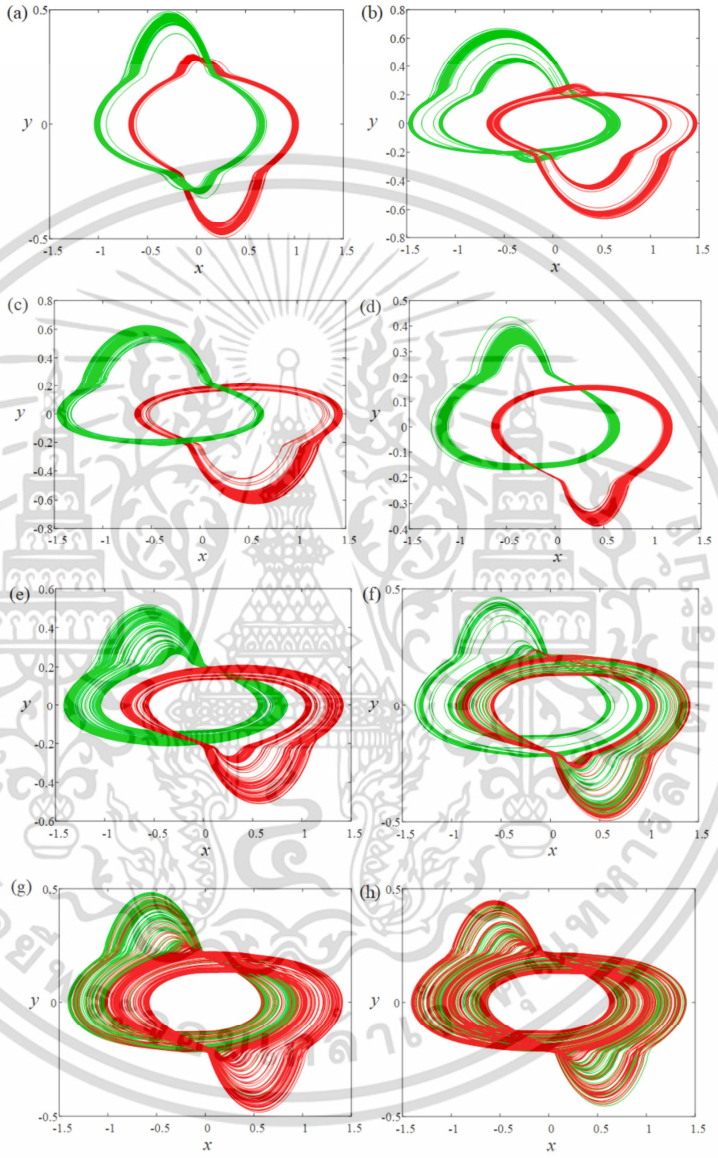


Fig. 10. Phase portraits *x*-*y* plane of coexisting symmetric and asymmetric attractor of the proposed system by varying parameter k (fixed-parameter $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 6$, $D = 2.35$) along with two initial conditions (0.1, ±0.1, ±0.1) red and green colors of attractor. (a) $k = 0.4$ (b) $k = 0.7$ (c) $k = 0.8$ (d) $k = 0.9$ (e) $k = 1$ (f) $k = 1.04$ (g) $k = 1.05$ (h) $k = 1.15$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

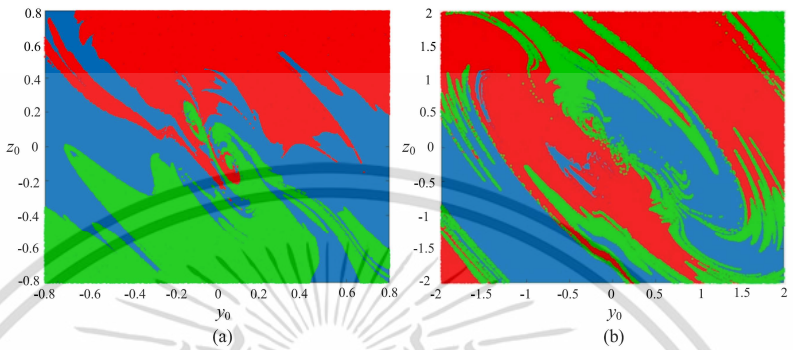


Fig. 11. Cross sections of the basin of attraction in y_0-z_0 plane by computed for $x_0 = 0.1$, (a) corresponding with coexisting symmetric attractors in Fig. 10 (e). (b) corresponding with coexisting asymmetric attractors in Fig. 10 (g).

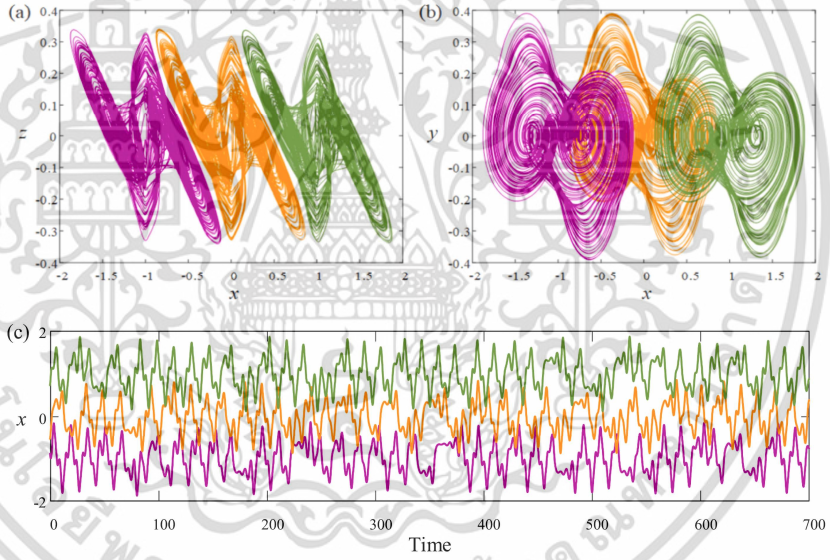


Fig. 12. Offset-boosting of the proposed system by varying the control parameter δ_y, given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$ and $k = 0.6$, with the initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ (a) phase portrait in x-z plane, (b) phase portrait in x-y plane, (c) waveform at state x.

as the main bifurcation control parameter. The bifurcation diagrams are computed by plotting the local maxima of the coordinate $\times$ in terms of the main bifurcation control parameter k in the range $0.2 \leq k \leq 1.6$. The system starts at with two initial conditions (± 0.1, 0.1, 0.1) in blue and green colors, and fixed-parameter $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$ and $D = 2.35$. Fig. 6 presents the bifurcation corresponding with the Lyapunov spectrum in the same range. The route to the chaos is shown in Fig. 7 by showing phase portraits on x-y planes. The limit cycle, Rössler-like attractor, approach to double-scroll, double-scroll attractor, and strange double-scroll attractor phase portraits are illustrated in Fig. 7(a)-(d) by decreasing parameter k. The first pair of symmetry limit cycle or period-1 appears at $k = 1.5$, as shown in Fig. 7(a), and the pair of symmetry Rössler-like attractors appears at $k = 1.43$ in Fig. 7(b). The double-scroll attractor and strange double-scroll attractor are found at $k = 1.29$ and $k = 1.03$, as shown in Fig. 7(c) and (d), respectively. The highlight of this work is a four-scroll attractor by the first approach to four-scroll appears at $k = 0.91$ in Fig. 7(e) and transforms into a strange four-scroll attractor at $k = 0.6$ as shown in Fig. 7(f). From the results, we can be noticed some symmetric attractors in the range $1.41 \leq k \leq 1.58$ with different initial conditions according to green and blue colors. After $k \leq 1.40$, the

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

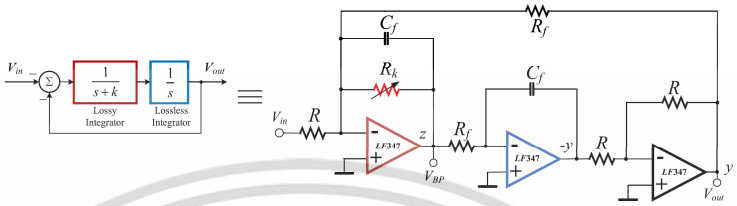


Fig. 13. OPAMP-based Tow-Thomas biquad filter.

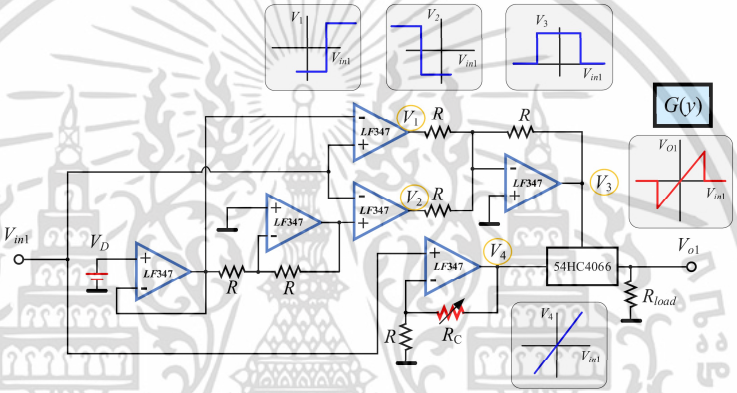


Fig. 14. OPAMP-based modified rectangular-function circuit.

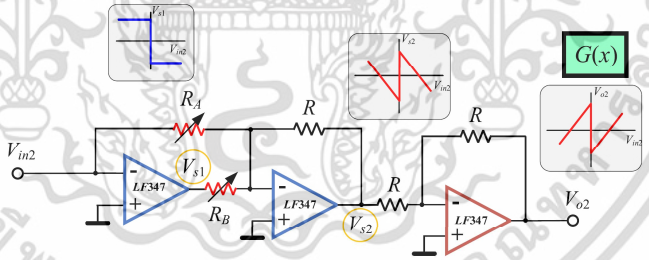


Fig. 15. OPAMP-based modified signum-function circuit.

bifurcation of green and blue is superimposed without the influence of initial conditions. Thus, it indicated that the parameter k is relatively high stability in the range $0.2 \leq k \leq 1.40$.

Fig. 8 provides a better illustration of the proposed system for dynamic graphics results of interesting four-scroll chaotic attractors by defining parameters $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, $k = 0.6$ and initial condition (0.1, 0.1, 0.1). Fig. 8(a-d) displays 2D phase portraits on x-y plane, x-z plane, z-y plane, and corresponding waveform at outputs (x, y, and z). The proposed four-scroll attractor of this work can be clearly displayed in the 3D phase portrait in Fig. 8(e). Fig. 8(e-f) shows the 3D trajectory on a cross-section Poincaré coupled with the proposed system's Poincaré map [53]. Fig. 8(g) shows the Brownian motion for specified chaotic behavior on the p, s plot of the 0–1 test chart [54].

3.3. Coexisting attractor with influence of parameter k

The Multistability of multiple coexisting attractors for the same values of parameters is an essential property found in nonlinear dynamical systems from various fields of science and engineering [30–33]. The analysis of the proposed system reveals the multistability results from the presence of parallel bifurcation branches. This section reports the occurrence of multiple coexisting attractors for the symmetric and asymmetric dynamics corresponding to the coexisting bifurcation diagram in Fig. 9.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

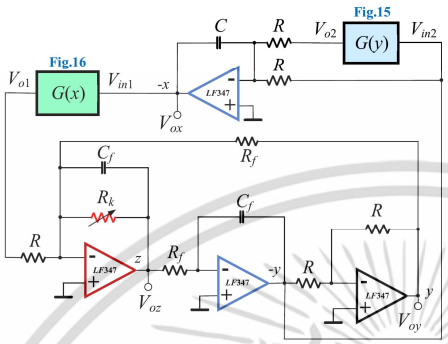


Fig. 16. The proposed OPAMP-based chaotic system.

From Fig. 4b(i), the system can be found interesting coexisting behaviors of parameter C in the range $4.2 \leq C \leq 7.15$. For coexisting behaviors, $C = 6$ is interested in this study. Thus, Fig. 9 illustrates the coexisting behaviors via the bifurcation diagram is redrawn in the range $0.3 \leq k \leq 1.8$ by varying the parameter k and given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 6$, $D = 2.35$, and starting with different initial conditions $(x_0, y_0, z_0 = 0.1, \pm 0.1, \pm 0.1)$ in red, and green colors, respectively. From Fig. 9, the bifurcation can be observed coexisting of parallel branches in the range $0.3 \leq k \leq 1.06$. The coexisting attractors on phase portrait by increasing parameter k with different initial conditions are demonstrated in Fig. 10. A pair symmetry of non-periodic, chaotic double-scroll attractor and double-scroll attractor are plotted in Fig. 10(a-e). The pair asymmetric approach to four-scroll with double-scroll attractors is plotted in Fig. 10 (f-g). Fig. 10(h) demonstrates a pair approach to four-scroll attractors that are entirely superimposed. The coexisting symmetric and the coexisting asymmetric attractors in Fig. 10(e) and (g) are used as examples indicating the coexistence of pair symmetric double-scroll attractors and the coexisting asymmetric approach to four-scroll with double-scroll attractors. Two colors of attractors from Fig. 10(e) and (g) correspond with the colors of the basin of attraction in Fig. 11(a) and Fig. 11(b), respectively. The light blue zone of basins is related to divergent dynamics. The results of Figs. 9–11 indicate that the phenomena of coexisting bifurcations and coexisting attractors exist in the proposed system.

3.4. Offset boosting system

Offset boosting is such an essential issue in the chaotic system since it gives a direct way for an engineer to transform a bipolar chaotic signal into a unipolar signal suitable for practical signal processing. The offset

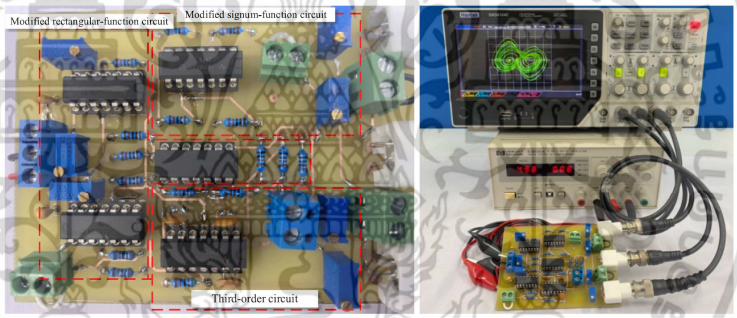


Fig. 17. The chaotic circuit prototype based on OPAMP (LF347) (a) Circuit prototypes (b) Experimental Setup.



Fig. 18. The voltage output of nonlinear circuits (a) modified signum function (b) modified rectangular function.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

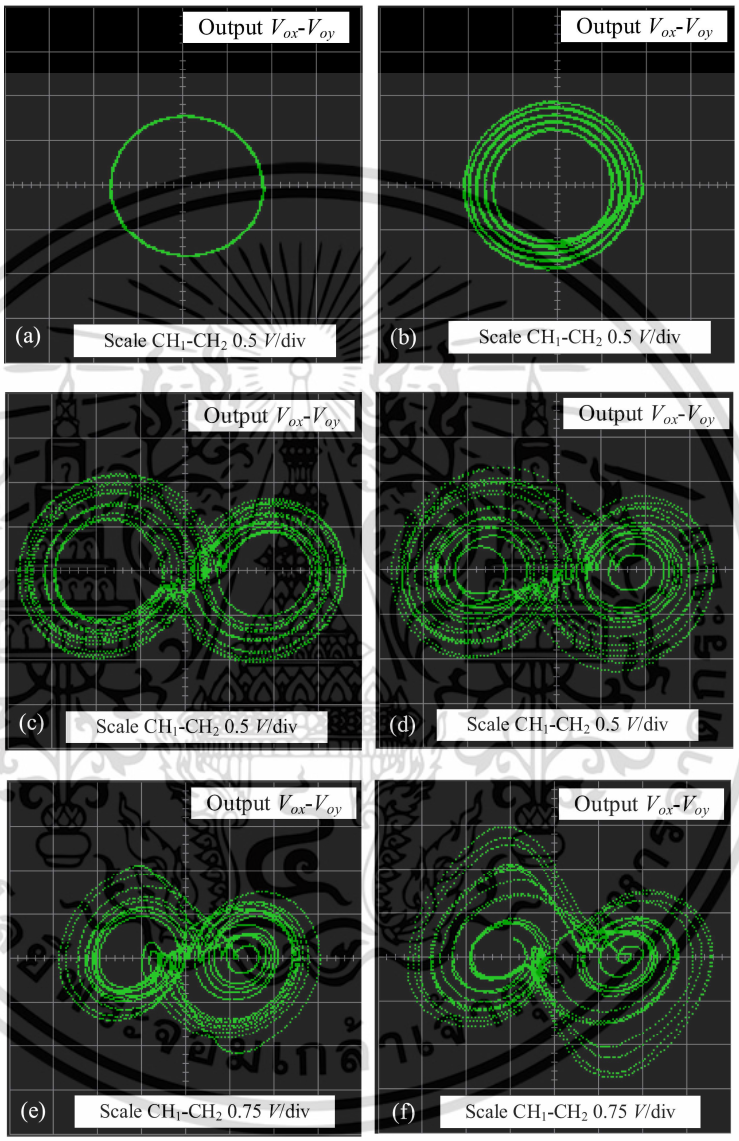


Fig. 19. The experimental results on phase portraits for route to the chaos of the proposed chaotic circuit under varying R_k; (a) limit cycle or period-1, (b) Rössler-like attractor, (c) double-scroll attractor, (d) strange double-scroll attractor, (e) approach to four-scroll attractor, (f) strange four-scroll attractor.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

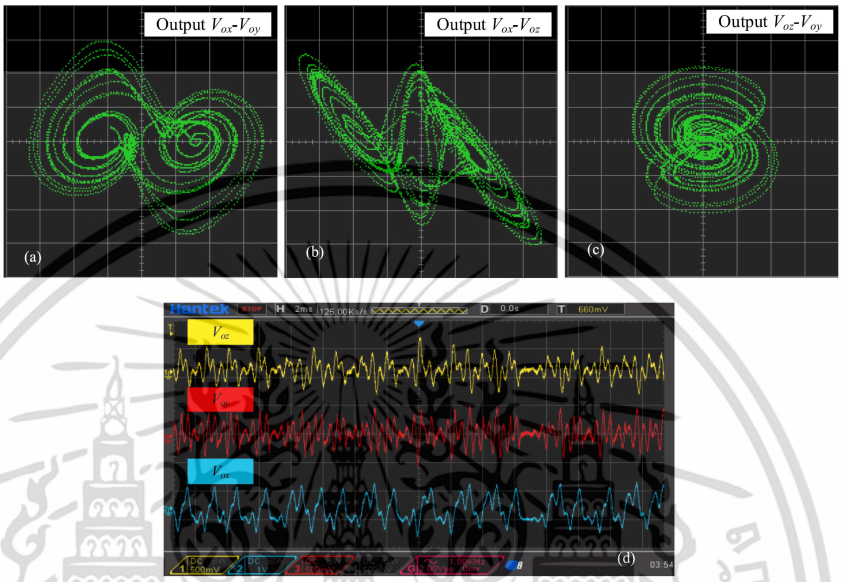


Fig. 20. The experimental results of 2D strange four-scroll attractors; (a) V_{ox}-V_{oy} plane, (b) V_{ox}-V_{oz} plane, (c) V_{oz}-V_{oy} plane, (d) three output waveforms V_{ox}, V_{oy}, V_{oz}.

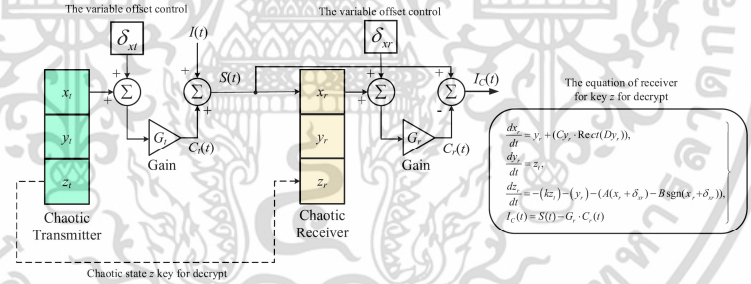


Fig. 21. Principle scheme for chaotic secure communication [58] Using state z key for decrypt synchronization.

variable of chaotic systems belongs to a new dynamical system category by substituting $x_i \rightarrow x_i + c$, shifting the signal x_i to the right/left-hand side by the constant parameter c. In the proposed system, the state variable $\times$ appears it possible to control the corresponding signal without affecting others. State variable $\times$ is offset-boosted by changing $\times$ into $\times + \delta_x$, where δ_x denotes a constant. The proposed system can be rewritten as:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x + \delta_x); \end{cases} \tag{16}$$

From the offset-boosting of the system (16), the system can be controlled by parameter δ_x. As a result, chaotic signal output state $\times$ can be shifted from a bipolar signal to a unipolar signal. For example, from varying the variable offset control (δ_x) for δ_x = -1, δ_x = 0, and δ_x = 1 corresponding with purple, orange, and green colors, respectively, as illustrated in Fig. 12.

4. Experimental results

From the numerical studies presented above, the proposed system can develop various forms of attractor, including limit cycle (sine waveform), double-scroll, and four-scroll. The experimental study's main objective is theoretically to confirm the results based on active devices. The proposed chaotic circuit is prototyped using the commercially available operational amplifier (OPAMP).

4.1. Sub-circuit used in the proposed chaotic system

The primary active devices of the proposed chaotic system are

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

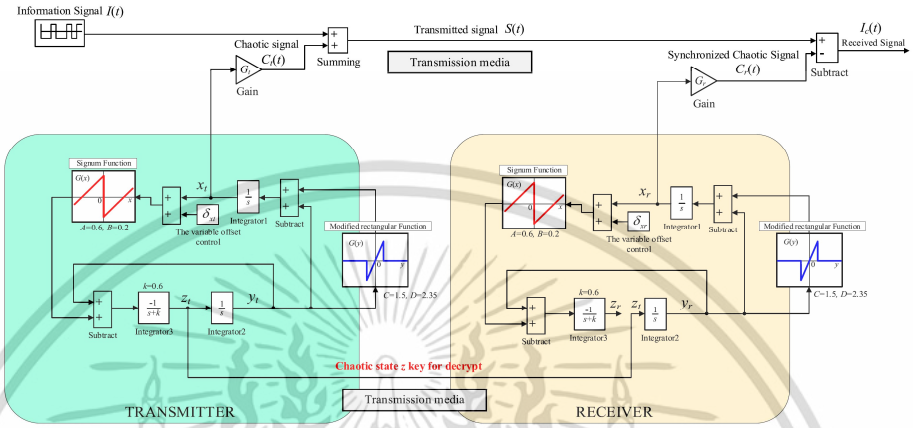


Fig. 22. MATLAB Simulink synchronization modeling of chaotic secure communication of Fig. 21.

commercially available OPAMP [55]. Fig. 13 shows the Tow-Thomas biquad filter [56], which consists of a lossy integrator and a lossless integrator. The transfer function is expressed in Eq. (17). The frequency response (ω_0) can be tuned through the resistor (R_f) and capacitor (C_f), while the quality factor (Q) can be tuned through R_k.

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{\frac{R_k}{R}\frac{1/R_f^2C_f^2}{s^2 + s(1/R_kC_f) + 1/R_f^2C_f^2}}{} \tag{17}$$

where $\omega_0 = 1/R_fC_f$ and $1/Q = R_f/R_k$.

The proposed chaotic circuit uses the modified signum and rectangular functions to generate a four-scroll chaotic signal. Fig. 14 depicts the modified rectangular function circuit consisting of six OPAMPs. The nonlinear parameters (C and D) can be tuned through the resistor (R_C) and boundary voltage ($\pm V_D$), respectively. The voltage output V_1 and V_2 are the positive and negative saturation voltage ($\pm V_{SAT}$) of comparators. A summing amplifier combines the outputs of both comparators. The rectangular function can be obtained at node voltage output (V_3). The voltage output at V_4 is amplified proportionally to V_{in1} through the resistor (R_C) non-inverting amplifier. The voltage output (V_{o1}) is an amalgamation of linear and rectangular functions from switch 54HC4066 [57]. Therefore, the voltage in different nodes can be mathematically expressed as

$$V_1 = (V_{in1} - V_D)V_{sat} \tag{18}$$

$$V_2 = -(V_{in1} + V_D)V_{sat} \tag{19}$$

$$V_3 = -(V_1 + V_2) \tag{20}$$

$$V_4 = \left(1 + \frac{R_C}{R}\right)V_{in1} \tag{21}$$

$$V_{o1} = V_4 - V_3 \tag{22}$$

Fig. 15 the modified signum function can be realized by three OPAMPs. The output voltage at V_{s1} is negative signum voltage ($-sign(V_{in})$), and the voltage output at V_{s2} is an output of the summing amplifier for gain from V_{in2} and signum voltage. The slope of the signum function can be adjusted R_A, and the amplitude of the function can be adjusted R_B. The output of V_{o2} can be summarized as

$$V_{o2} = -V_{s2} = \left(V_{in2}\frac{R}{R_A} - sign(V_{in})\frac{R}{R_B}\right) \tag{23}$$

4.2. Realization of the proposed chaotic circuit

The proposed chaotic circuit can conveniently be constructed based on the circuit in Fig. 16. The chaotic circuit illustrates the third-order system incorporated with a modified signum (Fig. 15) and the modified rectangular (Fig. 14) functions. The chaotic signal of the proposed system can be realized by independently tuning the coefficients of the chaotic systems (A, B, C, D, and k) through the slope (R_A), amplitude (R_B), the gain (R_C) of the modified signum circuit, and boundary voltage (V_D) of modified rectangular function circuit. The coefficient k can be tuned through R_k of Tow-Thomas biquad filter, respectively. The $\times, y, z$ state outputs are the voltage outputs at V_{ox}, V_{oy}, and V_{oz}, respectively.

4.3. Experimental results

Off-the-shelf components are constructed and prototyped in the PCB compared with the numerical results of the proposed chaotic systems. The proposed OPAMP-based chaotic circuit prototype is shown in Fig. 17(a), and the experimental setup of the prototype is exhibited in Fig. 17(b). The circuit prototype used in the experiment comprises the commercially available OPAMP (LF347) and analog switch (54HC4066) with $\pm$ 5 V power supplies. All capacitors are 50 nF, and all resistors are 1$k\Omega$, excluding R_A, R_B, R_C, and R_k are variable resistors.

The outputs of the modified signum circuit and modified rectangular circuit are depicted in Fig. 18 (a) and (b), respectively. In modified signum circuit, the potentiometers for tunable parameters of the signum-function circuit are defined $R_A = 3k\Omega$ ($A = 0.6$), and $R_B = 25k\Omega$ ($B = 0.2$). In modified rectangular circuit, the potentiometers for tunable parameters of modified rectangular-function circuit are define $R_C = 9k\Omega$ ($C = 1.5$), and $V_D = 23$ mV ($D = 2.35$). The sample of experimental results of modified rectangular-circuit based on OTAs can see in [38].

The performance of the proposed OPAMP-based chaotic system (Fig. 18) is also assessed by using experimental, given the parameters A, B, C, and D according to Fig. 18. The route to the chaos of phase portrait results of are displayed in X-Y mode on the oscilloscope at an output voltage V_{ox}-V_{oy} plane by given $R = 1k\Omega$, and $C = 50$nF and varying the resistor R_k is illustrated in Fig. 19. Fig. 19(a)-(d) demonstrate the phase

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

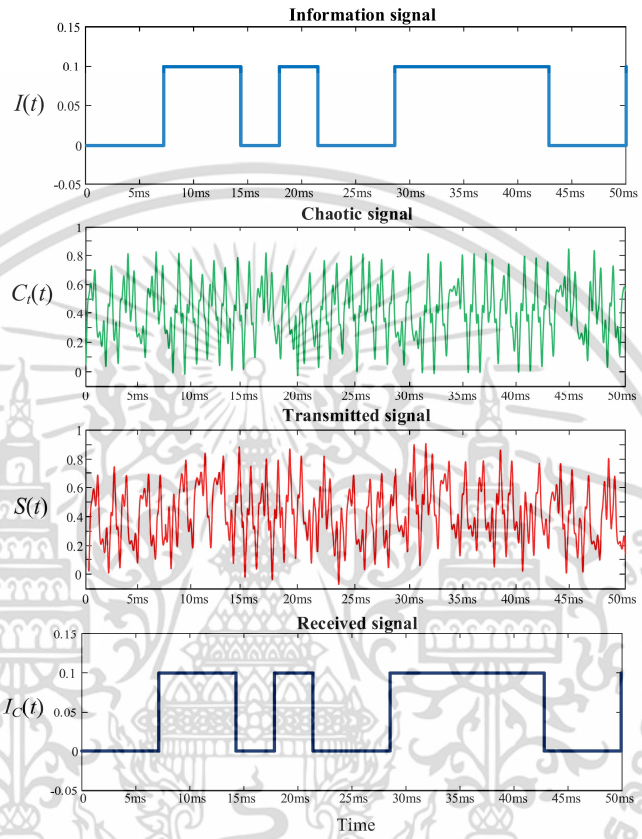


Fig. 23. The results of chaotic masking method from the proposed system in case successful synchronization by using state z key for decrypt synchronization and bit rate information signal is define 380 bit/s.

portraits for a limit cycle or period-1 at $R_k = 200\,\Omega$ ($k = 1.5$), Rössler-like attractor at $R_k = 250\,\Omega$ ($k = 1.43$), double-scroll at $R_k = 500$ ($k = 1.35$), and strange double-scroll attractor at $R_k = 625\,\Omega$ ($k = 1.03$), respectively. Fig. 19(e)-(f) demonstrate the phase portraits for approach to four-scroll at $R_k = 750\,\Omega$ ($k = 0.91$), and strange four-scroll attractor at $R_k = 1.15\text{k}\Omega$ ($k = 0.6$), respectively. Two-dimension attractors on $V_{ox} - V_{oy}$, $V_{ox} - V_{oz}$, $V_{oy} - V_{oz}$, and output waveforms of the proposed chaotic system (given $R_A = 3\text{k}\Omega$ ($A = 0.6$), $R_B = 25\text{k}\Omega$ ($B = 0.2$), $R_C = 9\text{k}\Omega$ ($C = 1.5$), $V_D = 23\,mV$ ($D = 2.35$), and $R_k = 1.15k\Omega$ ($k = 0.6$)) are exhibited in Fig. 20. The various dynamic behaviors of the proposed chaotic system can be manipulated by resistor R_k, which is in good agreement with the numerical results in Fig. 7.

5. Application in secure communications

A chaotic system is sensitively dependent on the initial conditions, long-term unpredictability, and anti-interception capability. Meanwhile, the chaotic system is determined by the equations, parameters, and initial conditions of the nonlinear behaviors, making it challenging to produce and predict. Therefore, the research of chaos application for applied security in communication is an exciting topic for researchers [58].

Chaotic secure communication is divided into chaos analogy communication and chaos digital communication. In Chaos analogy communication, the most popular method is Chaotic Masking (CM), and chaos digital communication is Chaotic Shift Keying (CSK) [58]. The proposed chaotic system is applied in secure communication by the CM method in this work. The variable $I(t)$ is the information signal, $C_t(t)$ is a chaotic signal, $S(t)$ is the transmitted signal, $C_r(t)$ is a synchronized chaotic signal, and $IC(t)$ is the received signal. For synchronization of the proposed system is defined the parameters of a transmitter (master system) as $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1.5$, $D = 2.35$, and $k = 0.6$ with the initial condition $(x_0.y_0.z_0) = (0.1.0.1.0.1)$. The parameterization of the receiver (slave system) is defined corresponding with transmitter. From the offset boosting in Section 3.4, the variable offset control (δ_x) of the proposed system was also applied in synchronization to achieve a unipolar signal.

The equations of the transmitter from the proposed system are

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

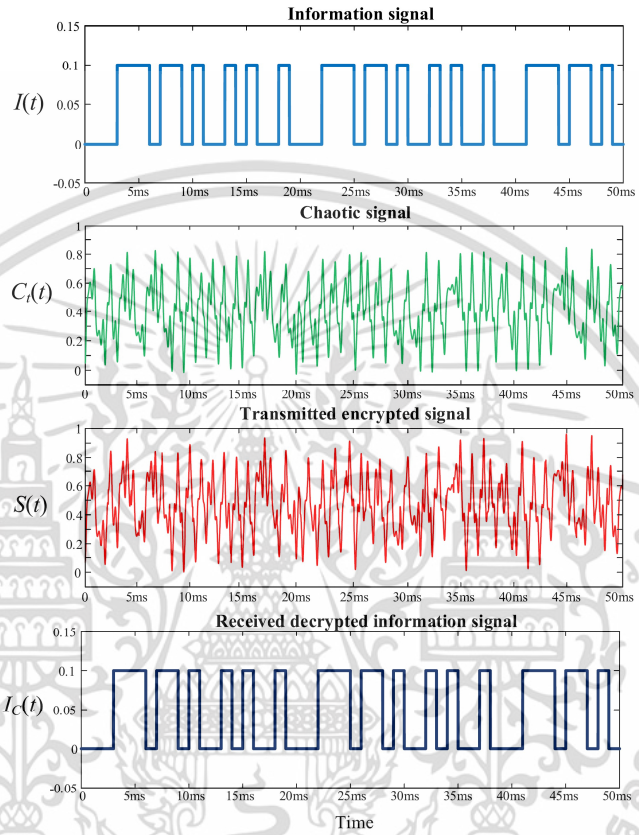


Fig. 24. The results of chaotic masking method from the proposed system in case successful synchronization by using state z key for decrypt synchronization and bit rate information signal is define 1,900 bit/s.

expressed as:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= y_t + (Cy_t \cdot \mathrm{Rect}(Dy_t)),\\ \frac{dy_t}{dt} &= z_t,\\ \frac{dz_t}{dt} &= -(kz_t) - (y_t) - (A(x_t + \delta_{st}) - B\,sgn(x_t + \delta_{st})),\\ S(t) &= I(t) + G_t \cdot C_t(t) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

From Eq. (24) is the transmitter equation of the proposed system. Fig. 21 shows a block diagram of the CM method in secure communication and the receiver equation using the state z-key for decryption. Since the chaotic transmitter and receiver are identical, the chaotic signal from the receiver side is duplicated and synchronized with the transmitter side based on the z-key signal.

The synchronization uses simulated numeric results under the MATLAB Simulink tool, as shown in Fig. 22. The information $I(t)$ is a binary signal with an amplitude of 0.1 V. The chaotic signal $C(t)$ is defined as a unipolar signal by controlled $\delta_x = 0.8$, and amplitude about 0.8 V by defined $G = 0.5$. The information signal $I(t)$ is assigned to be weaker than the chaotic signal $C(t)$ by about 20 dB to 30 dB [59].

From the numeric simulation tools in Fig. 22, the signals in different positions $I(t)$, $C_t(t)$, $S(t)$, and $I_c(t)$ are presented. The input information $I(t)$ is defined with different bit rates (380 bit/s, 1900 bit/s and 3800 bit/s) for decryption, as shown in Figs. 23–25. After the successful synchronization, it is evidence that the received information $I_c(t)$ can be decrypted and reconstructed identical with the transmitted information $I(t)$.

6. Conclusion

This research has proposed a new 3-D chaotic jerk system, which can generate double-scroll and new four-scroll chaotic attractors with two different nonlinear functions. The nonlinear functions consist of a modified signum function and a modified rectangular function. The system can steady-four parameters and obtain the evolution of the attractor by adjusting only one coefficient (k). The positive Lyapunov

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

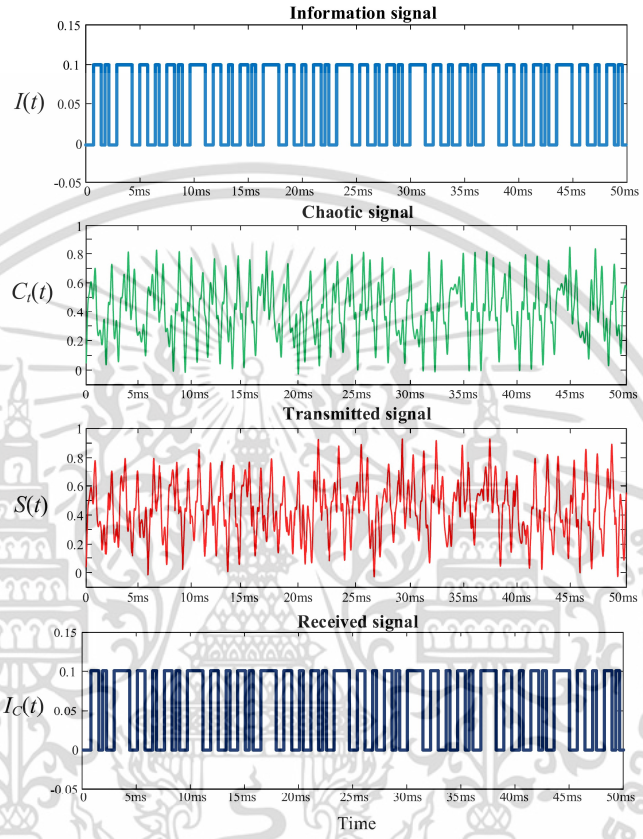


Fig. 25. The results of chaotic masking method from the proposed system in case successful synchronization by using state z key for decrypt synchronization and bit rate information signal is define 3,800 bit/s.

spectrum (LE_1) and period distribution of state variable × (x_{max}) of the bifurcation also demonstrate that this system has chaotic behavior. This chaotic system has been proven the quantitative complexity with Kaplan-Yorke dimension (D_{KY}) is 2.30 and analyzed in terms of the Bifurcation, Lyapunov spectrum, and phase portraits. It can be seen that the results are consistent with the theoretical in all respects. The circuit implementation is again confirmed by the numerical studies based on OPAMP. The experimental results ultimately agreed with the numerical results. Finally, cryptography communications are included as an application which is indicated the efficiency of encrypted signals and decrypted data.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

No data was used for the research described in the article.

Acknowledgment

This research was funded by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang under grant KREF026201. A preliminary version of this work has been published in ECTI-CON 2022 (#1570791810).

References

[1] Huang L, Feng R, Wang M. Synchronization of chaotic systems via nonlinear control. Phys Lett A 2004;320(4):271–5.
[2] Pak C, Huang L. A new color image encryption using combination of the 1D chaotic map. Signal Process 2017;138:129–37.
[3] Li C, Zhang Y, Xie EY. When an attacker meets a cipher-image in 2018: A year in review. J Inf Secur Appl 2019;48:102361.
[4] Rajagopal K, Akgul A, Jafari S, Aricioglu B. A chaotic memcapacitor oscillator with two unstable equilibriums and its fractional form with engineering applications. Nonlinear Dyn 2018;91(2):957–74.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[5] Wang N, Zhang G, Bao H. Bursting oscillations and coexisting attractors in a simple memristor-capacitor-based chaotic circuit. Nonlinear Dyn 2019;9(2):1477–94.
[6] Wang N, Zhang G, Ren L, Bao H. Coexisting asymmetric behavior and free control in a simple 3-d chaotic system. AEÜ-Int J Electron Commun 2020;122:153234.
[7] Wang N, Zhang G, Bao H. Infinitely many coexisting conservative flows in a 4D conservative system inspired by LC circuit. Nonlinear Dyn 2020;99(4):3197–216.
[8] Senouci A, Bouhedjeur H, Tourche K, Boukabou A. FPGA based hardware and device-independent implementation of chaotic generators. AEÜ-Int J Electron Commun 2017;82:211–20.
[9] Pham VT, Akgul A, Volos C, Jafari S, Kapitaniak T. Dynamics and circuit realization of a no-equilibrium chaotic system with a boostable variable. AEÜ-Int J Electron Commun 2017;78:134–40.
[10] Sprott JC. Some simple chaotic flows. Am J Phys 1994;50(2):647–50.
[11] Singh JP, Roy BK. A more chaotic and easily hardware implementable new 3-D chaotic system in comparison with 50 reported systems. Nonlinear Dyn 2018;93 (3):1121–48.
[12] Yang Y, Huang L, Xiang J, Bao H, Li H. Design of multi-wing 3D chaotic systems with only stable equilibria or no equilibrium point using rotation symmetry. AEÜ-Int J Electron Commun 2021;135:153710.
[13] Tang WKS, Zhong GQ, Chen G, Man KF. Generation of n-Scroll attractors via sine function. IEEE Trans Circ Syst I—Fund Theor Appl 2001;48(11):1369–72.
[14] Yalcin ME, Ozoguz S, Suykens JAK, Vandewalle J. n-Scroll chaos generators: a simple circuit model. Electron Lett 2001;37(3):147–8.
[15] Arena P, Baglio S, Fortuna L, Manganaro G. Generation of n-double scrolls via cellular neural networks. Int J Circuit Theory Appl 1996;24(3):241–52.
[16] Suykens JAK, Vandewalle J. Generation of *n*-double Scrolls ($n = 1,2,3,4,...$). IEEE Trans Circ Syst I—Fund Theor Appl 1993;40(11):861–7.
[17] Yalcin ME, Suykens JAK, Vandewalle J. Experimental confirmation of 3- and 5-Scroll attractors from a generalized Chua's circuit. IEEE Trans Circ Sys I—Fund Theor Appl 2000;(3):425–9.
[18] Chang D, Li Z, Wang M, Zeng Y. A novel digital programmable multi-scroll chaotic system and its application in FPGA-based audio secure communication. AEÜ-Int J Electron Commun 2018;88:20–9.
[19] Ozguz S, Elwakil AS, Salama KN. n-Scroll chaos generator using nonlinear transconductor. Electron Lett 2002;38(14):685–6.
[20] Fujiwara T, Horio Y, Aihara K. An integrated Multi-Scroll circuit with floating-gate MOSFETs. *ISCAS* '03, Bangkok, Thailand, vol. 3; 2003. p. 180–3.
[21] Akgul A, Moroz I, Pehlivan I, Vaidyanathan S. A new four-scroll chaotic attractor and its engineering applications. Optik 2016;127(13):5491–9.
[22] Pheivan I. Four-scroll stellate new chaotic system. Optoelectron Adv Mater 2011;5 (9):1003–6.
[23] Xiong L, Zhang S, Zeng Y, Liu B. Dynamics of a new composite four-Scroll chaotic system. Chin J Phys 2018;56(5):2381–94.
[24] Wang L. 3-scroll and 4-scroll chaotic attractors generated from a new 3-D quadratic autonomous system. Nonlinear Dyn 2009;56(4):453–62.
[25] Yalcin M, Ozoguz S, Suykens JAK, Vandewalle J. Families of scroll grid attractors. Int J Bifurcat Chaos 2002;12(1):23–41.
[26] Yalcin ME, Suykens JAK, Vandewalle J. Cellular neural networks, multi-scroll chaos and synchronization. In: World scientific series on nonlinear science, series A, vol. 1, no. 50. World Scientific: Singapore; 2005.
[27] Yu SM, Tang KS. Generation of n×m-scroll attractors under a Chua circuit framework. Int J Bifurcat Chaos 2007;17(11):3951–64.
[28] Yalcin ME. Multi-scroll and hypercube attractors from a general jerk circuit using Josephson junction. Chaos Soliton Fract 2007;34(5):1659–66.
[29] Liu CX, Yi J, Xi XC. Research on the multi-scroll chaos generation based on Jerk mode. Proced Eng 2012;29(4):957–61.
[30] Sprott JC. A new class of chaotic circuit. PhysLett A 2000;266(1):19–23.
[31] Wolf A, Swift JB, Swinney HL. Determining Lyapunov exponents from a time series. Phys D 1985;16(3):285–317.
[32] Frederickson P, Kaplan JL, Yorke ED, Yorke JA. The liapunov dimension of strange attractors. J Differ Equ 1983;49(2):185–207.
[33] Grassberger P, Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D 1983;9(1-2):189–208.
[34] Leutcho GD, Kengne J. A unique chaotic snap system with a smoothly adjustable symmetry and nonlinearity: chaos, offset-boosting, antimonotonicity, and coexisting multiple attractors. Chaos Solit Fract 2018;113:275–93.
[35] Yuan F, Wang G, Wang X. Extreme multistability in a memristor-based multi-scroll hyper-chaotic system. Chaos 2016;26(7):073107.
[36] Hens C, Dana SK, Feudel U. Extreme multistability: attractor manipulation and robustness. Chaos 2015;25(5):053112.
[37] Patel MS, Patel U, Sen A, Sethia GC, Hens C, Dana SK, et al. Experimental observation of extreme multistability in an electronic system of two coupled Rossler oscillators. Phys Rev E 2014;89(2):022918.
[38] Karawanich K, Pronmee P. High-complex chaotic system based on new nonlinear function and OTA based circuit realization. Chaos Solit Fract 2022;162:112536.
[39] Khantibinia M, Mahmoudi M, Eliasi H. Optimal sliding mode control for seismic control of buildings equipped with atmd. Int J Optim Civil Eng 2020;10(1):1–15.
[40] Karawanich K, Kumngern M, Pronmee P. A four-scroll chaotic generator based on two nonlinear functions. In: 19th international conference on electrical engineering/electronics, computer, telecommunications and information technology (ECTI-CON); 2022. https://ieeexplore.ieee.org/document/9795619.
[41] Malasoma JM. What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant? Phys Lett A 2000;264:383–9.
[42] Shivamoggi BK. Nonlinear dynamics and chaotic phenomena: an introduction. Fluid Mech Appl 1997.
[43] Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos. Taylor & Francis Group; 1994.
[44] Nayfeh AH, Balachandran B. Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods. New York: Wiley; 1995.
[45] Argyris J, Faust G, Haase M. An exploration of chaos. Berlin Heidelberg: Springer Verlag; 2015.
[46] Hefferon J. Linear algebra. Mathematics and statistics. 4th Ed. Orthogonal Publishing; 2020.
[47] Glendinning P, Sparrow C. Shilnikov's saddle-node bifurcation. Int J Bifurcat Chaos 1996;6(6):1153–60.
[48] Lorenz HW. Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1993.
[49] Pchelintsev A. An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems. J Appl Nonlinear Dynam 2020;9(2):207–21.
[50] Wolf A, Swift JB, Swinney HL, Vastano JA. Determining lyapunov exponents from a time series. Physica D 1985;16:285–317.
[51] Li C, Jiang Y, Ma X. On offset boosting in chaotic system. Chaos 2021;3(2):47–54.
[52] Li C, Sprott JC, Akgul A, Lu HC, Zhao Y. A new chaotic oscillator with free control. Chaos 2017;27:083101.
[53] Poincare HP. Celestial mechanics. Dyn Syst Theory Chaos Phys Rep Rev Sect Phys Lett 1990;193(3):137–63.
[54] Ke Hui S, Xuan L, Cong Xu Z. The 0–1 test algorithm for chaos and its applications. Chin Phys B 2010;19(11):110510.
[55] Datasheet: LF347 4MHz WIDE Bandwidth Quad J-FET operational amplifers. Available online, MOTOROLA. http://alldatasheet.com/datasheetpdf/view/11651/MOTOROLA/LF347.html.
[56] Huesman LP. Active and passive analog filter design: an introduction. International edition; June 30, 1993.
[57] Datasheet: 54HC4066 rad-hard quad bilateral switch. Available online. STMicroelectronics. https://datasheetspdf.com/datasheet/54HC4066.html.
[58] Sun K. Chaotic secure communication. Berlin, Germany: De Gruyter; 2016.
[59] Yang T. A survey of chaotic secure communication systems. Int J Compt Cognit 2004;2:81–130.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Nonlinear Dyn (2024) 112:4951–4976
https://doi.org/10.1007/s11071-024-09275-7

ORIGINAL PAPER

Image cryptography communication using FPAA-based multi-scroll chaotic system

Khunanon Karawanich · Jirat Chimnoy · Fabian Khateb · Muhammad Marwan · Pipat Prommee

Received: 5 October 2023 / Accepted: 13 December 2023 / Published online: 26 January 2024
© The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature B.V. 2024

Abstract This research presents an image cryptography communication system based on a novel 3D high-complex chaotic system. The chaotic system is implemented by field programmable analog array (FPAA), which is a conveniently reconfigurable system. The image cryptography communication system is realized using low-cost microcontrollers and commercially available devices. The proposed chaotic system based on the jerk model incorporated two different nonlinear functions that can generate single-scroll, double-scroll, three-scroll, four-scroll, and six-scroll attractors by adjusting only one coefficient. The fundamental dynamical properties of the proposed system are investigated, viz., equilibria and stability, dissipative, phase portraits, bifurcation, and Lyapunov exponent, etc. The four-scroll attractor of the proposed system is applied in image encryption. The multi-scroll attractor's characteristic in this work can achieve relatively high complexity, with a high Kaplan–Yorke dimension of up to 2.45. The performances of the multi-scroll chaotic using FPAAs are proven by comparing the experimental and numerical results. The image cryptography communication system based on the chaotic masking method (CM) has been tested around 1×10^7 bits under 9600 bps. The measuring signals of the image cryptography communication system are demonstrated in different scenarios. The experimental results can be ensured that mismatched parameters give the complete cipher image if and only if the bit error rate is more significant than $490{,}000 \times 10^{-6}$.

Keywords Image cryptography · Multi-scroll attractor · High complexity · FPAA · Communication · Low cost

K. Karawanich · J. Chimnoy · P. Prommee (✉)
Department of Telecommunications Engineering, School of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand
e-mail: pipat.pr@kmitl.ac.th

F. Khateb
Department of Microelectronics, Brno University of Technology, Technická 10, 601 90 Brno, Czech Republic

F. Khateb
Faculty of Biomedical Engineering, Czech Technical University in Prague, nám. Sítná 3105, 272 01 Kladno, Czech Republic

F. Khateb
Department of Electrical Engineering, Brno University of Defence, Kounicova 65, 662 10 Brno, Czech Republic

M. Marwan
School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi 276005, Shandong, China

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1 Introduction

The chaotic system is a nonlinear system that can be controlled and applied in many fields, such as power systems protection, biomedical systems analysis, computer sciences, and telecommunications cryptography [1, 2]. Various chaotic systems with their dynamic behaviors were recently introduced and physically implemented [3, 4]. One superior behavior of the chaotic system is sensitivity to the initial condition. This property contributes to many interesting complex features (e.g., mixed mode, multistability, bursting, hysteresis, coexisting multiple asymmetric attractors, etc.). Studying the complex features of chaotic systems is challenging for researchers. It is, therefore, a popular topic of current chaotic research.

In the past, many models have been invented to develop chaotic studying. Models of the chaotic system well known in the literature are the Lorenz system 1963 [5], Rossler system 1976 [6], Chua system 1984 [7], Sportt system 1994 [8], Jerk system 2000 [9], etc. Each model mentioned earlier has different complexity with the number of state variables in the system and the characteristics of nonlinear functions until various dynamic behaviors can occur inside the system. Jerk is a system with a low-complex structure and is simple to customize. The general form of the jerk system is $\dddot{x} = F(\ddot{x}, \dot{x}, x)$, where x is the first derivative of the location, $\dot{x}$ namely speed, $\ddot{x}$ the second derivative is the acceleration, and the third-order derivative is $\dddot{x}$ known as Jerk [9]. Recently, new chaotic attractors with high complexity, such as multi-scroll or multi-wing chaotic attractors in 3D autonomous systems, have been rapidly developed [10]. Most of the multi-scroll attractors were generated by increasing the breakpoints in the nonlinearity. Recently, a four-wing or three-wing attractor can be generated in some 3D systems [11], and two-, three-, and four-wing attractors of 3D autonomous chaotic systems have been reported in [12]. However, note that 3D systems cannot quickly provide multi-scroll generation. In literature, some results exist about how to generate multi-scroll chaotic attractors by using the jerk system, which is modified by increasing the breakpoint of nonlinear functions to appear multi-scroll, such as the signum function [13] and sine function [14]. How to generate multi-wing chaotic attractors remains an open problem; therefore, investigating various possible chaotic behaviors is essential. Analyzing the performances of creating new chaotic systems is indispensable. The most prominent Lyapunov exponent (*LE*) [15] provides the predictability of chaos in a dynamical system. A system with a positive Lyapunov exponent is usually chaotic. Holding a large value positive *LE* and a high-value overview of Kaplan–Yorke [16] means the system is highly complex. Likewise, examining the influence of parameters of the chaotic system that affect various behavior dynamics with the bifurcation theoretical is extremely important.

However, a circuit design of chaotic systems is necessary to confirm the possibility of numerical results and realistic engineering applications. Different approaches are available to realize chaotic circuits, whether designed as analog or digital circuits (embedded systems). Analog circuit designs using OPAMP [17] and digital designs using microcontroller unit (MCU) [18] and FPGA (field programmable gate array) [19, 20] were preferable in the experiment. Digital designs can be designed and programmed according to the block diagram of chaotic systems that design. FPAA (field programmable analog array) is a programmable device for designing analog functions. Because this electronic device has a feature that can be used to change component values and interconnections programmatically, it can be dynamically reconfigured. This meant a design modification or a completely new design could be implemented with a reconfigurable FPAA device. FPAA provides more efficient and economical solutions for analog dynamical system designs, including configurable analog blocks (CABs) to perform the desired analog operations. In the design software developed by the manufacturer, configurable analog modules (CAMs) for various functions are prepared and presented to the users. [21]. Using FPAAs, various dynamical systems, including different chaotic systems, can be implemented at less cost in a much smaller size than discrete circuit realizations.

Chaos has unpredictable motion but is a deterministic dynamical system. The unique properties are the sensitivity of the initial condition and the parameter. From these characteristics, chaotic systems are frequently adopted in cryptography to develop secure communication systems. In 1989, the chaotic encryption algorithm was explicitly presented by R.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Matthews [22]. Since then, there has been extensive research on chaos-based cryptography, including the practical application stage.

Currently, image information is widely transmitted over the Internet. As a result, image data security is an essential requirement [23]. Much research on image and video encryption has been published. The principle of chaos encryption is based on the ability to produce a sequence of numbers that are unpredictable. This property is used to encrypt messages. The difficulty of decryption for chaos depends on the initial condition and the parameter of the chaotic system used for generating. A slight deviation between the transmitter and the receiver for a chaotic system causes a mismatch decryption. Moreover, P. Sanprang et al. proposed image cryptography using FPAA-based two conventional chaotic systems [24]. Other literature proposed a Feedback Chaotic Synchronization (FCS) for designing a real-time secure symmetric encryption scheme implemented in hardware [25].

Multi-scroll chaotic generation on a 3D system challenge, a novel 3D chaotic jerk system with two different nonlinear functions, is aimed to generate the multi-scroll output. One of the highlights in this work is the several dynamic behaviors, viz., single-scroll, double-scroll, three-scroll, four-scroll, and six-scroll attractors from only one parameter control. Moreover, multistability can be found in symmetry and asymmetry boundaries from parallel branch bifurcation examination. With characteristics of a strange attractor, the complexity of this work is high, up to 2.45 by the Kaplan–Yorke dimension. The proposed system has essential dynamic properties investigation, including equilibrium, stability, dissipative of attractor, phase portraits, Lyapunov exponents, and bifurcation. Some special features are graphically illustrated, viz., Poincaré map, 0–1 test chart, amplitude control, and offset boosting. The several basins of attraction are also used to confirm the multistability phenomenon. The several dynamic behaviors that occur in the proposed system can be gainful in various fields of application.

The proposed multi-scroll chaotic system is implemented on the FPAA evaluation board. The experimental results are compared with numerical results to confirm the possibility of several dynamic behaviors. The programmability of the FPAA device allows for exploring accurate experimental results. Finally, applying a multi-scroll chaotic attractor in encryption improves the security of communication systems. The proposed chaotic system's four-scroll attractor is applied to image encryption based on the chaotic masking method (CM). Using FPAA, the system can facilitate the adjustment of parameters in the encryption processing. The communications system is prototyped using a low-cost microcontroller and commercially available devices. The experimental results of image encryption and communications are demonstrated. The results consist of reconstructed images in successfully recovered and mismatched cases, including the output waveforms in each process and the values of each realized parameter.

2 Description and analysis of the proposed system

2.1 Description of the proposed jerk chaotic system

One of the hallmarks of the jerk model is a simple customized independent nonlinear function [9]. This work chooses the jerk model for designing the multi-scroll chaotic attractor. The model is reestablished by using two nonlinear functions by increasing the $G(x)$ and $G(y)$ nonlinear functions of variable x and y positions [26, 27]. The ordinary differential equation (ODE) of the proposed system can be expressed in Eq. (1a). The nonlinear functions $G(x)$ and $G(y)$ are designed as Eqs. (1b) and (1c), respectively.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + G(y), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -kz - y - G(x); \end{cases} \tag{1a}$$

$$G(x) = Cx\text{Rect}(Dx) \approx \frac{Cx}{2} \cdot (-(\tanh(m(x + 1/2D)) \cdot \tanh(m(x - 1/2D))) + 1), \tag{1b}$$

$$G(y) = Ay - B\text{sgn}(y) \approx Ay - B\tanh(my) \tag{1c}$$

where all coefficients (A, B, C, D, k) are positive constants, and $m = 100$.

2.2 The configuration and approximation of the nonlinear functions

The nonlinear function of a chaotic system is an essential ingredient that makes the system generate chaotic signals. The characteristics of the nonlinear function influence

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

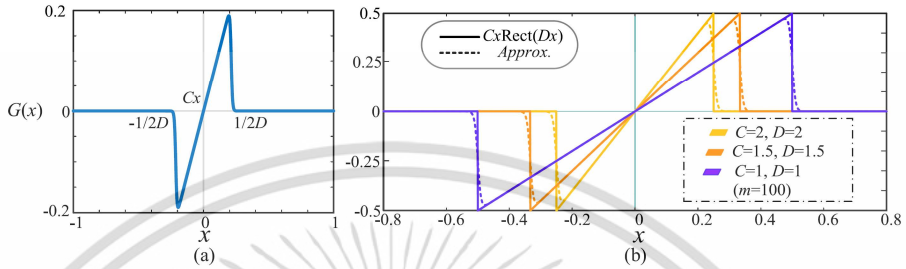


Fig. 1 Plot of modified rectangular function $G(x)$ **a** the relation of coefficients C and D **b** the compatibility between the modified rectangular functions and approximating functions with varying C and D

various complex behaviors of the system. Significantly, adjusting the related condition of parameters can exhibit the presence of symmetry or asymmetry coexisting behaviors (complex dynamic features), making chaotic systems more interesting for education.

This work uses two nonlinear functions, viz., modified rectangular function ($G(x)$) and modified signum function ($G(y)$) expressed as Eqs. (1b) and (1c), respectively. The nonlinear functions consist of the coefficients of the gain (C) and boundary ($1/2D$) for $G(x)$, the slope (A), and amplitude (B) for $G(y)$ [26, 27] and given m = 100. The approximation method of nonlinear function transformed into trigonometric form can be seen in [26]. The graphical of the nonlinear functions proposed are shown in Figs. 1 and 2.

From the above design principles, an interesting example of the strange four-scroll attractor (falcon-like scroll attractor) for the proposed system is shown in Fig. 3. Observed that the trajectories orbit in the phase space is the novel strange attractor, the proposed system will be analyzed thoroughly such as dissipative, stability, bifurcation, Lyapunov, multiple attractors, special features, etc. However, investigating the parameters (A, B, C, D, and k) leads to proven multistability and analysis of various dynamic behaviors. Finally, the proposed system will be designed on the FPAA to confirm the numerical results.

2.3 Dissipative of the proposed system

The existence of attractors in the proposed system could be obtained by analyzing the volume contraction or expansion rate in the state space. The volume contraction rate of a continuous-time dynamical system is described by $e = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\dot{e} = H(e)$ and $H(e) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^{\mathrm{T}}$. Thus, the divergence of the system (1) can be easily derived as follows:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \nabla \cdot H(e) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \\
\Lambda &= \nabla \cdot H(e) = \frac{\partial [y + \{Ay - B\tanh(my)\}]}{\partial x} + \frac{\partial (z)}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial [-kz - y - \{Cx/2 \cdot (-(\tanh m(x + 1/2D) \cdot \tanh m(x - 1/2D)) + 1)\}]}{\partial z} \\
\Lambda &= \nabla \cdot H(e) = -k < 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Since $\Lambda = -k < 0$, the proposed system is dissipative (convergent). Hence, the trajectories are confined in a contracted volume and could eventually form an attractor [28, 29].

2.4 Dynamical analysis of the proposed system

2.4.1 *Equilibrium points*

The equilibrium points of the proposed chaotic system are obtained by solving:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + G(y) = 0 \\ \dot{y} = z = 0 \\ \dot{z} = -kz - y - G(x) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

The equilibrium of the chaotic system can be calculated by equating derivatives of the state variables to zero (i.e., $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$) as described in Eq. (4).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

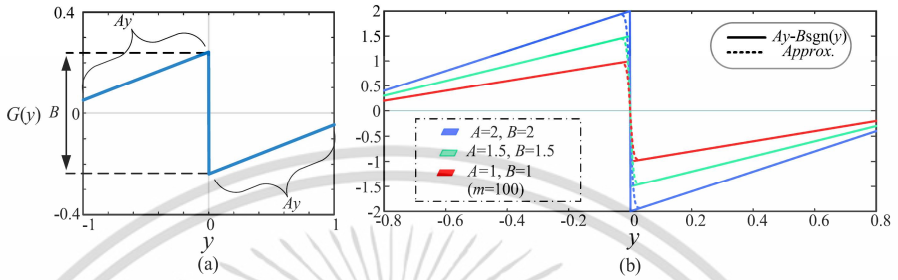


Fig. 2 Plot of modified signum function $G(y)$ **a** the relation of coefficients A and B **b** the compatibility between the modified signum functions and approximating functions with varying A and B

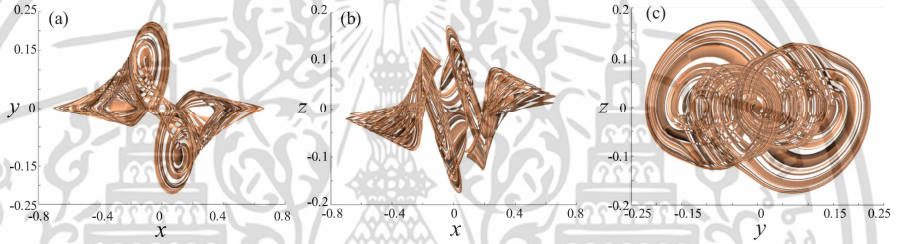


Fig. 3 The 2D strange attractor of the proposed system (1) with two nonlinear functions by given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$, $k = 0.6$, and initial condition $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ **a** x–y plane **b** x–z plane **c** y–z plane

$$G(y)-G(x)=\left[[Ay-B\tanh(my)]-\frac{Cx}{2}\cdot(-(\tanh(m(x+1/2D))\cdot\tanh(m(x-1/2D)))+1)\right]=0 \tag{4}$$

where $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$ and $m = 100$. Given $G(y) - G(x) = 0$, $(mx + m/2D) = \alpha$, and $(mx - m/2D) = \beta$, [26] the rest equilibrium points can be calculated by

$$0 = -(\tanh(\alpha)\cdot\tanh(\beta)) + 1 \tag{5}$$

Given $G(x) = G(y) = 0$, thus the parameters $(\alpha, \beta) >> 1$ and $(\alpha, \beta) << 1$ then the first non-zero fixed point is $y_{E1,2} = \pm 0.33$. Given the parameters $(\alpha, \beta) = \pm 3$, the remaining non-zero fixed points can be found at $x_{E1,2} = \pm 0.638297871$. Therefore, the proposed system has three equilibrium points (E_0, E_1, and E_2) are origin equilibrium points $E_0(0, 0, 0)$ and the rests equilibrium points are $E_1(0.638297871, 0.33, 0)$ and $E_2(-0.638297871, -0.33, 0)$.

2.4.2 *Eigenvalue and stabilities*

The calculated eigenvalues can determine the stability of the dynamic system by assuming the system is in the equilibrium state [26, 30]. The stability properties of the system are investigated from the equilibrium points [26]. The Jacobian matrix of the proposed chaotic system is expressed in Eq. (6).

$$J_E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1+(v(y)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(u(x)) & -1 & -k \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \tag{6}$$

where $v(y) = \frac{\partial G(y)}{\partial y} = -A + mB\sec h^2(my)$,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial x} = -0.5 \cdot C \cdot \left[\begin{array}{l} x\left(m\sec h^2\left(my + \frac{m}{2D}\right) \cdot \tanh\left(mx - \frac{m}{2D}\right) \right. \\ \qquad \left. + m\sec h^2(mx - \frac{m}{2D}) \cdot \tanh\left(mx + \frac{m}{2D}\right)\right) \\ + \tanh\left(mx + \frac{m}{2D}\right) \cdot \tanh\left(mx - \frac{m}{2D}\right)\end{array}\right]$$

The parameters are $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$, and $k = 0.6$ with $m = 100$.

The Jacobian matrix of the proposed system is evaluated at three equilibrium points (E_0, E_1, E_2) by solving the Jacobian matrix in Eq. (6). Firstly, the equilibrium point at E_0(0,0,0) for the proposed chaotic system can be expressed as

$$J_{E_0(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + (19.4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(0.5) & -1 & -0.6 \end{pmatrix} \quad (7)$$

For the rest equilibrium points $E_{1,2} \cong (\pm 0.64, \pm 0.33, 0)$ can be express as

$$J_{E_{1,2}(\pm 0.64, \pm 0.33.0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + (-0.6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(-0.5) & -1 & -0.6 \end{pmatrix} \quad (8)$$

In Eqs. (7–8), the characteristic equation $F(\lambda) = \det(J_E\text{-}\lambda I)$ associate to the above Jacobian matrix J_{E0} and $J_{E1,2}$ can be derived by using the linear algebra theorem [31] as follow:

$$F(\lambda)_{E_0} = \det(J_{E_0} - \lambda I) = \lambda^3 + 0.6\lambda^2 + \lambda + 10.2 \quad (9)$$

$$F(\lambda)_{E_{1,2}} = \det(J_{E_{1,2}} - \lambda I) = \lambda^3 + 0.6\lambda^2 + \lambda - 0.2 \quad (10)$$

The eigenvalues for the equilibrium point E_0 are calculated as Eq. (11)

$$\lambda_1 = -2.219, \lambda_2 = 0.810 + 1.984i, \lambda_3 = 0.810 - 1.984i. \quad (11)$$

The eigenvalues for the equilibrium point $E_{1,2}$ are calculated as Eq. (12)

$$\lambda_1 = 0.176, \lambda_2 = -0.368 + 0.993i, \lambda_3 = -0.368 - 0.993i. \quad (12)$$

According to the Shilnikov theorem [32], given $\lambda_1 = q$ and $\lambda_{2,3} = p + i\omega$ where $qp < 0$ and $\omega \neq 0$. The eigenvalues of the proposed chaotic system comply with the Shilnikov theorem because the characteristic equation consists of one real eigenvalue and a pair of complex conjugate eigenvalues, given $|q| > |p|$. Moreover, unstable saddle focus is evident from the eigenvalues of the proposed chaotic system at the equilibrium point, at E_0 and $E_{1,2}$ [30].

2.5 Complexity quantitative by Lyapunov exponent and Kaplan–Yorke dimension

The complexity of the proposed system is the critical determinant of the performance for chaotic behavior; the Kaplan–Yorke dimension can identify it. Firstly, the Lyapunov exponents (*LEs*) in this work are calculated using Wolf's algorithm [15, 33]. The simulation of the proposed system has defined the parameters as: $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$, and $k = 0.2$ (these parameter values are those that can achieve the highest D_{KY} of the six-scroll attractor in Fig. 11f(i)) with the initial conditions (x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.01). This work has proposed a three-dimensional chaotic system incorporating two different nonlinear functions that can generate a multi-scroll chaotic attractor. The three Lyapunov exponents (LE_1, LE_2, and LE_3) in the time series are shown in Fig. 4 using a time span $\Delta t = 0.001$. The *LEs* of the proposed system are one positive, and the sum of *LEs* is negative, confirming that the system has chaotic behavior.

The multi-scroll characteristic of the proposed system can be specified complexity values in analytical. The complexity is determined by the Kaplan–Yorke dimension (D_{KY}) [30] based on *LEs* as the formula in Eq. (13).

$$D_{KY} = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|}\sum_{i=1}^{j} LE_i \quad (13)$$

The Kaplan–Yorke dimensions (D_{KY}) of the proposed chaotic system can be expressed as

$$D_{KY} = 2 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3|} = 2 + \frac{0.241701 - 0.04}{|-0.448254|} = 2.45 \quad (14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

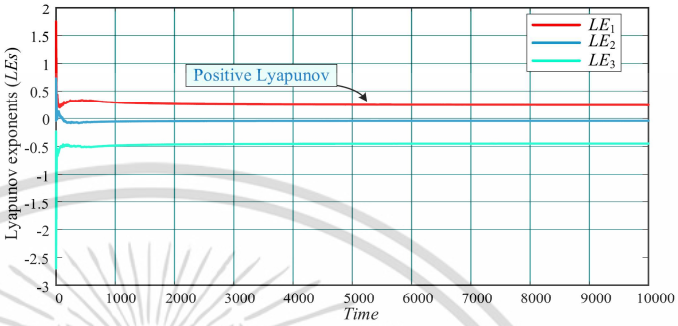


Fig. 4 The *LEs* of the proposed chaotic system (six-scroll attractor)

The Kaplan–Yorke dimensions of the proposed chaotic system are obtained at 2.45. To verify the complexity of the chaotic system based on attractors and waveforms.

3 Numerical study of the proposed system

The various dynamics behaviors of the proposed system (1) are investigated by using Lyapunov and bifurcation diagrams. The presence of multistability [34, 35] is proved by coexisting symmetrical solutions. Numerical results are presented by nonlinear graphics analysis tools, viz., phase portraits, Poincare, 0–1 test chart, and basin of attraction.

3.1 Bifurcation analysis

The proposed system is a highly complex chaotic system consisting of multiple types of attractors (including four-scroll and six-scroll attractors). The system has five parameters (i.e., A, B, C, D, and k) that influence dynamics behaviors; the bifurcation diagram is chosen for parameter examination. The plot of bifurcation is presented on the local maxima of state variable x (x_{max}) versus the parameter control. The proposed system has diverse dynamics characteristics that are exciting in phase space.

The first step, the analysis bifurcation of the proposed system, is concentrated on dynamic behavior when changing the values of system parameters with different initial conditions. The bifurcation of parameter k in the range $0.1 \leq k \leq 1.2$ is chosen to monitor together with different values of parameter A (i.e., $A = 1.5$, $A = 1$, $A = 0.6$, $A = 0.2$) and two initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (\pm\ 0.1, 0.1, 0.1)$ as Fig. 5, to observe the occurrence of various dynamic behaviors. The bifurcation in Fig. 5a reveals the superimposed (regular chaotic attractor area) within the green border when $A = 1.5$. Likewise, Fig. 5b–d reveals the superimposed asymmetry and symmetry boundary when parameter A is adjusted and two different initial conditions. One of the highlights of this work is the variety of dynamics. Thus, Fig. 5c is most remarkable because within one scenario of bifurcation can be found superimposed, symmetry, and asymmetry boundaries. The values of these parameters set ($A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$ of Fig. 5c) are chosen to analyze for other dynamic behaviors.

3.1.1 Examination for variation of parameters A and B

To monitor the influence of five parameters for the proposed system, let's start with the parameters of the modified signum function ($G(y)$) (Figure 6). The bifurcation diagram is plotted by given $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$, and $k = 0.6$, including defining the initial condition according to below of the figure. In a system exhibiting multiple attractors, the long evolution of the system's motion depends crucially on the value of the initial condition. The display of various attractors resulting from different initial conditions is a great demonstration. In Fig. 6a, parameter A is revealed in the $0.1 \leq A \leq 2$ range. Figure 6b–c shows a pair symmetry of single-band attractors and an irregular dual asymmetry of falcon-like scroll (four-scroll) attractors at $A = 0.2$ and $A = 0.64$,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

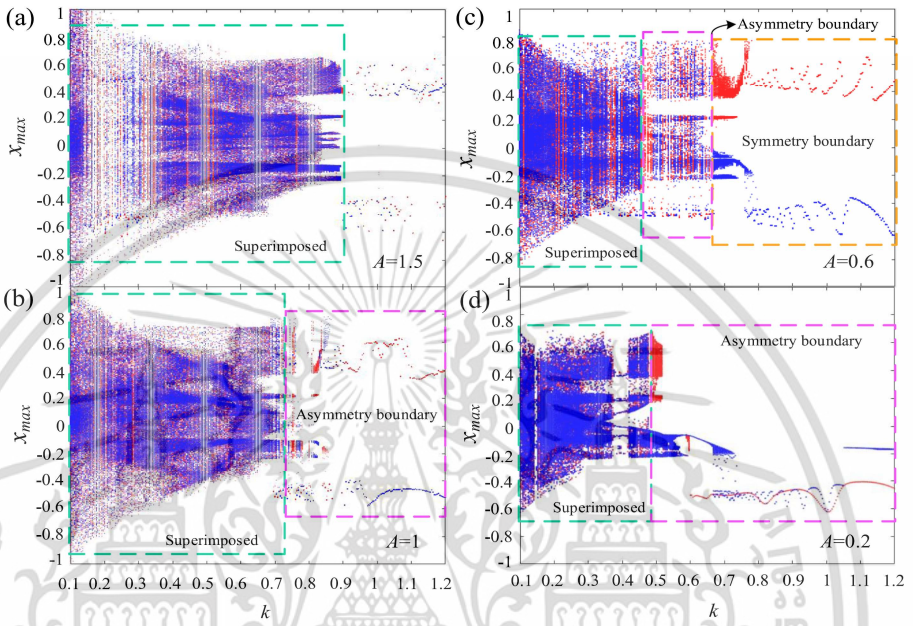


Fig. 5 Bifurcation analysis of parameter k in range $0.1 \leq k \leq 1.2$ for four discrete of parameter A by fixed $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$ with initial condition (0.1, 0.1, 0.1) for red color and (− 0.1, 0.1, 0.1) for blue color **a** $A = 1.5$ **b** $A = 1$ **c** $A = 0.6$ **d** $A = 0.2$

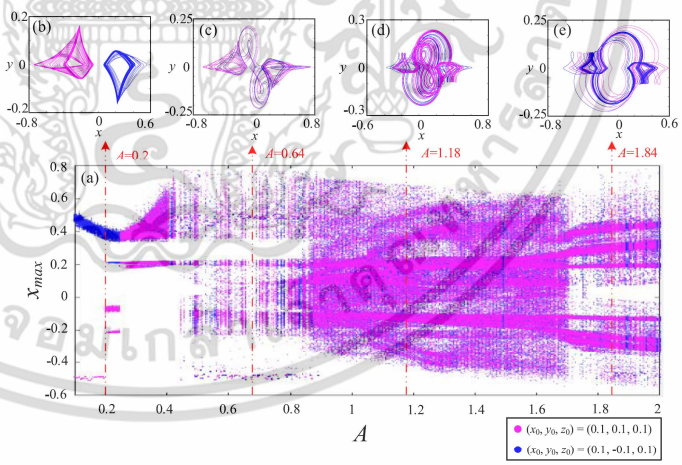


Fig. 6 The graphical of some results from the influence of parameter A, **a** the bifurcation on the local maxima x **b** phase portraits for $A = 0.2$ **c** phase portraits for $A = 0.64$ **d** phase portraits for $A = 1.18$ **e** phase portraits for $A = 1.84$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

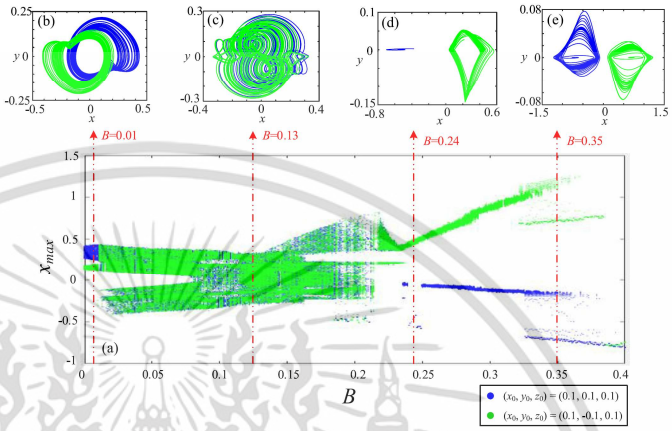


Fig. 7 The graphical of some results from the influence of parameter B, **a** the bifurcation on the local maxima x **b** phase portraits for $B = 0.01$ **c** phase portraits for $B = 0.13$ **d** phase portraits for $B = 0.24$ **e** phase portraits for $B = 0.35$

respectively. Figure 6d–e shows superimposed big-size four-scroll attractors and an irregular dual asymmetry of four-scroll attractors at $A = 1.18$ and $A = 1.84$, respectively. These results are just some attractors on phase portraits obtained from the influence of parameter A.

The rich dynamic behaviors of the proposed system can be noticed by varying the parameter B as well. Figure 7a shows the bifurcation diagram of the control parameter B in the range of $0 \leq B \leq 0.4$, given $A = 0.6$, $C = 1$, $D = 2.5$, $k = 0.6$, and the initial condition see through below of Fig. 7. Figure 7b–c shows a pair symmetry of mono attractors and superimposed of approach to six-scroll attractors at $B = 0.01$ and $B = 0.13$, respectively. Figure 7d–e shows the asymmetry of the limit cycle coexisting with a single-band attractor and a pair asymmetry of single-band attractors at $B = 0.24$ and $B = 0.35$, respectively.

3.1.2 *Examination for variation of parameters C and D*

The bifurcation diagrams for the parameters of the modified rectangular function ($G(x)$) are revealed in Figs. 8 and 9, which can be observed as the initial condition according to the below figure. The metamorphosis of dynamics on the bifurcation diagram of parameter C is similar to parameter A. Figure 8a reveals the fragmentation of state variable x when control parameter C is in the range of $0.5 \leq C \leq 2$, given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $D = 2.5$, and $k = 0.6$. Figure 8b–c shows a pair symmetry of a single-band scroll and a symmetry of limit cycle coexisting with a falcon-like scroll attractor at $C = 0.54$ and $C = 1.12$, respectively. Figure 8d–e shows the superimposed approach to the six-scroll attractor and an irregular dual asymmetry of four-scroll attractors at $C = 1.55$ and $C = 1.82$, respectively. Figure 9a shows the bifurcation for varying the parameter D in the $0.1 \leq D \leq 4$ range, given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, and $k = 0.6$. Figure 9b–c shows the asymmetry of a mono attractor coexisting with a double-scroll attractor and the asymmetry of three-scroll attractors coexisting with four-scroll attractors at $D = 0.2$ and $D = 1.45$, respectively. Figure 9d–e shows a pair of symmetry of double-scroll attractors and a pair of symmetry of single-band attractors at $D = 2.8$ and $D = 3.5$, respectively.

The whole mention of parameters influence (A, B, C, and D) is just some dynamic behaviors that occur on phase portraits, it is evident that the proposed system can be generated rich types of attractors and has multistability behavior. Which consist of single-band scroll, double-scroll attractor, three-scroll attractor, four-scroll attractor, and six-scroll attractor, including irregular attractor, approach to variety attractor until dual attractor of case superimposed, symmetry, and asymmetry that occur from the different initial condition. One of the challenges of chaotic major

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

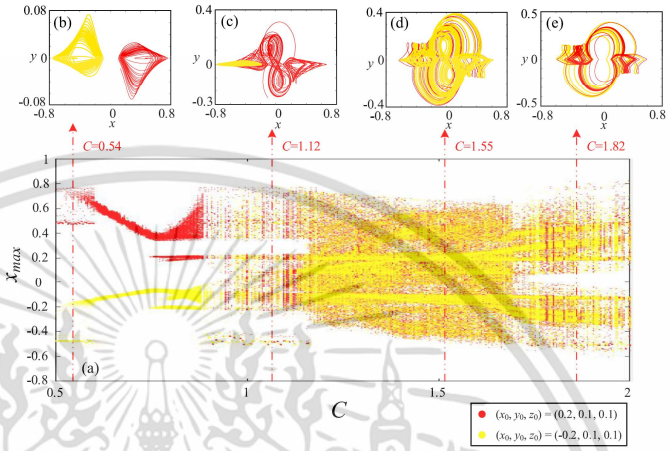


Fig. 8 The graphical of some results from the influence of parameter A, **a** the bifurcation on the local maxima x **b** phase portraits for $A = 0.2$ **c** phase portraits for $A = 0.64$ **d** phase portraits for $A = 1.18$ **e** phase portraits for $A = 1.84$

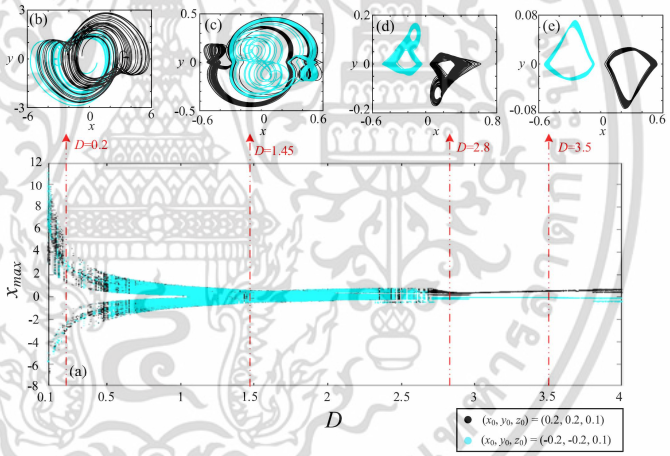


Fig. 9 The graphical of some results from the influence of parameter A, **a** the bifurcation on the local maxima x **b** phase portraits for $A = 0.2$ **c** phase portraits for $A = 0.64$ **d** phase portraits for $A = 1.18$ **e** phase portraits for $A = 1.84$

researchers is attempting to thoroughly explore the complex behavior of systems to implement the designed system for various applications.

3.1.3 Route to chaos respect with parameter k

The route to the chaos of the proposed system is determined by varying the parameter k. The bifurcation diagram corresponding with the Lyapunov spectrum is shown in Fig. 10. The overview of phase portraits corresponding to time series when the control parameter k is varied is shown in Fig. 11a–f. The main proposed attractor in this work (falcon-like scroll attractor) is used to confirm the experimental setup presented in Fig. 11d (similar to Fig. 3) because the characteristics of trajectories on phase space have an evident structural attractor suitable for observation and comparison.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

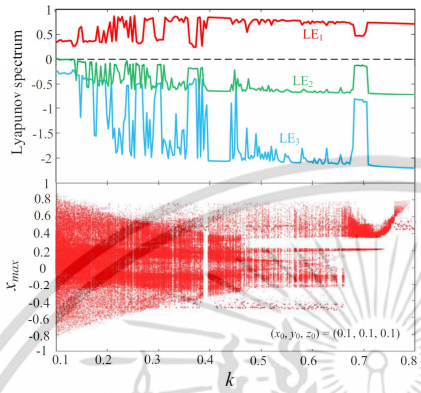


Fig. 10 Route to the chaos of parameter k in range $0.1 \leq k \leq 0.8$ (Given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$) Lyapunov spectrum (Upper panel) and Bifurcation diagram (Lower panel)

To confirm the highly complex chaotic behavior of the proposed system, gaining further insight into other field results of the system is essential. Figure 12a, b depicts the 3D trajectory on a cross-section Poincaré coupled with the proposed system's Poincaré map [36]. Figure 12c shows the Brownian motion for specified chaotic behavior on the p, s plot of the 0–1 test chart [37].

3.2 Multistability analysis

The multistability of multiple coexisting attractors for the same values of parameters is an essential property found in nonlinear dynamical systems from various fields of science and engineering [34, 35]. The analysis of the proposed system reveals the multistability results from the presence of parallel bifurcation branches. This also reflects the unpredictability in the system's behavior, contributing to enriching its complexity. The proposed system is highly sensitive to initial conditions and can generate many attractors. The following results show the occurrence of multiple coexisting attractors for the symmetric and asymmetric dynamics.

3.2.1 Symmetry behavior

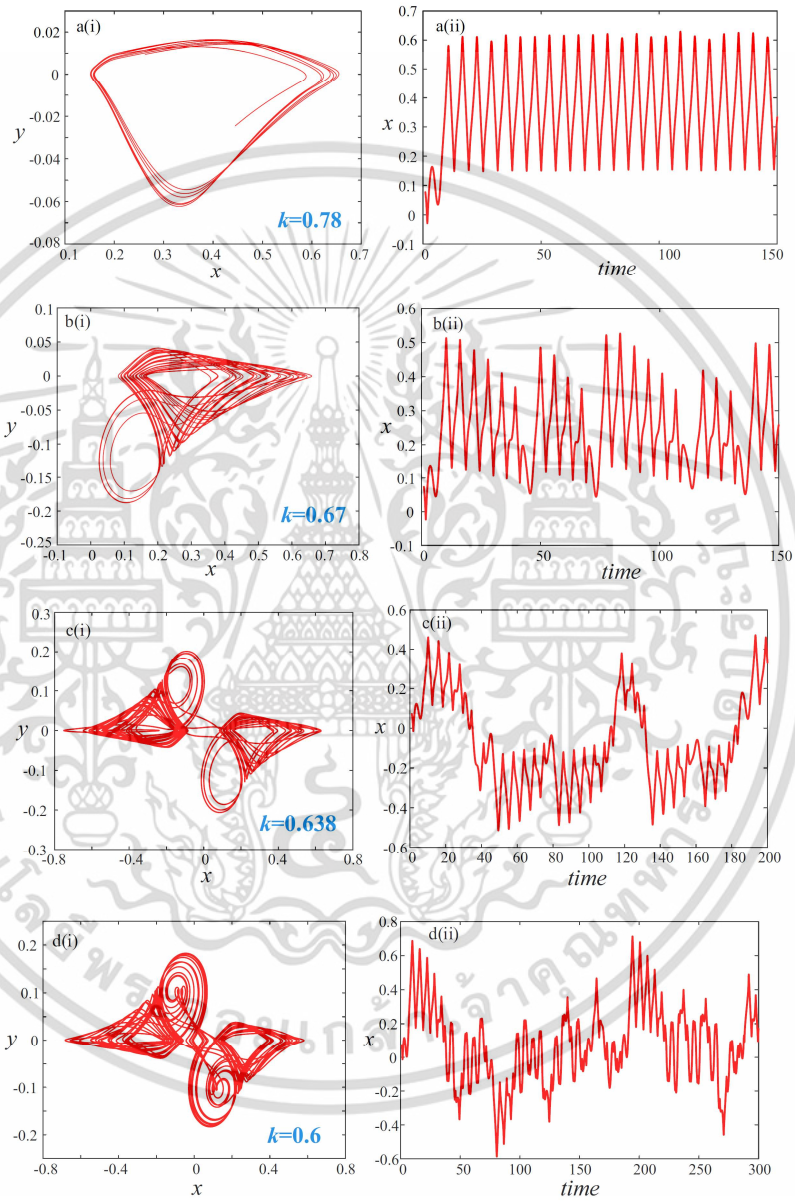
The sample of symmetry of the proposed system can be found from the influence of parameter C with different initial conditions (Note that these are just some of the results examples to demonstrate). Figure 13 shows the bifurcation of parameter C in the range $0.5 \leq C \leq 1$ with different initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 0.1, 0.1, 0.01)$ in the blue, and red colors, respectively. Bifurcation can be observed in coexisting parallel branches in the $0.5 \leq C \leq 0.885$ range. The coexisting symmetric attractors on phase portraits from varying parameter C is illustrated in Fig. 14. A pair symmetry of single-band attractors, stable cycle, approach to double-scroll attractors, and double-scroll attractors are plotted in Fig. 14a–d, respectively. Two colors of attractors from Fig. 14e and g correspond with the colors of the basin of attraction in Fig. 15a and b, respectively. The beige color zone of basins is related to divergent dynamics.

3.2.2 Asymmetry behavior

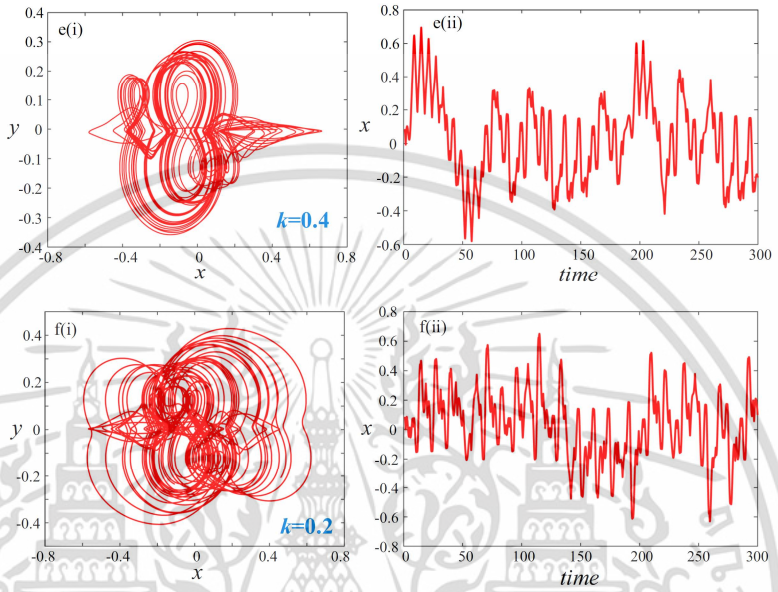
At this stage, the presence of multiple coexisting asymmetry attractors is presented. The asymmetry behavior study is helpful to in-depth about the chaotic system proposed to prove adjunct complex dynamic behaviors. To investigate the coexisting asymmetric attractors of the system. Figure 16, the bifurcation of parameter k is plotted in the range $0.4 \leq k \leq 0.8$ with different initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 0.25, \pm 0.2, 0.01)$ in the green, and black colors, respectively. Figure 17a–d demonstrates asymmetric behaviors for coexisting double-scroll attractors with stable cycle, coexisting approach four-scroll attractors with double-scroll attractors, coexisting shuriken four-scroll attractors with irregular four-scroll attractors, coexisting big-size four-scroll attractors with irregular four-scroll attractors, respectively. The basin of attraction has confirmed the dynamic behavior of initial conditions on x_0-y_0 planes. Figure 17c and d is plotted by the attractor's colors corresponding with the colors of the basin of attraction in Fig. 18a and b, respectively. The beige color zone of basins is related to unbounded dynamics.

From the results in Sects. 3.2.1 and 3.2.2, the proposed system can be produced multiple coexisting attractors, both symmetry and asymmetry, by changing the initial conditions but fixing other parameters. Multiple attractors represent an additional source of randomness, and obvious potential applications include chaos-based secure communication and random signal generation [38].

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



◀**Fig. 11** continued

◀**Fig. 11** Route to the chaos of phase portraits (*left*) corresponding time-series waveform (*right*) of the proposed system by varying k **a** stable cycle, **b** double-scroll attractor, **c** approach falcon-like scroll attractor, **d** falcon-like scroll attractor (four-scroll attractor), **e** approach to six-scroll attractor, and **f** six-scroll attractor

3.3 The abilities to rescale (amplitude control) and offset boosting of the proposed system

The amplitude control and offset boosting techniques are necessary for some applications of chaotic systems to implement a chaotic circuit with commercial devices. In practical signal processing of the chaotic, the offset boosting [26, 39] can be transformed from a bipolar signal to a unipolar signal. For some chaotic systems, the offset variable can be used instead of the state variable in any dimension by substituting $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z) + c$ which c is the offset variable. The mentioned property is especially suitable for application in chaotic secure communication. The amplitude control [27, 40] can be divided into two types. Firstly, the system that can control the amplitude of some state variables is called partial amplitude control. Second, if changing the control parameter affects the entire system's time series, it is called total amplitude control, depending on each chaotic system. To prevent the amplitude from exceeding the limit of the chaotic circuit, amplitude control of the chaotic system is required. Moreover, the amplitude control through the several parameters or coefficients in the system must not disturb the chaotic generator's condition. For the proposed system, the state variable y is chosen for offset boosting by changing z into $z + \gamma$, where γ denotes an offset variable. For the total amplitude control of the proposed system, we arranged the following new state variables: $x = \psi x_S$, $y = \psi y_S$, and $z = \psi z_S$, where ψ denotes an amplitude-controlled variable. The proposed system can be rewritten as:

$$\begin{cases} \dot{x}_S = y_S + G(y_S), \\ \dot{y}_S = (z_S + \gamma), \\ \dot{z}_S = -k(z_S + \gamma) - y_S - G(x_S); \end{cases} \tag{15.a}$$

The nonlinear functions are altered follow as:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

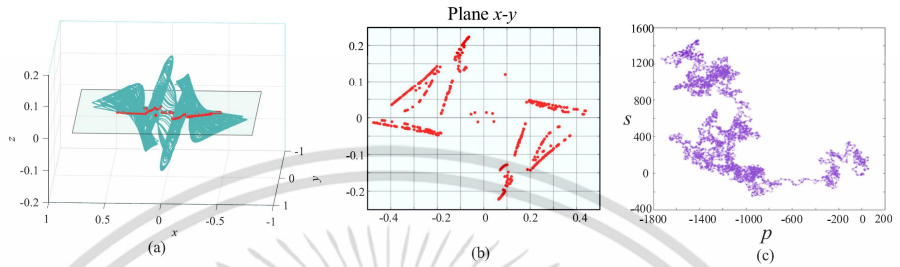


Fig. 12 The main attractor proposed, given $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$, $k = 0.6$ and the initial condition $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ **a** 3D shuriken four-scroll attractor **b** Poincaré map **c** 0–1 test chart

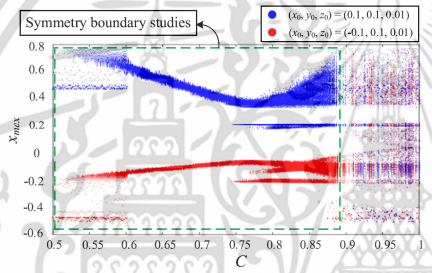


Fig. 13 The bifurcation diagram shows the local maxima of the coordinate x versus C for the coexistence of symmetric behaviors by fixed: $A = 0.6$, $B = 0.2$, $D = 2.5$, $k = 0.6$

$$G(x_S) = Cx_S\mathrm{Rect}(Dx_S) \approx \frac{Cx_S}{2} \cdot (-(\tanh(m(x_S + 1/2D)) \cdot \tanh(m(x_S - 1/2D))) + 1) \quad (15.b)$$

$$G(y_S) = Ay_S - B\mathrm{sgn}(y_S) \approx Ay_S - B\tanh(my_S) \quad (15.c)$$

According to Eq. (15), the offset boosting can be controlled by parameter γ and amplitude control can be controlled by parameter ψ shown in Fig. 19. As the result, chaotic output state z can be shifted from a bipolar signal to unipolar signal, and it is possible to simultaneously modify the amplitude of all state variables for the proposed system. Especially, the ability to scaling or amplitude control will be applied in circuit implementation in this work, which is used for FPAA device.

4 FPAA-Based implementation of the proposed system

Digital circuits are usually used when implementing high-accuracy, high-complexity signal processing algorithms. This method is typically used for low-frequency signals and low power consumption. On the contrary, the analog circuit is suitable for high-frequency signals and low power dissipation. But the analog's disadvantage is the circuits' low accuracy and non-programmability. Thus, the FPAA technology provides a basic instrument for developing dynamically reconfigurable analog circuits. Using FPAA, it is possible to reprogram the entire circuit dynamics, keeping the structure fixed but changing only the parameters [41].

The device in this work used the AN231E04 FPAA produced by Anadigm. The board info, viz., Anadigm QuadApex board v2.0 and ABK version 6.0.5 [42]. The software development tool is AnadigmDesigner2. The experimental setup and FPAA board with four AN231E04 were used to construct a circuit implementation of the chaotic proposed system shown in Fig. 20a. This work will bring the chaotic result on FPAA to apply image cryptography using the CM method, including circuits and microcontrollers, to achieve the decryption procedure. The experimental setup for image cryptography is shown in Fig. 20b.

The procedure for designing the FPAA is shown in Fig. 21. The analog signals of FPAA in this work are limited to the range − 3 V to + 3 V. Therefore, it is necessary to test the system with the numerical simulation (MATLAB) before designing the system on the FPAA. The software of the FPAA device is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

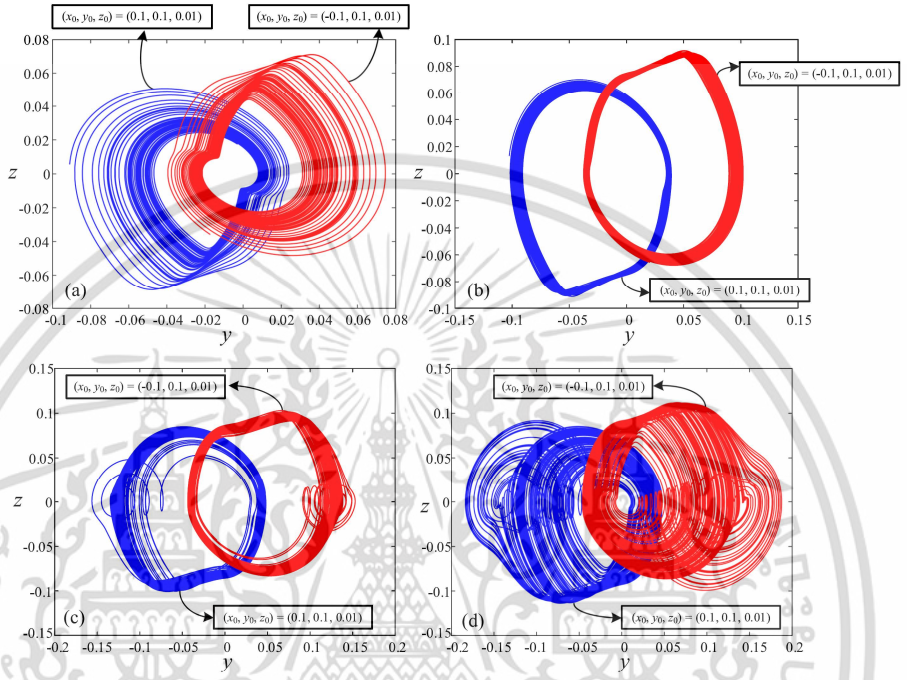


Fig. 14 The phase portraits 2D plane y–z of the coexistence of a pair symmetric attractor for varying parameter C, with different initial conditions ($\pm$ 0.1, 0.1, 0.01) for blue and red colors. **a** C = 0.6, **b** C = 0.7, **c** C = 0.79, **d** C = 0.87

AnadigmDesigner2, which can be a modification and building block including parameters setting by using Configurable Analog Modules (CAMs) [43]. Then, the system will be set corresponding with numerical simulation and be rescaled according to the limited operation voltage of FPAA. When the experimental results are compared with the simulation results, FPAA modeling needs to be modified until the results are satisfactory.

Since, the proposed system has a small amplitude of the chaotic signal, less than $\pm$ 1 V. There is no need to reduce the signal amplitude. On the contrary, signal amplification is required to limit noise problems. In order to outdo this problem, the rescale parameter (Q) is adopted for amplification, by defining $Q = 2$. The ODE of the proposed system is rewritten as Eq. (16).

$$\begin{cases} \dot{x} = Q \cdot (y + G(y)), \\ \dot{y} = Q \cdot z, \\ \dot{z} = Q \cdot (-kz - y - G(x)); \end{cases} \tag{16}$$

Figure 22 shows the blocks that design inside the AnadigmDesigner2 environment of the proposed system. Because the resource of CAMs on FPAA is limited, it needs two AN231E04 chips to implement. Each CAMs replaced the name device with M_1–M_{12} and the parameters setting of each CAMs in the first and second AN231E04 are shown Fig. 23a, b. The parameters of the implementation FPAA are defined

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

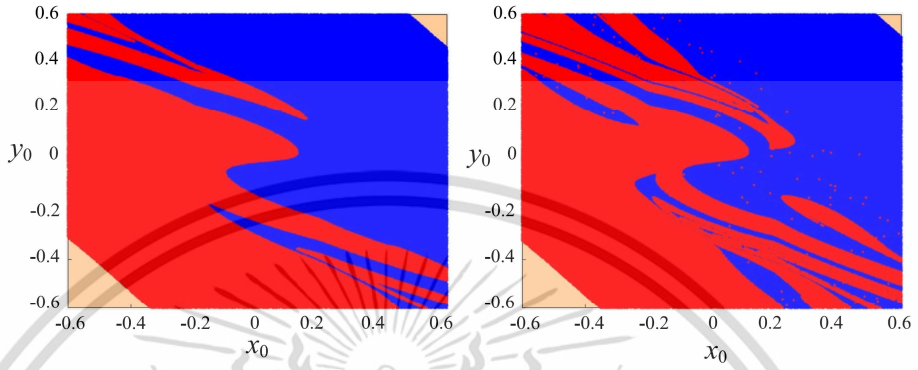


Fig. 15 Cross sections of the basin of attraction by computed for $z_0 = 0.01$, corresponding with coexisting symmetric attractors in Fig. 14a and d. **a** x_0–y_0 plane for $C = 0.6$ **b** x_0–y_0 plane for $C = 0.87$

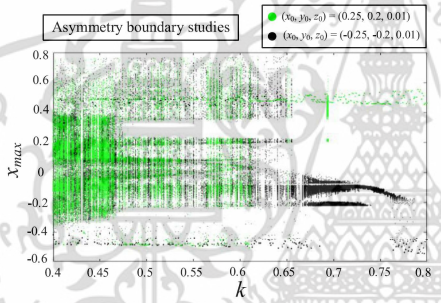


Fig. 16 The bifurcation diagram showing local maxima of the coordinate x versus k for coexistence of asymmetric behaviors, by fixed: $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$

corresponding with the proposed system, viz., k (G_k), A (G_A), B (G_B), C (G_C), and D (G_D), which is rescaled by $Q = 2$. These values slightly differ from the numerical simulation ones. This is due to the fact that a tolerance error close to 5% may appear in some blocks.

The function of each block is described as follows: where M_1–M_3 are integrator blocks, the output of integrator blocks are the three state variables x, y, and z. Meanwhile, M_4, M_5, and M_{10} are summing blocks. M_8 and M_{11} are inverting blocks. M_6, M_7, and M_9 are comparator blocks, and M_{12} is a multiplier block. The modified rectangular function ($G(x)$) is constructed from M_7–M_{12} blocks and input 2 of the M_5 block, while the modified signum function ($G(y)$) is constructed from the M_6 block and input 2 of the M_4 block. The summing (M_5) plays an important role: by varying G_k, to change the dynamic behavior for demonstrates route to chaos.

The FPAA parameters in Fig. 23 show the four-scroll attractors of the proposed system in Fig. 24, which is in good agreement with the numerical results in Fig. 3. The experimental results are shown in X–Y mode on the oscilloscope.

Further experiments of FPΛΛ implementation have been investigated by using the route to chaos. By fixed parameter $GA = 1.2$, $G_B = 0.4$, $G_C = 1$, $G_D = 0.155$ (as Fig. 23). The several multiple attractors on phase portraits corresponding with time series are shown in Fig. 25. by varying parameter G_k. Figure 25a appears the stable cycle at $G_k = 2$. When decrease parameter G_k, the metamorphosis for multiple attractors can be observed. Figure 25b–c demonstrates a double-scroll attractor and approach to a four-scroll attractor at $G_k = 1.7$ and $G_k = 1.631$, respectively. Figure 25d–f demonstrates a falcon-like scroll attractor with $G_k = 1.2$, approach to a six-scroll attractor with $G_k = 0.768$ until a six-scroll attractor with $G_k = 0.41$. The route to chaos of FPAA implementation is in good agreement with the numerical result in Fig. 11.

The experimental setup based on the FPAA device provides the adjusting parameter conveniently and the possibility of exploring the set of multi-scroll attractors very simply. This section's proposed system is just a 3D chaotic system with two nonlinear functions. Still, it can be generated for single-scroll, double-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

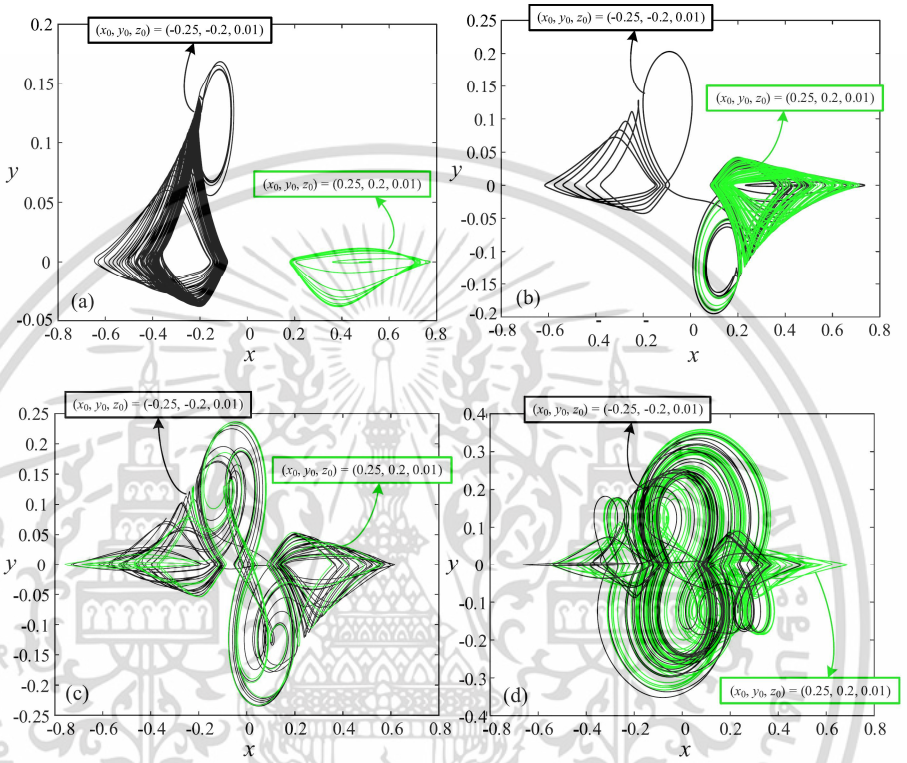


Fig. 17 The phase portraits 2D plane x–y of the coexistence of two asymmetric attractors for varying parameter k, with different initial conditions (± 0.25, ± 0.2, 0.01) green and black **a** k = 0.71, **b** k = 0.65, **c** k = 0.52, **d** k = 0.43

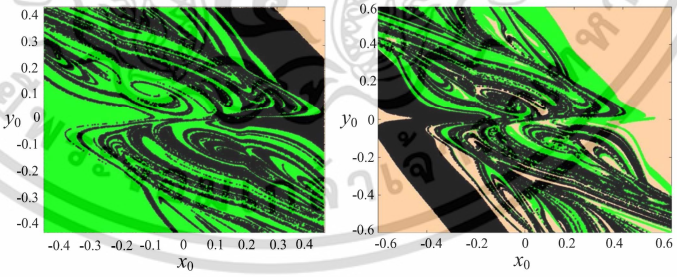


Fig. 18 Cross sections of the basin of attraction by computed for z_0 – 0.01, corresponding with coexisting asymmetric attractors in Fig. 17c and d. **a** x_0–y_0 plane for k = 0.52 **b** x_0–y_0 plane for k = 0.43

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

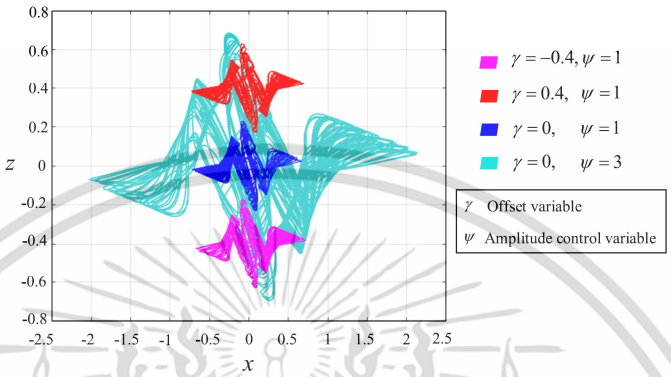


Fig. 19 The falcon-like attractors on x–z plane of the proposed system with different amplitude rescaling and offset boosting by defined $A = 0.6$, $B = 0.2$, $C = 1$, $D = 2.5$, $k = 0.6$ with the initial condition (0.1, 0.1, 0.01)

scroll, four-scroll, and six-scroll attractors, including high-value Kaplan–Yorke chaotic systems. Moreover, the parameter adjustment thoroughly of the system leads to proven multiple attractors, both symmetric and asymmetric. With this feature, using FPAA for experimental setup allows for handy investigation and is helpful for in-depth education, allowing us to comprehensively explore the entire range of parameters.

5 Image cryptography communication

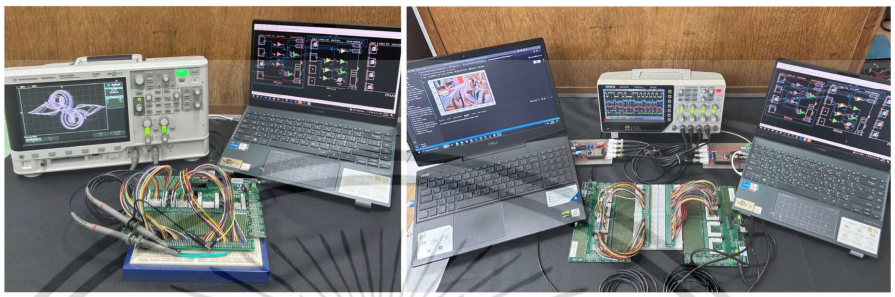
This section presents an image cryptography application using a chaotic proposed system based on principles of the CM method. The CM method is suitable for a chaotic communication system [44]. The encryption and decryption processes are implemented on an FPAA device that can conveniently reconfigure parameters. The communication circuit prototype is designed on a PCB based on a commercially available, low-cost device designed in conjunction with a microcontroller (ESP32). The proposed chaotic system has a highly complexity chaotic signal with a multi-scroll attractor, which increases security as it is more difficult to attack or copy the encryption. Furthermore, the bit error rate can be improved by the designed circuit. Many researchers have used CM methods but have yet to have a presentation for image encryption [45, 46]. Some of them have yet to be actual experiments [47]. However, more efficient encryption algorithms with highly complex system requirements have been presented [48–52]. They have no results on the image cryptography communications or experimental results. This study demonstrates the simulation and experimental results of various scenarios of image encryption by varying the parameters of the chaotic communication system with a low-complexity cryptography communication method.

5.1 Implementation of proposed cryptosystems

The block diagram for the approach proposed is shown in Fig. 26. CM uses the structure of cryptography. The commercially available electronic components and microcontrollers are implemented for encryption and decryption, such as MCU, FPAA, LM358, and LF347 (LM358 and LF347 are used in Amp.). The DC supply voltage is + 5 V, except for LF347, which is used ± 12 V. The variable $I(t)$ is the information signal, $CD(t)$ is a chaotic decrypted signal, $S(t)$ is a secret signal, $CE(t)$ is a chaotic encrypted signal, $R(t)$ is a recovered signal, and $I'(t)$ is a reconstructed signal.

For the cryptography approach proposed by CM, the chaotic equation proposed in (1) is rewritten according to Fig. 26.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(a) (b)

Fig. 20 The chaotic circuit implementation based on AN231E04 FPAA **a** experimental Setup for chaos signal **b** experimental setup for image cryptography

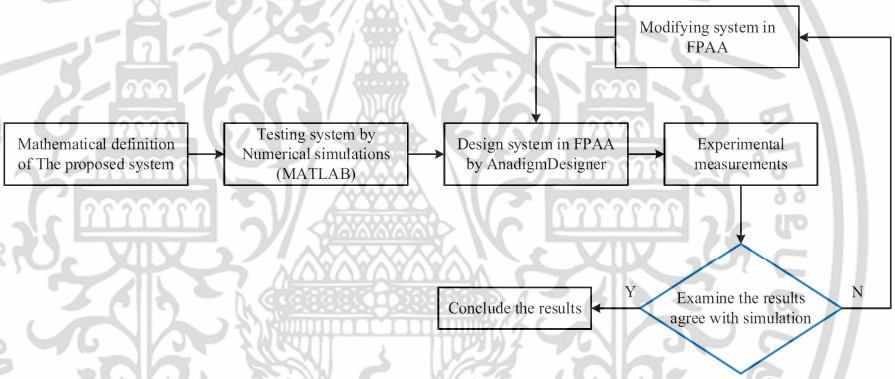


Fig. 21 FPAA-based design and implementation procedure

The equation of the transmitter is formulated as:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_t}{dt} = y_t + (A(y_t) - B\text{sgn}(y_t)), \\ \dfrac{dy_t}{dt} = z_t, \\ \dfrac{dz_t}{dt} = -(kz_t) - (y_t) - (Cx_t \cdot \text{Rect}(Dx_t)), \\ S(t) = I(t) + CE(t) \end{cases} \tag{17}$$

The equation of the receiver is formulated as:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_r}{dt} = y_r + (Ay_r - B\text{sgn}(y_r)), \\ \dfrac{dy_r}{dt} = z_t, \\ \dfrac{dz_r}{dt} = -(kz_t) - (y_r) - (Cx_r \cdot \text{Rect}(Dx_r)), \\ R(t) = S(t) - CD(t), \\ I(t) = R(t). \end{cases} \tag{18}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

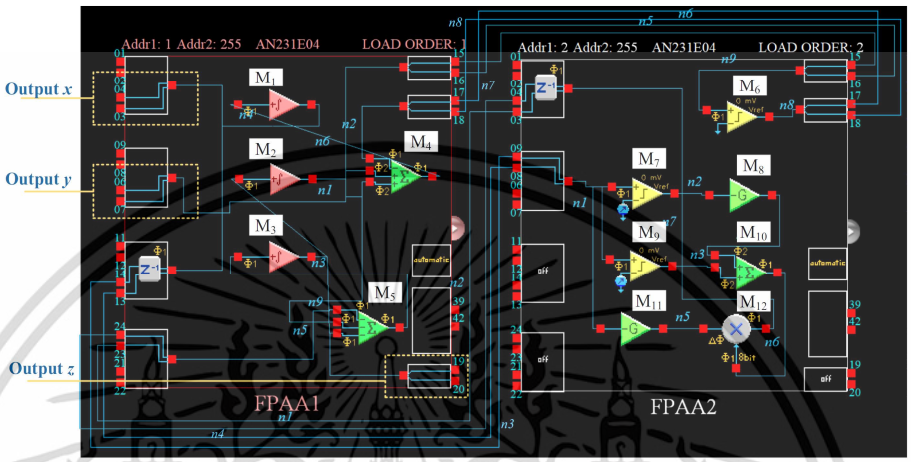


Fig. 22 FPAA implementation schemes of the proposed system with two different nonlinear functions

Configurable Analog Modules: FPAA1

Name	Options	Parameters	Clocks
Integrator1 (Integrator v1.1.1) M1	Polarity: Non-inverting; Input Sampling Phase: Phase 1; Compare Control To: No Reset	Integration Const. [1/us]: 0.0100	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
Integrator2 (Integrator v1.1.1) M2	Polarity: Non-inverting; Input Sampling Phase: Phase 1; Compare Control To: No Reset	Integration Const. [1/us]: 0.0100	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
SumDiff1 (SumDiff v1.0.1) M5	Output Phase: Phase 1; Input 1: Inverting; Input 2: Inverting; Input 3: Inverting; Input 4: Off	Gain 1 (UpperInput): 2.00; Gain 2 (MiddleInput): 2.00; Gain 3 (LowerInput): 1.00; Gain 3 = k (G_k)	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
SumDiff2 (SumDiff v1.0.1) M4	Output Phase: Phase 1; Input 1: Inverting; Input 2: Non-inverting; Input 3: Non-inverting; Input 4: Off	Gain 1 (UpperInput): 0.530; Gain 2 (MiddleInput): 1.20; Gain 3 (LowerInput): 2.00; Gain 1 = B (G_B); Gain 2 = A (G_A)	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
Integrator3 (Integrator v1.1.1) M3	Polarity: Non-inverting; Input Sampling Phase: Phase 1; Compare Control To: No Reset	Integration Const. [1/us]: 0.0100	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)

(a)

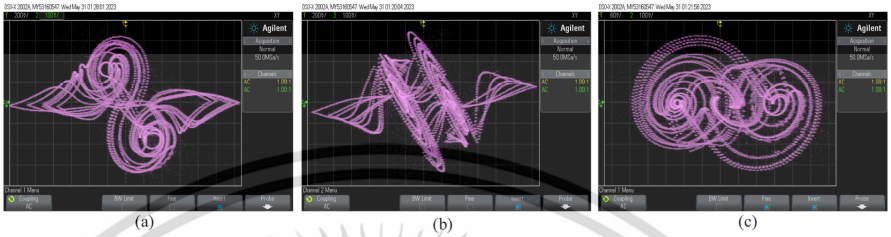
Configurable Analog Modules: FPAA2

Name	Options	Parameters	Clocks
Comparator2 (Comparator v1.1.1) M7	Compare To: Variable Reference; Input Sampling: Phase 1; Output Polarity: Non-inverted; Output Synch: None	Reference Voltage: -1.00	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
Comparator1 (Comparator v1.1.1) M9	Compare To: Variable Reference; Input Sampling: Phase 1; Output Polarity: Non-inverted; Output Synch: None	Reference Voltage: 1.00	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
GainInv1 (GainInv v1.0.1) M8		Gain: 1.00; Gain = C (G_C)	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
SumDiff1 (SumDiff v1.0.1) M10	Output Phase: Phase 1; Input 1: Non-inverting; Input 2: Non-inverting; Input 3: Off; Input 4: Off	Gain 1 (UpperInput): 0.155; Gain 2 (LowerInput): 0.155; Gain 1, 2 = D (G_D)	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
Multiplier1 (Multiplier v1.0.2) M12	Sample and Hold: Off	Multiplication Factor: 1.00	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3); ClockB: 4 MHz (Chip Clock 0)
GainInv2 (GainInv v1.0.1) M11		Gain: 1.00	ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)
Comparator3 (Comparator v1.1.1) M6	Compare To: Signal Ground; Input Sampling: Phase 1; Output Polarity: Non-inverted; Hysteresis: 0 mV; Output Synch: None		ClockA: 250 kHz (Chip Clock 3)

(b)

Fig. 23 CAM (Configurable Analog Modules) parameters setting for the proposed system **a** first AN231E04 **b** second AN231E04

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(a) (b) (c)

Fig. 24 The four-scroll attractor results by FPAA implementation using $G_A = 1.2$, $G_B = 0.4$, $G_C = 1$, $G_D = 0.155$, and $G_k = 1.2$ **a** output x–y plane (falcon-like) **b** output x–z plane **c** output y–z plane

The CAMs of FPAA are defined according to Fig. 23. The Clock frequencies of CAMs are reassigned from 250 kHz to 1000 kHz for ClockA and 4–16 MHz for ClockB to the cryptography procedure. For synchronization, the transmitter and the receiver use the z key as the Sync. signal ($z_r = z_r$). The parameters of a transmitter are $G_A = 1.2$, $G_B = 0.4$, $G_C = 1$, $G_D = 0.155$, and $G_k = 0.3$. The parameterization of the receiver is defined as corresponding with the transmitter, except for G_k (case cipher image).

5.2 Image cryptography results

For image cryptography, the transmitter and the receiver circuits are designed to be implemented together with FPAA, as shown in Fig. 27. The *Barbara* and *Girl* RGB images [53] are used for image cryptography, which the pixel of the image is 814 × 542 pixels for 10,588,512 bits. The information signal $I(t)$ is a bit stream with an amplitude of + 0.7 V defined and a bit rate of 9600 bit/s. The amplitude of the chaotic signal ($CD(t)$ and $CE(t)$) is defined as 3Vp-p. The frequencies of the signals in the procedure are 4.81 kHz for the information signal ($I(t)$) and 27.70 kHz for the chaos signal ($CD(t)$ and $CE(t)$), as shown in Fig. 28. The overall processing time of image cryptography communication approximately 24 min.

The image cryptography results are shown in two cases. The first case is a parameter mismatch between the transmitter and receiver. The second case is a mismatch in the synchronization of the system. Figure 29. The results show the first case by using Barbara RGB image for a decrypted image together with the analog signal on the oscilloscope, viz., $I(t)$, $R(t)$, and $I'(t)$. In the decrypted correct image, the transmitter and receiver are defined as G_k corresponding at $G_k = 0.3$. In the cipher image, the parameter G_k varies in the receiver since $G_k = 0.55$, $G_k = 0.68$, $G_k = 0.73$, and $G_k = 0.95$, respectively. At the correct decryption image, it is evidence that the received information $I(t)$ can be decrypted and reconstructed identically with the transmitted information $I'(t)$. From Fig. 29, the bit error rate (BER) of decrypted images are verified with 0 ($G_k = 0.3$), 443,403 × 10^{-6} ($G_k = 0.55$), 486,338 × 10^{-6} ($G_k = 0.68$), 490,919 × 10^{-6} ($G_k = 0.73$), 492,225 × 10^{-6} ($G_k = 0.95$) for a mismatch parameter in receiver. As the results, the best cipher image should have BER larger than 490,000 × 10^{-6}.

In the second case, an unsynchronized key for the Girl RGB image tested the transmitter and receiver. The receiver cannot be decrypted from the original image, as shown in Fig. 30. In this case, and it can be found in several methods, whether different model chaotic systems in transmitter and receiver, incorrect state-key synchronization, etc. The BER is verified with 498,289 × 10^{-6} for a mismatch synchronization.

6 Conclusion

This research aims to present an image cryptography communication system based on a 3D chaotic system with two different nonlinear functions that can be generated to multi-scroll chaotic attractors. The reconfigurable chaotic and cryptography communication systems are realized by field programmable analog array (FPAA) and low-cost microcontrollers and commercially available devices. The proposed chaotic system can generate up to six-scroll attractors

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

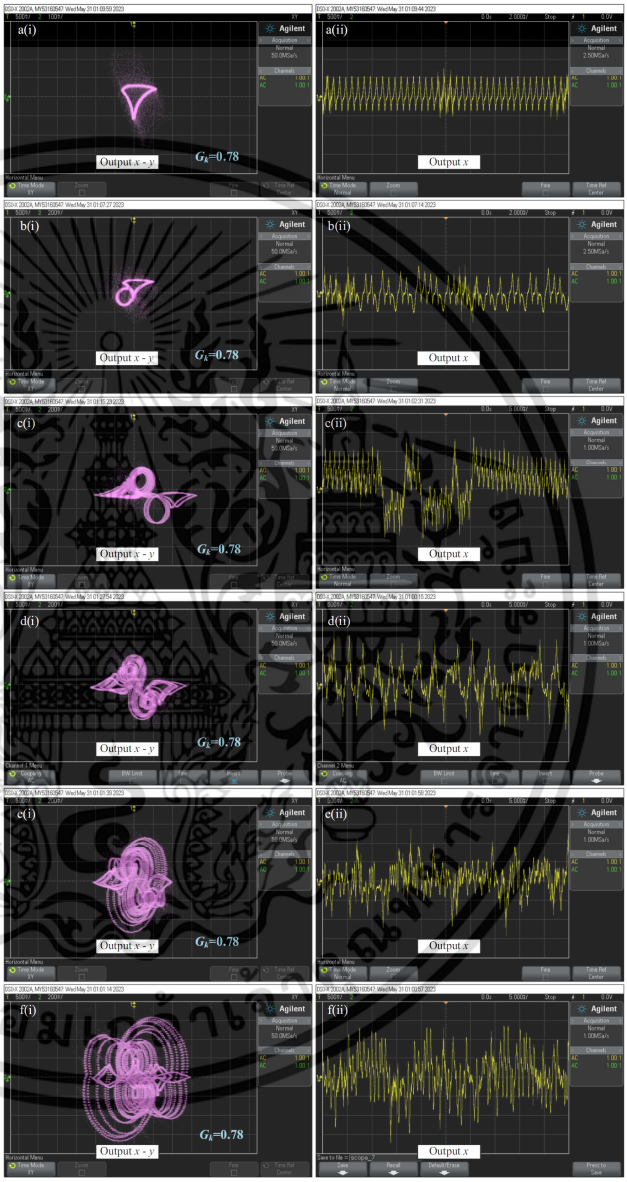


Fig. 25 The route to chaos by FPAA implementation, phase portrait (left figure) displayed on x–y plane corresponding their time series (right figure) **a** single-band attractor **b** double-scroll attractor **c** approach to four-scroll attractor **d** falcon-like scroll attractor **e** approach to six-scroll attractor **f** six-scroll attractor

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

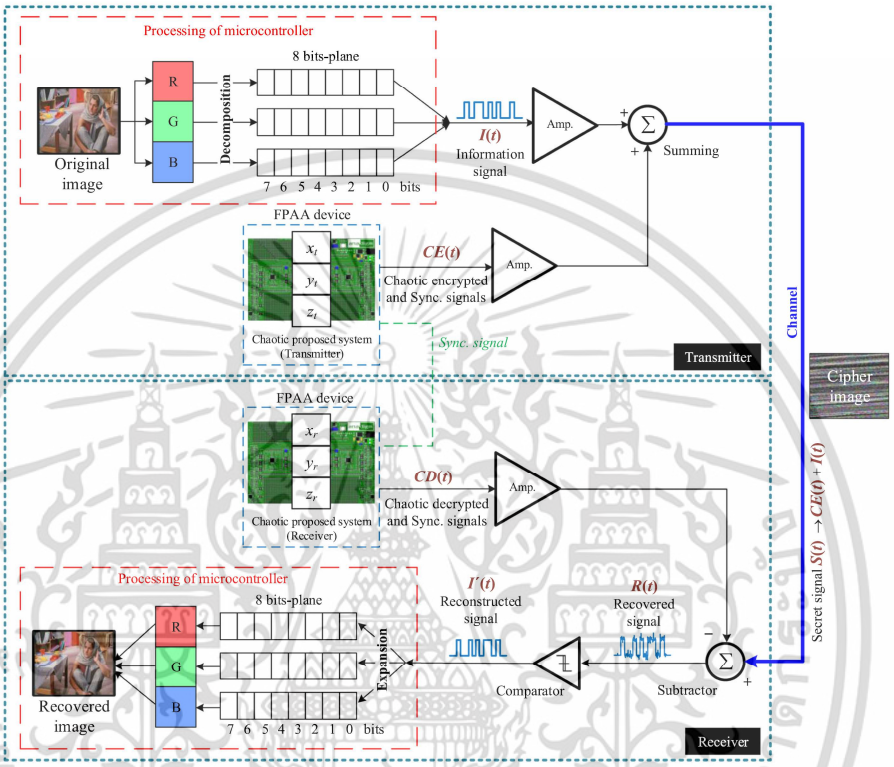


Fig. 26 Block diagram of proposed cryptosystem based on FPAA with transmitter and receiver

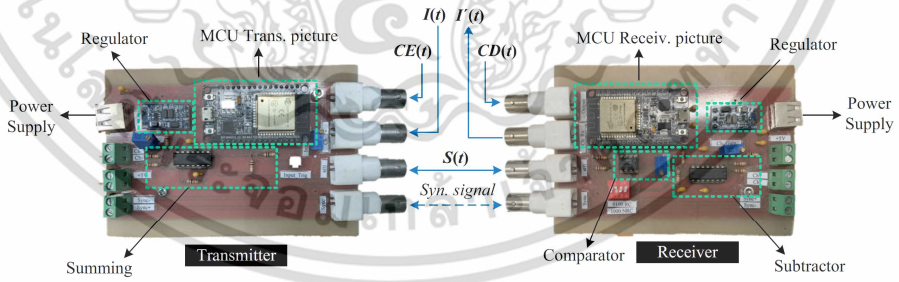


Fig. 27 The microcontroller-based transmitter and receiver prototypes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

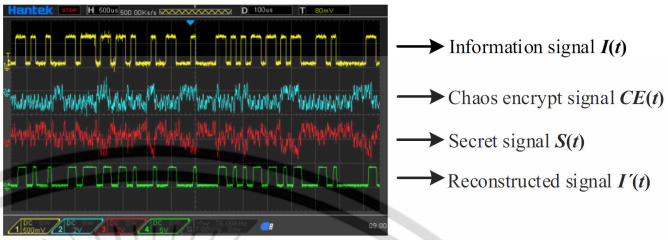


Fig. 28 The experimental result of different signals in cryptography communication system

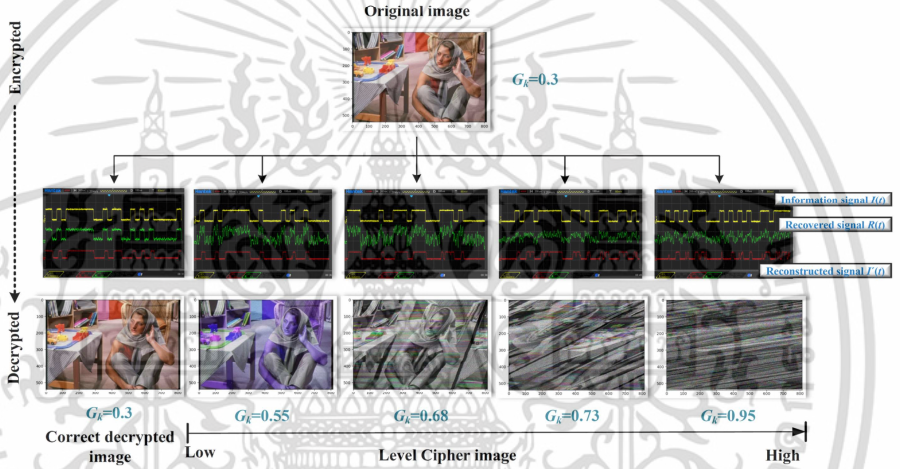


Fig. 29 The results of decryption for the proposed cryptosystem by varying of parameter G_k in the receiver from correct decrypted to high level cipher image

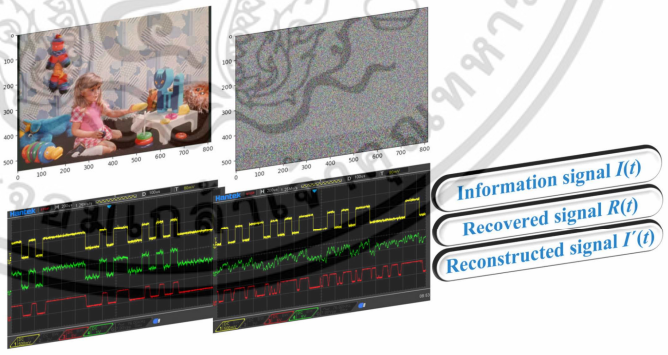


Fig. 30 The decryption results of the proposed cryptosystem with match and mismatch synchronizations

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

by adjusting only one coefficient. The several dynamical properties of the proposed system are investigated. The multi-scroll attractor achieves relatively high complexity by $D_{KY} = 2.45$. The numerical and experimental results of the multi-scroll chaotic system are compared with good agreement. The successful image can be reconstructed without error if the transmitter and receiver parameters are matched. The mismatched parameters give the cipher image if and only if BER is more significant than $490{,}000 \times 10^{-6}$.

Author contributions PP contributed to the study of the conception and design. PP and KK performed material preparation, data collection, and analysis. JC and KK performed experimental. FK and MM provided the literature reviews. PP wrote the first draft of the manuscript, and all authors commented on previous versions. All authors read and approved the final manuscript.

Funding The authors declare that no funds, grants, or other support were received during the preparation of this manuscript.

Data availability Original testing images are available at https://www.hlevkin.com/hlevkin/06testimages.htm.

References

1. Elzaher, M.F.A., Shalaby, M., Kamal, Y., Ramly, S.E.: Securing digital voice communication using non-autonomous modulated chaotic signal. J. Inf. Secur. Appl. **34**, 243–250 (2017)
2. Xingyuan, W., Junjian, Z., Guanghui, C.: An image encryption algorithm based on ZigZag transform and LL compound chaotic system. Opt. Laser Technol. **119**, 105581 (2019)
3. Wang, N., Zhang, G., Ren, L., Bao, H.: Coexisting asymmetric behavior and free control in a simple 3-d chaotic system. AEÜ Int. J. Electron. Commun. **122**, 153234 (2020)
4. Wang, N., Zhang, G., Bao, H.: Infinitely many coexisting conservative flows in a 4D conservative system inspired by LC circuit. Nonlinear Dyn. **99**, 3197–3216 (2020)
5. Lorenz, E.N.: Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. **20**(2), 130–141 (1963)
6. Rossler, O.E.: An equation for continuous chaos. Phys. Lett. A **57**(5), 397–398 (1976)
7. Matsumoto, T.: A Chaotic Attractor from chua's Circuit. IEEE. Trans. Circuits Syst. **CAS12**(12), 1056–1058 (1984)
8. Sprott, J.C.: Some simple chaotic flows. Am. J. Phys. **50**(2), 647–650 (1994)
9. Sprott, J.C.: A new class of chaotic circuit. Phys. Lett. A **266**, 19–23 (2000)
10. Liu, W., Tang, W.K.S., Chen, G.: 2 × 2-scroll attractors generated in a three-dimensional smooth autonomous system. Int. J. Bifurc. Chaos **17**(11), 4153–4157 (2007)
11. Elwakil, A.S., Ozoguz, S., Kennedy, M.P.: A four-wing butterfly attractor from a fully autonomous system. Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. **13**(10), 3093–3098 (2003)
12. Dadras, S., Momeni, H.R.: A novel three-dimensional autonomous chaotic system generating two, three and four-scroll attractors. Phys. Lett. A **373**(40), 3637–3642 (2009)
13. Chunxia, L., Jie, Y., Xiangchun, X.A., Limin, Q., Yongqing, F.: Research on the multi-scroll chaos generation based on jerk mode. Procedia Eng. **29**, 957–961 (2012)
14. Ding, P., Feng, X.: Generation of multi-scroll chaotic attractors from a jerk circuit with a special form of a sine function. Electronics **9**, 842 (2020)
15. Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A.: Determining Lyapunov exponents from a time series. Phys. D **16**, 285–317 (1985)
16. Argyris, J., Faust, G., Haase, M.: An exploration of chaos. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2015)
17. Le, X., Sen, Z., Yicheng, Z., Boquan, L.: Dynamics of a new composite four-scroll chaotic system. Chin. J. Phys. **56**, 2381–2394 (2018)
18. Janakiraman, S., Thenmozhi, K., Rayappan, J.B.B., Amirtharajan, R.: Lightweight chaotic image encryption algorithm for real-time embedded system: implementation and analysis on 32-bit microcontroller. Microprocess. Microsyst. **56**, 1–12 (2018)
19. Azzaz, M.S., Tanougast, C., Sadoudi, S., Fellah, R., Dandache, A.: A new auto-switched chaotic system and its FPGA implementation. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **18**, 1792–1804 (2013)
20. Tuna, M., Alçın, M., Koyuncu, İ, Fidan, C.B., Pehlivan, İ: High speed FPGA-based chaotic oscillator design. Microprocess. Microsyst. **66**, 72–80 (2019)
21. Frasca, M., Fortuna, L., Arena, P.: Implementation and synchronization of 3x3 grid scroll chaotic circuits with analog programmable devices. Chaos **16**, 013121 (2006)
22. Matthews, R.: On the derivation of a "chaotic" encryption algorithm. Cryptologia **13**, 29–42 (1989)
23. Hossam, H.E., Kalash, H.M., Allah, O.S.F.: Anefficient chaos-based feedback stream cipher (ECBFSC) forimage encryption and decryption. Informatica **31**(1), 121–129 (2007)
24. Sanprang, P. et al.: Realization of image cryptography using FPAA-based two chaotic systems. ECTI-CON. ID: 23321360 (2023).
25. Azzaz, M.S., Tanougast, C. Sadoudi, S., Dandache, A., and Monteiro, F.: Real-time image encryption based chaotic synchronized embedded cryptosystems. In: Proceedings of the 8th IEEE International NEWCAS Conference (NEWCAS'10), pp. 61–64 (2010)
26. Karawanich, K., Prommee, P.: High-complex chaotic system based on new nonlinear function and OTA-based circuit realization. Chaos Solit. Fract. **162**, 112536 (2022)
27. Karawanich, K., Kumngern, M., Chimnoy, J., Prommee, P.: A four-scroll chaotic generator based on two nonlinear functions and its telecommunications cryptography application. AEÜ-Int. J. Electron. Commun. **157**, 154439 (2022)
28. Malasoma, J.M.: What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant? Phys. Lett. A **264**, 383–389 (2000)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

29. Shivamoggi, B.K.: Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena: An Introduction. Fluid Mechanics Applications. Springer, Berlin (1997)
30. Strogatz, S.H.: Nonlinear Dynamics and Chaos. Routledge, Taylor & Francis Group (1994)
31. Hefferon, J.: Linear Algebra. Mathematics and Statistics, 4th edn. Orthogonal Publishing, Michigan (2020)
32. Glendinning, P., Sparrow, C.: Shilnikov's saddle-node bifurcation. Int. J. Bifurc. Chaos **6**(6), 1153–1160 (1996)
33. Pchelintsev, A.: An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems. J. Appl. Nonlinear Dyn. **9**(2), 207–221 (2020)
34. Leutcho, G.D., Kengne, J.: A unique chaotic snap system with a smoothly adjustable symmetry and nonlinearity: chaos, offset-boosting, antimonotonicity, and coexisting multiple attractors. Chaos Solitons Fractals **113**, 275–293 (2018)
35. Yuan, F., Wang, G., Wang, X.: Extreme multistability in a memristor-based multi-scroll hyper-chaotic system. Chaos **26**(7), 073107 (2016)
36. Poincare, H.P.: Celestial mechanics. Dyn.-Syst. Theory Chaos Phys. Rep. Rev. Sect. Phys. Lett. **193**(3), 137–163 (1990)
37. Ke-Hui, S., Xuan, L., Cong-Xu, Z.: The 0–1 test algorithm for chaos and its applications. Chin. Phys. B **19**(11), 110510 (2010)
38. Pisarchik, A.N., Reategui, R.J., Flores, C.R., Lopezc, J.H.G., Cuellar, G.H., Martín-Pasquín, F.J.: Secure chaotic communication based on extreme multistability. J. Franklin Inst. **358**, 2561–2575 (2021)
39. Li, C., Jiang, Y., Ma, X.: On offset boosting in chaotic system. Chaos **3**(2), 47–54 (2021)
40. Li, C., Sprott, J.C., Yuan, Z.Y., Li, H.: Constructing chaotic systems with Total amplitude control. Int. J. Bifurc. Chaos **25**(10), 1530025 (2015)
41. Caponetto, R., Mauro, A.D., Fortuna, L., Frasca, M.: Field programmable analog array to implement a programmable Chua's circuit. Int. J. Bifurc. Chaos **15**(5), 1829–1836 (2005)
42. AN231E04 Datasheet Rev 1.5. Available online. Anadigm; 2007. https://www.anadigm.com/_doc/UM231004-K002.pdf
43. Understanding Anadigm, Available online. Anadigm; 2007. https://www.anadigm.com/_apps/PR021100-0024.pdf
44. Sun, K.: Chaotic Secure Communication. De Gruyter, Berlin (2016)
45. Rai, A. et al.: Realization of chaotic oscillator and use in secure communication. In: Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy, vol. 6, p. 100321 (2023).
46. Gokyildirim, A., et al.: A novel five-term 3D chaotic system with cubic nonlinearity and its microcontroller-based secure communication implementation. Int. J. Electron. Commun. (AEÜ) **160**, 154497 (2023)
47. Zhang, Q., Guo, Y., Li, W., Ding, Q.: Image encryption method based on discrete Lorenz chaotic sequences. J. Inf. Hiding Multimed. Signal Process. **7**, 3 (2016)
48. Ye, G., Liu, M., Yap, W.S., Goi, B.M.: Reversible image hiding algorithm based on compressive sensing and deep learning. Nonlinear Dyn. **111**, 13535–13560 (2023)
49. Ye, G., Wu, H.S., Huang, X., Tan, S.Y.: Asymmetric image encryption algorithm based on a new three-dimensional improved logistic chaotic map. Chin. Phys. B **32**(3), 030504 (2023)
50. Ye, G., Wu, H., Liu, M., Huang, X.: Reversible image-hiding algorithm based on singular value sampling and compressive sensing. Chaos Solitons Fractals **171**, 113469 (2023)
51. Ye, G., Du, S., Huang, X.: Image compression-hiding algorithm based on compressive sensing and integer wavelet transformation. Appl. Math. Model. **124**, 576–596 (2023)
52. Ye, G., Guo, L., He, J.: Image encryption algorithm based on ElGamal cryptography and selective random diffusion. Phys. Scr. **98**(11), 115251 (2023)
53. Available online: https://www.hlevkin.com/hlevkin/06testimages.htm

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Springer Nature or its licensor (e.g. a society or other partner) holds exclusive rights to this article under a publishing agreement with the author(s) or other rightsholder(s); author self-archiving of the accepted manuscript version of this article is solely governed by the terms of such publishing agreement and applicable law.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นายคุณานนต์ คะระวานิช

วัน เดือน ปีเกิด 5 เมษายน พ.ศ.2539 ที่จังหวัดนครสวรรค์

ที่อยู่ 401/11 หมู่บ้านกรุงไทย ซอย 5 ถนนสุขุมวิท ตำบลวังกระแจะ อำเภอเมืองตราด จังหวัดตราด 23000

Email khunanon.au@gmail.com

ประวัติการศึกษา

- สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
  ภาควิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยีอุตสหกรรมบัณฑิต
  สาขาอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2561
- สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
  ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์
  สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปีการศึกษา 2564

ผลงานวิจัย

- **คุณานนต์ คะระวานิช** และ พิพัฒน์ พรหมมี “วงจรกำเนิดสัญญาณอลวนด้วยแบบจำลองการกระตุกรูปแบบกระแสโดยใช้โอทีเอ” งานประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 43, โรงแรมท็อปแลนด์ จังหวัดพิษณุโลก, หน้า 486-489, 28-30 ตุลาคม, ปี 2563. (บทความดีเด่น)
- P. Prommee, **K. Karawanich**, F. Khateb and T. Kulej, "Voltage-Mode Elliptic Band-Pass Filter Based on Multiple-Input Transconductor,” IEEE Access, Vol.9, pp.32582-32590, Feb. 2021. 27.
- P. Prommee, K.Angkeaw and **K. Karawanich**, "Low-Cost Linearity Range Enhancement for Linear Variable Differential Transformer,” IEEE Sensors Journal, Vol.22, Issue.4, pp.3316 - 3325, Feb. 2022. (IF2020=3.301)
- **K. Karawanich** and P. Prommee, "High-complex chaotic system based on new nonlinear function and OTA-based circuit realization,” Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 162, 112536, September 2022, (IF2021=9.922)
- **K. Karawanich**, M. Kumngern, J. Chimnoy, and P. Prommee, “A four-scroll chaotic generator based on two nonlinear functions and its telecommunications cryptography application,” AEU - International Journal of

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Electronics and Communications, Vol.157, 154439, pp.1-18, Dec. 2022. (IF2021=3.169)

- **K. Karawanich**, J. Chimnoy, F. Khateb, M. Marwan, P. Prommee, "Image cryptography communication using FPAA-based multi-scroll chaotic system," Nonlinear Dyn, Vol.112, pp.4951-4976, March. 2024. (IF2023=5.6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้