

การวิเคราะห์ทางด้านพลวัตของโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่
สร้างมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่หลายแรง

DYNAMIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED BEAM AND PLATE
STRUCTURES UNDER MULTIPLE MOVING LOADS



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2566

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในของมหาวิทยาลัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

KMITL-2023-EN-D-058-141

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

DYNAMIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED BEAM AND PLATE
STRUCTURES UNDER MULTIPLE MOVING LOADS



WACHIRAWIT SONGSUWAN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF ENGINEERING IN MECHANICAL ENGINEERING
SCHOOL OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2023

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ KMUTL-2023-EN-D-058-141 อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2023

SCHOOL OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์ทางด้านพลวัตของโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่สร้างมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่หลายแรง
นักศึกษา	นาย วชิรวิทย์ สงสุวรรณ
รหัสประจำตัว	59601322
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
พ.ศ.	2566
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร. มนต์ศักดิ์ พิมสาร

บทคัดย่อ

งานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอผลการตอบสนองทางด้านพลวัตของโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่สร้างมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่หลายแรง การวิเคราะห์จะอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม ซึ่งทั้งสองทฤษฎีได้รวมผลกระทบจากการเปลี่ยนรูปเฉือนในหน้าตัดโครงสร้าง สำหรับสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างสามารถหาได้โดยการประยุกต์ใช้งานสมการของลากรางจ์ และใช้ระเบียบวิธีของริทด์และนิวมาร์คเพื่อหาผลลัพธ์จากการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับของโครงสร้างด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกัน โดยที่ฟังก์ชันรูปร่างที่สมมติขึ้นตามระเบียบวิธีของริทด์จะอยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนามสำหรับโครงสร้างคานและอยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมชmidt สำหรับโครงสร้างแผ่นบาง

โดยในศึกษาครั้งนี้จะพิจารณาถึงผลกระทบจากอัตราความหนาแน่นและเงื่อนไขขอบเขต ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ ความเร็วและจำนวนของแรงที่กระทำ ความถี่และเฟสของแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ค่าคงที่ของสปริงสำหรับฐานรองรับแบบยืดหยุ่นและอื่น ๆ ซึ่งมีผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติและการตอบสนองทางด้านพลวัตของโครงสร้างจะถูกศึกษาและอธิบาย จากการศึกษาแสดงให้เห็นว่า เมื่อความเร็วของแรงที่กระทำบนโครงสร้างเพิ่มขึ้นระยะการโก่งไว้มีติจะเพิ่มขึ้นถึงจุดสูงสุด ณ ค่าความเร็วค่าหนึ่ง ซึ่งจุดนี้เรียกว่า ความเร็ววิกฤต (Critical velocity) หลังจากผ่านจุดความเร็ววิกฤตระยะการโก่งไว้มีติก็จะลดลง และผลกระทบของระยะห่างระหว่างแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ยังเป็นพารามิเตอร์สำคัญต่อระยะการโก่งของโครงสร้างอีกด้วย และจากการศึกษาพบว่าทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับที่สามของโครงสร้างคานนั้นมีความแตกต่างเฉลี่ยตลอดช่วงความเร็วอยู่ที่ 6.2 % สำหรับโครงสร้างแบบแกนกลางอ่อนและอัตราส่วนความยาวต่อความสูงเท่ากับ 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis	Dynamic analysis of functionally graded beam and plate structures under multiple moving loads
Student	Mr.Wachirawit Songsuwan
Student ID.	59601322
Degree	Doctor of Engineering
Program	Mechanical Engineering
Year	2023
Thesis Advisor	Asst. Prof. Dr. Monsak Pimsarn

ABSTRACT

This thesis presents dynamic responses of beam- and plate-like structures in form of sandwich configuration which are made of functionally graded materials (FGMs) under multiple moving loads. The analyses of such problems are based on the first- and third-order shear deformation theories. Both theories have considered the influences of shear deformation at the cross-section of the structures. For the equations of motion used for describing dynamic behavior of such structures, these equations can be derived by using the Lagrange equation method cooperating with Ritz method and the time-integration method of Newmark in order to find out the solutions of free and forced vibration of the structures with various general boundary conditions. For shape functions, they are assumed to be polynomial functions in form of power series for beam analysis and Gram-Schmidt polynomial series for plate analysis.

In this study, we consider the influences of layer thickness ratio, boundary conditions, index of material gradient, velocity and number of moving loads, external frequency and shift phases of the external moving loading, spring constants at the supports and etc. that have significant impact on the results of natural frequency and dynamic responses of the considered structures in this thesis. Based on the results of this study, it can be revealed that when the velocity of the loads increases, the dimensionless dynamic deflection is increased accordingly to reach the maximum point at the critical velocity after that the deflection is decreased. Additionally, the influence of distance between the loads also plays an important role for the variation of dynamic deflection. Additionally, this study found that the deformations based on the first and third order shear deformation theories are different as compared to each other around averagely 6.2% throughout considered velocity, for the case of soft core and the slenderness ratio around 5.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดีเพราะได้รับคำปรึกษา แนะนำ แนวคิดในการแก้ปัญหาต่าง ๆ มากมาย จาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มนต์ศักดิ์ พิมสาร ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้า ตั้งแต่เริ่มทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ข้าพเจ้ารู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง และขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. ณัฐวิทย์ วัฒนสกุลพงศ์ ผู้มีส่วนร่วมอีกท่านที่ให้คำแนะนำด้านต่าง ๆ ซึ่งต้องขอกราบขอบพระคุณทั้งสองท่านอีกครั้งเป็นอย่างสูงและขอขอบพระคุณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ที่ให้ทุนสนับสนุนค่าเล่าเรียนและสถานที่ทำวิจัยมาโดยตลอดจนจบหลักสูตรปริญญาเอกในครั้งนี้

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ คุณพ่ออนันต์ และคุณแม่ถนอม สงสุวรรณ ทั้งพี่สาวและพี่ชายของข้าพเจ้าที่คอยให้กำลังใจมาโดยตลอดและขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกท่านที่ไม่ได้เอ่ยนาม ที่คอยให้กำลังใจ ช่วยเหลือ สนับสนุน ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้คงไม่สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ถ้าปราศจากบุคคลเหล่านี้ คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอขอบแต่ผู้มีพระคุณทุกท่าน ขออำนาจคุณพระศรีรัตนตรัยอำนวยการอำนวยพรความสุขสวัสดิ์จึงมีแต่ทุกท่าน

วชิรวิทย์ สงสุวรรณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และ III เองอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	IX
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์.....	5
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	6
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	6
1.5 องค์ประกอบของวิทยานิพนธ์.....	6
บทที่ 2 วรรณกรรมปริทัศน์.....	7
2.1 วัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	8
2.1.1 โครงสร้างของวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	8
2.1.2 คุณสมบัติทางกลของวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	12
2.2 กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	15
2.2.1 วิธีการแทรกซึมของวัสดุแบบหลายขั้นตอน.....	16
2.2.2 วิธีการพ่นวัสดุเหลวร้อน.....	17
2.2.3 วิธีการขึ้นรูปด้วยผงวัสดุ.....	18
2.3 โครงสร้างแบบแซนด์วิช.....	19
2.3.1 คุณสมบัติของโครงสร้างแซนด์วิช.....	21
2.3.2 โครงสร้างแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	21
2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสันสะท้อนของโครงสร้างคาน ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่.....	25
2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสันสะท้อนของโครงสร้างแผ่นบาง ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่.....	27
บทที่ 3 โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	29
3.1 บทนำ.....	29
3.2 ทฤษฎีทั่วไปของโครงสร้างคานแบบไอโซทรอปิก.....	30
3.3 โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	34
3.4 การวิเคราะห์โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	38
3.5 วิธีการของริทต์สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างคาน.....	47
3.6 วิธีการนิวมาร์ค.....	53

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	55
4.1 บทนำ	55
4.2 ทฤษฎีทั่วไปของโครงสร้างแผ่นบางแบบไอโซทรอปิก.....	59
4.3 โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	65
4.4 การวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	71
4.5 วิธีการของริทต์สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบาง	78
บทที่ 5 ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม	89
5.1 บทนำ.....	89
5.2 ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสำหรับโครงสร้างคาน แบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	90
5.2.1 สมการพลังงาน.....	90
5.2.2 ระเบียบวิธีของริทต์	95
5.3 ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสำหรับโครงสร้างแผ่นบาง แบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	100
5.3.1 สมการพลังงาน.....	100
5.3.2 ระเบียบวิธีของริทต์	106
บทที่ 6 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	111
6.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง	111
6.1.1 พลังงานความเครียดสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	114
6.1.2 พลังงานจลน์สำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	115
6.1.3 พลังงานศักย์ที่ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นสำหรับโครงสร้างคาน แบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	115
6.1.4 งานจากแรงกระภายนอกสำหรับโครงสร้างคาน แบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	116
6.1.5 วิธีการหาผลเฉลยสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	118
6.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง	122
6.2.1 พลังงานความเครียดสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิง.....	125
6.2.2 พลังงานจลน์สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	127
6.2.3 งานจากแรงกระภายนอกสำหรับโครงสร้างแผ่นบาง แบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	127

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนุญตราเห็นาเบเซบระเยชนดานการค้

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

6.2.4	วิธีการหาผลเฉลยสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	129
6.3	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม.....	134
บทที่ 7	ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์และการวิเคราะห์ผล	139
7.1	ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง.....	139
7.1.1	ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบอิสระ	140
7.1.2	ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหนึ่งแรง).....	144
7.1.3	ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหลายแรง).....	153
7.2	ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์โครงสร้างแผ่นบางแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง.....	161
7.2.1	ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบอิสระ	161
7.2.2	ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหนึ่งแรง).....	165
7.2.3	ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหลายแรง).....	170
7.3	ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม	177
บทที่ 8	สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	182
8.1	สรุปผลโครงสร้างคานแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	182
8.1.1	การสั่นสะเทือนแบบอิสระ	182
8.1.2	การสั่นสะเทือนแบบบังคับ.....	183
8.2	สรุปผลโครงสร้างแผ่นบางแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	185
8.2.1	การสั่นสะเทือนแบบอิสระ	185
8.2.2	การสั่นสะเทือนแบบบังคับ.....	186
8.3	สรุปผลโครงสร้างคานแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม	187
8.4	ข้อเสนอแนะ.....	187
เอกสารอ้างอิง		188
ภาคผนวก.....		197
ภาคผนวก ก. สูตรคำนวณ.....		198
ภาคผนวก ข. บทความที่ได้รับการตีพิมพ์		199

ประวัติผู้เขียน..... 256

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของลิขสิทธิ์

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 ฟังก์ชันรูปร่างของโครงสร้างคานที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ	49
4.1 การกำหนดพจน์แรก (ฟังก์ชันรูปร่าง) ของแผ่นบางโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS	84
5.1 ฟังก์ชันรูปร่างของโครงสร้างคานที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ	96
6.1 คำอธิบายเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ	119
6.2 ฟังก์ชันรูปร่างของโครงสร้างคานแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	119
6.3 เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ ของโครงสร้างแผ่นบางทั้ง 4 ด้าน	130
6.4 แสดงการกำหนดพจน์แรก (ฟังก์ชันรูปร่าง) ของโครงสร้างแผ่นบาง	131
6.5 เงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ของคานบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม	137
7.1 คุณสมบัติโครงสร้างคานแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	139
7.2 ผลการศึกษาการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนดวิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ที่เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ($L/h=20$)	140
7.3 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ที่เงื่อนไขขอบเขตและอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ ($L/h = 20$)	141
7.4 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนดวิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5$)	142
7.5 โครงสร้างคานแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ที่เงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C ($n = 0.5$)	143
7.6 เปรียบเทียบค่าระยะการโก่งไร้มิติสูงสุดของโครงสร้างคานทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ($L = 20 \text{ m}, b = 0.4 \text{ m}, h = 0.9 \text{ m}$)	146
7.7 คุณสมบัติโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	161
7.8 ผลการศึกษาการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนดวิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2$)	162
7.9 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)	162
7.10 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)	163
7.11 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)	164
7.12 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)	164
7.13 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับสาม ($L/h = 5, \text{Soft core}$)	177
7.14 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับสาม ($L/h = 20, \text{Soft core}$)	178

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
7.15 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับสาม ($L/h = 5$, Hard core).....	179
7.16 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับสาม ($L/h = 20$, Hard core) ...	180



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 ตัวอย่างตามธรรมชาติที่เป็นแรงบันดาลใจสำหรับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	2
1.2 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้วัสดุเชิงฟังก์ชันสำหรับวิศวกรรมการบินและอวกาศ	2
1.3 ผลงานวิจัยที่ได้รับเผยแพร่ของวัสดุเชิงฟังก์ชัน	3
1.4 ตัวอย่างคอนกรีตที่เป็นโครงสร้างลักษณะแรงกระทำแบบเคลื่อนที่	4
1.5 ตัวอย่างแกนกลซึ่งเป็นโครงสร้างลักษณะแรงกระทำแบบเคลื่อนที่.....	5
2.1 ตัวอย่างวัสดุเชิงฟังก์ชัน	8
2.2 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยใช้รูปแบบฟังก์ชันยกกำลัง	10
2.3 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชัน(เซรามิก-โลหะ)ใช้รูปแบบฟังก์ชันยกกำลัง	10
2.4 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยใช้รูปแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล.....	11
2.5 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยใช้รูปแบบฟังก์ชันซิกมอยด์	12
2.6 โครงสร้างระบบวัสดุคอมโพสิตแบบดั้งเดิม	12
2.7 ตัวอย่างแสดงถึงฟังก์ชันของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีส่วนผสมระหว่างเซรามิกและโลหะ	14
2.8 การสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันด้วยวิธีการแทรกซึมแบบหลายขั้นตอน	16
2.9 วัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีส่วนผสมระหว่างเซรามิกกับโพลีเมอร์	17
2.10 กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยวิธีการพ่นวัสดุเหลวร้อน.....	18
2.11 กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยวิธีการขึ้นรูปด้วยผงวัสดุ	19
2.12 โครงสร้างแบบแซนด์วิช	20
2.13 โครงสร้างแซนด์วิชที่ลักษณะชั้นแกนต่าง ๆ กัน.....	20
2.14 การเปรียบเทียบความแข็งแรงต่อน้ำหนักของวัสดุแซนด์วิช	21
2.15 โครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน	22
2.16 แสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 โครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันตามกฎฟังก์ชันยกกำลัง	23
2.17 แสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 โครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันตามกฎฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล.....	23
2.18 แสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 โครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันตามกฎฟังก์ชันซิกมอยด์	24
3.1 การตัดโค้งของคานตามทฤษฎีของออยเลอร์.....	31
3.2 พื้นที่หน้าตัดของคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	35
3.3 ตัวอย่างคุณสมบัติใดๆของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่า ต่างๆ กัน.....	35
3.4 พื้นที่หน้าตัดของคานแบบแซนด์วิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน.....	36
3.5 ค่ามอดุลัสความยืดหยุ่นโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน(แกนกลางแข็ง).....	38
3.6 ค่ามอดุลัสความยืดหยุ่นโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน(แกนกลางอ่อน).....	38
3.7 ลักษณะการเปลี่ยนรูปของระนาบตัดขวางตามทฤษฎีออยเลอร์และทฤษฎีโมเมนโก	39
3.8 แสดงการกระจายความเค้นเฉือนบนหน้าตัดขวางของคาน	41
3.9 คานแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้โหลดพลวัตที่จุดใดหนึ่งบนคาน	44

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.10	คานแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่แบบโหดเดียว 44
3.11	คานแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่แบบหลายโหด 45
3.12	คานภายใต้การรองรับแบบต่าง ๆ และเงื่อนไขขอบเขต 48
3.13	กระบวนการวิเคราะห์การตอบสนองแบบพลวัตของคานโดยใช้วิธีการของนิวมาร์ค 54
4.1	สภาวะก่อนและหลังการเสียรูปเมื่ออยู่ภายใต้โหดใด ๆ 56
4.2	ลักษณะของการตัดโค้งของแผ่นบาง 59
4.3	แผ่นบางภายใต้ภาระการตัดโค้งจากแรงกระจายสม่ำเสมอ 62
4.4	แผ่นบางภายใต้ภาระแรงกดทั้งสองทิศทาง (Biaxial compression) 62
4.5	แผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน 66
4.6	แผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน 67
4.7	แผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันแบบแกนกลางแข็ง 68
4.8	แผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันแบบแกนกลางอ่อน 69
4.9	ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของโครงสร้างแผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน (แกนกลางแข็ง) 70
4.10	ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของโครงสร้างแผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน (แกนกลางอ่อน) 71
4.11	การเปรียบเทียบลักษณะของการเปลี่ยนรูปภายใต้การตัดโค้งของทฤษฎีดั้งเดิม 72
4.12	โครงสร้างแผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 73
4.13	กรณีที่ 1 โครงสร้างแผ่นบางแบบที่มีการรองรับอย่างง่าย 79
4.14	กรณีที่ 2 โครงสร้างแผ่นบางแบบที่มีการรองรับอย่างง่าย 80
4.15	การบ่งบอกเงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางทั้ง 4 ด้าน 81
4.16	แผ่นบางที่มีการรองรับแบบต่าง ๆ 85
5.1	การเปรียบเทียบการเสียรูปของทฤษฎีที่นิยมใช้กับโครงสร้างคานและแผ่นบาง 90
5.2	คานแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้โหดพลวัตที่จุดใดหนึ่งบนคาน 94
5.3	แสดงลักษณะขนาดของแรงเทียบกับเวลาแต่ละแบบ 94
5.4	คานแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 95
6.1	โครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน 112
6.2	ภาพตัดขวางของโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน 112
6.3	โครงสร้างคานมีฐานรองรับแบบยืดหยุ่น 116
6.4	โครงสร้างคานภายใต้แรงกระทำภายนอก 116
6.5	โครงสร้างแผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 123
6.6	แสดงตัวอย่างเงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้างแผ่นบางทั้ง 4 ด้าน 130
6.7	โครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 134
7.1	ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน 142

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
7.2 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C ($L/h=10, n = 2.0$).....	144
7.3 กราฟเปรียบเทียบค่าระยะการโก่งของคานของวัสดุไอโซทรอปิก ณ ตำแหน่งกึ่งกลางคาน ณ เวลาใด ๆ ($L = 10 \text{ m}, b = 0.4 \text{ m}, h = 0.5 \text{ m}$)	145
7.4 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่อัตราส่วนความหนาแบบต่าง ๆ ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega = 0$)	147
7.5 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่ค่าคงที่สปริงต่าง ๆ ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega = 0$)	147
7.6 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega = 0$)	148
7.7 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($L/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_r = 0$)	148
7.8 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, \Omega = 0$)	149
7.9 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่ความเร็วต่างๆ ($L/h = 20, n = 0.5, \Omega = 0$) ...	150
7.10 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, K_w = K_s = 10$)	150
7.11 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่ความถี่กระตุ้นแรงต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, K_w = K_s = 10$)	151
7.12 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($L/h = 20, K_w = K_s = 10$)	151
7.13 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5, v_p = 25 \text{ m/s}, \Omega = 0 \text{ rad/s}$)	152

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
7.14 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5, v_p = 25 \text{ m/s}, \Omega_i = \omega_1 \text{ rad/s}$)	152
7.15 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำหลายแรง ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0 \text{ rad/s}$)	153
7.16 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, \Omega_i = 0$)	154
7.17 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, \Omega_i = 0$)	155
7.18 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($L/h = 20, d = L/8, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)	155
7.19 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ ($L/h = 20, v_p = 40 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)	156
7.20 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)	156
7.21 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 50 \text{ m/s}, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = 0$)	157
7.22 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = 0$)	158
7.23 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นภายใต้แรงจำนวนแรง 1 – 5 แรง ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 40 \text{ m/s}, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = \omega_1$)	158
7.24 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นที่มุมเฟสต่าง ๆ กัน ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = \omega_1$)	159

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
7.25 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุ เชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่ค่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 40 \text{ m/s}, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = \omega_i$).....	160
7.26 กราฟเปรียบเทียบค่าระยะการโค้งของแผ่นบางของวัสดุไอโซทรอปิก ณ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบาง ณ เวลาใดๆ ($a = 1, b = 1, h = 0.03, v_p = 50 \text{ m/s}$).....	166
7.27 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).....	167
7.28 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่สถานะเงื่อนไขขอบเขตต่างกัน ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).....	167
7.29 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ กัน ($a/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).....	168
7.30 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, \Omega_i = 0$).....	169
7.31 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าความเร็วต่าง ๆ กัน ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).....	169
7.32 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้จำนวนแรง 1 – 3 แรง ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = 0$).....	170
7.33 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = 0$).....	171
7.34 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).....	171
7.35 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = 0$).....	172
7.36 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวน 3 แรง ($a/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).....	172

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
7.37 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวน 3 แรง ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = 0$)	173
7.38 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = \omega_1$)	174
7.39 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าความเร็วต่าง ๆ กัน (ก) $v_p = 20 \text{ m/s}$ (ข) $v_p = 40 \text{ m/s}$ (ค) $v_p = 60 \text{ m/s}$ (ง) $v_p = 80 \text{ m/s}$ ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = \omega_1$)	174
7.40 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ระยะห่างระหว่างแรงต่าง ๆ กัน (ก) $d = a/4 \text{ m}$, (ข) $d = a/6 \text{ m}$, (ค) $d = a/8 \text{ m}$, (ง) $d = a/10 \text{ m}$ ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = \omega_1$)	175
7.41 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่เงื่อนไขขอบเขตต่างกัน ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = \omega_1$)	176
7.42 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ กัน ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = \omega_1$)	176
7.43 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎี FSDT และ TSDT ($L/h = 5, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}$)	180
7.44 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ณ ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 5, n = 0.5$)	181
7.45 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ณ ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5$)	181

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

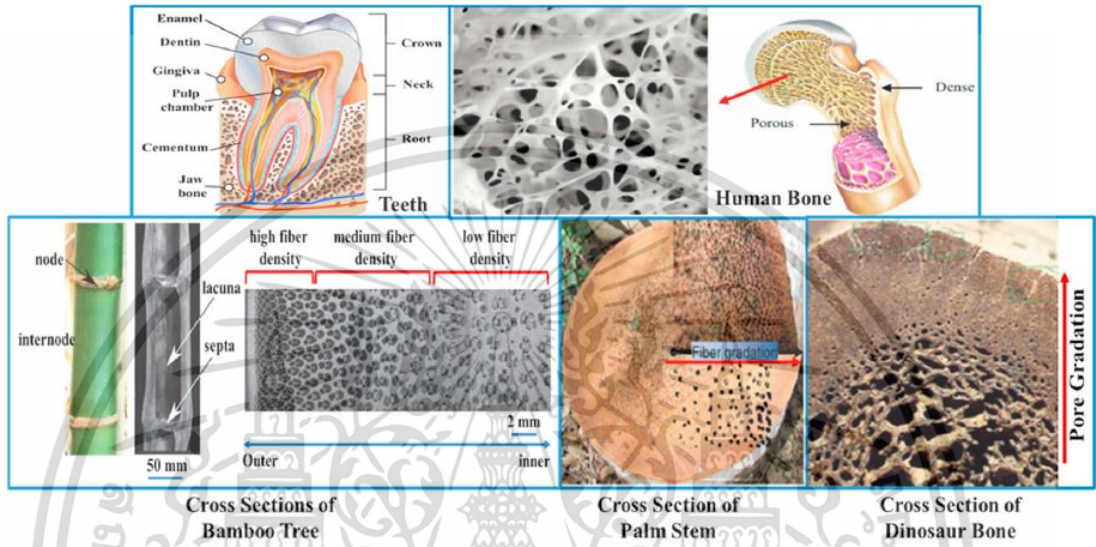
ความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีการผลิตวัสดุถูกนำมาใช้เพื่อพัฒนาวัสดุรุ่นใหม่เพื่อตอบสนองความต้องการใช้งาน ตั้งแต่ประวัติศาสตร์ของอารยธรรมมนุษย์วิวัฒนาการจากเครื่องมือหินไปจนถึงยุคอวกาศ นวัตกรรมของวัสดุบางอย่างในแต่ละยุคก็ถูกสร้างขึ้นเพื่อรองรับการพัฒนาเทคโนโลยี ส่วนในยุคอวกาศได้มีการนำวัสดุคอมโพสิตมาใช้เพื่อสร้างโครงสร้างอัจฉริยะที่แข็งแรงและน้ำหนักเบา สำหรับวัสดุคอมโพสิตนั้นจะมีองค์ประกอบของวัสดุที่แตกต่างกันตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไป และทำให้มีคุณสมบัติตามที่ต้องการในการใช้งานเฉพาะด้าน วัสดุคอมโพสิตที่น้ำหนักเบามักจะเป็นที่รู้จักกันในชื่อ วัสดุคอมโพสิตที่เป็นชั้นลามิเนตแบบเส้นใยซึ่งถูกนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมการบิน ยานยนต์ อุตสาหกรรมทางทะเลและการใช้งานด้านวิศวกรรมอื่น ๆ อย่างไรก็ตาม ถ้าคุณสมบัติเชิงกลที่ไม่ตรงกันระหว่างส่วนเชื่อมต่อของวัสดุที่แตกต่างกันสองชนิดอาจทำให้เกิดความเค้นระหว่างชั้นลามิเนตที่สูง ส่งผลให้เกิดปัญหาการแยกตัวของชั้น (Delamination) ได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสภาพแวดล้อมที่มีอุณหภูมิสูง นอกเหนือจากวัสดุคอมโพสิตแล้ว ก็จะเป็นวัสดุประเภทเนื้อเดียวแบบ ไอโซทรอปิกซึ่งก็มีหลากหลายชนิดได้ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในสาขาวิศวกรรมต่าง ๆ มาเป็นเวลายาวนาน เช่น วัสดุในกลุ่มโลหะและพอลิเมอร์ โดยวัสดุในกลุ่มโลหะจะมีความแข็งแรงและทนทานสูง ในขณะที่พอลิเมอร์ มีความยืดหยุ่นสูงและทนต่อการกัดกร่อนได้ดี อย่างไรก็ตามวัสดุในกลุ่มที่กล่าวมาไม่สามารถทนต่ออุณหภูมิที่สูงได้มากนัก ดังนั้นเพื่อที่จะปรับปรุงคุณสมบัติในด้านความต้านทานด้านความร้อน จึงได้นำวัสดุในกลุ่มเซรามิกมาใช้เพื่อผสมกับโลหะหรือพอลิเมอร์ ซึ่งจะรวมเอาข้อดีของทั้งสองวัสดุเข้าด้วยกันและเนื่องจากการพัฒนาอย่างรวดเร็วและมีแนวโน้มที่จะใช้วัสดุสำหรับสร้างชิ้นส่วนทางวิศวกรรมที่ต้องรับภาระทางกลภายใต้สภาพแวดล้อมที่มีอุณหภูมิสูง ดังนั้นจึงเป็นเรื่องสำคัญที่จะต้องสร้างวัสดุประเภทใหม่เพื่อรองรับความต้องการดังกล่าว

วัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally graded materials, FGMs) เป็นวัสดุชั้นสูงซึ่งมีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน ณ ตำแหน่งต่างๆ เนื่องจากวัสดุเชิงฟังก์ชันเป็นวัสดุแขนงหนึ่งของวัสดุคอมโพสิต โดยองค์ประกอบของวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นถือว่าเปลี่ยนแปลงอย่างราบรื่นและต่อเนื่องตลอดแนว ซึ่งได้ถูกนำเสนอครั้งแรกโดยนักวิทยาศาสตร์ชาวญี่ปุ่นในช่วงกลางทศวรรษที่ 1980 โดยเป็นวัสดุที่ทนต่ออุณหภูมิสูงและมีการใช้งานด้านการบินและอวกาศ[1-2] ปัจจุบันพบว่าวัสดุเชิงฟังก์ชันมีการนำไปใช้กันอย่างกว้างขวาง เช่น ในอุปกรณ์ไฟฟ้า ด้านพลังงาน วิศวกรรมชีวการแพทย์ และออปติก ฯลฯ วัสดุเชิงฟังก์ชันในช่วงแรก ๆ แนวคิดและข้อมูลที่สำคัญส่วนใหญ่ไม่ค่อยแพร่หลายมากนักและส่วนมากจะอยู่ในประเทศญี่ปุ่นเท่านั้น หนังสือเล่มแรกๆ ที่เกี่ยวกับวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ถูกเขียนเป็นภาษาอังกฤษและได้รับการตีพิมพ์ในลอนดอน ประเทศอังกฤษโดย มิยาโมโตะ (Miyamoto) และคณะ ในปี ค.ศ. 1999[3] โดยมีคำอธิบายที่ครอบคลุมเกี่ยวกับปัจจัยพื้นฐาน กระบวนการผลิต การออกแบบ และการนำไปใช้งานสำหรับนักวิจัยที่สนใจ

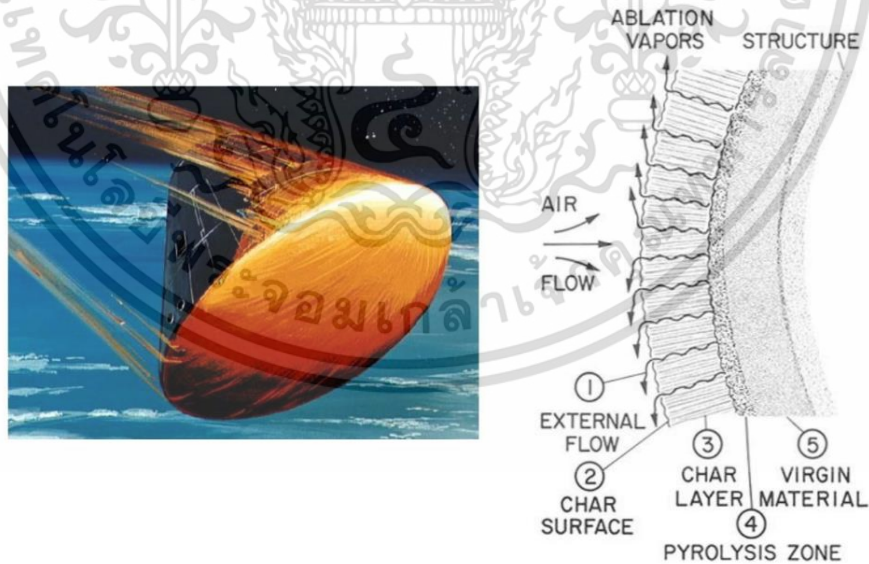
จากรูปที่ 1.1 เป็นตัวอย่างตามธรรมชาติซึ่งเป็นแรงบันดาลใจสำหรับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งเป็นตัวอย่างที่ดีมากสำหรับแนวคิดที่เกี่ยวกับวัสดุเชิงฟังก์ชัน ยกตัวอย่างเช่น ฟันซึ่งมีคุณสมบัติ

ความเหนียวสูงที่ผิวหนังเพื่อหลีกเลี่ยงการล้าและความเปราะ ในขณะที่ผิวหนังนอกต้องการความแข็งแรงสูงเพื่อหลีกเลี่ยงการสึกหรอจากการขบเคี้ยวสิ่งต่าง ๆ เป็นต้น

กลไกในการเติบโตของพืชก็เป็นอีกตัวอย่างหนึ่งซึ่งเป็นแรงบันดาลใจสำหรับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันเช่นกัน โดยที่ส่วนตามแนวขวางของลำต้นของต้นไม้แสดงในรูปที่ 1.1 ซึ่งแสดงทิศทางการเจริญเติบโตจากด้านในสู่ผิวหนังนอก โดยที่ผิวหนังนอกต้องการความแข็งแรงเพื่อปกป้องส่วนที่อ่อนกว่าซึ่งอยู่ส่วนภายในลำต้นมีหน้าที่ในการดูดซับน้ำ



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างตามธรรมชาติที่เป็นแรงบันดาลใจสำหรับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน[4]

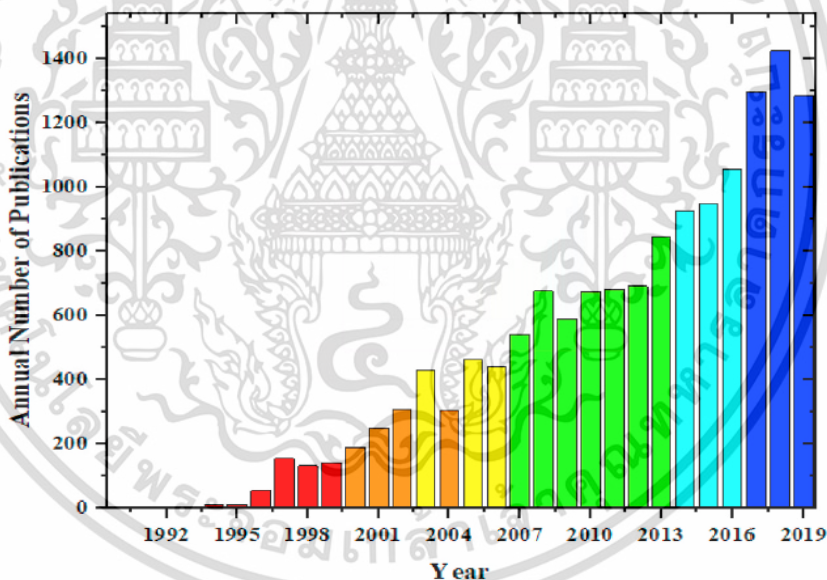


รูปที่ 1.2 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้วัสดุเชิงฟังก์ชันสำหรับวิศวกรรมการบินและอวกาศ[5]

วัตถุประสงค์หลักของการพัฒนาวัสดุเชิงฟังก์ชัน คือการผลิตวัสดุที่ทนทานต่ออุณหภูมิสูง โดยใช้วัสดุในกลุ่มเซรามิกเป็นวัสดุทนไฟ (วัสดุที่ทนความร้อนได้ดีเยี่ยม) และนำไปผสมกับวัสดุอื่น ๆ เพื่อสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน อย่างไรก็ตามด้วยคุณสมบัติของเซรามิกเองก็ไม่สามารถรับภาระเชิงกลในเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการรักษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริมาณมากได้ เนื่องจากข้อดีของคุณสมบัติด้านความเหนียว ดังนั้นจากข้อดีดังกล่าวของวัสดุประเภทเซรามิกจึงได้นำวัสดุอื่น ๆ ซึ่งมีคุณสมบัติด้านความเหนียวที่ดี เช่น โลหะหรือพอลิเมอร์ มาผสมเพื่อรวมข้อดีของแต่ละวัสดุเข้าไว้ด้วยกัน

ตัวอย่างของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ใช้สำหรับกระสวยอวกาศเพื่อเดินทางกลับสู่โลกก็เป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง แสดงในรูปที่ 1.2 เห็นได้ว่าจะสามารถนำวัสดุเชิงฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้เพื่อสร้างโครงสร้างกระสวยอวกาศที่สามารถป้องกันแหล่งความร้อนที่ถูกสร้างขึ้นจากแรงเสียดทานของอากาศขณะเดินทางกลับสู่โลกด้วยการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง หากโครงสร้างของกระสวยอวกาศทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน การไหลของอากาศร้อนจะถูกปิดกั้นโดยพื้นผิวด้านนอกที่ทำมาจากวัสดุเซรามิกและความร้อนจะถูกถ่ายเทลงสู่พื้นผิวด้านล่างเล็กน้อย ซึ่งช่วยป้องกันและลดความเสียหายของโครงสร้างเนื่องจากความเค้นจากความร้อน แม้ว่าแนวคิดของวัสดุเชิงฟังก์ชันในตอนแรกจะได้รับการออกแบบมาสำหรับใช้เป็นวัสดุทนความร้อน แต่เมื่อเวลาผ่านไป วัสดุเหล่านี้ได้ถูกนำมาใช้ในด้านต่าง ๆ มากมายเพื่อควบคุมการเสีรูปร่าง การสั่นหรือและการกัดกร่อน ตลอดจนลดความเครียดด้วยวิธีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุอย่างต่อเนื่องซึ่งมีอยู่ในหลาย ๆ ผลิตภัณฑ์และทีมงานวิจัยมากมายที่ได้รับเผยแพร่ที่เกี่ยวข้องวัสดุเชิงฟังก์ชันในแสดงในรูปที่ 1.3 จะเห็นว่าในแต่ละปีจะมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ

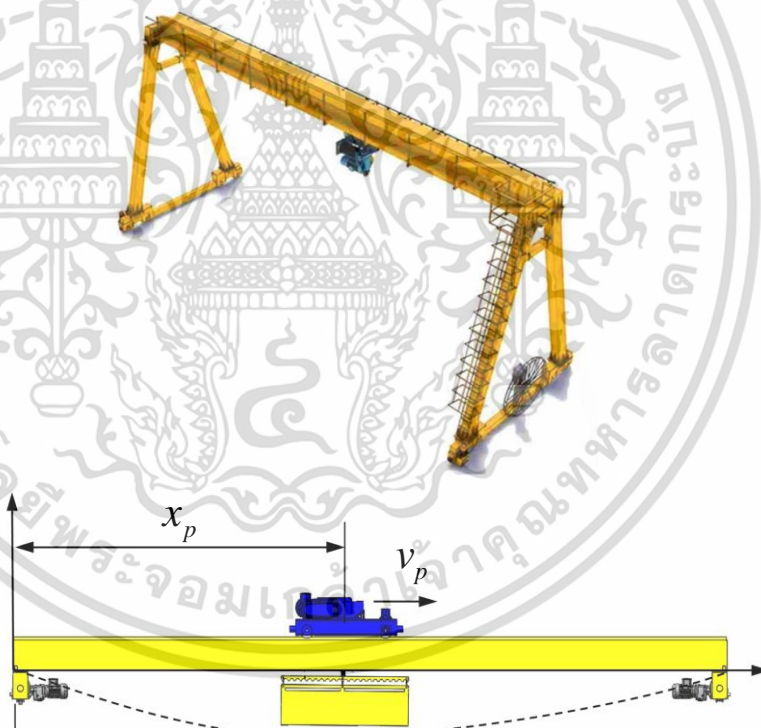


รูปที่ 1.3 ผลงานวิจัยที่ได้รับเผยแพร่ของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (FGMs)[4]

สำหรับโครงสร้างแบบแซนด์วิชนั้นจะเป็นวัสดุผสมประเภทพิเศษที่ประกอบขึ้นจากแกนกลางที่เชื่อมติดกับแผ่นปะกบบนและล่าง เนื่องจากโครงสร้างแบบแซนด์วิชมีอัตราส่วนความแข็งแรงต่อน้ำหนักสูง ดังนั้นโครงสร้างเหล่านี้จึงได้ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในงานด้านวิศวกรรมหลายประเภท เช่น อุตสาหกรรมการบิน ยานยนต์ เรือเดินทะเล และอวกาศ หากพิจารณาคุณสมบัติวัสดุของโครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้น ซึ่งวัสดุประเภทนี้จะมีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติอย่างต่อเนื่องจากพื้นผิวหนึ่งไปยังอีกพื้นผิวหนึ่ง ซึ่งปัญหาการหลุดร่อนในโครงสร้างแบบแซนด์วิช เนื่องจากความเค้นสะสมที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติที่ไม่ต่อเนื่องจากชั้นหนึ่งไปยังอีกชั้นหนึ่งและสามารถกำจัดได้โดยใช้วัสดุประเภทนี้ ด้วยเหตุนี้เองโครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันจึงได้รับความสนใจไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อย่างมากในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมา แต่อย่างไรก็ตาม การศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมเชิงกลของโครงสร้างแบบแซนด์วิชที่สร้างมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นค่อนข้างมีจำกัด ซึ่งโดยส่วนใหญ่จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration) การโก่งเดาะ (Buckling) และการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Force vibration) ของโครงสร้างจากวัสดุเชิงฟังก์ชันเท่านั้น

สำหรับปัญหาที่เกี่ยวกับแรงกระทำแบบเคลื่อนที่นั้นเป็นปัญหาพื้นฐานทางด้านพลวัตของโครงสร้างซึ่งจะแตกต่างกับโหลดกระทำแบบอื่น ๆ โหลดเหล่านี้ไม่เพียงแต่จะแปรผันตามขนาดเท่านั้น แต่ยังรวมถึงตำแหน่งด้วย ความสำคัญของปัญหานี้ปรากฏให้เห็นในการใช้งานหลาย ๆ ด้าน เช่น การขนส่ง สะพาน รางเลื่อน เครื่อง ระบบราง ถนนและท่อลำเรียง เป็นตัวอย่างสำหรับโครงสร้างที่ได้รับการออกแบบเพื่อรองรับมวลหรือแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ โดยทั่วไปคานที่อยู่ภายใต้สภาวะโหลดแบบสถิตศาสตร์ (Static loadings) จะแสดงการเสียหาย (ระยะการโก่งและความเค้น) น้อยกว่าคานที่ต้องรองรับสภาวะโหลดแบบพลวัต (Dynamic loadings) ถึงแม้ว่าจะมีขนาดรวมของแรงที่เท่ากัน การประยุกต์ใช้งานเกี่ยวกับโครงสร้างที่อยู่ภายใต้โหลดประเภทนี้ได้ถูกนำเสนอในช่วง 30 ปีที่ผ่านมาทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล ตัวอย่างโครงสร้างที่อยู่ภายใต้โหลดหรือแรงที่เคลื่อนที่ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิศวกรรมเครื่องกล คือ เครื่อง ดังแสดงรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 ตัวอย่างเครนซึ่งเป็นโครงสร้างลักษณะแรงกระทำแบบเคลื่อนที่

พฤติกรรมแบบพลวัตของเครนขึ้นอยู่กับน้ำหนักที่เคลื่อนที่ ด้วยเทคโนโลยีที่ก้าวหน้า เงื่อนไขและพารามิเตอร์ในการออกแบบจึงเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ โดยทั่วไปแล้วเครนในปัจจุบันได้รับการออกแบบจะไม่คำนึงถึงผลกระทบแบบพลวัตเนื่องจากการทำงานที่ความเร็วต่ำ อย่างไรก็ตามด้วยเทคโนโลยีที่เพิ่มขึ้น ความเร็วในการผลิตก็เพิ่มขึ้น และความต้องการเครนเคลื่อนที่เร็วก็เพิ่มขึ้นเพื่อขนเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ย้ายผลิตภัณฑ์หรือสิ่งของจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง โดยเฉพาะในการขนถ่ายสินค้าในท่าเรือ พฤติกรรมด้านพลวัตของระบบเครนจะต้องถูกกำหนดอย่างแม่นยำในขั้นตอนการออกแบบเพื่อกำหนดอายุการใช้งานของเครนที่จะทำงานได้อย่างรวดเร็วภายใต้สภาวะที่หนักหน่วง หรืออาจนำไปประยุกต์ใช้กับชิ้นส่วนแขนกลที่เคลื่อนที่อยู่บนราง ดังแสดงในรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 ตัวอย่างแขนกลซึ่งเป็นโครงสร้างลักษณะแรงกระทำแบบเคลื่อนที่

ดังนั้นพฤติกรรมหรือผลตอบสนองทางพลวัตของโครงสร้างภายใต้โหลดกระทำแบบเคลื่อนที่ถือเป็นปัญหาสำคัญโดยนักวิจัยและการศึกษาที่ดำเนินการในหัวข้อนี้ นอกจากนี้แล้ว ด้วยความก้าวหน้าด้านเทคโนโลยี วัสดุเชิงฟังก์ชันจึงได้ถูกนำไปใช้กับโครงสร้างซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ เช่น โครงสร้างคาน โครงสร้างแผ่นบางและโครงสร้างเปลือกบาง ในบริบทนี้ แม้ว่าปัญหาการสั่นสะเทือนของคานที่เป็นวัสดุเนื้อเดียวและอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่นั้นได้รับการศึกษาอย่างกว้างขวางในช่วงทศวรรษที่ผ่านมาและการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการสั่นสะเทือนแบบบังคับของโครงสร้างคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่ออยู่ใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่นั้นอยู่ในช่วงที่มีการศึกษามากเพิ่มขึ้นตามลำดับ แต่ในกรณีที่โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชที่ได้มีการนำวัสดุเชิงฟังก์ชันมาประยุกต์ใช้นั้นพบว่ามีเพียงมีงานวิจัยใกล้เคียงคือ Şimşek [6] และมีข้อจำกัดในเรื่องของจำนวนแรงที่กระทำ ส่วนโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นพบว่ามีงานวิจัยใด ๆ ศึกษามาก่อนหน้านี้ ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงมุ่งเน้นเพื่อศึกษาในเชิงลึกมากขึ้นเกี่ยวกับโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันและอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

- 1.2.1 ศึกษาพฤติกรรมทางด้านพลวัตของโครงสร้างแบบแซนด์วิชที่สร้างมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันเมื่ออยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

- 1.3.1 ศึกษาเฉพาะโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชเท่านั้น
- 1.3.2 โครงสร้างแซนด์วิชจะประกอบด้วยแผ่นประกบบนและล่างจะเป็นวัสดุเชิงฟังก์ชัน ส่วนชั้นแกนกลาง (Core) เป็นวัสดุเนื้อเดียว (Homogeneous)
- 1.3.3 วัสดุเชิงฟังก์ชันทำมาจากอลูมินา (Al_2O_3) และอลูมิเนียม Aluminum (Al)
- 1.3.4 ใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (First order shear deformation theory, FSDT) และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม (Third order shear deformation theory, TSDT) ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบแซนด์วิช

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 ผลของการศึกษาสามารถนำมาใช้เป็นข้อมูลสำหรับการออกแบบโครงสร้างแบบแซนด์วิชที่เข้าร่วมกับวัสดุเชิงฟังก์ชันเมื่ออยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่
- 1.4.2 ผลการศึกษาสามารถนำไปใช้เป็นข้อมูลอ้างอิงสำหรับผู้สนใจโครงสร้างแบบแซนด์วิชเพื่อนำไปพัฒนาต่อยอดในอนาคตต่อไป

1.5 องค์ประกอบของวิทยานิพนธ์

บทถัดไปต่อบทหน้าของวิทยานิพนธ์จะเป็น บทที่ 2 ซึ่งจะนำเสนอเกี่ยวกับทฤษฎีเบื้องต้นของวัสดุคอมโพสิตและวัสดุเชิงฟังก์ชันและวรรณกรรมปริทัศน์ที่เกี่ยวข้อง ส่วนบทที่ 3 กล่าวถึงเกี่ยวกับทฤษฎีโครงสร้างคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันและสมการควบคุม (Governing equations) ทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ ส่วนบทที่ 4 จะนำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบาง (Plates) ที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันและการสร้างสมการควบคุม (Governing equations) และในบทที่ 5 อธิบายทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามทั้งโครงสร้างคานและแผ่นบางพร้อมสมการควบคุม บทที่ 6 เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ถูกนำเสนอในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ส่วนบทที่ 7 ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์และการวิเคราะห์ผล บทที่ 8 สรุปผลและข้อเสนอแนะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

วรรณกรรมปริทัศน์

จากการกล่าวถึงความสำคัญและที่มาของงานวิทยานิพนธ์ในบทก่อนหน้านี้ ถือเป็นบทที่มีความสำคัญอันดับต้นที่จะนำไปสู่การค้นคว้าหาทฤษฎีรวมถึงผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อในการศึกษาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งจะถูกรวบรวมและนำเสนอไว้ในส่วนของหัวข้อต่าง ๆ ได้แก่ ทฤษฎีวัสดุผสมแบบใหม่ที่เรียกว่าวัสดุเชิงฟังก์ชัน (FGMs) กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีโครงสร้างแซนด์วิช (Sandwich structures) และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสันสะท้อนของโครงสร้างคานและโครงสร้างแผ่นบางที่อยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ตามลำดับ โดยเนื้อหาในส่วนต่าง ๆ ข้างต้นจะถูกนำไปเป็นข้อมูลประกอบและใช้เป็นแนวทางในการศึกษาวิจัยซึ่งมีความสำคัญต่อการศึกษานี้วิทยานิพนธ์ในครั้งนี้จะมุ่งเน้นการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างแบบแซนด์วิชที่สร้างมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันในรูปแบบของโครงสร้างย่อย (Element structures) ต่าง ๆ นั่นคือ โครงสร้างคาน (Beams structures) และโครงสร้างแผ่นบาง (Plate structures) ซึ่งโครงสร้างย่อยเหล่านี้มักเป็นส่วนประกอบหลักในโครงสร้างทางวิศวกรรมจำนวนมาก ยกตัวอย่างเช่น โครงสร้างยานพาหนะต่าง ๆ ซึ่งบางครั้งชิ้นส่วนหรือโครงสร้างที่ทำมาจากวัสดุเนื้อเดียวอาจไม่ตอบสนองความต้องการหรือมีขีดจำกัด ดังนั้นโครงสร้างที่สร้างมาจากวัสดุคอมโพสิตจึงถูกนำมาพิจารณาหรือศึกษาเพื่อที่จะทดแทนข้อดีของวัสดุเนื้อเดียว เนื่องจากวัสดุคอมโพสิตจะมีคุณสมบัติที่โดดเด่นในหลาย ๆ ด้าน เช่น ความแข็งแรง น้ำหนัก และสมบัติด้านอื่น ๆ

สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างชิ้นส่วนต่าง ๆ นั้นสามารถทำได้หลายวิธี ยกตัวอย่างเช่น โดยการทดลอง โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และใช้ซอฟต์แวร์ประยุกต์ ซึ่งจะมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันออกไป ตัวอย่างเช่น แนนอนวิธีการทดลองจะให้ผลลัพธ์ในสภาวะจริง ซึ่งจำเป็นต้องสร้างอุปกรณ์เพื่อใช้ในการทดลองและต้องใช้เวลา มีค่าใช้จ่ายค่อนข้างสูง ส่วนวิธีสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์โครงสร้างนั้นจำเป็นต้องทราบทฤษฎีที่เกี่ยวข้องต่าง ๆ เพื่อที่จะสร้างแบบจำลองนั้นให้ใกล้เคียงกับพฤติกรรมของโครงสร้างที่สนใจมากที่สุด ส่วนวิธีใช้ซอฟต์แวร์ประยุกต์ก็เป็นอีกวิธีที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางและมีซอฟต์แวร์ให้เลือกใช้หลากหลาย แต่อย่างไรก็ตามจำเป็นต้องใช้เครื่องประมวลผลที่มีประสิทธิภาพที่ค่อนข้างสูงในการทำงานร่วมกับซอฟต์แวร์ประยุกต์เหล่านี้ ส่วนวิธีการที่จะใช้วิเคราะห์โครงสร้างในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้แบบวิธีการจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งก็เป็นวิธีการที่เป็นที่นิยมอีกวิธีการหนึ่ง โดยสามารถนำไปทำนายหาพฤติกรรมของโครงสร้างทางวิศวกรรม ทั้งในโครงสร้างวัสดุเนื้อเดียวและโครงสร้างวัสดุคอมโพสิต เนื่องจากวิธีการนี้สามารถประหยัดเวลาและลดต้นทุนในการวิเคราะห์โครงสร้าง นอกจากนี้ผลลัพธ์ที่ได้มีความใกล้เคียงกับวิธีการทดลองและวิธีการจำลองทางซอฟต์แวร์สำเร็จรูปหากใช้ทฤษฎีและวิธีการแก้ไขปัญหาคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง โดยเนื้อหาในบทนี้สามารถแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

- 2.1 วัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally Graded Materials, FGMs)
- 2.2 กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน (Fabrication of functionally graded materials)
- 2.3 โครงสร้างแบบแซนด์วิช (Sandwich structures)
- 2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสันสะท้อนของโครงสร้างคานภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

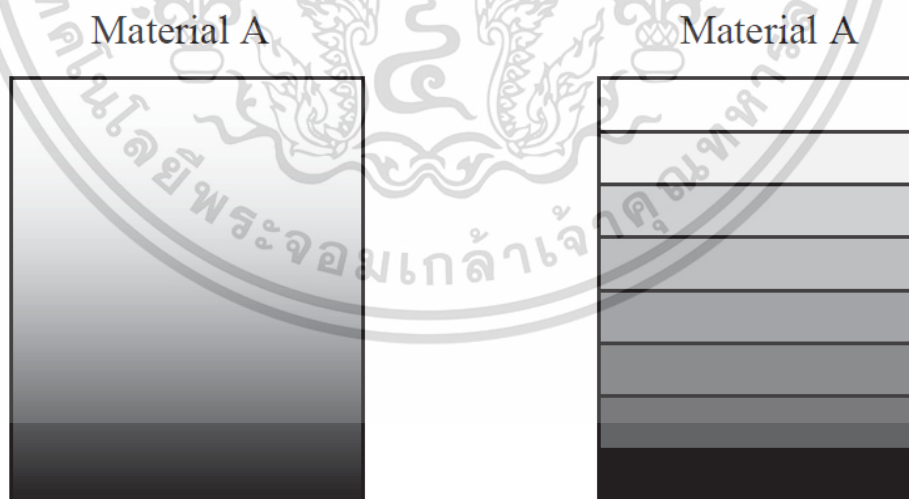
2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสันสะท้อนของโครงสร้างแผ่นบางภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

2.1 วัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally Graded Materials, FGMs)

วัสดุเชิงฟังก์ชันเป็นวัสดุคอมโพสิตประเภทหนึ่งซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุจากผิวด้านหนึ่งไปสู่ผิวอีกด้านหนึ่ง โดยการสร้างจะใช้วัสดุตั้งแต่ 2 ชนิดหรือมากกว่า 2 ชนิดขึ้นไป โดยการปรับเปลี่ยนสัดส่วนการผสมแต่ละชั้นแบบต่อเนื่องเพื่อให้ได้วัสดุใหม่ตามที่ต้องการ โดยสัดส่วนการผสมแต่ละชั้นแบบต่อเนื่องของวัสดุประเภทนี้จะทำให้ช่วยลดความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ ความเค้นตกค้างและปัจจัยความเค้นสะสมที่เกิดขึ้นในชั้นวัสดุคอมโพสิตแบบแผ่นลามิเนต ยิ่งไปกว่านั้นการพัฒนากระบวนการผลิตที่ทันสมัยในยุคปัจจุบันสามารถสร้างสัดส่วนการผสมแต่ละชั้นแบบต่อเนื่องเพื่อประยุกต์ใช้ในงานทางวิศวกรรม วัสดุเชิงฟังก์ชันได้ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Sendai Group ในปี 1984 ที่ประเทศญี่ปุ่นและได้นำไปประยุกต์ใช้งานในด้านต่าง ๆ มากมาย เช่น เครื่องปฏิกรณ์ อุปรกรณ์พลังงานฟิวชั่น ด้านชีวการแพทย์ อากาศยานและอวกาศยาน อุตสาหกรรมการป้องกันประเทศและงานโครงสร้างทางวิศวกรรมต่าง ๆ [7] ดังนั้นวัสดุเชิงฟังก์ชันจึงเป็นสิ่งสำคัญที่ต้องศึกษาวิเคราะห์ทั้งในด้านสถิติและด้านพลวัตซึ่งนำไปสู่การศึกษามากมายถึงโครงสร้างวัสดุที่ทำมาจากวัสดุประเภทนี้ในเรื่องการสันสะท้อน

2.1.1 โครงสร้างของวัสดุเชิงฟังก์ชัน

มีหลายวิธีที่จะอธิบายการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนผสมแต่ละชั้นของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่สร้างจากวัสดุ 2 ชนิด โดยทั่วไปส่วนใหญ่จะอยู่บนพื้นฐานการกระจายตัวของสัดส่วนปริมาตร (Volume fraction) มากกว่าที่จะใช้หลักการจากโครงสร้างจุลภาคซึ่งถูกนำเสนอโดย Bao และ Wang [8]



(ก) แบบต่อเนื่อง

(ข) แบบชั้นบันได

รูปที่ 2.1 ตัวอย่างวัสดุเชิงฟังก์ชัน[9]

สำหรับโครงสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันที่พิจารณาจะแบ่งได้ 2 แบบ นั่นคือองค์ประกอบของวัสดุที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับแต่ละชั้นอย่างต่อเนื่องและแบบชั้นบันได ดังแสดงดังรูปที่ 2.1 ซึ่งเป็นวัสดุเชิงเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันที่ทำจากวัสดุ 2 ชนิดที่แตกต่างกัน โดยองค์ประกอบจะแตกต่างกันไปจากพื้นผิวด้านบนของวัสดุ A ไปจนถึงพื้นผิวด้านล่างของวัสดุ B พิจารณากรณีแบบต่อเนื่อง ดังแสดงในรูปที่ 2.1(ก) องค์ประกอบของวัสดุหรือส่วนผสมจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง ส่วนรูปที่ 2.1(ข) องค์ประกอบหรือส่วนผสมของวัสดุเชิงฟังก์ชันจะถูกสร้างขึ้นเป็นลักษณะขั้นบันไดซึ่งไม่ต่อเนื่อง

การหาค่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุเชิงฟังก์ชันกรณีแบบต่อเนื่องนั้นสามารถหาได้โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบฟังก์ชันที่อาจแตกต่างกัน เช่น ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential function) หรือ ฟังก์ชันยกกำลัง เป็นต้น จากที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ วัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นไม่ใช่วัสดุเนื้อเดียว ซึ่งค่าคุณสมบัติจะเปลี่ยนไปตามรูปแบบฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่ประยุกต์ใช้และมีการศึกษาอย่างมากมาย ยกตัวอย่างเช่น นำไปตรวจสอบการขยายตัวของรอยแตก ร้าว การทนทานต่อการแตกหัก การดัด การโค้ง และการสั่นสะเทือน [10-13]

บนพื้นฐานกฎของการผสม (Rule of mixtures) ค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผล (Effective material properties) P สามารถหาได้ดังนี้

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (2.1)$$

โดยที่ค่า P_c และ P_m คือ ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่เป็นเซรามิกและโลหะตามลำดับ ส่วนค่า V_m และ V_c คือสัดส่วนปริมาตรของวัสดุโลหะและวัสดุเซรามิก ซึ่งสัดส่วนปริมาตรของวัสดุทั้งสองมีความสัมพันธ์ดังสมการต่อไปนี้

$$V_m + V_c = 1 \quad (2.2)$$

ส่วนการนำแบบจำลองฟังก์ชันยกกำลังมาประยุกต์ใช้กับวัสดุเชิงฟังก์ชันก็มักนิยมนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในงานวิจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล [14] โดยแบบจำลองฟังก์ชันยกกำลังที่อยู่บนพื้นฐานกฎของการผสม (Rule of mixtures) ได้ถูกนำเสนอโดย Wakashima และคณะ [15] เพื่อจะระบุค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลของวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยที่สัดส่วนปริมาตรของเซรามิก (V_c) เขียนได้ดังนี้

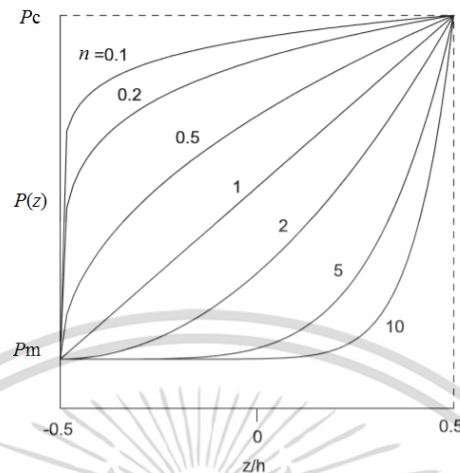
$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (2.3)$$

โดยที่ค่า n คือดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (material volume fraction index) ซึ่งคุณสมบัติของวัสดุจะเปลี่ยนแปลงไปตามทิศทาง z ในขณะที่ h คือความสูง ดังนั้นเพื่อหาค่าคุณสมบัติของวัสดุที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าวัสดุไปตามฟังก์ชันยกกำลัง สามารถหาได้โดยการแทนค่าสมการที่ 2.3 และสมการที่ 2.2 ลงในสมการที่ 2.1 จะได้

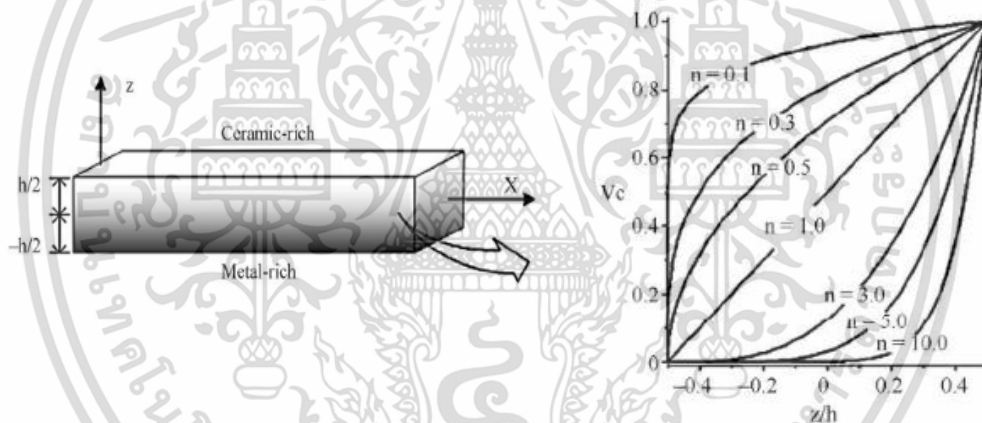
$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + P_m \quad (2.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$P(z)$ คือ คุณสมบัติวัสดุประสิทธิผล ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่ง z ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยใช้รูปแบบฟังก์ชันยกกำลัง



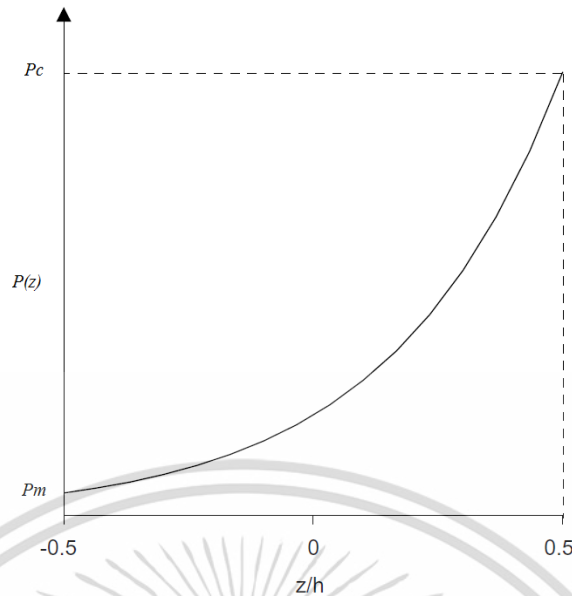
รูปที่ 2.3 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชัน(เซรามิก-โลหะ)ใช้รูปแบบฟังก์ชันยกกำลัง

ในกรณีปรับเปลี่ยนค่าคุณสมบัติของวัสดุตามแนวความหนา(แกน z) ซึ่งเป็นไปตามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล[16] สามารถแสดงได้ดังนี้

$$P(z) = P_m e^{\frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right)\left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (2.5)$$

โดยค่า z อยู่ระหว่าง $+h/2$ และ $-h/2$ โดยตำแหน่งผิวด้านบนและล่างวัสดุเชิงฟังก์ชันจะมีคุณสมบัติเป็นวัสดุเนื้อเดียวแบบไอโซทรอปิก (Isotropic homogeneous materials) โดยลักษณะการกระจายค่าคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชัน ณ ตำแหน่งอื่น ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 2.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.4 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยใช้รูปแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ตามที่ได้อธิบายไว้ว่าการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนของวัสดุเชิงฟังก์ชันอย่างต่อเนื่องนั้นสามารถจะอธิบายได้ตามฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ทั้งแบบฟังก์ชันยกกำลัง (Power-law function) และแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential function) โดยทั้ง 2 รูปแบบเป็นฟังก์ชันที่ได้รับความนิยมนำไปใช้งานกันอย่างแพร่หลายในงานวิจัยมากมาย ทั้งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแบบวิเคราะห์ โดยระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข เช่น งานวิจัยของ Librescu et al. ปี 2004 [17] ได้ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนของคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้สภาวะการบิดตัวของแกนหมุน ซึ่งการสั่นสะเทือนลักษณะนี้พบได้ตามโครงสร้างของเครื่องยนต์กังหัน (Gas turbines) แกนหมุนของเครื่องยนต์เฮลิคอปเตอร์ เครื่องมือตัดเฉือนและชิ้นส่วนเครื่องบินอวกาศ (Aerospace) เป็นต้น สำหรับงานวิจัยเพิ่มเติมซึ่งเกี่ยวกับวัสดุเชิงฟังก์ชันแบบใช้ฟังก์ชันยกกำลังและแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล สามารถค้นหาเพิ่มเติมได้ตามเอกสารอ้างอิงต่อไปนี้ [18-25]

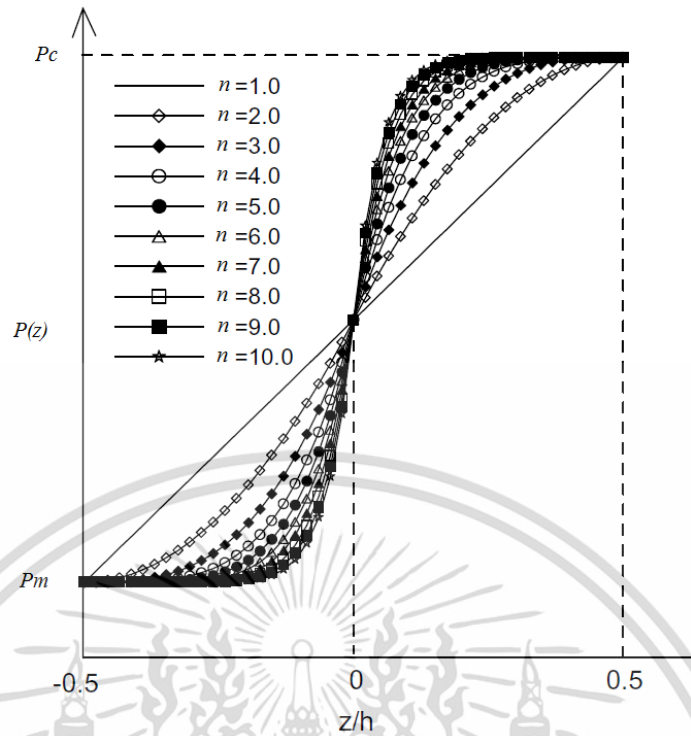
อย่างไรก็ตามในการประเมินค่าสมบัติวัสดุประสิทธิภาพยังพบว่ายังมีฟังก์ชันที่ใช้อธิบายคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันคือฟังก์ชันซิกมอยด์ [16] (Sigmoid function) โดยฟังก์ชันซิกมอยด์จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันแบบยกกำลัง 2 ฟังก์ชัน ดังแสดงได้ตามสมการต่อไปนี้

$$P(z) = P_c - \frac{1}{2}(P_c - P_m) \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^n \quad \text{โดยที่ } 0 \leq z \leq h/2 \quad (2.6)$$

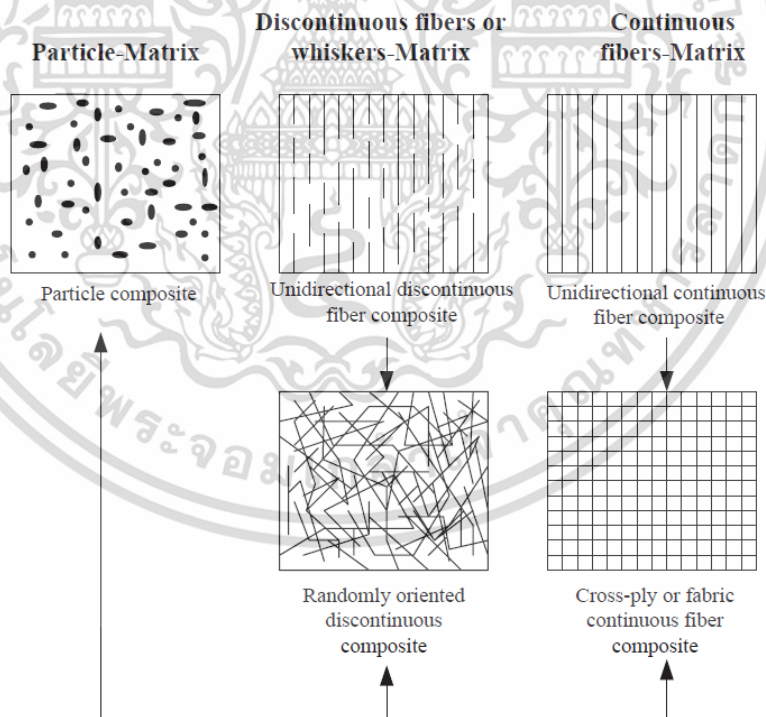
$$P(z) = \frac{1}{2}(P_c - P_m) \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^n + P_m \quad \text{โดยที่ } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (2.7)$$

โดยรูปที่ 2.5 แสดงค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิภาพ ณ ตำแหน่ง z ต่าง ๆ โดยฟังก์ชันซิกมอยด์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.5 การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยใช้รูปแบบฟังก์ชันซิกมอยด์[16]



รูปที่ 2.6 โครงสร้างระบบวัสดุคอมโพสิตแบบดั้งเดิม

2.1.2 คุณสมบัติทางกลของวัสดุเชิงฟังก์ชัน

โครงสร้างวัสดุคอมโพสิตคือระบบวัสดุที่ประกอบด้วยองค์ประกอบตั้งแต่สององค์ประกอบขึ้นไปซึ่งการผลิตวัสดุคอมโพสิตเพื่อให้ได้คุณสมบัติของวัสดุที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการใช้งานเฉพาะด้าน เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่หรือใช้โดยไม่ได้รับอนุญาต ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั้นจะแตกต่างจากวัสดุที่เป็นเนื้อเดียวแบบไอโซทรอปิก ประสิทธิภาพเชิงกลและคุณสมบัติของวัสดุคอมโพสิตนั้นจะขึ้นอยู่กับหลายด้าน ตัวอย่างเช่น คุณสมบัติของวัสดุ รูปทรงและการกระจายของเฟสต่าง ๆ ดังนั้นวัสดุคอมโพสิตจะจัดอยู่ในกลุ่มพวกวัสดุไม่เป็นเนื้อเดียวและเป็นวัสดุแอนไอโซทรอปิก โดยคุณลักษณะที่สำคัญ เช่น ปริมาตร น้ำหนัก การใช้งาน ความแข็งแรง ความทนทาน และต้นทุนซึ่งต้องนำมาพิจารณาเมื่อใช้วัสดุคอมโพสิต วัสดุคอมโพสิตแบบดั้งเดิมประเภทต่าง ๆ ที่พบในงานวิจัยที่ผ่านมา นั้นถูกออกแบบขึ้นมาเพื่อใช้ในวัตถุประสงค์และการใช้งานที่แตกต่างกันออกไป ตัวอย่างเช่น แบบเมทริกซ์ของอนุภาค (Partical-Matrix) เส้นใยที่ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous fibers) และเมทริกซ์เส้นใยต่อเนื่อง (Continuous fibers-Matrix) ดังแสดงดังรูปที่ 2.6

เมื่อพิจารณาถึงวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งใช้ฟังก์ชันยกกำลังในการเปลี่ยนแปลงค่าสมบัติของวัสดุตามแนวใด ๆ ร่วมกับกฎของการผสมวัสดุ ดังนั้นสมการที่ใช้สำหรับคำนวณคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลในทิศทางตามแนวใด ๆ แสดงได้ดังสมการที่ 2.8 – 2.12 สังเกตเห็นว่าสมการสมบัติของวัสดุทั้งหมดเป็นฟังก์ชันกับดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ซึ่งใช้เพื่อระบุเปอร์เซ็นต์ขององค์ประกอบของวัสดุ ดังงานวิจัยของ Gibson และคณะ ปี 1995[26]

$$E(z) = (E_t - E_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_b \quad (2.8)$$

$$v(z) = (v_t - v_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + v_b \quad (2.9)$$

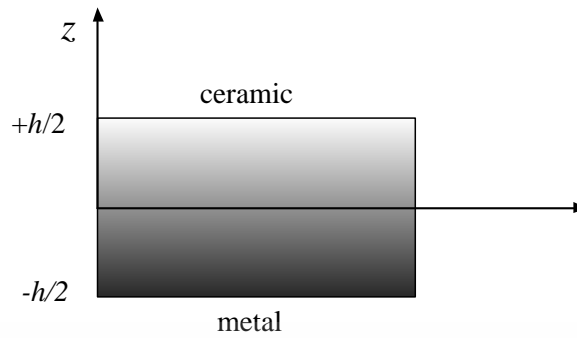
$$\alpha(z) = (\alpha_t - \alpha_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \alpha_b \quad (2.10)$$

$$\eta(z) = (\eta_t - \eta_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \eta_b \quad (2.11)$$

$$\rho(z) = (\rho_t - \rho_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_b \quad (2.12)$$

โดยที่พารามิเตอร์ $E(z)$ $v(z)$ $\alpha(z)$ $\eta(z)$ และ $\rho(z)$ แสดงถึงค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น อัตราส่วนปัวซอง ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน ค่าการนำความร้อนและค่าความหนาแน่นของวัสดุ ตามลำดับ ส่วนตัวห้อย t และ b แทนวัสดุที่พื้นผิวด้านบนและด้านล่างตามลำดับ

จากสมการที่ 2.8 - 2.12 เมื่อนำไปประยุกต์ใช้กับวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ทำจากวัสดุที่ผสมระหว่างเซรามิกกับโลหะ โดยตัวอย่างกำหนดให้ผิวด้านบนเป็นเซรามิกและผิวด้านล่างเป็นโลหะ ดังนั้นผิวด้านล่างของวัสดุปกติใช้ตัวห้อย b ก็จะถูกแทนด้วยวัสดุโลหะ (Metal) ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ตัวห้อย m แทน ในทางกลับกันผิวด้านบนจะใช้สัญลักษณ์ c (Ceramic) แทนตัวห้อย t เช่นกัน เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.7 ตัวอย่างแสดงถึงพิกัดของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีส่วนผสมระหว่างเซรามิกและโลหะ

ดังแสดงพิกัดตามรูปที่ 2.7 จะเห็นได้ว่าค่า z จะอยู่ระหว่าง $-h/2 \leq z \leq h/2$ ดังนั้นค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีส่วนผสมระหว่างเซรามิกกับโลหะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m \quad (2.13)$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \nu_m \quad (2.14)$$

$$\alpha(z) = (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \alpha_m \quad (2.15)$$

$$\eta(z) = (\eta_c - \eta_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \eta_m \quad (2.16)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_m \quad (2.17)$$

จากสมการที่ 2.13 - 2.17 สังเกตได้ว่าค่า z ที่ตำแหน่งผิวบน ($+h/2$) เมื่อนำไปแทนในสมการข้างต้นก็จะให้ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่เป็นเซรามิก 100% และในทางกลับกัน ณ ตำแหน่งผิวล่าง ($z = -h/2$) ก็จะให้ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่เป็นโลหะ 100% เช่นกัน ส่วนค่า z ณ ตำแหน่งอื่นๆ ก็จะเป็นค่าคุณสมบัติวัสดุที่มีส่วนผสมระหว่างเซรามิกกับโลหะ ซึ่งวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ใช้ส่วนผสมระหว่างเซรามิกกับโลหะนั้นมีการประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลาย[27-37]

อย่างไรก็ตามเป็นการยากที่ทราบข้อมูลที่แม่นยำเกี่ยวกับขนาด รูปร่างและการกระจายเฟสของอนุภาคในวัสดุเชิงฟังก์ชัน ถ้าเทคนิคการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันที่แตกต่างกันอาจจะให้รูปแบบการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนผสมที่แตกต่างกัน ดังนั้นคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลในพื้นที่ที่พิจารณานั้นต้องถูกเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประเมินโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่บนพื้นฐานการกระจายตัวโดยสัดส่วนปริมาตรและรูปร่างโดยประมาณของเฟสที่กระจาย งานวิจัยของ Mori และ Tanaka[38], Benveniste[39] และ Shen[9] เป็นหนึ่งในแบบจำลองที่มีประโยชน์ในการประเมินค่าโมดูลัสประสิทธิผล (effective moduli) ของวัสดุ โดยที่แบบจำลองนี้เหมาะสำหรับวัสดุเชิงฟังก์ชันทั่วไปที่มีเฟสเมทริกซ์ต่อเนื่องและเฟสอนุภาคที่ไม่ต่อเนื่อง โดยมีนักวิจัยมากมายให้ความสนใจในงานวิจัยนี้และประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านเชิงกลต่าง ๆ เช่น การวิเคราะห์การตัดและการสั่นสะเทือน (Wu and Chen[40], Ansari et al[41], , Rezaei Mojdehi et al.[42]) โดยวิธีการหาค่าสมบัติวัสดุประสิทธิผลของโมริและทานากะสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{K_e - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + V_m \frac{K_c - K_m}{K_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad (2.18)$$

$$\frac{G_e - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + V_m \frac{G_c - G_m}{G_m + f_1}} \quad (2.19)$$

$$\text{โดยที่ } f_1 = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)}$$

ค่า K_e และ G_e คือ บัลค์มอดูลัสประสิทธิผล (Effective bulk modulus) และค่ามอดูลัสเฉือนประสิทธิผล (Effective shear modulus) ตามลำดับ ส่วนค่า K_c , G_c , K_m และ G_m คือค่าบัลค์มอดูลัสและมอดูลัสเฉือนของเซรามิกและโลหะ ตามลำดับ หลักจากนั้นสามารถหาค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นและอัตราส่วนปัวซองได้ดังแสดงสมการต่อไปนี้

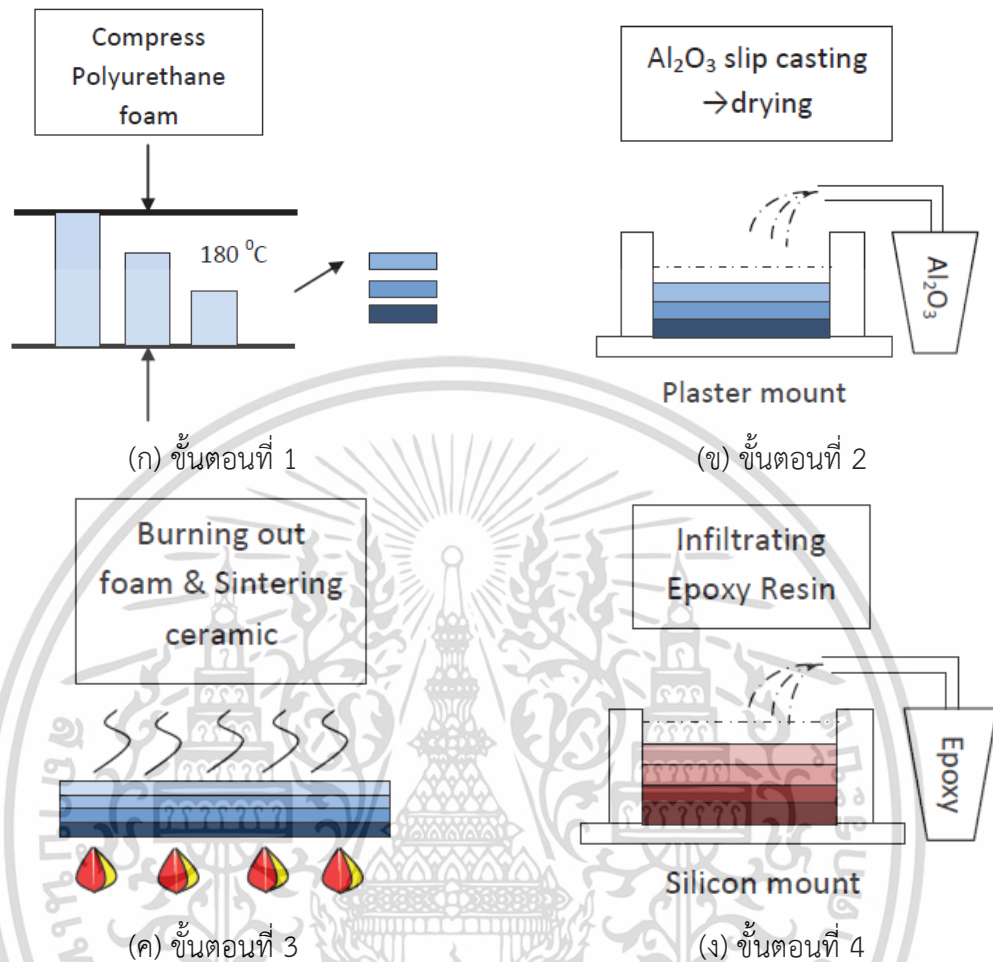
$$E = \frac{9K_e G_e}{3K_e + G_e} \quad (2.20)$$

$$\nu = \frac{3K_e - 2G_e}{2(3K_e + G_e)} \quad (2.21)$$

2.2 กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน

การสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นโดยทั่วไปแล้วทำได้หลายวิธี แต่วิธีที่นิยมมีอยู่ด้วยกัน 3 วิธี คือ วิธีการแทรกซึมของวัสดุแบบหลายขั้นตอน (Multi-step sequential infiltration technique) วิธีการพ่นวัสดุเหลวร้อน (Thermal spraying technique) และวิธีการขึ้นรูปด้วยผง (Power metallurgy technique) ตามลำดับ ซึ่งอธิบายได้ดังต่อไปนี้

2.2.1 วิธีการแทรกซึมของวัสดุแบบหลายขั้นตอน



รูปที่ 2.8 การสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันด้วยวิธีการแทรกซึมแบบหลายขั้นตอน

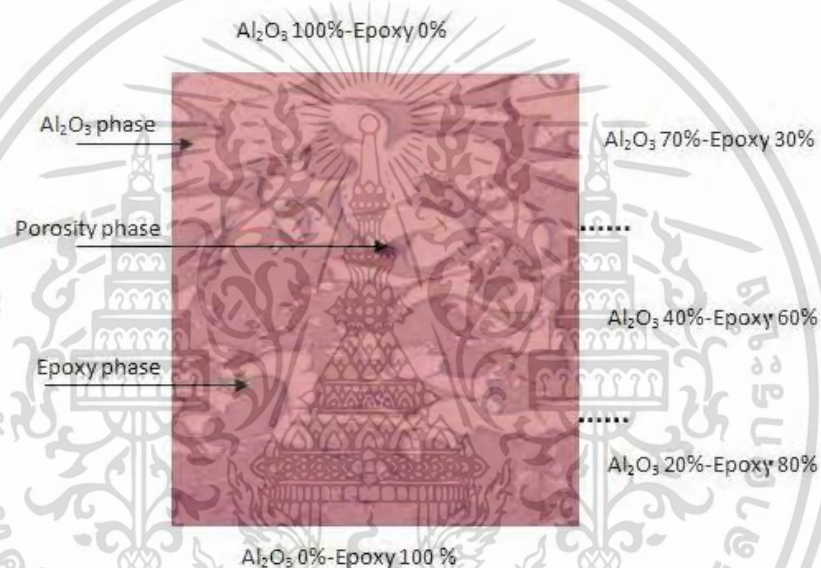
วิธีการนี้สามารถนำมาใช้เพื่อสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีการผสมผสานกันระหว่างคู่ของวัสดุได้อย่างหลากหลาย เช่น Ceramic-Metal, Ceramic-Polymer, Metal-Polymer และอื่น ๆ เนื่องจากกระบวนการที่ทำให้วัสดุแข็งตัว (solidification processes) ของวิธีการนี้มีการแบ่งแยกออกจากกันอย่างชัดเจน เพื่อให้เหมาะสมกับแต่ละวัสดุที่นำมาผสมกัน ในขณะที่วิธีการอื่น ๆ ไม่สามารถแบ่งแยกกระบวนการนี้ได้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยวิธีการนี้มากขึ้น พิจารณารูปที่ 2.8 แสดงถึงกระบวนการทั้งหมดเพื่อสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งเป็นการผสมกันระหว่าง Ceramic (Al₂O₃) – Polymer (epoxy resin)

จากรูปที่ 2.8 ขั้นตอนที่ 1 เริ่มจากการตัดฟองน้ำที่มีรูพรุน (polyurethane foam) ให้มีความหนาต่างกันโดยใช้ลวดร้อน (Hot wire cutter) และนำฟองน้ำที่ได้ไปผ่านกระบวนการอัดร้อน (hot pressing) ด้วยอุณหภูมิประมาณ 180 องศาเซลเซียส เป็นเวลา 1 ชั่วโมงเพื่อให้ได้ฟองน้ำที่มีความหนาเท่ากันแต่มีความหนาแน่นต่างกัน หลังจากนั้นนำฟองน้ำที่ผ่านกระบวนการอัดร้อนมาวางเรียงกันเป็นชั้น ๆ ในแม่แบบที่ทำมาจากปูนพลาสติก โดยให้เริ่มจากชั้นฟองน้ำที่มีความหนาแน่นมากไปยังชั้นที่มีความหนาแน่นน้อย ขั้นตอนที่ 2 นำผงเซรามิก (Al₂O₃) ที่มีการผสมกับสารเคมีเหลวที่จะช่วยให้เกิดการแข็งตัวตามสูตร นำมาเทลงในแม่แบบและปล่อยให้ น้ำเซรามิกแทรกซึมเข้าไปยังส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการศึกษา

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่เป็นรูพรุนของฟองน้ำ เพื่อให้เกิดการแทรกซึมที่ดีควรรนำแม่แบบไปวางไว้ในห้องสุญญากาศ เมื่อมีการแทรกซึมอย่างสมบูรณ์แล้วก็ต้องใช้เวลารอให้เซรามิกแห้งซึ่งจะทำให้ได้ชิ้นงานที่มีส่วนผสมของเซรามิกและฟองน้ำที่มีความหนาแน่นแตกต่างกัน จากนั้นขั้นตอนที่ 3 นำชิ้นงานนี้ไปเผาที่อุณหภูมิประมาณ 800 องศาเซลเซียส เพื่อกำจัดฟองน้ำภายในทิ้ง หลังจากนั้นจะได้ชิ้นงานที่ทำมาจากเซรามิกที่มีรูพรุนและชิ้นงานเซรามิกที่มีรูพรุนนี้จะต้องผ่านกระบวนการให้ความร้อนอีกครั้ง (sintering process) ด้วยอุณหภูมิสูงประมาณ 1,400 องศาเซลเซียส เป็นเวลา 1 ชั่วโมง เพื่อให้เกิดการแข็งตัวอย่างสมบูรณ์และกระบวนการสุดท้าย (ขั้นตอนที่ 4) คือ นำชิ้นงานเซรามิกที่มีรูพรุนและแข็งตัวอย่างสมบูรณ์ไปวางในแม่แบบที่ทำมาจากซิลิโคน จากนั้นเติมเต็มรูพรุนด้วยพอลิเมอร์เหลว (epoxy resin) ซึ่งขั้นตอนนี้ควรทำในห้องสุญญากาศเช่นกัน เมื่อพอลิเมอร์แข็งตัว สุดท้ายก็จะได้ชิ้นวัสดุที่ทำมาจากเซรามิกและพอลิเมอร์ดังแสดงดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 วัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีส่วนผสมระหว่างเซรามิกกับพอลิเมอร์

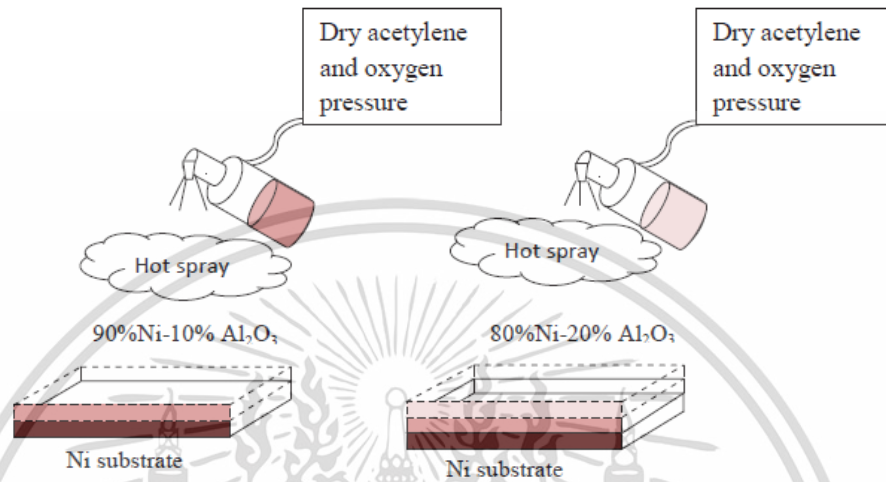
จากรูปที่ 2.9 แสดงให้เห็นภาพหน้าตัดของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่สร้างขึ้นมาจาก 2 วัสดุคือ เซรามิกและพอลิเมอร์จะพบว่าส่วนบนสุดจะเป็นส่วนที่มีอัตราส่วนผสมของเซรามิก (สีขาว) มากกว่าพอลิเมอร์ (สีน้ำตาลแดง) และอัตราส่วนของเซรามิกจะค่อย ๆ ลดลงจนมีปริมาณน้อยสุดที่ส่วนล่าง ในขณะที่เดียวกันส่วนผสมของพอลิเมอร์ก็จะมีแปรเปลี่ยนในสัดส่วนที่ตรงกันข้าม

2.2.2 วิธีการพ่นวัสดุเคลวร้อน (Thermal spraying technique)

เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่นิยมนำมาใช้กับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ทำมาจากเซรามิกกับโลหะ นั่นคือ วิธีการพ่นวัสดุเคลวร้อน การสร้างวัสดุด้วยวิธีการนี้จะต้องเตรียมอัตราส่วนผสมของผงวัสดุในแต่ละขั้นตอนของการพ่นแยกออกจากกัน ยกตัวอย่างเช่น หากต้องการชั้นแรกเป็น 10 % ของเซรามิก (Al_2O_3) และ 90% ของโลหะ (Ni) ก็จะต้องตวงและเก็บไว้ในภาชนะหนึ่ง ส่วนชั้นอื่น ๆ ก็จะต้องตวงและเก็บแยกจากกันตามความต้องการที่ได้ออกแบบไว้ เพื่อให้ผงวัสดุในแต่ละภาชนะมีการผสมที่สมบูรณ์ ดังนั้นต้องอาศัยเครื่องผสม (planetary mill) โดยให้เครื่องทำงานที่ความเร็วรอบประมาณ 150 – 250 รอบต่อนาที เป็นเวลา 12 ชั่วโมง หลังจากนั้นก็นำวัสดุผสมในแต่ละภาชนะไปให้ความร้อน เพื่อเปลี่ยนจากวัสดุผสมที่เป็นผงให้กลายเป็นวัสดุผสมที่เป็นของเหลวร้อนด้วย Oxy-acetylene

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Flame และพ่นลงบนพื้นผิวหน้าที่เตรียมไว้ ในแต่ละขั้นตอนของการพ่นจะต้องอาศัยความประณีตในการพ่น เพื่อให้เกิดการกระจายตัวที่ดี เมื่อวัสดุผสมในการพ่นครั้งแรกเย็นตัวก็จะกลายเป็นของแข็ง หลังจากนั้นก็สามารถพ่นวัสดุในชั้นต่อไปได้ด้วยอัตราส่วนผสมอื่น ๆ กระบวนการทั้งหมดของวิธีการพ่นวัสดุเหลวร้อนเพื่อสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชัน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.10



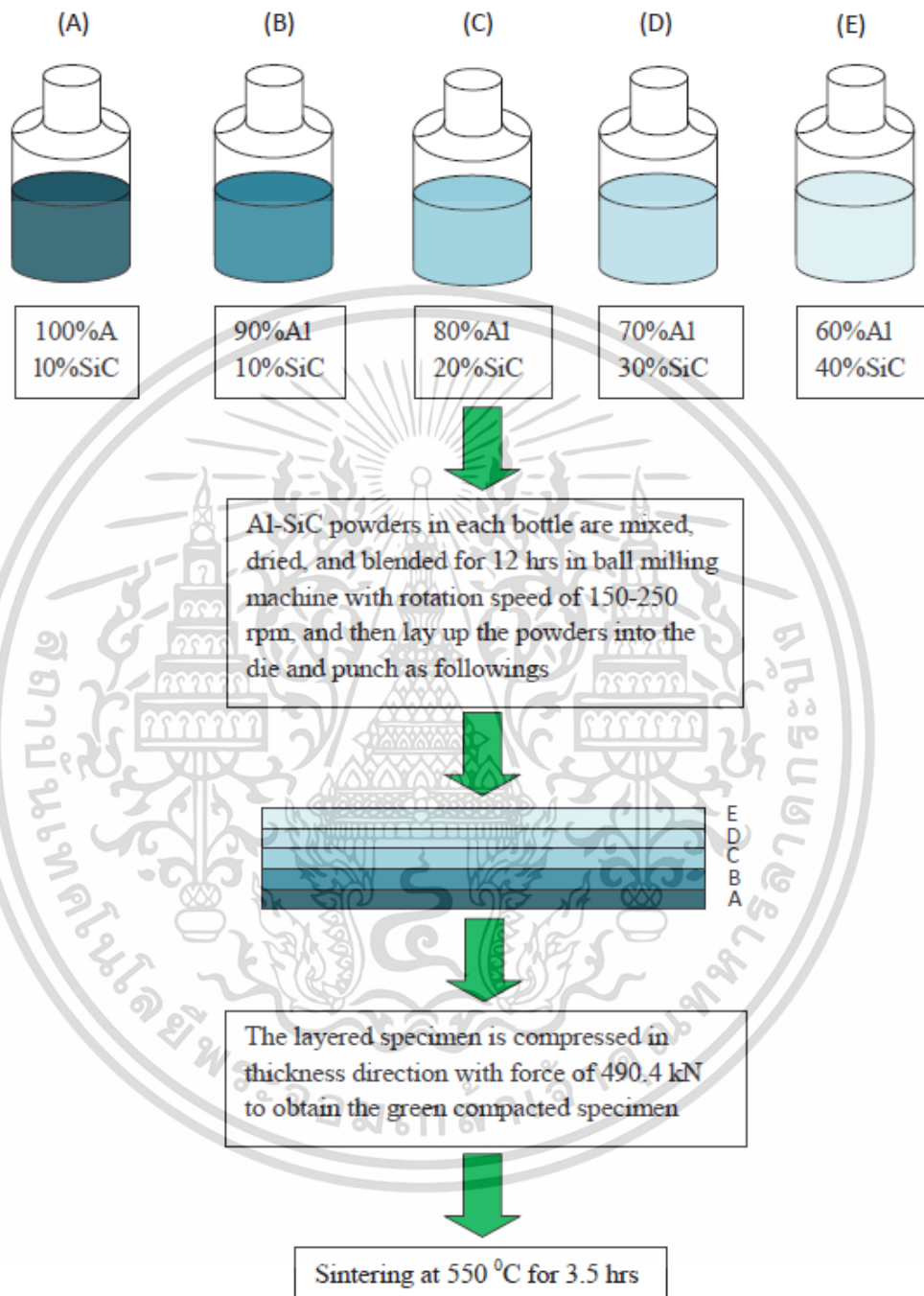
รูปที่ 2.10 กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยวิธีการพ่นวัสดุเหลวร้อน

2.2.3. วิธีการขึ้นรูปด้วยผงวัสดุ (Powder metallurgy technique)

การสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันด้วยวิธีการขึ้นรูปด้วยผงวัสดุเป็นวิธีการที่มีการใช้งานกันอย่างแพร่หลาย เนื่องจากวิธีการนี้สามารถควบคุมองค์ประกอบของวัสดุได้ในช่วงที่กว้างและสามารถขึ้นรูปร่างใกล้เคียงกับชิ้นส่วนโครงสร้างที่ต้องการ โดยวิธีการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันสำหรับวิธีการนี้ถือได้ว่าเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพและมีข้อได้เปรียบในด้านการผลิตที่มีความซับซ้อนน้อยของกระบวนการเมื่อเทียบกับวิธีการอื่น ๆ โดยวิธีการนี้สามารถแสดงขั้นตอนวิธีการขึ้นรูปวัสดุเชิงฟังก์ชัน ดังแสดงในรูปที่ 2.11 เป็นตัวอย่างการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีการผสมระหว่าง Ceramic (SiC) – Metal (Al) ซึ่งในช่วงของการเตรียมวัสดุสามารถทำได้โดยใช้กระบวนการเดียวกันกับการเตรียมวัสดุในแต่ละขั้นตอนของวิธีการพ่นวัสดุเหลวร้อนนั่นคือ เตรียมส่วนผสมที่ต่างกันไว้ในแต่ละภาชนะและผสมให้เข้ากันโดยใช้เครื่องผสม (Planetary mill) แต่หลังจากได้ผงผสมของวัสดุแล้วให้นำไปเทในแม่แบบที่ทำมาจากเหล็กกล้า โดยการเทจะต้องเทตามลำดับของส่วนผสมที่ได้ออกแบบไว้ เมื่อผงผสมของวัสดุทั้งหมดถูกเทลงในแม่พิมพ์แบบเรียบร้อยแล้วจะต้องนำแม่แบบที่บรรจุผงวัสดุนี้ไปกดอัดเพื่อป้องกันการเกิดรูพรุนภายในเนื้อวัสดุด้วยแรงประมาณ 500 kN หลังจากนั้นก็ทำการย้ายชิ้นส่วนออกจากแม่แบบ เพื่อเข้าสู่กระบวนการให้ความร้อนด้วยอุณหภูมิสูง (Sintering process)

โดยวิธีการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันตามที่ได้กล่าวไว้ในข้างต้น พบว่ามีข้อดีและข้อเสียที่แตกต่างกันออกไป เช่น กรณีวิธีการแทรกซึมของวัสดุแบบหลายขั้นตอนสามารถให้ผลลัพธ์ที่ดีในการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันกับวัสดุหลายประเภท แต่มีกระบวนการและต้องใช้เวลาในการผลิต ในขณะที่วิธีการพ่นวัสดุเหลวร้อนอาจต้องอาศัยความชำนาญหรืออุปกรณ์ช่วยในเรื่องการพ่นของวัสดุเพื่อให้ได้วัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีคุณภาพ สำหรับวิธีการขึ้นรูปด้วยผงวัสดุถือได้ว่าเป็นวิธีการที่ไม่มี

ความซับซ้อนมากขึ้นและสามารถให้ผลที่ดีที่สุดสำหรับการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันได้ แต่จะต้องเลือกคู่ของวัสดุที่นำมาผสมให้มีจุดหลอมเหลวไม่ต่างกันมากเกินไป

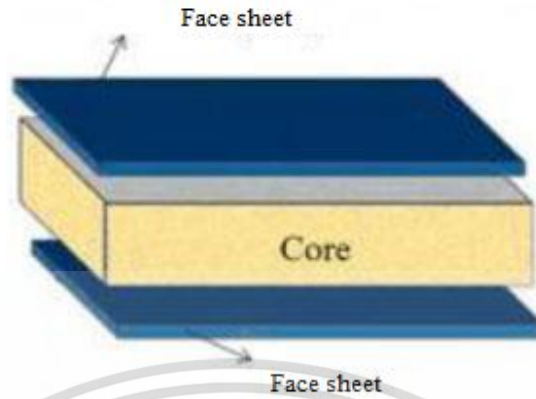


รูปที่ 2.11 กระบวนการสร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยวิธีการขึ้นรูปด้วยผงวัสดุ

2.3 โครงสร้างแบบแซนด์วิช

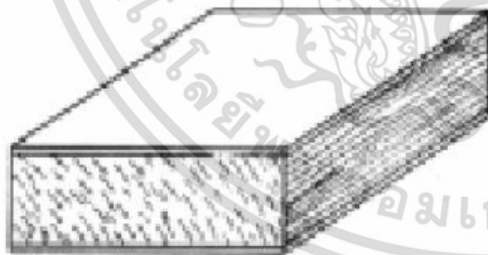
โครงสร้างแบบแซนด์วิชเป็นโครงสร้างแบบคอมโพสิตซึ่งมีน้ำหนักเบา สร้างขึ้นโดยการฝังแกนกลางที่มีความหนาแน่นต่ำระหว่างแผ่นประกบบนและล่าง ดังแสดงรูปที่ 2.12 แสดงโครงสร้างแซนด์วิชทั่วไป โดยที่ชั้นแกนกลางของโครงสร้างประเภทนี้สามารถออกแบบเลือกใช้วัสดุแตกต่างกัน เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ออกไปแล้วแต่การนำไปประยุกต์ใช้งาน โดยที่ชั้นแกนกลางอาจทำมาจากวัสดุเนื้อเดียวหรือวัสดุคอมโพสิต ดังแสดงรูปที่ 2.13

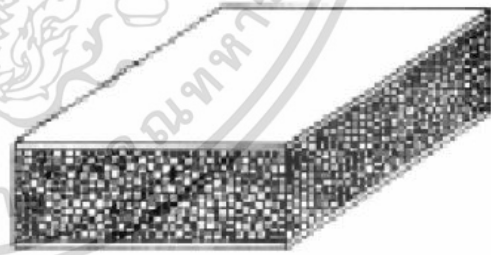


รูปที่ 2.12 โครงสร้างแบบแซนด์วิช

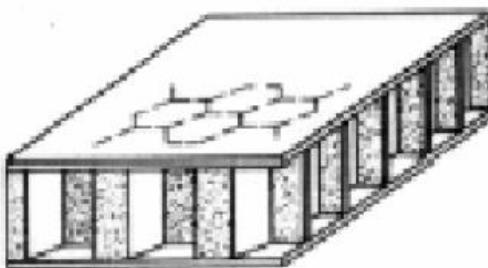
จากรูปที่ 2.13 แสดงให้เห็นว่าโครงสร้างแบบแซนด์วิชซึ่งชั้นแกนกลางทำจากวัสดุต่าง ๆ กัน โดยอาจแบ่งแยกออกได้ 2 ประเภทตามลักษณะวัสดุ คือ ประเภทชั้นแกนกลางทำจากวัสดุเนื้อเดียว เช่น ชั้นแกนกลางทำจากเนื้อไม้ (Wood core) หรือชั้นแกนกลางทำจากโฟม (Foam cores) และอีกประเภทคือชั้นแกนกลางเป็นโครงสร้าง เช่น ชั้นแกนกลางแบบรังผึ้ง (Honeycomb cores) ชั้นแกนกลางแบบลูกฟูก (Corrugated cores) องค์ประกอบหลักของโครงสร้างแซนด์วิชคือ แกนกลาง ซึ่งมีบทบาทสำคัญต่อโครงสร้างวัสดุแซนด์วิชซึ่งต้องมีความแข็งแรงเพียงพอที่จะรักษาระยะห่างระหว่างแผ่นประกบ กล่าวคือมีความคงรูป ด้านทานการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจากแรงเฉือนได้ดี วัสดุที่มักเลือกใช้สร้างโครงสร้างแบบแซนด์วิชสามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ประเภทใหญ่ตามชนิดของแกนกลาง คือ Honeycomb, Cellular foams, Balsa wood และ Corrugated core



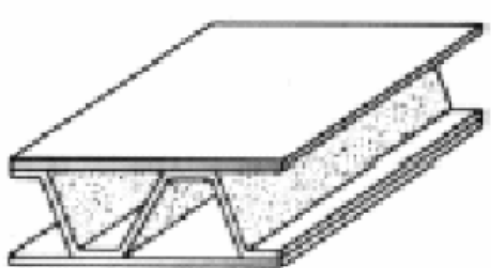
(ก) Wood cores



(ข) Foam cores



(ค) Honeycomb cores

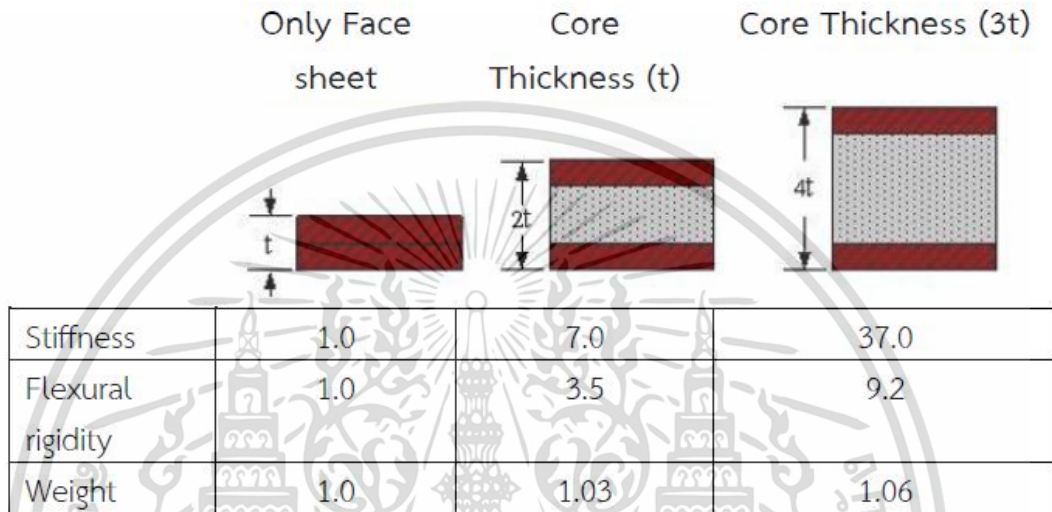


(ง) Corrugated cores

รูปที่ 2.13 โครงสร้างแซนด์วิชที่ลักษณะชั้นแกนต่าง ๆ กัน เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้เฉพาะในเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ผู้ใดเห็นไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.1 คุณสมบัติของโครงสร้างแกนด्वิช

ข้อดีของโครงสร้างแบบแกนด्वิชคือจะมีความแข็งแรงสูงเมื่อเทียบกับน้ำหนัก ดังแสดงดังรูปที่ 2.14 จะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มความหนาของชั้นแกนกลางจะทำให้โครงสร้างมีความแข็งแรงมากขึ้นตามลำดับและยังพบว่าความแข็งแรงเพิ่มขึ้นสูงมากเมื่อมีการเพิ่มความหนาของวัสดุแกนกลาง โดยน้ำหนักของโครงสร้างเพิ่มขึ้นเล็กน้อย



รูปที่ 2.14 การเปรียบเทียบความแข็งแรงต่อน้ำหนักของวัสดุแกนด्वิช

แผ่นประกบ (Face sheets) สามารถเลือกใช้วัสดุได้หลากหลาย โดยข้อกำหนดต่าง ๆ ในการออกแบบสามารถศึกษารายละเอียดได้ตามที่อธิบายโดย Zenkert [43] ส่วนค่าพารามิเตอร์สำคัญที่ต้องพิจารณาสำหรับการออกแบบแผ่นประกบมีดังต่อไปนี้

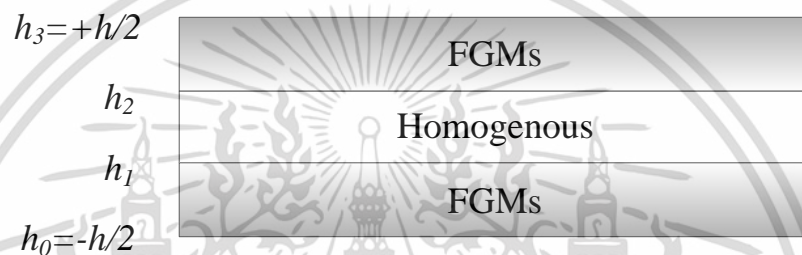
- มีความแข็งแรงสูง
- มีแรงดึงและแรงอัดสูง
- ทนทานต่อแรงกระแทก
- ทนทานต่อสภาพสิ่งแวดล้อมและสารเคมี
- ด้านทนต่อการสึกหรอ

คุณสมบัติที่กล่าวมาข้างต้นสามารถพบได้ในวัสดุที่นำมาสร้างแผ่นประกบของโครงสร้างแบบแกนด्वิช ซึ่งอาจทำมาจากโลหะหรืออโลหะ แผ่นประกบที่ทำมาจากโลหะมักเป็นโลหะแผ่น ข้อดีของการใช้แผ่นปิดหน้าโลหะคือ ต้นทุนต่ำ มีความแข็งแรงและความแข็งที่ดี และมีคุณสมบัติในการรับแรงกระแทกสูง ส่วนแผ่นประกบที่เลือกใช้วัสดุประเภทที่ไม่ใช่โลหะมักเลือกใช้วัสดุคอมโพสิตประเภทพอลิเมอร์เสริมไฟเบอร์ ซึ่งจะประกอบด้วยเส้นใยและเมทริกซ์ โดยในส่วนของเส้นใยนั้นอาจใช้แก้วหรือคาร์บอน เส้นใยเหล่านี้จะรวมกับเมทริกซ์ โดยวิธีการผลิตเพื่อสร้างวัสดุคอมโพสิตประเภทนี้ การวางแนวเส้นใยในทิศทางที่รับภาระโหลดนั้นมีผลต่อความแข็งแรงของโครงสร้าง

2.3.2 โครงสร้างแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

โครงสร้างแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันก็เป็นโครงสร้างอีกประเภทหนึ่งที่มีการพัฒนาต่อยอดจากโครงสร้างแบบแกนด्वิชแบบดั้งเดิม ดังแสดงในรูปที่ 2.15 ซึ่งประกอบไปด้วยชั้นของแผ่นไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประกบบนและล่าง (Face sheet) ที่ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุคอมโพสิตนั้นคือ วัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งมักจะนิยมเรียกว่า FGMs และชั้นของแกนกลาง (Core) ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุประเภทเนื้อเดียว (Homogeneous materials) ตามลำดับ ซึ่งปัญหาที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างคอมโพสิตแบบลามิเนตซึ่งมีโครงสร้างแบบแซนด์วิชนั้น เช่น การหลุดลอก การหลุดร่อนของเมทริกซ์ไฟเบอร์ การแตกร้าวของเมทริกซ์ ฯลฯ [44] จากปัญหาดังกล่าวสามารถหลีกเลี่ยงได้โดยใช้วัสดุเชิงฟังก์ชัน เมื่อโครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันอยู่ภายใต้การโหลดประเภทต่าง ๆ เช่น โหลดตามแนวขวาง การสั่นสะเทือนและโหลดแบบเคลื่อนที่ ฯลฯ เป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งที่จะต้องคาดการณ์ลักษณะการทำงานที่ถูกต้องของโครงสร้างแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ดังนั้นก่อนการจำลองโครงสร้างจำเป็นต้องทราบวิธีการหาคุณสมบัติของวัสดุ โดยกฎการหาคุณสมบัติประสิทธิผลของโครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.15 โครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

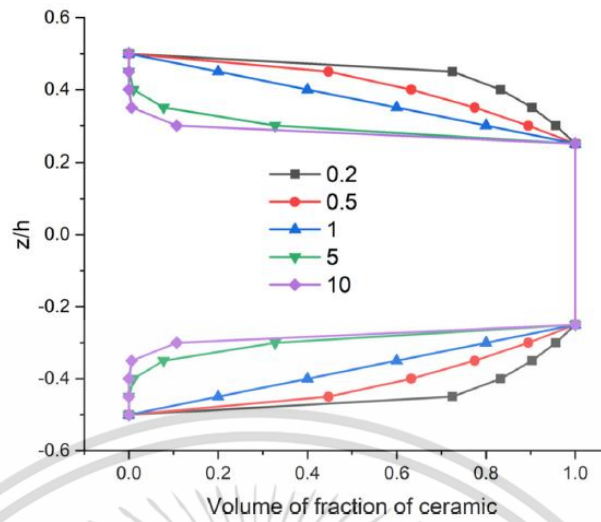
กฎฟังก์ชันยกกำลัง นับเป็นกฎที่ใช้กันอย่างแพร่หลายสำหรับโครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน[45-46] ซึ่งตัวอย่างนี้มีชั้นแกนกลางที่ทำมาจากเซรามิกและแผ่นประกบบนและล่างเป็นวัสดุเชิงฟังก์ชัน (เซรามิกและโลหะ) โดยที่ตำแหน่งผิวชั้นแกนกลางจะเป็นเซรามิก 100% และเปลี่ยนแปลงสัดส่วนการผสมจนกลายเป็นโลหะ 100% ที่ผิวด้านนอกตามกฎฟังก์ชันยกกำลัง ซึ่งโครงสร้างประเภทนี้เรียกว่าชั้นแกนกลางแข็ง เนื่องจากแกนกลางประกอบด้วยเฟสเซรามิก รูปที่ 2.16 แสดงการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติของวัสดุสำหรับโครงสร้างที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 (สัดส่วนความหนาด้านบน-แกนกลาง-ด้านล่าง) โดยที่สามารถแสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^n & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^n & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.22)$$

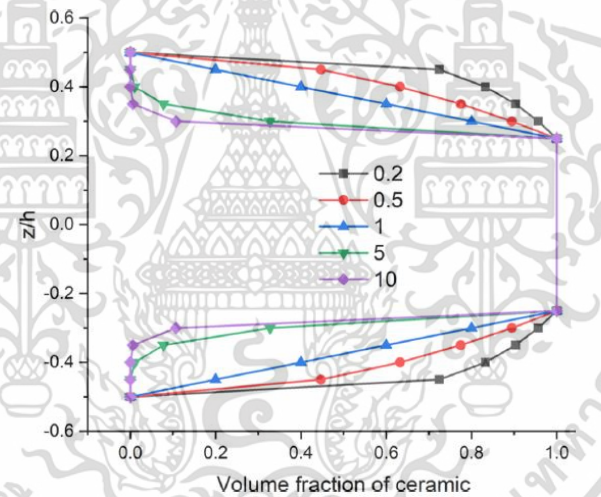
โดยที่ค่าคุณสมบัติประสิทธิผล $P(z)$ สามารถหาได้จากสูตร

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) + P_m \quad (2.23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.16 แสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 โครงสร้างแบบแกนตัวชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันตามกฎฟังก์ชันยกกำลัง[47]



รูปที่ 2.17 แสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 โครงสร้างแบบแกนตัวชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันตามกฎฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล[47]

กฎฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล สำหรับโครงสร้างแบบแกนตัวช[48] โดยโครงสร้างแกนกลางประกอบด้วยเซรามิกและแผ่นประกบบนและล่างเป็นวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งทำจากเซรามิกและโลหะ โดยที่สามารถแสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกแสดงดังรูปที่ 2.17 โดยสมการแสดงได้ต่อไปนี้

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{2z+1}{2h_1+1} \right)^n & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{2z-1}{2h_1-1} \right)^n & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.24)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

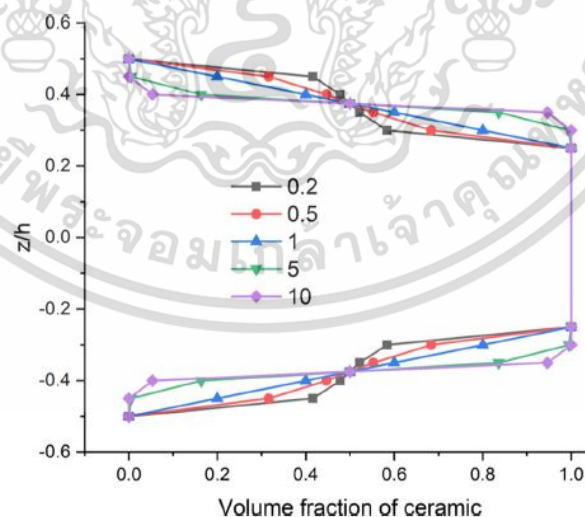
โดยที่ค่าคุณสมบัติประสิทธิผล $P(z)$ สามารถได้จากสูตร

$$P(z) = P_m e^{\ln\left(\frac{P_c}{P_m}\right) V_c(z)} \quad (2.25)$$

กฎฟังก์ชันซิกมอยด์ สำหรับโครงสร้างแบบแซนด์วิช[49] โดยกฎนี้จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันแบบยกกำลัง 2 ฟังก์ชัน กฎหนึ่งสำหรับส่วนของแผ่นประกบบนและกฎที่สองสำหรับแผ่นประกบล่าง กฎของฟังก์ชันซิกมอยด์ทั่วไปสำหรับสำหรับเงื่อนไขโครงสร้างแบบแซนด์วิชมีดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0.5 \left(\frac{z-h_0}{h_{m1}-h_0} \right)^n & \text{for } z \in [h_0, h_{m1}] \text{ where } h_{m1} = (h_0 + h_1)/2 \\ V_c^{(1)}(z) = 1 - 0.5 \left(\frac{z-h_0}{h_{m1}-h_0} \right)^n & \text{for } z \in [h_{m1}, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1 & \text{for } z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1 - 0.5 \left(\frac{z-h_2}{h_{m2}-h_2} \right)^n & \text{for } z \in [h_2, h_{m2}] \text{ where } h_{m2} = (h_2 + h_3)/2 \\ V_c^{(3)}(z) = 0.5 \left(\frac{z-h_3}{h_{m2}-h_3} \right)^n & \text{for } z \in [h_2, h_{m3}] \end{cases} \quad (2.26)$$

และแสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกตามกฎฟังก์ชันซิกมอยด์ดังรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 แสดงสัดส่วนปริมาตรของเซรามิกที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 โครงสร้างแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันตามกฎฟังก์ชันซิกมอยด์[47]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคานภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

การทบทวนวรรณกรรมเกี่ยวกับการศึกษาพฤติกรรมพลวัตของโครงสร้างคานคอมโพสิตภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ (Moving load) เนื่องจากโครงสร้างคานซึ่งเป็นส่วนประกอบของโครงสร้างทางวิศวกรรมที่สำคัญ การประยุกต์ใช้งานทางวิศวกรรมในด้านต่าง ๆ จึงมีอย่างแพร่หลาย ทั้งกรณีการรองรับภาระแรงแบบสถิตศาสตร์ (Static loads) และแบบพลศาสตร์ (Dynamic loads) [50-51] การวิเคราะห์ภาระแรงแบบพลวัต (Dynamic loads) ที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างคานพบได้ในงานทางวิศวกรรมทั้งทางด้านโครงสร้างทางวิศวกรรมโยธาและทางโครงสร้างของเครื่องจักรกลต่าง ๆ เช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์บนสะพาน การเคลื่อนที่ของรถไฟบนระบบราง การเคลื่อนที่ของวัตถุบนเครน การเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ การเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์บนรางแขวนและอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง [52-53] โดยทั่วไปแล้วหากโครงสร้างใด ๆ รับภาระแรงแบบพลวัตจะส่งผลต่อการเสียรูปสูงกว่าโครงสร้างที่รับภาระแรงแบบสถิตศาสตร์ ถึงแม้ว่าขนาดของแรงที่มากระทำเท่ากัน ทั้งนี้เนื่องจากโมเมนต์ของความเฉื่อยที่เพิ่มเข้ามาเมื่อมีการวิเคราะห์ปัญหาแบบพลศาสตร์ พฤติกรรมดังกล่าวนี้มีการพิสูจน์ไว้ในการศึกษาของ Chaikittiratana และ Wattanasakulpong [54] ด้วยความสำคัญของปัญหานี้ นักวิจัยหลาย ๆ ท่านจึงให้ความสนใจและทำการศึกษาปัญหาประเภทนี้ในสถานการณ์ที่แตกต่างกันไป ตั้งแต่ในอดีตจนถึงปัจจุบัน ดังที่จะได้แสดงต่อไปในการทบทวนวรรณกรรมในครั้งนี้

Kahya [55] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมพลวัตของโครงสร้างคานแบบแบบที่มีการเรียงตัวเป็นชั้น ๆ ที่เสริมกำลังด้วยเส้นใย (Fiber-reinforced composite beams) ซึ่งอยู่ภายใต้การกระทำของแรงที่มีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ เนื่องจากปัญหาที่ศึกษาในครั้งนี้เป็นวัสดุแบบที่มีการเรียงตัวเป็นชั้น ๆ ซึ่งแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยสมมุติฟังก์ชันของการเสียรูปที่เหมาะสม นอกจากนี้ยังพบการศึกษาพฤติกรรมทางด้านพลวัตของคานที่มีการเสริมกำลังด้วยเส้นใยในหลากหลายบทความที่เป็นประโยชน์และเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการพัฒนาต่อยอดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งบทความที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยในกลุ่มนี้สามารถศึกษาเพิ่มเติมจากเอกสารอ้างอิงที่ [56-59]

อย่างไรก็ตามปัญหาที่สำคัญของวัสดุคอมโพสิตที่มีการเสริมกำลังเป็นชั้น ๆ หรือที่เรียกว่าวัสดุคอมโพสิตแบบลามิเนต (Laminated Composites) จะพบปัญหาการแยกชั้นได้ง่ายเมื่อรับภาระแรงที่มีขนาดสูง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อต้องรองรับภาระแรงแบบพลวัต การวิเคราะห์และจำลองสถานการณ์ต่าง ๆ ที่สามารถเกิดขึ้นได้กับวัสดุคอมโพสิตแบบลามิเนต ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [60-62] เพื่อแก้ปัญหาวัสดุคอมโพสิตให้มีความสามารถมากขึ้นและกำจัดปัญหาการแยกชั้นน้อยลง ดังนั้นจำเป็นต้องใช้แนวคิดของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally graded materials, FGMs) ที่กำหนดให้วัสดุมีการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติหรือการผสมผสานกันแบบมีรูปแบบต่อเนื่องจึงมีบทบาทสำคัญต่อการแก้ปัญหานี้ได้ [63-64] ส่วนในเอกสารอ้างอิงที่เกี่ยวข้องกับวัสดุเชิงฟังก์ชันนี้จะกล่าวถึงกระบวนการสร้างวัสดุโดยใช้วิธีการต่าง ๆ ผลลัพธ์ของวัสดุที่ได้ คุณสมบัติด้านความแข็งแรง รวมถึงการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบต่าง ๆ เมื่อนำวัสดุเชิงฟังก์ชันมาสร้างเป็นโครงสร้างทางวิศวกรรม ดังนั้นการขยายขอบเขตของการวิเคราะห์พฤติกรรมพลวัตของคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน จึงมีความน่าสนใจและได้มีนักวิจัยหลายท่านได้ทำการศึกษาพฤติกรรมดังกล่าวซึ่งจะสามารถแสดงได้ต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Şimşek และคณะ [65-66] ได้พิจารณาหาคำตอบของการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคานที่ทำด้วยวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติของวัสดุในทิศทางความหนาของโครงสร้างคานและคานมีการรองรับภาระแบบพลวัตในหลาย ๆ เงื่อนไข รวมถึงภาระแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ด้วย นอกจากนี้ยังวิจัยในกลุ่มนี้ยังขยายผลการวิจัยไปถึงปัญหาใหม่มากขึ้น เช่น ในเอกสารอ้างอิงที่ [67] ที่เป็นการศึกษาหาระยะโค้งของคานภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ โดยที่คานทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงของวัสดุเกิดขึ้นตามแนวความยาวของคาน การศึกษานี้พบว่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุที่บ่งบอกถึงการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติตามแนวความยาวคานนั้นมีความสำคัญต่อพฤติกรรมพลวัตของคานประเภทนี้เป็นอย่างยิ่ง Khalili และคณะ [68] ได้ใช้วิธีการของการผสมผสานระหว่างระเบียบวิธีของริทซ์ (Ritz method) และ DQM (Differential Quadrature Method) เพื่อแก้ปัญหาคานสั่นสะเทือนแบบบังคับของโครงสร้างคานที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชันเมื่ออยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ และในงานวิจัยของ Malekzadeh และ Monajjemzadeh [69] ได้ทำการศึกษาอิทธิพลของการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิที่ส่งผลต่อคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันสำหรับคาน โดยการเพิ่มขึ้นของสมการพลังงานในระบบเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิทำให้ระยะกระจัดหรือการโค้งของคานแบบพลวัตมีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างมาก เมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์กับโครงสร้างคานที่อยู่ภายใต้อุณหภูมิห้องหรือการไม่พิจารณาอิทธิพลของอุณหภูมิ ส่วนอิทธิพลอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของคานที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน เช่น การมีรอยแตกร้าวที่บริเวณผิววัสดุและเงื่อนไขการรองรับแบบยึดหยุ่นตลอดความยาวคานจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ได้มีการนำมาพิจารณาในเอกสารอ้างอิงที่ [70] ลำดับถัดมา Esen และคณะ [71] ได้ใช้ฟังก์ชันซิกมอยด์ (Sigmoid law) เพื่อควบคุมการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติของวัสดุเชิงฟังก์ชันในโครงสร้างคานและได้ทำการศึกษาพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของคานภายใต้ภาระแรงแบบเคลื่อนที่ ต่อมาเพื่อศึกษาการเสียรูปของคานจากวัสดุเชิงฟังก์ชันแบบที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไม่เป็นเชิงเส้น (Geometrically nonlinear analysis) Şimşek [72] เป็นการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งใช้ความสัมพันธ์ von-Kármán's non-linear strain-displacement relationships เพื่อสร้างสมการควบคุมระบบของคานนี้ภายใต้ภาระแรงแบบเคลื่อนที่ ซึ่งงานวิจัยชิ้นนี้แสดงความแตกต่างของผลลัพธ์ที่วิเคราะห์แบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งมีความแตกต่างอย่างเห็นได้ชัด ในการศึกษาของ Abdelrahman และคณะ [73] ได้ทำการสมมุติให้คานจากวัสดุเชิงฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติของวัสดุทั้งสองทิศทาง (Bi-Functionally Graded Materials) นั่นคือการเปลี่ยนแปลงตามแนวความยาวคานและตามแนวความหนาและได้พิจารณาหาระยะการกระจัดที่เกิดขึ้นจากการวิเคราะห์แรงแบบเคลื่อนที่บนคานเหล่านี้ การศึกษาอิทธิพลของอุณหภูมิได้ถูกนำมาพิจารณากับโครงสร้างคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยที่มีการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติของวัสดุตามแนวแกนความยาวเพื่อหาระยะการกระจัดแบบพลวัตและความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่ผ่านคานตามการศึกษาของ Wang และ Wu [74]

จากการตรวจสอบวรรณกรรมในอดีตพบว่าการศึกษาพฤติกรรมทางพลวัตหรือทางพลศาสตร์ของโครงสร้างคานจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นมักจะมีการศึกษาเฉพาะตัวโครงสร้างคานที่สร้างจากวัสดุเชิงฟังก์ชันเท่านั้นและไม่ได้มีการนำหลักการของวัสดุเชิงฟังก์ชันมาสร้างเป็นโครงสร้างแซนด์วิช (Sandwich structures) ในขณะที่งานวิจัยที่ใกล้เคียงการพิจารณาในรูปแบบของคานแบบแซนด์วิช คือการศึกษาของ Şimşek [6] เท่านั้นแต่ก็มีข้อจำกัดของการใช้ภาระแรงได้แค่เพียงสองแรงเท่านั้น ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงมุ่งเน้นเพื่อศึกษาในเชิงลึกมากขึ้นเกี่ยวกับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิช เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน เพื่อการรับภาระแรงแบบพลวัต โดยรายละเอียดจะกล่าวต่อไปในส่วนของเนื้อหาในบทต่อ ๆ ไป

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสันสะท้อนของโครงสร้างแผ่นบางภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

สำหรับกรณีของโครงสร้างในรูปแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีการกระทำจากภาระแรงพลวัตทั้งที่มีการเคลื่อนที่และไม่เคลื่อนที่ โดยสามารถแสดงได้ตามการทบทวนวรรณกรรมของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ Roque และคณะ [75] ได้ใช้วิธีการของ meshless numerical method สำหรับการหาค่าตอบของระยะกระจัดเนื่องจากภาระโหลดแบบพลวัตของแผ่นบางและแผ่นโค้ง ที่สร้างจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยพื้นฐานของทฤษฎีได้มีการพิจารณาการเชื่อมตามแนวตัดขวาง นอกจากนี้ยังทำการวิเคราะห์ความเค้นในทิศทางต่าง ๆ ที่ขึ้นอยู่กับเวลาร่วมด้วยซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการวิเคราะห์ความล้าต่อไป การใช้วิธีการที่มีการผสมผสานระหว่างวิธีการของอนุกรมฟูเรียร์และลาปลาซเข้าด้วยกันเพื่อแก้ปัญหาหรือศึกษาพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของแผ่นบางจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ได้ถูกพัฒนาโดย Akbarzadeh และคณะ [76] เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวโดยรวมเอาอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิมาพิจารณาด้วยเช่นกัน ผลลัพธ์จากวิธีการนี้ให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการอื่น ๆ ลำดับถัดมาในงานวิจัยของ Behjat และคณะ [77] ได้พิจารณาทั้งปัญหาแบบสถิตศาสตร์และพลศาสตร์ของแผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยพิจารณาทั้งภาระโหลดที่เป็นแรงทางกลและแรงทางไฟฟ้า ในขณะที่งานวิจัยของ Li และคณะ [78] ได้มีการพัฒนาวิธีการที่มีความซับซ้อนแต่ให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องโดยวิธีการที่ใช้คือ Quadrilateral scaled boundary spectral shell elements สำหรับเพื่อใช้เป็นฟังก์ชันรูปร่างของทั้งแผ่นบางและแผ่นเรียบโค้งที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยการใช้ฟังก์ชันรูปร่างใหม่นี้จะแก้ปัญหาหลายอย่างของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เช่น ปัญหา transverse shear locking, membrane locking และ curvature thickness locking ดังนั้นวิธีการนี้จึงเหมาะสมกับโครงสร้างที่มีรูปร่างซับซ้อน สำหรับกรณีแผ่นบางจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีรูปร่างเป็นแผ่นกลมก็ได้มีการศึกษาไว้ในงานวิจัยของ Zhao และคณะ [79] โดยการศึกษาในครั้งนี้ได้แสดงถึงรูปร่างของการสันสะท้อนของแผ่นกลมในหลากหลายโหมดของการสันสะท้อนและรวมถึงศึกษาอิทธิพลต่าง ๆ เช่น เส้นรอบวง ความหนา ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ โดยอิทธิพลต่าง ๆ เหล่านี้จะส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นกลมอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้อิทธิพลของเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุ่นก็ได้ถูกหยิบยกมาพิจารณาด้วยและผลลัพธ์แสดงให้เห็นชัดถึงค่าความแข็งแรงของสปริงที่บริเวณขอบของแผ่นกลมจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นกลมเป็นอย่างมากเช่นกัน การพิจารณาแผ่นบิด (Twisted plates) ที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้มีการศึกษาโดย Karsh และคณะ [80] เพื่อแสดงถึงการสันสะท้อนของแผ่นบิดดังกล่าว รวมถึงอิทธิพลของมุมบิดที่ส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบิดนี้ได้มีการแสดงผลทั้งในรูปผลลัพธ์เชิงตัวเลขและกราฟความสัมพันธ์ของตัวแปรที่นำมาพิจารณา ต่อมาเพื่อแสดงผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องกับเทอมของความไม่เป็นเชิงเส้นในการเสีรูปของแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งพฤติกรรมนี้ได้ถูกนำมาพิจารณาโดย Upadhyay และ Shukla [81] โดยนักวิจัยกลุ่มนี้ได้ทำการศึกษาความไม่เป็นเชิงเส้นของการเสีรูปของทั้งแผ่นบางที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าและแผ่นบางที่มีมุมเอียงภายใต้ภาระแรงแบบพลวัตในรูปแบบของแรงลดลงตามเวลา แรงในรูปแบบฟังก์ชันไซน์และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกซ์โพเนนเชียลและแรงแบบอื่น ๆ ที่เป็นฟังก์ชันกับเวลา โดยมีอิทธิพลของเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ เข้ามาร่วมพิจารณาด้วย

สำหรับกรณีโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้มีการศึกษาส่วนใหญ่ เฉพาะการสั่นสะเทือนแบบอิสระเท่านั้น ซึ่งสามารถยกตัวอย่างบางการศึกษาที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญ สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ดังต่อไปนี้ Natarajan และ Manickam [82] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ภาระการดัดโค้งและรวมไปถึงการสั่นสะเทือนของแผ่นบางนี้ การศึกษานี้มุ่งเน้นเพื่อพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีความถูกต้องมากขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม ในขณะที่ Li และคณะ [83] ได้พิจารณาองค์ประกอบของความเค้นแบบสามมิติสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน การพัฒนาสมการควบคุมระบบในการศึกษานี้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ Chebyshev polynomials ที่มีการคูณด้วยเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์แบบสามมิติ ลำดับถัดมา Bennoun และคณะ [84] ได้พัฒนาทฤษฎีของแผ่นบางเพื่อใช้อธิบายการเสถียรของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยทฤษฎีที่พัฒนานี้คือ five-variable refined plate theory และในการศึกษาของ Zenkour และ Alghamdi [85] ได้พิจารณาปัญหาการดัดและการสั่นสะเทือนของแผ่นบาง โดยพิจารณาอิทธิพลของการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิร่วมด้วย วิธีการที่ใช้คือวิธีการแบบแม่นยำสำหรับการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องมากขึ้นเมื่อเทียบกับวิธีการเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ การพิจารณาทฤษฎีโครงสร้างแผ่นบางที่มีลำดับของการเฉือนต่าง ๆ (n-order shear deformation theory) สามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิงที่ [86] ซึ่งเป็นตัวอย่างของแผ่นบางที่สร้างวัสดุเชิงฟังก์ชันและคอมโพสิตแบบแซนด์วิช การใช้ทฤษฎีนี้สามารถปรับความซับซ้อนของทฤษฎีให้เป็นลำดับของการเฉือนที่ต่ำลงได้ แต่หากต้องการความถูกต้องมากขึ้นก็สามารถปรับค่าบางตัวเพื่อให้ครอบคลุมอิทธิพลของการเฉือนที่บริเวณหน้าตัดให้สูงขึ้นได้ นอกจากนี้ตัวอย่างการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันตามที่กล่าวมาแล้วนั้นยังมีการศึกษาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องตามเอกสารอ้างอิงต่อไปนี้ [87-93]

อย่างไรก็ตามปัญหาส่วนใหญ่ที่นำมาพิจารณากันในอดีตจะมุ่งเน้นไปที่ปัญหาการดัดโค้ง การโก่งเดาะ และการสั่นสะเทือนแบบอิสระเป็นหลัก ในขณะที่การศึกษากการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (โดยเฉพาะอย่างยิ่งภาระแรงแบบเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว) ยังไม่มีรายงานในการศึกษาในอดีต ดังนั้นหัวข้อของการศึกษาการเสถียรเนื่องจากภาระแรงแบบเคลื่อนที่จึงเป็นประเด็นสำคัญอีกอย่างหนึ่งของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ซึ่งจะมีการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบบังคับของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน เพื่อศึกษาตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องต่อการเสถียรแบบพลวัต เช่น คุณสมบัติของวัสดุ อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น เงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ และอื่น ๆ

บทที่ 3

โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

3.1 บทนำ

คาน (Beam) เป็นหนึ่งในโครงสร้างย่อย (Structural members) ที่สำคัญของโครงสร้างทางวิศวกรรมที่จะใช้ประกอบกันจนกลายเป็นโครงสร้างที่มีความซับซ้อนและนำไปสู่การใช้งานจริง ยกตัวอย่างเช่น รางรถไฟ แชสซี (Chassis) รถยนต์ คานเป็นแกนหลักสำหรับรับภาระแรงในรถไฟ เรือ และรวมถึงโครงสร้างของเครื่องบิน ในงานทางวิศวกรรมโยธานั้นคานถือเป็นชิ้นส่วนหลักของอาคาร บ้านเรือน ด้วยเหตุผลและความสำคัญของคานทั้งทางด้านวิศวกรรมเครื่องกลและวิศวกรรมด้าน ๆ อื่น ทำให้การวิเคราะห์ปัญหาคานเป็นที่สนใจของนักวิจัยจำนวนมาก เพื่อจะได้รู้ถึงพฤติกรรมของคานเมื่อมีการกระทำจากโหลดแบบต่างๆ ดังนั้นเมื่อมีการนำไปใช้งานจริงในสถานการณ์การต่างๆ โดยทั่วไปคานที่อยู่ภายใต้สภาวะโหลดแบบสถิตศาสตร์ (Static loadings) จะแสดงการเสียหายน้อยกว่าคานที่ต้องรองรับสภาวะโหลดแบบพลวัต (Dynamic loadings) ถึงแม้ว่าจะมีขนาดรวมของแรงที่เท่ากัน หัวข้อวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องของผลตอบสนองของคานที่อยู่ภายใต้โหลดแบบพลวัต (Dynamic response of beams) จึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง โดยโหลดแบบพลวัตที่นิยมนำมาพิจารณา ยกตัวอย่างเช่น โหลดกระทำที่จุดใดจุดหนึ่งแต่ขนาดของแรงจะขึ้นอยู่กับเวลา (Time-dependent loadings) โดยความถี่ของแรงอาจมีการนำมาพิจารณาร่วมด้วยได้ และในกรณีที่ความถี่ของโหลดมีความสัมพันธ์กับความถี่ธรรมชาติของคาน การโก่งของคานแบบพลวัตก็จะมีค่าสูงมากจนทำให้คานเกิดความเสียหายรุนแรงได้ ส่วนโหลดแบบพลวัตอีกประเภทหนึ่งคือโหลดที่มีการเคลื่อนที่ไปตามความยาวคาน (Moving loads) ด้วยความเร็วแบบคงที่หรือไม่คงที่ ตัวอย่างการใช้งานในเรื่องนี้ที่เห็นชัดที่สุดคือรถไฟความเร็วสูงที่เคลื่อนที่ไปบนรางรถไฟ หรืองานทางด้านรถยนต์ หุ่นยนต์ และงานทางวิศวกรรมอื่น ๆ การโก่งของคานเนื่องจากโหลดแบบพลวัตนั้นมีตัวแปรที่สำคัญหลายตัว เช่น ความยาวคาน ความหนาคาน คุณสมบัติวัสดุ ความถี่ธรรมชาติของคาน ความเร็วโหลด เงื่อนไขขอบเขตของคาน และอื่นๆ ซึ่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาในเชิงลึกต่อไป

อีกประเด็นหนึ่งที่สำคัญต่อการพิจารณาต่อการออกแบบคานเพื่อใช้ในงานทางวิศวกรรมคือการคิดค้นวัสดุชนิดใหม่เพื่อนำไปใช้ในการสร้างคานที่มีสมรรถนะเพิ่มมากขึ้นกว่าคานที่ทำมาจากวัสดุเนื้อเดียวกันทั้งก้อนและมีความสามารถรับแรงได้เท่ากันในทุกทิศทาง (Homogenous and isotropic materials) วัสดุดั้งเดิมแบบนี้มีความสามารถในการรับภาระโหลดค่อนข้างจำกัด หากต้องการพัฒนาความสามารถของวัสดุในกลุ่มนี้ให้สูงขึ้น จำเป็นต้องนำวัสดุอื่น ๆ ที่มีข้อดีต่าง ๆ ร่วมเข้ามาผสมและสร้างเป็นวัสดุใหม่ ยกตัวอย่างเช่น การนำวัสดุที่เป็นเส้นใย (Fiber) ที่มีความแข็งแรงสูงมาเรียงตัวผสมกับวัสดุในกลุ่มโพลิเมอร์ (Polymer) เพื่อสร้างวัสดุคอมโพสิตซึ่งจัดอยู่ในกลุ่มวัสดุคอมโพสิตแบบเส้นใย (Fiber-reinforced composites) ทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการสร้างและการวิเคราะห์ความแข็งแรงสามารถอ่านได้จากเอกสารอ้างอิงในหลาย ๆ แหล่งได้ [94-95] วัสดุคอมโพสิตแบบเส้นใยนี้มีข้อดีคือมีความแข็งแรงตามแนวเส้นใยที่ตีมากแต่แนวอื่น ๆ ยังคงอ่อนแอตามความสามารถที่จำกัดของโพลิเมอร์ และมีข้อเสียที่สำคัญคือการแยกชั้นระหว่างชั้นต่าง ๆ ที่มีการขึ้นรูป ทั้งนี้เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่าความแข็งแรงที่ฉับพลันระหว่างชั้นต่อชั้น ทำให้เกิดความเข้มข้น

ของความเค้นสูงมาก (High stress concentration) นอกจากวัสดุคอมโพสิตที่กล่าวมาข้างต้น ยังมีเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ใดเห็นใบเซอร์เวชันดำเนินการ

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

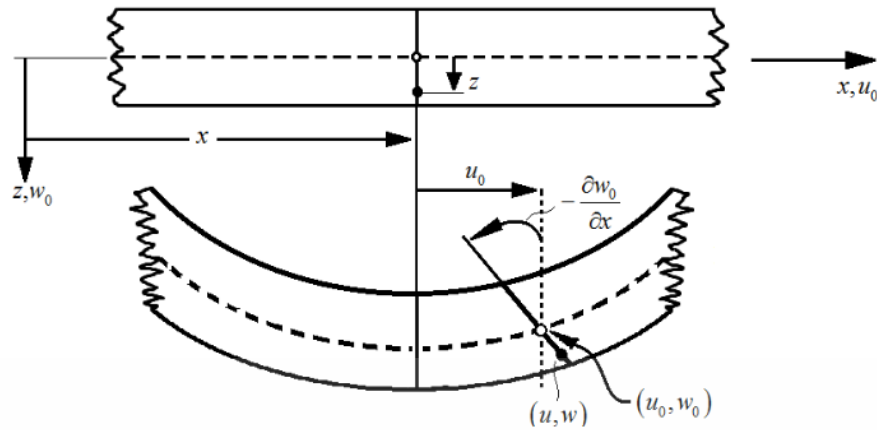
วัสดุกลุ่มอื่นอีกที่มีข้อดีและข้อเสียต่าง ๆ กันไป อย่างไรก็ตามในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้มุ่งเน้นที่จะพัฒนาและวิเคราะห์วัสดุคอมโพสิตชนิดหนึ่งนั่นคือ วัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally graded materials) หรือเรียกชื่อย่อว่า FGMs วัสดุชนิดนี้มีคุณลักษณะที่สำคัญคือการผสมกันระหว่างวัสดุสองชนิดที่มีคุณสมบัติต่างกันเข้าด้วยกันโดยการผสมแบบค่อย ๆ เพิ่มหรือลดอัตราส่วนผสมไปตามทิศทางที่ต้องการ อัตราส่วนผสมสามารถอธิบายได้ชัดเจนด้วยสมการหรือฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นจึงเรียกว่า วัสดุเชิงฟังก์ชัน เมื่อวัสดุมีการผสมแบบค่อย ๆ เพิ่มหรือลดอัตราการผสม (Gradient of material compositions) จะส่งผลดีต่อการแก้ปัญหาการแยกชั้นของวัสดุและลดปัญหาความเข้มข้นของความเค้นที่กระจุกตัวได้ นอกจากนี้วัสดุเชิงฟังก์ชันยังมีข้อดีด้านอื่น ๆ อีก ยกตัวอย่างเช่น หากวัสดุเชิงฟังก์ชันผลิตจากการผสมระหว่างวัสดุในกลุ่มเซรามิกและโลหะ จะพบว่าความสามารถในการทนความร้อน ความชื้น การกัดกร่อนซึ่งได้จากคุณสมบัติของเซรามิกและจะได้รับความเหนียวและการขึ้นรูปได้ง่ายจากคุณสมบัติของโลหะ ด้วยเหตุผลนี้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงนำเอาวัสดุเชิงฟังก์ชันมาวิเคราะห์และพัฒนารูปแบบให้เป็นโครงสร้างแบบแซนด์วิชซึ่งจะทำให้เพิ่มประสิทธิภาพในการรับภาระโหลดได้มากขึ้น เมื่อเทียบกับวัสดุเชิงฟังก์ชันเพียงอย่างเดียว ส่วนรายละเอียดและแนวทางการวิเคราะห์และตัวแปรที่สำคัญจะกล่าวต่อไป

ในบทนี้จะมีเนื้อหาที่ประกอบไปด้วยทฤษฎีทั่วไปของคานแบบไอโซทรอปิกที่จะใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ต่อยอดในส่วนที่ซับซ้อนขึ้นและเมื่อมีการวิเคราะห์โครงสร้างคานที่สร้างมาจากวัสดุคอมโพสิตยุคใหม่ รายละเอียดของการสร้างสมการควบคุมระบบสำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานแบบอิสระและแบบบังคับจะมีการแสดงไว้โดยละเอียดในบทนี้เช่นกัน

3.2 ทฤษฎีทั่วไปของโครงสร้างคานแบบไอโซทรอปิก

ก่อนทำการวิเคราะห์โครงสร้างคานแบบคอมโพสิตที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน การใช้ทฤษฎีทั่วไปของคานแบบไอโซทรอปิก (Isotropic beams) ถือได้ว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการวิเคราะห์ในระดับสูงขึ้นไป ดังนั้นในส่วนนี้เป็นการแสดงถึงทฤษฎีเบื้องต้นเพื่อที่จะสร้างความเข้าใจและบางส่วนอาจใช้เพื่อยืนยันความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นใหม่ การวิเคราะห์โครงสร้างคานอย่างง่ายของคานแบบไอโซทรอปิกสามารถทำได้โดยทฤษฎีคานของออยเลอร์ (Euler beam theory) ซึ่งสมมติให้โครงสร้างคานนั้นเสียรูปแบบไม่มาก เมื่อคานอยู่ภายใต้สภาวะโหลดแบบการดัดโค้ง (small deformation due to bending)

สมมุติฐานที่สำคัญของทฤษฎีคานของออยเลอร์คือการเปลี่ยนรูปร่างหน้าตัดขวางของคานซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางตามแนวความยาวคานก่อนการเปลี่ยนรูป และยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางตามแนวความยาวคานหลังการเปลี่ยนรูป มุมของระนาบที่เปลี่ยนรูปไปแสดงได้ตามอนุพันธ์อันดับหนึ่งของการโก่ง $-dw_0/dx$ ตามที่แสดงในรูปที่ 3.1 นอกจากนี้เมื่อคานอยู่ภายใต้การดัดโค้งหน้าตัดขวางของคานยังคงเป็นระนาบเดิมที่สม่ำเสมอตลอดความหนาซึ่งบ่งบอกถึงการไม่พิจารณาความเค้นเฉือนที่หน้าตัด (Transverse shear) โดยที่ u_0 คือระยะกระจัดตามแนวแกนความยาว (แกน x) และ w_0 คือระยะการโก่งหรือระยะกระจัดตามแนวแกน z ดังแสดงดังรูปที่ 3.1 ซึ่งสามารถเขียนสมการระยะกระจัดทั้งสองนี้ได้เมื่อคานอยู่ภายใต้การดัดโค้งด้วยภาระโหลดแบบใด ๆ (ทั้งแบบสถิตหรือพลวัต ณ เวลาใด ๆ)



รูปที่ 3.1 การตัดโค้งของคานตามทฤษฎีของออยเลอร์ [96]

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{dw_0(x, t)}{dx} \quad (3.1)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.2)$$

สมการระยะกระจัดตามแนวแนวความยาวคานในสมการที่ (3.1) จะเหมาะสมกับคานแบบคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบไม่สมมาตรตลอดความหนาของคาน เมื่อไรก็ตามที่พิจารณาคานคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบสมมาตรหรือพิจารณาคานแบบไอโซทรอปิกเราสามารถลดรูปสมการระยะกระจัดได้ดังนี้ ($u_0(x, t) = 0$)

$$u(x, z, t) = -z \frac{dw_0(x, t)}{dx} \quad (3.3)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.4)$$

จากความสัมพันธ์ของความเค้น (σ_{xx}) และความเครียด (ε_{xx}) ของคานแบบไอโซทรอปิก จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (3.5)$$

เมื่อ E คือค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น การหาความเครียดสามารถทำได้ดังนี้

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w_0}{dx^2} \quad (3.6)$$

พลังงานเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของระยะกระจัด (Strain energy) ภายในคานสามารถแสดงได้ดังนี้ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3.7)$$

จากสมการความเค้นและความเครียดในสมการที่ 3.5 และสมการที่ 3.6 แทนลงในสมการพลังงานภายในจะได้

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E z^2 \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 dA dx \quad (3.8)$$

หากต้องการวิเคราะห์การตัดโค้งของคานเนื่องจากแรงกระจายสม่ำเสมอ q (N/m) สำหรับปัญหาการตัด (Bending analysis) หรือการวิเคราะห์การโก่งเดาะ (Buckling analysis) ที่มีการกระทำจากแรงกดอัด (P (N)) สามารถแสดงพลังงานภายในออกได้ดังนี้

$$V = - \int_0^L \left(\frac{1}{2} P \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 + q w_0 \right) dx \quad (3.9)$$

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration analysis) พลังงานจลน์เป็นสิ่งสำคัญต่อการนำมาพิจารณานั้นคือ

$$K = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{dw_0}{dt} \right)^2 dx \quad (3.10)$$

เมื่อพิจารณาคาบถ้วน ดังนั้นสามารถเขียนสมการพลังงานรวมได้ดังนี้

$$\Pi = U + V - K \quad (3.11)$$

การสร้างสมการควบคุมระบบ (Governing equation) สามารถทำได้โดยการหาพลังงานขั้นต่ำสุดหรือสูงสุดเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ δw_0 ตามกฎของฮามิลตัน (Hamilton's principle) รายละเอียดสามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิง [96]

$$\int_0^t \delta \Pi dt = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (3.12)$$

ผลลัพธ์จากการอินทิเกรตแบบแยกส่วน (Integrate by part) จะทำให้ได้สมการควบคุมระบบซึ่งอยู่ในเทอมของเครื่องหมายอินทิเกรต แยกเทอมในเครื่องหมายออกมาจะได้สมการควบคุมระบบของทุกปัญหาดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$EI \frac{d^4 w_0}{dx^4} + P \frac{d^2 w_0}{dx^2} - q(x) + \rho A \frac{d^2 w_0}{dt^2} = 0 \quad (3.13)$$

เมื่อ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดสำหรับคานาไอโซทรอปิกที่มีพื้นที่หน้าตัดแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า $I = \frac{1}{12}bh^3$ โดยที่ b คือความกว้างและ h คือความหนาของคานา ในส่วนของ

โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลในทอมสุดท้ายของสมการที่ 3.13 คือ ρA นั่นคือผลคูณของความหนาแน่นและพื้นที่หน้าตัดของคานา เพื่อแก้ปัญหาคานาไอโซทรอปิกในสมการที่ 3.13 แยกตามปัญหาที่พิจารณาของคานาที่มีการรองรับอย่างง่ายที่ปลายคานาทั้งสองด้านโดยมีเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\text{ที่ } x=0 \text{ จะได้ } w_0(0) = 0, M_{xx} = EI \frac{d^2 w(0)}{dx^2} = 0$$

$$\text{ที่ } x=L \text{ จะได้ } w_0(L) = 0, M_{xx} = EI \frac{d^2 w(L)}{dx^2} = 0$$

เมื่อ L คือความยาวคานา การแก้ปัญหานี้จะต้องสมมติฟังก์ชันของระยะกระจัดที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตเพื่อแทนค่าไปยังสมการควบคุมระบบ โดยสมการของระยะกระจัดที่เหมาะสมคือ

$$w(x) = e^{i\omega t} \sum_{m=1}^M W_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.14)$$

สำหรับปัญหาการตัด $q(x)$ จะต้องแสดงในรูปอนุกรมฟูเรียร์ด้วยเช่นกันนั่นคือ

$$q(x) = \sum_{m=1}^M Q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.15)$$

เมื่อ $Q_m = \frac{4q}{m\pi}$ $m = 1, 3, 5...$ สำหรับกรณีคานาถูกกระทำด้วยแรงกระจายแบบสม่ำเสมอตลอดความยาวคานา ดังนั้นผลลัพธ์ที่ต้องการของการโก่งเนื่องจากการตัดคือ

$$w_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_m}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4} \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right) \text{ เมื่อ } m = 1, 3, 5... \quad (3.16)$$

เมื่อ $m = 1, 3, 5...$

สำหรับปัญหาการโก่งเดาะ สามารถหาแรงที่ทำให้คานาโก่งเดาะที่โหมดต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$P_m = EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2, \quad m=1,2,3..... \quad (3.17)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การแรงวิกฤต ($P_{cr} = P_1$) ซึ่งเกิดขึ้นกับโหนดหนึ่งเท่านั้น นั่นคือ $P_{cr} = EI \frac{\pi^2}{L^2}$

สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระ กรณีพิจารณาการสั่นสะเทือนของคานแบบฮาร์มอนิก ซึ่งผลลัพธ์ของความถี่ธรรมชาติในหน่วย rad/s ของคาน คือ

$$\omega_m = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4} \quad (3.18)$$

ω_1 เรียกว่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน (Fundamental frequency)

ทั้งหมดที่กล่าวมานั้นสามารถใช้สูตรสำเร็จที่แสดงไว้เพื่อยืนยันความถูกต้องบางส่วนได้ของงานวิจัยในครั้งนี้และทฤษฎีพื้นฐานนี้เป็นส่วนสำคัญอย่างยิ่งต่อการวิเคราะห์โครงสร้างคานรวมถึงหลักการต่าง ๆ ที่นำมาใช้ สามารถขยายผลในเชิงลึกต่อไปได้ในส่วนถัดไปของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

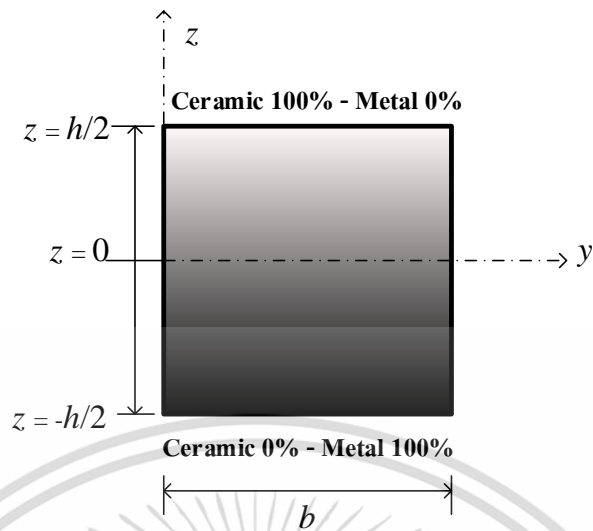
3.3 โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีการพิจารณาวัสดุเชิงฟังก์ชัน (FGMs) เพื่อใช้ทำโครงสร้างในรูปแบบแซนด์วิช ดังนั้นคำอธิบายในช่วงแรกจะเป็นการบ่งบอกถึงลักษณะสำคัญของวัสดุเชิงฟังก์ชันในรูปทั่วไป วัสดุชนิดนี้เป็นวัสดุที่ถูกคิดค้นโดยกลุ่มนักวิทยาศาสตร์ชาวญี่ปุ่นในช่วงคริสต์ศักราช 1984 ด้วยจุดประสงค์ที่ต้องการสร้างวัสดุที่มีความยืดหยุ่นสูงและทนทานต่อความร้อนเพื่อใช้ในโครงสร้างทางวิศวกรรมในหลายแขนง ๆ และหลายรูปแบบของโครงสร้างทั้งในอุตสาหกรรมอากาศยาน เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ กระจกสุปรถยนต์ที่ทนความร้อนสูง ดังนั้นการเลือกวัสดุจึงขึ้นอยู่กับการใช้งานเป็นหลัก เนื่องจากวัสดุที่กำลังพิจารณานี้เป็นประเภทหนึ่งของวัสดุคอมโพสิต ดังนั้นจำเป็นต้องมีวัสดุที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันตั้งแต่สองชนิดขึ้นไปมาผสมกันจนได้วัสดุชนิดใหม่ แต่โดยส่วนใหญ่เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์การใช้วัสดุเพียงสองชนิดมาผสมกันก็เพียงพอต่อการใช้งานและสามารถวิเคราะห์พฤติกรรมได้ง่ายกว่าการใช้วัสดุรวมสามหรือสี่ชนิด วัสดุเชิงฟังก์ชันที่นิยมนำมาสร้างคือการผสมกันระหว่างเซรามิกและโลหะ เพื่อให้ได้ความสามารถทางด้านต้านทานต่อความร้อนและการกัดกร่อนที่ได้จากคุณสมบัติของเซรามิกและได้ความแข็งแรงและยืดหยุ่นสูงจากคุณสมบัติของโลหะ ลักษณะการผสมนั้นจะไล่อัตราส่วนของเซรามิกกับโลหะไปเรื่อยๆตามทิศทางที่ต้องการผสม เช่นด้านบนสุดอาจเป็นเซรามิก 100% และความเป็นเซรามิกด้านบนจะค่อยลดลงไปยังผิวล่างสุดที่ 0% ของเซรามิก การลดลงของเซรามิกในแต่ละตำแหน่งจะถูกแทนที่โดยโลหะนั้นตามรูปที่ 3.2 โดยที่หน้าตัดของคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน (FGMs) ที่มีความกว้างของหน้าตัด (b) ไปตามทิศทางแกน y และความหนา (h) ตามทิศทางแกน z อัตราส่วนผสมของเซรามิกและโลหะจะเปลี่ยนแปลงไปตามแนวความหนาเท่านั้น ดังนั้นการหาค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุจะขึ้นอยู่กับปริมาตรหนึ่งหน่วยของเซรามิก (V_c) และปริมาตรหนึ่งหน่วยของโลหะ (V_m) ตามสมการต่อไปนี้

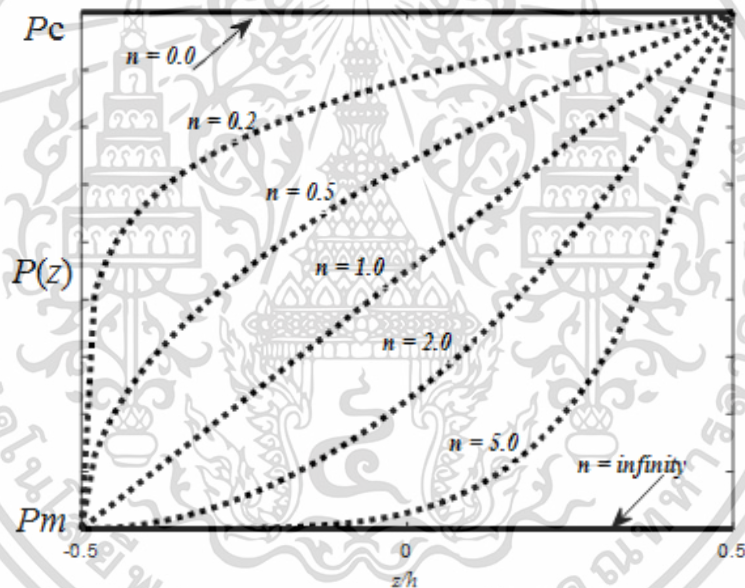
$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (3.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านอื่นๆ

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 พื้นที่หน้าตัดของคานที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน



รูปที่ 3.3 ตัวอย่างคุณสมบัติใดๆของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่า n ต่างๆ กัน

โดยที่ n คือดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (material volume fraction index) เช่น ถ้ากำหนด n มีค่าเท่ากับศูนย์ วัสดุจะกลายเป็นเซรามิกทั้งหมดและถ้ากำหนดให้ค่า n มีค่าเป็นอนันต์ วัสดุก็จะกลายเป็นโลหะทั้งหมด จากที่กล่าวก่อนหน้า ค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผล (P) ณ ค่า n ต่าง ๆ กัน สามารถหาได้โดยอาศัยกฎของการผสม (Rule of mixtures) คือ $P(z) = P_m V_m + P_c V_c$ ดังแสดงดังรูปที่ 3.3 โดยที่ค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลที่จำเป็นต่อการวิเคราะห์ คือ ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น ($E(z)$) อัตราส่วนปัวซอง ($\nu(z)$) และความหนาแน่น ($\rho(z)$) ของวัสดุซึ่งจะแปรผันไปตามแกน z และหาได้ดังสมการต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

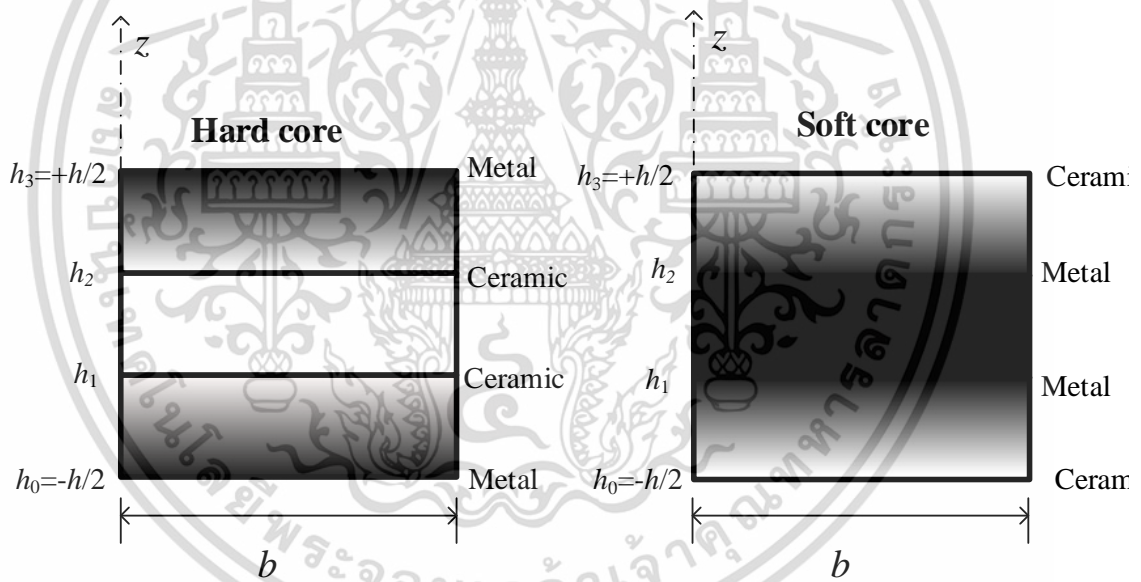
$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m \quad (3.21)$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \nu_m \quad (3.22)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_m \quad (3.23)$$

โดยที่ตัวห้อย c และ m บ่งบอกถึงคุณสมบัติของเซรามิกและโลหะตามลำดับ และอีกประเด็นหนึ่งคือ เนื่องจากค่าอัตราส่วนปริมาตรของวัสดุซึ่งแปรผันไปตามแกน z มีค่าแตกต่างกันไม่มาก ดังนั้นสามารถใช้ค่าคงที่แทนได้ เช่น $\nu=0.33$

จากพื้นฐานของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่กล่าวมาแล้วในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นจะใช้พื้นฐานดังกล่าวเพื่อพัฒนาวัสดุให้อยู่ในรูปโครงสร้างแกนด्वิช ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 พื้นี่หน้าตัดของคานแบบแกนด्वิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ในรูปที่ 3.4 พิจารณาคานสองแบบนั่นคือแบบชั้นแกนกลางแข็ง (Hard core) และแบบชั้นแกนกลางอ่อน (Soft core) โดยแกนกลาง (Core) คือชั้นตรงกลางของแกนด्वิช ดังนั้นหากชั้นแกนกลางที่ทำมาจากเซรามิกซึ่งมีความอดุลล์ของความยืดหยุ่นสูงกว่าโลหะจะเรียกว่า โครงสร้างแกนด्वิชแบบชั้นแกนกลางแข็ง โดยส่วนผิวบนสุดและล่างสุดจะเป็นโลหะ 100% ในทางกลับกันสำหรับกรณีโครงสร้างแกนด्वิชแบบชั้นแกนกลางอ่อน ซึ่งแกนกลางทำมาจากโลหะ 100% และผิวบนสุดกับล่างสุดจะเป็นเซรามิก 100% การบ่งบอกความหนาของชั้นวัสดุทั้งสามชั้นที่ประกอบขึ้นเป็นโครงสร้างแบบแกนด्वิชนั้นจะบอกเป็นอัตราส่วนด้วยตัวเลขสามตัวเช่น 1-1-1 หรือ 2-1-1 หากบ่งบอก 1-1-1 หมายความว่า ชั้นบนมีความหนาเท่ากับชั้นกลางและชั้นล่าง หากบอกเป็น 2-1-1 คือชั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ล่างสุดหนาสองเท่าของชั้นกลางและชั้นบน ยกตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดให้ความหนาทั้งหมดคือ h รายละเอียดของแต่ละชั้นของ 1-1-1 คือ $h_0 = -h//2$, $h_1 = -h//6$, $h_2 = h//6$ และ $h_3 = h/2$ ส่วนในกรณีอื่น ๆ เช่น 2-1-2 ซึ่งต้องคำนวณเพื่อหาค่า h_0, h_1, h_2 และ h_3 ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ต่างกันออกไป โดยการหาค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลในแต่ละชั้นสามารถทำได้ดังนี้

$$E^{(i)}(z) = (E_b - E_t)V_b^{(i)}(z) + E_t \quad (3.24)$$

$$\rho^{(i)}(z) = (\rho_b - \rho_t)V_b^{(i)}(z) + \rho_t \quad (3.25)$$

ในกรณีของโครงสร้างแกนดียวซิมักจะนิยามต่างกับวัสดุเชิงฟังก์ชันทั่วไป โดยจะกำหนดให้ตัวห้อย t และ b ในสมการที่ 3.24 และสมการที่ 3.25 บ่งบอกถึงคุณสมบัติของวัสดุที่ผิวบนสุด (Face) หรือผิวด้านนอกและที่แกนกลาง (Core) ตามลำดับ โดยที่สมการสัดส่วนปริมาตรวัสดุ (Volume fraction) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{cases} V_b^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^n & z \in [h_0, h_1] \\ V_b^{(2)}(z) = 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V_b^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^n & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (3.26)$$

ในทำนองเดียวกันกับวัสดุเชิงฟังก์ชันทั่วไปที่กำหนดให้ n คือดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (Material volume fraction index or power law index)

สำหรับกรณีโครงสร้างแกนดียวซิมเป็นแบบ : แกนกลางแข็ง (Hard core)

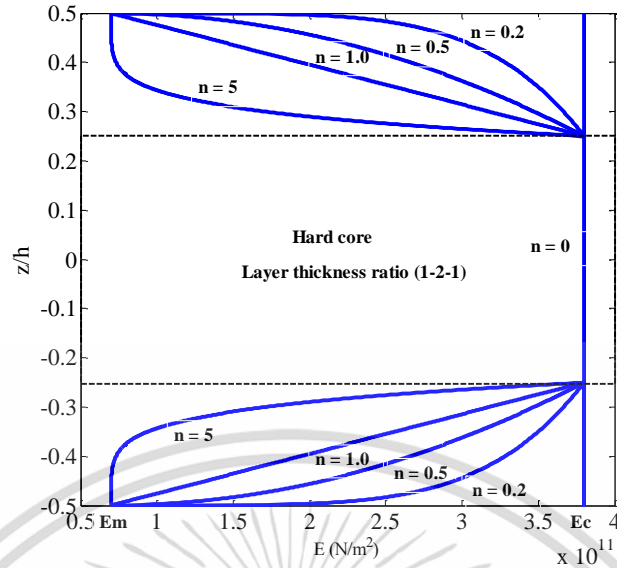
จะกำหนดให้ $E_b = E_c$, $\rho_b = \rho_c$ และ $E_t = E_m$, $\rho_t = \rho_m$

สำหรับกรณีโครงสร้างแกนดียวซิมเป็นแบบ : แกนกลางอ่อน (Soft core)

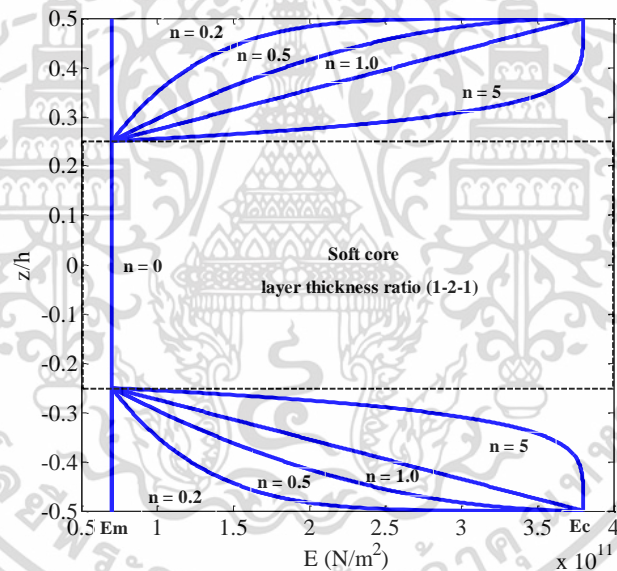
จะกำหนดให้ $E_b = E_m$, $\rho_b = \rho_m$ และ $E_t = E_c$, $\rho_t = \rho_c$

อย่างไรก็ตามสำหรับค่าอัตราส่วนปัวซองสามารถกำหนดให้เป็นค่าคงที่ได้ตามเหตุผลที่กล่าวมาแล้ว นอกจากนี้แล้วยังสามารถประยุกต์ใช้หลักการนี้ในการหาคุณสมบัติอื่นได้เช่นกัน

จากกระบวนการหาค่าคุณสมบัติของวัสดุที่กล่าวมานั้นสามารถนำไปหาค่าคุณสมบัติใด ๆ ของโครงสร้างคานแบบแกนดียวซิมที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้ โดยแสดงตัวอย่างในรูปที่ 3.5 ซึ่งใช้แกนกลางแข็งและรูปที่ 3.6 เป็นแบบแกนกลางอ่อน โดยใช้อัตราส่วนของความหนาแต่ละชั้นเป็นแบบ 1-2-1 และกำหนดค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นของโลหะและเซรามิกคือ $E_m = 70$ GPa และ $E_c = 380$ GPa ตามลำดับ



รูปที่ 3.5 ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นโครงสร้างคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน(แกนกลางแข็ง)



รูปที่ 3.6 ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นโครงสร้างคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน(แกนกลางอ่อน)

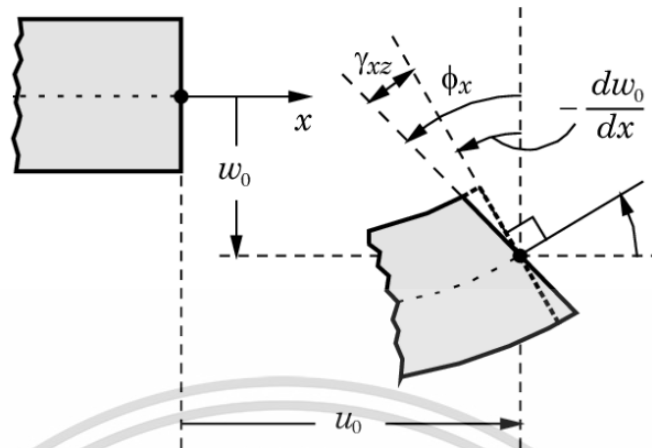
3.4 การวิเคราะห์โครงสร้างคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ทฤษฎีของคานมีการพัฒนาขึ้นบนพื้นฐานของทฤษฎีของออยเลอร์ตามที่กล่าวมาในช่วงต้น ทฤษฎีของออยเลอร์บางครั้งอาจเรียกว่าเป็นทฤษฎีคานแบบคลาสสิก (Classical beam theory) ด้วยข้อจำกัดบางอย่างของทฤษฎีคานแบบคลาสสิกจะเหมาะกับการโก่งงอที่ไม่มากนักและอาจไม่เหมาะกับวัสดุคอมโพสิตที่หน้าตัดขวางของคานมีความแข็งหรืออ่อนไม่เท่ากันตลอดหน้าตัด (หน้าตัดตามความหนา) เช่น ด้านช่วงผิวบนมีความแข็งมากและช่วงผิวด้านล่างมีความแข็งน้อยโอกาสที่หน้าตัดขวางไม่เปลี่ยนรูปและยังคงเป็นระนาบที่ยังตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางนั้นจึงอาจเป็นไปได้ จากรูปที่ 3.7 สังเกตว่าหากใช้ทฤษฎีแบบคลาสสิกมุมของระนาบหน้าตัดขวางจะเปลี่ยนแปลงไป $-dw_0 / dx$

และจะตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางตามแนวความยาวคาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.7 ลักษณะการเปลี่ยนรูปของระนาบตัดขวางตามทฤษฎีออยเลอร์และทฤษฎีโมเซนโก

ด้วยเหตุผลนี้การเลือกใช้ทฤษฎีคานาติโมเซนโก (Timoshenko beam theory) จะมีความเหมาะสมมากกว่า เพื่อที่จะวิเคราะห์วัสดุที่เป็นคอมโพสิตที่มีความแข็งหรืออ่อนไม่เท่ากันตลอดหน้าตัด ซึ่งการเสียรูปของระนาบหน้าตัดขวางจะเป็นอิสระตามฟังก์ชัน ϕ_x และไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางตามความยาวของคานา โดยทฤษฎีที่โมเซนโกยังมีข้อดีคือให้ผลลัพธ์ถูกต้องสูงสำหรับคานาแบบคอมโพสิต แต่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่ามากเนื่องจากความซับซ้อนของทฤษฎีมีไม่มากเมื่อเทียบกับทฤษฎีชั้นสูงขึ้นไป นอกจากนี้ยังเหมาะสมกับการวิเคราะห์คานาที่มีความหนามากซึ่งจะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าทฤษฎีแบบคลาสสิก (ทฤษฎีของเออร์เลอร์หรือแบบคลาสสิกใช้วิเคราะห์คานาที่มีความบาง (Thin beam) หากใช้กับคานาที่มีความหนา (Thick beam) อาจให้ผลลัพธ์ที่คลาดเคลื่อนได้)

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทฤษฎีคานาของทีโมเซนโกจะถูกนำมาใช้เป็นหลักเพื่อสร้างสมการควบคุมระบบ (Governing equation system or equations of motion) สำหรับวิเคราะห์โครงสร้างคานาแบบแกนดิวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ผลลัพธ์ที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบกับเงื่อนไขที่แตกต่างกันเพื่อยืนยันความถูกต้องต่อไป

ตามทฤษฎีคานาของทีโมเซนโก (Timoshenko beam theory) สมการหาระยะกระจัดสามารถแสดงได้ดังนี้

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi(x, t) \quad (3.27)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.28)$$

โดย u_0 คือระยะกระจัดตามแนวแกนความยาวของคานา (แกน x) ที่ระนาบกึ่งกลางคานา และ w_0 คือระยะกระจัดตามแนวแกนความหนา (แกน z) ที่ระนาบกึ่งกลางเช่นกันและเพื่อความสะดวกเนื่องจากการวิเคราะห์ปัญหาคานาเป็นการวิเคราะห์แบบหนึ่งมิติดังนั้นจะกำหนดให้มุม $\phi = \phi_x$ ก็คือมุมระนาบตัดขวางภายหลังการเปลี่ยนรูปและ t คือเวลา ดังนั้นจากสมการหาระยะกระจัด

สามารถคำนวณหาความเค้นและความเครียดได้ทั้งความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) ความเค้นเฉือน (τ_{xz}) ความเครียดตั้งฉาก (ε_{xx}) ความเครียดเฉือน (γ_{xz}) ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx} \quad (3.29)$$

$$\tau_{xz} = G(z)\gamma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \quad (3.30)$$

โดยที่ความเครียดสามารถได้จากสมการต่อไปนี้ คือ

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.31)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi \quad (3.32)$$

ในกรณีเมื่อคานถูกกระตุ้นด้วยภาระโหลดแบบพลวัตหรือแรงภายนอกใด ๆ จะทำให้เกิดระยะการกระจัดหรือการโก่งงอซึ่งเป็นที่รับพลังงานภายในซึ่งเกิดมาจากระยะการกระจัด โดยพลังงานภายในนี้แสดงอยู่ในรูปความเค้นและความเครียดได้ดังนี้

$$U_s = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dz dx. \quad (3.33)$$

แทนค่าสมการที่ 3.29-3.32 ลงในสมการที่ 3.33 จะได้

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \phi \frac{\partial w_0}{\partial x} + A_{55} \phi^2 \right] dx \quad (3.34)$$

โดยที่

A_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึง (Extensional stiffness)

B_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึงและการดัดแบบผสม (Extensional-bending stiffness)

D_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดัด (bending stiffness)

A_{55} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการเฉือน (shear stiffness)

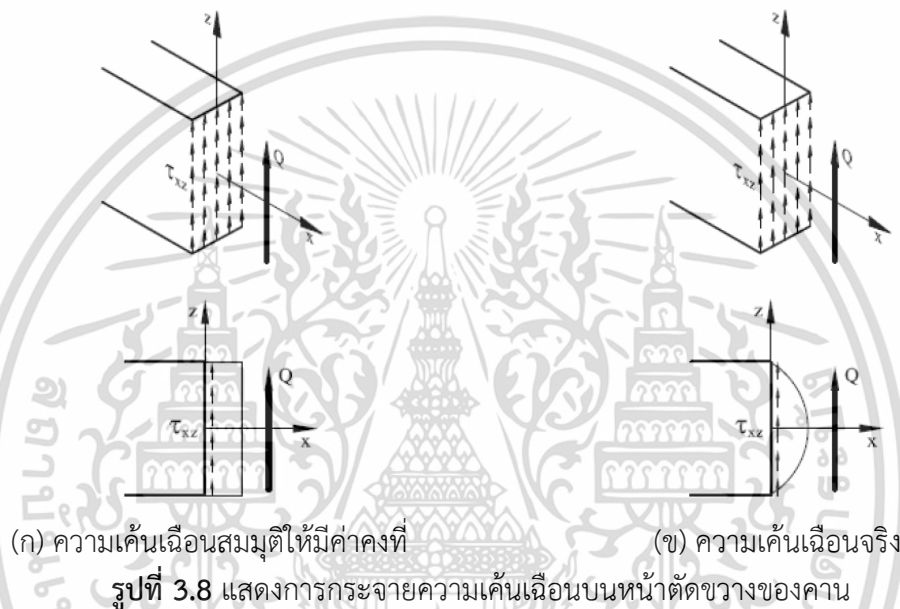
ค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้สำหรับโครงสร้างคานแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$[A_{11}, B_{11}, D_{11}] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)} [1, z, z^2] dz \quad (3.35)$$

$$A_{55} = b \kappa_s \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \frac{E^{(i)}}{2(1+\nu)} dz \quad (3.36)$$

เมื่อ κ_s คือค่าแก้ของการเฉือน (Shear correction factor) โดยที่ $\kappa_s = 5/6$ [96] หาได้โดยอาศัยหลักการสมดุลพลังงานที่เกิดจากพลังงานจากการเฉือนที่เกิดขึ้นจริงและพลังงานจากการเฉือนที่สมมุติขึ้น ดังแสดงได้ดังรูปดังนี้



โดยที่ความเค้นเฉือนสามารถหาได้ดังนี้
กรณี ความเค้นเฉือนสมมุติให้มีค่าคงที่

$$\tau_{xz} = \frac{V}{A} \quad (3.37)$$

กรณี ความเค้นเฉือนจริง

$$\tau_{xz}(z) = \frac{3V}{2A} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (3.38)$$

และพลังงานที่เกิดจากความเค้นเฉือนหาได้โดย

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V \tau_{xz} \gamma_{xz} dV \quad (3.39)$$

เอกสารนี้หรือเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$U_s = \frac{1}{2G} \int_V \tau_{xz}^2 dV \quad (3.40)$$

ดังนั้นพลังงานที่เกิดจากความเค้นเฉือนสมมุติให้มีค่าคงที่ สามารถหาได้โดยนำสมการที่ 3.37 แทนลงในสมการที่ 3.40 จะได้

$$U_{s,\text{constant}} = \frac{1}{2G} \int_V \left(\frac{V}{A}\right)^2 dV = \frac{V^2}{2h^2 b^2 G} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^b dy \int_0^L dx \quad (3.41)$$

$$U_{s,\text{constant}} = \frac{1}{2} \frac{LV^2}{hbG} \quad (3.42)$$

ในทำนองเดียวกันพลังงานที่เกิดจากความเค้นเฉือนจริง หาได้โดย

$$U_{s,\text{parabolic}} = \frac{1}{2G} \int_V \left[\frac{3V}{2A} \left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right) \right]^2 dV \quad (3.43)$$

$$U_{s,\text{parabolic}} = \frac{bL}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{3V}{2A} \left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right) \right]^2 dz \quad (3.44)$$

$$U_{s,\text{parabolic}} = \frac{1}{2} \frac{LV^2}{hbG} \frac{6}{5} \quad (3.45)$$

ดังนั้นพลังงานที่เกิดจากความเค้นเฉือนสมมุติให้มีค่าคงที่ จำเป็นต้องมีค่าแก้ (κ_s) เพื่อให้พลังงานที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับพลังงานที่เกิดจากความเค้นเฉือนจริง ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$U_{s,\text{parabolic}} = U_{s,\text{constant}} \quad (3.46)$$

$$\frac{1}{2} \frac{LV^2}{hbG} \frac{6}{5} = \frac{LV^2}{2hb\kappa_s G} \quad (3.47)$$

เพื่อจะให้ได้พลังงานที่เกิดจากความเค้นเฉือนมีค่าเท่ากันนั้น ดังนั้นค่า κ_s จะมีค่าเท่ากับ 5/6 และสำหรับวัสดุเชิงฟังก์ชันค่า κ_s ซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราส่วนปัวซองของวัสดุ [109]

$$\kappa_s = \frac{5}{6 - (\nu_c \nu_c + \nu_m \nu_m)} \quad (3.48)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีที่โครงสร้างคานามีฐานรองรับแบบยืดหยุ่น (Elastic foundation) จะสามารถเขียนสมการพลังงานเนื่องจากการรองรับประเภทนี้ได้ดังนี้

$$U_f = \frac{b}{2} \int_0^L \left(k_w w_0^2 + k_s \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (3.49)$$

โดยที่ k_w คือ ค่าคงที่สปริงวินเกอร์ (Winkler spring) และ k_s คือ ค่าคงที่สปริงของชั้นแรงเฉือน (shear layer spring)

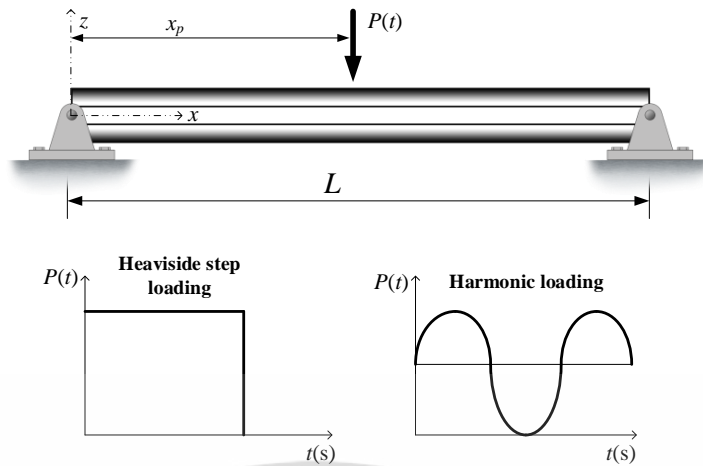
การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานาทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ (Free and forced vibration) จำเป็นต้องพิจารณาพลังงานจลน์ของคานาซึ่งมีความสัมพันธ์กับทฤษฎีคานาของทีโมเชนโกตามสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (3.50)$$

โดยที่ I_0, I_1 และ I_2 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของคานา สามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$[I_0, I_1, I_2] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)} [1, z, z^2] dz \quad (3.51)$$

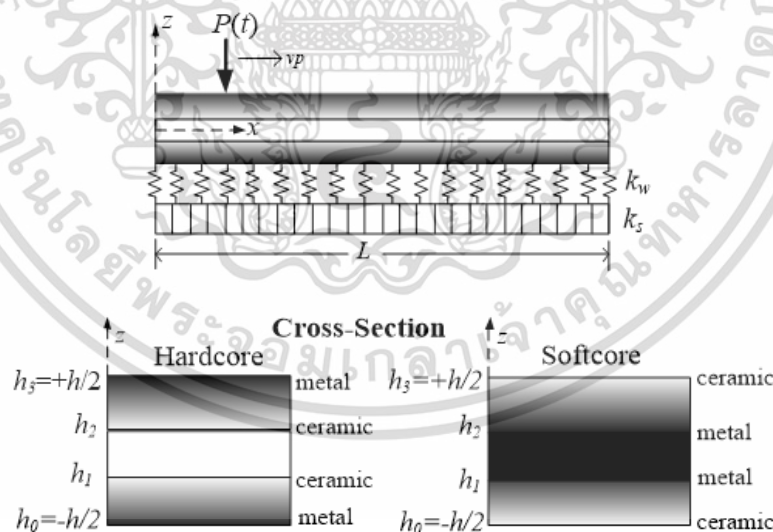
สมการพลังงานที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้นเพียงพอต่อการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration analysis) แต่หากต้องการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Forced vibration analysis) จำเป็นต้องเพิ่มการวิเคราะห์ซึ่งรวมถึงพลังงานภายนอกจากภาระโหลดหรือแรงที่มากระทำกับคานาในรูปแบบต่าง ๆ ภาระโหลดหรือแรงที่พบในงานทางวิศวกรรมมีหลากหลาย แต่ที่พบบ่อยและส่งผลโดยตรงต่อความเสียหายคือแรงที่ไม่เคลื่อนที่และกระทำตามช่วงเวลาที่กำหนด อาจรวมไปถึงความถี่ในการกระทำด้วยและอีกลักษณะหนึ่งคือภาระโหลดที่มีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วตามแนวความยาวของคานา ในการวิเคราะห์เรื่องการสั่นสะเทือนแบบบังคับจะพิจารณาแบบแรกก่อน นั่นคือโหลดกระทำที่ใดที่หนึ่งบนคานา โดยขนาดของโหลดจะแปรผันตามเวลาตามรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 คานแซนดิวซ์จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้โหลดพลวัตที่จุดใดหนึ่งบนคาน

จากรูปที่ 3.9 แสดงการวิเคราะห์สองรูปแบบของโหลดที่กระทำนั้นคือกระทำตามช่วงเวลาที่กำหนด (Heaviside step loading) โดยมีขนาดของแรงเท่ากับ P_0 ในช่วงแรกและจะมีค่าเท่ากับศูนย์หลังจากช่วงเวลาที่กำหนด ส่วนแบบต่อมาคือแรงกระทำแบบฮาร์มอนิก (Harmonic loading) โดยแรงกระทำจะเปลี่ยนแปลงตามเวลาคือ $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$ โดยที่ P_0 คือขนาดแรงที่กระทำและ x_p คือตำแหน่งที่แรงหรือโหลดกระทำบนคาน สมการพลังงานภายนอกของปัญหานี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$U_{ex} = -P(t)w_0(x_p) \tag{3.52}$$



รูปที่ 3.10 คานแซนดิวซ์จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่แบบโหลดเดียว

กรณีที่คานอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ (Moving load) ด้วยความเร็วคงที่ ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.10 ซึ่งเป็นคานแบบแซนดิวซ์ที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีฐานรองรับแบบยืดหยุ่นและมีการกระทำจากโหลดเคลื่อนที่แบบโหลดเดียว สมการพลังงานเนื่องจากแรงกระทำภายนอกแบบเคลื่อนที่นี้จำเป็นต้องนำมาพิจารณาในระบบนี้ด้วยเช่นกันซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

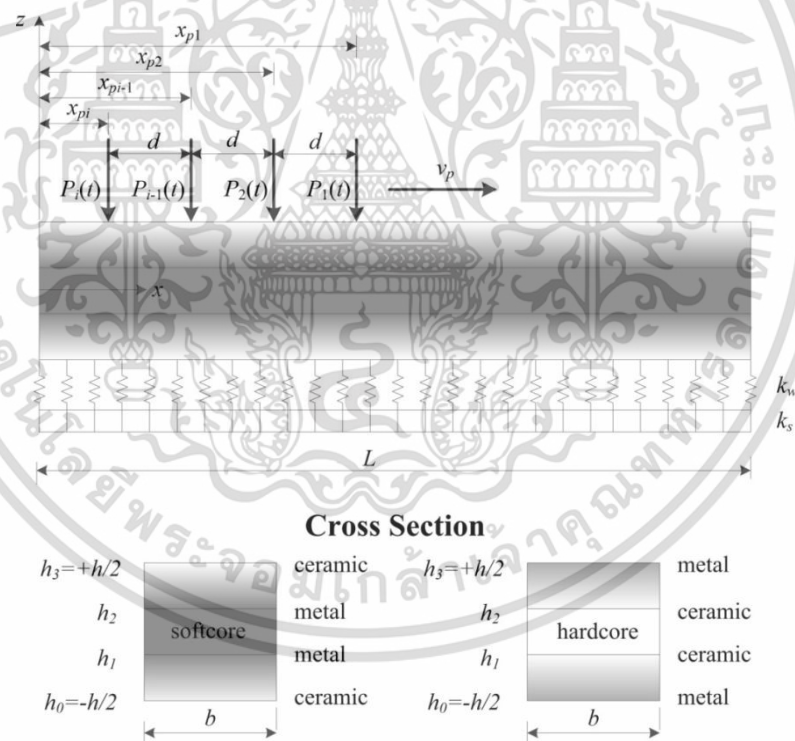
$$U_{ex} = -\int_0^L P(t)\delta(x - x_p(t))w_0(x, t)dx \tag{3.53}$$

สำหรับกรณีที่มีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ซึ่งมีความถี่ (Ω) เข้ามาเกี่ยวข้อง สามารถเขียนได้ดังนี้

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t) \tag{3.54}$$

- โดยที่ P_0 คือ ขนาดของแรงในหน่วยนิวตัน
- v_p คือ ความเร็วของโหนดในหน่วยเมตรต่อวินาที
- Ω คือ ความถี่ของแรงที่กระทำในหน่วยเรเดียนต่อวินาที
- $\delta(\cdot)$ คือ Dirac delta function
- x_p คือ ตำแหน่งของแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ในหน่วยเมตร

ในกรณีที่โครงสร้างคานแซนดวิชทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชันถูกกระทำด้วยภาระโหนดแบบเคลื่อนที่หลายๆ โหนดตามรูปที่ 3.11 สามารถเขียนสมการพลังงานที่สอดคล้องกับจำนวนโหนดได้ดังนี้



รูปที่ 3.11 คานแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่แบบหลายโหนด

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 1 แรง

$$U_{EX} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{p1}, t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_1 = \frac{L}{v_p} \\ 0 & \text{if } t_1 < t \end{cases} \tag{3.55}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 2 แรง

$$U_{EX} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1},t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P1},t) - P_2(t)w_0(x_{P2},t) & \text{if } t_1 \leq t \leq t_2 = \frac{L}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{P2},t) & \text{if } t_2 < t \leq t_1 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_1 + t_2 < t \end{cases} \quad (3.56)$$

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 3 แรง

$$U_{EX} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1},t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P1},t) - P_2(t)w_0(x_{P2},t) & \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P1},t) - P_2(t)w_0(x_{P2},t) - P_3(t)w_0(x_{P3},t) & \text{if } t_2 \leq t \leq t_3 = \frac{L}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{P2},t) - P_3(t)w_0(x_{P3},t) & \text{if } t_3 < t \leq t_3 + t_1 \\ -P_3(t)w_0(x_{P3},t) & \text{if } t_3 + t_1 < t \leq t_3 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_3 + t_2 < t \end{cases} \quad (3.57)$$

จากสมการที่ 3.55 – 3.57 เป็นตัวอย่างกรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่มีจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 3 แรง แต่หากมีจำนวนแรงหรือโหนดมากกว่านี้ก็สามารถทำได้จากหลักการเดียวกัน และยังสามารถกำหนดขนาดของแรงให้ขึ้นอยู่กับเวลาและความถี่ของการกระทำได้ดังนี้

$$P_1(t) = P_0 \sin(\Omega_1 t + \psi_1) \quad (3.58)$$

$$P_2(t) = P_0 \sin(\Omega_2 t + \psi_2) \quad (3.59)$$

$$P_3(t) = P_0 \sin(\Omega_3 t + \psi_3) \quad (3.60)$$

จากสมการพลังงานทั้งหมดสามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้ โดยการสร้างสมการพลังงานรวม (Total energy) ตามประเภทของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งสมการพลังงานรวมของแต่ละประเภทสามารถเขียนได้ดังนี้

กรณีการสั่นสะเทือนของคานแบบอิสระ

$$\Pi = U_s + U_f - U_k \quad (3.61)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีการสั้นสะพานของคานแบบบังคับ

$$\Pi = U_s + U_f - U_k - U_{EX} \quad (3.62)$$

แต่หากไม่พิจารณาอิทธิพลจากฐานรองรับแบบยึดหยุ่น $U_f = 0$

สมการพลังงานรวม (Π) สามารถนำไปใช้เพื่อแก้ปัญหาตามที่กล่าวข้างต้นได้ โดยการนำไปใช้กับหลากหลายวิธีการ เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) หรือ ระเบียบวิธีการของริทซ์ (Ritz method) แต่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้วิธีการของริทซ์ ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายและให้ผลลัพธ์ถูกต้องและยังเป็นวิธีการที่สามารถปรับใช้กับโครงสร้างแบบต่าง ๆ ที่มีการรองรับด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ ได้

3.5 วิธีการของริทซ์สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างคาน

วิธีการของริทซ์ถือได้ว่าเป็นวิธีการที่ได้รับความนิยมสูงสำหรับการประยุกต์ใช้งานด้วยข้อดีหลายประการ เช่น ง่ายต่อการประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ซับซ้อน ให้คำตอบเป็นที่น่าเชื่อถือ ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีการที่มีการวิเคราะห์เป็นส่วน ๆ เช่น วิธีการในกลุ่มระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อนได้ ด้วยเหตุผลที่กล่าวมานี้วิธีการของริทซ์จึงถูกนำมาใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

การใช้วิธีการของริทซ์เพื่อหาคำตอบของการวิเคราะห์โครงสร้างมีหลักการที่สำคัญคือการเลือกฟังก์ชันใด ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่สามารถเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดได้ โดยทั่วไปเงื่อนไขขอบเขตจะแบ่งออกได้เป็นสองกลุ่มคือ

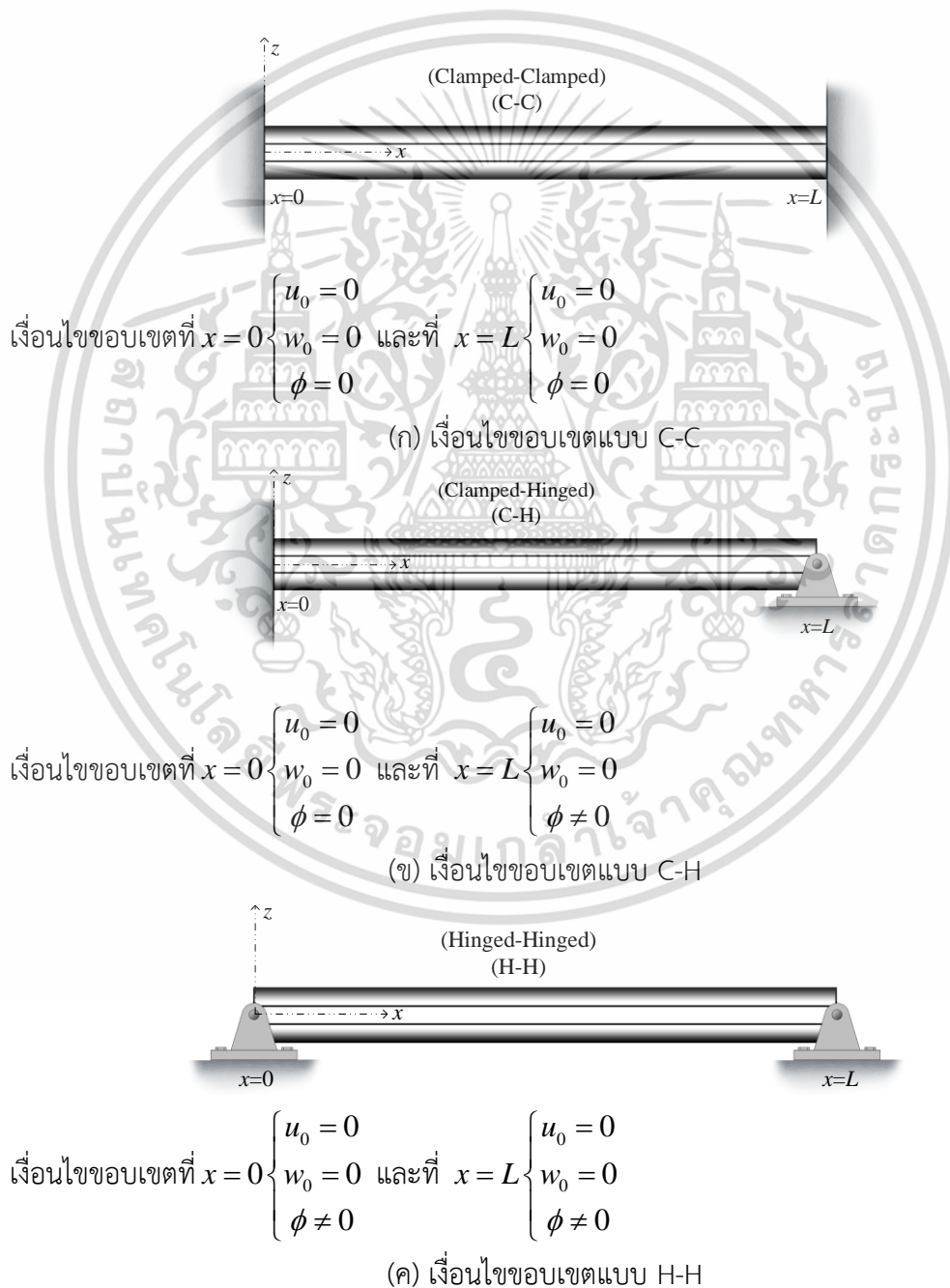
- เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับรูปร่าง (Geometrical boundary condition) ในกลุ่มนี้จะว่าด้วยเรื่องของระยะกระจัดตามแนวแกนต่าง ๆ ความชันของการโก่ง เป็นต้น
- เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับแรง (Force boundary condition) ในกลุ่มนี้จะว่าด้วยเรื่องของแรงภายใน (Internal force resultants) ซึ่งรวมไปถึงแรงภายในตึงฉาก แรงเฉือนภายใน และโมเมนต์ดัดภายในที่หน้าตัดคานหรือโครงสร้างใด ๆ ที่บริเวณจุดรองรับ

หากฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้เป็นไปตามเงื่อนไขทุกประการ ดังนั้นคำตอบที่ได้มาจะมีความแม่นยำสูงมากและมีเสถียรภาพในการคำนวณสูงตามไปด้วย อย่างไรก็ตามฟังก์ชันที่เป็นไปตามเงื่อนไขทุกประการอาจหาได้ไม่ง่ายนะ ดังนั้นหากต้องเลือกเงื่อนไขบางส่วนที่ให้ความถูกต้องของคำตอบได้ก็ต้องให้ฟังก์ชันเป็นไปตามเงื่อนไขของรูปร่าง ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่สำคัญ (Essential boundary condition) การเลือกฟังก์ชันที่ไม่เหมาะสมจะทำให้ได้รับคำตอบที่ไม่ถูกต้องและไม่มีเสถียรภาพในการคำนวณ (คำตอบจะไม่ลู่เข้าค่าใด ๆ แม้มีการเพิ่มจำนวนเทอมของการคำนวณสูงขึ้นไปก็ตาม) หากเลือกฟังก์ชันที่ถูกต้อง ผลลัพธ์อาจได้รับการลู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องโดยใช้จำนวนการคำนวณหรือจำนวนเทอมที่ไม่มากนัก

สมการของระยะกระจัดสำหรับปัญหาของคานในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial functions) ซึ่งสามารถเขียนในรูปอนุกรมได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} u_0(x,t) = \sum_{j=1}^N A_j(t) \Xi_{1j}(x) \\ w_0(x,t) = \sum_{j=1}^N B_j(t) \Xi_{2j}(x) \\ \phi(x,t) = \sum_{j=1}^N C_j(t) \Xi_{3j}(x) \end{cases} \quad (3.63)$$

จะสังเกตได้ว่าในสมการของระยะกระจัดจะมีความสัมพันธ์กับตัวสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า (Unknown coefficients) ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 3.12 คานภายใต้การรองรับแบบต่าง ๆ และเงื่อนไขขอบเขต
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดไว้ตามรูปที่ 3.12 สามารถกำหนดสมการของระยะกระจัดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของคานแต่ละประเภทได้ นั่นคือคานที่มีการยึดแน่นที่ปลายคานทั้งสองด้าน โดยจะนิยามด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ C-C ในกรณียึดด้วยหมุดหรือจุกรองรับอย่างง่าย H-H และกรณีสุดท้ายคือคานถูกยึดแน่นทางด้านซ้ายและแขวนด้วยหมุดทางด้านขวาจะถูกนิยามด้วยอักษรภาษาอังกฤษ C-H ตารางที่ 3.1 จะแสดงรายละเอียดของสมการของระยะการกระจัดที่จะใช้ร่วมกับสมการหลักของระยะกระจัด (สมการที่ 3.63) ของคานที่รองรับแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้น

ตารางที่ 3.1 ฟังก์ชันรูปร่างของโครงสร้างคานที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ

B.C.	$\Xi_{1j}(x)$	$\Xi_{2j}(x)$	$\Xi_{3j}(x)$
C - C	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$
C - H	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j$
H - H	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^{j-1}$

แทนค่าระยะกระจัดของสมการที่ 3.63 ลงในสมการผลรวมของพลังงานทั้งหมด (Π) ตามปัญหาที่ต้องการพิจารณาและเริ่มกระบวนการหาพลังงานต่ำสุดที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรไม่ทราบค่าดังกล่าว โดยใช้สมการของลากรางจ์ (Lagrange equation method) ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (3.64)$$

โดยที่ $q_j = \{A_j(t), B_j(t), C_j(t)\}$ และสามารถแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{A}_j} = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{B}_j} = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{C}_j} = 0 \quad (3.67)$$

หากมีการพิจารณาปัญหาแบบสถิตศาสตร์เช่นการดัด (Bending analysis) หรือการโก่งเดาะ (Buckling analysis) เทอมที่เกี่ยวข้องกับเวลาที่แสดงด้วยการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาหรือสัญลักษณ์ จุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ด้านบน (Over dot) ไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณา ผ่านกระบวนการของลากรางจ์และจะทำให้ได้ระบบสมการต่อไปนี้ในรูปแบบเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \\ \ddot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

โดยที่ \mathbf{K} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็งของคาน (Stiffness matrix)

\mathbf{M} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวลของคาน (Mass matrix)

\mathbf{F} คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกแบบพลวัตใด ๆ (Force vector)

ซึ่งรายละเอียดของสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์และเวกเตอร์แสดงได้ดังนี้
สมาชิกในเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็งของคาน (\mathbf{K})

$$\begin{aligned} K_{jm}^{11} &= A_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{1j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{1m}}{\partial x} dx \\ K_{jm}^{12} &= 0 \\ K_{jm}^{13} &= B_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{1j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{3m}}{\partial x} dx \\ K_{jm}^{21} &= 0 \\ K_{jm}^{22} &= A_{55} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx + k_w \int_0^L \Xi_{2j} \Xi_{2m} dx \\ &\quad + k_s \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx \\ K_{jm}^{23} &= A_{55} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \Xi_{3m} dx \\ K_{jm}^{31} &= B_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{3j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{1m}}{\partial x} dx \\ K_{jm}^{32} &= A_{55} \int_0^L \Xi_{3j} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx \\ K_{jm}^{33} &= \left(D_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{3j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{3m}}{\partial x} dx + A_{55} \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{3m} dx \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมาชิกในเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวลของคาน (M)

$$\begin{aligned}
 M_{jm}^{11} &= I_0 \int_0^L \Xi_{1j} \Xi_{1m} dx \\
 M_{jm}^{12} &= 0 \\
 M_{jm}^{13} &= I_1 \int_0^L \Xi_{1j} \Xi_{3m} dx \\
 M_{jm}^{21} &= 0 \\
 M_{jm}^{22} &= I_0 \int_0^L \Xi_{2j} \Xi_{2m} dx \\
 M_{jm}^{23} &= 0 \\
 M_{jm}^{31} &= I_1 \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{1m} dx \\
 M_{jm}^{32} &= 0 \\
 M_{jm}^{33} &= I_2 \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{3m} dx
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

เวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับแรงแบบพลวัตที่กระทำ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนคาน (ไม่เคลื่อนที่)

$$F_j = -P(t) \Xi_{2j}(x_p) \tag{3.71}$$

เวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับกระทำของแรงพลวัตที่มีการเคลื่อนที่
กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 1 แรง

$$F_j = -P_1(t) \Xi_{2j}(x_{p1}) \text{ if } 0 \leq t \leq t_1 = \frac{L}{v_p} \tag{3.72}$$

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 2 แรง

$$\begin{aligned}
 F_j &= -P_1(t) \Xi_{2j}(x_{p1}) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\
 F_j &= -P_1(t) \Xi_{2j}(x_{p1}) - P_2(t) \Xi_{2j}(x_{p2}) & \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{L}{v_p} \\
 F_j &= -P_2(t) \Xi_{2j}(x_{p2}) & \text{if } t_2 < t \leq t_1 + t_2
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 3 แรง

$$\begin{aligned}
 F_j &= -P_1(t)\Xi_{2j}(x_{p1}) && \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\
 F_j &= -P_1(t)\Xi_{2j}(x_{p1}) - P_2(t)\Xi_{2j}(x_{p2}) && \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\
 F_j &= -P_1(t)\Xi_{2j}(x_{p1}) - P_2(t)\Xi_{2j}(x_{p2}) - P_3(t)\Xi_{2j}(x_{p3}) && \text{if } t_2 \leq t \leq t_3 = \frac{L}{v_p} \\
 F_j &= -P_2(t)\Xi_{2j}(x_{p2}) - P_3(t)\Xi_{2j}(x_{p3}) && \text{if } t_3 < t \leq t_3 + t_1 \\
 F_j &= -P_3(t)\Xi_{2j}(x_{p3}) && \text{if } t_3 + t_1 < t \leq t_3 + t_2.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

โดยภาพรวมของสมการที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ K และ M นั้นจะมีขนาดของเมทริกซ์ที่ขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมของระยะกระจัดที่นำมาใช้ โดยจำนวนเทอมทั้งหมดกำหนดด้วย N เทอม ดังนั้นขนาดของเมทริกซ์ คือ $3N \times 3N$

สำหรับกรณีวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานแบบอิสระ เวกเตอร์ของแรงภายนอกไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาและจะสมมติให้การสั่นสะเทือนเป็นแบบฮาร์โมนิก (Harmonic response) ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า $[A_j(t), B_j(t), C_j(t)]^T$ สำหรับค่า $j = 1, 2, 3 \dots N$ สามารถแสดงได้ในรูปต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A_j(t) \\ B_j(t) \\ C_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_j e^{i\omega t} \\ \bar{B}_j e^{i\omega t} \\ \bar{C}_j e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

โดยที่ $i = \sqrt{-1}$ และ ω คือความถี่ธรรมชาติของคาน เมื่อแทนค่าสมการที่ 3.75 ลงไปในสมการการสั่นสะเทือน (สมการที่ 3.68) จะทำให้ได้ระบบใหม่ของการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระในรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

จะสังเกตได้ว่าระบบของสมการการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระจะเป็นแบบปัญหาการหาค่าเฉพาะ (Eigen value problem) ผลลัพธ์ที่ได้คือค่าเฉพาะ (Eigen value) ซึ่งคือค่าที่ต้องการทราบในกรณีนี้คือค่าความถี่ธรรมชาติของคานและเมื่อนำค่านี้แทนค่ากลับไปในระบบจะสามารถหาเวกเตอร์ของค่าเฉพาะได้ (Eigen vector) กรณีนี้คือโหมดรูปร่างของการสั่นสะเทือน (Mode shape) การแก้ปัญหาสมการควบคุมที่แสดงไว้ในสมการที่ 3.76 นั้นสามารถทำได้โดยกำหนดให้ค่าดีเอกสารถือเป็นเอกสารถี่สองนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เทอร์มินัลของเมทริกซ์หน้าเวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะได้สมการพหุนามในรูปของตัวแปร ω หลังจากนั้นทำการหาค่ารากของสมการพหุนามดังกล่าวจะได้ชุดคำตอบมาหนึ่งชุด โดยคำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดก็คือความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน (Fundamental frequency) หรือความถี่ธรรมชาติโหมดหนึ่ง ส่วนตัวที่มีค่ามากขึ้นคือความถี่ธรรมชาติในโหมดที่สูงขึ้นตามลำดับ

3.6 วิธีการนิวมาร์ค

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Forced vibration) จะแตกต่างจากแบบอิสระ เพราะต้องวิเคราะห์ที่ใช้การอินทิเกรตเทียบกับเวลาตามระบบสมการที่ 3.68 โดยในงานวิจัยครั้งนี้จะใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาซึ่งมีอยู่หลายวิธีและวิธีการที่เป็นนิยมและมักจะพบบ่อยคือวิธีการนิวมาร์ค (Newmarks time-integration method) ซึ่งกระบวนการอินทิเกรตแบบนิวมาร์คสามารถอธิบายได้ดังนี้

กำหนดความเร็วและระยะการกระจัดเริ่มต้นให้เป็นศูนย์ที่เวลาเท่ากับศูนย์และทำการหาค่าคงที่ของนิวมาร์คตามรายละเอียดต่อไปนี้ [97]

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\delta_2 \Delta t^2}, a_1 = \frac{\delta_1}{\delta_2 \Delta t}, a_2 = \frac{1}{\delta_2 \Delta t}, a_3 = \frac{1}{2\delta_2} - 1, \\ a_4 &= \frac{\delta_1}{\delta_2} - 1, a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 2 \right), a_6 = \Delta t(1 - \delta_1), a_7 = \delta_1 \Delta t \end{aligned} \quad (3.77)$$

โดยกำหนดให้ $\delta_1 = 0.5$ และ $\delta_2 = 0.25$

กำหนดเมทริกซ์ตามต่อไปนี้

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K}] + a_0[\mathbf{M}] \quad (3.78)$$

หาเวกเตอร์ของแรงตามสมการต่อไปนี้

$$\hat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{q}_t + a_2 \dot{\mathbf{q}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{q}}_t) \quad (3.79)$$

จะได้สมการของระยะการกระจัด ณ เวลาใดๆ จากสมการต่อไปนี้

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} \quad (3.80)$$

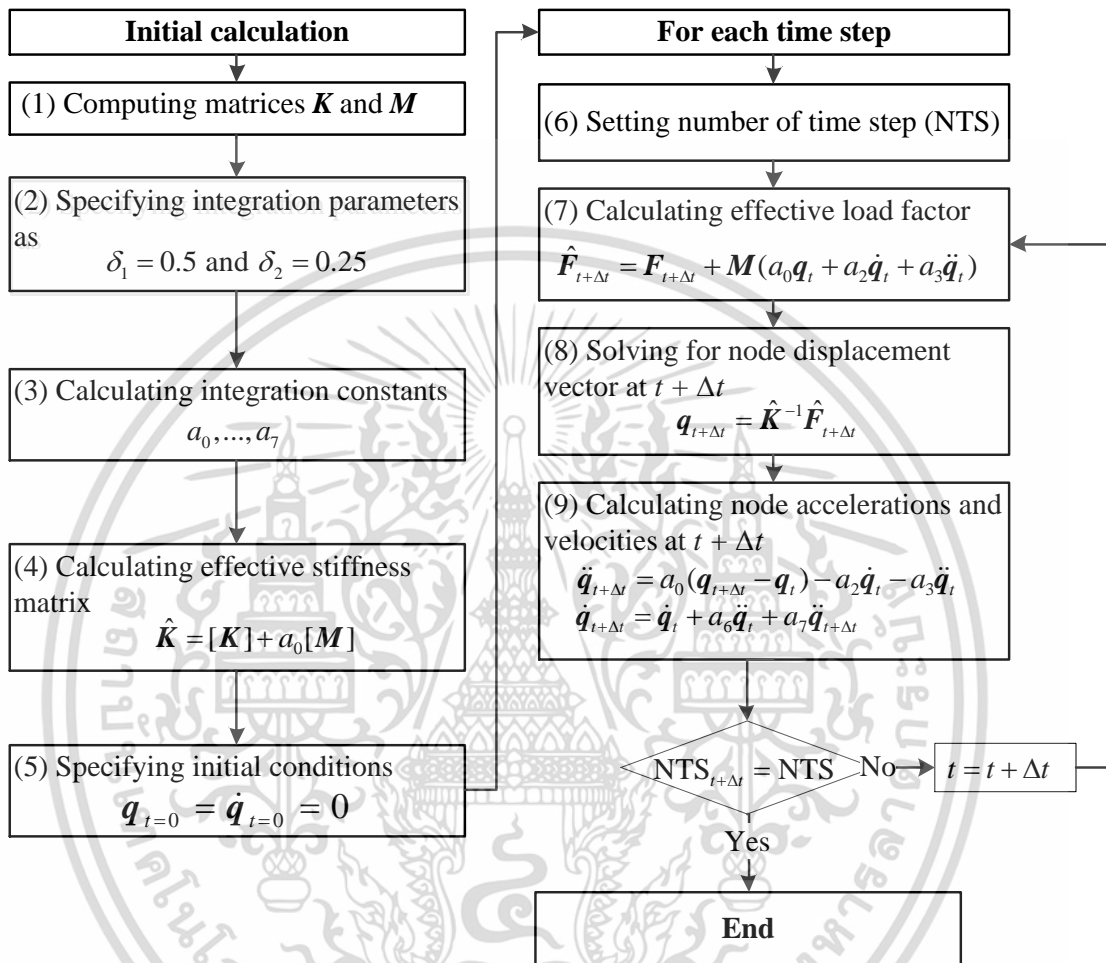
หลังจากนั้นสามารถคำนวณหาความเร่งและความเร็วของระยะการกระจัดใดๆ ที่เวลา $t + \Delta t$ ได้ดังนี้

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = a_0(\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) - a_2 \dot{\mathbf{q}}_t - a_3 \ddot{\mathbf{q}}_t \quad (3.81)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + a_6 \ddot{\mathbf{q}}_t + a_7 \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} \quad (3.82)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กระทำกระบวนการที่กล่าวมาในช่วงเวลา Δt ต่อไปนี้จะทราบค่าทั้งหมดตลอดระยะเวลาของการกระทำจากโหนดพลวัตจะได้ผลการตอบสนองของคานต่อการกระทำของโหนดพลวัตได้ทั้งแบบที่อยู่กับที่ในช่วงเวลาหนึ่งหรือแบบที่โหนดมีการเคลื่อนที่ตามแนวแกนความยาวของคานได้ กระบวนการของนิวมาร์คมีการแสดงสรุปอีกครั้งเพื่อความเข้าใจมากขึ้นในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.13 กระบวนการวิเคราะห์การตอบสนองแบบพลวัตของคานโดยใช้วิธีการของนิวมาร์ค

โครงสร้างแผ่นบางแบบแบนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

4.1 บทนำ

โครงสร้างแผ่นบาง (Plate) ก็นับได้ว่าเป็นหนึ่งในโครงสร้างย่อย (Structural members) ที่สำคัญของโครงสร้างทางวิศวกรรมเพื่อใช้ประกอบรวมกันจนกลายเป็นโครงสร้างที่มีความซับซ้อนและนำไปสู่การใช้งานจริง การวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางจะเป็นหัวข้อที่ใช้หลักการที่ครอบคลุมสูงขึ้นไปเมื่อเทียบกับการวิเคราะห์โครงสร้างคานาที่ได้อธิบายในบทที่ผ่านมาโดยการวิเคราะห์แบบหนึ่งมิติเท่านั้น สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางจะเป็นการวิเคราะห์แบบสองมิติซึ่งจะมีความซับซ้อนมากขึ้น ตัวอย่างการใช้งานโครงสร้างแผ่นบางซึ่งพบได้ทั่วไปในงานทางวิศวกรรม ยกตัวอย่างเช่น แผ่นพื้น ผนังของรถยนต์ รถไฟ เรือ และเครื่องบิน ในงานทางวิศวกรรมโยธาโครงสร้างแผ่นบางก็คือนำไปใช้ในส่วนหลักของอาคารบ้านเรือน งานพื้นและผนังเช่นกัน ด้วยเหตุผลและความสำคัญของแผ่นบางทั้งทางด้านวิศวกรรมเครื่องกลและวิศวกรรมด้าน ๆ อื่น ทำให้การวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางก็เป็นสิ่งที่สนใจของนักวิจัย เพื่อจะได้ล่วงรู้ถึงพฤติกรรมของแผ่นบางเมื่ออยู่ภายใต้การกระทำจากภาระโหลดแบบต่าง ๆ เมื่อมีการนำไปใช้งานจริงในสถานการณ์ต่าง ๆ โดยทั่วไปแผ่นบางที่อยู่ภายใต้สภาวะโหลดแบบสถิตศาสตร์ (Static loadings) จะแสดงการเสียน้อยกว่าแผ่นบางที่ต้องรองรับสภาวะโหลดแบบพลวัต (Dynamic loadings) ถึงแม้ว่าจะมีขนาดรวมของแรงที่จะมีเท่ากัน พฤติกรรมเช่นนี้เกิดขึ้นในทำนองเดียวกันกับการวิเคราะห์คานาที่เป็นแบบหนึ่งมิติ ทั้งนี้ด้วยเหตุผลการวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์จะไม่รวมเอาเรื่องของการเสียนอกจากความเฉื่อยเข้ามาเกี่ยวข้อง หัวข้อวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องของการตอบสนองของแผ่นบางต่อสภาวะโหลดแบบพลวัต จึงมีความสำคัญด้วยเช่นกัน โหลดแบบพลวัตที่นิยมนำมาพิจารณา เช่น โหลดกระทำที่จุดใดจุดหนึ่งแต่ขนาดของแรงจะขึ้นอยู่กับเวลา โดยความถี่ของแรงหรือโหลดอาจมีการนำมาพิจารณาร่วมด้วยได้เช่นกัน หากความถี่ของโหลดมีความพ้องกับความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง การโก่งงอแบบพลวัตก็จะมีค่าสูงมากจนทำให้แผ่นบางเกิดความเสียหายรุนแรงได้ โหลดแบบพลวัตอีกประเภทหนึ่งคือโหลดที่มีการเคลื่อนที่ไปตามความยาวของแผ่นบาง (Moving loads) ด้วยความเร็วแบบคงที่หรือไม่คงที่ ตัวแปรที่สำคัญหลายตัว เช่น ความยาวและความกว้างของแผ่นบาง ความหนาของแผ่นบาง คุณสมบัติวัสดุ ความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง ความเร็วโหลด เงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบาง และตัวแปรอื่น ๆ จะถูกนำมาพิจารณาในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ต่อไป

อีกประเด็นหนึ่งที่สำคัญต่อการพิจารณาและออกแบบแผ่นบางเพื่อใช้ในงานทางวิศวกรรมคือการคิดค้นวัสดุชนิดใหม่เพื่อใช้สร้างโครงสร้างแผ่นบางที่มีสมรรถนะเพิ่มมากขึ้นกว่าแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุในกลุ่มที่เป็นเนื้อเดียวกัน วัสดุดั้งเดิมประเภทนี้มีความสามารถในการรับภาระโหลดจำกัดมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับปัญหาแผ่นบางที่มีความซับซ้อนมากกว่าปัญหาคานา แนวการรับภาระแรงมีมากขึ้น ทิศทางการเสริมแรงก็ต้องพิจารณาในระดับที่สูงขึ้นทั้งด้านแกน x และด้านแกน y และหากต้องการพัฒนาความสามารถของวัสดุในกลุ่มนี้ให้สูงขึ้นจะต้องอาศัยความประณีตในการออกแบบที่สูงขึ้น ในอดีตจนถึงปัจจุบันการพัฒนาวัสดุสำหรับสร้างโครงสร้างแผ่นบางทางวิศวกรรมมีอยู่หลายรูปแบบเช่น การใช้เส้นใยไฟเบอร์ (Fiber) เพื่อการเสริมแรง การใช้รังผึ้งที่ทำจากโลหะเพื่อลดน้ำหนักของแผ่นบาง ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับการสร้างและการวิเคราะห์ความแข็งแรงสามารถอ่านได้จาก

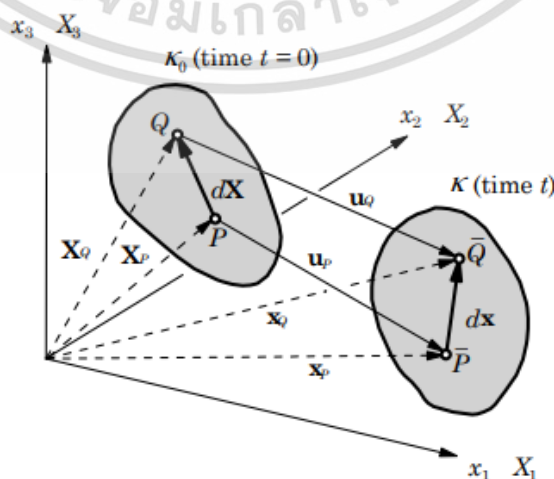
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการแข่งขันเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้เผยแพร่เป็นการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิงในหลาย ๆ แหล่ง สำหรับวัสดุแบบเส้นใยได้รับความนิยมนิยมสูงสำหรับการสร้างโครงสร้างแผ่นบางเพราะมีน้ำหนักเบาและให้ความแข็งแรงในระดับสูงเมื่อเทียบกับน้ำหนัก แต่ก็มีข้อเสียที่สำคัญอย่างหนึ่ง ก็มีปัญหาค้ำย ๆ กับโครงสร้างคาน คือ การแยกระหว่างชั้นต่าง ๆ ที่มีการขึ้นรูป ทั้งนี้เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่าความแข็งแรงที่ฉับพลันระหว่างแต่ละชั้น ทำให้เกิดความเค้นเข้มข้นตัวสูงมาก การไม่ทนทานต่อความร้อนและการกัดกร่อนเนื่องมาจากสภาวะแวดล้อมและสารเคมี โครงสร้างแผ่นบางมีพื้นที่สัมผัสสูงต่อสิ่งแวดล้อมที่ไม่พึงประสงค์ ดังนั้นการใช้วัสดุคอมโพสิตในกลุ่มของเส้นใยไฟเบอร์ผสมกับโพลีเมอร์ก็ยังมีจุดอ่อนหลายประเด็น ดังนั้นเพื่อลดปัญหาในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้มุ่งเน้นที่จะพัฒนาและวิเคราะห์วัสดุคอมโพสิตชนิดใหม่สำหรับการทำโครงสร้างแผ่นบางทางวิศวกรรมนั้นคือ วัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงนำเอาวัสดุเชิงฟังก์ชันมาวิเคราะห์และพัฒนาในรูปแบบให้เป็นแบบโครงสร้างแซนด์วิชซึ่งจะทำให้เพิ่มประสิทธิภาพในการรับภาระโหลดได้มากขึ้นเมื่อเทียบกับวัสดุเชิงฟังก์ชันเพียงอย่างเดียว รายละเอียดของแนวทางการวิเคราะห์และตัวแปรที่สำคัญจะกล่าวต่อไป

การกล่าวถึงหลักการที่สำคัญเบื้องต้นของการวิเคราะห์แผ่นบางนับได้ว่ามีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาสร้างสมการควบคุมระบบต่อไป เมื่อโครงสร้างใดๆ ถูกกระทำจากแรงภายนอกจะทำให้เกิดความเปลี่ยนแปลงรูปร่างตามขนาดของแรงที่มากระทำและความสามารถในการรับภาระแรงนั้นๆ ของโครงสร้าง เมื่อวิเคราะห์แผ่นบางก็เช่นเดียวกัน การเปลี่ยนรูปของแผ่นบางอาจเกิดขึ้นได้ตามเหตุผลที่กล่าวมาจะสามารถพิจารณาการเสียรูปทั่วไปของชิ้นงานใดๆ หรือโครงสร้างแผ่นบางให้อยู่ในรูปทั่วไปตามพิกัดแบบ 3 มิติและปัญหาจะถูกลดรูปลงมีเหลือแค่ 2 มิติได้ในภายหลัง เนื่องจากความหนาของแผ่นบางมีค่าน้อยกว่าความกว้างและความยาวมากๆ พิจารณารูปที่ 4.1 เป็นชิ้นงานใดๆ ที่แสดงถึงสภาวะก่อนและหลังการเปลี่ยนรูปเมื่ออยู่ภายใต้สภาวะโหลดใดๆ ที่มากระทำ จากรูประบบอ้างอิงก่อนการเสียรูปคือ (X_1, X_2, X_3) และระบบหลังการเสียรูปคือ (x_1, x_2, x_3) การเปลี่ยนแปลงของรูปร่างจะเป็นเรื่องของเวกเตอร์ของตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นระยะการกระจัดใดๆ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (4.1)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวน **รูปที่ 4.1** สภาวะก่อนและหลังการเสียรูปเมื่ออยู่ภายใต้โหลดใดๆ ระเบียบข้อดำเนินการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการความเครียดในรูปเทนเซอร์ (Strain tensor) ของระยะ $d\mathbf{X}$ คือ

$$\begin{aligned} 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{u}) \cdot [d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{u})] - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot [(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{u})^T - \mathbf{I}] \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (4.2)$$

เมื่อ Δ คือ เกรเดียนต์โอเปอเรเตอร์ (Gradient operator) เทียบกับระบบแกน \mathbf{X} และ \mathbf{E} คือ ความเครียดในรูปเทนเซอร์ (Green-Lagrange strain tensor) ซึ่งนิยามได้ดังนี้

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\Delta\mathbf{u} + (\Delta\mathbf{u})^T + \Delta\mathbf{u} \cdot (\Delta\mathbf{u})^T] \quad (4.3)$$

เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดฉาก (Rectangular Cartesian co-ordinates) จะสามารถแสดงค่า \mathbf{E} ในรูปต่อไปนี้

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_k} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \quad (4.4)$$

รายละเอียดของทั้งระบบใน 3 มิติคือ

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \quad (4.6)$$

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \quad (4.7)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \quad (4.8)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \quad (4.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \quad (4.10)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมที่มีการเปลี่ยนรูปแบบเชิงเส้น (Linear analysis) จะทำให้สามารถลดรูปสมการ E ได้เมื่อพิจารณาเฉพาะการเปลี่ยนรูปที่น้อย ๆ (Infinitesimal strain tensor) โดยสามารถแสดงสมการความเครียดได้นั้นคือ

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{u} + (\Delta \mathbf{u})^T] \quad (4.11)$$

หรืออาจเขียนในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.12)$$

ดังนั้นสมการความเครียดของแผ่นบางจะสามารถแสดงได้ในรูปต่อไปนี้

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.16)$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.17)$$

$$2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.18)$$

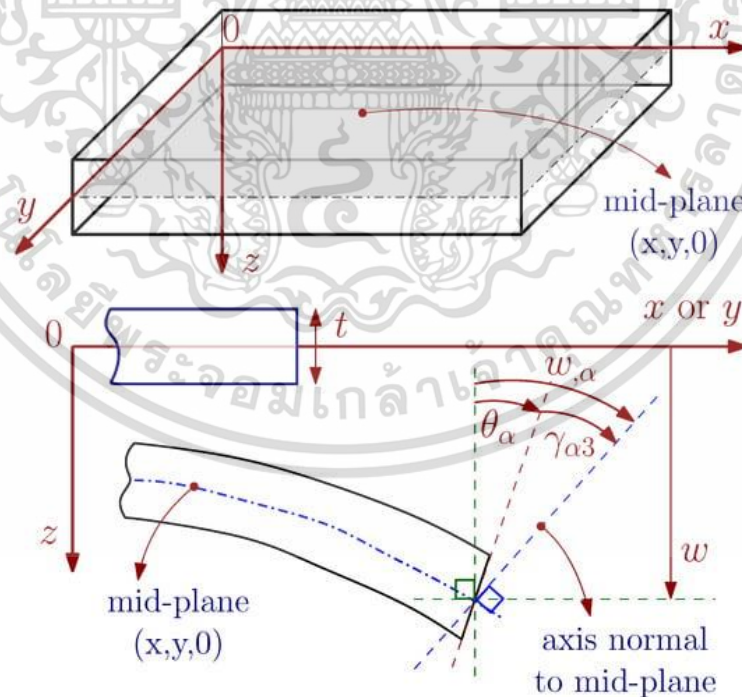
เมื่อกำหนดให้ (u, v, w) คือระยะการกระจัดตามแนวแกน (x, y, z) ตามลำดับ

ในบทนี้จะมีเนื้อหาที่ประกอบไปด้วยทฤษฎีทั่วไปของโครงสร้างแผ่นบางแบบไอโซทรอปิก ที่จะใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาวิเคราะห์ต่อยอดในส่วนที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นและเมื่อมีการใช้วิเคราะห์แผ่นบางที่สร้างขึ้นมาจากวัสดุคอมโพสิตยุคใหม่ ทฤษฎีของแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันในรูปโครงสร้างเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบแซนด์วิชซึ่งมีแกนกลางแข็งและแกนกลางอ่อนจะถูกนำมาวิเคราะห์เพื่อหาพฤติกรรมทางกลต่อไป รายละเอียดของการสร้างสมการควบคุมระบบสำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับของโครงสร้างแผ่นบางจะแสดงไว้โดยละเอียดในบทนี้ด้วยเช่นกัน

4.2 ทฤษฎีทั่วไปของโครงสร้างแผ่นบางแบบไอโซทรอปิก

ในทำนองเดียวกันกับปัญหาโครงสร้างคานในบทที่ 3 ในส่วนบทนี้จะเริ่มจากการพิจารณาโครงแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุไอโซทรอปิกก่อนที่จะทำการวิเคราะห์แผ่นบางแบบคอมโพสิตที่เป็นวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยแผ่นบางแบบไอโซทรอปิกจะมีความซับซ้อนน้อยกว่าการวิเคราะห์แผ่นบางแบบคอมโพสิต เนื่องจากหลายตัวแปรไม่มีความจำเป็นต้องนำมาพิจารณาและหลายตัวแปรจะใช้เฉพาะทอมที่เกี่ยวข้องเท่านั้นตามลักษณะของความสมมาตร จึงทำให้การแก้ปัญหานั้นลดความยุ่งยากลงอย่างมาก ดังนั้นเพื่อให้เกิดความเข้าใจและเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการวิเคราะห์ต่อไป โดยในส่วนนี้จึงเป็นการอธิบายเกี่ยวกับพฤติกรรมของแผ่นบางแบบไอโซทรอปิก ถือได้ว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการวิเคราะห์ในระดับที่สูงขึ้น ดังนั้นทฤษฎีโครงสร้างแผ่นบางเบื้องต้น (Classical plate theory) จะใช้เพื่อสร้างความเข้าใจและบางส่วนอาจใช้เพื่อยืนยันความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นใหม่ การวิเคราะห์แผ่นบางอย่างง่ายแบบไอโซทรอปิกสามารถทำได้โดยใช้ทฤษฎีแผ่นบางของเคิร์ชฮอฟฟ์ (kirchhoff plate theory) ซึ่งสมมติให้แผ่นบางเปลี่ยนรูปไปไม่มากนักเมื่ออยู่ภายใต้สภาวะโหดแบบการดัดโค้ง (small deformation due to bending) ลักษณะทั่วไปของการดัดโค้งของแผ่นบางแสดงไว้ในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ลักษณะของการดัดโค้งของแผ่นบาง [98]

จากรูปที่ 4.2 การดัดโค้งของโครงสร้างแผ่นบางที่ระนาบตรงกลาง (Mid-plane) จะถูกนำมาพิจารณา ($w = w_0$) เมื่อเกิดการดัดโค้งตามทฤษฎีของเคิร์ชฮอฟฟ์ระนาบตรงกลางจะต้องยังคงตั้งเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฉากกับเส้นแกนกลางของระนาบ (Axis normal to mid-plane) มุมที่เกิดจากการตัดโค้งคือ $w_{,\alpha}$ หรือ $\partial w / \partial \alpha$ เมื่อ α คือแกน x หรือแกน y ผลก็คือระนาบตัวขวางจะตั้งฉากกับระนาบตรงกลางตามความยาวในด้าน x หรือด้าน y หากสมมติฐานเกิดขึ้นเป็นมุมอื่น ๆ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 4.2 นั่นคือ θ_{α} จะทำให้เกิดความไม่ตั้งฉากเหมือนที่สมมติไว้ในกรณีของทฤษฎีของเคิร์ชฮอฟฟ์ ดังนั้นหากแผ่นบางมีมุมดังกล่าวเกิดขึ้นซึ่งไม่ตั้งฉากกันระหว่างระนาบและเส้นแกนเป็นที่ทราบได้ว่าสมมติฐานนั้นเป็นของทฤษฎีของแผ่นบางแบบอื่น ๆ ซึ่งจะกล่าวต่อไปในส่วนอื่นของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ตามสมมติฐานที่สำคัญของทฤษฎีแผ่นบางของเคิร์ชฮอฟฟ์ซึ่งสามารถเขียนมุมของการตัดโค้งที่เกี่ยวข้องกับแกน x และแกน y ได้ตามลำดับดังนี้คือ $-\partial w_0 / \partial x$ และ $-\partial w_0 / \partial y$ นอกจากนี้เมื่อแผ่นบางอยู่ภายใต้การตัดโค้งซึ่งหน้าตัดของแผ่นบางยังคงเป็นระนาบเดิมที่สม่ำเสมอตลอดความหนา ซึ่งบ่งบอกถึงการไม่พิจารณาความเค้นเฉือนที่หน้าตัด (Transverse shear) นอกจากนี้ยังมีตัวแปรที่สำคัญอีกประการหนึ่งของการตัดโค้งของแผ่นบางคือการเปลี่ยนแปลงของระยะตามแนวแกน x และแกน y ที่ระยะกึ่งกลางซึ่งนิยามด้วยตัวแปร $u_0(x, y)$ และ $v_0(x, y)$ ตามลำดับ ส่วนระยะการโก่งตามแนวแกน z หรือตามความหนาของแผ่นบางนิยามด้วยตัวแปร $w(x, y, z) = w_0(x, y)$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการระยะกระจัดทั้งหมดนี้ได้เมื่อแผ่นบางอยู่ภายใต้การการตัดโค้งด้วยแรงภายนอก (ทั้งแบบสถิตหรือพลวัต ณ เวลาใดๆ)

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.20)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (4.21)$$

สมการระยะกระจัดตามแนวแนวความยาวและความกว้างของแผ่นบางในสมการที่ 4.19 และสมการที่ 4.20 จะมีเหมาะสมกับแผ่นบางแบบคอมโพสิตที่มีหน้าตัดแบบไม่สมมาตรตลอดความหนาของแผ่นบาง เมื่อไรก็ตามที่พิจารณาแผ่นบางคอมโพสิตที่มีการเรียงตัวแบบสมมาตรหรือพิจารณาแผ่นบางแบบไอโซทรอปิกจะสามารถลดรูปสมการระยะกระจัดได้ดังนี้

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \quad (4.22)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.23)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (4.24)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากความสัมพันธ์ของความเค้น (σ_{ij}) และความเครียด (ϵ_{ij}) ของแผ่นบางไอโซทรอปิก สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

โดยที่

$$Q_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (4.26)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \quad (4.27)$$

$$Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.28)$$

เมื่อ E, ν และ G คือค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น อัตราส่วนปัวซองและมอดูลัสของการเฉือนตามลำดับ

ดังนั้นสมการความเครียดของแผ่นบางแบบไอโซทรอปิกสามารถหาได้ดังนี้

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (4.29)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (4.30)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.31)$$

พลังงานเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของระยะกระจัด (Strain energy) ภายในแผ่นบางสามารถแสดงได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (4.32)$$

แทนค่าความเค้นและความเครียดไปยังสมการพลังงานภายในจะได้

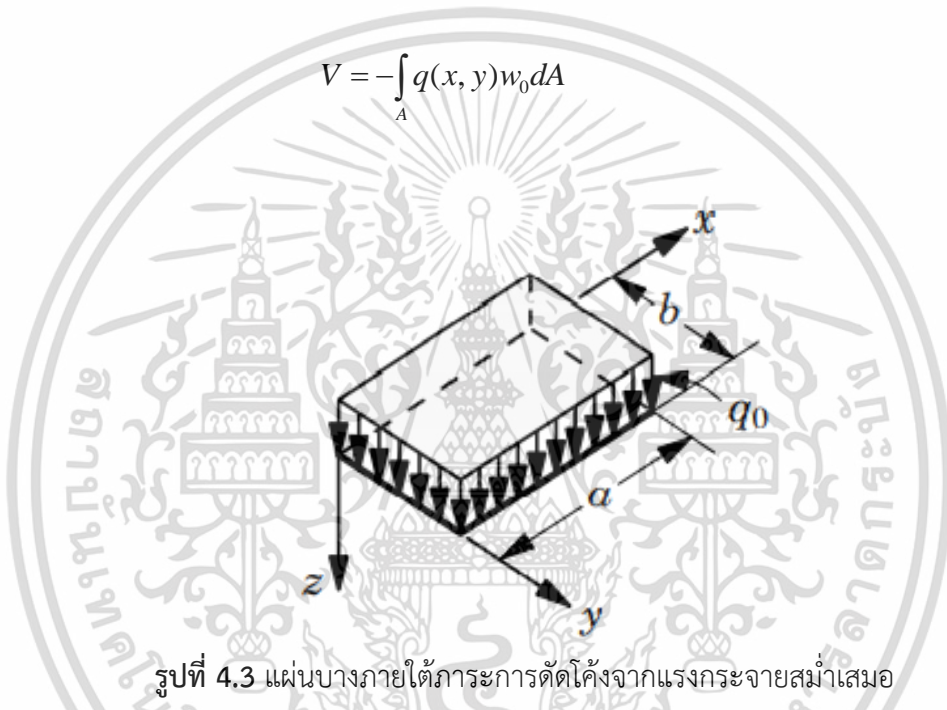
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$U = \frac{1}{2} \int_A D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 dA \quad (4.33)$$

$$[D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}] = [Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{66}] \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \quad (4.34)$$

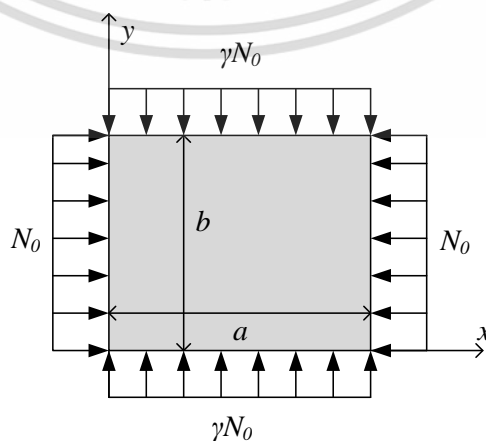
หากต้องการวิเคราะห์การดัดโค้งของแผ่นบางเนื่องจากแรงกระจายสม่ำเสมอ q_0 (N/m^2) สำหรับปัญหาการดัด (Bending analysis) ตามรูปที่ 4.3 สามารถเขียนสมการพลังงานเนื่องจากแรงภายนอกได้ตามสมการต่อไปนี้

$$V = - \int_A q(x, y) w_0 dA \quad (4.35)$$



รูปที่ 4.3 แผ่นบางภายใต้ภาระการดัดโค้งจากแรงกระจายสม่ำเสมอ

สำหรับกรณีการวิเคราะห์การโก่งเดาะ (Buckling analysis) ของแผ่นบางภายใต้แรงกดทั้งสองทิศทาง $\hat{N}_{xx} = N_0$ และ $\hat{N}_{yy} = \gamma N_0$ ตามรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แผ่นบางภายใต้ภาระแรงกดทั้งสองทิศทาง (Biaxial compression)

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการพลังงานภายนอกเนื่องจากแรงกดสามารถแสดงได้ดังนี้

$$V = -\frac{1}{2} \int_A \left[\hat{N}_{xx} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \hat{N}_{yy} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad (4.36)$$

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration analysis) พลังงานจลน์เป็นสิ่งที่สำคัญต่อการนำมาพิจารณานั้นคือ

$$K = \frac{1}{2} \int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (4.37)$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการกระจัดที่ระนาบกึ่งกลางของแผ่นบางดังนี้

$$K = \frac{1}{2} \int_A \left[I_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dA \quad (4.38)$$

เมื่อ

$$I_0 = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \quad \text{และ} \quad I_2 = \rho \int_{-h/2}^{h/2} (z^2) dz$$

จากกระบวนการที่กล่าวมาทั้งหมดสามารถเขียนสมการรวมทั้งระบบซึ่งเกี่ยวกับพลังงานรวม (Total energy) ของแผ่นบางที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิกได้ดังนี้ (ตามปัญหาที่ต้องการพิจารณา)

$$\Pi = U + V - K \quad (4.39)$$

การสร้างสมการควบคุมระบบ (Governing equation) สามารถทำได้โดยการหาพลังงานต่ำหรือสูงสุดเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ δw_0 ตามกฎของฮามิลตัน (Hamilton's principle) รายละเอียดสามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิง [96]

$$\int_0^t \delta \Pi dt = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (4.40)$$

ผลลัพธ์จากการอินทิเกรตแบบแยกส่วน (Integrate by part) จะทำให้ได้สมการควบคุมระบบซึ่งอยู่ในเทอมของเครื่องหมายอินทิเกรต ทำการแยกเทอมในเครื่องหมายออกมาจะได้สมการควบคุมระบบ

ของทุกปัญหาดังนี้ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \hat{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) = q(x, y) \quad (4.41)$$

เพื่อแก้ปัญหาแผ่นบางที่มีการรองรับอย่างง่ายทั้งสี่ด้าน (Simply supported at four edges) ตามเงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางดังนี้

เงื่อนไขของระยะการกระจัด :

$$w_0(0, y) = w_0(a, y) = w_0(x, 0) = w_0(x, b) = 0$$

เงื่อนไขของโมเมนต์ภายใน :

$$M_{xx}(0, y) = M_{xx}(a, y) = M_{yy}(x, 0) = M_{yy}(x, b) = 0$$

สมการระยะการกระจัดที่ทำให้เกิดเงื่อนไขขอบเขตข้างต้น คือ

$$w_0(x, y) = e^{i\omega t} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.42)$$

สำหรับปัญหาการตัด $q(x, y)$ จะต้องแสดงในรูปอนุกรมฟูรีเยร์ด้วยเช่นกัน นั่นคือ

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.43)$$

ในกรณีของแรงกระจายสม่ำเสมอบนแผ่นบางจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \text{ เมื่อ } m, n = 1, 3, 5, \dots, \infty \quad (4.44)$$

เมื่อแทนค่าระยะการกระจัดและอนุกรมฟูรีเยร์ของแรงตามปัญหาการตัด จะได้สมการคำตอบของระยะการกระจัด (w_0) ดังต่อไปนี้ (แผ่นบางภายใต้การตัดด้วยแรงกระจายสม่ำเสมอ)

$$w_0(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn \times d_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$d_{mm} = \frac{\pi^4}{b^4} \left[D_{11} m^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + D_{22} n^4 \right] \quad (4.46)$$

สำหรับปัญหาการโก่งเดาะ สามารถหาแรงที่กระทำกับแผ่นบางโก่งเดาะที่โหมดต่าง ๆ (m, n) ได้ดังนี้

$$N_0(m, n) = \frac{\pi^2}{b^2} \left(\frac{D_{11} \left(\frac{b}{a} \right)^4 m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 n^2 + D_{22} n^4}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + \gamma n^2} \right) \quad (4.47)$$

โดยที่แรงวิกฤต $P_{cr} = N_0(1,1)$ ซึ่งเกิดขึ้นกับโหมดหนึ่งเท่านั้น

สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระ พิจารณาการสั่นสะเทือนของแผ่นบางแบบฮาร์มอนิก ซึ่งผลลัพธ์ของความถี่ธรรมชาติในหน่วยเรเดียนต่อวินาที แสดงได้ดังนี้

$$\omega^2(m, n) = \frac{\pi^4}{\tilde{I}_p b^4} \left[D_{11} m^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + D_{22} n^4 \right] \quad (4.48)$$

โดยที่

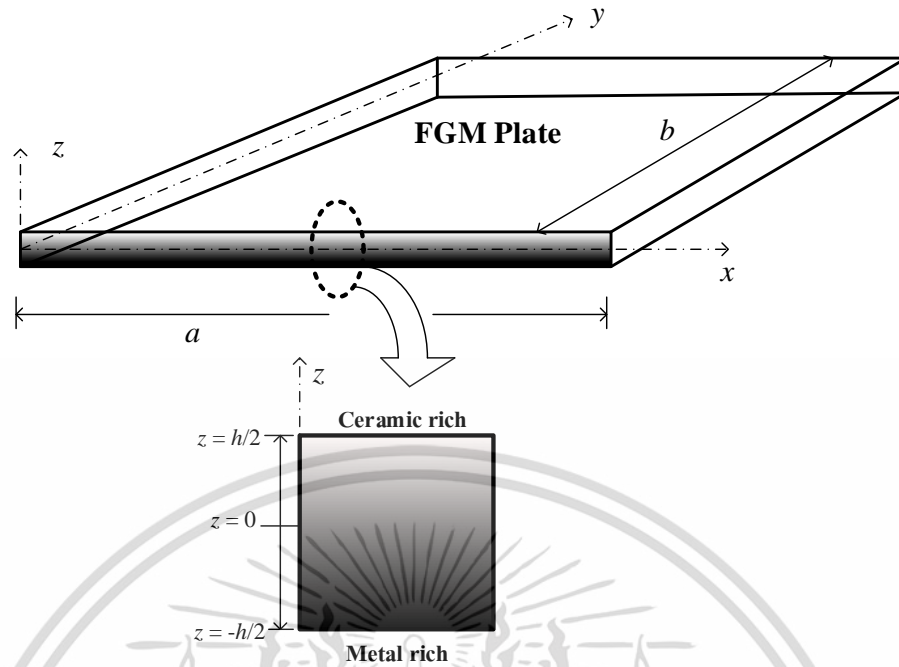
$$\tilde{I}_p = I_0 + I_2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (4.49)$$

เมื่อ ω_1 หรือ $\omega(1,1)$ คือความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน (Fundamental frequency)

ทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้นนั้นสามารถใช้สูตรสำเร็จรูปของแผ่นบางตามปัญหาต่าง ๆ ที่แสดงไว้ เพื่อยืนยันความถูกต้องบางส่วนได้ของงานวิจัยในครั้งนี้ได้และทฤษฎีพื้นฐานนี้เป็นส่วนสำคัญอย่างยิ่งต่อการวิเคราะห์แผ่นบาง รวมถึงหลักการต่าง ๆ ที่ใช้สามารถขยายผลในเชิงลึกต่อไปได้ในส่วนถัดไปของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

4.3 โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะมีการพิจารณาวัสดุเชิงฟังก์ชัน (FGMs) เพื่อใช้สร้างโครงสร้างในรูปแบบแซนด์วิชทั้งที่เป็นโครงสร้างแบบคานและแบบแผ่นบาง ดังนั้นคำอธิบายในช่วงแรกจะเป็นการกล่าวถึงลักษณะสำคัญของวัสดุเชิงฟังก์ชันในรูปทั่วไปที่จะนำไปสร้างแผ่นบางตามรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 แผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

จากรูปจะเป็นลักษณะของแผ่นบางที่มีด้านยาว a หน่วยตามแนวแกน x และมีความกว้าง b หน่วยตามแนวแกน y โดยมีความหนาเท่ากับ h หน่วยไปตามแนวแกน z โดยจุดกำเนิดของแกนทั้งหมดอยู่ที่กึ่งกลางของแผ่นบาง จากรูปจะสังเกตเห็นได้ว่าผิวบนสุดที่ $z = +h/2$ เป็นบริเวณที่มีส่วนผสมของเซรามิก 100% และสัดส่วนของเซรามิกจะลดลงไปเรื่อย ๆ จนเป็น 0% ที่ผิวด้านล่างหรือตำแหน่งที่ $z = -h/2$ ตามฟังก์ชันของสัดส่วนกำหนด ในขณะที่สัดส่วนของปริมาณโลหะจะเปลี่ยนแปลงตรงกันข้ามกับเซรามิกดังนี้

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (4.50)$$

$$V_m = 1 - V_c \quad (4.51)$$

เมื่อ V_c คือสัดส่วนโดยปริมาตรของเซรามิกของแผ่นบาง

V_m คือสัดส่วนโดยปริมาตรของโลหะของแผ่นบาง

คุณสมบัติทางกลของวัสดุจะขึ้นอยู่กับสัดส่วนโดยปริมาตรของแต่ละชนิดของวัสดุที่มาประกอบขึ้นเป็นแผ่นบางตามสมการทั่วไปต่อไปนี้

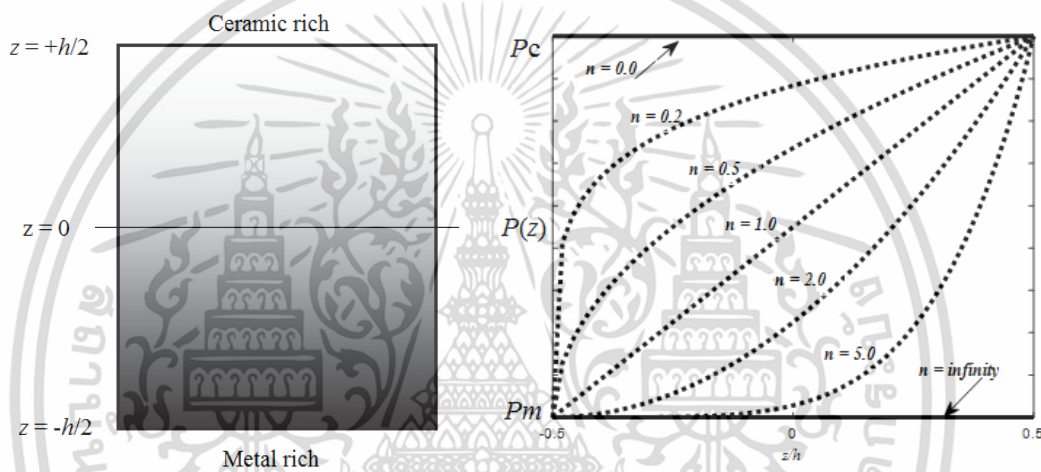
$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (4.52)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการ 4.50 – 4.51 แทนลงในสมการที่ 4.52 จะได้

$$P = P_c \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + P_m \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \right] \quad (4.53)$$

โดยที่ P คือ ค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผล สมการคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลของวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้น จะขึ้นอยู่กับตัวบ่งชี้กำลังหรือค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ซึ่งตัวอย่างคุณสมบัติที่เปลี่ยนแปลงตามตัวแปร n สามารถแสดงได้ตามรูปที่ 4.6 จากเส้นกราฟจะพบว่าเมื่อ $n = 0$ แผ่นบางจะเป็นเซรามิกทั้งหมด แต่หากมีการเพิ่มขึ้นของค่า n จะทำให้มีการผสมของโลหะในปริมาณที่มากขึ้นจนมีค่าสูงสุดที่ $n \approx \infty$



รูปที่ 4.6 แผ่นบางที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลของวัสดุที่จำเป็นต่อการวิเคราะห์แผ่นบางสามารถแสดงได้ในกรณีคล้ายคลึงกับเรื่องของคานที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่แปรผันตามแกน z เช่นกัน คุณสมบัติวัสดุที่กล่าวถึงในที่นี้ คือ ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น (E) อัตราส่วนปัวซอง (ν) ความหนาแน่น (ρ) การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (α) และค่าการนำความร้อนของวัสดุ (η) ทุกคุณสมบัติที่กล่าวมาสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m \quad (4.54)$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \nu_m \quad (4.55)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_m \quad (4.56)$$

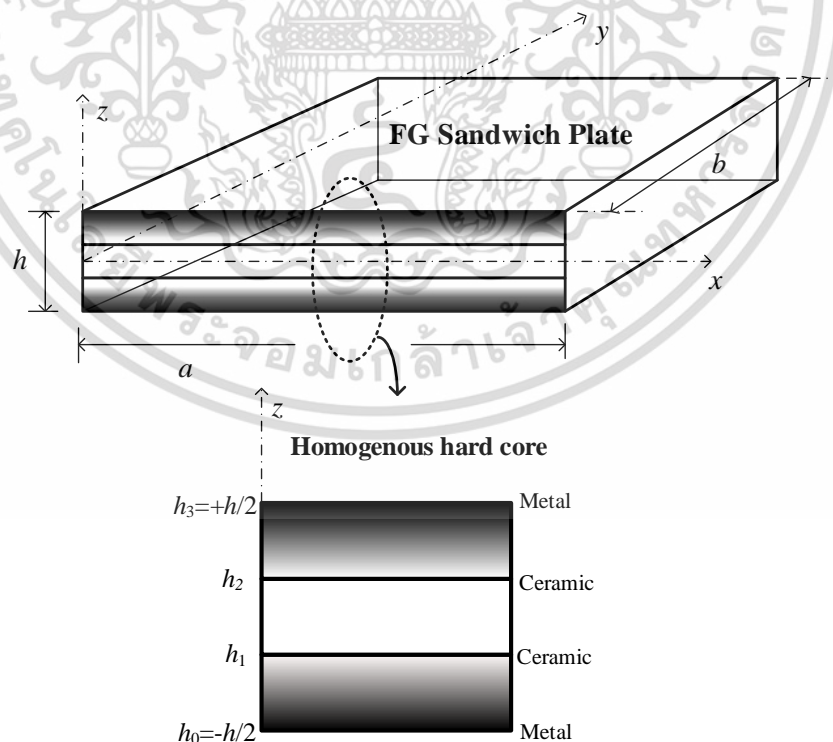
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\alpha(z) = (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \alpha_m \quad (4.57)$$

$$\eta(z) = (\eta_c - \eta_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \eta_m \quad (4.58)$$

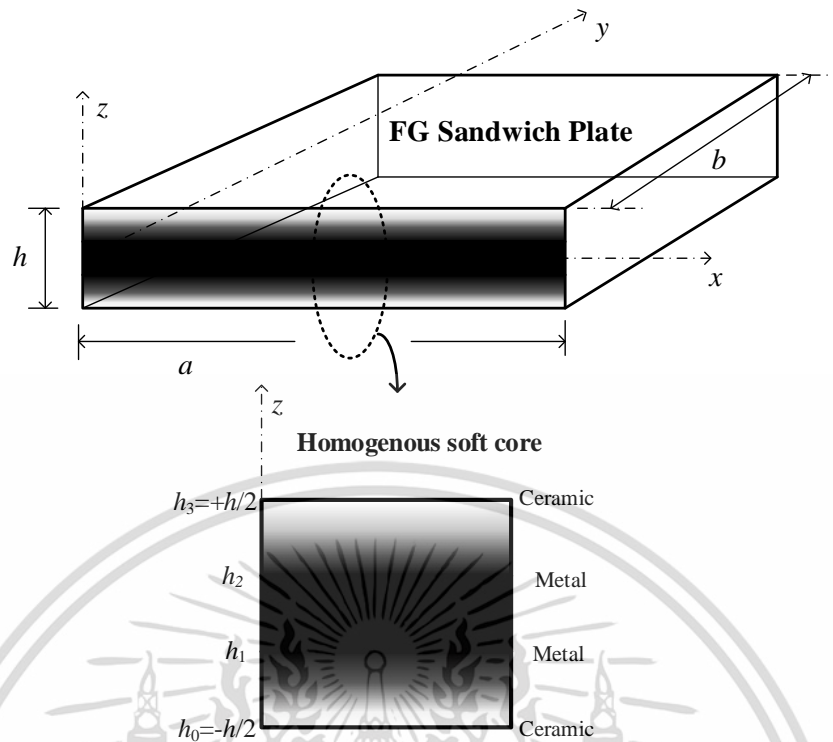
สัญลักษณ์ตัวห้อย c และ m บ่งบอกถึงคุณสมบัติของเซรามิกและโลหะตามลำดับ ดังที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้นี้ในโครงสร้างคาน เนื่องจากอัตราส่วนปัวซองของวัสดุนั้นแตกต่างกันไม่มากจึงสามารถกำหนดให้ $\nu = 0.33$ ได้

จากพื้นฐานของวัสดุเชิงฟังก์ชันที่กล่าวมาแล้วในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นจะพัฒนาโครงสร้างแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนี้ (FGMs) ในรูปแบบบางแบบแซนด์วิชตามที่แสดงในรูปที่ 4.7 และรูปที่ 4.8 โดยในรูปที่ 4.7 จะเป็นโครงสร้างแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยอยู่ตำแหน่งชั้นบนสุดและล่างสุดของแผ่นบางแบบแซนด์วิชและมีชั้นกลางเรียกว่าแกนของแผ่นบาง (Plate's core) ซึ่งจะสมมุติให้ทำมาจากวัสดุไอโซทรอปิกที่มีความเป็นเนื้อเดียวกันทั้งก้อน (Homogenous core) เนื่องจากโดยส่วนใหญ่แล้วค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นของเซรามิกจะสูงกว่าโลหะมาก จึงทำให้เซรามิกมีความแข็งสูงกว่าโลหะ ดังนั้นหากชั้นกลางทำจากเซรามิกมักจะเรียกแผ่นบางประเภทนี้ว่าแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันแบบใช้แกนกลางแข็ง (FG sandwich plate with homogenous hard core) แผ่นบางแบบนี้จะมีผิวด้านบนสุดและล่างสุดเป็นโลหะทั้งคู่ ส่วนรายละเอียดของแกนต่าง ๆ สามารถแสดงโดยรายละเอียดตามรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 แผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันแบบแกนกลางแข็ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.8 แผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันแบบแกนกลางอ่อน

อีกรูปแบบหนึ่งของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือแบบแกนกลางอ่อนหรือชั้นกลางทำมาจากโลหะ ลักษณะทั่วไปของแผ่นบางแบบนี้จะตรงกันข้ามกับแบบแผ่นบางที่ผ่านมา ซึ่งสามารถสังเกตได้จากรูปที่ 4.8 โดยที่ชั้นกลางทำมาจากโลหะ 100% ในขณะที่วัสดุที่ผิวด้านบนสุดและล่างสุดจะใช้วัสดุเซรามิก 100%

ตามที่ได้กล่าวมา เพราะฉะนั้นจึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจที่จะวิเคราะห์แผ่นบางทั้งสองลักษณะในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ นั่นคือ การพิจารณาแผ่นบางแบบแซนด์วิชแบบแกนกลางแข็งและแกนกลางอ่อนในรูปแบบคล้ายกับบทที่ผ่านมาของคาน นั่นคือ การบ่งบอกความหนาของชั้นวัสดุทั้งสามชั้นที่ประกอบขึ้นเป็นแซนด์วิชซึ่งจะบอกเป็นอัตราส่วนด้วยตัวเลขสามตัวเช่น 1-1-1 หรือ 2-1-1 หากบ่งบอก 1-1-1 หมายความว่า ชั้นบนมีความหนาเท่ากับชั้นกลางและชั้นล่าง หากบอกเป็น 2-1-1 คือชั้นล่างสุดหนาสองเท่าของชั้นกลางและชั้นบน เมื่อกำหนดให้ความหนารวมทั้งหมดเท่ากับ h ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นของแผ่นบาง คือ 1-2-1 ดังนั้นค่าของ $h_0 = -h/2$, $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$ และ $h_3 = h/2$ เป็นต้น โดยที่ค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผลของวัสดุในแต่ละชั้น (i) สามารถหาได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E^{(i)}(z) = (E_b - E_t)V_b^{(i)}(z) + E_t \quad (4.59)$$

$$\rho^{(i)}(z) = (\rho_b - \rho_t)V_b^{(i)}(z) + \rho_t \quad (4.60)$$

ในกรณีของโครงสร้างแบบแซนด์วิชมักจะนิยามแตกต่างกันกับวัสดุเชิงฟังก์ชันทั่วไป โดยกำหนดให้ตัวห้อย t และตัวห้อย b ในสมการที่ 4.59 และสมการที่ 4.60 บ่งบอกถึงคุณสมบัติของวัสดุที่ผิวด้านเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอก (Face) และที่แกนกลาง (Core) ตามลำดับ ส่วนสมการสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (Volume fraction) ของวัสดุแต่ละชั้นสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{cases} V_b^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^n & z \in [h_0, h_1] \\ V_b^{(2)}(z) = 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V_b^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^n & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (4.61)$$

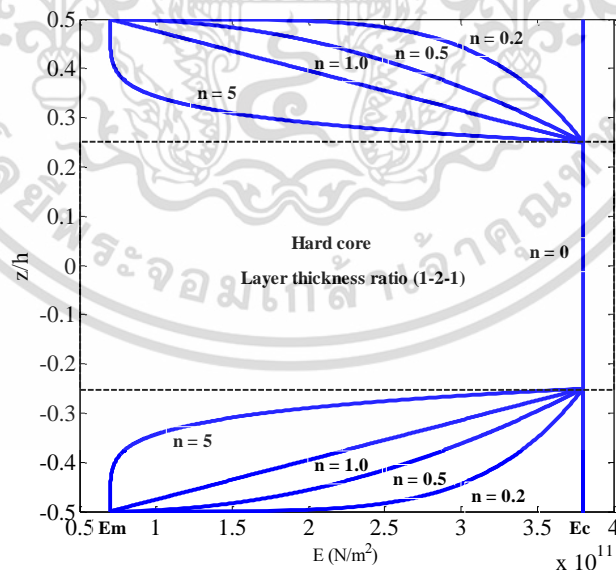
ในทำนองเดียวกันกับวัสดุเชิงฟังก์ชันทั่ว ๆ ไปที่กำหนดให้ค่า n คือ ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ สำหรับกรณีโครงสร้างแบบแกนดียวเป็นแบบ : แกนกลางแข็ง (Hard core)

จะกำหนดให้ $E_b = E_c$, $\rho_b = \rho_c$ และ $E_t = E_m$, $\rho_t = \rho_m$

สำหรับกรณีโครงสร้างแบบแกนดียวเป็นแบบ : แกนกลางอ่อน (Soft core)

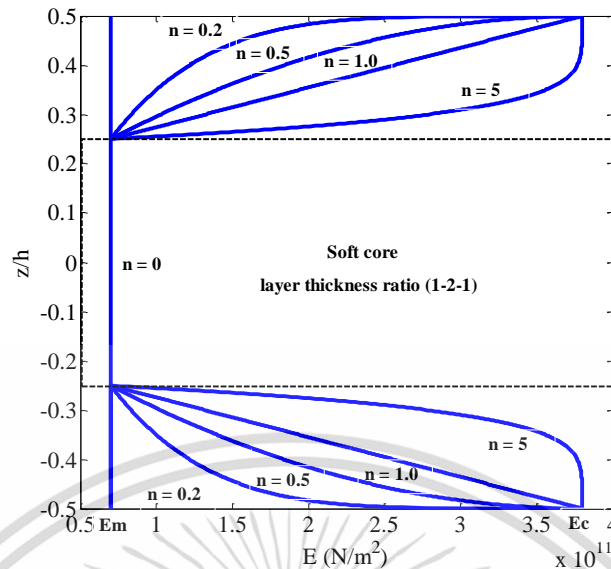
จะกำหนดให้ $E_b = E_m$, $\rho_b = \rho_m$ และ $E_t = E_c$, $\rho_t = \rho_c$

อย่างไรก็ตามสำหรับค่าอัตราส่วนปัวซองสามารถกำหนดให้เป็นค่าคงที่ได้ ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาแล้ว ก่อนหน้านี้ รูปที่ 4.9 และรูปที่ 4.10 แสดงตัวอย่างค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ตามแนวแกน z โดยใช้อัตราส่วนของความหนาแต่ละชั้นเป็นแบบ 1-2-1 โดยในตัวอย่างนี้จะกำหนดให้ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นของโลหะเท่ากับ 70 GPa และค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นเซรามิกเท่ากับ 380 GPa



รูปที่ 4.9 ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของโครงสร้างแผ่นบางแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน (แกนกลางแข็ง)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.10 ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของโครงสร้างแผ่นบางแบบแกนด्वิชาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน (แกนกลางอ่อน)

4.4 การวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางแบบแกนด्वิชาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

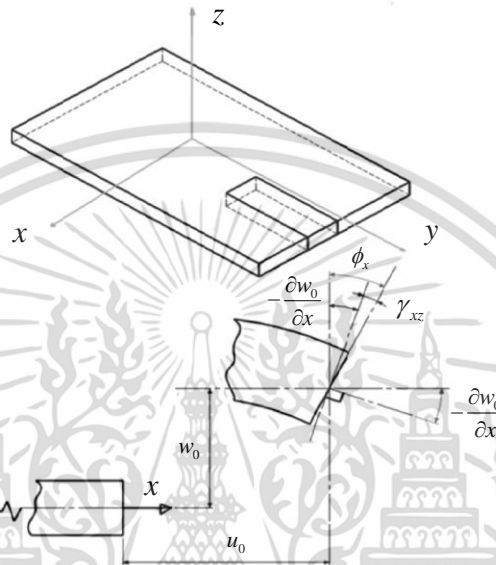
การวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางนั้นจำเป็นต้องวิเคราะห์เป็นปัญหาแบบสองมิติ (Two dimensional analysis) ที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงในระบบแกนทั้ง x และ y ในขณะที่แกน z คือแกนของความหนาซึ่งมีการยึดหรือหดไม่มากนักเมื่อเทียบกับแกนความยาวและความกว้าง ในกรณีที่โครงสร้างแผ่นบางที่มีความบางมาก ๆ ก็ยังทำให้ความเค้นในทิศทางตั้งฉากกับความหนา (σ_{zz}) มีค่าน้อยมาก ๆ จนไม่ต้องนำมาพิจารณาได้ ดังนั้นการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางจึงมีความเหมาะสมกับการวิเคราะห์แบบสองมิติ ในขณะที่การวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างคานจะพิจารณาแค่เพียงหนึ่งมิติเท่านั้น อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางด้วยทฤษฎีพื้นฐานของเคิร์ชฮอฟฟ์ อาจไม่เพียงพอต่อการวิเคราะห์แผ่นบางที่มีความหนาปานกลางจนถึงที่มีความหนามาก (Moderate plate's thickness หรือ Thick plate's thickness) รวมทั้งกรณีของโครงสร้างแผ่นบางที่ถูกสร้างขึ้นจากวัสดุคอมโพสิตที่มีความแข็งอ่อนบริเวณหน้าตัดขวางที่ไม่เท่ากันหรือไม่มีความสมมาตรของวัสดุตลอดความหนา การเปลี่ยนแปลงรูปร่างหน้าตัดอาจไม่คงรูประนาบแบบเส้นตรง ๆ และอาจไม่ตั้งฉากกับระนาบแกนกลางอีกต่อไปเหมือนดังสมมติฐานของทฤษฎีเบื้องต้น ดังนั้นจำเป็นต้องเลือกใช้ทฤษฎีที่มีความเหมาะสมกว่าทฤษฎีแผ่นบางเบื้องต้นที่กล่าวมา

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทฤษฎีหลักที่จะใช้วิเคราะห์แผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันในรูปแบบของโครงสร้างแบบแกนด्वิชา คือ ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (First order shear deformation theory) หรือเรียกย่อเป็นอักษรภาษาอังกฤษ คือ FSDT ข้อดีของทฤษฎีนี้เมื่อเทียบกับทฤษฎีเบื้องต้นคือ

- ใช้อธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาปานกลางหรือมีความหนามากซึ่งทฤษฎีเบื้องต้นนั้นจะเหมาะกับแผ่นบางที่มีความหนาน้อยมาก ๆ
- ใช้เทอมในการคำนวณไม่มากเมื่อเทียบกับทฤษฎีชั้นสูงที่มีอันดับสูงขึ้นไป
- ใช้เวลาการคำนวณไม่มากแต่ให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- ใช้กับแผ่นบางที่ทำจากวัสดุคอมโพสิตได้ดี เนื่องจากหน้าตัดของโครงสร้างภายหลังการเปลี่ยนรูปไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับแนวแกนกลาง
- มีการพิจารณาอิทธิพลของความเค้นเฉือนที่บริเวณหน้าตัดของโครงสร้างร่วมด้วยซึ่งทฤษฎีเบื้องต้นไม่ได้นำมาพิจารณาแต่เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ถูกต้องจะต้องใช้ค่าแก้ของการเฉือนร่วมด้วย (Shear correction factor)



รูปที่ 4.11 การเปรียบเทียบลักษณะของการเปลี่ยนรูปภายใต้การตัดโค้งของทฤษฎีดั้งเดิม

จากข้อดีที่กล่าวมาของทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (FSDT) โดยสามารถพิจารณาลักษณะการเปลี่ยนรูปภายหลังการรับภาระแรงหรือภายใต้การตัดโค้งใด ๆ ตามรูปที่ 4.11 เมื่อสังเกตจากรูปพบว่ามุมของหน้าตัดขวางสำหรับทฤษฎีดั้งเดิมคือ $-\partial w_0/\partial x$ และมุม $-\partial w_0/\partial y$ (จะไม่แสดงในรูป) แต่สำหรับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งมุมของหน้าตัดคือ ϕ_x และ ϕ_y ตามทิศทางที่พิจารณานั้นไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับแนวแกนกลางอีกต่อไป ดังนั้นการใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง จะมีเทอมของ $z\phi_x$ และ $z\phi_y$ เพิ่มเข้ามา นอกเหนือจากการยืดหรือหดของ u_0 และ v_0 ตามแนว x และ y ตามลำดับ ดังนั้นสมการระยะการกระจัดรวมของทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง แสดงได้ดังนี้

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t), \quad (4.62)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t), \quad (4.63)$$

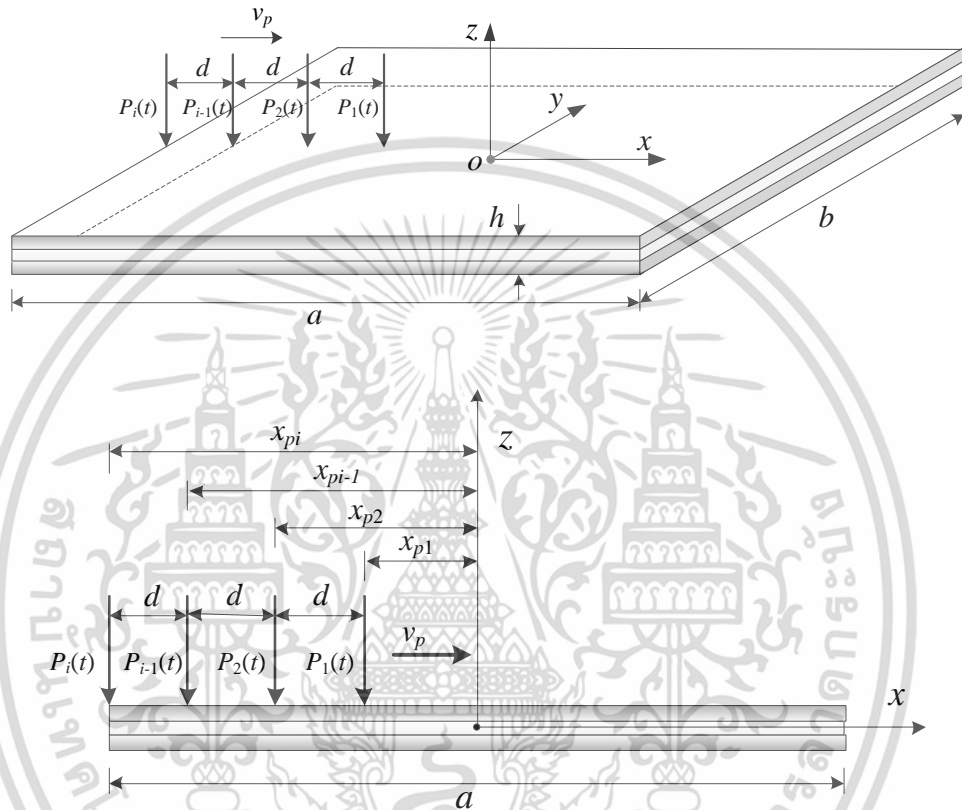
$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (4.64)$$

โดยที่ u_0 คือ ระยะกระจัดตามแนวแกนความยาวของแผ่นบาง (แกน x)) ที่ระนาบกึ่งกลาง เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

v_0 คือ ระยะกระจัดตามแนวแกนความกว้างของแผ่นบาง (แกน y) ที่ระนาบกึ่งกลาง
 w_0 คือ ระยะกระจัดตามแนวแกนความหนา (แกน z) ที่ระนาบกึ่งกลางหรือเรียกว่าค่าระยะการโก่ง (Deflection)

ϕ_x คือ มุมระนาบหน้าตัดขวางที่หมุนรอบแกน y

ϕ_y คือ มุมระนาบหน้าตัดขวางที่หมุนรอบแกน x



รูปที่ 4.12 โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะพิจารณาการสั่นสะเทือนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ (Free and forced vibration) ของโครงสร้างแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่อยู่ในรูปโครงสร้างแบบแซนดวิช ตามรูปที่ 4.12 พิจารณาโครงสร้างแผ่นบางดังกล่าวภายใต้การกระทำจากภาระแรงหรือโหลดที่มีการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x โดยในการพิจารณาแผ่นบางลักษณะนี้จะกำหนดให้กึ่งกลางแผ่นบางคือจุดกำเนิดของระบบแกนที่พิจารณา ดังนั้นจากรูปแรงจะเคลื่อนที่จากด้านซ้ายไปด้านขวา โดยเริ่มจากตำแหน่งที่ $x = -0.5$, $y = 0$ เคลื่อนไปยังตำแหน่งที่ $x = +0.5$, $y = 0$ เมื่อ a คือความยาวตามแนวแกน x และ b คือความกว้างตามแนวแกน y อีกประเด็นหนึ่งที่สำคัญคือความเร็วของแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่นั้นจะเป็นความเร็วแบบคงที่ (Constant velocity) นิยามด้วย v_p ความเร็วนี้จะเป็นตัวบ่งบอกตำแหน่งของแรงบนโครงสร้างแผ่นบางด้วยเช่นกันตามสมการต่อไปนี้

$$x_{pi} = [v_p t - (i-1)d] \quad (4.65)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ d คือระยะห่างระหว่างแรง เนื่องจากมีการพิจารณาการเคลื่อนที่ของแรงหลายแรงจึงต้องบ่งชี้ด้วยตัวบ่งบอกจำนวน i จากข้อกำหนดที่กล่าวมาทำให้สามารถนำไปสร้างเป็นสมการควบคุมระบบได้ทั้งหมดต่อไป ดังนั้นอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างระยะกระจัด (displacement) ความเครียดตั้งฉาก (normal strain,) และความเครียดเฉือน (shear strain,) จะได้

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (4.66)$$

โดยที่

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix}. \quad (4.67)$$

อาศัยความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดตามทิศทางต่างๆ ของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนชั้น (i) สามารถแสดงได้ตามสมการต่อไปนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{yy}^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^{(i)} \\ \tau_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (4.68)$$

โดยที่ $\sigma^{(i)}$ และ $\tau^{(i)}$ แสดงถึงความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนของแผ่นบางแบบแซนด์วิชซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งจำนวนชั้น ตามลำดับ ส่วนค่า Q ณ ตำแหน่งในเมทริกซ์หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E^{(i)}(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E^{(i)}(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} &= \kappa_s^{(i)} \frac{E^{(i)}(z)}{2[1+\nu]}, \quad Q_{66} = \frac{E^{(i)}(z)}{2[1+\nu]} \end{aligned} \quad (4.69)$$

เพื่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ถูกต้องมากขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์ Q_{44} และ Q_{55} ที่เกี่ยวข้องกับความเค้นเฉือนแนวความหนาจะต้องนำมาคูณกับค่าแก้ของการเฉือน (κ_s) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $5/6$ กรณีวัสดุเป็นเนื้อเดียว หรือเท่ากับ $\frac{5}{6 - (\nu_c V_c + \nu_m V_m)}$ ในกรณีวัสดุทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อโครงสร้างแผ่นบางถูกกระตุ้นจากภาระโหลดแบบพลวัต ก็จะทำให้เกิดระยะการกระจัด ซึ่งเป็นผลทำให้เกิดพลังงานภายใน โดยพลังงานภายในบนพื้นฐานของทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง จะแสดงอยู่ในรูปความเค้นและความเครียดดังสมการต่อไปนี้

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (4.70)$$

หรือสามารถที่จะเขียนสมการพลังงานภายในของแผ่นบางให้อยู่ในรูปของโครงสร้างแบบแซนด์วิชที่ประกอบด้วยส่วนหลัก 3 ชั้นนั่นคือชั้นบนและชั้นล่างเป็นพื้นที่ผิว (Top and bottom faces) ซึ่งทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันและชั้นกลางหรือชั้นแกนกลาง (Core) ซึ่งทำมาจากวัสดุไอโซทรอปิก ดังนั้นสมการพลังงานของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิช คือ

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz}^{(i)} \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(i)} \gamma_{xz} + \tau_{xy}^{(i)} \gamma_{xy}) dz dx dy \quad (4.71)$$

แทนค่ารายละเอียดของความเค้นและความเครียดในสมการพลังงานภายใน จะได้

$$\begin{aligned} U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} & \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2A_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} \right. \\ & + 2B_{11} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2B_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ & + 2A_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2A_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} \right)^2 \\ & + 2B_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2B_{22} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ & + A_{44} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \frac{\partial w_o}{\partial x} \phi_x + 2A_{44} \frac{\partial w_o}{\partial y} \phi_y \\ & + 2B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial y} + 2B_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} \\ & + 2A_{55} \phi_x \frac{\partial w_o}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \phi_x^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ & + 2D_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} + 2B_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ & + 2B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial x} + 2A_{44} \phi_y \frac{\partial w_o}{\partial y} + 2D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2D_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\ & \left. + D_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + A_{44} \phi_y^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \quad (4.72) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

A_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึง (Extensional stiffness) ที่เกี่ยวข้องกับแนวแกน x และแกน y เมื่อ $i, j = 1, 2$

B_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึงและการดัดแบบผสม (Extensional-bending stiffness) ที่เกี่ยวข้องกับแนวแกน x และแกน y เมื่อ $i, j = 1, 2$

D_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดัด (bending stiffness) ที่เกี่ยวข้องกับแนวแกน x และแกน y เมื่อ $i, j = 1, 2$

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการเฉือน (Shear stiffness) เมื่อ $i, j = 4, 5, 6$

ค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \sum_{k=1}^3 \int_{h_{k-1}}^{h_k} Q_{ij} [1, z, z^2] dz \quad (4.73)$$

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางทั้งแบบอिसระและแบบ จำเป็นต้องพิจารณาพลังงานจลน์ของแผ่นบางซึ่งมีความสัมพันธ์กับทฤษฎีแผ่นบางตามทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + I_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.74)$$

โดยที่ I_0, I_1 และ I_2 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของแผ่นบาง สามารถหาได้ดังนี้

$$[I_0, I_1, I_2] = \sum_{k=1}^3 \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} [1, z, z^2] dz. \quad (4.75)$$

สมการพลังงานที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้นเพียงพอต่อการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอिसระ แต่หากต้องการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับ จำเป็นต้องเพิ่มการวิเคราะห์ที่รวมไปถึงพลังงานภายนอกจากภาระแรงที่กระทำกับโครงสร้างแผ่นบางในรูปแบบต่าง ๆ ภาระแรงหรือโหลด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่พบในงานทางวิศวกรรมมีหลากหลาย ดังนั้นสมการพลังงานภายนอกเนื่องจากการกระทำของแรงแบบเคลื่อนที่ต่อโครงสร้างแผ่นบางคือ

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 1 แรงบนโครงสร้างแผ่นบาง

$$U_{EX} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_1 = \frac{a}{v_p} \\ 0 & \text{if } t_1 < t \end{cases} \quad (4.76)$$

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 2 แรงบนโครงสร้างแผ่นบาง

$$U_{EX} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) & \text{if } t_1 \leq t \leq t_2 = \frac{a}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) & \text{if } t_2 < t \leq t_1 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_1 + t_2 < t \end{cases} \quad (4.77)$$

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 3 แรงบนโครงสร้างแผ่นบาง

$$U_{EX} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) & \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) - P_3(t)w_0(x_{P3}, 0, t) & \text{if } t_2 \leq t \leq t_3 = \frac{a}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) - P_3(t)w_0(x_{P3}, 0, t) & \text{if } t_3 < t \leq t_3 + t_1 \\ -P_3(t)w_0(x_{P3}, 0, t) & \text{if } t_3 + t_1 < t \leq t_3 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_3 + t_2 < t \end{cases} \quad (4.78)$$

จากสมการที่ 4.76 – 4.78 เป็นตัวอย่างกรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่มีจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 3 แรง แต่หากมีจำนวนแรงหรือโหนดมากกว่านี้ก็สามารถทำได้จากหลักการเดียวกัน และยังสามารถกำหนดขนาดของแรงให้ขึ้นอยู่กับเวลาและความถี่ของการกระทำได้ดังนี้

$$P_1(t) = P_0 \sin(\Omega_1 t + \psi_1) \quad (4.79)$$

$$P_2(t) = P_0 \sin(\Omega_2 t + \psi_2) \quad (4.80)$$

$$P_3(t) = P_0 \sin(\Omega_3 t + \psi_3) \quad (4.81)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

P_i คือ ขนาดของแรงในหน่วยนิวตัน

Ω_i คือ ความถี่ของแรงที่มากระทำในหน่วยเรเดียนต่อวินาที

ψ_i คือ มุมเฟส (Phase Shift) ในหน่วยเรเดียน

x_{pi} คือ ตำแหน่งของแรง ณ เวลาใดๆ ในหน่วยเมตร

จากสมการพลังงานทั้งหมดสามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นบางแบบ
แซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้ โดยการสร้างสมการพลังงานรวม (Total energy) ตามประเภทของ
ปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งสมการพลังงานรวมของแต่ละประเภทสามารถเขียนได้ดังนี้
กรณีการสั่นสะเทือนแบบอิสระ

$$\Pi = U_s - U_k \quad (4.82)$$

กรณีการสั่นสะเทือนแบบบังคับ

$$\Pi = U_s - U_k - U_{EX} \quad (4.83)$$

อย่างที่มาแล้วในหัวข้อโครงสร้างคาน โดยสมการพลังงานรวม (Π) สามารถนำไปใช้เพื่อแก้ปัญหาได้
หลากหลายวิธี แต่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้วิธีการของริทต์ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้กันอย่าง
แพร่หลายและให้ผลลัพธ์ถูกต้องและยังเป็นวิธีการที่สามารถปรับใช้กับโครงสร้างต่าง ๆ ที่มีการรองรับ
ด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ได้

4.5 วิธีการของริทต์สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบาง

วิธีการของริทต์นอกจากจะสามารถใช้กับปัญหาโครงสร้างคานแบบหนึ่งมิติแล้ว ยังสามารถ
ขยายขอบเขตเพื่อพิจารณาปัญหาแบบสองมิติของแผ่นบางได้ การใช้วิธีการของริทต์สำหรับปัญหา
สองมิติจะต้องสมมุติฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับทั้งแกน x และ y ตามหลักการในทำนองเดียวกันกับ
ปัญหาโครงสร้างคาน แต่เงื่อนไขต้องถูกต้องทั้งสองมิติ

การใช้วิธีการของริทต์เพื่อหาคำตอบของการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางมีหลักการที่สำคัญ
คือการเลือกฟังก์ชันใด ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่สามารถเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดได้ โดยทั่วไป
เงื่อนไขขอบเขตจะแบ่งออกได้เป็นสองกลุ่มคือ

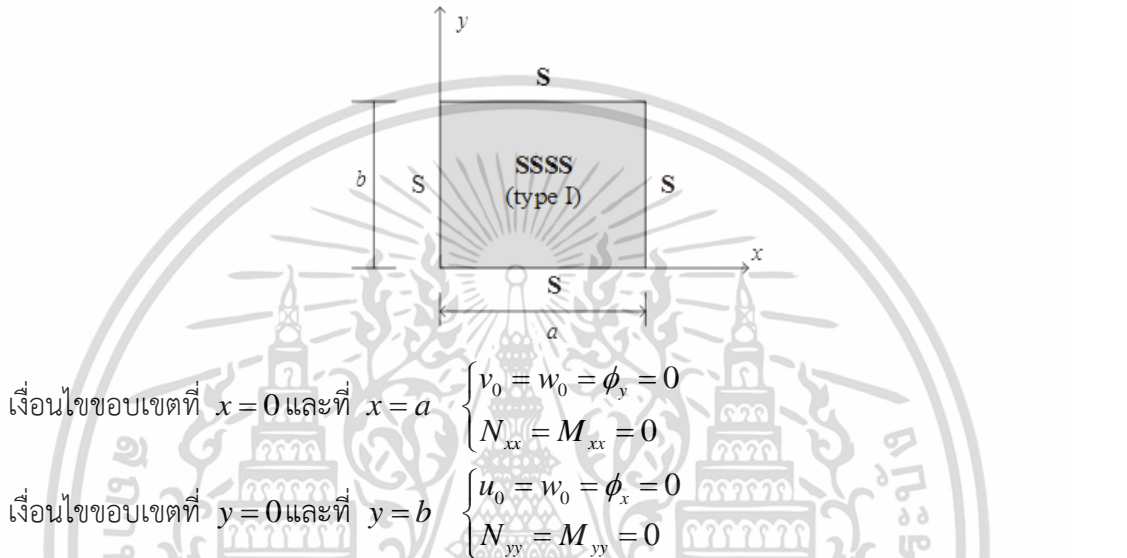
- เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับรูปร่าง (Geometrical boundary condition) ในกลุ่มนี้
จะว่าด้วยเรื่องของระยะกระจัดตามแนวแกนต่างๆ ความชันของการโก่ง ในกรณีระยะ
กระจัดจะพิจารณา $v_0(x, y)$, $u_0(x, y)$ และ $w_0(x, y)$ ส่วนกรณีความชันของการโก่ง
พิจารณา $\partial w_0/\partial x$ และ $\partial w_0/\partial y$ เป็นต้น
- เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับแรง (Force boundary condition) ในกลุ่มนี้จะว่าด้วย
เรื่องของแรงภายใน (Internal force resultants) ซึ่งรวมไปถึงแรงภายในตั้งฉาก แรง
เฉือนภายในและโมเมนต์ดัดภายในที่หน้าตัดขวางของแผ่นหรือโครงสร้างใดๆ ที่บริเวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดรองรับ ตัวอย่างเงื่อนไขขอบเขตในกลุ่มนี้ คือ N_{xx}, N_{xy}, N_{yy} และ M_{xx}, M_{xy}, M_{yy} และแรงลัพท์ของการเหือนเป็นต้น

หากฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้เป็นไปตามเงื่อนไขทุกประการ ดังนั้นคำตอบที่ได้มาจะมีความแม่นยำสูงมากและมีเสถียรภาพในการคำนวณสูงตามไปด้วย ตัวอย่างของฟังก์ชันระยะการกระจัดต่างๆ ที่เป็นไปตามเงื่อนไขทั้งหมดของเงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางที่มีการรองรับอย่างง่ายทั้งสี่ด้านของแผ่นบางคือ

กรณีที่ 1 สำหรับการรองรับอย่างง่ายทั้งสี่ด้าน (SSSS)



รูปที่ 4.13 กรณีที่ 1 โครงสร้างแผ่นบางแบบที่มีการรองรับอย่างง่าย

สมการระยะการกระจัดที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 แบบ (รูปที่ 4.13) นั่นคือการกำหนดรูปร่างหรือแรงแบบต่าง ๆ ของการรองรับอย่างง่ายของแผ่นบางทั้งสี่ด้านคือ

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4.84)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (4.85)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4.86)$$

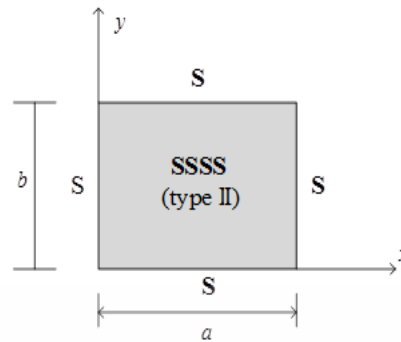
$$\phi_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4.87)$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (4.88)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ 2 สำหรับการรองรับอย่างง่ายทั้งสองด้าน (SSSS)



$$\begin{aligned} \text{เงื่อนไขขอบเขตที่ } x=0 \text{ และที่ } x=a & \begin{cases} u_0 = w_0 = \phi_y = 0 \\ N_{xy} = M_{xx} = 0 \end{cases} \\ \text{เงื่อนไขขอบเขตที่ } y=0 \text{ และที่ } y=b & \begin{cases} v_0 = w_0 = \phi_x = 0 \\ N_{xy} = M_{yy} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

รูปที่ 4.14 กรณีที่ 2 โครงสร้างแผ่นบางแบบที่มีการรองรับอย่างง่าย

สมการระยะการกระจัดที่เป็นไปตามเงื่อนไขทั้ง 2 แบบของการรองรับอย่างง่าย (รูปที่ 4.14) ของแผ่นบางทั้งสองด้านคือ

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (4.89)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4.90)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4.91)$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4.92)$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (4.93)$$

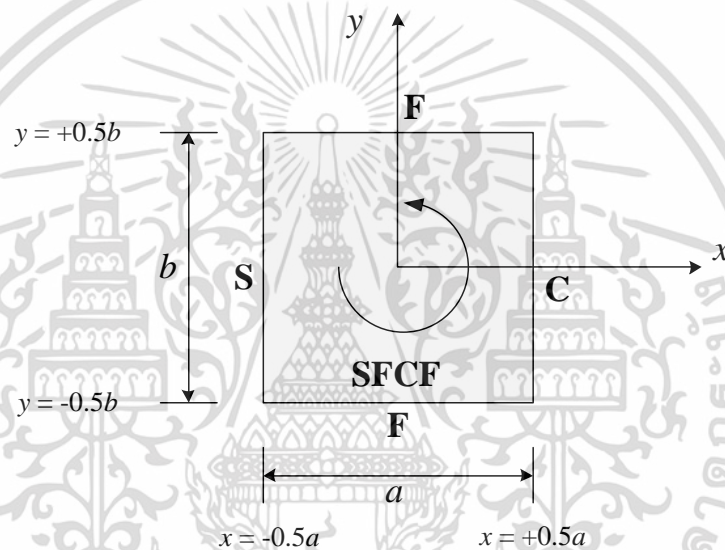
$$\text{เมื่อ } \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \text{ และ } \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

สำหรับการรองรับอย่างง่ายเป็นกรณีเดียวที่จะสามารถหาสมการของระยะการกระจัดที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของแรงภายใน ขณะที่กรณีอื่น ๆ มีความเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็นไปได้แค่เพียงเงื่อนไขขอบเขตของฟังก์ชันที่เป็นเรื่องของรูปร่างเท่านั้น หากเลือกฟังก์ชันที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขรูปร่างจะทำให้ได้รับคำตอบที่ไม่ถูกต้องและไม่มีเสถียรภาพในการคำนวณ หากเลือกฟังก์ชันที่ถูกต้องผลลัพธ์อาจได้รับการลู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องโดยใช้จำนวนเทอมการคำนวณไม่มากนัก อย่างไรก็ตามการกำหนดจุดอ้างอิงสามารถกำหนดในทำนองเดียวกับรูปที่ 4.13 และ รูปที่ 4.14 หรือจะกำหนดให้จุดอ้างอิงอยู่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบางก็ได้ ซึ่งตำแหน่งขอบเขตทั้ง 4 ด้านจะเปลี่ยนไป คือ $x = -0.5a$, $x = +0.5a$, $y = -0.5b$ และ $y = +0.5b$ ตัวอย่างฟังก์ชันระยะการกระจัดตามแนวแกน x เมื่อกำหนดให้ตำแหน่งจุดอ้างอิงอยู่ตรงกลางของโครงสร้างแผ่นบาง คือ

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{nm} \sin \alpha_n (0.5a + x) \cos \beta_m (0.5b + y)$$

โดยระยะการกระจัดตัวอื่น ๆ จะต้องเปลี่ยนให้สอดคล้องตามจุดอ้างอิงใหม่ด้วยเช่นกัน



รูปที่ 4.15 การบ่งบอกเงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางทั้ง 4 ด้าน

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกำหนดจุดอ้างอิงที่กึ่งกลางของโครงสร้างแผ่นบางและไม่ได้พิจารณาเพียงแค่เงื่อนไขขอบเขตแบบอย่างง่ายเท่านั้น (Simply supported boundary condition นิยามด้วยอักษร S) แต่ยังพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตแบบอื่น ๆ รวมด้วย นั่นคือการยึดแน่น (Clamped boundary condition นิยามด้วยอักษร C) และการรองรับแบบอิสระ (Free boundary condition นิยามด้วยอักษร F) ดังนั้นในการบ่งบอกเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้านของแผ่นบางจะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 4 ตัว ยกตัวอย่างเช่น SFCF คือ แผ่นบางที่ด้านซ้ายมือเป็นด้านที่หนึ่งรองรับแบบอย่างง่าย (S) และตัวที่สองคือด้านล่างด้วยวิธีการหมุนทวนเข็มนาฬิกาซึ่งเป็นการรองรับแบบอิสระ (F) ตัวที่สามคือด้านขวามือคือการยึดแน่น (C) ตามการหมุนเข็มนาฬิกาและตัวสุดท้ายคือด้านบนสุดคือการรองรับแบบปล่อยอิสระ (F) เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้นเกี่ยวกับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางสามารถแสดงได้จากรูปที่ 4.15 ของแผ่นบางในแต่ละด้าน

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วถึงเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้พิจารณานั้นคือ การรองรับอย่างง่าย (S) การยึดแน่น (C) และการปล่อยอิสระ (F) ซึ่งเป็นเงื่อนไขขอบเขตที่จะใช้กับโครงสร้างแผ่นบางในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นรายละเอียดของแต่ละเงื่อนไขสามารถแสดงได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การรองรับอย่างง่าย (Simply supported, S)

เงื่อนไขขอบเขตที่ $x = -0.5a$ และที่ $x = +0.5a$

$$v_0 = w_0 = \phi_y = 0$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ $y = -0.5b$ และที่ $y = +0.5b$

$$u_0 = w_0 = \phi_x = 0$$

การรองรับถูกยึดแน่น (Clamped, C)

เงื่อนไขขอบเขตที่ $x = -0.5a$ และที่ $x = +0.5a$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_y = 0$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ $y = -0.5b$ และที่ $y = +0.5b$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_y = 0$$

การรองรับแบบปล่อยอิสระ (Free, F)

เงื่อนไขขอบเขตที่ $x = -0.5a$ และที่ $x = +0.5a$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_y \neq 0$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ $y = -0.5b$ และที่ $y = +0.5b$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_y \neq 0$$

สมการของระยะกระจัดสำหรับปัญหาของแผ่นบางเป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ในรูปฟังก์ชันพหุนาม เช่นเดียวกับกรณีของคาน อย่างไรก็ตามเนื่องจากปัญหาคานเป็นปัญหาที่ไม่ซับซ้อนมากนักเมื่อเปรียบเทียบกับปัญหาของแผ่นบางดังนั้นในปัญหาของคานจึงเป็นฟังก์ชันพหุนามอย่างง่าย แต่ในกรณีของแผ่นบางจำเป็นต้องเลือกใช้ฟังก์ชันพหุนามที่มีคุณภาพต่อการคำนวณสูง ฟังก์ชันพหุนามที่มีประสิทธิภาพสูงตามที่กล่าวมานั้นมีชื่อเรียกว่าฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมชมิทต์ (Gram-Schmidt polynomials) ตามเอกสารอ้างอิง [99-102] ดังนั้นสมการระยะการกระจัดของแผ่นบางสามารถแสดงในรูปทั่วไปได้คือ

$$u_0(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n U_{ij}(t) N_i^u(x) N_j^u(y) \quad (4.94)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij}(t) N_i^v(x) N_j^v(y) \quad (4.95)$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij}(t) N_i^w(x) N_j^w(y) \quad (4.96)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}(t) N_i^{\phi_x}(x) N_j^{\phi_x}(y) \quad (4.97)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\phi_y(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{ij}(t) N_i^{\phi_y}(x) N_j^{\phi_y}(y) \quad (4.98)$$

โดยที่ $N_i^{\phi}(x)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $N_j^{\phi}(y)$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ โดยที่ $\phi = u, v, w, \phi_x, \phi_y$ เพื่อที่จะทำให้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้นคือ ตัวแปร ϕ เป็นตัวแทนของระยะการกระจัดตัวใด ๆ ที่ต้องการพิจารณาและ $N_i^{\phi}(x)$ คือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ตามแนวแกน x ในทำนองเดียวกัน $N_j^{\phi}(y)$ คือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ตามแนวแกน y โดยฟังก์ชันรูปร่างเหล่านี้จะอยู่ในรูปแบบฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมซิมิตต์ โดยมีวิธีการสร้างตามหลักการต่อไปนี้

- กำหนดเทอมแรกฟังก์ชัน $N_1^{\phi}(x)$ และ $N_1^{\phi}(y)$ ในที่นี้จะพิจารณาตัวใดตัวหนึ่งเป็น $N_1(s)$ เพื่อให้ง่ายต่อการใช้สัญลักษณ์ เนื่องจากกระบวนการมีความเหมือนกันต่อการพิจารณาที่ด้าน x หรือด้าน y ดังนั้นจึงใช้ ตัวแปร s เป็นตัวแทนของแกน
- นำเทอมแรกที่กำหนดไว้ $N_1(s)$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตที่ต้องการพิจารณามาใช้ในกระบวนการทำซ้ำ (Loop) ตามสมการต่อไปนี้เพื่อหาเทอมตัวถัดไป

$$\begin{aligned} N_2(s) &= (s - \zeta_2) N_1(s) \\ N_k(s) &= (s - \zeta_k) N_{k-1}(s) - \eta_k N_{k-2}(s), \quad k \geq 3 \end{aligned} \quad (4.99)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \frac{\int_c^d s N_{k-1}^2(s) ds}{\int_c^d N_{k-1}^2(s) ds}, \quad k \geq 2 \\ \eta_k &= \frac{\int_c^d s N_{k-1}(s) N_{k-2}(s) ds}{\int_c^d N_{k-2}^2(s) ds}, \quad k \geq 3 \end{aligned}$$

เมื่อ $c \leq s \leq d$ คือ ช่วงที่ต้องการพิจารณา ในที่นี้คือแผ่นบางที่มีจุดกำเนิดแกนอยู่กึ่งกลางแผ่นบางดังนั้น $-0.5a \leq x \leq 0.5a$ หรือ $-0.5b \leq y \leq 0.5b$ ซึ่ง $s = \{x, y\}$

- ใช้เทอมทั้งหมดที่ได้จากกระบวนการที่กล่าวมาข้างต้นโดยนำไปแทนค่าในสมการระยะการกระจัดตามจำนวนเทอมที่ต้องการ การใช้จำนวนเทอมมากจะทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องมากขึ้นแต่เวลาการคำนวณจะสูงขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นจำนวนเทอมที่เหมาะสมและให้ค่าที่ถูกต้องซึ่งใช้เวลาตามความเหมาะสมจะศึกษาในช่วงของการลู่ออกของคำตอบต่อไป (Convergence study)

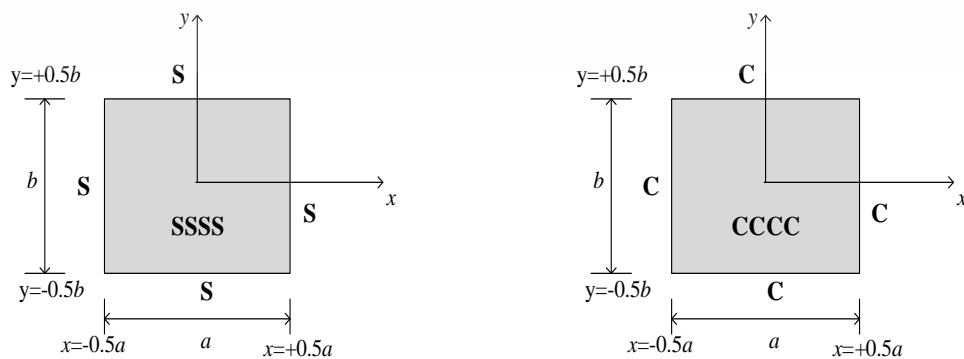
ตัวอย่างการกำหนดเทอมเริ่มต้นของแผ่นบางที่มีการรองรับอย่างง่ายทั้ง 4 ด้าน (SSSS) และแบบยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน (CCCC) สามารถแสดงได้ตามตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 การกำหนดพจน์แรก(ฟังก์ชันรูปร่าง)ของแผ่นบางโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS และ CCCC

B.C.	SSSS	CCCC
$N_1^u(x)$	1	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^u(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^v(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^v(y)$	1	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^w(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^w(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^{\phi_x}(x)$	1	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^{\phi_x}(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^{\phi_y}(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^{\phi_y}(y)$	1	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$

สำหรับกรณีการรองรับแบบอื่น ๆ นั้นสามารถทำได้ในรูปแบบเดียวกันหรือใช้หลักการเดียวกันกับที่แสดงในตัวอย่างในตารางที่ 4.1 แต่ต้องพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตให้สอดคล้องกับการการรองรับที่ต้องการ เพราะฉะนั้นสามารถที่จะกล่าวได้ว่า พจน์แรกคือพจน์ที่สำคัญในการกำหนดเงื่อนไขหาทสมมุติพจน์แรกผิด ก็จะทำให้ได้รับคำตอบที่ไม่ตรงตามเงื่อนไข โดยที่พจน์ลำดับถัดไปจะเป็นไปตามวิธีการของเกรนชมิตต์และมีความสัมพันธ์โดยตรงกับพจน์แรก

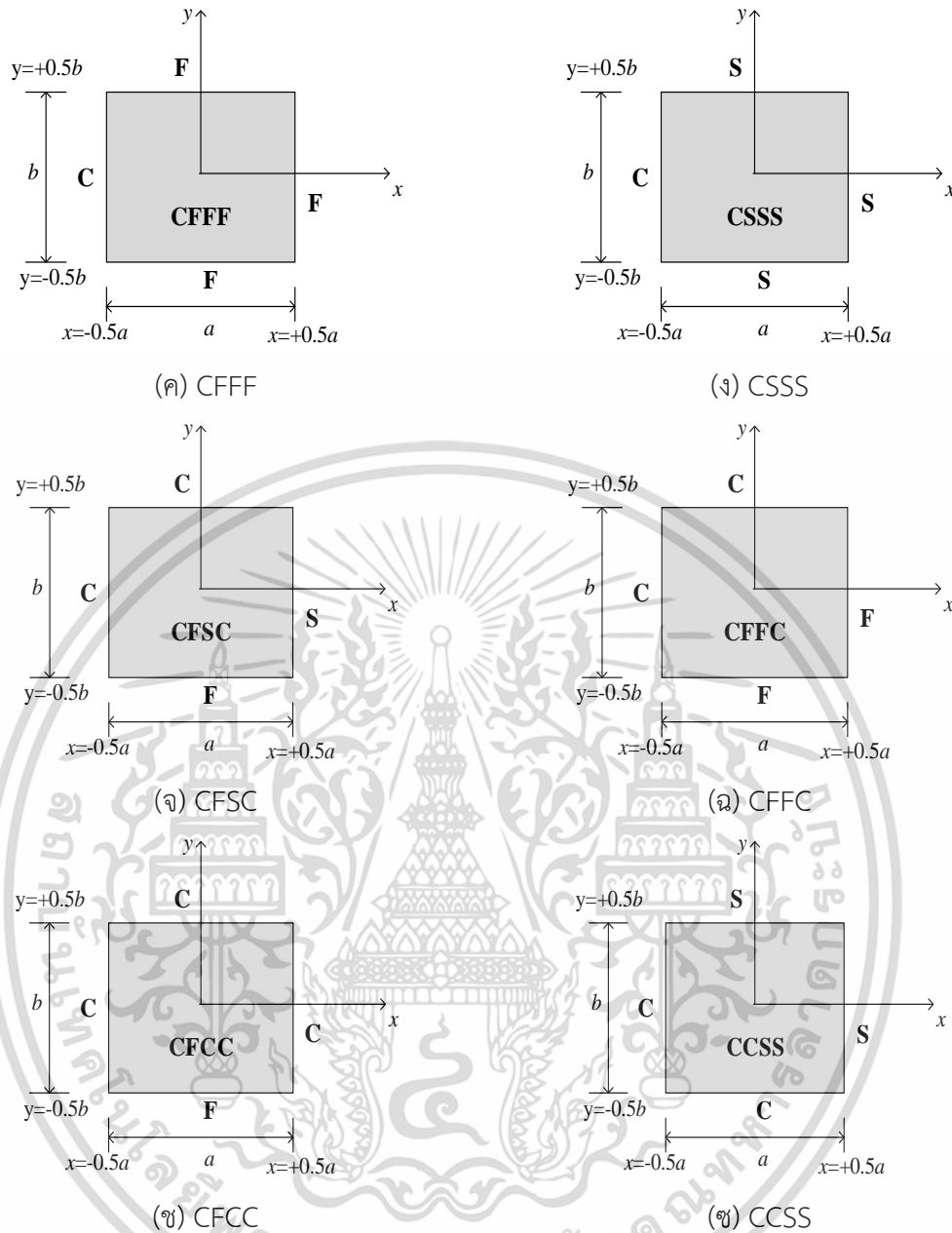
กรณีเงื่อนไขขอบเขตที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สามารถแสดงได้ตามรูปที่ 4.16



(ก) SSSS

(ข) CCCC

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.16 แผ่นบางที่มีการรองรับแบบต่าง ๆ

เมื่อได้สมการระยะการกระจัดทั้งหมดตามกระบวนการของเกรมชนิดต์ จากนั้นนำไปแทนลงในสมการที่ 4.94 – 4.98 หลังจากนั้นไปแทนลงในสมการผลรวมของพลังงานทั้งหมด (Π) ตามปัญหาที่ต้องการพิจารณาและเริ่มกระบวนการหาพลังงานต่ำสุดที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรไม่ทราบค่าตามที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้โดยใช้สมการของลากรางจ์ (Lagrange equation method) ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_{ij}} = 0 \quad (4.100)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $q_{ij} = \{U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), X_{ij}(t), Y_{ij}(t)\}$ สามารถแสดงรายละเอียดได้คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial U_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{U}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial V_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{V}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial W_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{W}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{X}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial Y_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{Y}_{ij}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

หลังจากผ่านกระบวนการของลากรางจ์จะทำให้ได้รับระบบสมการต่อไปนี้ในรูปเมทริกซ์

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\phi_x, u} & K^{\phi_y, u} \\ & K^{vv} & K^{wv} & K^{\phi_x, v} & K^{\phi_y, v} \\ & & K^{ww} & K^{\phi_x, w} & K^{\phi_y, w} \\ \text{sym} & & & K^{\phi_x, \phi_x} & K^{\phi_y, \phi_x} \\ & & & & K^{\phi_y, \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\phi_x, u} & M^{\phi_y, u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\phi_x, v} & M^{\phi_y, v} \\ & & M^{ww} & M^{\phi_x, w} & M^{\phi_y, w} \\ \text{sym} & & & M^{\phi_x, \phi_x} & M^{\phi_y, \phi_x} \\ & & & & M^{\phi_y, \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{W} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.102)$$

โดยที่ \mathbf{K} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็ง (Stiffness matrix)

\mathbf{M} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวล (Mass matrix)

\mathbf{F} คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกแบบพลวัตใดๆ (Force vector)

รายละเอียดของสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์และเวกเตอร์สามารถได้ดังต่อไปนี้
รายละเอียดของเมทริกซ์ \mathbf{K} แสดงดังนี้

$$\begin{aligned} K_{ijmn}^{uu} &= A_{11} P_{im}^{uu11} Q_{jn}^{uu00} + A_{66} P_{im}^{uu00} Q_{jn}^{uu11} \\ K_{ijmn}^{vu} &= A_{12} P_{im}^{vu01} Q_{jn}^{vu10} + A_{66} P_{im}^{vu10} Q_{jn}^{vu01} \\ K_{ijmn}^{vv} &= A_{22} P_{im}^{vv00} Q_{jn}^{vv11} + A_{66} P_{im}^{vv11} Q_{jn}^{vv00} \\ K_{ijmn}^{wu} &= K_{ijmn}^{wv} = 0 \\ K_{ijmn}^{wv} &= A_{44} P_{im}^{wv00} Q_{jn}^{wv11} + A_{55} P_{im}^{wv11} Q_{jn}^{wv00} \\ K_{ijmn}^{\phi_x, u} &= B_{11} P_{im}^{\phi_x, u11} Q_{jn}^{\phi_x, u00} + B_{66} P_{im}^{\phi_x, u00} Q_{jn}^{\phi_x, u11} \end{aligned} \quad (4.103)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
K_{ijmn}^{\phi_x v} &= B_{12} P_{im}^{\phi_x v10} Q_{jn}^{\phi_x v01} + B_{66} P_{im}^{\phi_x v01} Q_{jn}^{\phi_x v10} \\
K_{ijmn}^{\phi_x w} &= A_{55} P_{im}^{\phi_x w01} Q_{jn}^{\phi_x w00} \\
K_{ijmn}^{\phi_x \phi_x} &= D_{11} P_{im}^{\phi_x \phi_x 11} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00} + A_{55} P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00} + D_{66} P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 11} \\
K_{ijmn}^{\phi_y u} &= B_{12} P_{im}^{\phi_y u01} Q_{jn}^{\phi_y u10} + B_{66} P_{im}^{\phi_y u10} Q_{jn}^{\phi_y u01} \\
K_{ijmn}^{\phi_y v} &= B_{22} P_{im}^{\phi_y v00} Q_{jn}^{\phi_y v11} + B_{66} P_{im}^{\phi_y v11} Q_{jn}^{\phi_y v00} \\
K_{ijmn}^{\phi_y w} &= A_{44} P_{im}^{\phi_y w00} Q_{jn}^{\phi_y w01} \\
K_{ijmn}^{\phi_y \phi_x} &= D_{12} P_{im}^{\phi_y \phi_x 01} Q_{jn}^{\phi_y \phi_x 10} + D_{66} P_{im}^{\phi_y \phi_x 10} Q_{jn}^{\phi_y \phi_x 01} \\
K_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} &= D_{22} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 11} + A_{44} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} + D_{66} P_{im}^{\phi_y \phi_y 11} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

รายละเอียดของการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง P_{im}^{pqrs} และ Q_{jn}^{pqrs} สามารถดูได้จากภาคผนวก ก
รายละเอียดของเมทริกซ์ M สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
M_{ijmn}^{uu} &= I_0 P_{im}^{uu00} Q_{jn}^{uu00}, M_{ijmn}^{vu} = 0, M_{ijmn}^{vv} = I_0 P_{im}^{vv00} Q_{jn}^{vv00}, M_{ijmn}^{wu} = 0, \\
M_{ijmn}^{wv} &= 0, M_{ijmn}^{ww} = I_0 P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww00}, M_{ijmn}^{\phi_x u} = I_1 P_{im}^{\phi_x u00} Q_{jn}^{\phi_x u00}, M_{ijmn}^{\phi_x v} = 0 \\
M_{ijmn}^{\phi_x w} &= 0, M_{ijmn}^{\phi_x \phi_x} = I_2 P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00}, M_{ijmn}^{\phi_y u} = 0, M_{ijmn}^{\phi_y v} = 0 \\
M_{ijmn}^{\phi_y v} &= I_1 P_{im}^{\phi_y v00} Q_{jn}^{\phi_y v00}, M_{ijmn}^{\phi_y w} = 0, M_{ijmn}^{\phi_y \phi_x} = 0, M_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} = I_2 P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

รายละเอียดของเมทริกซ์ F กรณี 3 แแรง แสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= -P_1(t) N_i(x_{p1}) N_j(0) && \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\
F_{ij} &= -P_1(t) N_i(x_{p1}) N_j(0) - P_2(t) N_i(x_{p2}) N_j(0) && \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\
F_{ij} &= -P_1(t) N_i(x_{p1}) N_j(0) - P_2(t) N_i(x_{p2}) N_j(0) \\
&\quad - P_3(t) N_i(x_{p3}) N_j(0) && \text{if } t_2 \leq t < t_3 = \frac{L}{v_p} \\
F_{ij} &= -P_2(t) N_i(x_{p2}) N_j(0) - P_3(t) N_i(x_{p3}) N_j(0) && \text{if } t_3 \leq t < t_3 + t_1 \\
F_{ij} &= -P_3(t) N_i(x_{p3}) N_j(0) && \text{if } t_3 + t_1 \leq t < t_3 + t_2
\end{aligned} \tag{4.105}$$

โดยขนาดของเมทริกซ์ K และ M จะขึ้นอยู่กับจำนวนพจน์ของระยะกระจัดที่ใช้ โดยจำนวนพจน์กำหนดตามที่ใช้ในแกน x (m) และแกน y (n) ซึ่งขนาดมีค่าเท่ากับ $5(m \times n) \times 5(m \times n)$ ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดจำนวนพจน์ในแนวแกน x และแกน y เท่ากับ 10 ดังขนาดของเมทริกซ์จะมีค่า 500×500 สำหรับกรณีวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางแบบอิสระ เวกเตอร์ของแรงภายนอกไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาและสมมติให้การสั่นสะเทือนเป็นไปแบบฮาร์มอนิก (Harmonic response) ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า $U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), X_{ij}(t)$ และ $Y_{ij}(t)$ สำหรับค่า $i = 1, 2,$

3... m และค่า $j = 1, 2, 3...n$ สามารถแสดงได้ในรูปต่อไปนี้

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} U_{ij}(t) \\ V_{ij}(t) \\ W_{ij}(t) \\ X_{ij}(t) \\ Y_{ij}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{V}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{W}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{X}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{Y}_{ij} e^{i\omega t} \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

โดยที่ ω คือความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบาง เมื่อแทนค่าสมการนี้ไปยังสมการที่ 4.102 จะทำให้ได้สมการการสั่นสะเทือนแบบอิสระในรูปสมการที่ 4.107 สังเกตว่าระบบของสมการการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระก็จะจะเป็นแบบปัญหาการหาค่าเจาะจง ซึ่งการแก้ปัญหาสมการควบคุมที่แสดงไว้ในสมการที่ 4.107 ก็เหมือนกับการปัญหาของโครงสร้างคานในกรณีการสั่นสะเทือนแบบอิสระซึ่งได้มีการอธิบายไว้ในบทที่ 3

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\phi_x u} & K^{\phi_y u} \\ K^{vv} & K^{wv} & K^{\phi_x v} & K^{\phi_y v} \\ & K^{ww} & K^{\phi_x w} & K^{\phi_y w} \\ \text{sym} & & K^{\phi_x \phi_x} & K^{\phi_y \phi_x} \\ & & & K^{\phi_x \phi_y} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\phi_x u} & M^{\phi_y u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\phi_x v} & M^{\phi_y v} \\ & & M^{ww} & M^{\phi_x w} & M^{\phi_y w} \\ \text{sym} & & & M^{\phi_x \phi_x} & M^{\phi_y \phi_x} \\ & & & & M^{\phi_x \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \\ \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Forced vibration) จะแตกต่างจากแบบอิสระเพราะต้องวิเคราะห์โดยใช้การอินทิเกรตเทียบกับเวลา วิธีการที่เลือกใช้คืออินทิเกรต (Newmarks time-integration method) กระบวนการอินทิเกรตแบบนิวมาร์คจะมีหลักการสอดคล้องกับปัญหาคานที่มีการอธิบายไปในบทที่ 3

บทที่ 5

ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม

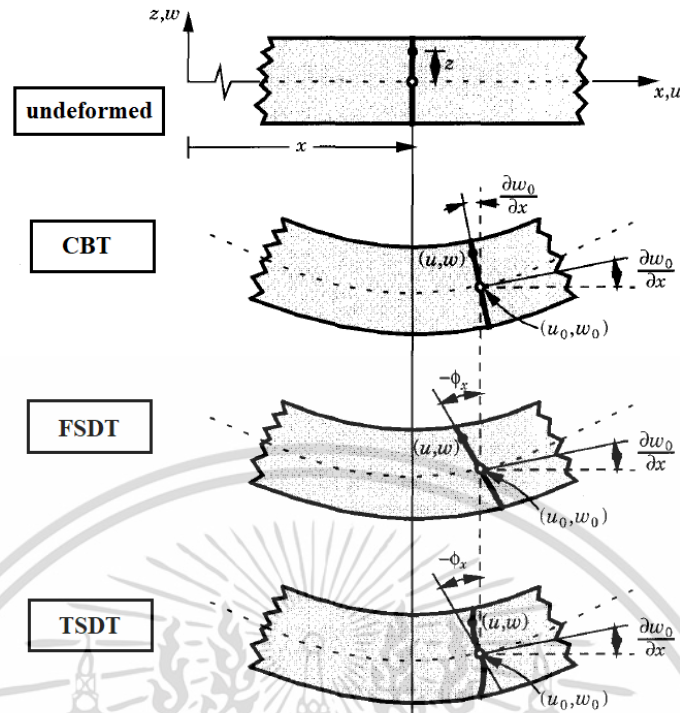
5.1 บทนำ

ความสำคัญของปัญหาที่เกี่ยวข้องกับลักษณะของแรงที่มากระทำต่อคานและแผ่นบาง ซึ่งได้กล่าวมาจากบทก่อนหน้านี้ แต่ประเด็นการวิจัยอีกส่วนหนึ่งที่มีความสำคัญด้วยเช่นกันคือการพัฒนาทฤษฎีใหม่เพื่ออธิบายพฤติกรรมของคานและแผ่นบาง เมื่อมีการเสียรูป (Deformation) ทฤษฎีคานและแผ่นบางจะมีหลักการที่คล้ายคลึงกันในเรื่องของทฤษฎีการเสียรูป แต่ปัญหาคานจะเป็นปัญหาหนึ่งมิติแต่ในปัญหาแผ่นบางจะเป็นแบบสองมิติและมีส่วนประกอบของความเค้นและความเครียดให้ต้องคำนึงถึงมากกว่า รูปที่ 5.1 เป็นรูปที่แสดงถึงความแตกต่างของสมมติฐานของทฤษฎีที่ใช้กับคานและแผ่นบางใน 3 ทฤษฎีที่นิยมใช้กันมากที่สุด นั่นคือ

➤ ทฤษฎีแบบดั้งเดิมทั้งโครงสร้างคาน (Classical beam theory, CBT) หรือโครงสร้างแผ่นบาง (Classical plate theory, CPT) ทฤษฎีนี้มีข้อดีคือความซับซ้อนไม่มากนักและใช้ได้กับโครงสร้างที่มีความบาง เช่น แผ่นบาง ๆ ถ้าหากโครงสร้างมีความหนาจะทำให้เกิดผลลัพธ์ที่ผิดพลาดสูงกว่าทฤษฎีอื่น ๆ ที่พัฒนาขึ้นมาใหม่

➤ ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (First-order shear deformation, FSDT) เป็นทฤษฎีที่สามารถใช้ได้ทั้งโครงสร้างคานและแผ่นบาง ซึ่งจะครอบคลุมถึงอิทธิพลของการเฉือนตามแนวตัดขวางร่วมด้วยเพื่ออธิบายพฤติกรรมการเสียรูป ดังนั้นระนาบหน้าตัดภายหลังการเสียรูปไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับเส้นแนวแกนกลางอีกต่อไปเหมือนกับการกำหนดในทฤษฎีดั้งเดิม อย่างไรก็ตามในการใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง จำเป็นต้องใช้ค่าแก้ไขเพื่อความถูกต้องของการเฉือน (Shear correction factor) ร่วมด้วย ซึ่งค่าแก้นี้มีค่าเท่ากับ $5/6$ สำหรับโครงสร้างที่ทำจากวัสดุแบบไอโซทรอปิก แต่หากเป็นวัสดุคอมโพสิตค่าแก้จำเป็นต้องอาศัยการคำนวณจากการสมดุลแรงเฉือนที่แต่ละชั้นของการเสริมแรงซึ่งมีความซับซ้อนอยู่พอสมควร อย่างไรก็ตามการใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งจึงเหมาะสมมากกับการอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างคานและแผ่นบางที่มีความบางและความหนาได้อย่างถูกต้อง

➤ ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม (Third-order shear deformation, TSDT) เป็นทฤษฎีที่พัฒนามาจากทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง แต่การใช้งานไม่จำเป็นต้องใช้ค่าแก้ไขของการเฉือน ดังนั้นทฤษฎีนี้จึงได้รับความนิยมสำหรับการประยุกต์ใช้อธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างคานและแผ่นบางที่มีความบางและความหนาและทำมาจากวัสดุคอมโพสิต สมมติฐานของการเสียรูปคือระนาบหน้าตัดไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับแนวระนาบกึ่งกลางและสามารถแสดงออกมาในรูปเส้นโค้งพาราโบลา ตามความแข็งอ่อนของพื้นที่หน้าตัดได้



รูปที่ 5.1 การเปรียบเทียบการเสีรูปของทฤษฎีที่นิยมใช้กับโครงสร้างคานและแผ่นบาง[96]

จากที่กล่าวมาถึงลักษณะและการใช้งานของทฤษฎีทั้งสามที่ได้รับความนิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย โดยลักษณะและสมมุติฐานของการเสีรูปได้แสดงไว้ตามรูปที่ 5.1 ทฤษฎีใด ๆ ที่จะพัฒนาขึ้นมาใหม่ที่มีอันดับสูงกว่าอันดับสามอาจไม่มีความจำเป็นเพราะจะส่งผลแตกต่างที่ไม่มากนักเมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามและอาจต้องใช้เวลาและความซับซ้อนสูงกว่ามาก ๆ จึงอาจจะเป็นทฤษฎีที่ไม่เหมาะสมต่อการใช้งาน

ในบทนี้จะประกอบไปด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสำหรับการสร้างสมการควบคุมระบบของโครงสร้างคานและแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุคอมโพสิตและสามารถประยุกต์ใช้ได้โดยตรงกับโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้อย่างมีประสิทธิภาพ ปัญหาที่จะพิจารณากับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามคือการสันสะเทือนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ เพื่อที่ทราบถึงผลลัพธ์และการตอบสนองของทั้งคานและแผ่นบางเมื่อมีการกระทำจากแรงหรือโหลดแบบพลวัตซึ่งเป็นข้อมูลที่สำคัญต่อการออกแบบโครงสร้างทางวิศวกรรมที่ทำมาจากวัสดุคอมโพสิตสมัยใหม่ได้

5.2 ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสำหรับโครงสร้างคานแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

5.2.1 สมการพลังงาน

พิจารณาการกระจัดที่สร้างมาจากทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม ซึ่งสมการของการกระจัดสามารถแสดงได้ดังนี้ [96]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi(x, t) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (5.1)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (5.2)$$

ในสมการที่ 5.1 และสมการที่ 5.2 สามารถนิยามตัวแปรที่เกี่ยวข้องได้คือ u_0 คือระยะกระจัดตามแนวแกนความยาวคานและ w_0 คือระยะการโก่งหรือระยะกระจัดตามแนว แกน z ส่วน $\phi_x = \phi$ คือมุมของพื้นที่หน้าตัดภายหลังการตัดโค้งและ t คือ เวลา

จากสมการระยะกระจัดสามารถที่จะสร้างสมการความเครียดตั้งฉาก (ε_{xx}) และความเครียดเฉือน (γ_{xz}) ของปัญหาคานได้ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} + z^3\varepsilon_{xx}^{(3)} \quad (5.3)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}^{(0)} + z^2\gamma_{xz}^{(2)}, \quad (5.4)$$

โดยที่รายละเอียดของการหาความเครียดแสดงได้ดังสมการที่ 5.5 – 5.6 ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{xx}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ -\frac{4}{h^2} \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของปัญหาคานคอมโพสิตสามารถแสดงได้อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx} \quad (5.7)$$

$$\tau_{xz} = G(z)\gamma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \quad (5.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเมื่อโครงสร้างคานอยู่ภายใต้แรงกระทำใด ๆ จะทำให้เกิดระยะการกระจัดซึ่งเป็นผลทำให้เกิดพลังงานภายใน โดยพลังงานภายใน โดยจะแสดงอยู่ในรูปความเค้นและความเครียดดังนี้

$$U_s = \frac{b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dz dx \quad (5.9)$$

แทนค่ารายละเอียดของความเค้นและความเครียดที่ได้จากทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามไปยังสมการพลังงานภายใน (สมการที่ 5.9) จะได้สมการพลังงานภายในดังแสดงต่อไปนี้

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 2c_1 E_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2c_1 E_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2c_1 F_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 2c_1 F_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + c_1^2 H_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + 2c_1^2 H_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + c_1^2 H_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + A_{55} \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - 2c_2 D_{55} \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + F_{55} c_2^2 \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (5.10)$$

โดยที่

A_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึง (Extensional stiffness)

B_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึงและการดัดแบบผสม (Extensional-bending stiffness)

D_{11} คือค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดัด (bending stiffness)

E_{11}, F_{11} และ H_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งอันดับสูง (Higher-order stiffness components for normal stress)

A_{55} คือค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการเฉือน (shear stiffness)

ค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้สำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

D_{55} และ F_{55} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการเฉือนอันดับสูง (Higher-order stiffness components for shear stress)

ค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้สำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)}(z) [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dz \quad (5.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$[A_{55}, D_{55}, F_{55}] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \frac{E^{(i)}(z)}{2(1+\nu)} [1, z^2, z^4] dz \quad (5.12)$$

ดังที่กล่าวมาแล้วตอนต้น ค่าแก้ของการเฉือน (Shear correction factor) จะไม่ถูกนำมาพิจารณาในเมื่อใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม แต่ถ้าใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง จำเป็นต้องใช้ค่าแก้ของการเฉือนเพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้อง

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานทั้งแบบอิสระและแบบบังคับนั้น จำเป็นต้องพิจารณาพลังงานจลน์ของคานซึ่งมีความสัมพันธ์กับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม ตามสมการต่อไปนี้

$$U_k = \frac{b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx \quad (5.13)$$

เมื่อใช้สมการระยะการกระจัดตามทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามจะสามารถเขียนสมการพลังงานได้คือ

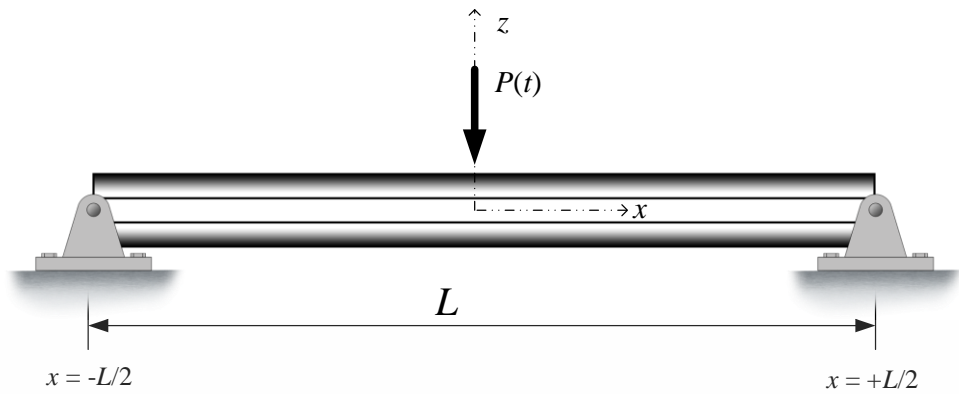
$$\begin{aligned} U_k = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[I_0 \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right) + 2I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right. \\ \left. - 2c_1 I_3 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} - 2c_1 I_3 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} - 2c_1 I_4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right. \\ \left. - 2c_1 I_4 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + 2c_1^2 I_6 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right. \\ \left. + c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \quad (5.14) \end{aligned}$$

โดยที่ I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 และ I_6 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของคาน สามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$[I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)}(z) [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dz \quad (5.15)$$

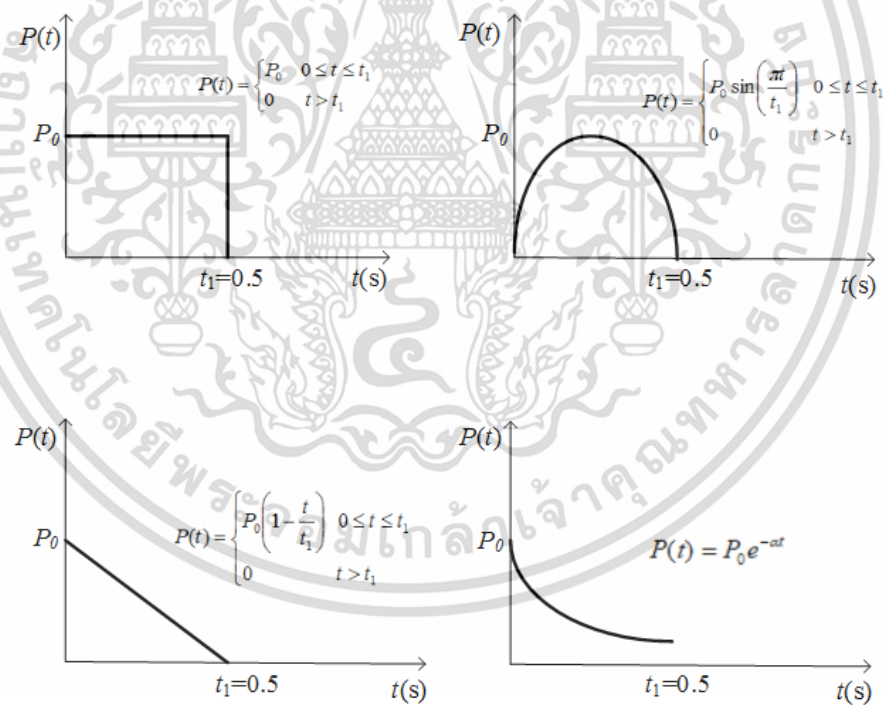
การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระสามารถใช้พลังงานที่กล่าวมาข้างต้นได้ แต่ถ้าหากต้องการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับ จำเป็นต้องพิจารณาพลังงานภายนอกที่มากระทำกับโครงสร้างคาน ยกตัวอย่างเช่น แรงกระทำ ณ ตำแหน่งตามช่วงเวลาใด ๆ แสดงไว้ในรูปที่ 5.2 สังเกตได้ว่าระบบจุดอ้างอิงของแกนเกิดอยู่ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางคาน เงื่อนไขขอบเขตด้านซ้ายคือตำแหน่ง $x = -L/2$ และด้านขวา คือ $x = +L/2$ และสมการพลังงานทั้งหมดในบทนี้ก็สอดคล้องกับการกำหนดในบทนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.2 คานแซนดิวซ์จากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้โหลดพลวัตที่จุดใดหนึ่งบนคาน

หากพิจารณา 4 ประเภทของแรงพลวัตที่กระทำตำแหน่งหนึ่งตำแหน่งใด ๆ บนโครงสร้างคานซึ่งสามารถแสดงได้ตามรูปที่ 5.3 เมื่อ P_0 คือขนาดแรงสูงสุด และ $P(t)$ ขนาดแรง ณ เวลาใด ๆ อาจเพิ่มขึ้นหรือลดลงตามฟังก์ชันคณิตศาสตร์ที่ตรงกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์



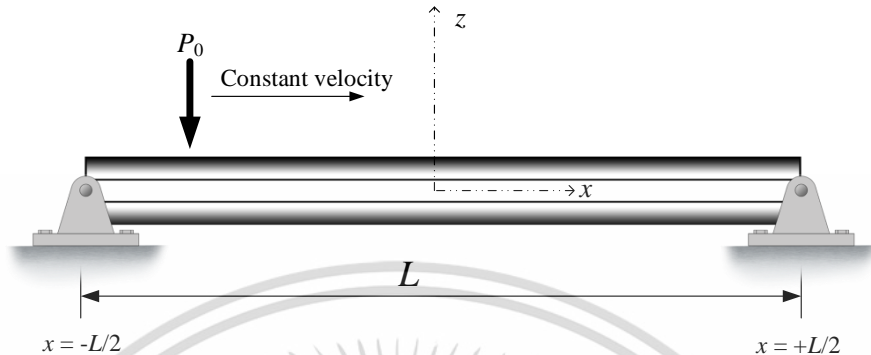
รูปที่ 5.3 แสดงลักษณะขนาดของแรงเทียบกับเวลาแต่ละแบบ

คดยพลังงานภายนอกเนื่องจากการกระทำของแรงพลวัตประเภทนี้สามารถแสดงได้ดังนี้

$$U_{ex} = -P(t)w_0(x_p) \tag{5.16}$$

โดยที่ x_p คือ ตำแหน่งที่แรงกระทำในกรณีนี้คือ $x_p = 0$ (ตามรูปที่ 5.2) เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้ใช้เพื่อการศึกษาเท่านั้น มิฉะนั้นผู้ใดเห็นนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลำดับถัดมาพิจารณาโครงสร้างคานเมื่ออยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ด้วยความเร็วตามแนวความยาวของคาน ในการวิเคราะห์เรื่องการสั่นสะเทือนแบบบังคับของคานภายใต้การกระทำของแรงประเภทนี้สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 คานแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

จากรูปที่ 5.4 แรงจะเคลื่อนที่จากปลายคานด้านซ้ายไปยังด้านขวาด้วยความเร็วคงที่ (\$v_p\$) ดังนั้นสมการพลังงานภายนอกเนื่องจากแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ คือ

$$U_{EX} = - \int_{-L/2}^{L/2} P_0 \delta(x - x_p) w_0(x, t) dx \tag{5.17}$$

เมื่อ \$x_p = -L/2 + v_p t\$ โดยระยะทางอยู่ในช่วง \$-L/2 \le x_p \le L/2\$ และเวลาที่พิจารณาอยู่ในช่วง \$0 \le t \le L/v_p\$ ส่วนสัญลักษณ์ \$\delta(\cdot)\$ คือ the Dirac delta function

จากสมการพลังงานทั้งหมดที่กล่าวข้างต้นสามารถนำมาเขียนเป็นสมการพลังงานรวมได้ดังนี้

$$\Pi = U_s - U_k - U_{EX} \tag{5.18}$$

ในกรณีโครงสร้างคานอยู่ภายใต้การกระทำจากแรงเคลื่อนที่หลาย ๆ แรงที่จะสามารถใช้สมการพลังงานภายนอกตามที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 ก่อนหน้านี้

5.2.2 ระเบียบวิธีของริทต์

ในส่วนของการวิเคราะห์ปัญหาของคานคอมโพสิตด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามนั้น สามารถนำเอาวิธีการของริทต์มาประยุกต์ใช้กับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม ซึ่งก็เหมือนกับระเบียบวิธีของริทต์ที่ประยุกต์ใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งซึ่งได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 โดยระเบียบวิธีของริทต์จะสมมุติฟังก์ชันใด ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับปัญหาเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial functions) ซึ่งสามารถเขียนในรูปอนุกรมได้ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{cases} u_0(x,t) = \sum_{j=1}^J A_j(t) \Xi_j^u(x) \\ w_0(x,t) = \sum_{j=1}^J B_j(t) \Xi_j^w(x) \\ \phi(x,t) = \sum_{j=1}^J C_j(t) \Xi_j^\phi(x) \end{cases} \quad (5.19)$$

จะสังเกตได้ว่าในสมการของระยะกระจัดจะมีความสัมพันธ์กับตัวสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า (Unknown coefficients) $A_j(t)$, $B_j(t)$ และ $C_j(t)$ ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตของคานแต่ละแบบ ส่วนฟังก์ชันรูปร่างของระยะการกระจัด $\Xi_j^u(x)$, $\Xi_j^w(x)$ และ $\Xi_j^\phi(x)$ จะเป็นไปตามประเภทของเงื่อนไขขอบเขตที่ต้องการซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 ฟังก์ชันรูปร่างของโครงสร้างคานที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ

B.C.	$\Xi_j^u(x)$	$\Xi_j^w(x)$	$\Xi_j^\phi(x)$
C - C	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$
C - H	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$
H - H	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	x^{m-1}

จากตารางที่ 5.1 จะได้เงื่อนไขขอบเขตดังนี้

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตที่ } x = -\frac{L}{2} \begin{cases} u_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \text{ และที่ } x = +\frac{L}{2} \begin{cases} u_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-H

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตที่ } x = -\frac{L}{2} \begin{cases} u_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \text{ และที่ } x = +\frac{L}{2} \begin{cases} u_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ \phi \neq 0 \end{cases}$$

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบ H-H

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตที่ } x = -\frac{L}{2} \begin{cases} u_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ \phi \neq 0 \end{cases} \text{ และที่ } x = +\frac{L}{2} \begin{cases} u_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ \phi \neq 0 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ตัวอักษร C คือการยึดแน่น (Clamped boundary condition) และตัวอักษร H คือ หมุดยึด (Hinged boundary condition)

ในกรณีเดียวกันกับบทที่ผ่านมา แทนค่าระยะกระจัดของสมการที่ 5.19 ลงในสมการผลรวมพลังงานทั้งหมด (Π) ตามปัญหาที่ต้องการพิจารณาและเริ่มกระบวนการหาพลังงานต่ำสุดที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรไม่ทราบค่าดังกล่าว โดยประยุกต์ใช้สมการของลากรางจ์ (Lagrange equation method) ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (5.20)$$

โดยที่ $q_j = \{A_j(t), B_j(t), C_j(t)\}$ และสามารถแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{A}_j} = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{B}_j} = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{C}_j} = 0 \quad (5.23)$$

กรณีนี้จะพิจารณาเพียงแค่การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับ ซึ่งผลลัพธ์เมื่อผ่านกระบวนการของลากรางจ์และจะทำให้ได้ระบบสมการต่อไปนี้ในรูปเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \\ \ddot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

โดยที่ \mathbf{K} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็งของคาน (Stiffness matrix)

\mathbf{M} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวลของคาน (Mass matrix)

\mathbf{F} คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกแบบพลวัตใดๆ (Force vector)

ซึ่งรายละเอียดของสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์และเวกเตอร์แสดงได้ดังนี้

สมาชิกในเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็งของคาน (\mathbf{K})

$$K_{jm}^{11} = A_{11} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial \Xi_j^u}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^u}{\partial x} dx \quad (5.25)$$

$$K_{jm}^{12} = -c_1 E_{11} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial \Xi_j^u}{\partial x} \frac{\partial^2 \Xi_m^w}{\partial x^2} dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
K_{jm}^{13} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(B_{11} \frac{\partial \Xi_j^u}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^\phi}{\partial x} - c_1 E_{11} \frac{\partial \Xi_j^u}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^\phi}{\partial x} \right) dx \\
K_{jm}^{21} &= -c_1 E_{11} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 \Xi_j^w}{\partial x^2} \frac{\partial \Xi_m^u}{\partial x} dx \\
K_{jm}^{22} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(c_1^2 H_{11} \frac{\partial^2 \Xi_j^w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Xi_m^w}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} - 2c_2 D_{55} \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + c_2^2 F_{55} \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} \right) dx \quad (5.25) \\
K_{jm}^{23} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(c_1^2 H_{11} \frac{\partial^2 \Xi_j^w}{\partial x^2} \frac{\partial \Xi_m^\phi}{\partial x} - c_1 F_{11} \frac{\partial^2 \Xi_j^w}{\partial x^2} \frac{\partial \Xi_m^\phi}{\partial x} + A_{55} \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \Xi_m^\phi \right. \\
&\quad \left. - 2c_2 D_{55} \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \Xi_m^\phi + c_2^2 F_{55} \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \Xi_m^\phi \right) dx \\
K_{jm}^{31} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(B_{11} \frac{\partial \Xi_j^\phi}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^u}{\partial x} - c_1 E_{11} \frac{\partial \Xi_j^\phi}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^u}{\partial x} \right) dx \\
K_{jm}^{32} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(c_1^2 H_{11} \frac{\partial \Xi_j^\phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Xi_m^w}{\partial x^2} - c_1 F_{11} \frac{\partial \Xi_j^\phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Xi_m^w}{\partial x^2} + A_{55} \Xi_j^\phi \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. - 2c_2 D_{55} \Xi_j^\phi \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} + c_2^2 F_{55} \Xi_j^\phi \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} \right) dx \\
K_{jm}^{33} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(D_{11} \frac{\partial \Xi_j^\phi}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^\phi}{\partial x} - 2c_1 F_{11} \frac{\partial \Xi_j^\phi}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^\phi}{\partial x} + c_1^2 H_{11} \frac{\partial \Xi_j^\phi}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^\phi}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + A_{55} \Xi_j^\phi \Xi_m^\phi - 2c_2 D_{55} \Xi_j^\phi \Xi_m^\phi + c_2^2 F_{55} \Xi_j^\phi \Xi_m^\phi \right) dx
\end{aligned}$$

สมาชิกในเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวลของคาน (M)

$$\begin{aligned}
M_{jm}^{11} &= I_0 \int_{-L/2}^{L/2} \Xi_j^u \Xi_m^u dx \\
M_{jm}^{12} &= -c_1 I_3 \int_{-L/2}^{L/2} \Xi_j^u \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} dx \\
M_{jm}^{13} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(I_1 \Xi_j^u \Xi_m^\phi - c_1 I_3 \Xi_j^u \Xi_m^\phi \right) dx \\
M_{jm}^{21} &= -c_1 I_3 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \Xi_m^u dx \\
M_{jm}^{22} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(I_0 \Xi_j^w \Xi_m^w + c_1^2 I_6 \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} \right) dx \quad (5.26) \\
M_{jm}^{23} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(c_1^2 I_6 \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \Xi_m^\phi - c_1 I_4 \frac{\partial \Xi_j^w}{\partial x} \Xi_m^\phi \right) dx
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
M_{jm}^{31} &= \int_{-L/2}^{L/2} (I_1 \Xi_j^\phi \Xi_m^u - c_1 I_3 \Xi_j^\phi \Xi_m^u) dx \\
M_{jm}^{32} &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(c_1^2 I_6 \Xi_j^\phi \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} - c_1 I_4 \Xi_j^\phi \frac{\partial \Xi_m^w}{\partial x} \right) dx \\
M_{jm}^{33} &= \int_{-L/2}^{L/2} (I_2 \Xi_j^\phi \Xi_m^\phi - 2c_1 I_4 \Xi_j^\phi \Xi_m^\phi + c_1^2 I_6 \Xi_j^\phi \Xi_m^\phi) dx
\end{aligned} \tag{5.26}$$

โดยที่ค่า $c_1 = \frac{4}{3h^2}$ และ $c_2 = \frac{4}{h^2}$

เวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับกระทำของแรงแบบพลวัตที่กระทำที่ตำแหน่งใดๆ บนคาน (ไม่เคลื่อนที่)

$$F_j = P(t) \Xi_j^w(x_p) \tag{5.27}$$

เวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับกระทำของแรงพลวัตที่มีการเคลื่อนที่

$$F_j = P_0 \Xi_j^w(x_p) \text{ ในช่วงเวลา } 0 \leq t \leq t_L = \frac{L}{v_p} \tag{5.28}$$

สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานแบบอิสระ เวกเตอร์ของแรงภายนอกไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาและจะสมมติให้การสั่นสะเทือนเป็นไปแบบฮาร์โมนิก (Harmonic response) ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า $[A_j(t), B_j(t), C_j(t)]^T$ สำหรับค่า $j = 1, 2, 3 \dots N$ สามารถแสดงได้ในรูปต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A_j(t) \\ B_j(t) \\ C_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_j e^{i\omega t} \\ \bar{B}_j e^{i\omega t} \\ \bar{C}_j e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

โดยที่ ω คือความถี่ธรรมชาติของคาน เมื่อแทนค่าสมการที่ 5.29 ลงไปในสมการการสั่นสะเทือน (สมการที่ 5.24) จะทำให้ได้ระบบใหม่ของการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระในรูปแบบต่อไปนี้

$$\left[\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

ดังนั้นระบบสมการที่ 5.30 ซึ่งระบบของสมการการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระซึ่งวิธีแก้ปัญหาก็เพื่อหาความถี่ธรรมชาติพื้นฐานได้กล่าวในบทก่อนหน้านี้อันแล้ว ในส่วนการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Forced vibration) ในสมการที่ 5.24 จะใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหานี้ เอกสารนี้คือวิธีการนิวมาร์ค (Newmarks time-integration method) ดังได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้อีกเช่นกัน การคำนวณว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3 ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

5.3.1 สมการพลังงาน

สมการระยะการกระจัดของแผ่นบางตามทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสามารถแสดงได้ดังนี้

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (5.31)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (5.32)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (5.33)$$

โดยที่ u_0 คือ ระยะการกระจัดตามแนวแกนความยาวของแผ่นบาง (แกน x) ที่ระนาบกึ่งกลาง
 v_0 คือ ระยะการกระจัดตามแนวแกนความกว้างของแผ่นบาง (แกน y) ที่ระนาบกึ่งกลาง
 w_0 คือ ระยะการกระจัดตามแนวแกนความหนา (แกน z) ที่ระนาบกึ่งกลางหรือเรียกว่าค่าระยะการโก่ง (Deflection)

ϕ_x คือ มุมระนาบหน้าตัดขวางที่หมุนรอบแกน y

ϕ_y คือ มุมระนาบหน้าตัดขวางที่หมุนรอบแกน x

ดังได้กล่าวไว้บทที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะการกระจัด (u, v, w) ความเครียดตั้งฉาก ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$) และความเครียดเฉือน ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.34)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.35)$$

เมื่อนำสมการที่ 5.31 – 5.33 แทนในสมการที่ 5.34 – 5.35 และทำการหาอนุพันธ์ย่อย จะได้

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} + z^3 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{bmatrix} + z^2 \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รายละเอียดของสมการความเครียดในสมการที่ (5.36) และ (5.37) สามารถแสดงในรูปกระบวนการ
การจัดได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{bmatrix} = -c_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{bmatrix} = -c_2 \begin{bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

โดยที่ค่า $c_1 = \frac{4}{3h^2}$ และ $c_2 = \frac{4}{h^2}$

อาศัยความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดตามทิศทางต่าง ๆ ของโครงสร้างแผ่นบางแบบ
แกนควิซซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนชั้น (i) สามารถแสดงได้ตามสมการต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{yy}^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^{(i)} \\ \tau_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (5.43)$$

โดยที่ $\sigma^{(i)}$ และ $\tau^{(i)}$ แสดงถึงความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนของแผ่นบางแบบแกนด्वิชซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งจำนวนชั้น ตามลำดับ ส่วนค่า Q ณ ตำแหน่งในเมทริกซ์หาได้ดังนี้

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E^{(i)}(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E^{(i)}(z)}{1-\nu^2} \quad (5.44)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E^{(i)}(z)}{2[1+\nu]}$$

เมื่อทราบสมการทั้งหมดของความเค้นและความเครียด ดังนั้นพลังงานภายในเนื่องจากการเสียดรูปหรือเปลี่ยนแปลงของระยะการกระจัด (Strain energy equation) ได้ดังนี้

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (5.45)$$

หรือสามารถที่จะเขียนสมการพลังงานภายในของแผ่นบางให้อยู่ในรูปของโครงสร้างแบบแกนด्वิชที่ประกอบด้วยส่วนหลัก 3 ชั้นนั่นคือชั้นบนและชั้นล่างเป็นพื้นที่ผิว ซึ่งทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันและชั้นกลางหรือชั้นแกนกลาง ซึ่งทำมาจากวัสดุไอโซทรอปิก ดังแสดงได้ดังนี้

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz}^{(i)} \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(i)} \gamma_{xz} + \tau_{xy}^{(i)} \gamma_{xy}) dz dx dy \quad (5.46)$$

แทนค่ารายละเอียดของความเค้นและความเครียดในสมการพลังงานภายใน จะได้

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2A_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} \right. \\ \left. - 2c_1 E_{11} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} - 2c_1 E_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} - 4c_1 E_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + 2B_{11} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - 2c_1 E_{11} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right. \\ \left. + 2B_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - 2c_1 E_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& +2A_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2A_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} \right)^2 \\
& -2c_1 E_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} - 2c_1 E_{22} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} - 4c_1 E_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \\
& + 2B_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - 2c_1 E_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\
& + 2B_{22} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - 2c_1 E_{22} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\
& - 2c_1 E_{11} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial u_o}{\partial x} - 2c_1 E_{12} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial u_o}{\partial x} - 4c_1 E_{66} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_o}{\partial y} \\
& - 2c_1 E_{12} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial v_o}{\partial y} - 2c_1 E_{22} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial v_o}{\partial y} - 4c_1 E_{66} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} \\
& + c_1^2 H_{11} \left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \right)^2 + 2c_1^2 H_{12} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + c_1^2 H_{22} \left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \right)^2 \\
& + c_2^2 F_{44} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 + c_2^2 F_{55} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 + A_{44} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \\
& - 2c_2 D_{55} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 - 2c_2 D_{44} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 + 4c_1^2 H_{66} \left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \right)^2 \\
& - 2c_1 F_{11} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2c_1^2 H_{11} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - 2c_1 F_{12} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
& + 2c_1^2 H_{12} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - 4c_2 D_{55} \frac{\partial w_o}{\partial x} \phi_x + 2A_{55} \frac{\partial w_o}{\partial x} \phi_x \\
& + 2c_2^2 F_{55} \frac{\partial w_o}{\partial x} \phi_x - 4c_1 F_{66} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 4c_1^2 H_{66} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\
& - 2c_1 F_{12} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2c_1^2 H_{12} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - 2c_1 F_{22} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
& + 2c_1^2 H_{22} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - 4c_2 D_{44} \frac{\partial w_o}{\partial y} \phi_y + 2A_{44} \frac{\partial w_o}{\partial y} \phi_y \\
& + 2c_2^2 F_{44} \frac{\partial w_o}{\partial y} \phi_y - 4c_1 F_{66} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 4c_1^2 H_{66} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\
& + 2B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial x} - 2c_1 E_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial y} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial y} \\
& + 2B_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} - 2c_1 E_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} \\
& - 2c_1 F_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + 2c_1^2 H_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} - 2c_1 F_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& -2c_1 F_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + 2c_1^2 H_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} - 2c_1 F_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\
& + 2c_1^2 H_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} - 4c_2 D_{55} \phi_x \frac{\partial w_o}{\partial x} + 2A_{55} \phi_x \frac{\partial w_o}{\partial x} \\
& + 2c_2^2 F_{55} \phi_x \frac{\partial w_o}{\partial x} - 4c_1 F_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + 4c_1^2 H_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \\
& + D_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 - 2c_1 F_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + c_1^2 H_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \phi_x^2 - 2c_2 D_{55} \phi_x^2 \\
& + c_2^2 F_{55} \phi_x^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 - 2c_1 F_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + c_1^2 H_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 \\
& 2D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - 4c_1 F_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2c_1^2 H_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
& + 2D_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - 4c_1 F_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2c_1^2 H_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\
& + 2B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} - 2c_1 E_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} \\
& + 2B_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial y} - 2c_1 E_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2c_1 E_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial x} \\
& - 2c_1 F_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + 2c_1^2 H_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} - 2c_1 F_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\
& + 2c_1^2 H_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + 2A_{44} \phi_y \frac{\partial w_o}{\partial y} + 2c_2^2 F_{44} \phi_y \frac{\partial w_o}{\partial y} \\
& - 4c_1 F_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + 4c_1^2 H_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \\
& + 2D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - 4c_1 F_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2c_1^2 H_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
& + 2D_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} - 4c_1 F_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2c_1^2 H_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\
& + D_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 - 2c_1 F_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + c_1^2 H_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 \\
& + A_{44} \phi_y^2 - 2c_2 D_{44} \phi_y^2 + c_2^2 F_{44} \phi_y^2 \\
& + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 - 2c_1 F_{66} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 + c_1^2 H_{66} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \Big] dx dy \tag{5.47}
\end{aligned}$$

โดยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}] = \sum_k^3 \int_{h_{k-1}}^{h_k} Q_{ij} [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dz \quad (5.48)$$

เมื่อ $i, j = 1, 2, 4, 5, 6$

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ พิจารณาพลังงานจลน์ของแผ่นบางซึ่งมีความสัมพันธ์กับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามตามสมการต่อไปนี้

$$U_k = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (5.49)$$

จะได้

$$\begin{aligned} U_k = \frac{1}{2} \int_A \left[I_0 \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right) + 2I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + I_2 \left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) \right. \\ \left. - 2c_1 I_3 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right) \right. \\ \left. - 2c_1 I_4 \left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + c_1^2 I_6 \left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 \right] dA \quad (5.50) \end{aligned}$$

โดยที่ I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 และ I_6 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของคาน สามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$[I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)}(z) [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dz \quad (5.51)$$

สมการพลังงานภายนอกที่กระทำกับแผ่นบางในบพนี้สามารถใช้ลักษณะสมการของแรงนอกและระยะการกระจัดตามบพที่ผ่านมาได้ (ใช้ตามทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งได้) ยกตัวอย่างเช่นการกระทำจากโหนดเคลื่อนที่โหนดเดียวด้วยความเร็วคงที่ (v_p) สมการพลังงาน คือ

$$U_{EX} = -P_0 w_0(x_{p1}, 0, t) \quad (5.52)$$

ส่วนกรณีโหนดแบบอื่น ๆ ก็สามารถใช้สมการตามบพที่ผ่านมาได้ จากที่กล่าวมาสามารถที่จะเขียน

สมการพลังงานรวมของแผ่นบางตามทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์เพื่อการเรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้เผยแพร่ใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการพลังงานทั้งหมดสามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นบางแบบ แขนงตัวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้ โดยการสร้างสมการพลังงานรวม (Total energy) ตามประเภทของ ปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งสมการพลังงานรวมของแต่ละประเภทสามารถเขียนได้ดังนี้
กรณีการสั่นสะเทือนแบบอิสระ

$$\Pi = U_s - U_k \quad (5.53)$$

กรณีการสั่นสะเทือนแบบบังคับ

$$\Pi = U_s - U_k - U_{EX} \quad (5.54)$$

อย่างที่มาแล้วในหัวข้อโครงสร้างคาน โดยที่สมการพลังงานรวม (Π) สามารถนำไปใช้เพื่อแก้ปัญหา ได้หลากหลายวิธี แต่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้วิธีการของริทต์ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้กันอย่าง แพร่หลายและให้ผลลัพธ์ถูกต้องและยังเป็นวิธีการที่สามารถปรับใช้กับโครงสร้างต่าง ๆ ที่มีการรองรับ ด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆได้

5.3.2 ระเบียบวิธีของริทต์

ในทำนองเดียวกันกับกรณีของการวิเคราะห์แผ่นบางที่ใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่ หนึ่ง ดังนั้นสามารถใช้หลักการและฟังก์ชันของระยะการกระจัดเดียวกันตามสมการต่อไปนี้

$$u_0(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n U_{ij}(t) N_i^u(x) N_j^u(y) \quad (5.55)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij}(t) N_i^v(x) N_j^v(y) \quad (5.56)$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij}(t) N_i^w(x) N_j^w(y) \quad (5.57)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}(t) N_i^{\phi_x}(x) N_j^{\phi_x}(y) \quad (5.58)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{ij}(t) N_i^{\phi_y}(x) N_j^{\phi_y}(y) \quad (5.59)$$

สมการระยะการกระจัดมีการใช้ตามหลักการที่ผ่านมาซึ่งได้แสดงรายละเอียดเกี่ยวกับการนำไปหา คำตอบที่สอดคล้องกับแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ไว้เรียบร้อยแล้ว โดยอาศัยวิธีการของ ฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมมิตต์ ดังนั้นจึงไม่ได้กล่าวซ้ำในบทนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อได้สมการระยะการกระจัดทั้งหมดตามกระบวนการของแกรมชนิดต์ หลังจากนั้นไปแทนลงในสมการผลรวมของพลังงานทั้งหมด (Π) ตามปัญหาที่ต้องการพิจารณาและเริ่มกระบวนการหาพลังงานต่ำสุดที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรไม่ทราบค่าตามที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้โดยใช้สมการของลากรางจ์ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_{ij}} = 0 \quad (5.60)$$

โดยที่ $q_{ij} = \{U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), X_{ij}(t), Y_{ij}(t)\}$ สามารถแสดงรายละเอียดได้คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial U_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{U}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial V_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{V}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial W_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{W}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{X}_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial Y_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{Y}_{ij}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

หลังจากผ่านกระบวนการของลากรางจ์จะทำให้ได้รับระบบสมการต่อไปนี้ในรูปเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\phi_x, u} & K^{\phi_y, u} \\ & K^{vv} & K^{wv} & K^{\phi_x, v} & K^{\phi_y, v} \\ & & K^{ww} & K^{\phi_x, w} & K^{\phi_y, w} \\ sym & & & K^{\phi_x, \phi_x} & K^{\phi_y, \phi_x} \\ & & & & K^{\phi_y, \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\phi_x, u} & M^{\phi_y, u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\phi_x, v} & M^{\phi_y, v} \\ & & M^{ww} & M^{\phi_x, w} & M^{\phi_y, w} \\ sym & & & M^{\phi_x, \phi_x} & M^{\phi_y, \phi_x} \\ & & & & M^{\phi_y, \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{W} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

โดยที่ \mathbf{K} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็ง (Stiffness matrix)

\mathbf{M} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวล (Mass matrix)

\mathbf{F} คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกแบบพลวัตใดๆ (Force vector)

รายละเอียดของสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์และเวกเตอร์สามารถได้ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
K_{ijmn}^{uu} &= A_{11} P_{im}^{uu11} Q_{jn}^{uu00} + A_{66} P_{im}^{uu00} Q_{jn}^{uu11} \\
K_{ijmn}^{vu} &= A_{12} P_{im}^{vu01} Q_{jn}^{vu10} + A_{66} P_{im}^{vu10} Q_{jn}^{vu01} \\
K_{ijmn}^{vv} &= A_{22} P_{im}^{vv00} Q_{jn}^{vv11} + A_{66} P_{im}^{vv11} Q_{jn}^{vv00} \\
K_{ijmn}^{wu} &= -c_1 E_{11} P_{im}^{wu21} Q_{jn}^{wu00} - c_1 E_{12} P_{im}^{wu01} Q_{jn}^{wu20} - 2c_1 E_{66} P_{im}^{wu10} Q_{jn}^{wu11} \\
K_{ijmn}^{wv} &= -c_1 E_{22} P_{im}^{wv00} Q_{jn}^{wv21} - c_1 E_{12} P_{im}^{wv20} Q_{jn}^{wv01} - 2c_1 E_{66} P_{im}^{wv11} Q_{jn}^{wv10} \\
K_{ijmn}^{ww} &= c_1^2 H_{11} P_{im}^{ww22} Q_{jn}^{ww00} + c_1^2 H_{12} P_{im}^{ww20} Q_{jn}^{ww02} + c_1^2 H_{22} P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww22} \\
&\quad + 2c_1^2 H_{66} P_{im}^{ww11} Q_{jn}^{ww11} + A_{55} P_{im}^{ww11} Q_{jn}^{ww00} - 2c_2 D_{55} P_{im}^{ww11} Q_{jn}^{ww22} \\
&\quad + c_2^2 F_{55} P_{im}^{ww11} Q_{jn}^{ww00} + A_{44} P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww11} - 2c_2 D_{44} P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww11} \\
&\quad + c_2^2 F_{44} P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww11} \\
K_{ijmn}^{\phi,u} &= B_{11} P_{im}^{\phi,u11} Q_{jn}^{\phi,u00} - c_1 E_{11} P_{im}^{\phi,u11} Q_{jn}^{\phi,u00} \\
&\quad + B_{66} P_{im}^{\phi,u00} Q_{jn}^{\phi,u11} - c_1 E_{66} P_{im}^{\phi,u00} Q_{jn}^{\phi,u11} \\
K_{ijmn}^{\phi,v} &= B_{12} P_{im}^{\phi,v10} Q_{jn}^{\phi,v01} - c_1 E_{12} P_{im}^{\phi,v10} Q_{jn}^{\phi,v01} \\
&\quad + B_{66} P_{im}^{\phi,v01} Q_{jn}^{\phi,v10} - c_1 E_{66} P_{im}^{\phi,v01} Q_{jn}^{\phi,v10} \\
K_{ijmn}^{\phi,w} &= c_1^2 H_{11} P_{im}^{\phi,w12} Q_{jn}^{\phi,w00} - c_1 F_{11} P_{im}^{\phi,w12} Q_{jn}^{\phi,w00} \\
&\quad + c_1^2 H_{12} P_{im}^{\phi,w10} Q_{jn}^{\phi,w02} - c_1 F_{12} P_{im}^{\phi,w10} Q_{jn}^{\phi,w02} \\
&\quad + 2c_1^2 H_{66} P_{im}^{\phi,w01} Q_{jn}^{\phi,w11} - 2c_1 F_{66} P_{im}^{\phi,w01} Q_{jn}^{\phi,w11} \\
&\quad + A_{55} P_{im}^{\phi,w01} Q_{jn}^{\phi,w00} + 2c_2 D_{55} P_{im}^{\phi,w01} Q_{jn}^{\phi,w00} - c_2^2 F_{55} P_{im}^{\phi,w01} Q_{jn}^{\phi,w00} \\
K_{ijmn}^{\phi,\phi} &= D_{11} P_{im}^{\phi,\phi11} Q_{jn}^{\phi,\phi00} - 2c_1 F_{11} P_{im}^{\phi,\phi11} Q_{jn}^{\phi,\phi00} + c_1^2 H_{11} P_{im}^{\phi,\phi11} Q_{jn}^{\phi,\phi00} \\
&\quad + D_{66} P_{im}^{\phi,\phi00} Q_{jn}^{\phi,\phi11} - 2c_1 F_{66} P_{im}^{\phi,\phi00} Q_{jn}^{\phi,\phi11} + c_1^2 H_{66} P_{im}^{\phi,\phi00} Q_{jn}^{\phi,\phi11} \\
&\quad + A_{55} P_{im}^{\phi,\phi00} Q_{jn}^{\phi,\phi00} - 2c_2 D_{55} P_{im}^{\phi,\phi00} Q_{jn}^{\phi,\phi00} + c_2^2 F_{55} P_{im}^{\phi,\phi00} Q_{jn}^{\phi,\phi00} \\
K_{ijmn}^{\phi,u} &= B_{12} P_{im}^{\phi,u01} Q_{jn}^{\phi,u10} - c_1 E_{12} P_{im}^{\phi,u01} Q_{jn}^{\phi,u10} \\
&\quad + B_{66} P_{im}^{\phi,u10} Q_{jn}^{\phi,u01} - c_1 E_{66} P_{im}^{\phi,u10} Q_{jn}^{\phi,u01} \\
K_{ijmn}^{\phi,v} &= B_{22} P_{im}^{\phi,v00} Q_{jn}^{\phi,v11} - c_1 E_{22} P_{im}^{\phi,v00} Q_{jn}^{\phi,v11} \\
&\quad + B_{66} P_{im}^{\phi,v11} Q_{jn}^{\phi,v00} - c_1 E_{66} P_{im}^{\phi,v11} Q_{jn}^{\phi,v00} \\
K_{ijmn}^{\phi,w} &= c_1^2 H_{12} P_{im}^{\phi,w02} Q_{jn}^{\phi,w10} - c_1 F_{12} P_{im}^{\phi,w02} Q_{jn}^{\phi,w10} \\
&\quad + c_1^2 H_{22} P_{im}^{\phi,w00} Q_{jn}^{\phi,w12} - c_1 F_{22} P_{im}^{\phi,w00} Q_{jn}^{\phi,w12} \\
&\quad + 2c_1^2 H_{66} P_{im}^{\phi,w11} Q_{jn}^{\phi,w01} - 2c_1 F_{66} P_{im}^{\phi,w11} Q_{jn}^{\phi,w01} \\
&\quad + A_{55} + 2c_2 D_{55} P_{im}^{\phi,w00} Q_{jn}^{\phi,w01} - c_2^2 F_{55} P_{im}^{\phi,w00} Q_{jn}^{\phi,w01} \\
K_{ijmn}^{\phi,\phi} &= D_{12} P_{im}^{\phi,\phi01} Q_{jn}^{\phi,\phi10} - 2c_1 F_{12} P_{im}^{\phi,\phi01} Q_{jn}^{\phi,\phi10} + c_1^2 H_{12} P_{im}^{\phi,\phi01} Q_{jn}^{\phi,\phi10} \\
&\quad + D_{66} P_{im}^{\phi,\phi10} Q_{jn}^{\phi,\phi01} - 2c_1 F_{66} P_{im}^{\phi,\phi10} Q_{jn}^{\phi,\phi01} + c_1^2 H_{66} P_{im}^{\phi,\phi10} Q_{jn}^{\phi,\phi01}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
K_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} &= D_{22} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 11} - 2c_1 F_{22} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 11} + c_1^2 H_{22} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 11} \\
&+ D_{66} P_{im}^{\phi_y \phi_y 11} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} - 2c_1 F_{66} P_{im}^{\phi_y \phi_y 11} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} + c_1^2 H_{66} P_{im}^{\phi_y \phi_y 11} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} \\
&+ A_{44} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} - 2c_2 D_{44} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} + c_2^2 F_{44} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{ijmn}^{uu} &= I_0 P_{im}^{uu00} Q_{jn}^{uu00}, M_{ijmn}^{vu} = 0, M_{ijmn}^{vv} = I_0 P_{im}^{vv00} Q_{jn}^{vv00} \\
M_{ijmn}^{wu} &= -c_1 I_3 P_{im}^{wu10} Q_{jn}^{wu00}, M_{ijmn}^{wv} = -c_1 I_3 P_{im}^{wv00} Q_{jn}^{wv10} \\
M_{ijmn}^{ww} &= I_0 P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww00} + c_1^2 I_6 P_{im}^{ww11} Q_{jn}^{ww00} + c_1^2 I_6 P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww11} \\
M_{ijmn}^{\phi_x u} &= I_1 P_{im}^{\phi_x u00} Q_{jn}^{\phi_x u00} - c_1 I_3 P_{im}^{\phi_x u00} Q_{jn}^{\phi_x u00}, M_{ijmn}^{\phi_x v} = 0 \\
M_{ijmn}^{\phi_x w} &= -c_1 I_4 P_{im}^{\phi_x w01} Q_{jn}^{\phi_x w00} + c_1^2 I_6 P_{im}^{\phi_x w01} Q_{jn}^{\phi_x w00} \\
M_{ijmn}^{\phi_x \phi_x} &= I_2 P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00} - 2c_1 I_4 P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00} + c_1^2 I_6 P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00} \\
M_{ijmn}^{\phi_y u} &= 0, M_{ijmn}^{\phi_y v} = I_1 P_{im}^{\phi_y v00} Q_{jn}^{\phi_y v00} - c_1 I_3 P_{im}^{\phi_y v00} Q_{jn}^{\phi_y v00} \\
M_{ijmn}^{\phi_y w} &= -c_1 I_4 P_{im}^{\phi_y w00} Q_{jn}^{\phi_y w01} + c_1^2 I_6 P_{im}^{\phi_y w00} Q_{jn}^{\phi_y w01}, M_{ijmn}^{\phi_y \phi_x} = 0 \\
M_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} &= I_2 P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} - 2c_1 I_4 P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} + c_1^2 I_6 P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00}
\end{aligned} \tag{5.64}$$

รายละเอียดของการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง P_{im}^{pqrs} และ Q_{jn}^{pqrs} สามารถดูได้จากภาคผนวก ก ตัวอย่างเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับแรงกระทำแบบเคลื่อนที่หนึ่งแรง (F)

$$F_{ij} = -P_0 N_i^w(x_p) N_j^w(0) \tag{5.65}$$

โดยขนาดของเมทริกซ์ K และ M มีค่าเท่ากับ $5(m \times n) \times 5(m \times n)$ ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดจำนวนพจน์ในแนวแกน x และแกน y เท่ากับ 5 ดังนั้นขนาดของเมทริกซ์จะมีค่า 125×125

อย่างที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ สำหรับกรณีวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางแบบอิสระเวกเตอร์ของแรงภายนอกไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาและสมมติให้การสั่นสะเทือนเป็นไปแบบฮาร์โมนิก (Harmonic response) ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า $U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), X_{ij}(t)$ และ $Y_{ij}(t)$ สำหรับค่า $i = 1, 2, 3 \dots m$ และค่า $j = 1, 2, 3 \dots n$ สามารถแสดงได้ในรูปต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} U_{ij}(t) \\ V_{ij}(t) \\ W_{ij}(t) \\ X_{ij}(t) \\ Y_{ij}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{V}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{W}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{X}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{Y}_{ij} e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

โดยที่ ω คือความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง เมื่อแทนค่าสมการนี้ไปยังระบบหลักของสมการการสั่นสะเทือนจะทำให้ได้ระบบใหม่ของการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระในรูปสมการที่ 5.68

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\phi_x u} & K^{\phi_y u} \\ & K^{vv} & K^{wv} & K^{\phi_x v} & K^{\phi_y v} \\ & & K^{ww} & K^{\phi_x w} & K^{\phi_y w} \\ & sym & & K^{\phi_x \phi_x} & K^{\phi_y \phi_x} \\ & & & & K^{\phi_y \phi_y} \end{bmatrix}$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\phi_x u} & M^{\phi_y u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\phi_x v} & M^{\phi_y v} \\ & & M^{ww} & M^{\phi_x w} & M^{\phi_y w} \\ & sym & & M^{\phi_x \psi_x} & M^{\phi_y \psi_x} \\ & & & & M^{\phi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \\ \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับ จะแตกต่างจากแบบอิสระเพราะต้องวิเคราะห์โดยใช้การอินทิเกรตเทียบกับเวลาตามระบบสมการที่ (5.62) วิธีการที่เลือกใช้คือนิวมาร์ค กระบวนการอินทิเกรตแบบนิวมาร์คจะมีหลักการสอดคล้องกับปัญหาแผ่นบางที่มีการอธิบายไปในบทที่ผ่านมา ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องแสดงรายละเอียดอีกครั้ง

บทที่ 6

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้มีความสำคัญต่อการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนและการโก่งตัวของโครงสร้างคาน (Beam structures) และโครงสร้างแผ่นบาง (Plate structures) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและสอดคล้องกับพฤติกรรมจริงของวัสดุเมื่ออยู่ภายใต้สภาวะการกระทำจากแรงภายนอกต่าง ๆ ซึ่งจะช่วยให้นักวิศวกรหรือผู้ออกแบบสามารถทำนายพฤติกรรมของโครงสร้างได้อย่างถูกต้อง และช่วยลดเวลา รวมถึงค่าใช้จ่ายในการวิเคราะห์ โดยไม่ต้องอาศัยการทดสอบจริง เพราะในบางครั้งการทดสอบจริงนั้นอาจต้องใช้ต้นทุนจำนวนมาก ดังนั้นในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงมีจุดประสงค์เพื่อจะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคานและโครงสร้างแผ่นบางที่มีโครงสร้างแบบแซนด์วิชซึ่งทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน (functionally graded sandwich structures) โดยโครงสร้างคานหรือโครงสร้างแผ่นบางประกอบไปด้วย 2 ส่วนหลักคือแผ่นประกบบนและล่าง (Face sheet) ที่ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุวัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally Graded Materials, FGMs) ซึ่งเป็นวัสดุคอมโพสิตประเภทหนึ่งและส่วนที่สองคือชั้นแกนกลาง (Core) ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุเนื้อเดียว (Homogeneous materials) ซึ่งจะอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่หนึ่งแรงหรือหลายแรง โดยแบบจำลองทั้งโครงสร้างคานและแผ่นบางอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (First order shear deformation theory, FSDT) และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม (third order shear deformation theory, TSDT) รวมทั้งพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) แบบต่าง ๆ ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาจะประยุกต์ใช้หลักการพลังงาน (energy principle) ซึ่งพลังงานดังกล่าวหาได้จากความเค้น ความเครียด พลังงานจลน์และแรงภายนอกที่มากระทำและใช้ระเบียบวิธีของริทซ์ (Ritz method) เพื่อสมมติฟังก์ชันของระยะการกระจัดตามเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด จากนั้นจะใช้วิธีการของลากรางจ์เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ ซึ่งการหาผลเฉลยของสมการเคลื่อนที่จะใช้วิธีการของนิวมาร์ค (Newmark method) เพื่อหาผลตอบสนองทางด้านพลวัตของโครงสร้างคานและโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันต่อไป

6.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบน

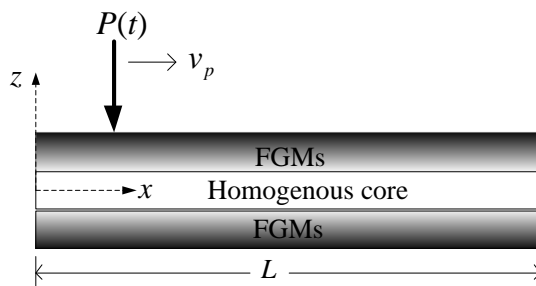
พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง

ในส่วนของหัวข้อแรกนี้จะเป็นการแสดงรายละเอียดของกระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีความเกี่ยวข้องกับโครงสร้างทางวิศวกรรมแบบคาน ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของโครงสร้างที่นำมาศึกษาถึงพฤติกรรมด้านการสั่นสะเทือน รวมถึงศึกษาพฤติกรรมด้านการโก่งตัวของโครงสร้าง โดยลักษณะของโครงสร้างดังกล่าวจะถูกพิจารณาว่าเป็นโครงสร้างแบบแซนด์วิช ดังประกอบไปด้วยชั้นของแผ่นประกบบนและล่าง (Face sheet) ที่ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุคอมโพสิตนั่นคือ วัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งมักจะนิยมเรียกว่า FGMs และชั้นของแกนกลาง (Core) ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุประเภทเนื้อเดียว ตามลำดับ โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างคานในลักษณะโครงสร้างแบบแซนด์วิชสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนและปัญหาการโก่งของคานนั้น จะพิจารณาโครงสร้าง

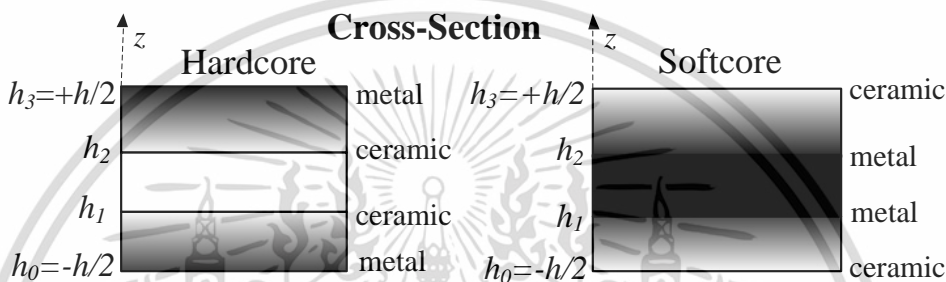
ตามระบบพิกัดอ้างอิงตามรูปที่ 6.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.1 โครงสร้างคานแบบแกนดัดวิซจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน



รูปที่ 6.2 ภาพตัดขวางของโครงสร้างคานแบบแกนดัดวิซจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

พิจารณาโครงสร้างคานแบบแกนดัดวิซจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งประกอบไปด้วย 2 ส่วนหลัก นั่นก็คือ ส่วนของชั้นแกนกลาง และส่วนของชั้นประกบบนและล่าง ซึ่งโครงสร้างแกนดัดวิซตามที่กล่าวไว้ในข้างต้นจะถูกนำมาพิจารณาศึกษาโดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ชั้นแกนกลางอ่อน (soft core) และชั้นแกนกลางแข็ง (hard core) และโดยทั่วไปแล้ววัสดุประเภทเซรามิก (ceramic) จะมีค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นมากกว่าวัสดุประเภทโลหะ (metal) ดังนั้นโครงสร้างคานแบบแกนดัดวิซจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีชั้นแกนกลางแข็งจะประกอบไปด้วยส่วนแรกคือชั้นแกนกลางที่ทำมาจากวัสดุประเภทเซรามิกและส่วนที่สองคือชั้นประกบบนและล่างทำจากวัสดุผสมระหว่างเซรามิกและโลหะ โดยจะเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติวัสดุอย่างต่อเนื่องจากโลหะ 100 % ที่ผิวด้านนอกจนกลายเป็นเซรามิก 100 % ที่ชั้นแกนกลาง ส่วนโครงสร้างคานแบบแกนดัดวิซจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ที่มีชั้นแกนกลางแบบอ่อนจะมีคุณสมบัติตรงกันข้ามกับแบบโครงสร้างคานแบบแกนดัดวิซจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีชั้นแกนกลางแข็ง ซึ่งโครงสร้างแกนดัดวิซทั้งสองประเภทดังกล่าวจะแทนความยาวของคานด้วยตัวแปร L ไปตามแกน x และมีความสูงจาก $-h/2$ ถึง $h/2$ ไปตามแกน z ส่วนความกว้างของคานแทนด้วย b โดยโครงสร้างคานอยู่ภายใต้แรงกระแบบเคลื่อนที่ $P(t)$ ด้วยความเร็วคงที่ค่าหนึ่ง (v_p) และอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น (layer thickness ratio) จะถูกนิยามโดยสัญลักษณ์ตัวเลขสามตัว เช่น 1-1-1 หมายความว่า $h_0 = -h/2, h_1 = -h/6, h_2 = h/6$ และ $h_3 = h/2$ เป็นต้น และค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผล (effective material properties) ของวัสดุแต่ละชั้นสามารถหาได้ดังต่อสมการต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E^{(i)} = (E_b - E_t)V_b^{(i)}(z) + E_t \quad (6.1)$$

$$\rho^{(i)} = (\rho_b - \rho_t)V_b^{(i)}(z) + \rho_t \quad (6.2)$$

โดยที่ E และ ρ คือ ค่านมอดูลัสของความยืดหยุ่นและค่าความหนาแน่นของวัสดุ ส่วนตัวห้อย t , b แสดงถึงคุณสมบัติของวัสดุ ณ ตำแหน่งผิวด้านนอกและแกนกลางของวัสดุ ตามลำดับ V_b คือ สัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (material volume fraction) สามารถหาได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} V_b^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^n & z \in [h_0, h_1] \\ V_b^{(2)}(z) &= 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V_b^{(3)}(z) &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^n & z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \quad (6.3)$$

ค่าของ n คือ ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ ซึ่งจะแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของวัสดุตามความหนาของคาน

พิจารณาโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งหรือบางครั้งอาจเรียกว่าทฤษฎี Timoshenko โดยระยะการกระจัดของคานตามแกน x นั้นถูกแทนด้วย u และระยะการกระจัดตามแกน z แทนด้วย w ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$u(x, z, t) = u_o(x, t) + z\phi(x, t) \quad (6.4)$$

$$w(x, z, t) = w_o(x, t) \quad (6.5)$$

โดยที่ u_o และ w_o คือ ระยะการกระจัด ณ จุดใด ๆ ตามแนวแกนความยาวคานและตามหน้าตัดขวาง ณ ตำแหน่งระนาบกึ่งกลาง ตามลำดับ ส่วนมุม ϕ แสดงถึงการหมุนของระนาบหน้าตัดขวางของคานรอบแกน y และ t คือเวลา ดังนั้นอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างระยะการกระจัด (displacement) ความเครียดตั้งฉาก (normal strain, ε_{xx}) และความเครียดเฉือน (shear strain, γ_{xz}) ซึ่งแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o(x, t)}{\partial x} + z \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \quad (6.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_o(x,t)}{\partial x} + \phi(x,t) \quad (6.7)$$

จากที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 ความเครียดเฉือนตามทฤษฎีออยเลอร์-เบอร์นูลลีหรือทฤษฎีคานแบบคลาสสิกจะมีค่าเท่ากับศูนย์นั่นคือ $\gamma_{xz} = 0$ และมุม $\phi = -\partial w_o / \partial x$ ซึ่งจะไม่เหมือนกับทฤษฎี Timoshenko ดังนั้นอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดตามกฎของฮุกจะได้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E(z) & 0 \\ 0 & G(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

โดยที่ σ_{xx} และ τ_{xz} แสดงถึงความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนในระนาบ xz ตามลำดับ ส่วนค่า G คือ ค่ามอดูลัสเฉือนของวัสดุและมีความสัมพันธ์กับค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นดังนี้

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (6.9)$$

6.1.1 พลังงานความเครียดสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ดังได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ว่าวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาจะประยุกต์ใช้หลักการพลังงาน โดยผลเฉลยที่ได้มักเป็นผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) โดยการสมมุติฟังก์ชันระยะการกระจัดซึ่งพลังงานดังกล่าวหาได้จากความเค้น ความเครียด ระยะการกระจัดของคานหรือแผ่นบาง โดยที่ค่าพลังงานความเครียด (strain energy) ของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$U_s = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dz dx \quad (6.10)$$

แทนสมการที่ 6.6 – 6.8 ลงในสมการที่ 6.10 จะได้

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \phi \frac{\partial w_o}{\partial x} + A_{55} \phi^2 \right] dx \quad (6.11)$$

สำหรับพารามิเตอร์ในสมการที่ 6.11 แสดงถึงพารามิเตอร์ที่มีความเกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็ง (stiffness) ของวัสดุในด้านต่าง ๆ โดยสามารถอธิบายความหมายได้ดังต่อไปนี้

A_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึง (extensional stiffness)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

B_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดัดและการดัดแบบผสม (Extensional-bending stiffness)

D_{11} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดัด (bending stiffness)

A_{55} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการเฉือน (shear stiffness) ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

$$[A_{11}, B_{11}, D_{11}] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)} [1, z, z^2] dz \quad \text{และ} \quad A_{55} = b\kappa \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \frac{E^{(i)}}{2(1+\nu)} dz \quad (6.12)$$

พารามิเตอร์ κ คือ ค่าแก้ของการเฉือน (shear correction factor) มีค่าเท่ากับ $5/6$ สำหรับกรณีที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิก และ $\kappa = \frac{5}{6 - (\nu_c V_c + \nu_m V_m)}$ สำหรับวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยที่ $V_m = 1 - V_c$ ซึ่งค่า V_m และ V_c คือสัดส่วนปริมาตรของโลหะและเซรามิกตามลำดับ ส่วน ν_c และ ν_m คือค่าอัตราส่วนปัวซองของเซรามิกและโลหะ ตามลำดับ

6.1.2 พลังงานจลน์สำหรับโครงสร้างคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

นอกจากพลังงานความเครียด คานที่มีการเคลื่อนที่หรือมีการสั่นสะเทือนยังมีพลังงานจลน์ (kinetic energy) ซึ่งเป็นพลังงานในอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งคานที่มีมวลและเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \dot{u} และ \dot{w} สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$U_k = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx \quad (6.13)$$

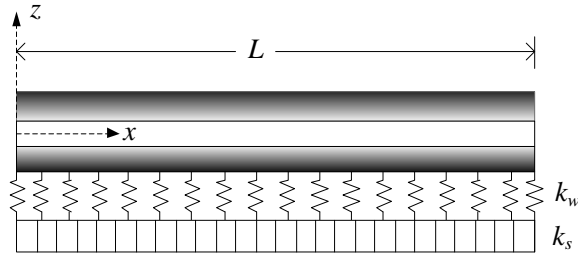
$$U_k = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial u_o}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial u_o}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w_o}{\partial t} \right)^2 \right] dx$$

โดยที่ I_0 , I_1 และ I_2 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล แสดงได้ดังนี้

$$[I_0, I_1, I_2] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)} [1, z, z^2] dz \quad (6.14)$$

6.1.3 พลังงานศักย์ที่ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นสำหรับโครงสร้างคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

พิจารณากรณีโครงสร้างคานที่มีฐานรองรับแบบยืดหยุ่น (elastic foundation) ดังแสดงในรูป 6.3



รูปที่ 6.3 โครงสร้างคานมีฐานรองรับแบบยืดหยุ่น

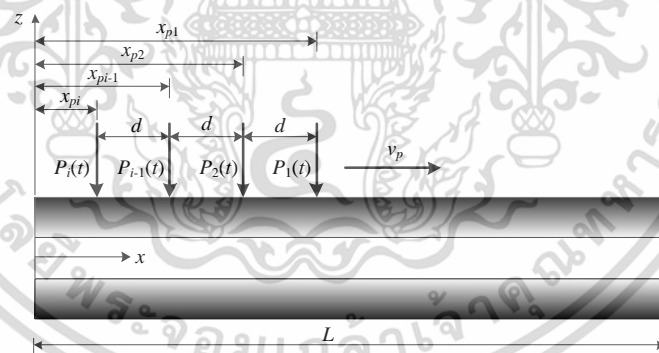
ซึ่งค่าพลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นสามารถหาได้ดังสมการต่อไปนี้

$$U_f = \frac{b}{2} \int_0^L \left(k_w w_o^2 + k_s \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (6.15)$$

โดยที่ k_w คือ ค่าคงที่สปริงวินเกอร์ (Winkler spring) และ k_s คือ ค่าคงที่สปริงของชั้นแรงเฉือน (shear layer spring)

6.1.4 งานจากแรงกระทำภายนอกสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

เพื่อที่จะประยุกต์ใช้กับสมการลากรางจ์ พิจารณาพลังงานที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก ตั้งแต่แรงกระทำแค่หนึ่งแรงหรือมากกว่า ดังแสดงดังรูป ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้



รูปที่ 6.4 โครงสร้างคานภายใต้แรงกระทำภายนอก

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 1 แรง

$$U_{ex} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{p1}, t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_1 = \frac{L}{v_p} \\ 0 & \text{if } t_1 < t \end{cases} \quad (6.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 2 แรง

$$U_{ex} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P_1}, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P_1}, t) - P_2(t)w_0(x_{P_2}, t) & \text{if } t_1 \leq t \leq t_2 = \frac{L}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{P_2}, t) & \text{if } t_2 < t \leq t_1 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_1 + t_2 < t \end{cases} \quad (6.17)$$

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 3 แรง

$$U_{ex} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P_1}, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P_1}, t) - P_2(t)w_0(x_{P_2}, t) & \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{P_1}, t) - P_2(t)w_0(x_{P_2}, t) - P_3(t)w_0(x_{P_3}, t) & \text{if } t_2 \leq t \leq t_3 = \frac{L}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{P_2}, t) - P_3(t)w_0(x_{P_3}, t) & \text{if } t_3 < t \leq t_3 + t_1 \\ -P_3(t)w_0(x_{P_3}, t) & \text{if } t_3 + t_1 < t \leq t_3 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_3 + t_2 < t \end{cases} \quad (6.18)$$

ส่วนค่า P_1 , P_2 และ P_3 กรณีเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก สามารถแสดงได้ดังนี้

$$P_1(t) = P_0 \sin(\Omega_1 t + \psi_1) \quad (6.19)$$

$$P_2(t) = P_0 \sin(\Omega_2 t + \psi_2) \quad (6.20)$$

$$P_3(t) = P_0 \sin(\Omega_3 t + \psi_3) \quad (6.21)$$

เมื่อค่า P_0 คือ ขนาดแรงในหน่วยนิวตัน

Ω_i คือ ความถี่ของแรงที่กระทำในหน่วยเรเดียนต่อวินาที

ψ_i คือ มุมเฟสในหน่วยเรเดียน

d คือ ระยะทางระหว่างแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ในหน่วยเมตร

โดยตำแหน่งของแรง (P_1 , P_2 และ P_3) จะขึ้นกับเวลา (t) และความเร็ว v_p โดยสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$x_{pi} = [v_p t - (i-1)d] \quad (6.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีที่แรงกระทำแบบเคลื่อนที่มีจำนวน 4 หรือ 5 แรง สามารถหาได้โดยใช้หลักการเดียวกับสมการที่ 6.18 ที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้

จากพลังงานทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้น ทั้งพลังงานความเครียด พลังงานจลน์ พลังงานศักย์ที่มีฐานรองรับแบบยึดหยุ่นและงานที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก สามารถเขียนอยู่ในรูปพลังงานศักย์รวม (total potential energy) ได้ดังนี้

$$\Pi = U_s + U_f - U_k - U_{ex} \quad (6.23)$$

6.1.5 วิธีการหาผลเฉลยสำหรับโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

เพื่อที่จะหาค่าผลตอบสนองทางด้านพลวัตของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยในหัวข้อนี้จะใช้ระเบียบวิธีของริทต์ ซึ่งวิธีการนี้จะสมมติฟังก์ชันระยะการกระจัด $u_0(x,t)$, $w_0(x,t)$ และ $\phi(x,t)$ ซึ่งอยู่ในรูปพิกัดทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับเวลา (time-dependent generalized coordinates) และฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต จากนั้นประยุกต์ใช้สมการลากรางจ์เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่และใช้ระเบียบวิธีการของนิวมาร์ค (Newmark method) ช่วยในการหาผลตอบสนองทางด้านพลวัตของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันต่อไป

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแสดงได้ดังนี้

$$\begin{cases} u_0(x,t) = \sum_{j=1}^N A_j(t) \Xi_{1j}(x) \\ w_0(x,t) = \sum_{j=1}^N B_j(t) \Xi_{2j}(x) \\ \phi(x,t) = \sum_{j=1}^N C_j(t) \Xi_{3j}(x) \end{cases} \quad (6.24)$$

โดยที่ $A_j(t)$, $B_j(t)$ และ $C_j(t)$ คือพิกัดทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับเวลาและไม่ทราบค่าซึ่งจำเป็นต้องหา ส่วน $\Xi_{1j}(x)$, $\Xi_{2j}(x)$ และ $\Xi_{3j}(x)$ คือฟังก์ชันรูปร่างในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของ $u_0(x,t)$, $w_0(x,t)$ และ $\phi(x,t)$ ตามลำดับ ฟังก์ชันรูปร่างของคานที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ (essential boundary condition) ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประกอบไปด้วยจุดรองรับแบบง่ายหรือแชน (Hinged support) และจุดรองรับแบบยึดแน่น (clamped support) การระบุเงื่อนไขขอบเขตอ้างอิงถึงรูปแบบต่าง ๆ ข้างต้นนั้นจะใช้อักษรภาษาอังกฤษเพื่อบ่งบอกถึงรูปแบบดังกล่าว คือ อักษร H แทนจุดรองรับแบบง่าย อักษร C แทนจุดรองรับแบบยึดแน่น ซึ่งจะประกอบด้วยกัน 3 เงื่อนไข สามารถอธิบายดังแสดงในตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 คำอธิบายเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ

เงื่อนไขขอบเขต (B.C.)	คำอธิบาย
C - C	จุดรองรับทั้งซ้ายและขวาถูกยึดแน่น
C - H	จุดรองรับด้านซ้ายถูกยึดแน่นและจุดรองรับด้านขวาเป็นแบบง่าย
H - H	จุดรองรับทั้งซ้ายและขวาถูกยึดด้วยจุดรองรับเป็นแบบง่าย

สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบ คือ C - C (Clamp - Clamp) ฟังก์ชันระยะการกระจัดมีค่าดังนี้
ที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = L$

$$u_o(x, t) = 0$$

$$w_o(x, t) = 0$$

$$\phi(x, t) = 0$$

สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบ คือ C - H (Clamp - Hinge) ฟังก์ชันระยะการกระจัดมีค่าดังนี้
ที่ตำแหน่ง $x = 0$

$$u_o(x, t) = 0$$

$$w_o(x, t) = 0$$

$$u_o(x, t) = 0$$

ที่ตำแหน่ง $x = L$

$$u_o(x, t) = 0$$

$$w_o(x, t) = 0$$

$$\phi(x, t) \neq 0$$

สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบ คือ H - H (Hinge - Hinge) ฟังก์ชันระยะการกระจัดมีค่าดังนี้
ที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = L$

$$u_o(x, t) = 0$$

$$w_o(x, t) = 0$$

$$\phi(x, t) \neq 0$$

ซึ่งจะสอดคล้องกับฟังก์ชันรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 6.2

ตารางที่ 6.2 ฟังก์ชันรูปร่างของโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

B.C.	$\Xi_{1j}(x)$	$\Xi_{2j}(x)$	$\Xi_{3j}(x)$
C - C	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$
C - H	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j$
H - H	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^j \left(1 - \frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^{j-1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากฟังก์ชันระยะการกระจัด (สมการที่ 6.24) ซึ่งสมมุติขึ้นก่อนหน้านี้นั้น จากนั้นนำไปแทนลงในสมการพลังงานรวม Π (สมการที่ 6.23) และนำไปประยุกต์ใช้กับสมการลากรางจ์ เพื่อหาสมการเคลื่อนที่ของคาน ดังแสดงต่อไปนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (6.25)$$

โดยที่ $q_j = \{A_j(t), B_j(t), C_j(t)\}$ อยู่ในรูปฟังก์ชันทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับเวลาซึ่งไม่ทราบค่าและจำเป็นต้องหา สามารถแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{A}_j} = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{B}_j} = 0 \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{C}_j} = 0 \quad (6.28)$$

ซึ่งจะได้สมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างคานแบบแขนดัดวิหจจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \\ C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A}(t) \\ \ddot{B}(t) \\ \ddot{C}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

โดยที่ \mathbf{K} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็งของคาน (Stiffness matrix)

\mathbf{M} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวลของคาน (Mass matrix)

\mathbf{F} คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกแบบพลวัตใดๆ (Force vector)

โดยสมาชิกของเมทริกซ์ในสมการที่ 6.29 แสดงดังต่อไปนี้

สมาชิกในเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็งของคาน (\mathbf{K})

$$\begin{aligned} K_{jm}^{11} &= A_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{1j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{1m}}{\partial x} dx \\ K_{jm}^{12} &= 0 \\ K_{jm}^{13} &= B_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{1j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{3m}}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (6.30)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
K_{jm}^{21} &= 0 \\
K_{jm}^{22} &= A_{55} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx + k_w \int_0^L \Xi_{2j} \Xi_{2m} dx \\
&\quad + k_s \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx \\
K_{jm}^{23} &= A_{55} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \Xi_{3m} dx \\
K_{jm}^{31} &= B_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{3j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{1m}}{\partial x} dx \\
K_{jm}^{32} &= A_{55} \int_0^L \Xi_{3j} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx \\
K_{jm}^{33} &= \left(D_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{3j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{3m}}{\partial x} dx + A_{55} \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{3m} dx \right)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

สมาชิกในเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวลของคาน (M)

$$\begin{aligned}
M_{jm}^{11} &= I_0 \int_0^L \Xi_{1j} \Xi_{1m} dx \\
M_{jm}^{12} &= 0 \\
M_{jm}^{13} &= I_1 \int_0^L \Xi_{1j} \Xi_{3m} dx \\
M_{jm}^{21} &= 0 \\
M_{jm}^{22} &= I_0 \int_0^L \Xi_{2j} \Xi_{2m} dx \\
M_{jm}^{23} &= 0 \\
M_{jm}^{31} &= I_1 \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{1m} dx \\
M_{jm}^{32} &= 0 \\
M_{jm}^{33} &= I_2 \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{3m} dx
\end{aligned} \tag{6.31}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมาชิกในเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ (F) กรณี 3 แรง

$$\begin{aligned}
 F_j &= -P_1(t)\Xi_{2j}(x_{p1}) && \text{if } 0 \leq t < \frac{d}{v_p} \\
 F_j &= -P_1(t)\Xi_{2j}(x_{p1}) - P_2(t)\Xi_{2j}(x_{p2}) && \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\
 F_j &= -P_1(t)\Xi_{2j}(x_{p1}) - P_2(t)\Xi_{2j}(x_{p2}) - P_3(t)\Xi_{2j}(x_{p3}) && \text{if } t_2 \leq t \leq t_3 = \frac{L}{v_p} \\
 F_j &= -P_2(t)\Xi_{2j}(x_{p2}) - P_3(t)\Xi_{2j}(x_{p3}) && \text{if } t_3 < t \leq t_3 + t_1 \\
 F_j &= -P_3(t)\Xi_{2j}(x_{p3}) && \text{if } t_3 + t_1 < t \leq t_3 + t_2.
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ (สมการที่ 6.29) การหาค่าระยะกระจัดหรือระยะการโก่งของคานที่ตำแหน่งใด ๆ และ ณ เวลาใดๆ สามารถหาได้โดยใช้วิธีการของนิวมาร์คซึ่งผลลัพธ์ต่างๆ จะแสดงในบทที่ถัดไป สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระจะสมมติให้ $A(t)$, $B(t)$ และ $C(t)$ มีพฤติกรรมเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} A_j(t) \\ B_j(t) \\ C_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_j e^{i\omega t} \\ \bar{B}_j e^{i\omega t} \\ \bar{C}_j e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

โดยที่ j มีค่าเท่ากับ 1, 2 ถึง N ค่า

ω คือ ความถี่ธรรมชาติของคาน

นำสมการที่ 6.33 แทนลงในสมการที่ 6.29 และกำหนดให้ $F(t)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะได้สมการเจาะจง (eigenvalue equation) ของปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระ ดังนี้

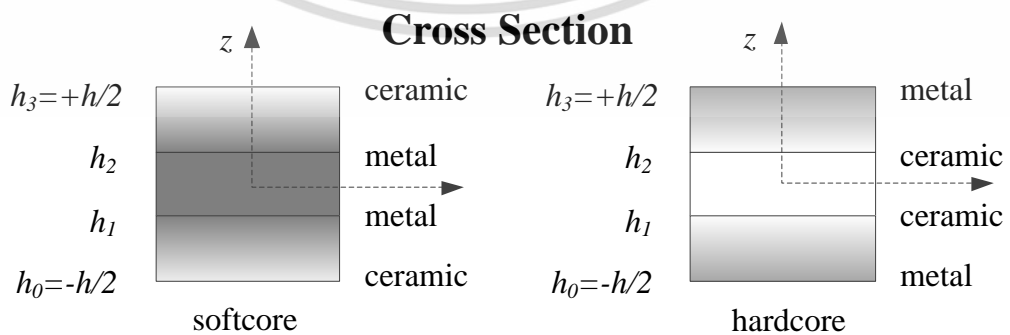
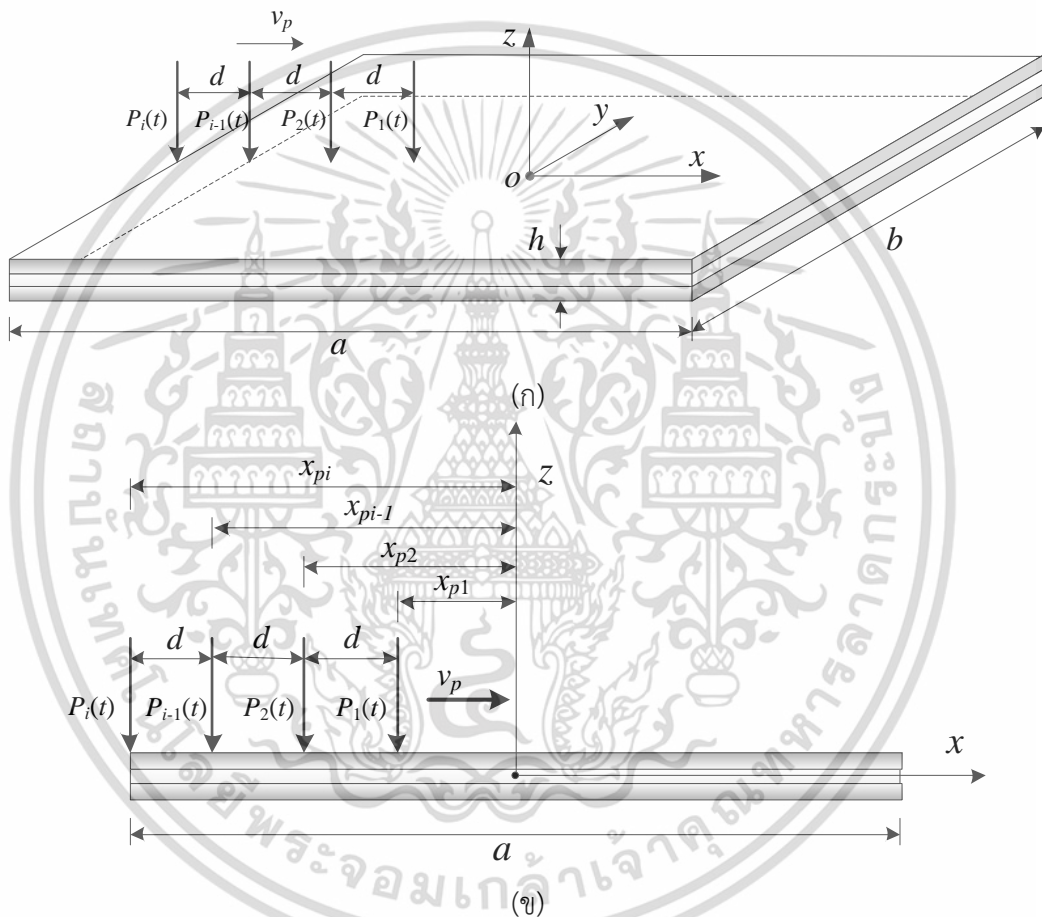
$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

ทำการแก้ปัญหาค่าสมการที่ 6.34 เพื่อหาค่าเจาะจงจะได้ค่าความถี่ธรรมชาติของคานแบบแชนด์วิช จากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งผลลัพธ์ที่จะแสดงในบทถัดไป

6.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างแผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเล็กน้อยลำดับที่หนึ่ง

ในส่วนของหัวข้อนี้จะเป็นการแสดงรายละเอียดของกระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีความเกี่ยวข้องกับโครงสร้างแผ่นบาง โดยลักษณะของโครงสร้างถูกพิจารณาว่าเป็นโครงสร้างแบบแชนด์วิช ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ในบทที่ 4 ดังประกอบไปด้วยเอกสารนี้เป็นเอกสารทบทวนวัสดุสำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยามให้เกินไปซึ่งประเด็นด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชั้นของแผ่นประกอบบนและล่าง ที่ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันและชั้นแกนกลาง (Core) ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุประเภทเนื้อเดียว ตามลำดับ ซึ่งแสดงโครงสร้างตามพิกัดอ้างอิงตามรูปที่ 6.5 โดยมีความยาวเท่ากับ a ความกว้าง b และความหนา h ตามทิศทางในแนวแกน x , y และ z ตามลำดับ จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก $O(x, y, z)$ จะอยู่ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบาง ดังแสดงในรูปที่ 6.5ก และจะอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ $P_i(t)$ โดยเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน x ด้วยความเร็วคงที่ v_p โดยระยะห่างระหว่างแรงที่กระทำมีค่าเท่ากับ d แสดงดังรูปที่ 6.5ข เมื่อพิจารณาถึงตำแหน่งของแรงใด ๆ บนแผ่นบาง จะสามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ $x_{pi} = [v_p t - (i-1)d]$



(ค)

รูปที่ 6.5 โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากที่กล่าวมาในหัวข้อโครงสร้างคานแบบแซนด์วิช โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันก็เช่นเดียวกันนั้นคือจะประกอบไปด้วย 2 ส่วนหลัก ส่วนของชั้นแกนกลาง (Core layer) และส่วนของชั้นประกบบนและล่าง (Face sheet layer) โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ชั้นแกนกลางอ่อนและชั้นแกนกลางแข็ง แสดงดังรูปที่ 6.5ค ซึ่งค่าคุณสมบัติวัสดุประสิทธิผล (effective material properties) ของวัสดุแต่ละชั้นของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันสามารถหาได้ดังต่อสมการต่อไปนี้

$$E^{(i)} = (E_b - E_t)V_b^{(i)}(z) + E_t \quad (6.35)$$

$$\rho^{(i)} = (\rho_b - \rho_t)V_b^{(i)}(z) + \rho_t \quad (6.36)$$

โดยที่ E และ ρ คือ ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นและค่าความหนาแน่นวัสดุของวัสดุ ส่วนตัวห้อย t และ b แสดงถึงคุณสมบัติของวัสดุ ณ ตำแหน่งผิวด้านนอกและผิวด้านแกนกลางของวัสดุ ตามลำดับ V_b คือสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ สามารถได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} V_b^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^n & z \in [h_0, h_1] \\ V_b^{(2)}(z) &= 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V_b^{(3)}(z) &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^n & z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \quad (6.37)$$

ค่าของ n คือ ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ ซึ่งจะแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของวัสดุตามความหนาของแผ่นบาง โดยที่อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น จะถูกนิยามโดยสัญลักษณ์ตัวเลข 3 หลัก เช่น 1-1-1 หมายความว่า $h_0 = -h/2$, $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$ และ $h_3 = h/2$ เป็นต้น

พิจารณาโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง ระยะการกระจัดในแนวแกน x , y และ z สามารถแสดงอยู่ในรูปฟังก์ชัน $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ และ $w(x, y, z, t)$ ตามลำดับ ดังนี้

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \quad (6.38)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \quad (6.39)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (6.40)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ u_0, v_0 และ w_0 คือระยะการกระจัด ณ ตำแหน่งระนาบกึ่งกลางหรือที่แกน z เท่ากับศูนย์ ส่วนตัวแปร ϕ_x และ ϕ_y คือมุมระนาบตัดขวางรอบแกน y และแกน x ตามลำดับ ส่วนตัวแปร t คือเวลา ดังนั้นอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างระยะการกระจัด ความเครียดตึงฉาก (normal strain, $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$) และความเครียดเฉือน (shear strain, $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) ซึ่งได้กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้ จะได้

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (6.41)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix}. \quad (6.42)$$

ดังนั้นอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดตามกฎของฮุกจะได้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{yy}^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^{(i)} \\ \tau_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (6.43)$$

โดยที่ $\sigma^{(i)}$ และ $\tau^{(i)}$ แสดงถึงความเค้นตึงฉากและความเค้นเฉือนของแผ่นบางแบบแซนด์วิช ณ ตำแหน่งชั้นใด ๆ ($i=1, 2, 3$) ตามลำดับ ส่วนสมาชิก Q ณ ตำแหน่งใด ๆ ในเมทริกซ์สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E^{(k)}(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E^{(k)}(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} &= \kappa_s^{(k)} \frac{E^{(k)}(z)}{2[1+\nu]}, \quad Q_{66} = \frac{E^{(k)}(z)}{2[1+\nu]} \end{aligned} \quad (6.44)$$

พารามิเตอร์ κ คือค่าสัมประสิทธิ์แรงเฉือน (shear correction factor) ก็จะมีค่าเหมือนกับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอธิบายไว้ก่อนหน้านี้

6.2.1 พลังงานความเครียดสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อก่อนหน้านี้ว่าวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาจะประยุกต์ใช้หลักการพลังงาน (energy principle) โดยการสมมุติฟังก์ชันระยะการกระจัด โดยที่พลังงานดังกล่าวหาได้จาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความเค้น ความเครียด ระยะการกระจัดและการเปลี่ยนรูปโครงสร้างแผ่นบาง โดยที่ค่าพลังงานความเครียด ของแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz}^{(i)} \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(i)} \gamma_{xz} + \tau_{xy}^{(i)} \gamma_{xy}) dz dx dy \quad (6.45)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ 6.43 แทนลงในสมการที่ 6.45 ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned} U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} & \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2A_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} \right. \\ & + 2B_{11} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2B_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ & + 2A_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2A_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} \right)^2 \\ & + 2B_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2B_{22} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ & + A_{44} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \frac{\partial w_o}{\partial x} \phi_x + 2A_{44} \frac{\partial w_o}{\partial y} \phi_y \\ & + 2B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial y} + 2B_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} \\ & + 2A_{55} \phi_x \frac{\partial w_o}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \phi_x^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ & + 2D_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} + 2B_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ & + 2B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial x} + 2A_{44} \phi_y \frac{\partial w_o}{\partial y} + 2D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2D_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\ & \left. + D_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + A_{44} \phi_y^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \quad (6.46) \end{aligned}$$

สำหรับพารามิเตอร์ต่างๆ ในสมการที่ 6.46 จะเกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็ง (stiffness) ของวัสดุในด้านต่าง ๆ โดยสามารถอธิบายความหมายได้ดังต่อไปนี้

A_j คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึง (Extensional stiffness) ที่เกี่ยวข้องกับแนวแกน x และแกน y เมื่อ $i, j = 1, 2$

B_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งด้านการดึงและการดัดแบบผสม (Extensional-bending stiffness) ที่เกี่ยวข้องกับแนวแกน x และแกน y เมื่อ $i, j = 1, 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

D_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งต้านการดัด (bending stiffness) ที่เกี่ยวข้องกับแกน x และแกน y เมื่อ $i, j = 1, 2$

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} คือ ค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวกับความแข็งเกร็งต้านการเฉือน (Shear stiffness) เมื่อ $i, j = 4, 5, 6$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \sum_{k=1}^3 \int_{h_{k-1}}^{h_k} Q_{ij} [1, z, z^2] dz \quad (6.47)$$

6.2.2 พลังงานจลน์สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

นอกจากพลังงานความเครียดแล้วโครงสร้างแผ่นบางที่มีการเคลื่อนที่หรือมีการสั่นสะเทือน จะมีพลังงานจลน์ (kinetic energy) สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + I_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (6.48)$$

โดยที่ I_0, I_1 และ I_2 คือค่าสัมประสิทธิ์ความเฉื่อยแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$[I_0, I_1, I_2] = \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)} [1, z, z^2] dz. \quad (6.49)$$

6.2.3 งานจากแรงกระทำภายนอกสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

เพื่อที่จะประยุกต์ใช้กับสมการลากรางจ์ พิจารณางานที่เกิดจากแรงกระทำภายนอกแบบเคลื่อนที่ตั้งแต่แรงกระทำแค่หนึ่งแรงหรือมากกว่าหนึ่งแรง ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้ กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 1 แรงบนแผ่นบาง

$$U_{ex} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{p1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_1 = \frac{a}{v_p} \\ 0 & \text{if } t_1 < t \end{cases} \quad (6.50)$$

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 2 แรงบนแผ่นบาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$U_{ex} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{p1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{p1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{p2}, 0, t) & \text{if } t_1 \leq t \leq t_2 = \frac{a}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{p2}, 0, t) & \text{if } t_2 < t \leq t_1 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_1 + t_2 < t \end{cases} \quad (6.51)$$

กรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ 3 แรงบนแผ่นบาง (P_1 , P_2 และ P_3)

$$U_{ex} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{p1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{p1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{p2}, 0, t) & \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\ -P_1(t)w_0(x_{p1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{p2}, 0, t) - P_3(t)w_0(x_{p3}, 0, t) & \text{if } t_2 \leq t \leq t_3 = \frac{a}{v_p} \\ -P_2(t)w_0(x_{p2}, 0, t) - P_3(t)w_0(x_{p3}, 0, t) & \text{if } t_3 < t \leq t_3 + t_1 \\ -P_3(t)w_0(x_{p3}, 0, t) & \text{if } t_3 + t_1 < t \leq t_3 + t_2 \\ 0 & \text{if } t_3 + t_2 < t \end{cases} \quad (6.52)$$

ส่วนค่า P_1 , P_2 และ P_3 กรณีเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก สามารถแสดงได้ดังนี้

$$P_1(t) = P_0 \sin(\Omega_1 t + \psi_1) \quad (6.53)$$

$$P_2(t) = P_0 \sin(\Omega_2 t + \psi_2) \quad (6.54)$$

$$P_3(t) = P_0 \sin(\Omega_3 t + \psi_3) \quad (6.55)$$

เมื่อค่า P_0 คือ ขนาดแรงในหน่วยนิวตัน

Ω_i คือ ความถี่ของแรงที่กระทำในหน่วยเรเดียนต่อวินาที

ψ_i คือ มุมเฟสในหน่วยเรเดียน

d คือ ระยะทางระหว่างแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ในหน่วยเมตร

ดังนั้นจากพลังงานที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น ทั้งพลังงานความเครียด พลังงานจลน์ และงานที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก จะสามารถเขียนอยู่ในรูปพลังงานศักย์รวม ได้ดังนี้

$$\Pi = U_s - U_k - U_{ex} \quad (6.56)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.2.4 วิธีการหาผลเฉลยสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

เพื่อที่จะหาค่าผลตอบสนองทางด้านพลวัตของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ในหัวข้อนี้จะใช้ระเบียบวิธีของรีทซึ่งใช้หลักการเหมือนกันกับโครงสร้างแบบคานที่พิจารณาก่อนหน้านี้ โดยการสมมติฟังก์ชันระยะการกระจัดให้ถูกต้องทั้งด้าน x และด้าน y นั่นคือ $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $w_0(x, y, t)$, $\phi_x(x, y, t)$ และ $\phi_y(x, y, t)$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับเวลา (time-dependent generalized coordinates) และฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต โดยรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามที่เลือกใช้ในหัวข้อนี้คือฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมชมิท (Gram-Schmidt polynomial) จากนั้นใช้วิธีการของลากรางจ์ในการหาสมการการเคลื่อนที่ และใช้วิธีการของนิวมาร์ค ในการหาผลตอบสนองทางด้านพลวัตของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันต่อไป

ดังนั้นฟังก์ชันระยะการกระจัดของแผ่นบางสามารถแสดงอยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

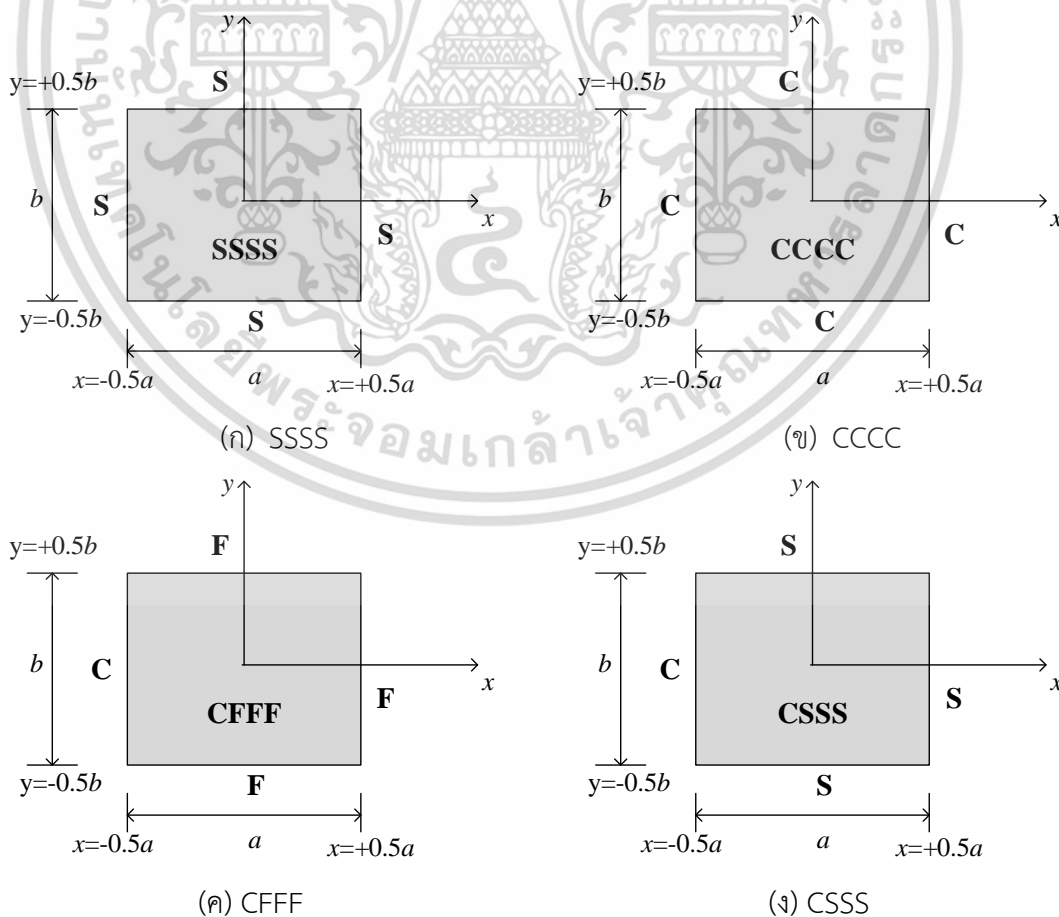
$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n U_{ij}(t) N_i^u(x) N_j^u(y) \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij}(t) N_i^v(x) N_j^v(y) \\
 w_0(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij}(t) N_i^w(x) N_j^w(y) \\
 \phi_x(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}(t) N_i^{\phi_x}(x) N_j^{\phi_x}(y) \\
 \phi_y(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{ij}(t) N_i^{\phi_y}(x) N_j^{\phi_y}(y)
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

โดยที่ $N_i^\varphi(x)$, $i=1, 2, 3, \dots, m$, $N_j^\varphi(y)$, $j=1, 2, 3, \dots, n$ และ $\varphi=u, v, w, \phi_x, \phi_y$ คือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ตามแนวแกนใดๆ ในทำนองเดียวกันฟังก์ชันรูปร่างเหล่านี้ จะอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมชมิท โดยสามารถสร้างได้ตามหลักการที่กล่าวไว้ในบทที่ 4 ส่วนค่า U_{ij} , $V_{ij}(t)$, $W_{ij}(t)$, $X_{ij}(t)$ และ $Y_{ij}(t)$ คือฟังก์ชันทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับเวลาซึ่งไม่ทราบค่าและจำเป็นต้องหา โดยฟังก์ชันรูปร่างของแผ่นบางต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ที่กำหนดขึ้นในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้แผ่นบางจะมีจุดอ้างอิงตรงกลางแผ่น โดยแต่ละด้านของแผ่นบางประกอบไปด้วยเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ 3 แบบ คือ เงื่อนไขขอบเขตที่มีด้านรองรับแบบง่าย (Simply supported boundary condition) แทนด้วยอักษรด้วย S ต่อมาเงื่อนไขขอบเขตที่มีด้านถูกยึดแน่น Clamped boundary condition) แทนด้วยอักษร C และสุดท้ายเงื่อนไขที่มีด้านปล่อยอิสระ (Free boundary condition) แทนด้วยอักษร F โดยมีรายการละเอียดเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 6.3

ตารางที่ 6.3 เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ ของโครงสร้างแผ่นบางทั้ง 4 ด้าน

เงื่อนไขขอบเขต (B.C.)	คำอธิบาย
Simply supported (S)	$v_o = w_o = \phi_y = 0$ ที่ $x = -0.5a$ และ $+0.5a$ $u_o = w_o = \phi_x = 0$ ที่ $y = -0.5b$ และ $+0.5b$
Clamped (C)	$u_o = v_o = w_o = \phi_x = \phi_y = 0$ ที่ $x = -0.5a$ และ $+0.5a$ $u_o = v_o = w_o = \phi_x = \phi_y = 0$ ที่ $y = -0.5b$ และ $+0.5b$
Free (F)	$u_o = v_o = w_o = \phi_x = \phi_y \neq 0$ ที่ $x = -0.5a$ และ $+0.5a$ $u_o = v_o = w_o = \phi_x = \phi_y \neq 0$ ที่ $y = -0.5b$ และ $+0.5b$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้างแผ่นบางจะประกอบด้วย 4 เงื่อนไขหรือ 4 ด้านของแผ่นบาง นั่นคือที่ $x = -0.5a$, $x = +0.5a$, $y = -0.5b$ และที่ $y = +0.5b$ และจะใช้อักษรภาษาอังกฤษ 4 ตัวเพื่อระบุเงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางทั้ง 4 ด้าน โดยกำหนดให้มุมทวนเข็มนาฬิกาเริ่มจากด้าน $x = -0.5a$ จนถึงด้าน $y = +0.5b$ ยกตัวอย่างเช่น SSSS หมายถึงเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้านเป็นแบบรองรับอย่างง่าย เป็นต้น ดังแสดงตัวอย่างดังรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6 แสดงตัวอย่างเงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้างแผ่นบางทั้ง 4 ด้าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้เพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้เผยแพร่เห็นประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ฟังก์ชันรูปร่างจะอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมขมิตต์ โดยสามารถสร้างแต่ละพจน์ได้ตามหลักการที่กล่าวไว้ในบทที่ 4 โดยการกำหนดฟังก์ชันรูปร่างพจน์แรก ($N_1^u(x)$ หรือ $N_1^u(y)$) ขึ้นมาก่อนโดยให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด แล้วใช้วิธีการของแกรมขมิตต์เพื่อที่จะหาจำนวนพจน์ต่อ ๆ ไป ซึ่งจำนวนพจน์ที่เหมาะสมจะศึกษาในช่วงของการลู่ออกของคำตอบต่อไป (Convergence study) ตารางที่ 6.4 แสดงการกำหนดพจน์แรกของแผ่นบาง โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS และ CCCC

ตารางที่ 6.4 แสดงการกำหนดพจน์แรก (ฟังก์ชันรูปร่าง) ของโครงสร้างแผ่นบาง

B.C.	SSSS	CCCC
$N_1^u(x)$	1	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^u(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^v(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^v(y)$	1	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^w(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^w(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^{\phi_x}(x)$	1	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^{\phi_x}(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^{\phi_y}(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^{\phi_y}(y)$	1	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$

สำหรับกรณีการรองรับแบบอื่น ๆ เช่น CSSS ก็สามารถทำได้ในรูปแบบเดียวกันหรือใช้หลักการเดียวกันกับที่แสดงในตัวอย่างในตารางที่ 6.4 แต่ต้องพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตให้สอดคล้องกับการรองรับที่ต้องการ ดังนั้นพจน์แรกคือพจน์ที่สำคัญในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต หากสมมุติพจน์แรกผิดพลาด พจน์อื่น ๆ ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีการของแกรมขมิตต์จะมีความสัมพันธ์กับพจน์แรกก็จะผิดพลาดไปด้วย

จากฟังก์ชันระยะกระจัดที่สมมุติขึ้นก่อนหน้านี้ ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมขมิตต์ จากนั้นนำไปแทนลงในสมการพลังงานรวม (สมการที่ 6.56) นำพลังงานรวมแทนค่าลงในสมการลากรางจ์ เพื่อหาสมการเคลื่อนที่ของแผ่นบาง ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_{ij}} = 0 \quad (6.58)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ q_{ij} คือพิกัดทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับเวลาซึ่งไม่ทราบค่า ($U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), X_{ij}(t)$) ซึ่งจะได้สมการการเคลื่อนที่ของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\phi_x u} & K^{\phi_y u} \\ & K^{vv} & K^{wv} & K^{\phi_x v} & K^{\phi_y v} \\ & & K^{ww} & K^{\phi_x w} & K^{\phi_y w} \\ \text{sym} & & & K^{\phi_x \phi_x} & K^{\phi_y \phi_x} \\ & & & & K^{\phi_y \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\phi_x u} & M^{\phi_y u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\phi_x v} & M^{\phi_y v} \\ & & M^{ww} & M^{\phi_x w} & M^{\phi_y w} \\ \text{sym} & & & M^{\phi_x \phi_x} & M^{\phi_y \phi_x} \\ & & & & M^{\phi_y \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{W} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

โดยที่ \mathbf{K} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็ง (Stiffness matrix)

\mathbf{M} คือ เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับมวล (Mass matrix)

\mathbf{F} คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกแบบพลวัตใดๆ (Force vector)

รายละเอียดของสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์และเวกเตอร์สามารถได้ดังต่อไปนี้

รายละเอียดของเมทริกซ์ \mathbf{K}

$$\begin{aligned} K_{ijmn}^{uu} &= A_{11} P_{im}^{uu11} Q_{jn}^{uu00} + A_{66} P_{im}^{uu00} Q_{jn}^{uu11} \\ K_{ijmn}^{vu} &= A_{12} P_{im}^{vu01} Q_{jn}^{vu10} + A_{66} P_{im}^{vu10} Q_{jn}^{vu01} \\ K_{ijmn}^{vv} &= A_{22} P_{im}^{vv00} Q_{jn}^{vv11} + A_{66} P_{im}^{vv11} Q_{jn}^{vv00} \\ K_{ijmn}^{wu} &= K_{ijmn}^{wv} = 0 \\ K_{ijmn}^{ww} &= A_{44} P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww11} + A_{55} P_{im}^{ww11} Q_{jn}^{ww00} \\ K_{ijmn}^{\phi_x u} &= B_{11} P_{im}^{\phi_x u11} Q_{jn}^{\phi_x u00} + B_{66} P_{im}^{\phi_x u00} Q_{jn}^{\phi_x u11} \\ K_{ijmn}^{\phi_x v} &= B_{12} P_{im}^{\phi_x v10} Q_{jn}^{\phi_x v01} + B_{66} P_{im}^{\phi_x v01} Q_{jn}^{\phi_x v10} \\ K_{ijmn}^{\phi_x w} &= A_{55} P_{im}^{\phi_x w01} Q_{jn}^{\phi_x w00} \\ K_{ijmn}^{\phi_x \phi_x} &= D_{11} P_{im}^{\phi_x \phi_x 11} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00} + A_{55} P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00} + D_{66} P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 11} \\ K_{ijmn}^{\phi_y u} &= B_{12} P_{im}^{\phi_y u01} Q_{jn}^{\phi_y u10} + B_{66} P_{im}^{\phi_y u10} Q_{jn}^{\phi_y u01} \\ K_{ijmn}^{\phi_y v} &= B_{22} P_{im}^{\phi_y v00} Q_{jn}^{\phi_y v11} + B_{66} P_{im}^{\phi_y v11} Q_{jn}^{\phi_y v00} \\ K_{ijmn}^{\phi_y w} &= A_{44} P_{im}^{\phi_y w00} Q_{jn}^{\phi_y w01} \\ K_{ijmn}^{\phi_y \phi_x} &= D_{12} P_{im}^{\phi_y \phi_x 01} Q_{jn}^{\phi_y \phi_x 10} + D_{66} P_{im}^{\phi_y \phi_x 10} Q_{jn}^{\phi_y \phi_x 01} \\ K_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} &= D_{22} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 11} + A_{44} P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} + D_{66} P_{im}^{\phi_y \phi_y 11} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00} \end{aligned} \quad (6.60)$$

รายละเอียดของการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง P_{im}^{pqrs} และ Q_{jn}^{pqrs} สามารถดูได้จากภาคผนวก ก เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่นิยามให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รายละเอียดของเมทริกซ์ M

$$\begin{aligned}
 M_{ijmn}^{uu} &= I_0 P_{im}^{uu00} Q_{jn}^{uu00}, M_{ijmn}^{vu} = 0, M_{ijmn}^{vv} = I_0 P_{im}^{vv00} Q_{jn}^{vv00}, M_{ijmn}^{wu} = 0, \\
 M_{ijmn}^{wv} &= 0, M_{ijmn}^{ww} = I_0 P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww00}, M_{ijmn}^{\phi_x u} = I_1 P_{im}^{\phi_x u00} Q_{jn}^{\phi_x u00}, M_{ijmn}^{\phi_x v} = 0 \\
 M_{ijmn}^{\phi_x w} &= 0, M_{ijmn}^{\phi_x \phi_x} = I_2 P_{im}^{\phi_x \phi_x 00} Q_{jn}^{\phi_x \phi_x 00}, M_{ijmn}^{\phi_x \phi_y} = 0, M_{ijmn}^{\phi_y u} = 0 \\
 M_{ijmn}^{\phi_y v} &= I_1 P_{im}^{\phi_y v00} Q_{jn}^{\phi_y v00}, M_{ijmn}^{\phi_y w} = 0, M_{ijmn}^{\phi_y \phi_x} = 0, M_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} = I_2 P_{im}^{\phi_y \phi_y 00} Q_{jn}^{\phi_y \phi_y 00}
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

รายละเอียดของเวกเตอร์ F กรณี 3 แรง

$$\begin{aligned}
 F_{ij} &= -P_1(t)N_i(x_{p1})N_j(0) && \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p} \\
 F_{ij} &= -P_1(t)N_i(x_{p1})N_j(0) - P_2(t)N_i(x_{p2})N_j(0) && \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p} \\
 F_{ij} &= -P_1(t)N_i(x_{p1})N_j(0) - P_2(t)N_i(x_{p2})N_j(0) \\
 &\quad - P_3(t)N_i(x_{p3})N_j(0) && \text{if } t_2 \leq t < t_3 = \frac{L}{v_p} \\
 F_{ij} &= -P_2(t)N_i(x_{p2})N_j(0) - P_3(t)N_i(x_{p3})N_j(0) && \text{if } t_3 \leq t < t_3 + t_1 \\
 F_{ij} &= -P_3(t)N_i(x_{p3})N_j(0) && \text{if } t_3 + t_1 \leq t < t_3 + t_2
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

จากสมการที่ 6.59 การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับของแผ่นบางภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ สามารถหาระยะเคลื่อนที่ ความเร็ว อัตราเร่งของแผ่นบางที่ตำแหน่งที่สนใจ ณ เวลาใด ๆ ที่สอดคล้องกับแรงที่กระทำบนแผ่นบางโดยใช้วิธีการของนิวมาร์ค

สำหรับกรณีวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบาง เวกเตอร์ของแรงภายนอกไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาและสมมติให้การสั่นสะเทือนมีพฤติกรรมเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า สามารถแสดงดังรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} U_{ij}(t) \\ V_{ij}(t) \\ W_{ij}(t) \\ X_{ij}(t) \\ Y_{ij}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{V}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{W}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{X}_{ij} e^{i\omega t} \\ \bar{Y}_{ij} e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{6.63}$$

โดยที่ $i = 1, 2, 3 \dots m$ และ $j = 1, 2, 3 \dots n$

โดยที่ ω คือความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง เมื่อนำสมการที่ 6.63 แทนลงในสมการที่ 6.59 และกำหนดให้เวกเตอร์ F เท่ากับศูนย์ ผลลัพธ์จะได้สมการเจาะจง (eigenvalue equation) ของปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบาง ดังแสดงต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

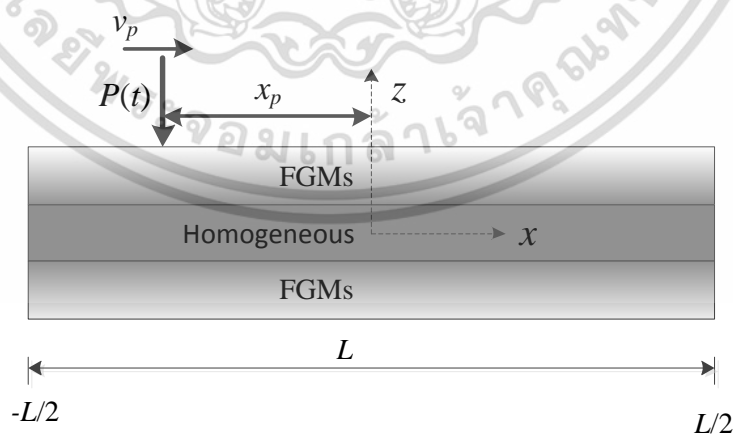
$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\phi_x u} & K^{\phi_y u} \\ & K^{vv} & K^{wv} & K^{\phi_x v} & K^{\phi_y v} \\ & & K^{ww} & K^{\phi_x w} & K^{\phi_y w} \\ sym & & & K^{\phi_x \phi_x} & K^{\phi_y \phi_x} \\ & & & & K^{\phi_y \phi_y} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\phi_x u} & M^{\phi_y u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\phi_x v} & M^{\phi_y v} \\ & & M^{ww} & M^{\phi_x w} & M^{\phi_y w} \\ sym & & & M^{\phi_x \phi_x} & M^{\phi_y \phi_x} \\ & & & & M^{\phi_y \phi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \\ \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

การแก้ปัญหาหาสมการที่ 6.34 เพื่อหาค่าเฉพาะ (Eigen value) ซึ่งก็คือค่าที่ต้องการทราบในกรณีนี้คือค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงบทถัดไป

6.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม

พิจารณาโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่แสดงดังรูป 6.7 ซึ่งในหัวข้อนี้จะอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามและการหาสมการควบคุมหรือสมการเคลื่อนที่ได้กล่าวไว้อย่างละเอียดในบทที่ 5 ดังนั้นในหัวข้อนี้จะขออธิบายแบบสรุปที่สำคัญเท่านั้น



รูปที่ 6.7 โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

จากที่กล่าวมาแล้วว่าแก้ปัญหาหรือการหาผลเฉลยจะใช้หลักการพลังงานรวมในที่นี้คือพลังงานภายในหรือพลังงานความเครียด พลังงานจลน์และพลังงานจลน์และพลังงานจากแรงภายนอก โดยที่พลังงานความเครียดจะอยู่ในเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปความเค้นและความเครียด ซึ่งสามารถหาได้จากระยะกระจัด โดยที่ระยะการกระจัดของคานตามแกน x ถูกแทนด้วย u และระยะการกระจัดตามแกน z แทนด้วย w ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi(x, t) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (6.65)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (6.66)$$

โดยพลังงานความเครียดสามารถหาได้ดังนี้

$$U_s = \frac{b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dz dx \quad (6.67)$$

โดยที่ความเครียดและเครียดเฉือนหาได้จากสมการดังนี้

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.68)$$

ส่วนค่าความเค้นและความเค้นเฉือนหาได้โดย

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E(z)\epsilon_{xx} \\ \tau_{xz} &= G(z)\gamma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \end{aligned} \quad (6.69)$$

ดังนั้นเมื่อนำสมการที่ 6.68 – 6.69 แทนลงในสมการที่ 6.67 จะได้พลังงานความเครียดซึ่งแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 2c_1 E_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right. \\ &\quad - 2c_1 E_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2c_1 F_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 2c_1 F_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + c_1^2 H_{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad + 2c_1^2 H_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + c_1^2 H_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + A_{55} \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad \left. - 2c_2 D_{55} \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + F_{55} c_2^2 \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (6.70)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} [A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}] &= b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)}(z) [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dz \\ [A_{55}, D_{55}, F_{55}] &= b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \frac{E^{(i)}(z)}{2(1+\nu)} [1, z^2, z^4] dz \end{aligned} \quad (6.71)$$

พิจารณาพลังงานจลน์

$$U_k = \frac{b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx \quad (6.72)$$

เมื่อนำสมการที่ 6.68 – 6.69 แทนลงในสมการที่ 6.72 จะได้

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[I_0 \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right) + 2I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad - 2c_1 I_3 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} - 2c_1 I_3 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} - 2c_1 I_4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \\ &\quad - 2c_1 I_4 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + 2c_1^2 I_6 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \\ &\quad \left. + c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (6.73)$$

โดยที่ I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 และ I_6 สามารถหาได้ดังนี้

$$[I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)}(z) [1, z, z^2, z^3, z^4, z^6] dz \quad (6.74)$$

พิจารณาพลังงานจากแรงภายนอก (แรงที่เคลื่อนที่)

$$U_{EX} = - \int_{-L/2}^{L/2} P_0 \delta(x - x_p) w_0(x, t) dx \quad (6.75)$$

ดังนั้นผลรวมพลังงานสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\Pi = U_s - U_k - U_{EX} \quad (6.75)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษา ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านอื่น

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนในแก้ปัญหาต่อมาคือใช้ระเบียบวิธีการของริทต์ โดยการสมมติฟังก์ชันใด ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับปัญหาเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} u_0(x,t) = \sum_{j=1}^N A_j(t) \Xi_j^u(x) \\ w_0(x,t) = \sum_{j=1}^N B_j(t) \Xi_j^w(x) \\ \phi(x,t) = \sum_{j=1}^N C_j(t) \Xi_j^\phi(x) \end{cases} \quad (6.76)$$

เมื่อ $A_j(t)$, $B_j(t)$ และ $C_j(t)$ คือสัมประสิทธิ์ที่ต้องการหา ส่วน $\Xi_j^u(x)$, $\Xi_j^w(x)$ และ $\Xi_j^\phi(x)$ คือฟังก์ชันรูปร่างของระยะกระจัดซึ่งจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังแสดงในตารางที่ 6.5

ตารางที่ 6.5 เงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ของคานบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเส้นลำดับที่สาม

B.C.	$x = -\frac{L}{2}$	$x = \frac{L}{2}$
C - C	$u_0 = 0, w_0 = 0, \phi = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$	$u_0 = 0, w_0 = 0, \phi = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$
C - H	$u_0 = 0, w_0 = 0, \phi = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$	$u_0 = 0, w_0 = 0, \phi \neq 0$
H - H	$u_0 = 0, w_0 = 0, \phi \neq 0$	$u_0 = 0, w_0 = 0, \phi \neq 0$

ดังนั้นฟังก์ชันรูปร่างที่จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตข้างต้นแสดงได้ดังนี้

ตารางที่ 6.6 ฟังก์ชันรูปร่างของโครงสร้างคานที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ

B.C.	$\Xi_j^u(x)$	$\Xi_j^w(x)$	$\Xi_j^\phi(x)$
C - C	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)^2\left(x - \frac{L}{2}\right)^2x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$
C - H	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)^2\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$
H - H	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	$\left(x + \frac{L}{2}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right)x^{m-1}$	x^{m-1}

จากระเบียบวิธีการของริทต์โดยการสมมติสมมติฟังก์ชันที่สอดคล้องกับปัญหาเงื่อนไขขอบเขต (สมการที่ 6.76) เมื่อนำกลับไปแทนในสมการพลังงานรวม จากนั้นนำไปประยุกต์ใช้สมการลากรางจ์เพื่อหาสมการเคลื่อนที่ของระบบ ดังแสดงต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (6.77)$$

โดยที่ q_j สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} q_j &= A_j & \text{เมื่อ } j &= 1, 2, \dots, N \\ q_j &= B_j & \text{เมื่อ } j &= N+1, 2, \dots, 2N \\ q_j &= C_j & \text{เมื่อ } j &= 2N+1, 2, \dots, 3N \end{aligned} \quad (6.78)$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากสมการที่ 6.77 คือสมการเคลื่อนที่ของระบบ ดังแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \\ \ddot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

สำหรับกรณีวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคานแบบอิสระจะกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} A_j(t) \\ B_j(t) \\ C_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_j e^{i\omega t} \\ \bar{B}_j e^{i\omega t} \\ \bar{C}_j e^{i\omega t} \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

เมื่อนำสมการที่ 6.80 แทนลงในสมการที่ 6.79 ก็จะได้ระบบสมการสั่นสะเทือนแบบอิสระ คือ

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

โดยที่ ω คือความถี่ธรรมชาติของคาน สำหรับรายละเอียดของสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์และเวกเตอร์ และวิธีการปัญหาได้กล่าวไว้อย่างละเอียดในบทที่ 5

บทที่ 7

ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์และการวิเคราะห์ผล

จากวัตถุประสงค์ของการศึกษาในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ที่มุ่งเน้นศึกษาและวิเคราะห์เชิงตัวเลขของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแบบแซนด์วิช (Sandwich structures) ที่สร้างมาจากวัสดุผสมแบบวัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally Graded Materials, FGMs) ทั้งโครงสร้างคานและโครงสร้างแผ่นบางซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ซึ่งอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (First order shear deformation theory, FSDT) และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนอันดับที่สาม (third order shear deformation theory, TSDT)

7.1 ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบน

พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอและวิเคราะห์ผลลัพธ์ของการสั่นสะเทือนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งทำมาจากวัสดุผสมระหว่างอะลูมินา (Al_2O_3) และอะลูมิเนียม (Al) โดยเฟสที่เป็นเซรามิกแทนด้วยอะลูมินาและเฟสโลหะแทนด้วยอะลูมิเนียมโดยมีคุณสมบัติดังนี้

ตารางที่ 7.1 คุณสมบัติโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน[22]

คุณสมบัติ	เฟสเซรามิก	เฟสโลหะ
ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น (E)	$E_c = 380$ GPa	$E_m = 70$ GPa
ค่าความหนาแน่น (ρ)	$\rho_c = 3960$ kg/m ³	$\rho_m = 2702$ kg/m ³
อัตราส่วนปัวซอง (ν)	$\nu_c = 0.3$	$\nu_m = 0.3$

จากที่กล่าวข้างต้นว่าโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ชั้นแกนกลางอ่อน (soft core) และชั้นแกนกลางแข็ง (hard core) ดังนั้นในกรณีที่โครงสร้างคานมีชั้นแกนกลางอ่อนจะกำหนดให้ $E_b = E_c$, $\rho_b = \rho_c$, $E_t = E_m$ และ $\rho_t = \rho_m$ และกรณีที่ต้องการให้โครงสร้างคานมีชั้นแกนกลางแข็งจะกำหนดให้ $E_b = E_m$, $\rho_b = \rho_m$, $E_t = E_c$ และ $\rho_t = \rho_c$

ในการศึกษานี้กำหนดให้ความกว้าง (b) และความสูง (h) ของคานเท่ากับ 0.5 และ 1.0 เมตร ตามลำดับ โดยการวิเคราะห์จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระและการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับ ในกรณีของการสั่นสะเทือนแบบอิสระ ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคานจะถูกนำเสนอในรูปแบบหน่วยไร้มิติ ดังนี้

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (7.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7.1.1 ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบอิสระ

ก่อนการจำลองการสั่นสะเทือนของโครงสร้างสิ่งสำคัญอันดับแรกคือศึกษาการลู่เข้า (Convergence study) ของความถี่ธรรมชาติและการตรวจสอบความถูกต้อง จากตารางที่ 7.2 เป็นการศึกษาการลู่เข้าของโครงสร้างคานแบบแบนด์วิจจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน แบบชั้นแกนกลางแข็งและอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นที่ใช้คือ 1-1-1 สังเกตเห็นว่าความถูกต้องของความถี่ธรรมชาติไว้มิติ 3 โหมดแรกจะเพิ่มขึ้นหากจำนวนพจน์ (N) ของฟังก์ชันพหุนามเพิ่มขึ้น และจะลู่เข้าเมื่อจำนวน N เท่ากับ 10 ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเลือกใช้ $N = 10$ พจน์ สำหรับโครงสร้างคานแบบแบนด์วิจจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งทั้งหมด การทราบจำนวนพจน์ในฟังก์ชันพหุนามที่ใช้จะเป็นประโยชน์ต่อผลเฉลยทำให้มีความถูกต้องลดความผิดพลาดและลดการใช้ทรัพยากรที่ไม่จำเป็น รวมทั้งสามารถลดเวลาในการคำนวณ จากขั้นตอนของการศึกษาการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติไว้มิตินั้น เพื่อความถูกต้องจึงได้ทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยกับงานวิจัยที่ผ่านมา โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ คือ H-H, C-C และ C-H ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันเป็นที่ยอมรับได้

ตารางที่ 7.2 ผลการศึกษาการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติสำหรับโครงสร้างคานแบบแบนด์วิจจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ที่เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ($L/h = 20$)

B.C.	N	$n = 0.5$			$n = 5.0$		
		$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$	$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$
H-H	4	4.5333	22.6918	57.8540	3.1111	15.6477	40.2473
	6	4.5320	18.0237	40.3973	3.1102	12.4038	27.9275
	8	4.5320	17.9495	39.7571	3.1102	12.3524	27.4790
	9	4.5320	17.9492	39.7571	3.1102	12.3522	27.4790
	10	4.5320	17.9492	39.7571	3.1102	12.3522	27.4790
	Ref.[22]	4.5324	-	-	3.1111	-	-
	Ref.[103]	4.5316	17.9436	39.7226	3.1101	12.3507	27.4651
C-C	4	10.2026	28.0958	113.4970	7.0278	19.4596	98.5357
	6	10.1734	27.5784	55.0180	7.0064	19.0917	38.4976
	8	10.1733	27.5702	52.9340	7.0063	19.0858	36.8825
	9	10.1733	27.5702	52.8762	7.0063	19.0858	36.8346
	10	10.1733	27.5702	52.8759	7.0063	19.0858	36.8344
C-H	4	7.0556	22.8653	77.0377	4.8497	15.7833	54.1573
	6	7.0489	22.5459	47.3422	4.8450	15.5582	32.8640
	8	7.0489	22.5401	46.1677	4.8450	15.5541	32.0305
	9	7.0489	22.5401	46.1417	4.8450	15.5541	32.0119
	10	7.0489	22.5401	46.1413	4.8450	15.5541	32.0116

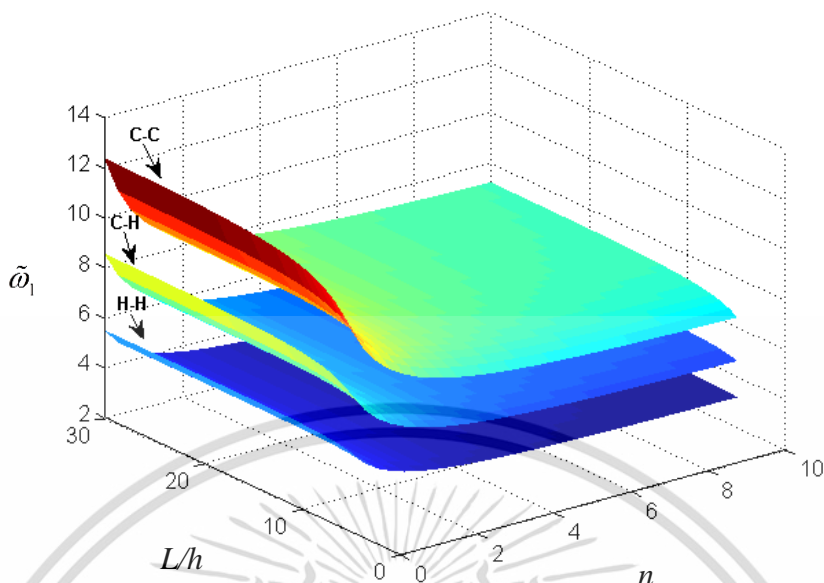
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และตารางที่ 7.3 ยังได้ทำการเปรียบเทียบความถูกต้องกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ โดยใช้ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ 3 โหมดแรก ที่เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ กันและอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นที่แตกต่างกัน ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นก็มีความสอดคล้องกันเป็นที่ยอมรับได้ ยกเว้นกรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-H ไม่มีงานวิจัยก่อนหน้านี้ให้เปรียบเทียบ ดังนั้นสามารถใช้เป็นฐานข้อมูลสำหรับงานวิจัยในอนาคตเพื่อใช้เปรียบเทียบในกรณีที่ผู้สนใจหรือนักวิจัยเกี่ยวกับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันได้ในลำดับต่อไป

หลังจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชที่ได้นำเสนอในบทที่ 6 ได้รับการตรวจสอบความถูกต้องแล้ว ลำดับถัดไปจะการศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ดังแสดงในรูปที่ 7.1 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติในโหมดแรก ($\tilde{\omega}_1$) ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) และอัตราส่วนความยาวต่อความสูงของคาน (L/h) ของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขขอบเขตต่างกัน โดยโครงสร้างคานมีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็นแบบ 2-2-1 ชั้นแกนกลางแข็ง ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของโครงสร้างคาน ซึ่งใช้เงื่อนไขแบบ C-C สูงกว่าแบบเงื่อนไข C-H และ H-H ตามลำดับ และจากรูปแสดงให้เห็นอีกว่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติจะลดลงเมื่อทำการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรสำหรับกรณีที่ชั้นแกนกลางแข็ง เหตุผลหลักคือสัดส่วนของเฟสโลหะที่เพิ่มขึ้นซึ่งจะทำให้คานอ่อนลง

ตารางที่ 7.3 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ที่เงื่อนไขขอบเขตและอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ ($L/h = 20$)

B.C.	Mode	Source	$n = 0.5$			$n = 5.0$		
			1-1-1	1-2-1	1-8-1	1-1-1	1-2-1	1-8-1
H-H	$\tilde{\omega}_1$	Present	4.5320	4.6975	5.1066	3.1102	3.4913	4.5551
		Ref.[6]	4.5316	4.6972	5.1064	3.1100	3.4912	4.5550
	$\tilde{\omega}_2$	Present	17.9492	18.5983	20.1966	12.3522	13.8595	18.0411
		Ref.[6]	17.9442	18.5946	20.1951	12.3509	13.8586	18.0407
	$\tilde{\omega}_3$	Present	39.7478	41.1628	44.6271	27.4725	30.8021	39.9521
		Ref.[6]	39.7319	41.1531	44.6288	27.4716	30.8037	39.9500
C-C	$\tilde{\omega}_1$	Present	10.1733	10.5402	11.4431	7.0063	7.8598	10.2250
		Ref.[6]	10.1695	10.5372	11.4417	7.0051	7.8589	10.2245
	$\tilde{\omega}_2$	Present	27.5702	28.5462	30.9320	19.0858	21.3913	27.7106
		Ref.[6]	27.5486	28.5296	30.9245	19.0795	21.3864	27.7079
	$\tilde{\omega}_3$	Present	52.8759	54.7054	59.1415	36.8344	41.2379	53.1458
		Ref.[6]	52.8656	54.7118	59.1783	36.8619	41.2742	53.1954
C-H	$\tilde{\omega}_1$	Present	7.0489	7.3049	7.9364	4.8450	5.4372	7.0848
	$\tilde{\omega}_2$	Present	22.5401	23.3472	25.3280	15.5541	17.4433	22.6552
	$\tilde{\omega}_3$	Present	46.1413	47.7618	51.7108	32.0116	35.8662	46.3777



รูปที่ 7.1 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ตารางที่ 7.4 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุน ($L/h = 20, n = 0.5$)

B.C.	Source	ξ_w	ξ_s	1-0-1	1-1-1	2-1-2	1-5-1
H-H	Present	0.0	0.0	0.4273	0.4487	0.4386	0.4921
	Ref.[103]			0.4271	0.4486	0.4384	0.4920
	Present	0.2	0.0	0.5780	0.5892	0.5834	0.6179
	Ref.[103]			0.5779	0.5891	0.5833	0.6178
	Present	0.2	0.2	1.3526	1.3363	1.3421	1.3268
	Ref.[103]			1.3525	1.3363	1.3420	1.3267
C-H	Present	0.0	0.0	0.6568	0.6893	0.6739	0.7542
	Ref.[103]			0.6559	0.6887	0.6732	0.7539
	Present	0.2	0.0	0.7634	0.7879	0.7759	0.8416
	Ref.[103]			0.7626	0.7874	0.7753	0.8414
	Present	0.2	0.2	1.4915	1.4849	1.4862	1.4939
	Ref.[103]			1.4906	1.4844	1.4855	1.4937
C-C	Present	0.0	0.0	0.9345	0.9801	0.9586	1.0696
	Ref.[103]			0.9325	0.9787	0.9570	1.0690
	Present	0.2	0.0	1.0123	1.0518	1.0329	1.1330
	Ref.[103]			1.0104	1.0505	1.0314	1.1324
	Present	0.2	0.2	1.6571	1.6635	1.6588	1.6968
	Ref.[103]			1.6555	1.6622	1.6572	1.6962

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการอ้างอิงเท่านั้น ไม่สามารถนำข้อมูลไปใช้เพื่อวัตถุประสงค์อื่นได้

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

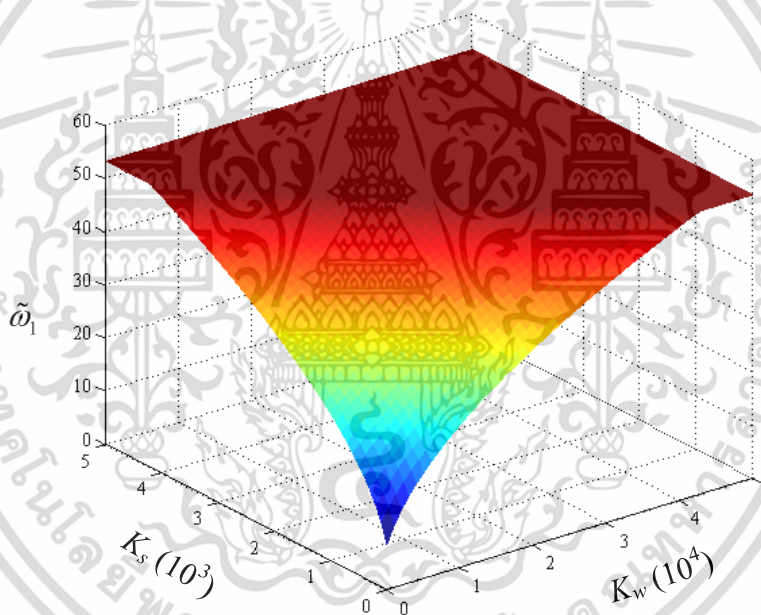
แน่นอนว่างานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาโครงสร้างคานที่มีฐานรองรับแบบยืดหยุ่นร่วมด้วย ดังนั้นเพื่อความถูกต้องของแบบจำลองที่สร้างขึ้นจะทำการเปรียบเทียบความถี่ธรรมชาติไว้มิติเมื่ออยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ พิจารณาความถี่ธรรมชาติไว้มิติของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันมีฐานรองรับแบบยืดหยุ่น (elastic foundation) โดยมีชั้นแกนกลางแข็ง ดังแสดงในตารางที่ 7.4 โดยที่ค่าถี่ธรรมชาติไว้มิติของคานถูกปรับเปลี่ยนโดยใช้ $\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ เพื่อให้ค่าสอดคล้องกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ โดยค่าคงที่สปริงวินเกอร์สามารถหาได้จาก $k_w = \frac{\xi_w A_{110}}{L^2}$ และค่าคงที่สปริงของชั้นแรงเฉือน $k_s = \xi_s A_{110}$ โดยที่ค่า A_{110} คือ $E_m h$ ในที่นี้ค่า A_{110} ก็คือค่า A_{11} ของคานที่ทำจากวัสดุอะลูมิเนียมต่อความกว้างคาน สังเกตได้ว่าผลลัพธ์มีความสอดคล้องกันและเป็นที่ยอมรับได้เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยที่ได้ตีพิมพ์ก่อนหน้านี้

ตารางที่ 7.5 โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ที่เงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C ($n = 0.5$)

FG sandwich beams with homogenous hardcore								
L/h	K_w	K_s	1-0-1	1-1-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1	3-2-1
5	0	0	8.2804	8.6518	8.4814	8.7814	8.5860	8.7362
	10^2	0	8.6486	8.9918	8.8332	9.1141	8.9317	9.0731
	10^2	10^2	11.9423	12.0896	12.0140	12.1589	12.0693	12.1469
10	0	0	9.3454	9.8006	9.5864	9.9725	9.7248	9.9223
	10^2	0	9.6771	10.1056	9.9026	10.2701	10.0349	10.2236
	10^2	10^2	12.9277	13.1497	13.0352	13.2562	13.1200	13.2393
20	0	0	9.6884	10.1733	9.9433	10.3608	10.0941	10.3092
	10^2	0	10.0105	10.4690	10.2502	10.6491	10.3949	10.6011
	10^2	10^2	13.2713	13.5191	13.3906	13.6399	13.4868	13.6220
FG sandwich beams with homogenous softcore								
5	0	0	8.4906	7.9529	8.2025	7.7094	8.0071	7.7134
	10^2	0	8.8988	8.4077	8.6361	8.1818	8.4534	8.1807
	10^2	10^2	12.3998	12.1734	12.2829	12.0477	12.1772	12.0254
10	0	0	10.2146	9.6791	9.9430	9.3451	9.6664	9.2669
	10^2	0	10.5591	10.0587	10.3062	9.7413	10.0421	9.6625
	10^2	10^2	13.8952	13.6362	13.7725	13.4317	13.5970	13.3536
20	0	0	10.8471	10.3277	10.5916	9.9548	10.2797	9.8356
	10^2	0	11.1739	10.6862	10.9351	10.3296	10.6356	10.2114
	10^2	10^2	14.5069	14.2630	14.3990	14.0246	14.1923	13.9102

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หลังจากตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองสำหรับกรณีโครงสร้างคานภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นแล้ว พิจารณาตารางที่ 7.5 เป็นการศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งมีฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ที่เงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C โดยปรับเปลี่ยนค่าคงที่สปริง (K_w และ K_s) ที่อัตราส่วนความยาวต่อความสูงคาน (L/h) ต่าง ๆ กัน โดยค่าคงที่สปริงวินเทอร์หาได้จาก $k_w = \frac{K_w D_{110}}{L^4}$ และค่าคงที่สปริงของชั้นแรงเฉือนหาได้จาก $k_s = \frac{K_s D_{110}}{L^2}$ โดยค่า D_{110} ก็คือค่า D_{11} ของคานที่ทำจากวัสดุอะลูมิเนียมต่อความกว้างคาน สังเกตได้ว่าค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่า K_w เพิ่มขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อรวมกับค่าคงที่ K_s ความถี่ธรรมชาติไร้มิติเพิ่มสูงขึ้นอย่างเห็นได้ชัด ถัดมาพิจารณารูปที่ 7.2 ได้แสดงกราฟ 3 มิติ ซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า K_w , K_s และความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ($\tilde{\omega}$) สำหรับโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางแข็ง อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น 2-2-1 จะสังเกตเห็นว่าเมื่อ K_w หรือ K_s เพิ่มขึ้นเป็นผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติเพิ่มขึ้นด้วย โดยค่า K_s จะมีอิทธิพลต่อความถี่ไร้มิติมากกว่า K_w



รูปที่ 7.2 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C ($L/h=10$, $n = 2.0$)

7.1.2 ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหนึ่งแรง)

ก่อนการจำลองการสั่นสะเทือนแบบบังคับซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่นั้น จะต้องตรวจสอบแบบจำลองที่สร้างขึ้นมาว่าถูกต้องหรือไม่ โดยทำการเปรียบเทียบผลกับแบบจำลองเชิงวิเคราะห์ (analytical model) [104] ซึ่งแบบจำลองเชิงวิเคราะห์นั้นจะใช้ได้เฉพาะโครงสร้างคานที่ทำจากวัสดุเนื้อเดียว (Homogeneous materials) เท่านั้น และเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบจูดรองรับแบบง่ายและอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวนหนึ่งแรง แสดงดังสมการต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\Delta} \frac{2P_0}{\rho b h L} \frac{1}{(i\pi v_p / L)^2 - \omega_i^2} \left(\sin \frac{i\pi v_p}{L} t - \frac{i\pi v_p}{L \omega_i} \sin \omega_i t \right) \sin \frac{i\pi}{L} x \quad (7.2)$$

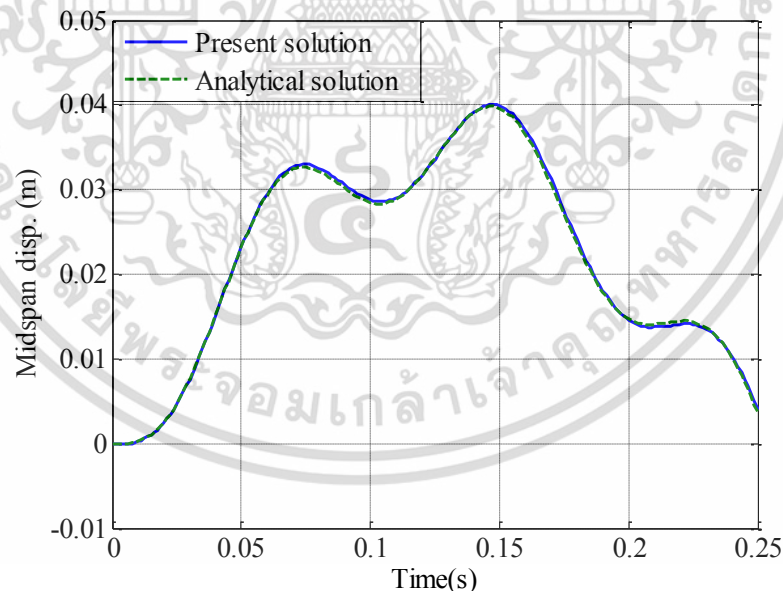
$$\text{โดยที่ } (0 \leq t \leq \frac{L}{v_p}) \text{ และ } \omega_i = \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \quad i = 1, 2, \dots, \Delta$$

P_0 คือ แรงกระทำบนคานในหน่วยนิวตัน

v_p คือ ความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่บนคานในหน่วยเมตรต่อวินาที

$w(x,t)$ คือ ค่าระยะการโก่ง ณ เวลาใดๆ ในหน่วยเมตร

เพื่อที่จะเปรียบเทียบกับแบบจำลองเชิงวิเคราะห์ สมการที่ 7.2 ซึ่งทำจากวัสดุเนื้อเดียว ดังนั้นแบบจำลองซึ่งนำเสนอในงานวิจัยนี้จะต้องปรับเปรียบวัสดุจากคานแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันไปใช้วัสดุแบบเนื้อเดียวแทน โดยการกำหนดดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ให้มีค่าเท่ากับศูนย์ โดยทั้ง 2 แบบจำลองของคานจะเลือกใช้วัสดุอลูมิเนียม 2024-T3 ซึ่งมีค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ 72.4 GPa และค่าความหนาแน่นเท่ากับ 2770 kg/m³ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ทั้ง 2 แบบจำลองแสดงดังรูปที่ 7.3 โดยแกนแนวนอนแทนด้วยเวลาและแกนแนวตั้งแทนด้วยระยะการโก่งของคาน ณ ตำแหน่งกึ่งกลางคาน ณ เวลาใด ๆ ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ทั้ง 2 แบบจำลองนั้นสอดคล้องกันและเป็นที่ยอมรับได้



รูปที่ 7.3 กราฟเปรียบเทียบค่าระยะการโก่งของคานของวัสดุไอโซทรอปิก ณ ตำแหน่งกึ่งกลางคาน ณ เวลาใด ๆ ($L = 10$ m, $b = 0.4$ m, $h = 0.5$ m)

นอกจากนี้ยังตรวจสอบความถูกต้องโดยการเปรียบเทียบผลลัพธ์กับงานวิจัยที่ได้ตีพิมพ์ก่อนหน้านี้ [65] ซึ่งในงานวิจัยฉบับนี้ใช้โครงสร้างคานที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชันและอยู่ภายใต้แรงกระทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบเคลื่อนที่ ดังแสดงในตารางที่ 7.6 สังเกตเห็นว่าค่าระยะการโก่งไร้มิติสูงสุดของคานที่ทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นมีค่าสอดคล้องกัน ซึ่งยอมรับได้

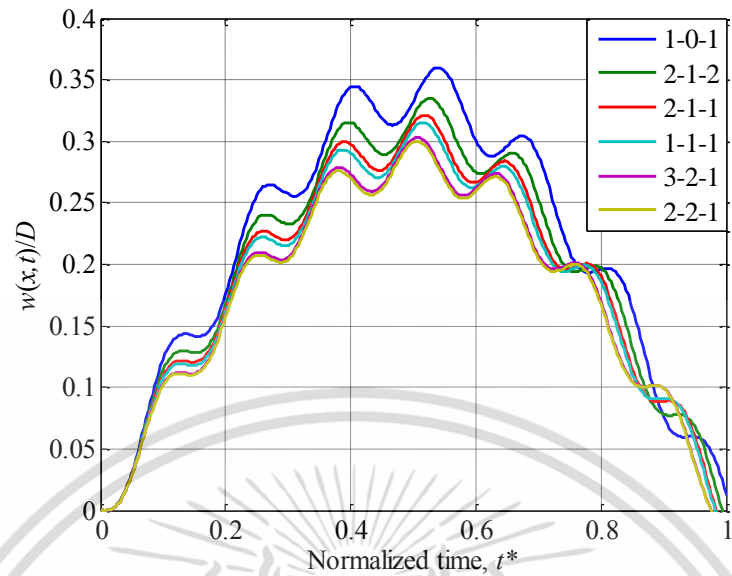
ตารางที่ 7.6 เปรียบเทียบค่าระยะการโก่งไร้มิติสูงสุดของโครงสร้างคานทำจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ($L = 20$ m, $b = 0.4$ m, $h = 0.9$ m)

material volume		Ref.[65]	Present
fraction index (n)	v_p (m/s)	$\max(w(x,t)/D)$	$\max(w(x,t)/D)$
0.2	222	1.0344	1.0370
0.5	198	1.1444	1.1366
1	179	1.2503	1.2287
2	164	1.3376	1.3093
Full alumina	252	0.9328	0.9382
Full Steel	132	1.7324	1.7379

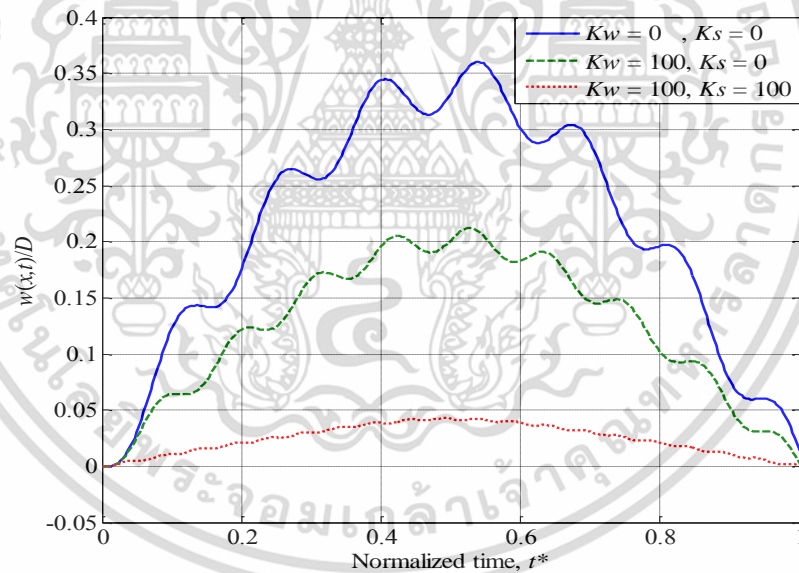
หลังจากตรวจสอบความถูกต้องทั้งแบบจำลองโครงสร้างคานที่ใช้วัสดุแบบเนื้อเดียวและใช้วัสดุเชิงฟังก์ชันแล้ว ดังนั้นในแบบจำลองของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเลือกใช้โครงสร้างคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่และจะถูกนำมาวิเคราะห์ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ส่งผลกระทบต่อระยะการโก่งไร้มิติของคาน ยกตัวอย่างเช่น ความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่ผ่านคาน ความถี่ของแรงที่กระตุ้นบนคาน อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น เงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุและค่าคงที่สปริง (K_w, K_s) เมื่อคานอยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ซึ่งค่าระยะการโก่งไร้มิติ สามารถหาได้โดยนำค่าระยะการโก่งที่ตำแหน่งกึ่งกลางคาน ณ เวลาใด ๆ ($w(x,t)$) ทหารด้วยระยะการโก่งของคานแบบสถิตยศาสตร์ที่ทำจากวัสดุอะลูมิเนียม นั่นคือ $D = P_0 L^3 / 48EI$ โดยที่ P_0 คือแรงกระทำแบบจุดตรงกลางคาน ในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ขนาดของแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่และกระทำแบบจุด (P_0) มีค่าเท่ากับ 500 kN โดยแบ่งช่วงเวลาทั้งหมดที่แรงเคลื่อนที่บนคานเป็นจำนวน 400 ส่วน

พิจารณารูปที่ 7.4 แสดงถึงพฤติกรรมทางด้านพลวัตของคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันระหว่างระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางคานและเวลาไร้มิติ ($t^* = x_p/L = v_p t/L$) โดยที่ชั้นแกนกลางของคานเป็นแบบแข็ง (Hard core) สภาวะเงื่อนไขขอบเขตแบบ H-H จากรูปจะสังเกตเห็นว่าคานที่มีอัตราส่วนความหนาแบบ 1-0-1 จะมีระยะโก่งไร้มิติมากที่สุด เพราะว่าชั้นแกนกลางของคานไม่มีส่วนผสมของเฟสเซรามิกซึ่งเป็นผลทำให้คานอ่อนกว่าแบบอื่น ๆ ต่อมาพิจารณาคานที่มีอัตราส่วนความหนาแบบ 2-2-1 จะมีระยะโก่งไร้มิติน้อยสุด เพราะว่าชั้นแกนกลางของคานซึ่งเป็นเฟสเซรามิก 100 % นั้นมีความหนามากกว่าแบบอื่น ๆ ผลที่ได้ก็คือทำให้คานค่อนข้างแข็ง และสังเกตช่วงเวลาที่แรงเคลื่อนที่เคลื่อนออกจากคาน ค่าระยะการโก่งไร้มิติจะเข้าใกล้ค่าศูนย์เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตที่บังคับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



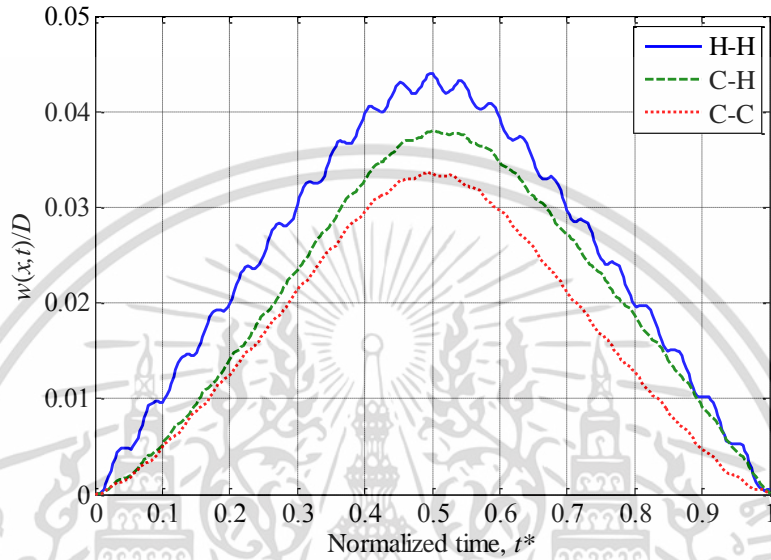
รูปที่ 7.4 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่อัตราส่วนความหนาแบบต่าง ๆ ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega = 0$)



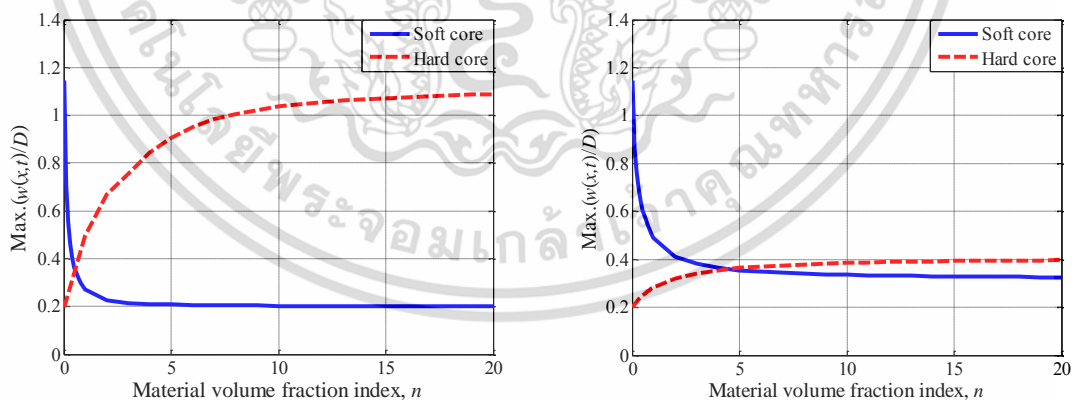
รูปที่ 7.5 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุนที่ค่าคงที่สปริงต่าง ๆ ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega = 0$)

รูปที่ 7.5 แสดงผลกระทบบึงค่าระยะการโก่งไร้มิติของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันเมื่ออยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุน ซึ่งใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-0-1 ชั้นแกนกลางแข็ง สภาวะเงื่อนไขขอบเขตทั้งซ้ายและขวาของคานถูกยึดด้วยจุดรองรับเป็นแบบง่าย สังเกตเห็นว่าค่าระยะการโก่งไร้มิติของคานที่ไม่อยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุน ($K_w = 0, K_s = 0$) จะมีค่ามากเมื่อเปรียบเทียบกับระยะการโก่งไร้มิติที่อยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุน เนื่องจากความเป็นอิสระในเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้เห็นเป็นเชิงประโยชน์ด้านการศึกษาไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเคลื่อนที่ของคานกรณีไม่มีฐานรองรับแบบยึดหยุ่น และรูปที่ 7.6 แสดงระยะเวลาโก่งไร้มิติของคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ซึ่งใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 ชั้นแกนกลางอ่อนและสภาวะเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ กัน แน่แน่นอนว่าระยะเวลาโก่งไร้มิติในเงื่อนไขขอบเขตแบบจุดรองรับทั้งซ้ายและขวาถูกยึดแน่นนั้นมีค่าน้อยสุด เหตุผลเพราะเงื่อนไขขอบเขตที่ถูกบังคับในการเคลื่อนตัวมีน้อยกว่าแบบ C-H และ H-H



รูปที่ 7.6 กราฟแสดงระยะเวลาโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, K_w = K_s = 100, \Omega = 0$)



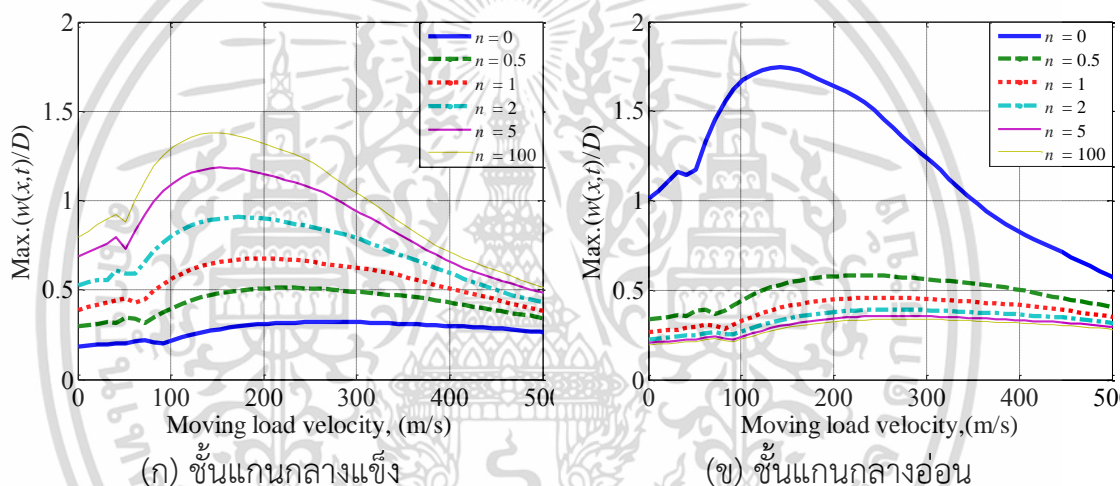
(ก) อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น 2-1-2

(ข) อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น 1-6-1

รูปที่ 7.7 กราฟแสดงระยะเวลาโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($L/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)

ต่อมาจะพิจารณาถึงดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ซึ่งมีผลกระทบต่อค่าระยะโก่งไร้มิติสูงสุดของคาน ทั้งแบบชั้นแกนกลางแข็งและชั้นแกนกลางอ่อน ดังแสดงรูปที่ 7.7. โดยโครงสร้างคานมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ H-H พิจารณาโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางแข็งจะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มค่าดัชนีเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัดส่วนปริมาตรของวัสดุจะทำให้ระยะโก่งไร้มิติของคานเพิ่มขึ้น ซึ่งตรงกันข้ามกับกรณีที่โครงสร้างคานใช้แกนกลางอ่อน สังเกตรูปทั้งสอง (รูปที่ 7.7(ก) และ รูปที่ 7.7(ข)) จุดตัดของกราฟระหว่างโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางแข็งและชั้นแกนกลางอ่อนต่างกัน พิจารณารูปที่ 7.7(ก) โครงสร้างคานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น 2-1-2 ซึ่งจุดตัดของกราฟอยู่ที่ตำแหน่ง $n \approx 0.5$ ณ จุดนี้ระยะการโก่งไร้มิติระหว่างโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางแข็งและชั้นแกนกลางอ่อนจะมีค่าเท่ากัน นั้นหมายความว่าถ้าค่า $n < 0.5$ โครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางแข็งจะแข็งแรงกว่าโครงสร้างคานแบบแกนกลางอ่อนและผลจะตรงกันข้ามเมื่อค่า $n > 0.5$ ซึ่งถ้าพิจารณารูปที่ 7.7(ข) โครงสร้างคานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น 1-6-1 ซึ่งจุดตัดของกราฟอยู่ที่ตำแหน่ง $n \approx 4$ โดยจุดตัดกราฟเปลี่ยนไปทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นนั่นเอง ประเด็นที่น่าสนใจกรณีโครงสร้างคานแบบแกนกลางอ่อนคือระยะโก่งไร้มิติสูงสุดจะลดลงอย่างรวดเร็วในกรณีที่เพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุมีค่าน้อย ๆ ซึ่งหมายถึงเพิ่มสัดส่วนปริมาณเซรามิกบริเวณผิวของโครงสร้างก็เพียงพอในการเสริมความแข็งแรงให้กับโครงสร้าง

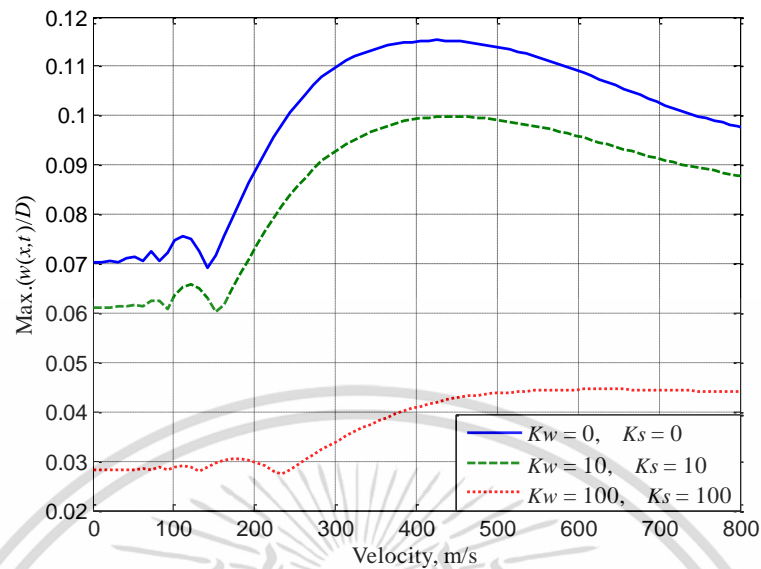


รูปที่ 7.8 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, \Omega = 0$)

พิจารณาระยะการโก่งไร้มิติสูงสุดของโครงสร้างคานแบบแกนดียวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันกรณีไม่มีฐานรองรับแบบยืดหยุ่นเทียบกับค่าความเร็วต่าง ๆ กัน ดังแสดงรูปที่ 7.8 โดยในกราฟใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-1 (แบบไม่สมมาตร) สภาวะเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ H-H โดยรูปที่ 7.8(ก) โครงสร้างคานกำหนดให้ชั้นแกนกลางแข็งและรูปที่ 7.8(ข) กำหนดให้ชั้นแกนกลางอ่อน จากรูปสังเกตกรณีชั้นกลางแข็งเมื่อได้ทำการลดค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) เป็นผลทำให้โครงสร้างคานแข็งแรงเพิ่มขึ้นผลคือระยะการโก่งไร้มิติลดลง เพราะว่าการลดค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (กรณีที่ใช้แกนกลางแข็ง) เป็นผลทำให้ปริมาณเฟสเซรามิกของชั้นปะกบบนและล่างเพิ่มขึ้น ส่วนโครงสร้างคานที่ใช้ชั้นแกนกลางอ่อน รูปที่ 7.8(ข) ก็จะทำให้ผลลัพธ์ที่ตรงกันข้าม และสังเกตได้อีกว่าเมื่อความเร็วของแรงกระทำเพิ่มขึ้นระยะการโก่งไร้มิติจะเพิ่มขึ้นถึงจุดสูงสุด ณ ค่าความเร็วค่าหนึ่งซึ่งจุดนี้เรียกว่า ความเร็ววิกฤต (Critical velocity) หลังจากผ่านจุดความเร็ววิกฤตระยะการโก่งไร้มิติก็จะลดลง ซึ่งการลดลงนี้เป็นผลมาจากการตอบสนองของคานต่อช่วงเวลาของแรงที่กระทำอยู่บนคานนั่นเอง และค่าความเร็ววิกฤตจะเพิ่มสูงขึ้นเมื่อโครงสร้างคานที่ยิ่งแข็งแรงขึ้น

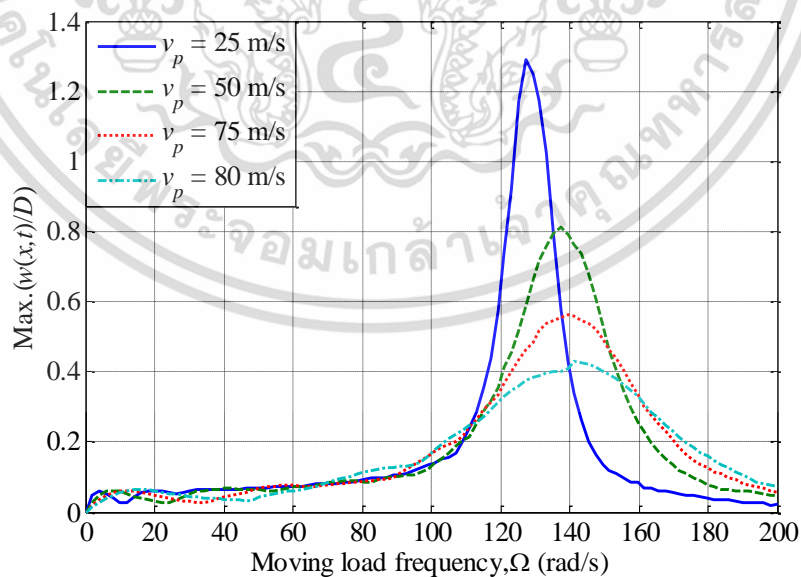
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.9 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นที่ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, \Omega = 0$)

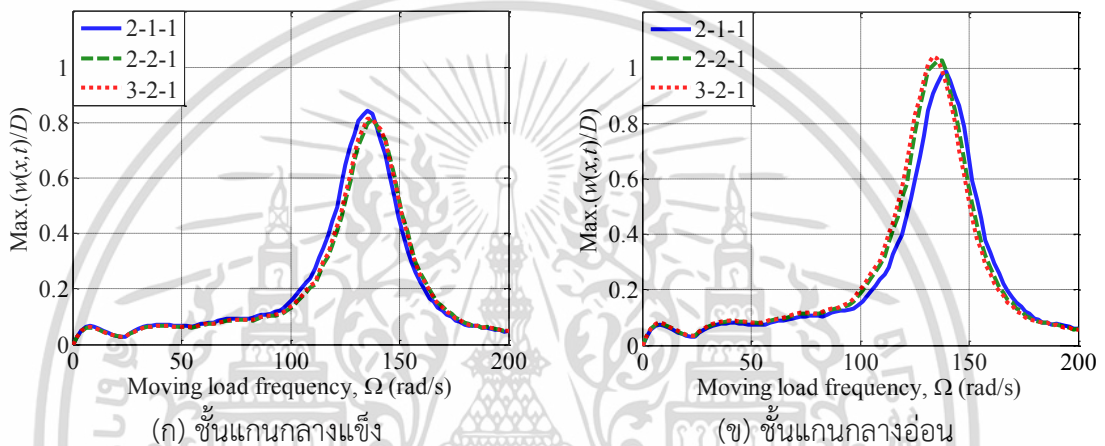
พิจารณารูปที่ 7.9 แสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น โดยในกราฟใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 สภาวะเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ C-C ชั้นแกนกลางแข็ง แน่นอ่อนว่าระยะการโก่งไว้มีติสูงสุดลดลง เมื่อเพิ่มคงที่สปริงทั้งค่า K_w และค่า K_s



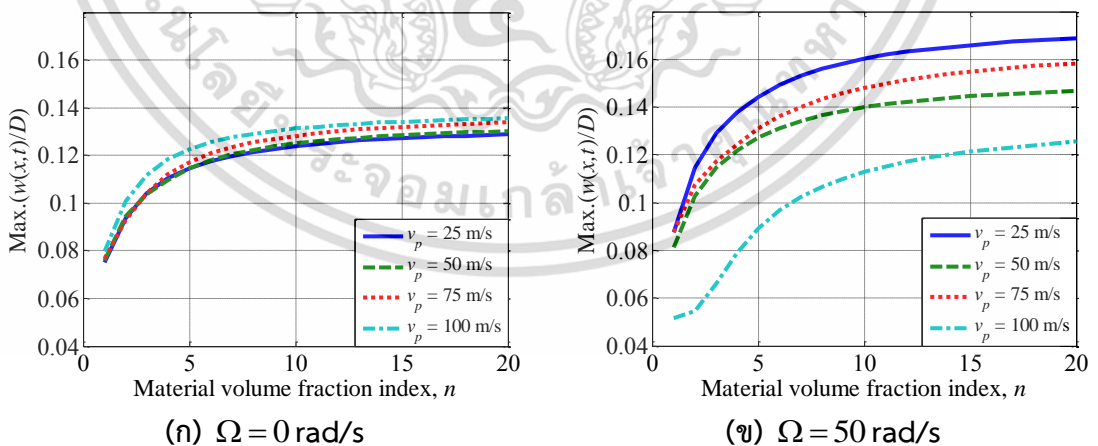
รูปที่ 7.10 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นที่ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, K_w = K_s = 10$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อไปหลังจากนี้จะศึกษาแรงกระทำแบบเคลื่อนที่พร้อมกับกระตุ้นการสั่นของแรงที่เคลื่อนที่ด้วยความถี่ (Ω) ต่าง ๆ กัน พิจารณารูปที่ 7.10 โครงสร้างคานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 ชั้นแกนกลางแข็ง สภาวะเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ C-C ผลปรากฏว่าโครงสร้างคานจะมีระยะโก่งไร้มิติค้อยข้างสูงซึ่งจะอยู่ในช่วงความถี่ 120 – 140 rad/s เหตุผลเพราะว่าช่วงความถี่นี้ใกล้กับความถี่ธรรมชาติของคาน และสังเกตว่าแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 25 m/s จะมีระยะโก่งไร้มิติมากที่สุด เนื่องจากเวลาที่แรงกระทำอยู่บนคานมีมากกว่าความเร็ว 50, 70, และ 100 m/s ตามลำดับ และในทำนองเดียวกันรูปที่ 7.11 โครงสร้างคานซึ่งใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-1, 2-2-1 และ 3-2-1 ซึ่งเป็นคานที่ใช้อัตราส่วนแบบไม่สมมาตร โดยสภาวะเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ C-C แน่แน่นอนว่าคานแบบชั้นแกนกลางแข็งจะมีความแข็งแรงกว่าคานแบบชั้นแกนกลางอ่อน



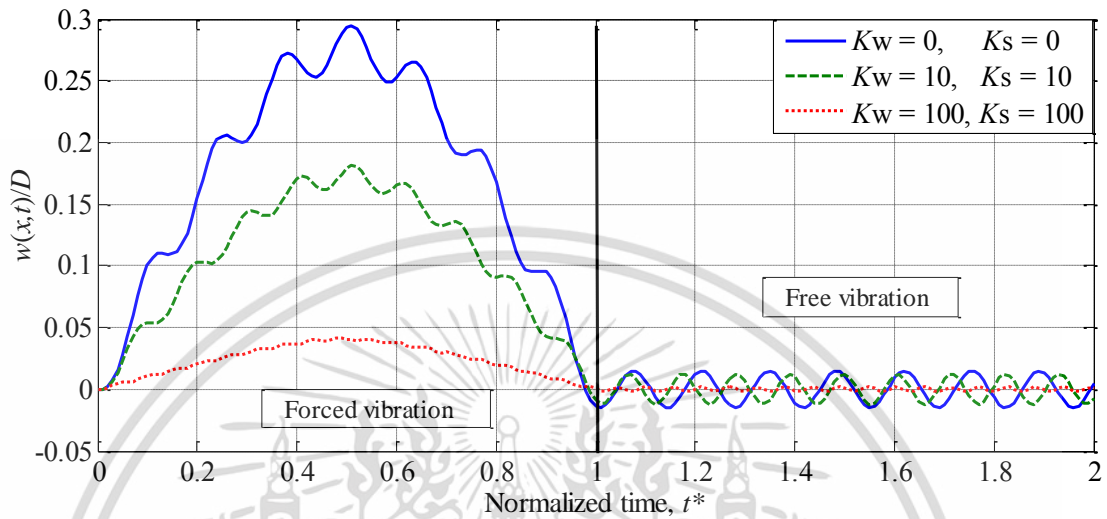
รูปที่ 7.11 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุดที่ความถี่กระตุ้นแรงต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, K_w = K_s = 10$)



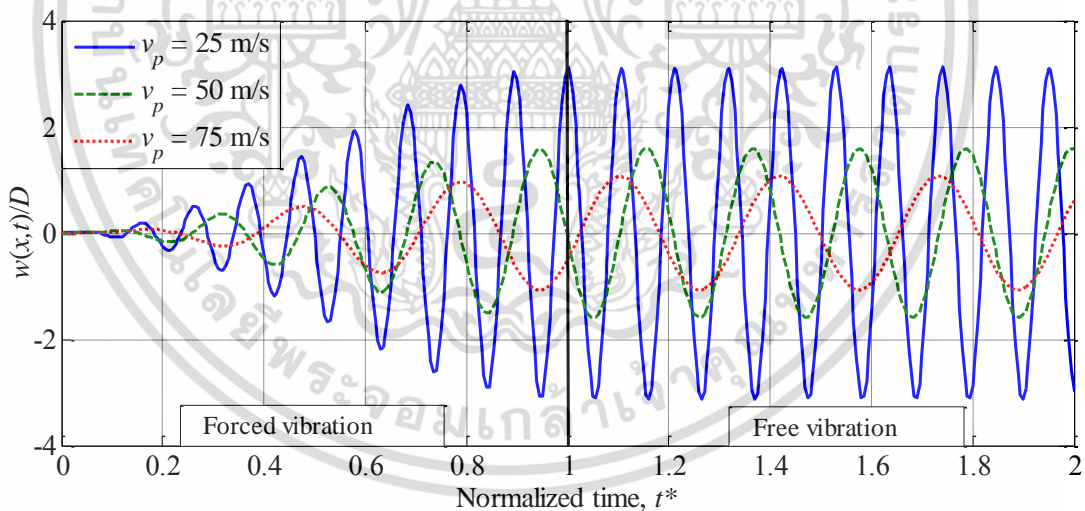
รูปที่ 7.12 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุดที่ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($L/h = 20, K_w = K_s = 10$)

รูปที่ 7.12 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) และระยะการโก่งไร้มิติ โดยปรับเปลี่ยนความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่ 25, 50, 75 และ 100 m/s โดยใช้อัตราส่วนเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 คานเป็นแบบชั้นแกนกลางแข็ง สภาวะเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ C-C เห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุผลทำให้ค่าระยะการโก่งไร้มิติของคานเพิ่มขึ้นเช่นกัน ทั้งรูปที่ 7.12(ก) และรูปที่ 7.12(ข) และความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรงก็เป็นตัวแปรสำคัญต่อระยะการโก่งไร้มิติเช่นกัน



รูปที่ 7.13 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแกนเดี่ยวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหย่อน ($L/h = 20$, $n = 0.5$, $v_p = 25$ m/s, $\Omega = 0$ rad/s)



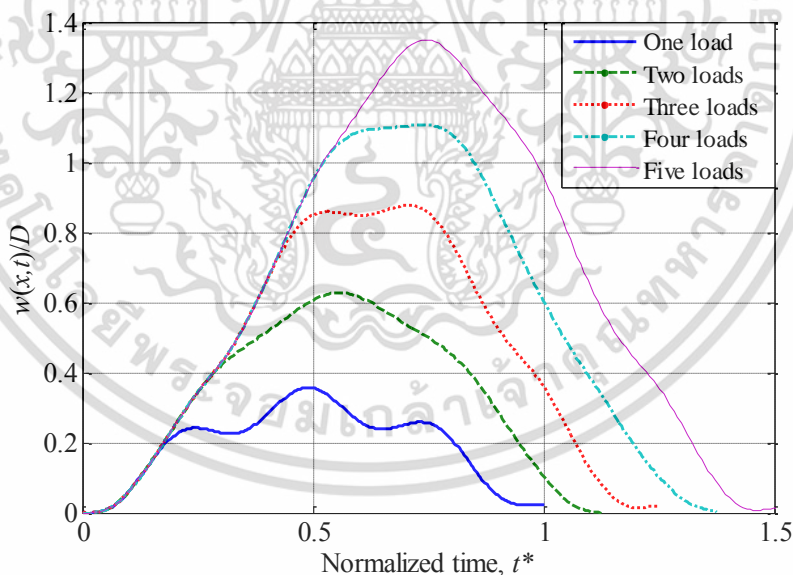
รูปที่ 7.14 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแกนเดี่ยวจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหย่อน ($L/h = 20$, $n = 0.5$, $v_p = 25$ m/s, $\Omega = \omega_1$ rad/s)

รูปที่ 7.13 และ รูปที่ 7.14 แสดงค่าระยะการโก่งไร้มิติ ซึ่งแต่ละกราฟจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ช่วง โดยที่ช่วงแรกจะพิจารณาเมื่อคานอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ (Forced vibration) โดยที่ทิศทางแกน x แทนด้วยค่าเวลาไร้มิติ t^* อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 และช่วงที่สองจะพิจารณาเมื่อคานอยู่ภายใต้การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration) ซึ่งค่า t^* จะมีค่ามากกว่า 1 (ช่วงที่เวลาซึ่งแรงเคลื่อนที่ผ่านออกจากคาน) ซึ่งกราฟทั้งสองรูปเป็นโครงสร้างคานแบบแกนเดี่ยวจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ชั้นแกนกลางแข็ง เงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ H-H และอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 และอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 25 m/s สังเกตว่าช่วงที่สองจะเป็นการสั่นแบบอิสระของคาน พิจารณารูปที่ 7.13 แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ที่ไม่มีควมถี่กระตุ้น ($\Omega = 0$) สังเกตว่าเมื่อแรงเคลื่อนที่ออกจากคานก็เกิดการสั่นแบบอิสระด้วยความถี่ธรรมชาติของคาน พิจารณารูปที่ 7.14 กำหนดแรงกระทำแบบเคลื่อนที่มีควมถี่กระตุ้นตรงกับควมถี่ธรรมชาติของคานนั่นคือ $\Omega = \omega_1$ rad/s แนนอนว่าระยะเวลาการโก่งไว้มิติจะเกิดการสั่นพ้องและคงที่เมื่ออยู่ในช่วงการสั่นแบบอิสระ สังเกตทั้งรูปที่ 7.13 และ 7.14 ช่วงการสั่นแบบอิสระ ($t^* > 1$) ขนาดการสั่นสะเทือน (Amplitude) จะมากหรือน้อยนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าพลังงานสุดท้าย (พลังงานศักย์กับพลังงานจลน์) ที่เวลาที่ $t^* = 1$

7.1.3 ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหลายแรง)

จากการศึกษาที่ผ่านมา โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่อยู่ภายใต้แรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่หนึ่งแรงเท่านั้น ซึ่งการศึกษาต่อจากนี้จะพิจารณาแรงกระทำแบบหลายแรงที่กระทำบนโครงสร้างคานพร้อม ๆ กัน โดยจะศึกษาพารามิเตอร์ที่สำคัญ เช่น อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นของคาน เงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ค่าคงที่สปริงของฐานรากแบบยึดหยุ่น (K_w และ K_s) ความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่ (v_p) ระยะห่างระหว่างแรง (d) และพิจารณาเรื่องควมถี่เมื่อแรงที่เคลื่อนที่ในลักษณะคลื่นฮาร์โมนิกพร้อมมมูเฟส (ψ) เป็นต้น



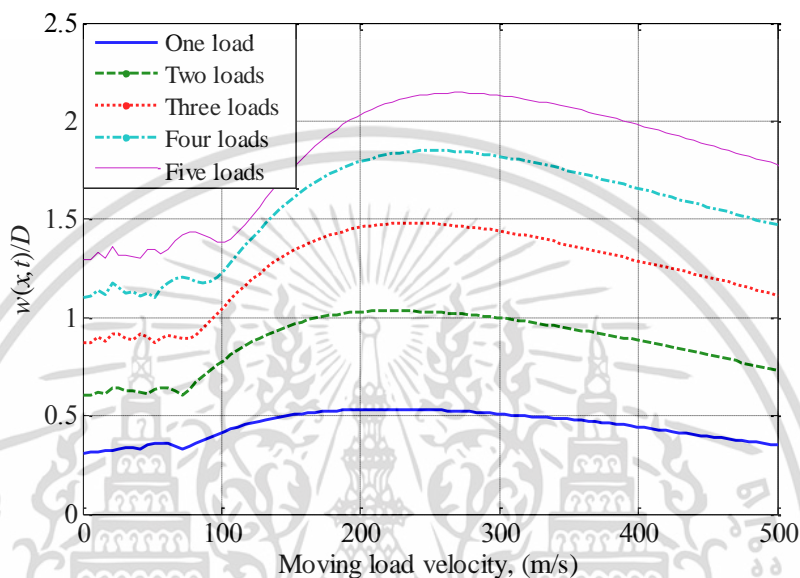
รูปที่ 7.15 กราฟแสดงระยะเวลาการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำหลายแรง ($L/h = 20$, $n = 0.5$, $d = L/8$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega_i = 0$ rad/s)

พิจารณาโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชอยู่ภายใต้แรงกระทำสูงสุดจำนวน 5 แรง ดังแสดงรูปที่ 7.15 โดยในรูปแสดงถึงระยะเวลาการโก่งไว้มิติของโครงสร้างคานซึ่งใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-2 ชั้นแกนกลางแข็ง เงื่อนไขขอบเขตเป็น H-H โดยแต่ละแรงห่างกันเท่ากับ $L/8$ ($d = L/8$) กล่าวคือ เมื่อแรงลำดับที่หนึ่งเริ่มกระทำบนคาน ณ เวลาที่ $t = 0$ จากนั้นแรงลำดับที่สองจะเริ่ม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ในทางอื่นโดยไม่ได้รับอนุญาต

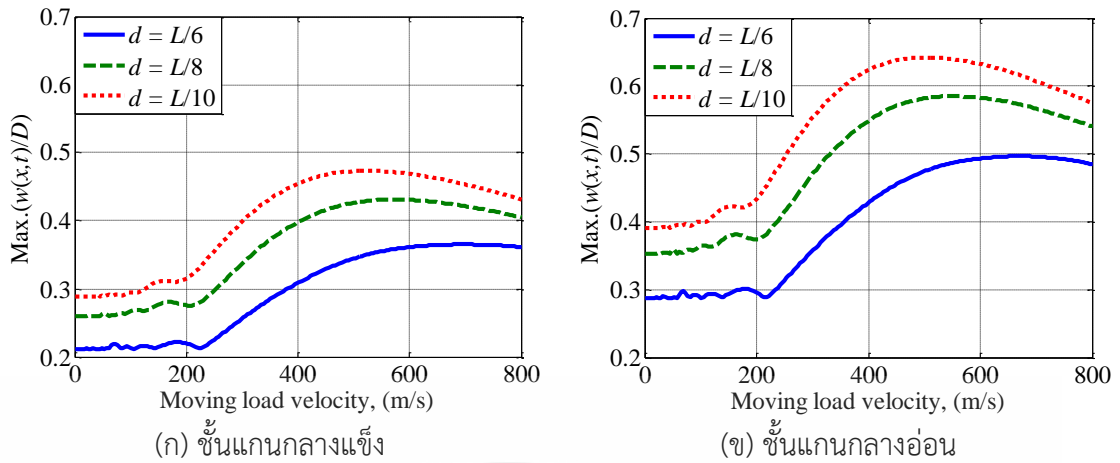
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กระทำบนคานเมื่อเวลา $t = d/v_p$ และแรงลำดับที่สามเริ่มกระทำบนคานเมื่อเวลา $t = 2d/v_p$ เป็นลำดับถัดไป ดังนั้นแรงลำดับที่หนึ่งจะเริ่มออกจากคานเมื่อเวลา $t > L/v_p$ และแรงลำดับที่สองจะเริ่มออกจากคานเมื่อเวลา $t > (L+d)/v_p$ ซึ่งการเพิ่มจำนวนแรงที่กระทำบนคานจะเป็นผลทำให้ค่าระยะการโก่งໄร้มีติเพิ่มขึ้น โดยที่ค่าระยะໄร้จะมากที่สุดเมื่อคานอยู่ใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนจำนวน 5 แรง



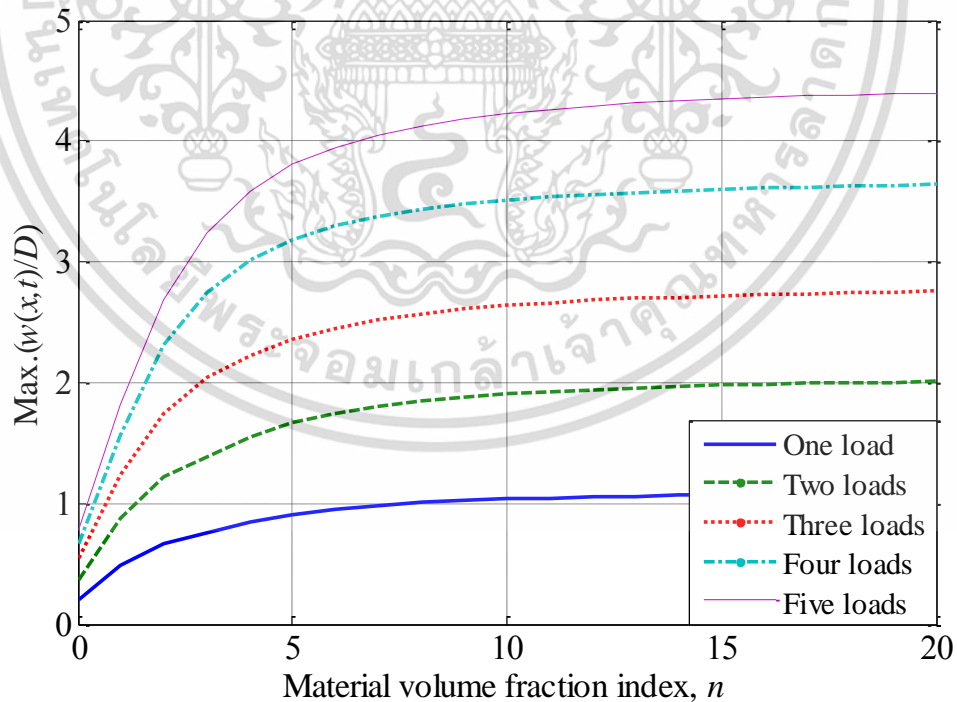
รูปที่ 7.16 กราฟแสดงระยะการໄร้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบเซนตริคจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, \Omega = 0$)

รูปที่ 7.16 แสดงถึงค่าระยะໄร้มีติสูงสุด ณ ความเร็วของแรงที่กระทำบนคานต่าง ๆ กัน โดยใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-2 ชั้นแกนกลางแข็ง เเงอนໄร้ขอบเขตเป็น H-H จะเห็นได้ว่าค่าระยะໄร้มีติสูงสุด ณ ความเร็วของแรงเริ่มต้นจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นทีละน้อย หลังจากนั้นระยะໄร้มีติจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนถึงจุด ๆ หนึ่งและจะลดลงเมื่อความเร็วของแรงเพิ่มขึ้น ซึ่งค่าความเร็วที่ทำให้เกิดค่าระยะໄร้มีติสูงสุดนี้เรียกว่า ความเร็ววิกฤต (critical velocity) และค่าความเร็ววิกฤตจะเพิ่มขึ้นเมื่อจำนวนแรงที่กระทำเพิ่มขึ้น เหตุผลเพราะว่าแรงกระทำจำนวน 5 แรงจะใช้เวลาอยู่บนคานมากที่สุดนั่นเอง และรูปที่ 7.17 แสดงถึงระยะໄร้ของคานที่ความเร็วของแรงต่าง ๆ กัน ซึ่งกราฟนี้จะศึกษาผลกระทบของระยะห่างระหว่างแรง (d) โดยคานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 สภาวะเเงอนໄร้ขอบเขตแบบ C-C และคานอยู่ภายใต้แรงกระทำจำนวน 5 แรงแน่นอนว่าเมื่อค่าระยะห่างระหว่างแรงที่กระทำมีค่าน้อย ($d = L/10$) จะทำให้เกิดระยะໄร้มีติสูงสุดเมื่อเทียบกับค่าระยะห่างระหว่างแรงที่มีค่ามากกว่า ($d = L/8$ และ $d = L/6$) ยิ่งไปกว่านั้นถ้าพิจารณาจากรูป คานที่มีชั้นแกนกลางแข็งก็จะมีค่าความแข็งแรงมากคานที่มีชั้นแกนกลางอ่อน

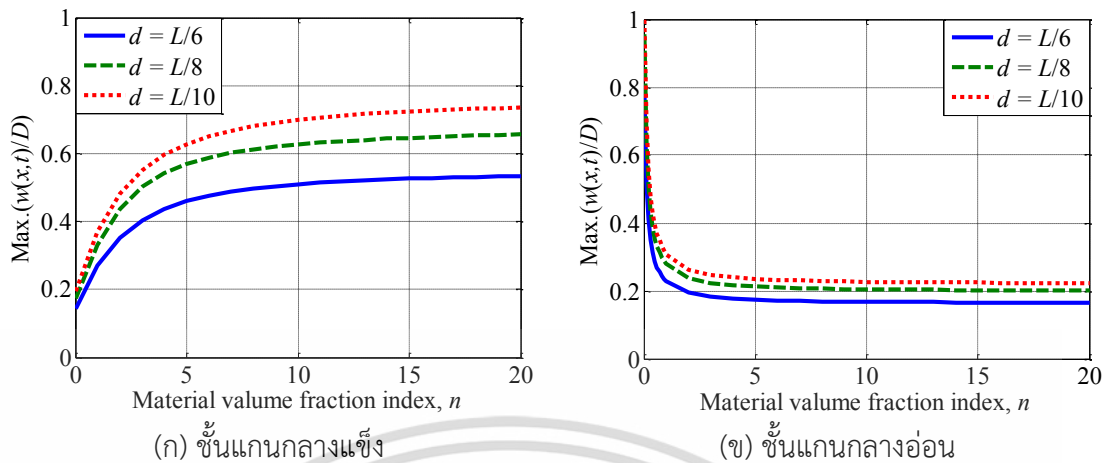


รูปที่ 7.17 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าความเร็วต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, \Omega_i = 0$)

ต่อไปจะพิจารณาดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ซึ่งมีผลกระทบต่อระยะการโก่งไว้มิติสูงสุดของคาน ดังแสดงรูปที่ 7.18 โดยที่คานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-2 ชั้นแกนกลางแข็ง เยื่อใยขอบเขตแบบ H-H ในการวิเคราะห์นี้จะปรับเปลี่ยนจำนวนแรงที่กระทำบนคานตั้งแต่ 1 แรงจนถึง 5 แรง ผลแสดงให้เห็นว่าค่าระยะการโก่งไว้มิติของคานจะเพิ่มขึ้นเมื่อเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ เหตุผลอย่างที่กล่าวมาก่อนหน้านี้ก็คือสัดส่วนของเซรามิกที่ลดลง แนนอนจำนวนแรงที่เพิ่มเข้าก็จะทำค่าระยะการโก่งไว้มิติเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน

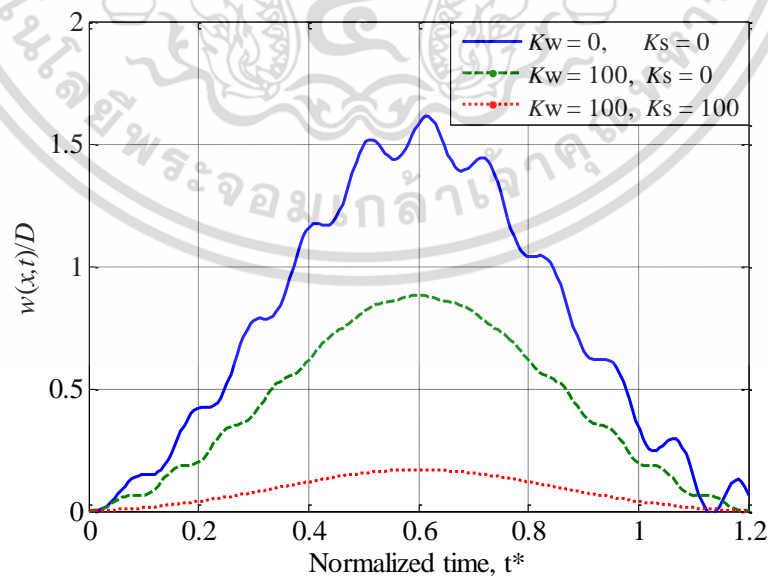


รูปที่ 7.18 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($L/h = 20, d = L/8, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)



รูปที่ 7.19 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($L/h = 20, v_p = 40 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)

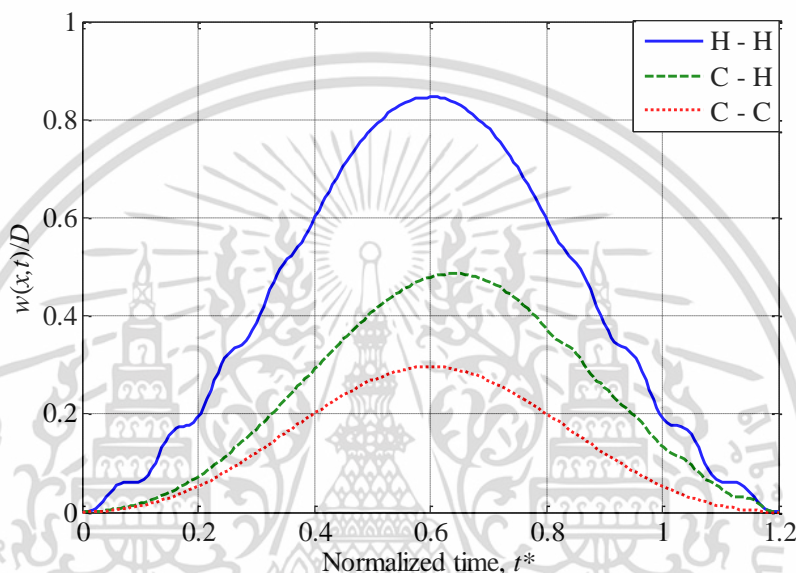
ต่อพิจารณารูปที่ 7.19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะโก่งไร้มิติของคานและค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุภายใต้แรงกระทำจำนวน 5 แรง และศึกษาผลกระทบของค่าระยะห่างระหว่างแรง (d) ที่เคลื่อนที่บนคานด้วยค่าต่าง ๆ กัน โดยคานจะใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 เงื่อนไขขอบเขตเป็น C-C จากรูปแสดงให้เห็นว่ากรณีที่ชั้นแกนกลางแข็งระยะโก่งไร้มิติจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเพิ่มขึ้นและจะให้ผลตรงกันข้ามกรณีที่คานมีชั้นแกนกลางอ่อน ประเด็นที่น่าสนใจกรณีโครงสร้างคานแบบแกนกลางอ่อนคือระยะโก่งไร้มิติจะลดลงอย่างรวดเร็วในกรณีที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุมีค่าน้อย ๆ นั้นหมายความว่าความการเพิ่มสัดส่วนปริมาตรเซรามิกบริเวณผิวของโครงสร้างก็เพียงพอในการเสริมความแข็งแรงให้กับโครงสร้าง



รูปที่ 7.20 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

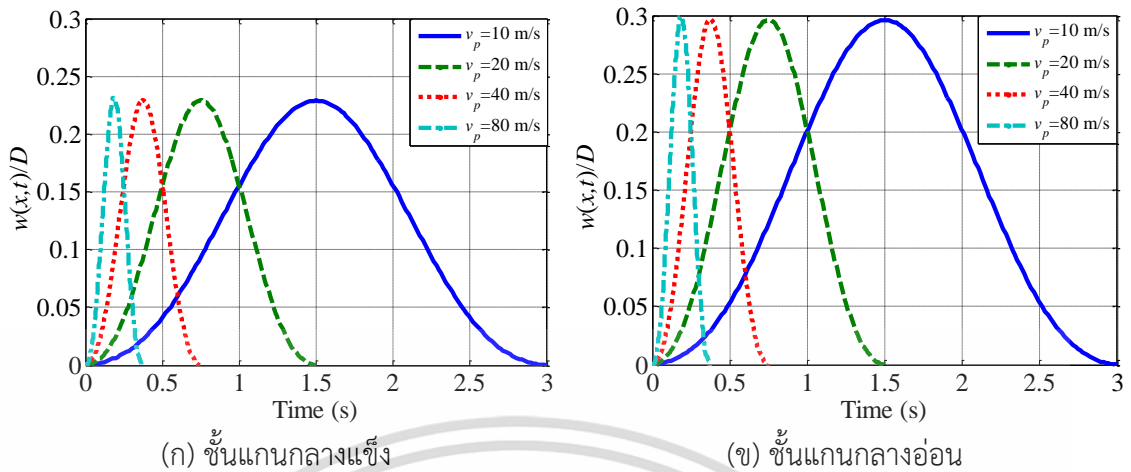
หลังจากนี้จะพิจารณาผลกระทบของค่าคงที่สปริงต่อคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นและอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่หลายแรง ดังแสดงรูปที่ 7.20 แสดงระยะโก่งไว้มิติที่อยู่ภายใต้แรงกระทำจำนวน 5 แรง คานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นคือ 3-2-1 และเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ C-C ชั้นแกนกลางอ่อน แน่นกว่าเมื่อคานปราศจากฐานรองรับแบบยืดหยุ่น จะทำให้เกิดระยะโก่งไว้มิติมากกว่าคานที่อยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น โดยที่ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นจะเป็นตัวแปรสำคัญในการลดระยะโก่งไว้มิติของคาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเพิ่มค่าคงที่สปริงของชั้นแรงเฉือน



รูปที่ 7.21 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ($L/h = 20$, $n = 0.5$, $d = L/8$, $v_p = 50$ m/s, $K_w = 10$, $K_s = 10$, $\Omega_i = 0$)

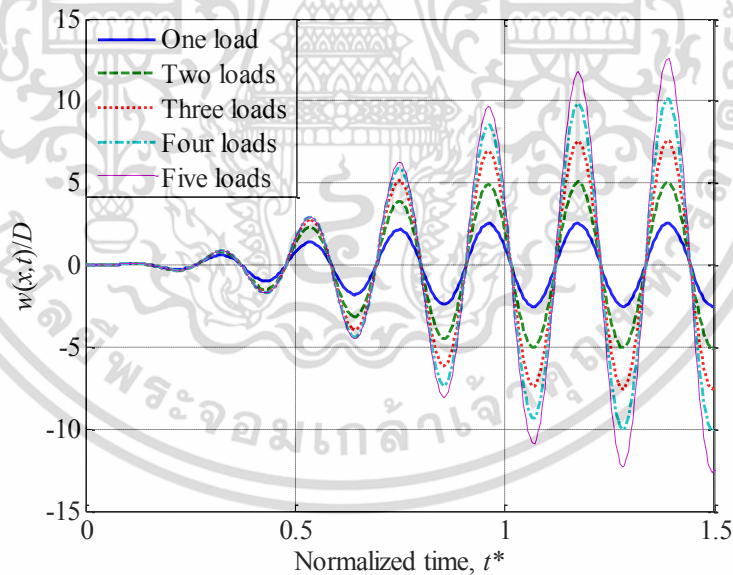
ต่อมาพิจารณารูปที่ 7.21 แสดงระยะโก่งไว้มิติของคานที่ใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็น 3-2-1 ชั้นแกนกลางอ่อน และอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวน 5 แรง โดยได้ที่ทำกรปรับเปลี่ยนเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ ทั้ง H-H, C-H และ C-C แน่นกว่าจุดรองรับที่ถูกยึดแน่นทั้งด้านซ้ายและขวาของคานในที่นี้คือ C-C จะถูกบังคับไม่ให้เคลื่อนที่ ในขณะที่คานที่มีจุดรองรับแบบง่ายจะมีการให้ตัวได้ ณ จุดที่ถูกยึดไว้ เป็นผลทำให้ระยะการโก่งไว้มิติของคานที่มีจุดรองรับแบบ H-H นั้นมีค่าสูงกว่าแบบที่มีจุดรองรับแบบ C-C ดังแสดงดังรูปที่ 7.21 ยิ่งไปกว่านั้นได้ศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงค่าความเร็วที่เคลื่อนที่บนคาน 4 ค่า ได้แก่ 10, 20, 40, 80 m/s ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.22 โดยโครงสร้างคานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็น 3-2-1 และเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ C-C พิจารณารูปที่ 7.22 โครงสร้างคานมีที่ชั้นแกนกลางแข็ง จะมีระยะโก่งไว้มิติน้อยกว่าโครงสร้างคานที่มีชั้นแกนกลางอ่อนทุกค่าความเร็วของแรง และสังเกตว่าระยะโก่งไว้มิติมีค่ามากที่สุดเมื่อแรงเคลื่อนที่อยู่ ณ บริเวณกึ่งกลางคาน (ซึ่งอันเปลี่ยนแปลงได้ขึ้นอยู่กับความเร็วของแรง) สังเกตค่าระยะโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ความเร็วของแรงทั้ง 4 กรณี (10, 20, 40, 80 m/s) มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเล็กน้อยเมื่อความเร็วของแรงเพิ่มขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.22 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = 0$)

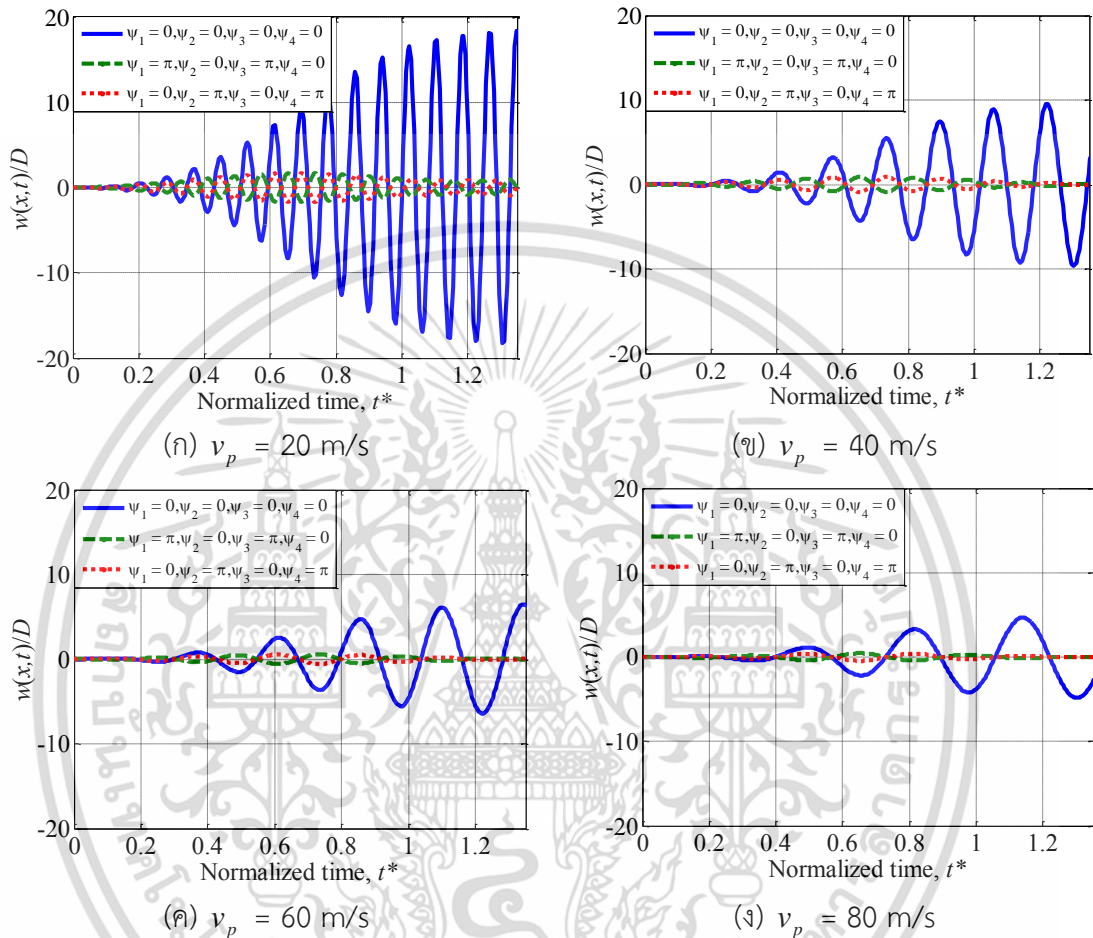
ต่อไปจะศึกษาผลกระทบทางด้านพลวัตของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นพร้อมกับแรงกระทำแบบเคลื่อนที่แบบแบบฮาร์โมนิกหลายแรงพร้อมกัน โดยแต่ละแรงที่เคลื่อนที่บนคานจะถูกกำหนดให้สั้นด้วยความถี่ธรรมชาติของคานนั้นคือ $\Omega_i = \omega_i$



รูปที่ 7.23 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยืดหยุ่นภายใต้แรงจำนวนแรง 1 – 5 แรง ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 40 \text{ m/s}, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = \omega_i$)

พิจารณารูปที่ 7.23 แสดงถึงระยะการโก่งไร้มิติของคานซึ่งมีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็น 2-2-1 ชั้นแกนกลางอ่อน เงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ H-H และอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ตั้งแต่ 1 – 5 แรง ความเร็วของแรงที่ใช้เคลื่อนที่ 40 m/s จากรูปแสดงให้เห็นว่าโครงสร้างคานเกิดการสั่นพ้อง ซึ่งเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะสั้นด้วยความถี่ธรรมชาติของคาน โดยขนาด (ระยะโง่งไร้มิติ) จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป และจะมีขนาดคงที่เมื่อแรงทุกแรงที่กระทำบนคานเคลื่อนออกจากคาน โดยระยะโง่งไร้มิติมากที่สุดเกิดขึ้นเมื่อคานอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนจำนวน 5 แรง เหตุผลเพราะว่าการเพิ่มจำนวนแรงเสมือนเพิ่มขนาดของแรงรวมที่กระทำกับคาน



รูปที่ 7.24 กราฟแสดงระยะการโง่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่มุมเฟสต่าง ๆ กัน ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = \omega_i$)

รูปที่ 7.24(ก) – 7.24(ง) แสดงถึงระยะโง่งไร้มิติของคานซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนจำนวน 4 แรง โดยแต่ละรูปจะมีการปรับเปลี่ยนความเร็วแรงที่กระทำบนคานตั้งแต่ 20, 40, 60 และ 80 m/s ตามลำดับ ซึ่งการศึกษานี้จะศึกษาผลกระทบของมุมเฟสของแรงที่เคลื่อนที่ โดยกำหนดมุมเฟสของแต่ละแรงเป็น 3 กรณี ดังนี้

$$\text{กรณีที่ 1 } \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$$

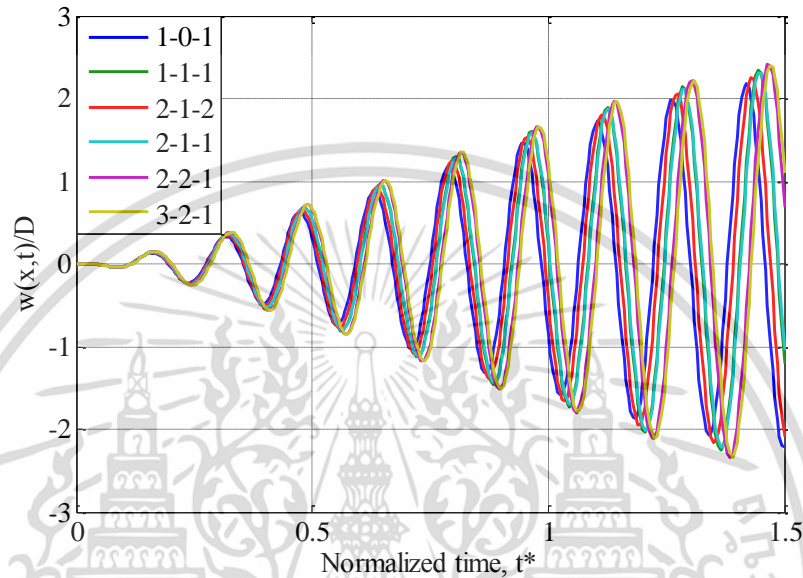
$$\text{กรณีที่ 2 } \psi_1 = \psi_3 = \pi, \psi_2 = \psi_4 = 0$$

$$\text{กรณีที่ 3 } \psi_1 = \psi_3 = 0, \psi_2 = \psi_4 = \pi$$

โดยที่โครงสร้างคานใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็นแบบ 2-2-1 ชั้นแกนกลางอ่อน เงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ H-H ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่ามุมเฟสของแต่ละแรงที่กระทำบนคานนั้นมีผลกระทบต่อเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระยะโง่งไร้มิติของคานและจากรูปสรุปได้ว่ากรณีที่ไม่ใส่มุมเฟส (กรณี 1) คานจะมีระยะโง่งไร้มิติมากกว่าโครงสร้างคาน กรณีที่ 2 และกรณีที่ 3 เหตุผลเนื่องจากขนาดของแรงแต่ละแรงจะหักล้างกันทำให้ขนาดของแรงรวมที่กระทำบนคานน้อยกว่ากรณีที่ 1 แน่แน่นอนว่ารูปที่ 7.24(ก) ความเร็วของแรงที่ใช้ 20 m/s มีระยะโง่งไร้มิติสูงสุดเนื่องจากเวลาที่แรงกระทำอยู่บนใช้เวลานานกว่ากรณีความเร็วอื่น ๆ



รูปที่ 7.25 กราฟแสดงระยะการโง่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่นที่ค่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ ($L/h = 20, n = 0.5, d = L/8, v_p = 40 \text{ m/s}, K_w = 10, K_s = 10, \Omega_i = \omega$)

สุดท้ายพิจารณารูปที่ 7.25 คานอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนจำนวน 5 แรง โดยรูปได้แสดงระยะโง่งของคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยจะพิจารณาปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นหลาย ๆ แบบ เพื่อศึกษาผลกระทบที่มีต่อระยะโง่งไร้มิติของคาน โดยคานใช้แกนกลางอ่อนและเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ H-H จากรูปแสดงให้เห็นว่าค่าระยะโง่งไร้มิติของแต่ละอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นนั้นแตกต่างกันค่อนข้างน้อย

7.2 ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอและวิเคราะห์ผลลัพธ์ของการสั่นสะเทือนของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ โดยที่กำหนดวัสดุโครงสร้างแผ่นบางทำมาจากวัสดุผสมระหว่างอะลูมินา (Al_2O_3) และอะลูมิเนียม (Al) โดยที่เฟสที่เป็นเซรามิกแทนด้วยอะลูมินาและเฟสโลหะแทนด้วยอะลูมิเนียม โดยมีคุณสมบัติดังนี้

ตารางที่ 7.7 คุณสมบัติโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

คุณสมบัติ	เฟสเซรามิก	เฟสโลหะ
ค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น (E)	$E_c = 380$ GPa	$E_m = 70$ GPa
ค่าความหนาแน่น (ρ)	$\rho_c = 3960$ kg/m ³	$\rho_m = 2702$ kg/m ³
อัตราส่วนปัวซอง (ν)	$\nu_c = 0.3$	$\nu_m = 0.3$

จากที่กล่าวข้างต้นว่าโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันนั้นแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ชั้นแกนกลางอ่อน (soft core) และชั้นแกนกลางแข็ง (hard core) ดังนั้นในกรณีที่ต้องการให้แผ่นบางมีชั้นแกนกลางอ่อนจะกำหนดให้ $E_b = E_c$, $\rho_b = \rho_c$, $E_t = E_m$ และ $\rho_t = \rho_m$ กรณีที่ต้องการคานมีชั้นแกนกลางแข็งจะกำหนดให้ $E_b = E_m$, $\rho_b = \rho_m$, $E_t = E_c$ และ $\rho_t = \rho_c$ ซึ่งก็ใช้วิธีเหมือนกับโครงสร้างคานที่ได้กล่าวก่อนหน้านี้

ในการศึกษานี้กำหนดให้ความยาว (a) และความกว้าง (b) ของแผ่นบางเท่ากับ 1 เมตร ส่วนความสูงสามารถหาได้จากค่าสัดส่วนด้านยาวต่อความสูง (a/h) การวิเคราะห์จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระและการสั่นสะเทือนแบบบังคับ โดยในกรณีของการสั่นสะเทือนแบบอิสระ ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางจะถูกนำเสนอในรูปแบบไร้มิติ ดังนี้

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_o}{E_o}} \quad (7.3)$$

โดยที่ $E_o = 1$ GPa และ $\rho_o = 1$ kg/m³

7.2.1 ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบอิสระ

ก่อนการจำลองการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง สิ่งสำคัญอันดับแรกคือศึกษาการลู่เข้า (Convergence study) ของความถี่ธรรมชาติ ซึ่งก็เหมือนกับวิธีวิเคราะห์โครงสร้างคานก่อนหน้านี้ จากตารางที่ 7.8 เป็นการศึกษาการลู่เข้าของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยมีเงื่อนไขขอบเขตทั้งสี่ด้านเป็นแบบรองรับอย่างง่าย (SSSS) ชั้นแกนกลางแข็ง (Hardcore) และอัตราส่วนความหนาแน่นแต่ละชั้นที่ใช้คือ 1-2-1 สังเกตเห็นว่าความถูกต้องของความถี่ธรรมชาติ ตั้งแต่โหมด 1 ถึง 6 จะเพิ่มขึ้นถ้าจำนวนพจน์ (N) ของฟังก์ชันพหุนามเพิ่มขึ้นและจะลู่เข้าเมื่อจำนวนพจน์ (N) เท่ากับ 10 ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ฟังก์ชันพหุนามแบบแกรมซมิตต์ จำนวน

10 พจน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 7.8 ผลการศึกษาการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติสำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2$)

N	Mode sequence					
	1	2	3	4	5	6
3	1.3785	3.7079	5.5302	8.9123	11.4082	14.0083
4	1.3011	3.6788	5.5302	7.8239	8.0469	11.0637
5	1.3011	3.1558	4.8979	7.8239	7.9399	11.0637
6	1.3009	3.1556	4.8976	6.0696	7.6531	10.1839
7	1.3009	3.1473	4.8866	6.0684	7.6474	9.9056
8	1.3009	3.1473	4.8866	5.9956	7.5898	9.8975
9	1.3009	3.1473	4.8865	5.9956	7.5898	9.6142
10	1.3009	3.1473	4.8865	5.9946	7.5890	9.6140
Ref.[105]	1.3023	3.1563	4.9079	6.0262	7.6384	9.6811
Ref.[106]	1.3009	3.1473	4.8865	5.9945	7.5890	9.6046

ตารางที่ 7.9 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)

B.C.	Source	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
2-1-2 layer thickness ratio (hard core)							
SSSS	Present	1.8263	1.4830	1.2985	1.1205	0.9796	0.9405
	Ref.[106]	1.8244	1.4829	1.2985	1.1205	0.9796	0.9405
	Ref.[105]	1.8244	1.4841	1.3000	1.1218	0.9796	0.9390
CCCC	Present	3.1226	2.5681	2.2637	1.9652	1.7236	1.6541
	Ref.[106]	3.1123	2.5680	2.2636	1.9650	1.7235	1.6540
	Ref.[105]	3.2936	2.7099	2.3864	2.0680	1.8064	1.7268
2-2-1 layer thickness ratio (hard core)							
SSSS	Present	1.8259	1.5463	1.3943	1.2422	1.1071	1.0591
	Ref.[106]	1.8244	1.5462	1.3942	1.2420	1.1065	1.0584
	Ref.[105]	1.8244	1.5471	1.3956	1.2436	1.1077	1.0587
CCCC	Present	3.1202	2.6716	2.4235	2.1719	1.9446	1.8625
	Ref.[106]	3.1123	2.6715	2.4233	2.1715	1.9441	1.8619
	Ref.[105]	3.2936	2.8199	2.5556	2.2868	2.0415	1.9497

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 7.10 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับ
โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)

B.C.	Source	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
2-1-2 layer thickness ratio (soft core)							
SSSS	Present	0.9296	1.5531	1.7140	1.8156	1.8651	1.8711
	Ref.[106]	0.9295	1.5531	1.7139	1.8157	1.8651	1.8712
CCCC	Present	1.5894	2.5968	2.8648	3.0420	3.1393	3.1581
	Ref.[106]	1.5894	2.5967	2.8646	3.0420	3.1392	3.1581
2-2-1 layer thickness ratio (soft core)							
SSSS	Present	0.9293	1.4572	1.6078	1.7146	1.7831	1.8022
	Ref.[106]	0.9294	1.4571	1.6076	1.7143	1.7829	1.8020
CCCC	Present	1.5882	2.4366	2.6842	2.8648	2.9874	3.0248
	Ref.[106]	1.5881	2.4364	2.6841	2.8646	2.9871	3.0246

ตารางที่ 7.9 และตารางที่ 7.10 ได้แสดงค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ โดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ โดยโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันใช้แกนกลางแข็งแสดงในตารางที่ 7.9 ในขณะที่โครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ใช้แกนกลางอ่อนได้แสดงในตารางที่ 7.10 ซึ่งทั้งสองตารางใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS และ CCCC และอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นคือ 2-1-2 และ 2-2-1 สังเกตเห็นว่าความถี่ไร้มิติของโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็นแบบ 2-2-1 จะมีค่าความถี่ไร้มิติมากกว่าโครงสร้างแผ่นบางที่อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็น 2-1-2 เนื่องจากโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้อัตราส่วนความหนาแบบ 2-2-1 นั้นจะมีสัดส่วนผสมของเฟสเซรามิกมากกว่าแบบ 2-1-2 ในทางตรงกันข้ามพิจารณาตารางที่ 7.9 ซึ่งโครงสร้างแผ่นบางใช้แกนกลางอ่อน ดังนั้นสัดส่วนของเฟสโลหะก็จะมากกว่าเฟสเซรามิกเป็นผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้อัตราส่วนความหนาแบบ 2-2-1 มีค่าน้อยกว่าแบบ 2-1-2 ส่วนพารามิเตอร์อีกค่าที่มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของโครงสร้างแผ่นบางคือค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) พิจารณาตารางที่ 7.9 โครงสร้างแผ่นบางจะมีความถี่ธรรมชาติไร้มิติเพิ่มขึ้นเมื่อค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเพิ่มขึ้น เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุในกรณีที่ใช้แกนกลางอ่อน (เซรามิกอยู่ผิวด้านนอก) เป็นผลทำให้เฟสเซรามิกเพิ่มมากขึ้นในส่วนของแผ่นประกบบนและล่าง ถ้าพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตทั้งแบบ SSSS และ CCCC ทั้งตารางที่ 7.9 และตารางที่ 7.10 แน่แน่นอนว่าความถี่ไร้มิติของโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC จะมีค่ามากกว่าแบบ SSSS โดยทั้ง 2 ตารางได้ทำการเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ (Ref.[105-106]) นอกจากตารางที่ 7.9 และตารางที่ 7.10 แล้ว ในงานวิจัยครั้งนี้ได้ทำการหาค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติของโครงสร้างแผ่นบางเพิ่มเติมดังแสดงในตารางที่ 7.11 และตารางที่ 7.12 โดยการเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตหลาย ๆ แบบเพื่อเป็นประโยชน์ในการนำข้อมูลเหล่านี้ไปใช้หรือเปรียบเทียบผลกับงานวิจัยอื่น ๆ ในอนาคต จากตารางทั้งสองเห็นได้ว่าค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติจะเปลี่ยนแปลงไปตามเงื่อนไขขอบเขตที่เปลี่ยนไป โดยที่โครงสร้างแผ่นบางซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ยึดแน่นหนึ่งด้านส่วนด้านที่เหลือปล่อยอิสระ (CFFF) นั้นจะมีค่าความถี่ธรรมชาติไว้มีติน้อยกว่าแบบเงื่อนไขขอบเขตอื่น ๆ เนื่องจากมีด้านที่ถูกบังคับหรือยึดไว้ให้น้อยสุด

ตารางที่ 7.11 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไว้มีติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)

B.C.	Source	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
1-2-1 layer thickness ratio (hard core)							
CFFF	Present	0.3284	0.2820	0.2573	0.2323	0.2090	0.1998
	Ref.[106]	0.3285	0.2821	0.2573	N/A	0.2090	0.1998
CSSS	Present	2.1449	1.8548	1.6979	1.5386	1.3884	1.3288
	Ref.[106]	2.1425	1.8548	1.6979	N/A	1.3884	1.3287
CFSC	Present	1.5923	1.3764	1.2597	1.1413	1.0298	0.9855
CFFC	Present	0.6390	0.5505	0.5030	0.4550	0.4100	0.3922
CFCC	Present	2.1177	1.8384	1.6864	1.5314	1.3846	1.3260
CCSS	Present	2.4228	2.0994	1.9239	1.7453	1.5765	1.5092
2-2-1 layer thickness ratio (hard core)							
CFFF	Present	0.3284	0.2771	0.2494	0.2218	0.1974	0.1888
CSSS	Present	2.1453	1.8230	1.6469	1.4699	1.3118	1.2554
CFSC	Present	1.5926	1.3528	1.2218	1.0904	0.9731	0.9312
CFFC	Present	0.6391	0.5410	0.4877	0.4345	0.3873	0.3706
CFCC	Present	2.1184	1.8076	1.6366	1.4640	1.3090	1.2533
CCSS	Present	2.4235	2.0638	1.8666	1.6679	1.4899	1.4261

ตารางที่ 7.12 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติไว้มีติ ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_0 / E_0}$) สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 10$)

B.C.	Source	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
1-2-1 layer thickness ratio (soft core)							
CFFF	Present	0.1671	0.2612	0.2903	0.3118	0.3267	0.3314
	Ref.[106]	0.1672	0.2612	0.2902	N/A	0.3266	0.3314
CSSS	Present	1.0917	1.6775	1.8592	1.9960	2.0933	2.1248
	Ref.[106]	1.0917	1.6775	1.8592	N/A	2.0934	2.1248
CFSC	Present	0.8105	1.2467	1.3820	1.4838	1.5561	1.5794
CFFC	Present	0.3253	0.5046	0.5601	0.6016	0.6306	0.6397
CFCC	Present	1.0779	1.6404	1.8157	1.9488	2.0449	2.0766
CCSS	Present	1.2332	1.8856	2.0883	2.2416	2.3515	2.3874

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		2-2-1 layer thickness ratio (soft core)					
CFFF	Present	0.1672	0.2642	0.2917	0.3110	0.3231	0.3263
CSSS	Present	1.0919	1.7003	1.8751	2.0001	2.0819	2.1054
CFSC	Present	0.8106	1.2635	1.3936	1.4865	1.5470	1.5644
CFFC	Present	0.3253	0.5108	0.5637	0.6012	0.6251	0.6317
CFCC	Present	1.0782	1.6652	1.8353	1.9583	2.0405	2.0650
CCSS	Present	1.2335	1.9125	2.1085	2.2494	2.3426	2.3699

7.2.2 ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหนึ่งแรง)

ในหัวข้อนี้จะเป็นการนำเสนอผลการสั่นสะเทือนแบบบังคับของแผ่นบางซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ดังนั้นสิ่งจำเป็นอย่างแรกคือตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง และเนื่องจากแบบจำลองของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่อยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่เป็นวิจัยใหม่และไม่มีข้อมูลที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้อง ดังนั้นเพื่อจะตรวจสอบความถูกต้องจะทำการปรับเปลี่ยนวัสดุของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันไปใช้วัสดุเนื้อเดียว (Homogeneous materials) ที่อยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ โดยวิธีปรับเปลี่ยนนั้นจะทำการกำหนดค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ให้เท่ากับศูนย์ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะนำไปเปรียบเทียบกับแบบจำลองเชิงวิเคราะห์ (analytical model) [107] โดยแบบจำลองเชิงวิเคราะห์จะใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS และอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ แสดงดังสมการต่อไปนี้

$$w(x, y, t) = \left(\frac{4P_o}{ab}\right) \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} a_{mn} \left[\sin(\omega_m t) - \left(\frac{\omega_m}{\omega_{mn}}\right) \sin(\omega_{mn} t) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (7.4)$$

โดยที่
$$a_{mn} = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(D_{mn} - \rho h \omega_m^2)}$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D_{mn}}{\rho h}} \quad \text{และ} \quad \omega_m = \frac{m\pi v_p}{a}$$

$$D_{mn} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2$$

P_o คือ แรงกระทำบนโครงสร้างแผ่นบางในหน่วยนิวตัน

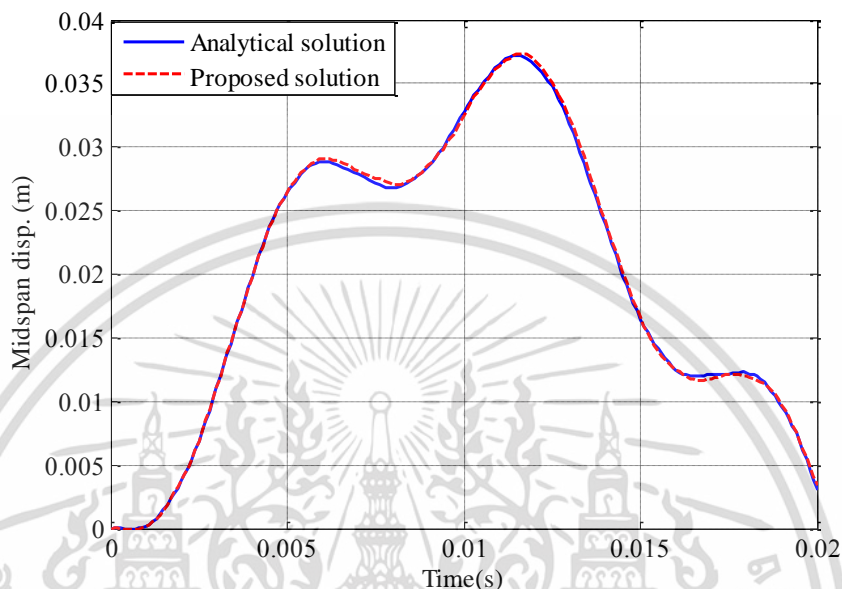
v_p คือ ความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่บนโครงสร้างแผ่นบางในหน่วยเมตรต่อวินาที

$w(x, y, t)$ คือ ค่าระยะการโก่ง ณ เวลาใด ๆ ในหน่วยเมตร

ในการเปรียบเทียบทั้งสองแบบจำลองของแผ่นบางจะเลือกใช้วัสดุเนื้อเดียวคืออะลูมิเนียม (Al) โดยมีค่ามอดูลัสของความยืดหยุ่น (E) เท่ากับ 70 GPa ความหนาแน่น (ρ) เท่ากับ 2700

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

kg/m^3 อยู่ภายใต้แรงกระทำหนึ่งแรงที่เคลื่อนไปตามแนวแกน x ด้วยความเร็วคงที่ (v_p) ณ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น ($y = 0$) โดยผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 7.26 ซึ่งแกน x แทนด้วยเวลา แกน y แทนด้วยระยะการโก่งของแผ่นบาง ณ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบาง เห็นได้ว่าผลลัพธ์ทั้ง 2 แบบจำลองนั้นมีความสอดคล้องกันและเป็นที่ยอมรับได้

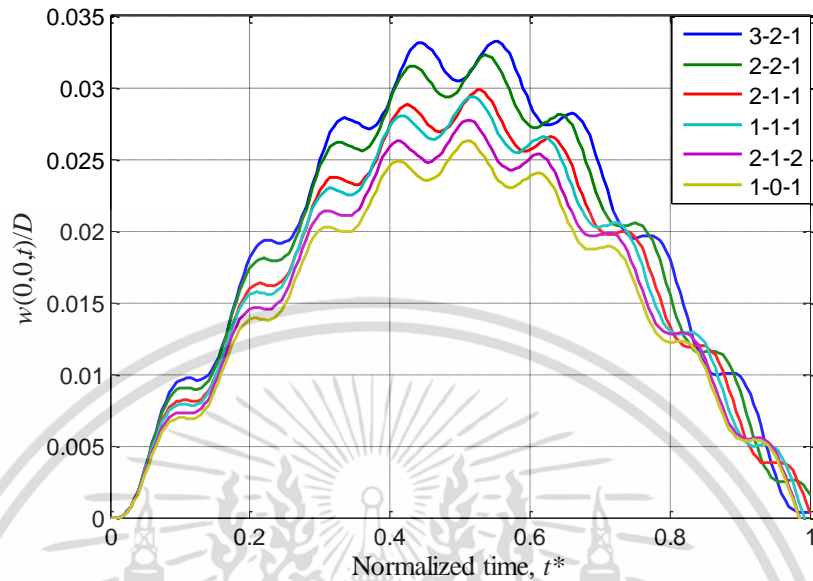


รูปที่ 7.26 กราฟเปรียบเทียบค่าระยะการโก่งของแผ่นบางของวัสดุไอโซทรอปิก ณ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบาง ณ เวลาใด ๆ ($a=1, b=1, h=0.03, v_p=50 \text{ m/s}$)

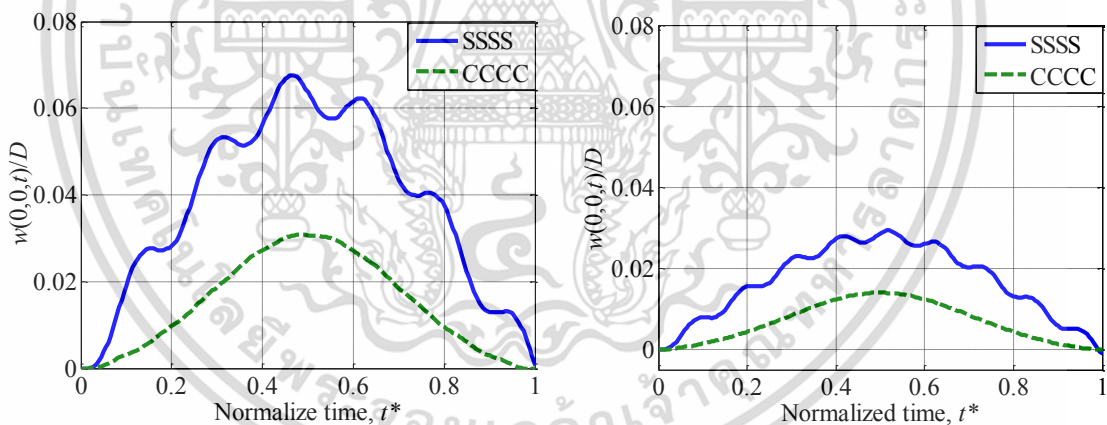
หลังจากตรวจสอบความถูกต้องถึงการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับ หลังจากนั้นแบบจำลองของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จะถูกนำมาวิเคราะห์หลาย ๆ พารามิเตอร์ ตัวอย่างเช่น ความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่บนแผ่นบาง, มุมเฟสและความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรง อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น เงื่อนไขขอบเขต เป็นต้น และเพื่อให้การแสดงผลอยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ดังนั้นระยะการโก่งของแผ่นจะถูกปรับเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบไร้มิติ ซึ่งหาได้โดยนำค่าระยะการโก่ง ณ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบาง ($w(0,0,t)$) หารด้วยระยะการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางแบบสถิตยศาสตร์ที่ใช้วัสดุอุมิเนียมนั้นคือ $D = P_0 a^2 / E_m h^3$ โดยที่ P_0 คือแรงกระทำแบบจุดตรงกลางแผ่นบาง โดยทั้งขนาดของแรงที่กระทำแบบเคลื่อนที่และกระทำแบบจุด (P_0) จะกำหนดให้เท่ากับ 500 kN และแบ่งช่วงเวลาที่แรงเคลื่อนบนแผ่นบางเป็นจำนวน 400 ส่วนตลอดงานวิจัยนี้

พิจารณารูปที่ 7.27 แสดงถึงพฤติกรรมทางด้านพลวัตของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวนหนึ่งแรง โดยกราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบาง $w(0,0,t)$ และเทียบกับเวลาไร้มิติ ($t^* = x_p/a = v_p t/a$) โดยแผ่นบางมีชั้นแกนกลางอ่อน เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS จากรูปสังเกตเห็นว่าแผ่นบางที่มีอัตราส่วนความหนาแบบ 3-2-1 จะมีระยะโก่งไร้มิติมากที่สุด เพราะว่าสัดส่วนผสมของเฟสเซรามิกมีค่าน้อยสุด ดังนั้นไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แผ่นบางจึงมีความยืดหยุ่นสูง ขณะที่แผ่นบางที่มีอัตราส่วนความหนาแบบ 1-0-1 (ไม่มีชั้นแกนกลางที่เป็นโลหะ) นั้นจะมีค่าเปอร์เซ็นต์ผสมของเฟสเซรามิกมากที่สุด เป็นผลให้ระยะโก่งไร้มิติที่น้อยสุด



รูปที่ 7.27 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)



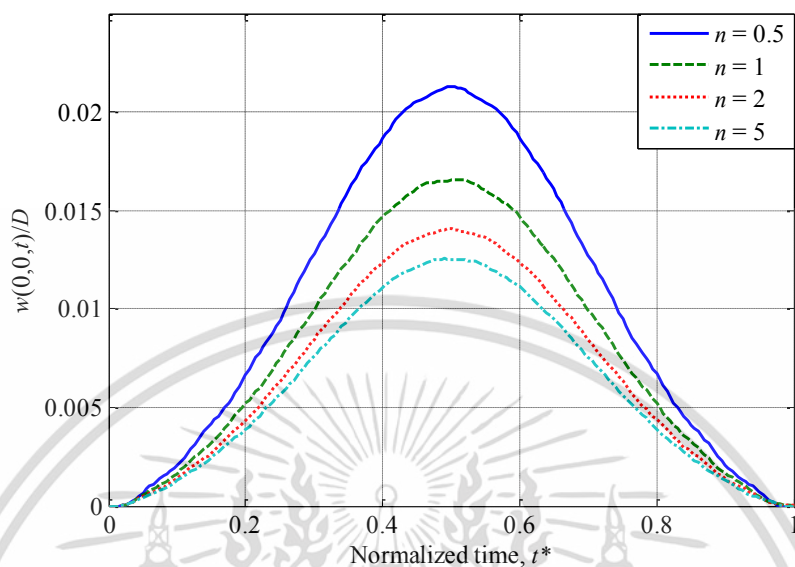
(ก) ชั้นแกนกลางแข็ง

(ข) ชั้นแกนกลางอ่อน

รูปที่ 7.28 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่เงื่อนไขขอบเขตต่างกัน ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)

รูปที่ 7.28 แสดงระยะการโก่งไร้มิติของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวนหนึ่งแรง โดยใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-1-1 เงื่อนไขขอบเขตทั้งแบบ SSSS และ CCCC โดยรูปที่ 7.28(ก) และ รูปที่ 7.28(ข) โครงสร้างแผ่นบางใช้ชั้นแกนกลางแบบแข็งและชั้นแกนกลางแบบอ่อน ตามลำดับ แน่แน่นอนว่าระยะการโก่งไร้มิติของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็น CCCC จะมีค่าน้อยกว่าแบบ SSSS และสังเกตอีกได้ว่าแผ่นบางที่ใช้แกนกลางอ่อนจะมี

ค่าระยะโค้งน้อยกว่าแผ่นบางที่ใช้แกนกลางแข็ง เหตุผลเพราะว่าแผ่นบางที่ใช้แกนกลางอ่อนแผ่นปะกบบนและล่างที่เป็นวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยสัดส่วนเปอร์เซ็นต์ส่วนใหญ่เป็นเซรามิก



รูปที่ 7.29 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุต่าง ๆ ($a/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)

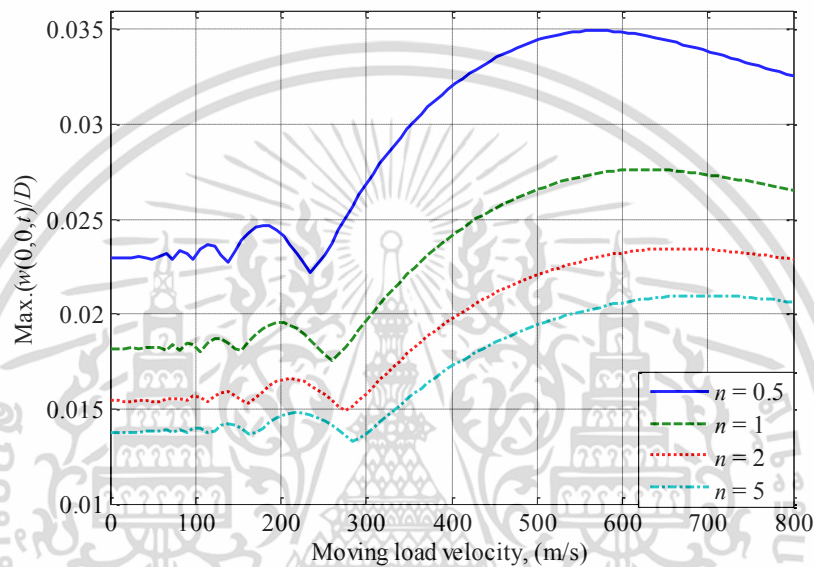
ลำดับถัดไปจะพิจารณาผลกระทบของค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ที่มีผลต่อระยะโก่งไร้มิติของแผ่นบาง ดังรูปที่ 7.29 ได้แสดงระยะโก่งไร้มิติของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวนหนึ่งแรง โดยใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-1-1 เงื่อนไขขอบเขตเป็น CCCC ชั้นแกนกลางอ่อน จากรูปแสดงให้เห็นว่าเมื่อเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุผลก็คือจะทำให้ระยะโก่งไร้มิติของแผ่นบางลดลง เนื่องจากว่าการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุทำให้สัดส่วนเปอร์เซ็นต์ ของเฟสเซรามิกเพิ่มขึ้นในชั้นส่วนแผ่นปะกบบนและล่างของแผ่นบางแบบแซนด์วิชในกรณีนี้โครงสร้างแซนด์วิชมีชั้นแกนกลางอ่อน

รูปที่ 7.30 พิจารณากราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติสูงสุดของแต่ละความเร็ว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่หนึ่งแรง สภาวะเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ CCCC แกนกลางอ่อนและใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 (แบบไม่สมมาตร) สังเกตได้ว่าค่าระยะโก่งไร้มิติสูงสุดมีค่าแกว่ง ณ ตำแหน่งความเร็วเริ่มต้นหลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนถึงจุดสูงสุดซึ่งเรียกว่าค่าความเร็ววิกฤตหลังจากนั้นระยะโก่งสูงสุดก็จะลดลงหลังจากผ่านจุดความเร็ววิกฤต และสังเกตเห็นอีกว่าระยะโก่งไร้มิติลดลงเมื่อเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุซึ่งเหตุผลเนื่องการเพิ่มขึ้นเฟสเซรามิกของแผ่นปะกบบนล่างเพิ่มขึ้นเมื่อทำการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ และจากรูปสังเกตเห็นว่าตำแหน่งความเร็ววิกฤตของแต่ละเส้นกราฟจะเพิ่มขึ้นเมื่อโครงสร้างมีความแข็งแรงขึ้น เหตุผลเพราะว่าโครงสร้างแผ่นบางที่มีความแข็งแรงก็ตอบสนองต่อความถี่สูง ๆ ได้ดีตามไปด้วยเช่นกัน

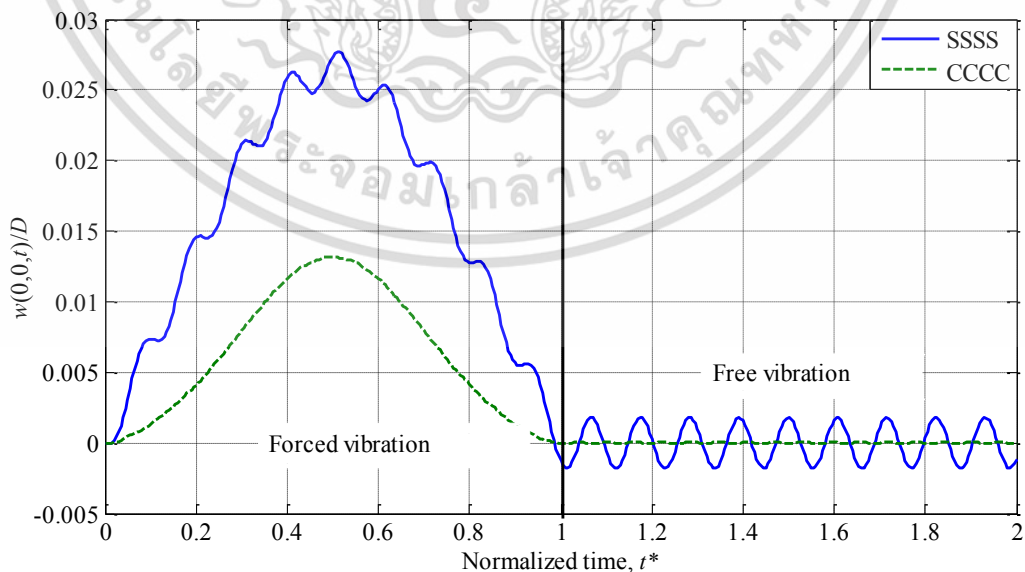
กราฟต่อไปจะทำการแบ่งพื้นที่กราฟออกเป็น 2 ส่วนคือส่วนที่มีการสั่นสะเทือนแบบบังคับ ($0 \leq t^* \leq 1$) และส่วนที่มีการสั่นสะเทือนแบบอิสระ การสั่นสะเทือนแบบอิสระจะเกิดขึ้นเมื่อแรงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กระทำบนแผ่นบางนั้นเคลื่อนที่ผ่านไปนั้นคือเมื่อ $t^* > 1$ โดยกราฟจะแสดงถึงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่หนึ่งแรง ดังแสดงในรูปที่ 7.31 โดยกำหนดสภาวะเงื่อนไขขอบเขตทั้งแบบ CCCC และ SSSS ชั้นแกนกลางอ่อนและใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-2 แน่นอนว่าในช่วงการสั่นสะเทือนแบบบังคับนั้นค่าระยะโก่งของแผ่นบางในกรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS มากกว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC หากพิจารณาระยะโก่งไว้มิติในช่วงการสั่นสะเทือนแบบอิสระเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS จะมีระยะโก่งไว้มิติสูงกว่าเนื่องจากค่าพลังงาน ณ ช่วงเวลา $t^* = 1$ นั้นจะมีค่ามากกว่าแบบ CCCC



รูปที่ 7.30 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติสูงสุดของแต่ละความเร็ว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าความเร็วต่าง ๆ กัน ($a/h = 20, \Omega_i = 0$)

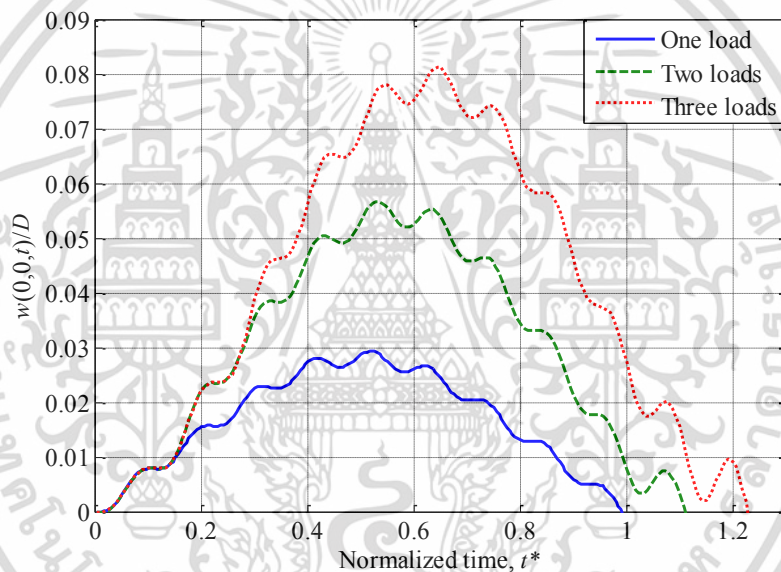


รูปที่ 7.31 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7.2.3 ผลเฉลยการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (ภายใต้แรงกระทำหลายแรง)

พิจารณาโครงสร้างแผ่นบางแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันอยู่ภายใต้แรงกระทำจำนวน 1-3 แรง แสดงดังรูปที่ 7.32 โดยรูปแสดงให้เห็นถึงระยะการโก่งไว้มิติของแผ่นบางซึ่งใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-1-1 สภาวะเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบจตุรรองรับอย่างง่ายทั้ง 4 ด้าน ชั้นแกนกลางอ่อน เมื่อพิจารณากรณีแรงเคลื่อนที่พร้อมกันจำนวน 3 แรง แรงแรกจะเริ่มเคลื่อนที่เข้าทางด้านซ้ายของแผ่นบางนั้นคือตำแหน่ง $x = -0.5a$ ที่เวลา $t = 0$ จากนั้นแรงที่สองและแรงที่สามจะเคลื่อนที่เข้าบนแผ่นบางเมื่อเวลา $t = d/v_p$ และ $t = 2d/v_p$ ตามลำดับ และเมื่อถึงเวลา $t = a/v_p$ แรงแรกจะเคลื่อนที่ออกจากแผ่นบางและแรงที่สองและแรงที่สามจะเคลื่อนที่ออกจากแผ่นบางเมื่อเวลา $t = (a+d)/v_p$ และ $t = (a+2d)/v_p$ ตามลำดับ จากกราฟเส้นจะเห็นว่าแรงที่กระทำบนแผ่นบางซึ่งเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน 3 แรงนั้นจะมีระยะโก่งไว้มิติสูงสุด เนื่องจากผลรวมของแรงทั้ง 3 ที่กระทำบนแผ่นบางมีมากกว่าแรงที่กระทำบนแผ่นบางจำนวน 1 และ 2 แรง



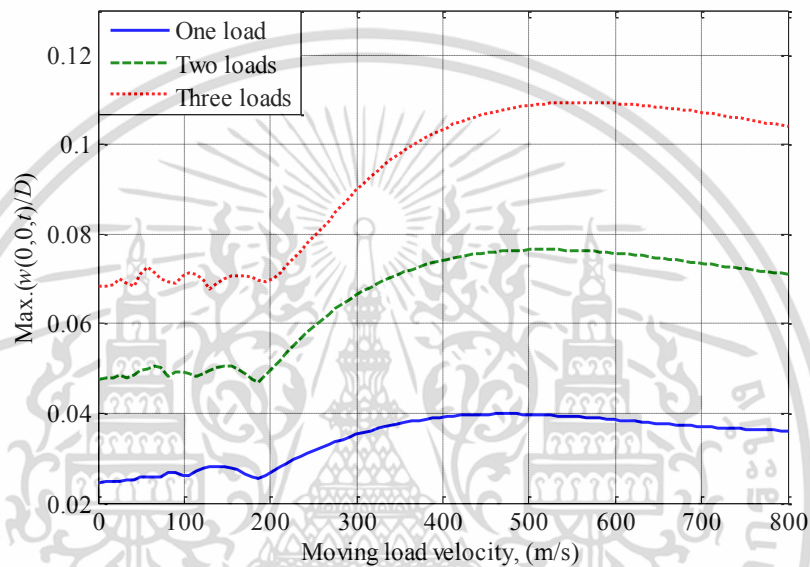
รูปที่ 7.32 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแกนด्वิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้จำนวนแรง 1 – 3 แรง ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = 0$)

รูปที่ 7.33 แสดงถึงค่าระยะโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ค่าความเร็วของแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนแผ่นบาง โดยที่แผ่นบางใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-1-1 มีชั้นแกนกลางแข็ง เงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบจตุรรองรับอย่างง่ายทั้ง 4 ด้าน จะเห็นได้ว่าค่าระยะโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ความเร็วต่าง ๆ นั้นจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นทีละน้อย หลังจากนั้นระยะโก่งไว้มิติจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนถึงจุด ๆ หนึ่งและจะลดลงเมื่อความเร็วของแรงเพิ่มขึ้น ซึ่งค่าความเร็วที่ทำให้เกิดค่าระยะโก่งไว้มิติสูงสุดนี้เรียกว่า ความเร็ววิกฤต (critical velocity) อย่างที่กล่าวมาก่อนหน้านี้ระยะโก่งไว้มิติจะลดลงเมื่อผ่านจุดความเร็ววิกฤต แน่นอนว่าแรงที่กระทำบนแผ่นบางที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกัน 3 แรงนั้นจะมีระยะโก่งไว้มิติมากที่สุด และค่าความเร็ววิกฤตก็จะมีค่ามากกว่าอีกสองกรณีด้วยเช่นกัน เหตุผลเพราะช่วงเวลาที่เรากระทำอยู่บนแผ่นบางนั้นนานกว่ากรณีที่มีแรงจำนวน 1 แรง และ 2 แรง ต่อไปจะพิจารณาถึงระยะห่างระหว่าง

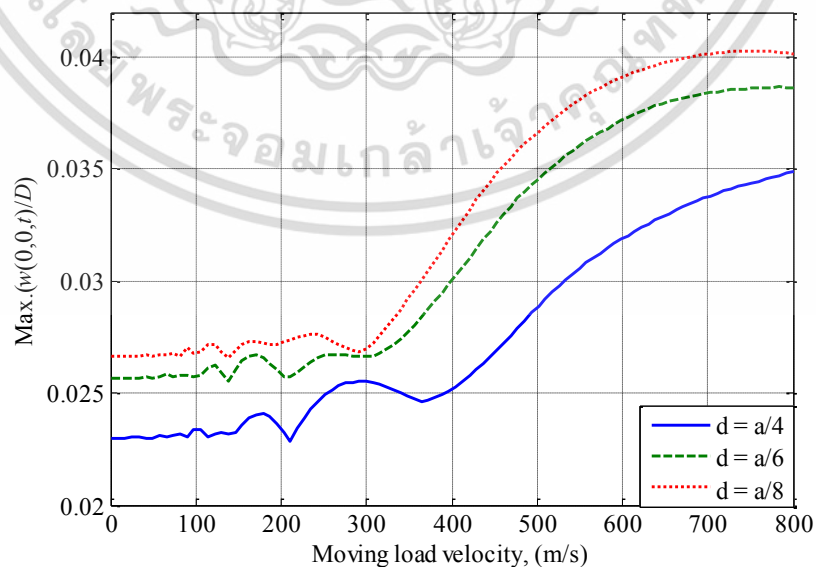
แรง (d) ดังรูปที่ 7.34 แสดงระยะโก่งไว้มิติสูงสุดของแผ่นบาง ณ ความเร็วของแรงต่าง ๆ โดยเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนเวลาสำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้แรงเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน 2 แรง และโครงสร้างแผ่นบางมีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นเป็นแบบ 1-1-1 ชั้นแกนกลางอ่อนและถูกยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน (CCCC) สังเกตว่าถ้ากำหนดให้ระยะ d น้อยลง (แรงสองแรงอยู่ใกล้กัน) แน่แน่นอนว่าจะทำให้เกิดระยะโค้งไร้มิติมากกว่าแรงสองแรงที่อยู่ห่างกัน ประเด็นเรื่องความเร็ววิกฤต แน่แน่นอนจะขึ้นกับเวลาที่แรงกระทำบนโครงสร้างแผ่นบางซึ่งแผ่นบางสามารถตอบสนองได้ ในกรณีที่ระยะเวลาที่แรงกระทำบนแผ่นบางมีค่าน้อย ๆ (ความเร็วสูง ๆ) โครงสร้างแผ่นบางจะตอบสนองไม่ทันกับช่วงเวลาของแรงที่กระทำดังกล่าว ซึ่งทำให้ระยะการโค้งลดลงนั่นเอง ดังนั้นจุดความเร็ววิกฤตของแรงที่มีระยะห่าง $d = a/4$ ก็จะมีจุดความเร็ววิกฤตมากกว่าอีก 2 กรณี

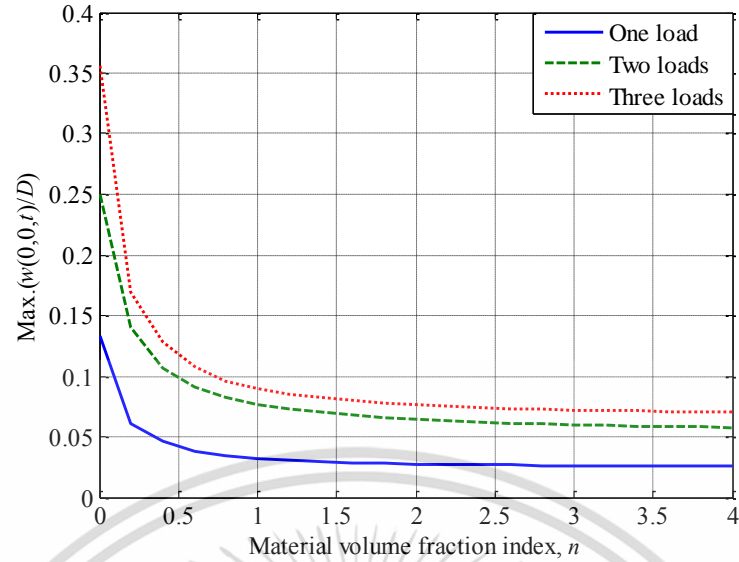


รูปที่ 7.33 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติสูงสุดของแต่ละความเร็ว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2, d = a/8$ m, $\Omega_i = 0$)



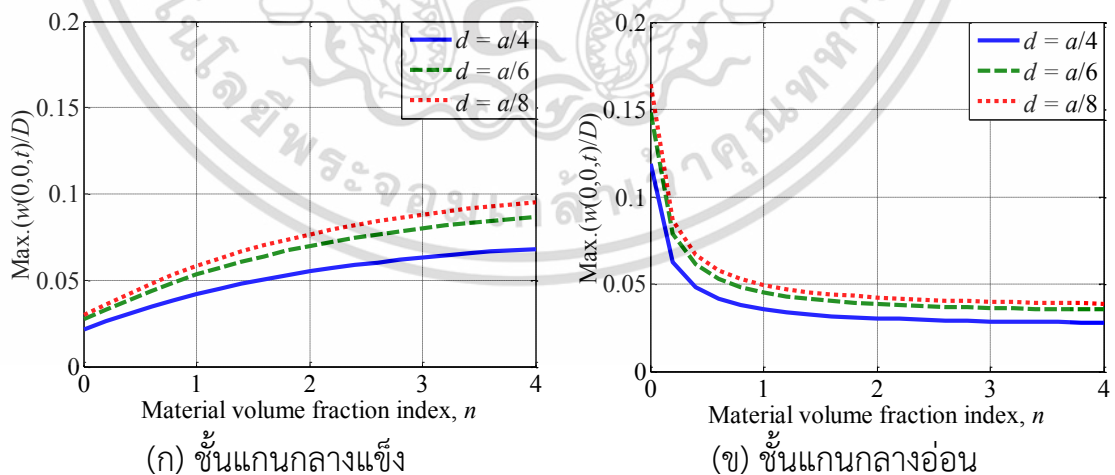
รูปที่ 7.34 กราฟแสดงระยะการโค้งไร้มิติสูงสุดของแต่ละความเร็ว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2, \Omega_i = 0$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตเห็นไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.35 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = 0$)

พิจารณารูปที่ 7.35 แสดงระยะโก่งไว้มิติสูงสุดของโครงสร้างแผ่นบาง ณ ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ (n) ต่าง ๆ กัน โดยที่แผ่นบางใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-2 ชั้น แกนกลางอ่อน สภาวะเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้านเป็นแบบ SSSS จากรูปแสดงให้เห็นว่าเมื่อเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเป็นผลทำให้ระยะโก่งไว้มิติของแผ่นบางลดลง เนื่องจากว่าการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุทำให้สัดส่วนเปอร์เซ็นต์ของเฟสเซรามิกเพิ่มขึ้นในชั้นส่วนแผ่นปะกบบนและล่างของแผ่นบางแบบแซนด์วิช แน่นอนว่าระยะโก่งไว้มิติสูงสุดเกิดขึ้นกรณีแรงกระทำพร้อมกันจำนวน 3 แรง



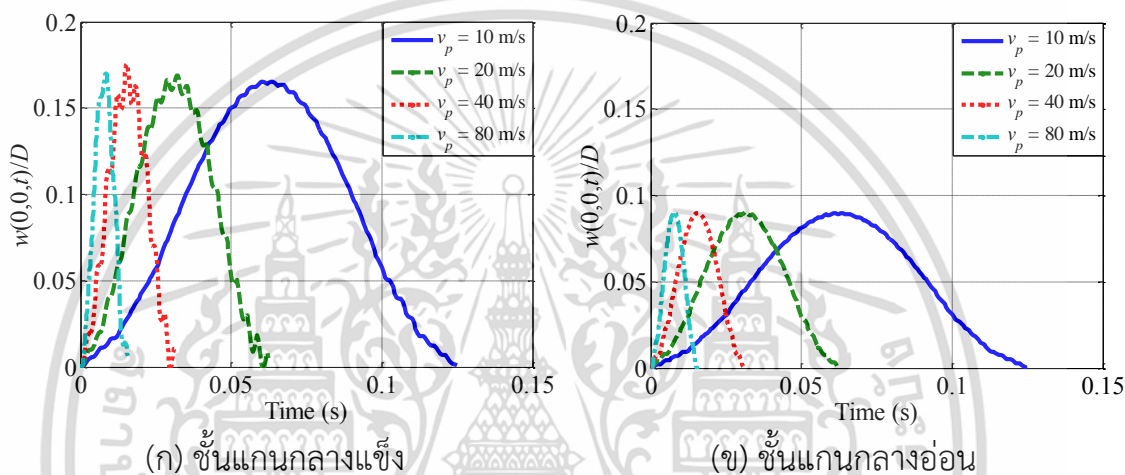
(ก) ชั้นแกนกลางแข็ง

(ข) ชั้นแกนกลางอ่อน

รูปที่ 7.36 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติสูงสุดของแต่ละความเร็ว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวน 3 แรง ($a/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนรูปที่ 7.36 แสดงค่าระยะโก่งไร้มิติสูงสุดของแผ่นบางแบบแซนด์วิชเทียบกับค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ ซึ่งจะเปรียบกัน 2 กรณีคือกรณีชั้นแกนกลางแข็งและกรณีชั้นแกนกลางอ่อนโดยที่แผ่นบางใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 3-2-1 ด้านทั้ง 4 ถูกยึดแน่น จากรูปแสดงให้ว่าระยะโก่งไร้มิติของแผ่นบางที่ใช้แกนกลางแข็งจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเพิ่มขึ้นดังแสดงรูปที่ 7.36(ก) และจะให้ผลลัพธ์ในทางกลับกันในกรณีชั้นแกนกลางอ่อนดังแสดงรูปที่ 7.36(ข) ดังเหตุผลได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ ประเด็นที่น่าสนใจกรณีโครงสร้างแผ่นบางแบบแกนกลางอ่อนคือระยะโก่งไร้มิติจะลดลงอย่างรวดเร็วในกรณีที่ค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุมีค่าน้อย ๆ นั้นหมายความว่าการเพิ่มสัดส่วนปริมาตรเซรามิกบริเวณผิวของโครงสร้างก็เพียงพอในการเสริมความแข็งแรงให้กับโครงสร้าง

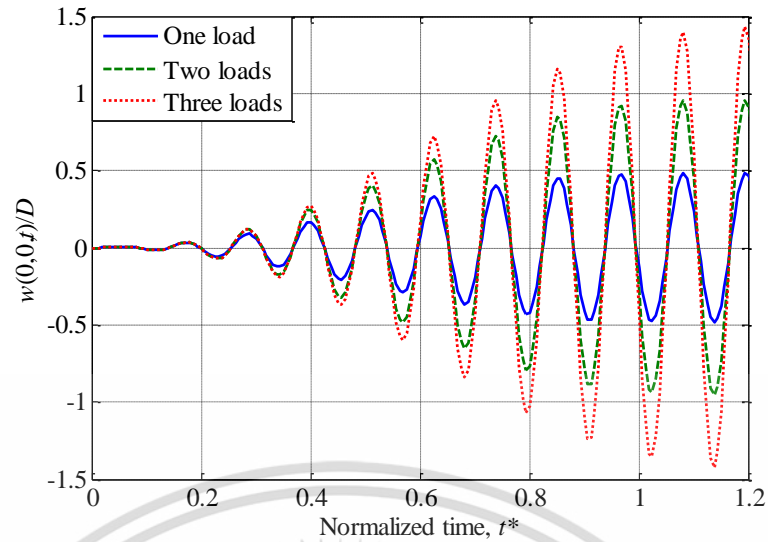


รูปที่ 7.37 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวน 3 แรง ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = 0$)

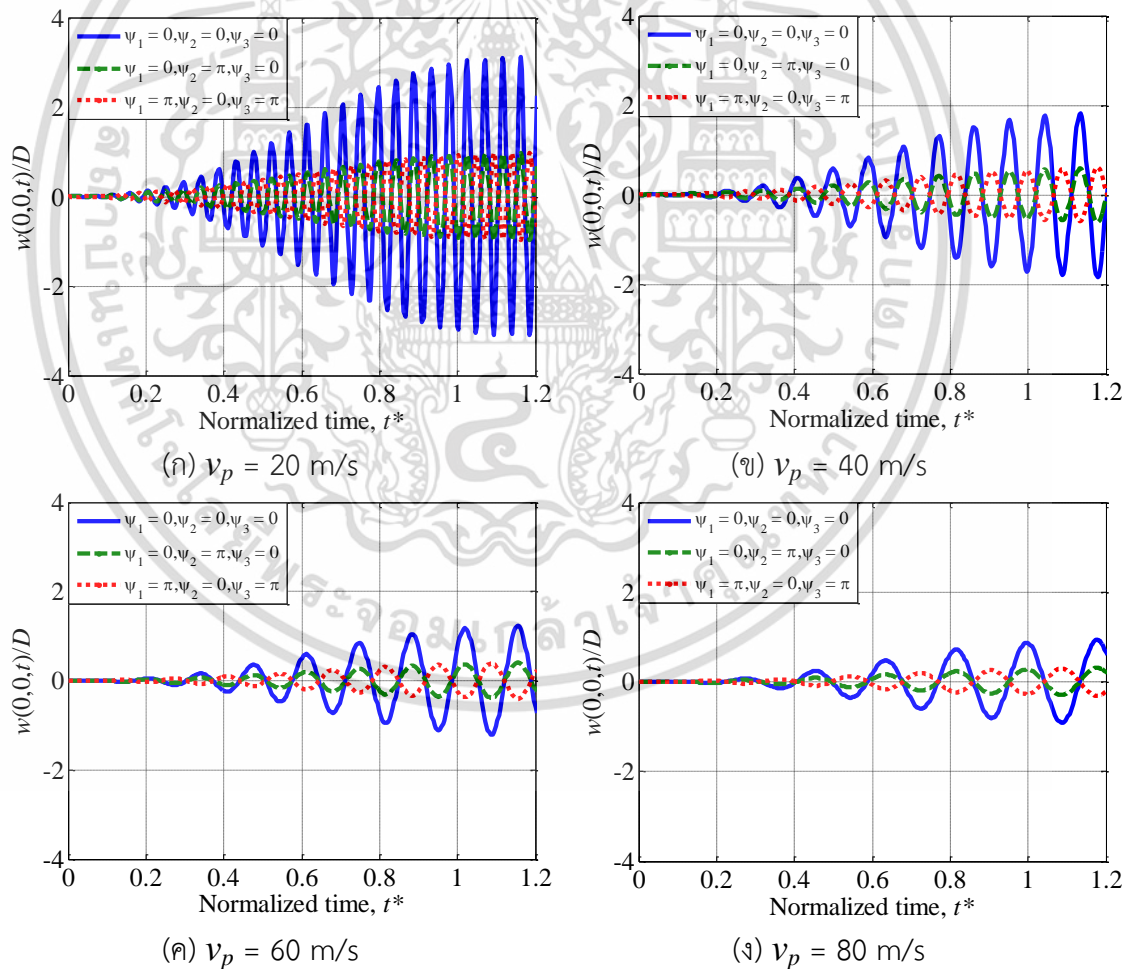
พิจารณารูปที่ 7.37 แสดงระยะโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวน 3 แรง ซึ่งแผ่นบางใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 3-2-1 รูปที่ 7.37(ก) ชั้นแกนกลางแข็งและรูปที่ 7.37(ข) ชั้นแกนกลางอ่อน สภาวะเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้านเป็นแบบ SSSS สังเกตได้ว่าค่าระยะโก่งไร้มิติที่เกิดขึ้นสูงสุดของแรงแต่ละความเร็ว (10, 20, 40, 80 m/s) ไม่มีความแตกต่างกันมากนัก ยกเว้นถ้าเทียบกับกรณีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ซึ่งมีความเร็วสูง ๆ ระยะโก่งไร้มิติสูงสุดก็จะเพิ่มขึ้นอย่างชัดเจน ดังอธิบายไว้ก่อนหน้านี้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของแรงและระยะโก่งไร้มิติ

การศึกษาแบบจำลองที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้จะไม่พิจารณาแรงที่เคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก ดังนั้นหลังจากนี้จะพิจารณาผลกระทบทางด้านพลวัตของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ในลักษณะสันแบบฮาร์โมนิกพร้อมกันจำนวน 3 แรง โดยแต่ละแรงที่เคลื่อนที่บนแผ่นบางจะถูกกำหนดให้สันด้วยความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางนั้นคือ $\Omega_i = \omega_i$ โดยทั่วไปเมื่อระบบอยู่ใต้การสั่นพ้องแน่นอนว่าค่าระยะโก่งของคานหรือแผ่นบางก็จะสูงมาก ๆ เป็นเหตุระบบเสียหายได้ พิจารณารูปที่ 7.38 โครงสร้างแบบชั้นแกนกลางอ่อน สภาวะเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS เห็นว่าแผ่นบางจะเกิดการสั่นพ้องโดยขนาดของระยะโก่งไร้มิติจะเพิ่มขึ้นสูงขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อแรงกระทำแบบเคลื่อนที่ถูกระตุ้นด้วยค่าความถี่ที่ตรงกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.38 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ($a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = \omega_1$)



รูปที่ 7.39 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าความเร็วต่าง ๆ กัน (ก) $v_p = 20 \text{ m/s}$ (ข) $v_p = 40 \text{ m/s}$ (ค) $v_p = 60 \text{ m/s}$ (ง) $v_p = 80 \text{ m/s}$ ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, \Omega_i = \omega_1$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

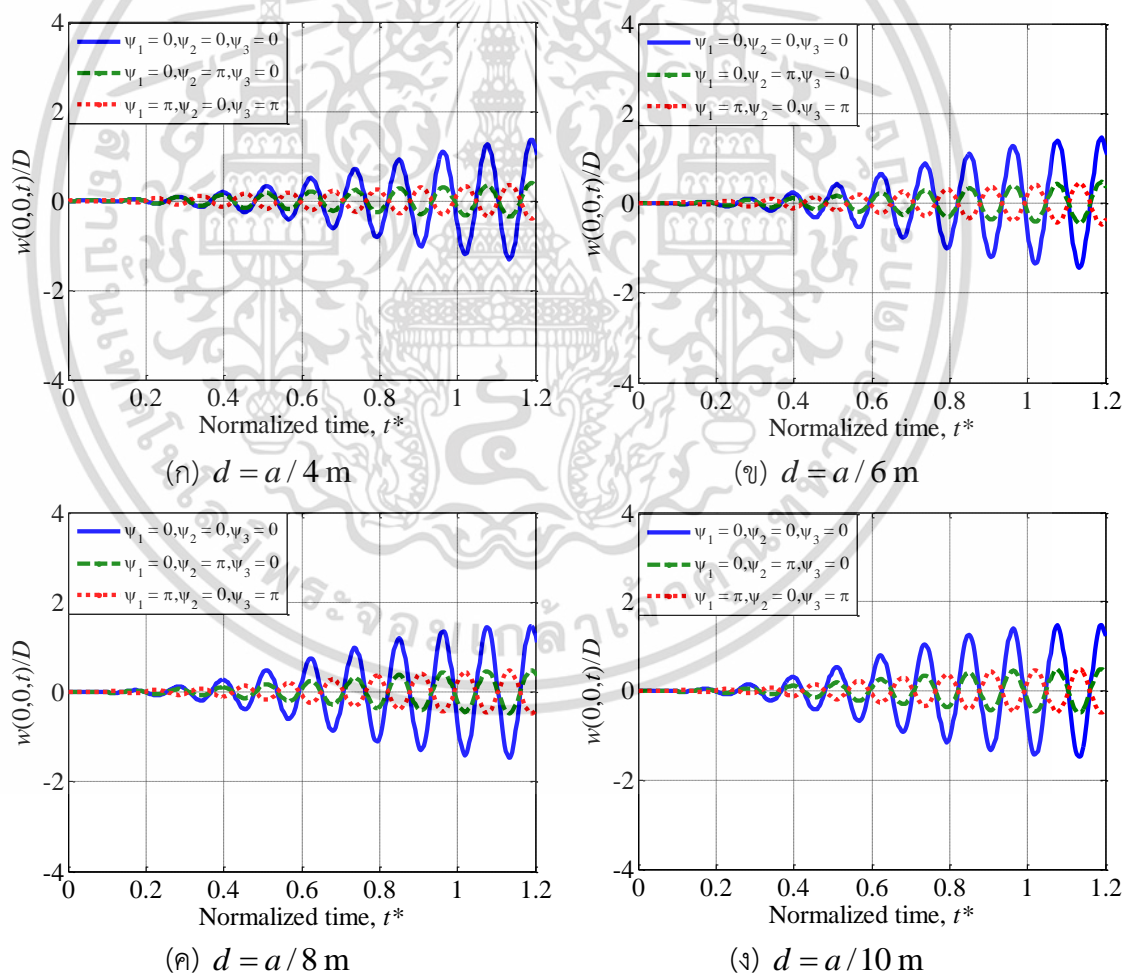
ต่อมารูปที่ 7.39 จะเป็นการศึกษาผลกระทบของค่ามุมเฟส (ψ_i) ของแรงที่เคลื่อนที่ในลักษณะฮาร์มอนิกจำนวน 3 แรง โดยแบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$

กรณีที่ 2 $\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi, \psi_3 = 0$

กรณีที่ 3 $\psi_1 = \pi, \psi_2 = 0, \psi_3 = \pi$

ในการศึกษานี้แผ่นบางใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 ชั้นแกนกลางอ่อน สภาวะเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้านเป็นแบบจตุรรองรับอย่างง่าย ซึ่งรูปที่ 7.39(ก) – รูปที่ 7.39(ง) ได้แสดงแรงกระทำแบบเคลื่อนที่มีความเร็ว 20, 40, 60 และ 80 m/s ตามลำดับ ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่ามุมเฟสของแต่ละแรงที่กระทำบนโครงสร้างแผ่นบางในกรณีที่ 1 ($\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$) ระยะโก่งไร้มิติของแผ่นบางจะมีมากกว่า กรณีที่ 2 และ กรณีที่ 3 เหตุผลเนื่องจากขนาดของแรงที่เคลื่อนแบบฮาร์มอนิก (กรณีที่ 2 และ 3) มุมเฟสจะตรงกันข้ามเป็นผลให้ขนาดของแรงหักล้างกัน ต่อมาพิจารณาถึงความเร็วโดยความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 20 m/s มีระยะโก่งไร้มิติสูงสุดเนื่องจากเวลาที่แรงกระทำอยู่บนแผ่นบางใช้เวลานานกว่ากรณีความเร็วอื่น ๆ นั่นเอง



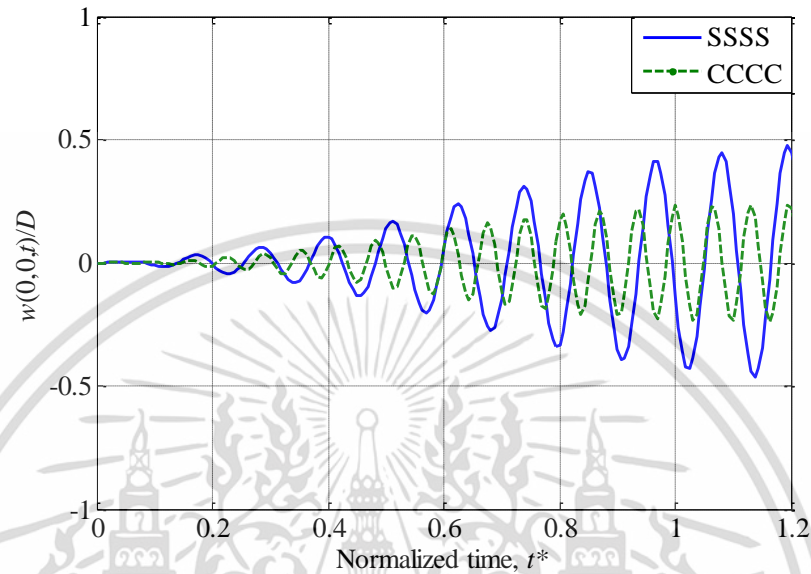
รูปที่ 7.40 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิง

ฟังก์ชัน (ก) $d = a/4$ m, (ข) $d = a/6$ m, (ค) $d = a/8$ m, (ง) $d = a/10$ m

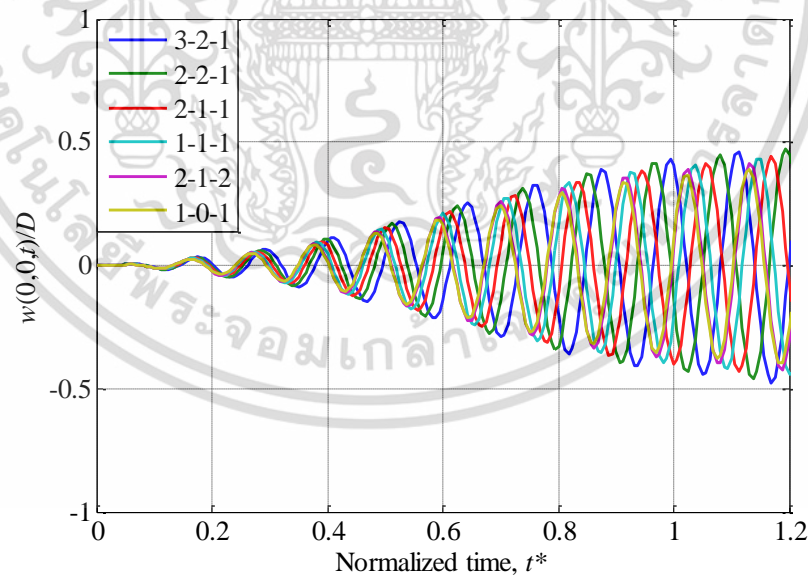
$$(a/h = 20, n = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = \omega_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อมาเป็นการศึกษาผลกระทบของระยะห่างระหว่างแรงทั้ง 3 แรงซึ่งแบ่งได้ 4 กรณี คือ $d = a/4$, $d = a/6$, $d = a/8$ และ $d = a/10$ แสดงดังรูปที่ 7.40 จากรูปแสดงให้ว่าระยะโก่งไว้มิติทั้ง 4 กรณีไม่มีความแตกต่างกันมากเนื่องระยะเวลาของแรงทั้ง 3 แรงที่กระทำอยู่บนแผ่นบางไม่แตกต่างกันมากนัก



รูปที่ 7.41 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่เงื่อนไขขอบเขตต่างกัน ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = \omega_1$)



รูปที่ 7.42 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนดวิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันที่ค่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นต่าง ๆ กัน ($a/h = 20, n = 2, d = a/8 \text{ m}, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = \omega_1$)

รูปที่ 7.41 และ รูปที่ 7.42 แสดงถึงระยะการโก่งไว้มิติของแผ่นบางที่อยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่จำนวน 3 แรงซึ่งเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกโดยมีความถี่ตรงกับความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นเอกสารนี้เป็นเอกลักษณ์ที่ตรงกันเพื่อที่จะให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำยิ่งขึ้น เมื่ออยู่ในเงื่อนไขการวิเคราะห์ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บางนั้นคือ $\Omega_i = \omega_i$ และมุมเฟสทั้ง 3 แรงแที่ใช้คือ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi, \psi_3 = 0$ กำหนดให้แผ่นบางใช้แกนกลางแบบอ่อนและอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 จากรูปที่ 7.41 สังเกตว่าระยะการโค้งไร้มิติของแผ่นบางที่มีจุดรองรับแบบยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน (CCCC) จะมีค่าน้อยกว่าวงเงื่อนไขขอบเขตที่มีจุดรองรับอย่างง่าย (SSSS) ส่วนผลกระทบที่เกิดจากการปรับเปลี่ยนอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบต่าง ๆ นั้นแสดงได้ในรูปที่ 7.42 จากรูปแสดงได้ว่าค่าระยะโค้งไร้มิติของแผ่นบางที่อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบต่าง ๆ นั้นไม่ค่อยแตกต่างกันตลอดช่วงเวลาที่แรงกระทำ

7.3 ผลเฉลยทางคณิตศาสตร์โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบน

พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอและวิเคราะห์ผลลัพธ์ของการสันสะท้อนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม (TSDT) ซึ่งทั้งคุณสมบัติของวัสดุและการหาความถี่ธรรมชาติไร้มิติที่ใช้ในแบบจำลองนี้ก็จะเหมือนกับแบบจำลองของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (FSDT) โดยในการศึกษาหัวข้อนี้จะเน้นพิจารณาถึงความแตกต่างของผลลัพธ์ระหว่างทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม

ตารางที่ 7.13 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับสาม ($L/h = 5$, Soft core)

BC	n	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
H-H	0.5	FSDT	4.5300	4.4134	4.3192	4.2983	4.1792	4.0953
		TSDT	4.4426	4.3046	4.2270	4.1839	4.0821	3.9921
		TSDT[108]	4.4427	4.3046	4.1960	4.1839	4.0504	3.9921
	1	FSDT	4.9463	4.8546	4.7450	4.7450	4.6057	4.5281
		TSDT	4.8525	4.7178	4.6301	4.5858	4.4693	4.3663
		TSDT[108]	4.8525	4.7178	4.5916	4.5858	4.4270	4.3663
	10	FSDT	5.2138	5.2851	5.1869	5.2759	5.1421	5.1507
		TSDT	5.1848	5.1966	5.1143	5.1301	5.0135	4.9326
		TSDT[108]	5.1848	5.1966	5.0866	5.1301	4.9700	4.9326
C-C	0.5	FSDT	8.4906	8.2025	8.0071	7.9529	7.7094	7.5542
		TSDT	8.0529	7.6645	7.5637	7.3931	7.2468	7.0556
		TSDT[108]	8.0509	7.6627	7.5623	7.3914	7.2456	7.0539
	1	FSDT	9.3002	9.0172	8.7838	8.7496	8.4531	8.2939
		TSDT	8.8244	8.3373	8.2285	7.9744	7.8066	7.5205
		TSDT[108]	8.8221	8.3354	8.2273	7.9726	7.8056	7.5187
	10	FSDT	10.0894	10.0216	9.8035	9.8632	9.5497	9.4702
		TSDT	9.9674	9.5634	9.4452	9.1215	8.9206	8.4182
		TSDT[108]	9.9640	9.5608	9.4430	9.1193	8.9195	8.4162

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรณีใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 7.14 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน บน พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับที่สาม ($L/h = 20$, Soft core)

BC	n	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
H-H	0.5	FSDT	4.8651	4.7552	4.6492	4.6391	4.5065	4.4247
		TSDT	4.8579	4.7460	4.6415	4.6294	4.4983	4.4160
		TSDT[108]	4.8579	4.7460	4.6050	4.6294	4.4611	4.4160
	1	FSDT	5.3067	5.2332	5.1102	5.1297	4.9753	4.9078
		TSDT	5.2990	5.2216	5.1006	5.1160	4.9637	4.8938
		TSDT[108]	5.2990	5.2217	5.0541	5.0541	4.9121	4.8938
	10	FSDT	5.5324	5.6523	5.5458	5.6742	5.5310	5.5765
		TSDT	5.5302	5.6452	5.5399	5.6621	5.5203	5.5575
		TSDT[108]	5.5302	5.6452	5.5073	5.6621	5.4667	5.5575
C-C	0.5	FSDT	10.8471	10.5916	10.2797	10.3277	9.9548	9.8469
		TSDT	10.7769	10.5021	10.2074	10.2327	9.8778	9.7614
		TSDT[108]	10.7743	10.4993	10.2050	10.2298	9.8754	9.7587
	1	FSDT	11.8358	11.6553	11.2842	11.4149	10.9624	10.9124
		TSDT	11.7608	11.5416	11.1938	11.2802	10.8531	10.7741
		TSDT[108]	11.7579	11.5383	11.1911	11.2767	10.8502	10.7706
	10	FSDT	12.3779	12.6185	12.3105	12.6470	12.2111	12.4046
		TSDT	12.3586	12.5488	12.2566	12.5265	12.1108	12.2164
		TSDT[108]	12.3564	12.5460	12.2541	12.5230	12.1079	12.2122

โดยตารางที่ 7.13 และตารางที่ 7.14 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติโครงสร้างคานแบบ แซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยมีชั้นแกนกลางอ่อน จากตารางที่ 7.13 โครงสร้างคานแบบแซนด์วิช ใช้อัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) เท่ากับ 5 พบว่าค่าความแตกต่างของความถี่ธรรมชาติระหว่าง ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสูงสุดเท่ากับ 12.5% เกิดขึ้นในกรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเท่ากับ 10 ส่วนตารางที่ 7.14 โครงสร้างคานแบบแซนด์วิชใช้อัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) เท่ากับ 20 พบว่าค่าความ ต่างของความถี่ธรรมชาติสูงสุดเท่ากับ 1.5% สังเกตเห็นค่าอัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) จะ เป็นตัวแปรสำคัญที่ทำให้เกิดความแตกต่างนั้นหมายความว่าถ้าอัตราส่วนความยาวต่อความสูงมีค่า น้อยผลกระทบจากความเครียดเฉือน (γ) ก็จะมีอิทธิพลมากซึ่งจะให้เกิดความแตกต่าง แต่ถ้าอัตราส่วน ความยาวต่อความสูงมีค่ามาก ๆ อิทธิพลจากความเครียดเฉือนก็จะน้อยหรืออาจไม่ต้องนำมาพิจารณา เหมือนกับทฤษฎีคานของออยเลอร์

ตารางที่ 7.15 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน บน พื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับสาม ($L/h = 5$, Hard core)

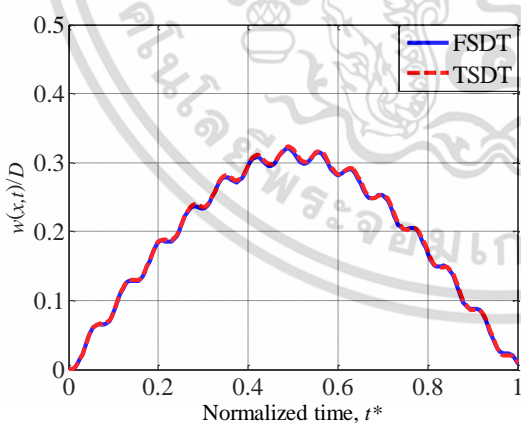
BC	n	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
H-H	0.5	FSDT	4.1214	4.2284	4.3038	4.3239	4.4113	4.4747
		TSDT	4.1268	4.2351	4.3091	4.3303	4.4167	4.4798
		TSDT[108]	4.1268	4.2351	4.2945	4.3303	4.4051	4.4798
	1	FSDT	3.5646	3.7197	3.8473	3.8660	4.0105	4.1028
		TSDT	3.5735	3.7297	3.8557	3.8755	4.0188	4.1105
		TSDT[108]	3.5735	3.7298	3.8187	3.8755	3.9896	4.1105
	10	FSDT	2.6811	2.7202	2.9651	2.8671	3.1514	3.2241
		TSDT	2.6932	2.7355	2.9772	2.8808	3.1636	3.2356
		TSDT[108]	2.6932	2.7355	2.8669	2.8808	3.0588	3.2356
C-C	0.5	FSDT	8.2804	8.4814	8.5860	8.6518	8.7814	8.9116
		TSDT	8.3637	8.5759	8.6710	8.7462	8.8686	8.9983
		TSDT[108]	8.3600	8.5720	8.6673	8.7423	8.8648	8.9942
	1	FSDT	7.2660	7.5764	7.7413	7.8504	8.0572	8.2750
		TSDT	7.3694	7.6900	7.8422	7.9617	8.1590	8.3747
		TSDT[108]	7.3661	7.6865	7.8390	7.9580	8.1554	8.3705
	10	FSDT	5.4163	5.6551	5.9277	5.9853	6.3413	6.6891
		TSDT	5.5397	5.8079	6.0541	6.1261	6.4658	6.8115
		TSDT[108]	5.5375	5.8059	6.0527	6.1240	6.4641	6.8087

โดยตารางที่ 7.15 และตารางที่ 7.16 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติโครงสร้างคานแบบ แชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันโดยมีชั้นแกนกลางแข็ง จากตารางที่ 7.15 โครงสร้างคานแบบแชนด์วิชใช้อัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) เท่ากับ 5 พบว่าค่าความแตกต่างของความถี่ธรรมชาติระหว่าง ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามสูงสุดเท่ากับ 2.6% ส่วนตารางที่ 7.16 โครงสร้างคานแบบแชนด์วิชใช้อัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) เท่ากับ 20 พบว่าค่าความแตกต่างของความถี่ธรรมชาติสูงสุดเท่ากับ 0.2% เท่านั้น

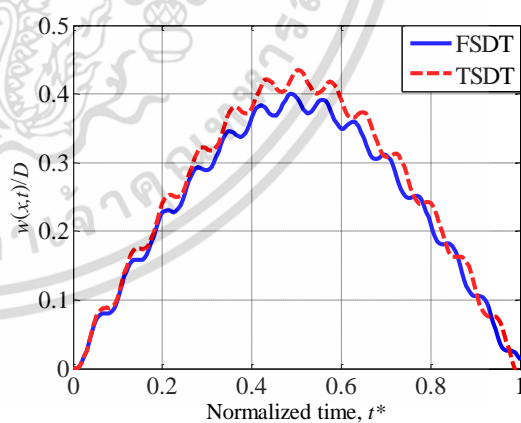
ลำดับถัดมาพิจารณาระยะโค้งไร้มิติของโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชบนพื้นฐานทฤษฎีการ เปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับที่สาม จากรูปที่ 7.43 แสดงถึงระยะการโค้งไร้มิติของโครงสร้าง แบบแชนด์วิชภายใต้สถานะเงื่อนไขขอบเขตแบบ H-H อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น 1-1-1 ซึ่งรูปที่ 7.43(ข) เป็นโครงสร้างคานใช้แกนกลางอ่อน โดยเมื่อเปรียบเทียบกันทั้ง 2 ทฤษฎี พบว่าระยะโค้งไร้ มิติสูงสุดมีความแตกต่างกันประมาณ 8% และรูปที่ 7.43(ก) เป็นโครงสร้างคานแบบแกนกลางแข็ง พบว่าระยะโค้งไร้มิติสูงสุดมีความแตกต่างกันประมาณ 0.8% เท่านั้น สังเกตได้ว่าโครงสร้างคานที่ใช้ แกนกลางอ่อนจะมีความแตกต่างเป็นนัยสำคัญกว่าโครงสร้างคานที่มีแกนกลางแบบแข็ง

ตารางที่ 7.16 ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสำหรับโครงสร้างคานแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและลำดับสาม ($L/h = 20$, Hard core)

BC	n	Theory	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
H-H	0.5	FSDT	4.3144	4.4285	4.5119	4.5320	4.6288	4.6975
		TSDT	4.3148	4.4290	4.5123	4.5324	4.6292	4.6979
		TSDT[108]	4.3148	4.4290	4.4970	4.5324	4.6170	4.6979
	1	FSDT	3.7140	3.8761	4.0153	4.0321	4.1900	4.2883
		TSDT	3.7147	3.8768	4.0159	4.0328	4.1906	4.2889
		TSDT[108]	3.7147	3.8768	3.9774	4.0328	4.1602	4.2889
	10	FSDT	2.8033	2.8177	3.0793	2.9652	3.2685	3.3398
		TSDT	2.8041	2.8188	3.0802	2.9662	3.2694	3.3406
		TSDT[108]	2.8041	2.8188	2.9662	2.9662	3.1613	3.3406
C-C	0.5	FSDT	9.6884	9.9433	10.0941	10.1733	10.3608	10.5402
		TSDT	9.6953	9.9513	10.1012	10.1813	10.3680	10.5474
		TSDT[108]	9.6942	9.9501	10.1001	10.1800	10.3668	10.5460
	1	FSDT	8.3512	8.7150	8.9393	9.0634	9.3469	9.6335
		TSDT	8.3602	8.7249	8.9481	9.0731	9.3558	9.6422
		TSDT[108]	8.3594	8.7241	8.9474	9.0722	9.3550	9.6411
	10	FSDT	6.2981	6.3465	6.6779	6.6811	7.1188	7.5212
		TSDT	6.3092	6.3594	6.6887	6.6928	7.1294	7.5316
		TSDT[108]	6.3086	6.3590	6.6889	6.6924	7.1296	7.5311



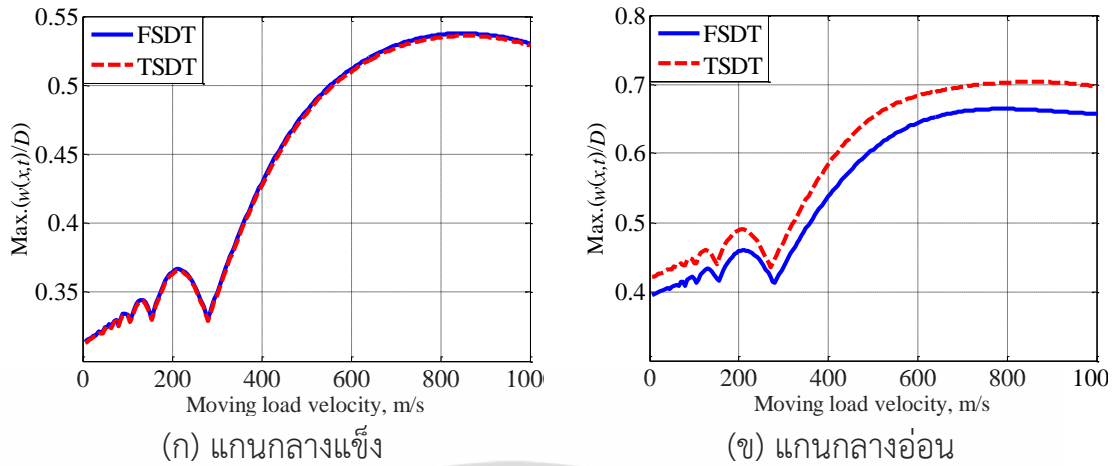
(ก) แกนกลางแข็ง



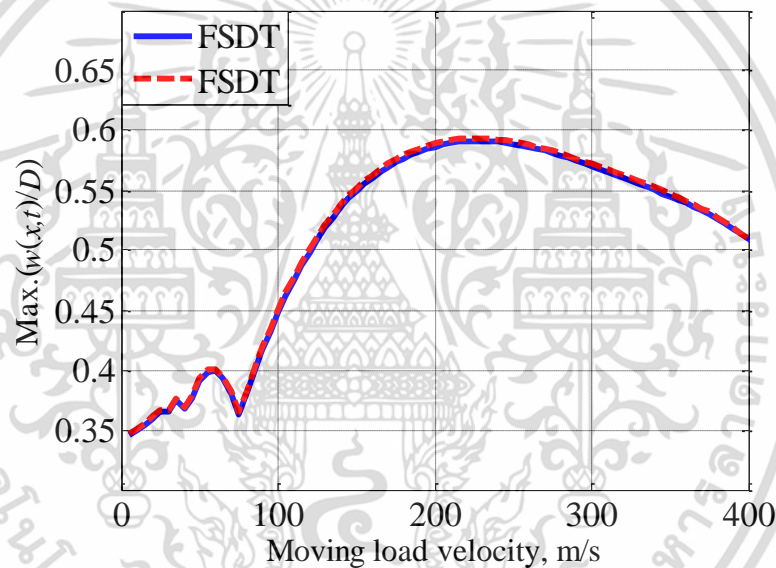
(ข) แกนกลางอ่อน

รูปที่ 7.43 กราฟแสดงระยะการโก่งไร้มิติ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแชนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎี FSDT และ TSDT ($L/h = 5, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.44 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ณ ความเร็วต่าง ๆ ($L/h=5, n=0.5$)



รูปที่ 7.45 กราฟแสดงระยะการโก่งไว้มีติสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ณ ความเร็วต่าง ๆ ($L/h=20, n=0.5$)

พิจารณาระยะการโก่งไว้มีติสูงสุดของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน ณ ค่าความเร็วต่าง ๆ กัน ดังแสดงรูปที่ 7.44 และรูปที่ 7.45 ซึ่งคานอยู่ภายใต้สภาวะเงื่อนไขขอบเขตแบบ H-H อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น 1-1-1 โดยจากรูปที่ 7.44(ข) ซึ่งโครงสร้างแบบแซนด์วิชเป็นแบบแกนกลางอ่อนจะมีค่าความแตกต่างเฉลี่ย ทั้ง 2 ทฤษฎี ตลอดช่วงความเร็วประมาณ 6.2% ส่วนรูปที่ 7.44(ก) โครงสร้างแบบแกนกลางแข็ง จะมีค่าความแตกต่างเฉลี่ยทั้ง 2 ทฤษฎีประมาณ 0.4% ถัดมารูปที่ 7.45 ซึ่งโครงสร้างแบบแซนด์วิชเป็นแบบแกนกลางอ่อนซึ่งมีอัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) เท่ากับ 20 พบว่าไม่มีความแตกต่างเป็นนัยสำคัญทั้ง 2 ทฤษฎี ดังที่อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ว่าถ้าอัตราส่วนความยาวต่อความสูงมีค่ามาก ๆ อิทธิพลจากความเครียดเฉือนก็จะน้อยหรืออาจไม่ต้องนำมาพิจารณาเหมือนกับทฤษฎีคานของออยเลอร์

บทที่ 8

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับ ทั้งโครงสร้างคานและโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน แต่จะมุ่งเน้นไปทางด้านการศึกษาทางด้านการสั่นสะเทือนแบบบังคับ โดยโครงสร้างคานหรือโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิช จะประกอบไปด้วย 2 ส่วนหลักคือแผ่นประกบบนและล่าง (Face sheet) ที่ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุวัสดุเชิงฟังก์ชัน (Functionally Graded Materials, FGMs) ซึ่งเป็นวัสดุคอมโพสิตประเภทหนึ่งและ ส่วนที่สองคือชั้นแกนกลาง (Core) ถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุเนื้อเดียว (Homogeneous materials) โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ชั้นแกนกลางอ่อน (soft core) และชั้นแกนกลางแข็ง (hard core) ซึ่งแบบจำลองทั้งโครงสร้างคานและแผ่นบางอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (First order shear deformation theory, FSDT) และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม (third order shear deformation theory, TSDT) ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาจะประยุกต์ใช้หลักการพลังงาน (energy principle) ซึ่งพลังงานดังกล่าวหาได้จากความเค้น ความเครียด พลังงานจลน์และแรงภายนอกที่มากระทำและใช้ระเบียบวิธีของริทซ์ (Ritz method) เพื่อสมมติฟังก์ชันของระยะการกระจัดตามเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด จากนั้นจะใช้วิธีการของลากรางจ์เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ ซึ่งการหาผลเฉลยของสมการเคลื่อนที่จะใช้วิธีการของนิวมาร์ค (Newmark method) เพื่อหาผลตอบสนองทางด้านพลวัตของโครงสร้างคานและโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิช ที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยจะพิจารณาพารามิเตอร์ต่าง ๆ ซึ่งมีผลต่อผลตอบสนองทางด้านพลวัตของโครงสร้างทั้งคานและแผ่นบาง เช่นโครงสร้างแบบแซนด์วิชที่ใช้ชั้นแกนกลางอ่อนและแกนกลางแข็ง ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุ ความเร็วของแรงที่เคลื่อนที่ผ่านคานหรือแผ่นบาง จำนวนแรงความถี่ของแรง อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น เงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ อัตราส่วนความยาวต่อความสูงของคานและค่าคงที่สปริง (K_w และ K_s) เมื่อคานอยู่ภายใต้ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น ซึ่งจะสรุปเป็นหัวข้อต่าง ๆ ได้ดังนี้

8.1 สรุปผลโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

8.1.1 การสั่นสะเทือนแบบอิสระ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสรุปผลซึ่งเกี่ยวข้องกับการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง (FSDT) เน้นอนว่าการตรวจสอบความถูกต้องส่วนแรกของแบบจำลองโครงสร้างคานคือศึกษาการลู่เข้าของค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติจากต่อจะเป็นการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติกับงานวิจัยที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ ซึ่งผลสรุปนั้นไปในแนวทางที่สอดคล้องกัน โดยค่าพารามิเตอร์หรือเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ซึ่งมีอิทธิพลต่อค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติสามารถสรุปได้เป็นประเด็นต่าง ๆ ดังนี้

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

แน่นอนว่าเงื่อนไขขอบเขตที่มีจุดรองรับแบบยึดแน่นทั้งปลายคานทั้ง 2 ด้าน (C-C) นั้นจะมีค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติสูงที่สุดเมื่อได้เปรียบเทียบกับเงื่อนไขขอบเขตที่มีจุดรองรับแบบ C-H และจุดรองรับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบ H-H โดยที่ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติในกรณีจุดรองรับแบบ H-H จะได้ค่าน้อยสุดเมื่อเปรียบเทียบทั้ง 3 กรณี

อัตราส่วนความยาวต่อความสูง (Thickness ratio)

การเพิ่มอัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) ของโครงสร้างเป็นผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติ นั้นเพิ่มขึ้น ทุก ๆ กรณี กล่าวคือยิ่งอัตราส่วนความยาวต่อความสูงมีค่าสูง โครงสร้างคานก็จะมีความสูงน้อยเมื่อเทียบความยาวเป็นผลทำให้คานอ่อน (ความถี่ธรรมชาติต่ำ) และให้ผลในทางกลับกันถ้าอัตราส่วนความยาวต่อความสูงมีค่าน้อย ๆ

ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (n) คือพารามิเตอร์ที่บ่งบอกถึงสัดส่วนปริมาตรของวัสดุระหว่างโลหะกับเซรามิก สำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันในกรณีชั้นแกนกลางแข็ง จะพบว่าการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชันเป็นผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติลดลงซึ่งเป็นมาจากสัดส่วนของเฟสโลหะที่เพิ่มขึ้นนั่นเอง และจะผลลัพธ์ในทางตรงกันข้ามกรณีโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางอ่อน

อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น (Layer thickness ratio)

เมื่อพิจารณาประเด็นอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นพบว่าขึ้นอยู่กับสัดส่วนของทั้ง 2 เฟส (โลหะและเซรามิก) หมายความว่ายิ่งมีสัดส่วนเฟสโลหะผสมมากก็ทำให้โครงสร้างคานอ่อนและโครงสร้างคานจะแข็งขึ้นเมื่อมีสัดส่วนเฟสเซรามิกเพิ่มขึ้น ซึ่งจะมีผลกับความถี่ธรรมชาติไร้มิติ ยกตัวอย่างเช่น กรณีโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางแข็ง แน่นนอนว่าอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-1-1 ก็จะมีค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสูงกว่าแบบ 2-1-2 ในทางกลับกันโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางอ่อนที่มีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-2-1 ก็จะมีไร้มิติน้อยกว่าแบบ 2-1-2

ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น (Elastic foundation)

ส่วนประเด็นสุดท้ายที่มีผลกระทบต่อความถี่ธรรมชาติไร้มิติของโครงสร้างคานที่มีฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ซึ่งฐานรองรับแบบยืดหยุ่นนี้จะประกอบไปด้วยค่าคงที่สปริง 2 ค่าคือ K_w และ K_s ซึ่งพบได้ว่าการเพิ่มค่าคงที่สปริงทั้งสองเป็นผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติเพิ่มเพิ่มขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งเพิ่มค่า K_s

8.1.2 การสั่นสะเทือนแบบบังคับ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสรุปผลซึ่งเกี่ยวข้องกับการสั่นสะเทือนแบบบังคับของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน โดยในขั้นต้นแบบจำลองของโครงสร้างคานได้ถูกเปรียบเทียบกับแบบจำลองเชิงวิเคราะห์ (analytical model) โดยใช้วัสดุเนื้อเดียวผลที่ได้นั้นมีผลสอดคล้องกันเป็นที่ยอมรับได้ ไม่เพียงเท่านั้น แบบจำลองโครงสร้างคานได้ทำการเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อนหน้านี้โดยใช้โครงสร้างคานแบบวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งผลลัพธ์มีความสอดคล้องเช่นกัน โดยในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบบังคับจะศึกษาผลตอบสนองทางด้านพลวัตของคาน ในที่นี้คือระยะการโก่งไร้มิติ โดยค่าพารามิเตอร์หรือเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ซึ่งมีอิทธิพลต่อการตอบสนองทางด้านพลวัตสามารถสรุปได้เป็นประเด็นต่าง ๆ ดังนี้

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

ค่าระยะโค้งไร้มิติของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันจะมีค่าสูงสุดเมื่อกานอยู่ในสภาวะเงื่อนไขขอบเขตแบบ H-H ถัดมาคือเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-H และสุดท้ายระยะโค้งไร้มิติน้อยสุดคือเงื่อนไขขอบเขตแบบ C-C

ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (n) คือ พารามิเตอร์ที่บ่งบอกถึงสัดส่วนปริมาตรของวัสดุระหว่างโลหะกับเซรามิก สำหรับโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันในกรณีชั้นแกนกลางแข็ง สรุปได้ว่าการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (เพิ่มสัดส่วนเฟสโลหะ) เป็นผลทำให้ระยะการโค้งไร้มิติเพิ่มขึ้นและส่วนในกรณีโครงสร้างคานที่ใช้ชั้นแกนกลางอ่อนนั้นการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (เพิ่มสัดส่วนเฟสเซรามิก) เป็นผลให้ระยะโค้งไร้มิติลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงแรก และยังพบว่าระยะโค้งไร้มิติกรณีคานแบบชั้นแกนกลางแข็งอาจจะมากกว่าหรือน้อยกว่าโครงสร้างคานที่มีชั้นแกนกลางอ่อนนั้นทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นที่เหมือนกัน)

อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น (Layer thickness ratio)

พิจารณาประเด็นอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นพบว่าถึงกระทบต่อระยะการโค้งไร้มิติ จะขึ้นอยู่กับสัดส่วนระหว่างโลหะและเซรามิกเป็นหลัก ยกตัวอย่างเช่น กรณีโครงสร้างคานแบบชั้นแกนกลางแข็ง ความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-2-1 ก็จะมีค่าระยะโค้งไร้มิติน้อยกว่าโครงสร้างคานแบบ 2-1-2 ซึ่งจากการจำลองพบว่าโครงสร้างคานซึ่งมีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 1-0-1 จะมีค่าระยะโค้งมิติสูงสุด ส่วนระยะโค้งไร้มิติต่ำสุดจะเป็นโครงสร้างคานแบบ 2-2-1

ความเร็วของแรง (v_p) จำนวนแรงและระยะห่างระหว่างแรง (d) ที่กระทำบนโครงสร้างคาน เมื่อพิจารณาเรื่องความเร็วของแรงที่กระทำบนโครงสร้างคานจะพบว่าความเร็วของแรงที่เพิ่มขึ้นเป็นผลทำให้ระยะโค้งไร้มิติเพิ่มขึ้นเช่นกัน โดยที่ในช่วงความเร็วต่ำ ๆ ค่าระยะโค้งจะมีการกระเพื่อมหรือแกว่ง หลังจากผ่านช่วงนี้ค่าระยะโค้งจะเพิ่มขึ้นอย่างเห็นได้ชัดจนถึงจุดสูงสุดจากนั้นค่าระยะโค้งไร้มิติจะลดลงเมื่อความเร็วเพิ่มขึ้น โดยค่าความเร็วของแรงที่มีค่าระยะโค้งสูงสุดนี้เรียกว่า ค่าความเร็ววิกฤต (critical velocity) กล่าวคือเป็นความเร็วของแรงที่ทำให้เกิดระยะโค้งไร้มิติสูงสุด ในส่วนจำนวนแรงที่กระทำบนโครงสร้างคานจะพบว่าเมื่อจำนวนแรงที่กระทำบนคานเพิ่มขึ้นก็ยิ่งจะทำให้ระยะโค้งไร้มิติเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน จำนวนของแรงยังส่งผลถึงค่าความเร็ววิกฤต กล่าวคือเมื่อเพิ่มจำนวนแรงที่เคลื่อนที่บนคานจะทำให้ค่าความเร็ววิกฤตเพิ่มขึ้นด้วย ส่วนผลกระทบของค่าระยะห่างระหว่างแรงถึงระยะโค้งไร้มิติพบว่าเมื่อเพิ่มค่าระยะห่างระหว่างแรงทำให้ระยะโค้งไร้มิติลดลงและจะมีผลตรงกันข้ามเมื่อลดค่าระยะห่างระหว่างแรง และค่าความเร็ววิกฤตจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่าระยะห่างระหว่างแรงเพิ่มขึ้น

ความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรง (Ω) และมุมเฟส (μ)

พิจารณาความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรงพบว่าเมื่อกำหนดให้ค่าความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรงตรงกับความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคานผลลัพธ์จะทำให้โครงสร้างคานเกิดการสั่นพ้อง ซึ่งจะสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติของคาน โดยขนาด (ระยะโค้งไร้มิติ) จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป เมื่อพิจารณาถึงมุมเฟสพบว่าสามารถช่วยลดระยะโค้งไร้มิติโครงสร้างคานได้

ฐานรองรับแบบยืดหยุ่น (Elastic foundation)

ส่วนประเด็นสุดท้ายที่มีผลกระทบต่อระยะโก่งไว้มิติของโครงสร้างคานที่มีฐานรองรับแบบยืดหยุ่น ซึ่งพบได้ว่าการเพิ่มค่าคงที่สปริงทั้งสองเป็นผลทำให้ระยะโก่งไว้มิติลดลงโดยเฉพาะอย่างยิ่งเพิ่มค่า K_s ระยะโก่งไว้มิติลดลงอย่างเห็นได้ชัด

8.2 สรุปผลโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชัน

8.2.1 การสันสะท้อนแบบอิสระ

ในหัวข้อจะเป็นกล่าวสรุปปัญหาการสันสะท้อนแบบอิสระของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่ง ซึ่งการแก้ปัญหาในโครงสร้างแผ่นจะใช้ระเบียบวิธีของริทซ์ โดยการสมมุติฟังก์ชันระยะการกระจัดให้ถูกต้องทั้งด้าน x และด้าน y ให้อยู่ในรูปพิกัดทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับเวลาและฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต โดยรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามที่เลือกใช้คือฟังก์ชันพหุนามแบบแกรม-ชมิทต์ (Gram-Schmidt polynomial) จากนั้นใช้วิธีการของลากรางจ์ในการหาสมการการเคลื่อนที่ต่อไป โดยโครงสร้างแผ่นบางในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะพิจารณาเฉพาะแผ่นบางแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่านั้น อย่างที่กล่าวไว้ในโครงสร้างคานขั้นตอนแรกของการวิเคราะห์แบบจำลองนั้นจะต้องศึกษาการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติและตรวจสอบค่าความถูกต้องของแบบจำลองที่มีการสันสะท้อนแบบอิสระ ซึ่งในการศึกษาการลู่เข้าพบว่าจำนวนพจน์ใช้ในการวิเคราะห์เท่ากับ 10 พจน์ ($m = n = 10$) และตรวจสอบความถูกต้องกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ซึ่งผลที่ได้มีความสอดคล้องกันโดยค่าความแตกต่างไม่เกิน 5% โดยค่าพารามิเตอร์หรือเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ซึ่งมีอิทธิพลต่อค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติสามารถสรุปได้เป็นประเด็นต่าง ๆ ดังนี้

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันทั้ง 4 ด้าน ซึ่งส่งผลถึงค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติ ผลสรุปได้ว่าเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้านนั้นเป็นตัวแปรสำคัญ ถ้าถูกบังคับ (Constraint) ทั้ง 4 ด้านทำให้โครงสร้างแผ่นบางก็จะมีค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติสูงกว่าโครงสร้างแผ่นบางที่ถูกบังคับเพียงแค่บางด้านเท่านั้น เช่น โครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC (ถูกบังคับแบบยึดแน่นทั้ง 4 ด้าน) ก็จะมีค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติสูงกว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS (รองรับอย่างง่ายทั้ง 4 ด้าน) และเงื่อนไขขอบเขตแบบ CFSC ก็จะมีค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติสูงกว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ CFFC โดยเงื่อนไขขอบเขตแบบ CFFF ก็จะมีค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติต่ำสุด

ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน

ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (m) คือพารามิเตอร์ที่บ่งบอกถึงสัดส่วนปริมาตรของวัสดุระหว่างโลหะกับเซรามิก สำหรับโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันในกรณีชั้นแกนกลางแข็ง จะพบว่าการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชันเป็นผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติไว้มิติลดลงซึ่งเป็นมาจากสัดส่วนของเฟสโลหะที่เพิ่มขึ้นนั่นเอง และจะผลลัพธ์ในทางตรงกันข้ามกรณีโครงสร้างแผ่นบางแบบชั้นแกนกลางอ่อน

อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น (Layer thickness ratio)

เมื่อพิจารณาประเด็นอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นพบว่าถ้าสัดส่วนเฟสโลหะผสมมากก็ทำให้โครงสร้างแผ่นบางอ่อนและจะแข็งขึ้นเมื่อมีสัดส่วนเฟสเซรามิกเพิ่มมากขึ้น ซึ่งจะมีผลกับความถี่

ธรรมชาติไร้มิติ ยกตัวอย่างเช่น กรณีโครงสร้างแผ่นบางแบบชั้นแกนกลางอ่อน อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 2-1-2 ก็จะมีค่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติสูงกว่าแบบ 2-2-1

8.2.2 การสันสะท้อนแบบบังคับ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสรุปผลซึ่งเกี่ยวข้องกับการสันสะท้อนแบบบังคับของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชที่ทำมาจากวัสดุเชิงฟังก์ชันภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ก่อนการจำลองพฤติกรรมทางด้านพลวัตของโครงสร้างแผ่นบาง แน่แน่นอนว่าทำการตรวจสอบความถูกต้องกับแบบจำลองเชิงวิเคราะห์ (analytical model) ของโครงสร้างแผ่นบางที่ทำมาจากวัสดุเนื้อเดียวและอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ ซึ่งผลลัพธ์ทั้ง 2 แบบจำลองมีความสอดคล้องกันเป็นที่ยอมรับได้ ลำดับถัดไปก็จะเป็นศึกษาผลกระทบในด้านต่าง ๆ ถึงโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ โดยค่าพารามิเตอร์หรือเงื่อนไขแบบต่าง ๆ ซึ่งมีอิทธิพลต่อการตอบสนองทางด้านพลวัตสามารถสรุปได้เป็นประเด็นต่าง ๆ ดังนี้

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

ในแบบจำลองโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันจะพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต 2 แบบคือ เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS และเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC เท่านั้น ซึ่งแน่นอนว่าระยะการโค้งไร้มิติของโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC จะมีค่าสูงกว่าโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS

ดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน

พิจารณาดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (m) ซึ่งจะมีอิทธิพลต่อความแข็งแรงของโครงสร้าง โดยค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชันจะเป็นกำหนดสัดส่วนการผสมของวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งทำมาจากเซรามิกและโลหะ ซึ่งสามารถสรุปได้ว่าการเพิ่มค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชันสำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่มีชั้นแกนกลางแข็งจะเป็นผลทำให้ระยะโค้งไร้มิติมีค่าเพิ่มขึ้นและจะลดลงสำหรับโครงสร้างแผ่นที่มีชั้นแกนกลางอ่อน สำหรับโครงสร้างแผ่นบางทั้งชั้นแกนกลางแข็งและชั้นแกนกลางอ่อนซึ่งมีอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นที่เหมือนกันจะไม่สามารถบอกได้ว่าโครงสร้างทั้งสองประเภทมีระยะโค้งไร้มิติมากหรือน้อยกว่ากันทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับค่าดัชนีสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชิงฟังก์ชัน

อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น (Layer thickness ratio)

พิจารณาประเด็นอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นของโครงสร้างแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันพบว่าถึงกระทบต่อระยะการโค้งไร้มิติซึ่งจะคล้ายกับโครงสร้างคานกล่าวคือจะขึ้นอยู่กับสัดส่วนระหว่างโลหะและเซรามิกเป็นหลัก ซึ่งจากการจำลองพบว่าโครงสร้างแผ่นบางที่มีชั้นแกนกลางอ่อนนั้นพบว่าโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นแบบ 3-2-1 จะมีค่าระยะโค้งมิติสูงสุด ส่วนระยะโค้งไร้มิติต่ำสุดจะเป็นโครงสร้างแผ่นบางแบบ 1-0-1

ความเร็วของแรง (v_p) จำนวนแรงและระยะห่างระหว่างแรง (d) ที่กระทำบนโครงสร้างคาน

เมื่อพิจารณาเรื่องความเร็วของแรงที่กระทำบนโครงสร้างแผ่นบางจะพบว่าความเร็วของแรงที่เพิ่มขึ้นเป็นผลทำให้ระยะโค้งไร้มิติเพิ่มขึ้นเช่นกัน โดยที่ในช่วงความเร็วต่ำ ๆ ค่าระยะโค้งจะมีการกระเพื่อมหรือแกว่ง หลังจากผ่านช่วงนี้ค่าระยะโค้งจะเพิ่มขึ้นอย่างเห็นได้ชัดจนถึงจุดสูงสุดจากนั้นค่าระยะโค้งไร้มิติจะลดลงเมื่อความเร็วเพิ่มขึ้น โดยค่าความเร็วของแรงที่มีค่าระยะโค้งสูงสุดนี้เรียกว่า ค่าความเร็ววิกฤต (critical velocity) กล่าวคือเป็นความเร็วของแรงที่ทำให้เกิดระยะโค้งไร้มิติสูงสุด ในส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จำนวนแรงที่กระบนโครงสร้างแผ่นบางจะพบว่าเมื่อจำนวนแรงที่กระทำบนแผ่นบางเพิ่มขึ้นก็ยิ่งจะทำให้ระยะโก่งไร้มิติเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน

ความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรง (Ω) และมุมเฟส (ψ)

พิจารณาความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรงพบว่าเมื่อกำหนดให้ค่าความถี่ที่ใช้กระตุ้นแรงตรงกับความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคาน เมื่อพิจารณาถึงมุมเฟสพบว่าสามารถช่วยลดระยะโก่งไร้มิติโครงสร้างแผ่นบางได้

8.3 สรุปผลโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันบนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม (TSDT)

พิจารณาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สาม ผลสรุปพบว่าความถี่ธรรมชาติไร้มิติเมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งนั้นมีความแตกต่างเป็นนัยสำคัญเมื่อโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชที่ใช้อัตราส่วนความยาวต่อความสูง (L/h) ที่มีค่าน้อย ๆ เช่น L/h เท่ากับ 5 โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชใช้แกนกลางอ่อน ส่วนในกรณีที่อัตราส่วนความยาวต่อความสูงของโครงสร้างคานมีค่ามาก เช่น L/h เท่ากับ 20 ความแตกต่างระหว่างทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามไม่มีความแตกต่างเนื่องจากอิทธิพลจากความเครียดเฉือนก็จะน้อยหรืออาจไม่ต้องนำมาพิจารณาเหมือนกับทฤษฎีคานของออยเลอร์ ซึ่งหากพิจารณาระยะการโก่งไร้มิติของโครงสร้างภายใต้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่สามพบว่าผลก็จะสอดคล้องกับความถี่ไร้มิติที่มีความแตกต่างกันทั้ง 2 ทฤษฎี กล่าวคือระยะโก่งไร้มิติก็จะแตกต่างกันเป็นนัยสำคัญเมื่อโครงสร้างคานแบบแซนด์วิชใช้ แกนกลางอ่อนและอัตราส่วนความยาวต่อความสูงของคานมีค่าน้อยเช่นกัน

8.4 ข้อเสนอแนะและการประยุกต์นำไปใช้งาน

สำหรับงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะศึกษาเฉพาะการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างคานและแผ่นบางแบบแซนด์วิชจากวัสดุเชิงฟังก์ชันซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่เท่านั้น ซึ่งอยู่บนพื้นฐานทฤษฎีการเปลี่ยนรูปเฉือนลำดับที่หนึ่งเป็นหลัก ซึ่งในการศึกษาเพิ่มเติมในอนาคตอาจพิจารณาถึงผลกระทบทางด้านอุณหภูมิต่อโครงสร้างแบบแซนด์วิชที่มีแรงกระทำแบบเคลื่อนที่หรือกระทำแบบซ้ำ ๆ ณ ตำแหน่งเดิม นอกจากนี้แล้วอาจพัฒนาไปจนถึงศึกษาเพิ่มเติมในเรื่องการสั่นสะเทือนแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear vibration) ของโครงสร้างแบบแซนด์วิช

การประยุกต์นำไปใช้งานของวัสดุเชิงฟังก์ชัน (เซรามิกและโลหะ) ซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่ สามารถนำไปประยุกต์กับโครงสร้างต่าง ๆ ได้ เช่น เกรน สะพาน หรือโครงสร้างชิ้นส่วนต่าง ๆ ที่ภายใต้โหลดลักษณะนี้ หรือโครงสร้างที่อยู่ภายใต้อุณหภูมิสูง ซึ่งวัสดุเชิงฟังก์ชันเป็นวัสดุขั้นสูงถูกสร้างขึ้นครั้งแรกเพื่อใช้งานทางด้านอวกาศเป็นส่วนใหญ่ อาจจะได้พบเห็นได้ไม่บ่อยมากนัก

เอกสารอ้างอิง

- [1] Koizumi M. B.V. “The concept of FGM.” **Ceramic Transactions Functionally Gradient Materials**, Vol. 34, 1993. pp. 3-10
- [2] NIINO M., HIRAI T. and WATANABE R. “The functionally gradient materials” **Journal of the Japan Society for Composite Materials**, Vol. 13, 1987. pp. 254-264
- [3] Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A. and Ford R. G. **Functionally graded materials: design, processing and application**. London : Kluwer Academic Publishers. 1999.
- [4] Bassiouny Saleh, Jinghua Jiang, Reham Fathi, Tareq Al-hababi and Qiong Xu “30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges.” **Composites Part B.**, Vol. 201, 2020. pp. 108376
- [5] EMUNA N. and DURBAN D. “Bending of functionally graded beams” [Online]. Available : <https://www.yumpu.com/en/document/read/17890433/bending-of-functionally-graded-beams>. 2010
- [6] Şimşek M. and Al-shujairi M. “Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads.” **Composites Part B.**, Vol. 108, 2017. pp. 18-34
- [7] Suresh S. and Mortensen A. **Fundamental of functionally graded materials**. London : Maney Publishing. 1998.
- [8] Bao G. and Wang L. “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coating.” **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 32, no. 19, 1995. pp. 2853-2871
- [9] SHEN H. S. **Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells**. U.S.A. : CRC Press. 2009.
- [10] Erdogan F. “Fracture mechanics of functionally graded materials.” **Composite Structures**, Vol. 5, no. 7, 1995. pp. 753-770
- [11] Sandkar B.V. “An elasticity solution for functionally graded beams.” **Composites Science and Technology**, Vol. 61, no. 5, 2001. pp. 689-696
- [12] Yang J. and Chen Y. “vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks.” **Composite Structures**, Vol. 83, no. 1, 2001. pp. 48-60
- [13] Kitipornchai S., Ke L.L., Yang J. and Xiang Y. “Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams.” **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 324, 2009. pp. 962-982

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [14] CHENG, Z. Q. and BATRA, R. C. “Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates.” **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 229, 2000. pp. 897-895
- [15] Wakashima, K., Hirano, T., and Niino, M. “Space applications of advanced structural materials.” **ESA SP**, Vol. 303, Jun. 1990. pp. 97
- [16] Shyang-Ho Chi and Yen-Ling Chung “Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load - Part I: Analysis.” **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 43, 2006. pp. 3657-3674
- [17] Librescu L., Oh S.Y. and Song O. “Spinning thin-walled beams made of functionally graded materials: modeling, vibration and instability.” **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Vol. 23, 2004. pp. 499-515
- [18] Gao X.W., Zhang C., Sladek J., and Sladek V. “Fracture analysis of functionally graded materials by a BEM.” **Composites Science and Technology**, Vol. 68, 2008. pp. 1209-1215
- [19] Atmane A.H., Tounsi A., Meftah S.A., and Belhadj H.A. “Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section.” **Journal of Vibration and Control**, Vol. 17, no. 2, 2011. pp. 311-318
- [20] Thai H.T. and Vo T.P. “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories.” **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 62, 2012. pp. 57-66
- [21] Bui T.Q., Khosravifard A., Zhang Ch., Hematiyan M.R., and Golub M.V. “Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method.” **Engineering Structures**, Vol. 47, 2013. pp. 90-104
- [22] Vo T.P., Thai H.T., Nguyen T.K., Maheri A., and Lee J. “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory.” **Engineering Structures**, Vol. 64, 2014. pp. 12-22
- [23] Yang Y., Kou K.P., Lu V.P., Lam C.C., and Zhang C. “Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded structures by a meshfree boundary- domain integral equation method.” **Composite Structures**, Vol. 110, 2014. pp. 342-353
- [24] Vo T.P., Thai H.T., Nguyen T.K., Inam F., and Lee J. “A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams.” **Composite Structures**, Vol. 119, 2015. pp. 1-12
- [25] Di Sciuva M and Sorrenti M. “Bending and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates: An assessment of the Refined Zigzag Theory.” **Journal of Sandwich Structures and Materials**, Vol. 23(3), 2019. pp. 760–802

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [26] GIBSON L. J., ASHBY M. F., KARAM G. N., WEGST U. and SHERCLIFF, H. R. “Mechanical properties of natural materials. II. Microstructures for mechanical efficiency.” **J Proceedings of the Royal Society of London Series A**, Vol. 450, 1995. pp. 141-162
- [27] Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., and Reddy J.N. “Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions.” **J Applied Acoustics**, Vol. 61, 2000. pp. 111-129
- [28] Simsek M. “Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories.” **Nuclear Engineering and Design**, Vol. 240, 2010, pp. 697-705
- [29] Hosseini-Hashemi Sh., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H. and Omid M. “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory.” **Applied Mathematical Modeling**, Vol. 34, 2010, pp. 1276-1291
- [30] Baferani A.H., Saidi A. R. and Ehteshami H. “Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation.” **Composite Structures**, Vol. 93, 2011, pp. 1842-1853
- [31] Bich D.H., Dung D.V., and Nam V.H. “Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened imperfect functionally graded doubly curved thin shallow shells.”, **Composite Structures**, Vol. 96, 2013, pp. 384-395
- [32] Ghiasian S.E., Kiani Y. and Estami M.R. “Dynamic buckling of suddenly heated or compressed FGM beams resting on nonlinear elastic foundation.” **Composite Structures**, Vol. 106, 2013, pp. 225-234
- [33] Chakraverty S. and Pradhan K.K. “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions.” **Aerospace Science and Technology**, Vol. 36, 2014, pp. 132-156
- [34] Wattanasakulpong N. and Mao Q. “Dynamic response of Timoshenko functionally graded beams with classical and non-classical boundary conditions using Chebyshev collocation method.” **Composite Structures**, vol. 119, 2015, pp. 346-354
- [35] Li L., Li X., and Hu Y. “Free vibration analysis of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material.” **International Journal of Engineering Science**, Vol. 102, 2016, pp. 77-92
- [36] Punera D. and Kant T. “Elastostatics of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with refined higher order models.” **Composite Structures**, Vol. 182, 2017, pp. 505-523

- [37] Wattanasakulpong N. and Ungbhakorn V. “Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with General Elastically End Constraints by DTM.” **World Journal of Mechanics**, vol. 2, 2012, pp. 297-310
- [38] Mori T. and Tanaka K. “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions.” **Acta Metallurgica**, vol. 21(5), 1973, pp. 571-574
- [39] Benveniste Y. “A new approach to the application of Mori-Tanaka’s theory in composite materials.” **Mechanics of Materials**, Vol. 6, 1987, pp. 147-157.
- [40] WU, Z. and CHEN, W. “A higher-order theory and refined three-node triangular element for functionally graded plates.” **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Vol. 25, 2006, pp. 447-463
- [41] ANSARI, R., GHOLAMI, R. and SAHMANI, S. “Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory.” **Composite Structures**, Vol. 94, 2011, pp. 221-228
- [42] REZAEI MOJDEHI, A., DARVIZEH, A., BASTI, A. and RAJABI, H. “Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method.” **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Vol. 35, 2011, pp. 1168-1180
- [43] Zenkert, D. **The Handbook of Sandwich Construction**. London : Chameleon Press Ltd. 1997.
- [44] Garg, A and Chalak, HD. “A review on analysis of laminated composite and sandwich structures under hygrothermal conditions.” **Nuclear Thin-Walled Structure**, Vol. 142, 2019, pp. 205-226
- [45] Do T.V., Bui T.Q., Yu T.T., Pham D.T. and Nguyen C.T. “Role of material combination and new results of mechanical behavior for FG sandwich plates in thermal environment.” **Journal of Computational Science**, Vol. 21, 2017, pp. 164-181
- [46] Mohammadzadeh B. and Noh H.C. “Analytical method to investigate nonlinear dynamic responses of sandwich plates with FGM faces resting on elastic foundation considering blast loads.” **Composite Structures**, Vol. 147, 2017, pp. 142-157
- [47] Garg, A., Belarbi, M.O., Chalak, H.D. and Chakrabarti, A. “A review of the analysis of sandwich FGM structures.” **Composite Structures**, Vol. 258, 2021, pp. 113427
- [48] Meziane M.A.A., Abdelaziz H.H., and Tounsi A. “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions.” **Journal of Sandwich Structures and Materials**, Vol. 16(3), 2014, pp. 293–318

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [49] Singh S.J., Nataraj C. and Harsha S.P. “Nonlinear dynamic analysis of a sandwich plate with S-FGM face sheets and homogeneous core subjected to harmonic excitation.” **Journal of Sandwich Structures & Materials**, 2020
- [50] Kollar, L.P. and Springer G.S. **Mechanics of composite structures**. Cambridge University Press. 2003
- [51] Fryba, L. **Vibration of solids and structures under moving loads**. Thomas Telford. 3th edition, Czech Republic: 1999
- [52] Poole, H.H. **Fundamentals of robotics engineering**. Van Nostrand Reinhold. 1989
- [53] Yang, Y.B., Yau, J.D. and Wu, Y.S. **Vehicle-Bridge interaction dynamics**. Singapore: World Scientific. 2004
- [54] Chaikittiratana, A. and Wattanasakulpong, N. “Dynamic Loadings Induced Vibration of Third Order Shear Deformable FG-CNTRC Beams: Gram-Schmidt-Ritz Method.” **Advances in applied mathematics and mechanics**, Vol. 14(4), 2022, pp. 816-841
- [55] Kahya, V. “Dynamic analysis of laminated composite beams under moving loads using finite element method.” **Nuclear Engineering and Design**, Vol. 243, 2012, pp. 41-48
- [56] Kadivar, M.H. and Mohebpour, S.R. “Forced vibration of unsymmetric laminated composite beams under the action of moving loads.” **Composites Science and Technology**, Vol. 58(10), 1998, pp. 1675-1684
- [57] Kiral, Z. and Kiral. B.G. “Dynamic Analysis of A Symmetric Laminated Composite Beam Subjected to a Moving Load with Constant Velocity.” **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, Vol. 27(1), 2008, pp. 19-32
- [58] Kadivar, M.H. and Mohebpour, S.R. “Finite Element Dynamic Analysis of Unsymmetric Composite Laminated Beams with Shear Effect and Rotary Inertia under the Action of Moving Loads.” **Finite Element in Analysis and Design**, Vol. 29, 1998, pp. 259-273
- [59] Vosoughi, A.R. and Anjabin, N. “Dynamic moving load identification of laminated composite beams using a hybrid FE-TMDQ-GAs method.” **Inverse Problems in Science and Engineering**, Vol. 25(11), 2017, pp. 1639-1652
- [60] Babu, J., Sunny, T., Paul, N.A., Mohan, K.P., Philip, J. and Davim, J.P. “Assessment of delamination in composite materials: A review.” **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture**, Vol. 230(11), 2016, pp. 1990-2003
- [61] Schon, J. “A model of fatigue delamination in composites.” **Composites Science and Technology**, Vol. 60(4), 2000, pp. 553-558

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [62] Turon, A., Costa, J., Camanho, P.P. and Davila, C.G. "Simulation of delamination in composites under high-cycle fatigue." **Composites Part A**, Vol. 38(11), 2007, pp. 2270-2282
- [63] Elishakoff, I., Pentaras, D. and Gentilini, C. **Mechanics of Functionally Graded Material Structures**. Singapore: World Scientific. 2015
- [64] El-Galy, I.M., Saleh, B.I. and Ahmed, M.H. "Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view." **SN Applied Science**, Vol. 1, 2019, pp. 1378
- [65] Şimşek, M. and Kocatürk, T. "Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load." **Composite Structures**, Vol. 90(4), 2009, pp. 465-473
- [66] Şimşek, M. "Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories." **Composite Structures**, Vol. 92(4), 2010, pp. 904-917
- [67] Şimşek, M. and Kocatürk, T. and Akbaş, Ş.D. "Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load." **Composite Structures**, Vol. 94(8), 2012, pp. 2358-2364
- [68] Khalili, S.M.R., Jafari, A.A. and Eftekhari, S.A. "A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads." **Composite Structures**, Vol. 92(10), 2010, pp. 2497-2511
- [69] Malekzadeh, P. and Monajjemzadeh, S.M. "Dynamic response of functionally graded beams in a thermal environment under a moving load." **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Vol. 23(3), 2016, pp. 248-258
- [70] Yan, T., Kitipornchai, S., Yang, J. and He X.Q. "Dynamic behaviour of edge-cracked shear deformable functionally graded beams on an elastic foundation under a moving load." **Composite Structures**, Vol. 93(11), 2011, pp. 2992-3001
- [71] Esen, I., Eltahir, M.A. and Abdelrahman, A.A. "Vibration response of symmetric and sigmoid functionally graded beam rested on elastic foundation under moving point mass." **Mechanics Based Design of Structures and Machines**, Vol. 51(5), 2023, pp. 2607-2631
- [72] Şimşek, M. "Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load." **Composite Structures**, Vol. 92(10), 2010, pp. 2532-2546
- [73] Abdelrahman, A.A., Ashry, M., Alshorbagy, A.E. and Abdallah, W.S. "On the mechanical behavior of two directional symmetrical functionally graded beams under moving load." **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, Vol. 17, 2021, pp. 563-586

- [74] Wang, Y. and Wu D. “Thermal effect on the dynamic response of axially functionally graded beam subjected to a moving harmonic load.” **Acta Astronautica**, Vol. 127, 2016, pp. 171-181
- [75] Carla M. C. Roque, António J. M. Ferreira, Ana M. A. Neves, Greg E. Fasshauer, Cristóvão M. M. Soares and Renato M. N Jorge “Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates and Shells by Radial Basis Functions.” **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Vol. 17(8), 2010, pp. 636-652
- [76] Akbarzadeh, A.H., Abbasi, M., Hosseini zad, S.K. and Eslami, M.R. “Dynamic analysis of functionally graded plates using the hybrid Fourier-Laplace transform under thermomechanical loading.” **Meccanica**, Vol. 46, 2011, pp. 1373–1392
- [77] Behjat, B., Salehi, M., Armin, A., Sadighi, M. and Abbasi, M. “Static and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric plates under mechanical and electrical loading.” **Scientia Iranica**, Vol. 18(4), 2011, pp. 986-994
- [78] Li, J., Zhang, Z. and Zhang, Z. “Quadrilateral scaled boundary spectral shell elements for static and dynamic analyses of functionally graded plates and shells.” **Composite Structures**, Vol. 288, 2022, pp. 115394
- [79] Zhao, J., Xie, F., Wang, A., Shuai, C., Tang, J. and Wang, Q. “Dynamics analysis of functionally graded porous (FGP) circular, annular and sector plates with general elastic restraints.” **Composites Part B**, Vol. 159, 2019, pp. 20-43
- [80] Karsh, P.K., Mukhopadhyay, T. and Dey, S. “Stochastic dynamic analysis of twisted functionally graded plates.” **Composites Part B**, Vol. 147, 2018, pp. 259-278
- [81] Upadhyay, A.K. and Shukla, K.K. “Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of functionally graded skew plates.” **Communications in nonlinear science and numerical simulation**, Vol. 18(8), 2013, pp. 2252-2279
- [82] Natarajan, S. and Manickam, G. “Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory.” **Finite Elements in analysis and design**, Vol. 57, 2012, pp. 32-42
- [83] Li, Q., Lu, V.P. and Kou, K.P. “Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates.” **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 311(1-2), 2008, pp. 498-515
- [84] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. “A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates.” **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Vol. 23(4), 2016, pp. 423-431
- [85] Zenkour, A.M. and Alghamdi, N.A. “Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads.” **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Vol. 17(6), 2010, pp. 419-432

- [86] Xiang, S., Jin, Y.X., Bi, Z.Y., Jiang, S.X. and. Yang, M.S. “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates.” **Composite Structures**, Vol. 93(11), 2011, pp. 2826-2832
- [87] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. “Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory.” **Applied Mathematics and Mechanics**, Vol. 32, 2011, pp. 925–942
- [88] Pandey, S. and Pradyumna, S. “Free vibration of functionally graded sandwich plates in thermal environment using a layerwise theory.” **European Journal of Mechanics A/Solids**, Vol. 51, 2015, pp. 55-66
- [89] Akavci, S.S. “Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation.” **Composites Part B**, Vol. 96, 2016, pp. 136-152
- [90] Mahmoudi A., Benyoucef S., Tounsi A., Benachour A., Adda Bedia E.A., and Mahmoud, S. “A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations.” **Journal of Sandwich Structures & Materials**, Vol. 21(6), 2019, pp. 1906-1929
- [91] Mantari, J.L. and Monge, J.C. “Buckling, free vibration and bending analysis of functionally graded sandwich plates based on an optimized hyperbolic unified formulation.” **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 119, 2016, pp. 170-186
- [92] Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K. and Keerthan, P. “State-space Levy solution for size-dependent static, free vibration and buckling behaviours of functionally graded sandwich plates.” **Composites Part B**, Vol. 149, 2018, pp. 144-164
- [93] Nguyen, T.K., Vo, T.P. and Thai, H.T. “Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates with improved transverse shear stiffness based on the first-order shear deformation theory.” **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, Vol. 228(12), 2014, pp. 2110-2131
- [94] Isaac M. Daniel and Ori Ishai. **Engineering mechanics of composite materials**. New York : Oxford university Press. 2006.
- [95] Gibson, R.F. **Principle of composite material mechanics**. New York : McGraw-Hill, Inc., 1994.
- [96] Reddy, J.N. **Mechanics of Laminated composite plates and shells Theory and Analysis**. U.S.A : CRC Press, 2004.
- [97] Szilard, R. **Theories and applications of plate analysis..** U.S.A : Wiley, 2004.

- [98] Markolefas, S. and Fafalis, D. “Strain Gradient Theory Based Dynamic Mindlin-Reissner and Kirchhoff Micro-Plates with Microstructural and Micro-Inertial Effects.” **Dynamics**, Vol. 1(1), 2021, pp. 49-94
- [99] Rango, R. F., Bellomo, F. J. and Nallim, L. G. “A variational Ritz formulation for vibration analysis of thick quadrilateral laminated plates.” **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 104, 2015, pp. 60-74
- [100] Kiani, Y. and Mirzaei, M. “Rectangular and skew shear buckling of FG-CNT reinforced composite skew plates using Ritz method .” **Aerospace Science and Technology**, Vol. 77, 2018, pp. 388–398
- [101] Kiani, Y. “Thermal buckling of temperature-dependent FG-CNT-reinforced composite skew plates.” **Journal of Thermal Stresses**, Vol. 40(11), 2017, pp. 1442–1460
- [102] Kiani, Y. “Analysis of FG-CNT reinforced composite conical panel subjected to moving load using Ritz method.” **Thin-Walled Structures**, Vol. 119, 2017, pp. 368–381
- [103] Tossapanon, P. and Wattanasakulpong, N. “Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation.” **Composite Structures**, Vol. 142, 2016, pp. 215–225
- [104] Tao, P. Fu, Y.M. and Dai, H.L. “Nonlinear dynamic analysis of fiber metal laminated beams subjected to moving loads in thermal environment.” **Composite Structures**, Vol. 140, 2016, pp. 410–416.
- [105] Thai, H. T., Nguyen, T. K. and Vo, T. P. “Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory.” **European Journal of Mechanics A/Solids**, Vol. 45, 2014, pp. 211–225.
- [106] Tossapanon, P. and Wattanasakulpong, N. “Flexural vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation with arbitrary boundary conditions : Chebyshev collocation technique.” **Journal of Sandwich Structures and Materials**, Vol. 22, 2020, pp. 156–189
- [107] Malekzadhe, P., Fiouz, A.R. and Razi, H. “Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load.” **Composite Structures**, Vol. 90(2), 2009, pp. 105–114
- [108] Vo, T.P., Thai, H.T, Nguyen T.K., Maheri, A. and Lee, J. “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory.” **Engineering Structures**, Vol. 64, 2014, pp. 12–22
- [109] Efraim, E. and Eisenberger, M. “Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates.” **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 299, 2007, pp. 720–738



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รายละเอียดของการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างสำหรับโครงสร้างแผ่นบาง

$$\begin{aligned}
 P_{im}^{uurs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^u}{dx^r} \frac{d^s N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{uurs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^u}{dy^r} \frac{d^s N_n^u}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{vurs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^v}{dx^r} \frac{d^s N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{vurs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^v}{dy^r} \frac{d^s N_n^u}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{vvrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^v}{dx^r} \frac{d^s N_m^v}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{vvrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^v}{dy^r} \frac{d^s N_n^v}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{wurs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^w}{dx^r} \frac{d^s N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{wurs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^w}{dy^r} \frac{d^s N_n^u}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{wvrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^w}{dx^r} \frac{d^s N_m^v}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{wvrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^w}{dy^r} \frac{d^s N_n^v}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{wwrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^w}{dx^r} \frac{d^s N_m^w}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{wwrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^w}{dy^r} \frac{d^s N_n^w}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_x urs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_x}}{dx^r} \frac{d^s N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_x urs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_x}}{dy^r} \frac{d^s N_n^u}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_x vrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_x}}{dx^r} \frac{d^s N_m^v}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_x vrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_x}}{dy^r} \frac{d^s N_n^v}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_x wrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_x}}{dx^r} \frac{d^s N_m^w}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_x wrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_x}}{dy^r} \frac{d^s N_n^w}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_x \phi_x rs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_x}}{dx^r} \frac{d^s N_m^{\phi_x}}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_x \phi_x rs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_x}}{dy^r} \frac{d^s N_n^{\phi_x}}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_y urs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_y}}{dx^r} \frac{d^s N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_y urs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_y}}{dy^r} \frac{d^s N_n^u}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_y vrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_y}}{dx^r} \frac{d^s N_m^v}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_y vrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_y}}{dy^r} \frac{d^s N_n^v}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_y wrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_y}}{dx^r} \frac{d^s N_m^w}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_y wrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_y}}{dy^r} \frac{d^s N_n^w}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_y \phi_x rs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_y}}{dx^r} \frac{d^s N_m^{\phi_x}}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_y \phi_x rs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_y}}{dy^r} \frac{d^s N_n^{\phi_x}}{dy^s} dy \\
 P_{im}^{\phi_y \phi_y rs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{d^r N_i^{\phi_y}}{dx^r} \frac{d^s N_m^{\phi_y}}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\phi_y \phi_y rs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{d^r N_j^{\phi_y}}{dy^r} \frac{d^s N_n^{\phi_y}}{dy^s} dy.
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

International Journal of

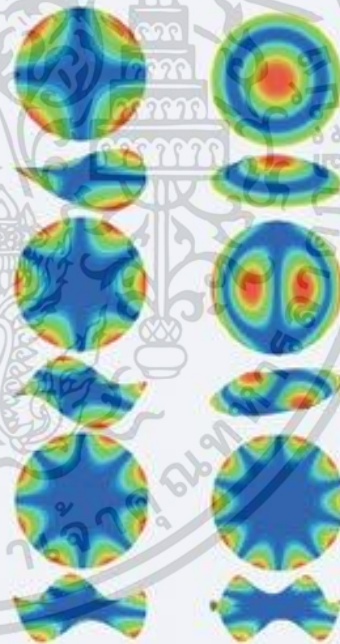
STRUCTURAL STABILITY AND DYNAMICS

Editors-in-Chief

Y. B. Yang

C. M. Wang

J. N. Reddy



 World Scientific

Year : 2018 ; Impact Factor : 2.152; Q1; SJR : 0.831

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Dynamic Responses of Functionally Graded Sandwich Beams Resting on Elastic Foundation Under Harmonic Moving Loads

Wachirawit Songsuwan*, Monsak Pimsarn*
and Nuttawit Wattanasakulpong^{†,‡}

*Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Bangkok 10520, Thailand

[†]Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering, Mahanakorn University of Technology
Nongchok, Bangkok 10530, Thailand
[‡]nuttawit_nut@hotmail.com

Received 8 June 2017
Accepted 26 January 2018
Published 7 March 2018

This paper investigates the free vibration and dynamic response of functionally graded sandwich beams resting on an elastic foundation under the action of a moving harmonic load. The governing equation of motion of the beam, which includes the effects of shear deformation and rotary inertia based on the Timoshenko beam theory, is derived from Lagrange's equations. The Ritz and Newmark methods are employed to solve the equation of motion for the free and forced vibration responses of the beam with different boundary conditions. The results are presented in both tabular and graphical forms to show the effects of layer thickness ratios, boundary conditions, length to height ratios, spring constants, etc. on natural frequencies and dynamic deflections of the beam. It was found that increasing the spring constant of the elastic foundation leads to considerable increase in natural frequencies of the beam; while the same is not true for the dynamic deflection. Additionally, very large dynamic deflection occurs for the beam in resonance under the harmonic moving load.

Keywords: FG sandwich beam; free vibration; forced vibration; elastic foundation; moving load; resonance.

1. Introduction

There are wide applications of sandwich structures in automotive, marine and aerospace industries that have motivated intense research activities. Because of outstanding properties in high strength-to-weight ratio, the usage of sandwich

[‡]Corresponding author.

structures has enormously grown in the field of engineering structures.¹⁻³ An idea of functionally graded (FG) sandwich structures is introduced to develop structural performance over conventional sandwich structures which always encounter serious problems of de-bonding and delaminating modes of failure at interface layers. The material properties of FG sandwich structures are gradually changed across the interfaces. Thus, the inter-laminar stresses between layers are eliminated.

With considerable advantages of FG sandwich structures over the conventional ones in terms of reducing inter-laminar stresses and stress concentrations at the interfaces, many researches have investigated on mechanical behavior of the structures subjected to static and dynamic loadings. However, most studies are limited to static, buckling and vibration analyses of FG sandwich beams. For instance, Vo *et al.*⁴ developed the finite element model for vibration and buckling of FG sandwich beams. The relationship between fundamental natural frequency and in-plane loading was also presented in the study. Nguyen *et al.*⁵ studied the vibration and buckling of FG sandwich beams by using higher-order shear deformation theory with hyperbolic distribution of transverse shear stress. A quasi-3D theory was used to deal with static bending, buckling and vibration problems of FG sandwich beams.^{6,7} Tossapanon and Wattanasakulpong⁸ proposed the numerical solutions based on Chebyshev collocation method for buckling and vibration of FG sandwich beams with classical and non-classical boundary conditions. Bui *et al.*⁹ applied a truly meshfree radial point interpolation method to solve forced vibration of FG sandwich beams under harmonic, heaviside step and transient loadings. For FG sandwich plate analysis, there are a number of researches associated with bending, buckling and vibration problems of the plates.¹⁰⁻¹⁷

Moving load problems are of importance in both mechanical vibration analysis and practical applications, e.g. guide ways of equipment, overhead cranes, railroads and bridges. Numerous investigations regarding dynamic response of beams with moving load were found mostly for the beams made of FG materials, or called FG beams; while, it is very rare for FG sandwich beams. In case of FG beams carrying a moving point load, Imek and Kocatürk¹⁸ investigated free and forced vibration of FG Euler–Bernoulli beams with moving load using Lagrange multiplier. Nonlinear vibration analysis of FG beams under a moving load was presented in Ref. 19. To consider axially FG beams with the moving load, Imek *et al.*²⁰ showed the dynamic behavior of the beams with various parametric studies such as material distribution, velocity of the load and excitation frequency. Moving load-induced vibration of bi-directional FG beams was investigated in Refs. 21 and 22. It was found that the free and forced vibration responses of the beams are considerably influenced by the material gradient indices of the two directions. A mixed Rayleigh–Ritz differential quadrature (DQ) method was employed to discretize and solve the spatial partial and temporal derivatives in the problems of free and forced vibration of FG beams and isotropic plates carrying the moving load.^{23,24} To include thermal effect on vibration behavior of the beams with the moving load, this topic was considered by

Wang and Wu²⁵ for axially FG beams and Tao *et al.*²⁶ for fiber metal laminated beams. For FG beams with their edge cracked, Yan *et al.*²⁷ presented the dynamic response of the beams with an open edge crack under dynamic loading. The beams were subjected to a transverse load moving at a constant speed. Moreover, in terms of the beams carrying moving mass and point load, we can also find this topic in the open literature.²⁸⁻³⁶ In addition, only one study dealing with vibration of FG sandwich beams excited by two moving loads was found in Ref. 37. This study showed the influences of velocity, excitation frequency and phase angles of the loads on deflection results of the beams.

According to the aforementioned researches of FG sandwich beams, it is observed that most of them were restricted to the studies on bending, buckling and vibration problems. Thus, in this present study, the dynamic response of FG sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation under the harmonic moving load is investigated and discussed in detail. The governing equations of motion based on Timoshenko beam theory are derived from Lagrange's equations. Many parametric studies such as layer thickness ratios, boundary conditions, length to height or beam thickness ratios, spring constants, velocity and excitation frequency of the load which have considerable impact on free and forced vibration results of FG sandwich beams are taken into consideration.

2. FG Sandwich Beams

Consider an FG sandwich beam composing of three layers of FG faces and homogenous core as shown in Fig. 1, the top and bottom faces are at $z = \pm h/2$. The beam is assumed to be placed on two-parameter elastic foundation, including Winkler and

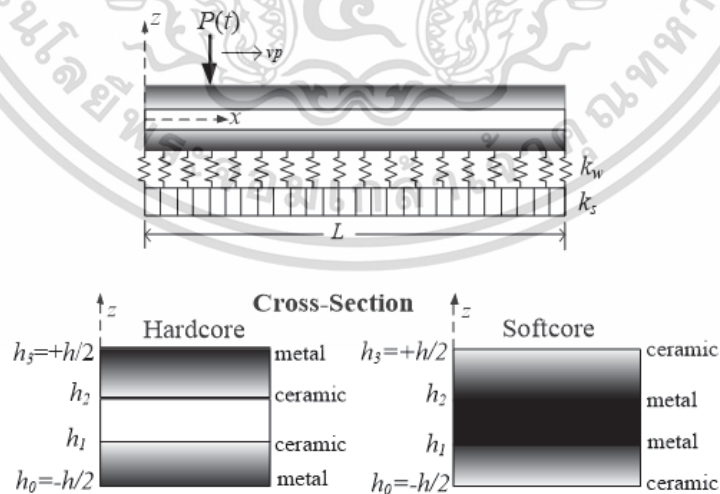


Fig. 1. A geometry and coordinate of FG sandwich beam resting on elastic foundation under a moving concentrated load, $P(t)$, with constant velocity (v_p).

shear layer springs with k_w and k_s spring constants, respectively. In this figure, there are two main types of FG sandwich beams made of ceramic and metal phases that are FG sandwich beams with homogenous soft and hardcore. In general, the metal phase has less value of Young's modulus and it is softer than ceramic phase. Therefore, for FG sandwich beam with homogenous softcore, the faces are made from FG material composing of the mixture of ceramic and metal phases in which the top and bottom faces are ceramic-rich and the material constituents are varied continuously and smoothly to metal-rich at the core. On the other hand, for the beam with homogenous hard core, the pattern of material variations is reversed.

The layer thickness ratio of the beam from the bottom ($z = h_0 = -h/2$) to the top ($z = h_3 = +h/2$) is defined by three numeric notations. For example, the FG sandwich beam with 1-1-1 layer thickness ratio is the beam that has equal thickness for every layer. The heights in each layer of the beam are $h_0 = -h/2, h_1 = -h/6, h_2 = h/6$ and $h_3 = h/2$. The effective material properties in terms of Young's modulus of elasticity (E) and mass density (ρ) in each layer can be evaluated from the following equations:

$$E^{(i)}(z) = (E_b - E_t)V_b^{(i)}(z) + E_t, \quad (1a)$$

$$\rho^{(i)}(z) = (\rho_b - \rho_t)V_b^{(i)}(z) + \rho_t. \quad (1b)$$

However, the Poisson's ratio (ν) is assumed to be constant. From Eq. (1), it is noted that the superscript (i) refers to layer and the subscripts t and b denote the material properties at the faces and at the core, respectively. The material volume fraction, $V_b^{(i)}$, which is based on the power law distribution can be obtained from Refs. 4 and 8 as:

$$\begin{cases} V_b^{(1)}(z) = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0}\right)^n, & z \in [h_0, h_1], \\ V_b^{(2)}(z) = 1, & z \in [h_1, h_2], \\ V_b^{(3)}(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3}\right)^n, & z \in [h_2, h_3], \end{cases} \quad (2)$$

where n is the material volume fraction index or power law index, $0 \leq n \leq \infty$. For FG sandwich beam with homogenous hardcore, the core is made of ceramic phase ($E_b = E_c, \rho_b = \rho_c$) and FG faces with top and bottom surfaces are made of metal phase ($E_t = E_m, \rho_t = \rho_m$). In contrast, for FG sandwich beam with homogenous softcore, we have ($E_b = E_m, \rho_b = \rho_m$) and ($E_t = E_c, \rho_t = \rho_c$) where the subscripts c and m denote the material properties of ceramic and metal phases, respectively.

3. Theoretical Formulations

In this study, the dynamic models of FG sandwich beams are formulated in accordance with Timoshenko beam theory. The displacements of an arbitrary point of

the beams along the x - and z -axes, which are denoted by $u(x, z)$, $w(x, z)$, respectively, can be expressed as follows:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\psi(x, t), \tag{3a}$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t), \tag{3b}$$

where u_0 and w_0 are axial and transverse displacements in the middle plane ($z = 0$), respectively, ψ is the rotation of the beam cross-section and t is time. The strain-displacement relations in terms of normal strain (ε_{xx}) and shear strain (γ_{xz}) are given by

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4a}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi. \tag{4b}$$

The corresponding normal stress (σ_{xx}) and shear stress (τ_{xz}) can be obtained from the elastic constitutive law as

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}. \tag{5}$$

The strain energy (U_s) of FG sandwich beams at any instant can be defined as

$$U_s = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dz dx. \tag{6}$$

Substituting Eqs. (4) and (5) into Eq. (6), one can obtain another form of the strain energy equation as

$$U_s = \frac{b}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \psi \frac{\partial w_0}{\partial x} + A_{55} \psi^2 \right] dx. \tag{7}$$

It is denoted that A_{11} , A_{55} , B_{11} , and D_{11} appearing in Eq. (7) are the extensional, shear, coupling and bending stiffness components which can be obtained from

$$[A_{11}, B_{11}, D_{11}] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)} [1, z, z^2] dz \quad \text{and} \quad A_{55} = b\kappa \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \frac{E^{(i)}}{2(1+\nu)} dz, \tag{8}$$

where $\kappa = \frac{5}{6}$ is shear correction factor for layer of homogenous material and $\kappa = \frac{5}{6 - (\nu_c V_c + \nu_m V_m)}$ for layer of FG material in which $V_m = 1 - V_c$. It is defined here that V_c and V_m are the material volume fractions of ceramic and metal, respectively. Similarly, ν_c and ν_m are the Poisson's ratios of ceramic and metal.

The potential energy due to the elastic foundation is defined as follows:

$$U_f = \frac{b}{2} \int_0^L \left(k_w w_0^2 + k_s \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx, \quad (9)$$

where k_w and k_s are the constants of Winkler and shear layer springs, respectively.

For kinetic energy of the beams, it is expressed as

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx \\ &= \frac{b}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (10)$$

where I_0, I_1 and I_2 are the inertia components which can be obtained from the following equation:

$$[I_0, I_1, I_2] = b \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)} [1, z, z^2] dz. \quad (11)$$

In this investigation, the moving load-induced vibration of FG sandwich beams is considered, hence, the work done by the moving load is

$$U_{\text{ex}} = - \int_0^L P(t) \delta(x - x_p(t)) w_0(x, t) dx, \quad (12a)$$

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t), \quad (12b)$$

$$x_p(t) = v_p t, \quad 0 \leq x_p(t) \leq L, \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{v_p}. \quad (12c)$$

It is noted that P_0, v_p and Ω is the magnitude, velocity and excitation frequency of the moving load, respectively, $\delta(\cdot)$ is the Dirac delta function and $x_p(t)$ is defined as the location of the moving load at any instant.

From all energies described above, we can use them to create the total energy (Π) for the beam system. This total energy is obtained from the balance of elastic strain energies stored in deformed bodies (beam and its elastic foundation) and the energies due to the kinetic energy and the work done by applied force.³⁸ Therefore, the total energy can be expressed as follows:

$$\Pi = U_s + U_f - U_k - U_{\text{ex}}. \quad (13)$$

To solve the total energy in Eq. (13), we can use the Ritz trial displacement functions in the form of polynomial series that must satisfy at least the essential or geometric boundary conditions. In order to consider FG sandwich beams with different boundary conditions such as clamped (C) and hinged (H) at any end of the

beams, the trial displacement functions are

$$\begin{cases} u_0(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j(t) \Xi_{1j}(x), \\ w_0(x, t) = \sum_{j=1}^N B_j(t) \Xi_{2j}(x), \\ \psi(x, t) = \sum_{j=1}^N C_j(t) \Xi_{3j}(x) \end{cases} \quad (14)$$

in which $\Xi_{1j}(x)$, $\Xi_{2j}(x)$ and $\Xi_{3j}(x)$ are polynomial-series shape functions that are dependent on boundary conditions of the beams. The shape functions of the beams with different boundary conditions (B.C.) are shown in Table 1. For example, the beams which are clamped at both ends are defined as C-C beams.

These shape functions are expanded to have suitable number of polynomial terms (N) which can be obtained from the convergence study. Inserting the trial displacement functions written above into the total potential energy of Eq. (13) and then following the Lagrange equation method

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (15)$$

with q_j representing the time-dependent unknown parameters ($A_j(t), B_j(t), C_j(t)$), one can obtain the following equation of motion as:

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \\ \ddot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

It is noted that the over-dot stands for the derivative with respect to time, \mathbf{K} and \mathbf{M} are the stiffness and mass matrices, respectively, in which their size is $(3N \times 3N)$. Additionally, \mathbf{F} is the vector of dynamic force due to the moving load. The matrix

Table 1. Shape functions of FG sandwich beams with different boundary conditions.

B.C.	$\Xi_{1j}(x)$	$\Xi_{2j}(x)$	$\Xi_{3j}(x)$
C-C	$(\frac{x}{L})^j (1 - \frac{x}{L})$	$(\frac{x}{L})^j (1 - \frac{x}{L})$	$(\frac{x}{L})^j (1 - \frac{x}{L})$
C-H	$(\frac{x}{L})^j (1 - \frac{x}{L})$	$(\frac{x}{L})^j (1 - \frac{x}{L})$	$(\frac{x}{L})^j$
H-H	$(\frac{x}{L})^j (1 - \frac{x}{L})$	$(\frac{x}{L})^j (1 - \frac{x}{L})$	$(\frac{x}{L})^{j-1}$

elements in Eq. (16) are given by

$$\begin{aligned}
 K_{jm}^{11} &= A_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{1j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{1m}}{\partial x} dx, & K_{jm}^{12} &= 0, & K_{jm}^{13} &= B_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{1j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{3m}}{\partial x} dx, \\
 K_{jm}^{21} &= 0, & K_{jm}^{22} &= \left(A_{55} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx + k_w \int_0^L \Xi_{2j} \Xi_{2m} dx + k_s \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx \right), \\
 K_{jm}^{23} &= A_{55} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{2j}}{\partial x} \Xi_{3m} dx, & K_{jm}^{31} &= B_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{3j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{1m}}{\partial x} dx, \\
 K_{jm}^{32} &= A_{55} \int_0^L \Xi_{3j} \frac{\partial \Xi_{2m}}{\partial x} dx, & K_{jm}^{33} &= \left(D_{11} \int_0^L \frac{\partial \Xi_{3j}}{\partial x} \frac{\partial \Xi_{3m}}{\partial x} dx + A_{55} \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{3m} dx \right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

and

$$\begin{aligned}
 M_{jm}^{11} &= I_0 \int_0^L \Xi_{1j} \Xi_{1m} dx, & M_{jm}^{12} &= 0, & M_{jm}^{13} &= I_1 \int_0^L \Xi_{1j} \Xi_{3m} dx, \\
 M_{jm}^{21} &= 0, & M_{jm}^{22} &= I_0 \int_0^L \Xi_{2j} \Xi_{2m} dx, & M_{jm}^{23} &= 0, \\
 M_{jm}^{31} &= I_1 \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{1m} dx, & M_{jm}^{32} &= 0, & M_{jm}^{33} &= I_2 \int_0^L \Xi_{3j} \Xi_{3m} dx,
 \end{aligned}$$

$$F_j = P(t) \Xi_{2j}(x_p). \tag{18}$$

The equation of motion in Eq. (16) can be solved in time domain by using the average acceleration method of Newmark. Consequently, the results of displacements, velocities and accelerations of the beams at the considered point and time are determined in the time domain of $0 \leq t \leq L/v_p$.

For free vibration analysis with harmonic phenomenon, it is assumed that the unknown vector $[A_j(t), B_j(t), C_j(t)]^T$ for $j = 1, 2, \dots, N$ are expressed as

$$\begin{bmatrix} A_j(t) \\ B_j(t) \\ C_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_j e^{i\omega t} \\ \bar{B}_j e^{i\omega t} \\ \bar{C}_j e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{19}$$

in which $i = \sqrt{-1}$ and ω is natural frequency. Substituting Eq. (19) into Eq. (16) without considering any force vector, we can obtain an eigenvalue equation for free vibration problem as

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Solving Eq. (20) as standard eigenvalue problem leads to a set of natural frequencies of FG sandwich beams in which the lowest eigenvalue is the fundamental frequency of the beams.

4. Numerical Results and Discussion

This section aims to present and discuss several examples of free and forced vibration analysis of FG sandwich beams made from a mixture of Alumina (Al₂O₃) as ceramic phases and Aluminum (Al) as metal phases. The material properties such as Young’s modulus (E), Poisson’s ratio (ν) and material density (ρ) are as follows:

$$E_c = 380 \text{ GPa}, \nu_c = 0.3, \rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3 \text{ for Al}_2\text{O}_3 \text{ and } E_m = 70 \text{ GPa}, \nu_m = 0.3, \rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3 \text{ for Al.}$$

In this study, the beams are also assumed to be placed on the two-parameter elastic foundation including Winkler and shear layer springs. The geometric parameters of FG sandwich beams are as follows: $b = 0.5 \text{ m}$, $h = 1.0 \text{ m}$. This section is organized into two parts of consideration that are the part of free vibration analysis and forced vibration analysis. In case of free vibration, the natural frequencies of the beams are presented in dimensionless form of

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

4.1. Free vibration

First of all, in Table 2, it is important to carry out convergence study and validation for vibration analysis of FG sandwich beams. The beams with homogenous hardcore and 1-1-1 layer thickness ratio are considered in this table. It is observed that the accuracy of the first three modes of frequencies is improved as the number of

Table 2. Convergence study and validation for free vibration of FG sandwich beams without elastic foundation ($L/h = 20$).

B.C.	N	$n = 0.5$			$n = 5.0$		
		$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$	$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$
H-H	4	4.5333	22.6918	57.8540	3.1111	15.6477	40.2473
	6	4.5320	18.0237	40.3973	3.1102	12.4038	27.9275
	8	4.5320	17.9495	39.7571	3.1102	12.3524	27.4790
	9	4.5320	17.9492	39.7571	3.1102	12.3522	27.4790
	10	4.5320	17.9492	39.7571	3.1102	12.3522	27.4790
	Ref. 4	4.5324	—	—	3.1111	—	—
	Ref. 8	4.5316	17.9436	39.7226	3.1101	12.3507	27.4651
C-C	4	10.2026	28.0958	113.4970	7.0278	19.4596	98.5357
	6	10.1734	27.5784	55.0180	7.0064	19.0917	38.4976
	8	10.1733	27.5702	52.9340	7.0063	19.0858	36.8825
	9	10.1733	27.5702	52.8762	7.0063	19.0858	36.8346
	10	10.1733	27.5702	52.8759	7.0063	19.0858	36.8344
C-H	4	7.0556	22.8653	77.0377	4.8497	15.7833	54.1573
	6	7.0489	22.5459	47.3422	4.8450	15.5582	32.8640
	8	7.0489	22.5401	46.1677	4.8450	15.5541	32.0305
	9	7.0489	22.5401	46.1417	4.8450	15.5541	32.0119
	10	7.0489	22.5401	46.1413	4.8450	15.5541	32.0116

polynomial terms (N) increases. By using $N = 10$, the convergent results are achieved, hence, $N = 10$ is used throughout this paper. The obtained results agree very well with those available in the literature, for every boundary condition.

Additionally, the comparison for the first three natural frequencies of FG sandwich beams without elastic foundation is shown in Table 3 for different types of boundary conditions and layer thickness ratios. A good agreement between the present solutions and those of Imek and Al-shujairi³⁷ is observed for the cases of H–H and C–C beams and the new results of C–H beam are also presented.

After the proposed model is validated, it is used for further investigations in our study. Figure 2 shows the 3D plot of dimensionless fundamental frequency of FG sandwich beams with different boundary conditions. The beams having asymmetric layer thickness ratio (2-2-1) with homogenous hardcore are analyzed in this figure for investigating the influences of length to height ratio (L/h) and the material volume fraction index (n) on frequency results. It is clearly seen that the frequency of C–C beams is higher than that of C–H and H–H beams, respectively.

To consider the effect of elastic foundation on frequencies of FG sandwich beams with homogenous hardcore, Table 4 presents the dimensionless fundamental frequencies ($\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{E_m}{E_m}}$) of the beams with various values of spring constants ($k_w = \frac{\xi_w A_{110}}{L^2}$ and $k_s = \xi_s A_{110}$ in which $A_{110} = E_m h$). It is defined that A_{110} is A_{11} of pure Aluminum beam per unit width. As can be observed, the present solutions are in

Table 3. Comparison for natural frequencies of FG sandwich beams with different boundary conditions and layer thickness ratios ($L/h = 20$).

B.C.	Mode	Source	$n = 0.5$			$n = 5.0$		
			1-1-1	1-2-1	1-8-1	1-1-1	1-2-1	1-8-1
H–H	$\tilde{\omega}_1$	Present	4.5320	4.6975	5.1066	3.1102	3.4913	4.5551
		Ref. 37	4.5316	4.6972	5.1064	3.1100	3.4912	4.5550
	$\tilde{\omega}_2$	Present	17.9492	18.5983	20.1966	12.3522	13.8595	18.0411
		Ref. 37	17.9442	18.5946	20.1951	12.3509	13.8586	18.0407
	$\tilde{\omega}_3$	Present	39.7478	41.1628	44.6271	27.4725	30.8021	39.9521
		Ref. 37	39.7319	41.1531	44.6288	27.4716	30.8037	39.9500
C–C	$\tilde{\omega}_1$	Present	10.1733	10.5402	11.4431	7.0063	7.8598	10.2250
		Ref. 37	10.1695	10.5372	11.4417	7.0051	7.8589	10.2245
	$\tilde{\omega}_2$	Present	27.5702	28.5462	30.9320	19.0858	21.3913	27.7106
		Ref. 37	27.5486	28.5296	30.9245	19.0795	21.3864	27.7079
	$\tilde{\omega}_3$	Present	52.8759	54.7054	59.1415	36.8344	41.2379	53.1458
		Ref. 37	52.8656	54.7118	59.1783	36.8619	41.2742	53.1954
C–H	$\tilde{\omega}_1$	Present	7.0489	7.3049	7.9364	4.8450	5.4372	7.0848
		Ref. 37	—	—	—	—	—	—
	$\tilde{\omega}_2$	Present	22.5401	23.3472	25.3280	15.5541	17.4433	22.6552
		Ref. 37	—	—	—	—	—	—
	$\tilde{\omega}_3$	Present	46.1413	47.7618	51.7108	32.0116	35.8662	46.3777
		Ref. 37	—	—	—	—	—	—

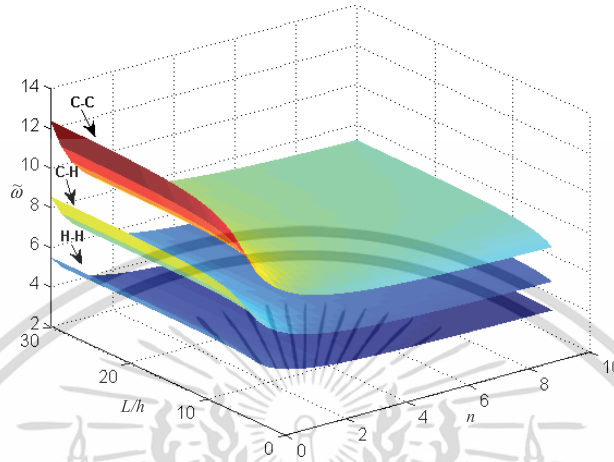


Fig. 2. Dimensionless fundamental frequencies of FG sandwich beams without elastic foundation.

excellent agreement with the previous frequency results of Ref. 8. In Table 5, the dimensionless fundamental frequencies ($\tilde{\omega}$) of clamped FG sandwich beams resting on elastic foundation with different spring constants are presented with different L/h ratios. The spring constants can be obtained from $k_w = \frac{K_w D_{110}}{L^4}$ and $k_s = \frac{K_s D_{110}}{L^2}$ where D_{110} is D_{11} of Aluminum beam per unit width. Increasing the spring constants of the foundation yields the increase of the frequency results, especially when the shear layer spring is included.

Table 4. Dimensionless fundamental frequencies ($\tilde{\omega}$) of FG sandwich beams with elastic foundation ($L/h = 10, n = 0.5$).

B.C.	Source	ξ_w	ξ_s	1-0-1	1-1-1	2-1-2	1-5-1
H-H	Present	0.0	0.0	0.4273	0.4487	0.4386	0.4921
	Ref. 8			0.4271	0.4486	0.4384	0.4920
	Present	0.2	0	0.5780	0.5892	0.5834	0.6179
	Ref. 8			0.5779	0.5891	0.5833	0.6178
	Present	0.2	0.2	1.3526	1.3363	1.3421	1.3268
	Ref. 8			1.3525	1.3363	1.3420	1.3267
C-H	Present	0.0	0.0	0.6568	0.6893	0.6739	0.7542
	Ref. 8			0.6559	0.6887	0.6732	0.7539
	Present	0.2	0	0.7634	0.7879	0.7759	0.8416
	Ref. 8			0.7626	0.7874	0.7753	0.8414
	Present	0.2	0.2	1.4915	1.4849	1.4862	1.4939
	Ref. 8			1.4906	1.4844	1.4855	1.4937
C-C	Present	0.0	0.0	0.9345	0.9801	0.9586	1.0696
	Ref. 8			0.9325	0.9787	0.9570	1.0690
	Present	0.2	0	1.0123	1.0518	1.0329	1.1330
	Ref. 8			1.0104	1.0505	1.0314	1.1324
	Present	0.2	0.2	1.6571	1.6635	1.6588	1.6968
	Ref. 8			1.6555	1.6622	1.6572	1.6962

Table 5. Dimensionless fundamental frequencies of FG sandwich beams with elastic foundation and C-C boundary condition ($n = 0.5$).

FG sandwich beams with homogenous hardcore								
L/h	K_w	K_s	1-0-1	1-1-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1	3-2-1
5	0	0	8.2804	8.6518	8.4814	8.7814	8.5860	8.7362
	10^2	0	8.6486	8.9918	8.8332	9.1141	8.9317	9.0731
	10^2	10^2	11.9423	12.0896	12.0140	12.1589	12.0693	12.1469
10	0	0	9.3454	9.8006	9.5864	9.9725	9.7248	9.9223
	10^2	0	9.6771	10.1056	9.9026	10.2701	10.0349	10.2236
	10^2	10^2	12.9277	13.1497	13.0352	13.2562	13.1200	13.2393
20	0	0	9.6884	10.1733	9.9433	10.3608	10.0941	10.3092
	10^2	0	10.0105	10.4690	10.2502	10.6491	10.3949	10.6011
	10^2	10^2	13.2713	13.5191	13.3906	13.6399	13.4868	13.6220
FG sandwich beams with homogenous softcore								
5	0	0	8.4906	7.9529	8.2025	7.7094	8.0071	7.7134
	10^2	0	8.8988	8.4077	8.6361	8.1818	8.4534	8.1807
	10^2	10^2	12.3998	12.1734	12.2829	12.0477	12.1772	12.0254
10	0	0	10.2146	9.6791	9.9430	9.3451	9.6664	9.2669
	10^2	0	10.5591	10.0587	10.3062	9.7413	10.0421	9.6625
	10^2	10^2	13.8952	13.6362	13.7725	13.4317	13.5970	13.3536
20	0	0	10.8471	10.3277	10.5916	9.9548	10.2797	9.8356
	10^2	0	11.1739	10.6862	10.9351	10.3296	10.6356	10.2114
	10^2	10^2	14.5069	14.2630	14.3990	14.0246	14.1923	13.9102

To understand about the change of frequency due to the variations of spring constants (K_w and K_s), Fig. 3 illustrates the 3D plot of dimensionless fundamental frequency of clamped FG sandwich beams with homogenous hardcore and 2-2-1 layer thickness ratio.

4.2. Forced vibration under a moving load

Similar to the section of free vibration, it is started with the numerical validation for forced vibration of beams subjected to a moving load. The analytical model²⁶ for simply supported or hinged isotropic beams under the moving load is

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\Delta} \frac{2P_0}{\rho b h L} \frac{1}{(i\pi v_p/L)^2 - \omega_i^2} \left(\omega_i \sin\left(\frac{i\pi v_p}{L}\right)t - \frac{i\pi v_p}{L} \sin(\omega_i t) \right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right),$$

where

$$\left(0 \leq t \leq \frac{L}{v_p}\right) \quad \text{and} \quad \omega_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}}, \quad i = 1, 2, \dots, \Delta. \quad (21)$$

This model is used to validate the present solution for the beam made of Aluminum 2024-T3 which has $E = 72.4$ GPa and $\rho = 2770$ kg/m³. The validation is shown in Fig. 4 with very good agreement between the present and analytical solutions.

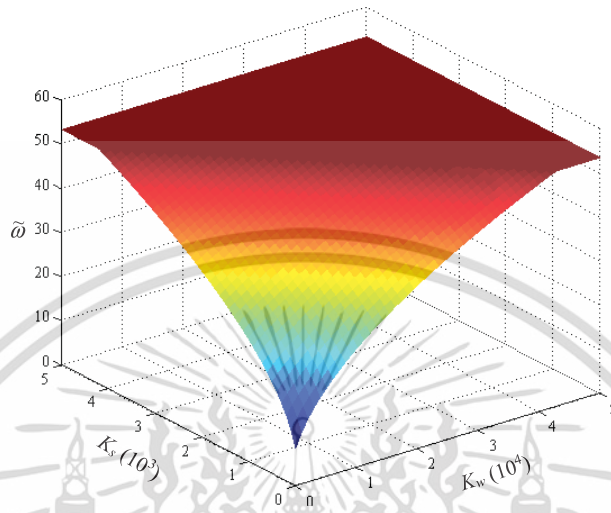


Fig. 3. Dimensionless fundamental frequencies of FG sandwich beams with elastic foundation and C-C boundary condition ($L/h = 10, n = 2.0$).

Furthermore, the validation for the case of FG beams subjected to a concentrated moving load is presented in Table 6. The material properties and the equations used for describing the materials across the thickness direction of FG beams are set according to Ref. 18. From this validation, it is observed that the present solutions of the maximum dimensionless dynamic deflections of FG beams agree well with those of Ref. 18 for every value of power law indices and velocities of the load.

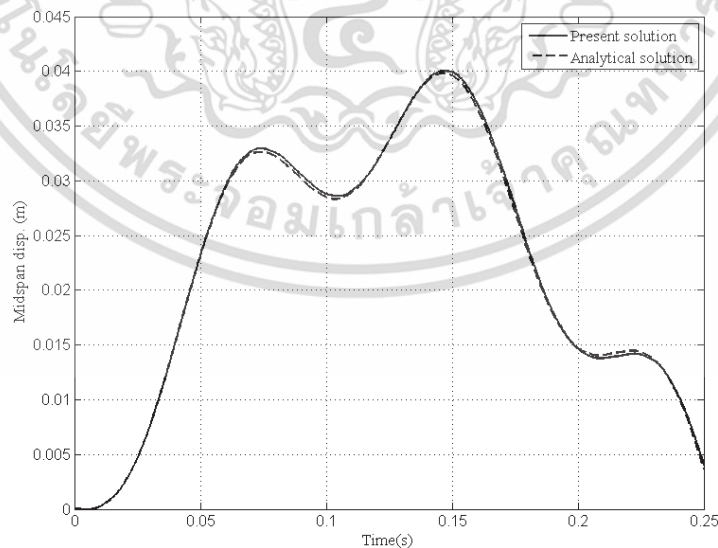


Fig. 4. Comparison of the mid-span deflections of isotropic beams ($L = 10\text{ m}, b = 0.4\text{ m}, h = 0.5\text{ m}$).

Table 6. Comparison of maximum dimensionless dynamic deflections of FG beams under the concentrated moving load ($L = 20$ m, $h = 0.9$ m, $b = 0.4$ m).

Power law index (n)	v (m/s)	Ref. 18	Present
		$\max(w(x, t)/D)$	$\max(w(x, t)/D)$
0.2	222	1.0344	1.0370
0.5	198	1.1444	1.1366
1	179	1.2503	1.2287
2	164	1.3376	1.3093
Full alumina	252	0.9328	0.9382
Full steel	132	1.7324	1.7379

In what follows after validation, the forced vibration of FG sandwich beams under the moving load is analyzed with several parametric studies such as velocity and excitation frequency of the load as well as layer thickness ratios, boundary conditions, length to height or beam thickness ratios of the beams. The effect of spring constants of elastic foundation is also investigated. The results are presented in the form of dimensionless dynamic deflections which are normalized by using the static deflection ($D = P_0 L^3 / 48EI$) of fully Aluminum beam under a point load P_0 at the mid-span of the beam. The magnitude of the moving and static load (P_0) is set as $P_0 = 500$ kN throughout this paper.

For dynamic analysis of FG sandwich beams, Fig. 5 plots the maximum dimensionless dynamic deflections ($w(x, t)/D$) versus the normalized time ($t^* = x_p/L = v_p t/L$)

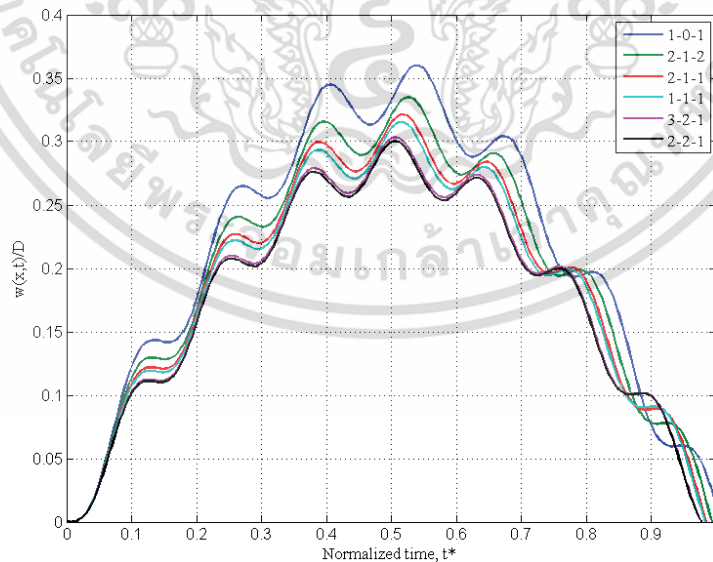


Fig. 5. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams without elastic foundation ($L/h = 10$, $n = 0.5$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega = 0$).

for the beams with homogenous hardcore and hinged boundary condition at both ends. It is clearly seen that the beam with 1-0-1 layer thickness ratio (the beam having less percentage of ceramic phases) is soft beam with the largest deflection; while, the beam with 2-2-1 is the hardest one with smallest deflection. As observed, at the range of time that the load nearly leaves the beams, all deflections try to get zero due to boundary condition constrain. The largest deflection of 1-0-1 beam drops dramatically as compared to other deflections.

To show the significant effect of elastic foundation on dynamic deflections of FG sandwich beams, Fig. 6 illustrates the maximum deflections of FG sandwich beams with 1-0-1 layer thickness ratio and homogenous hardcore. The boundary condition of the beams is hinged at both ends. As observed, the deflection of the beam without elastic foundation ($K_w = 0, K_s = 0$) is extremely large as compared to those of the beams with elastic foundation. In Fig. 7, the dynamic deflections of 2-2-1 beams (homogenous softcore) resting on elastic foundation are shown with different boundary conditions. The deflection of the beam with C-C boundary condition is lower than those of C-H and H-H beams, respectively.

The dynamic deflections of FG sandwich beams without elastic foundation are plotted against the values of velocity of moving load in Fig. 8. In this figure, the beams having asymmetric layer thickness ratio of 2-1-1 are considered with H-H boundary condition. The deflection results of the beams with homogenous hardcore and softcore are shown in Figs. 8(a) and 8(b), respectively. As illustrated, the beams with low values of material volume fraction index (n) is very strong for the case of homogenous hardcore but it is reversed for the case of homogenous softcore.

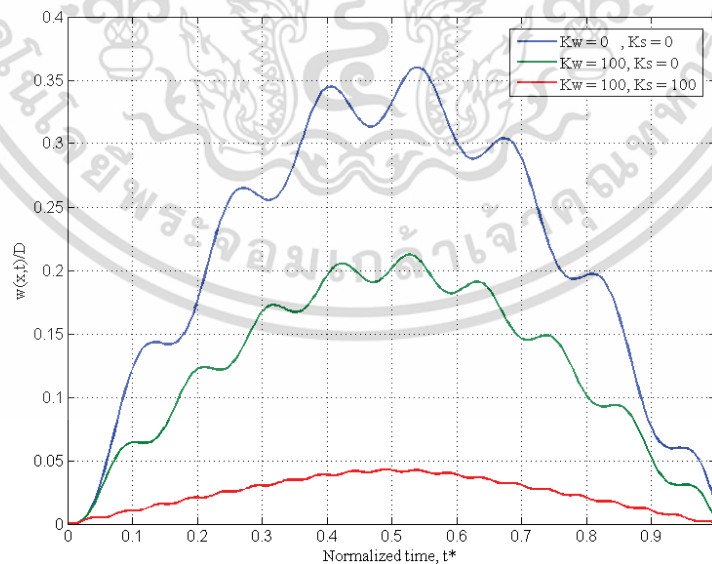


Fig. 6. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega = 0$).

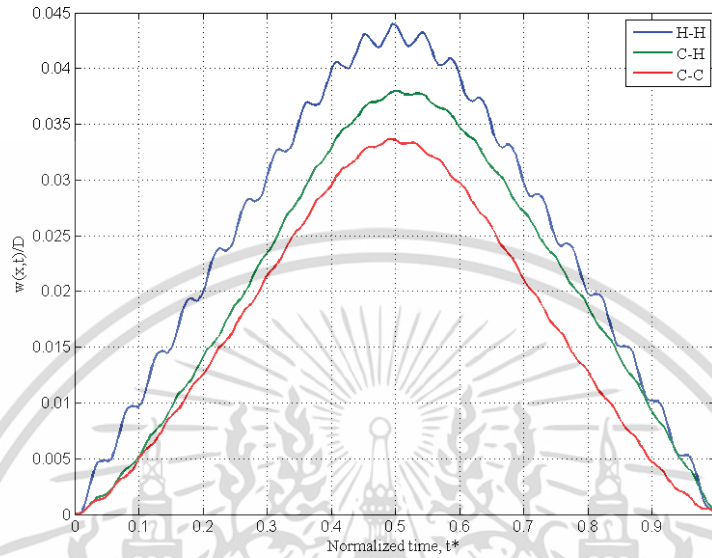


Fig. 7. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation and different boundary conditions ($L/h = 10, n = 0.5, v_p = 50$ m/s, $\Omega = 0, K_w = K_s = 100$).

Similarly, to include the effect of elastic foundation, the deflection results of 2-2-1 beams (homogenous hardcore) which are clamped at both ends are depicted in Fig. 9.

In following investigations, it is assumed that the load acting on FG sandwich beams is moving and vibrating simultaneously. The variations of the maximum dimensionless dynamic deflections of 2-2-1 beams with homogenous hardcore are shown in Fig. 10 for various values of velocity and excitation frequency of the moving

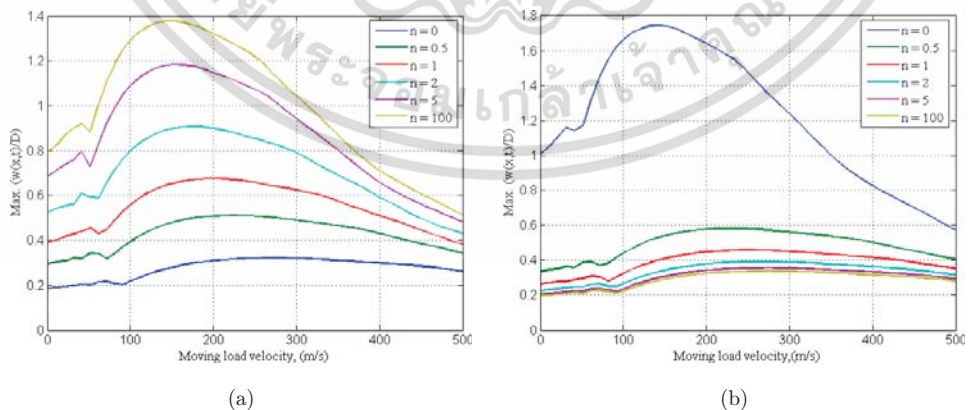


Fig. 8. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams without elastic foundation (a) homogenous hardcore and (b) homogenous softcore ($L/h = 20, \Omega = 0$).

Dynamic Responses of FG Sandwich Beams Resting on Elastic Foundation

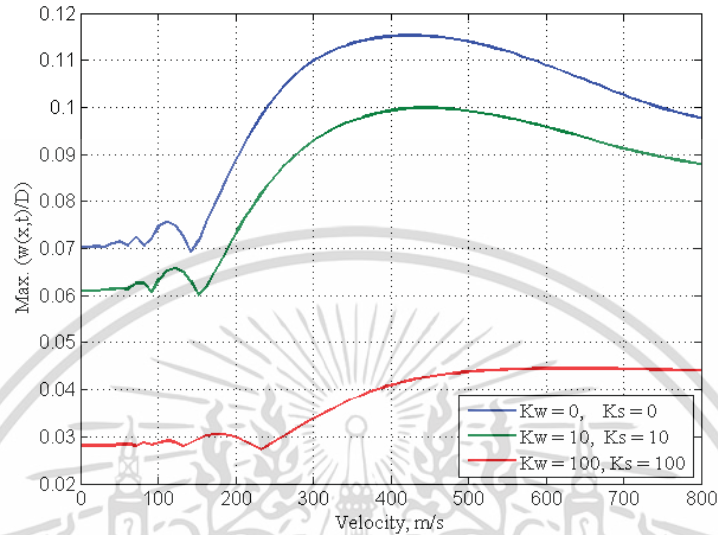


Fig. 9. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation ($L/h = 20, n = 0.5, \Omega = 0$).

load. The beams are clamped at both ends. In this figure, the beam subjected to the moving load with its velocity of $v = v_p = 25$ m/s has the very large deflection (peak value) within the range of $\Omega = 120-140$ rad/s. This range is very close to natural frequency of the beam. Moreover, the load with low velocity gives more acting time and more cycles of harmonic on the beam. This is the reason why the beam under the load of 25 m/s has larger deflection than that of 50, 75 and 100 m/s, respectively.

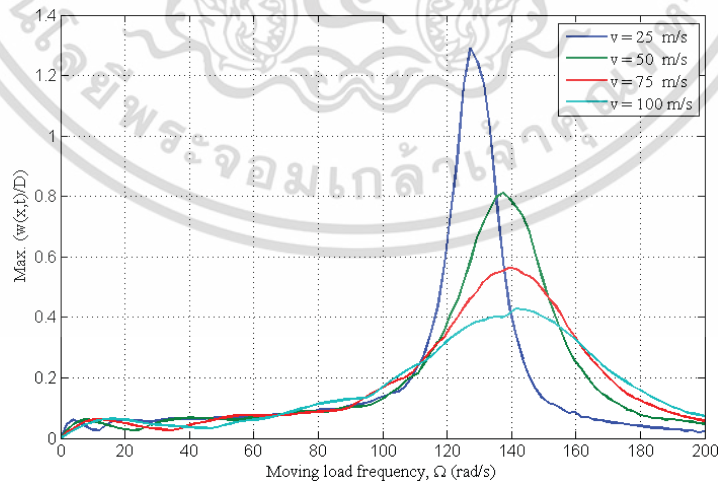


Fig. 10. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation ($L/h = 20, n = 0.5, K_w = K_s = 10$).

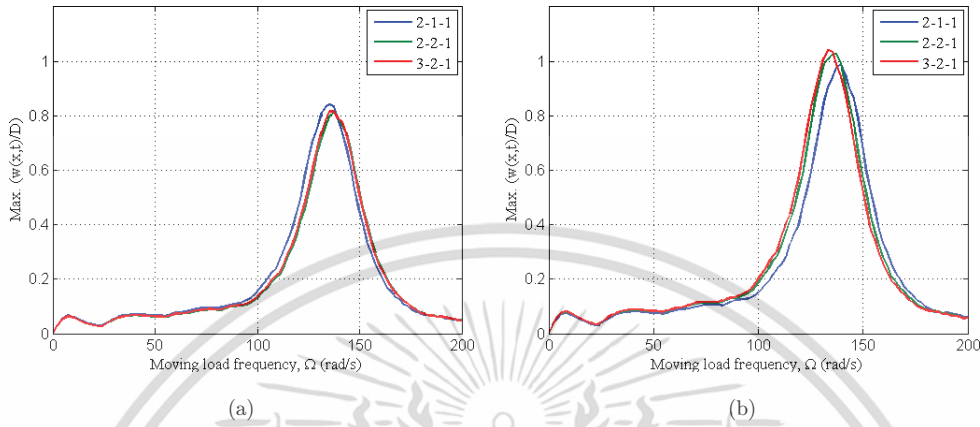


Fig. 11. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation (a) homogeneous hard core and (b) homogeneous soft core ($L/h = 20, n = 0.5, v_p = 50$ m/s, $K_w = K_s = 10$).

Increasing the values of velocity of the load leads to decrease in the peak value of deflection profiles. Additionally, in Fig. 11, the clamped (C-C) beams with asymmetric layer thickness ratios (2-1-1, 2-2-1 and 3-2-1) are considered by varying the excitation frequencies of the moving load.

Figure 12 shows the maximum dimensionless dynamic deflections of 2-2-1 beams associated with various values of velocity and material volume fraction index. The beams are homogeneous hard core and clamped at both ends. With the increase of the material volume fraction index, the deflection results increase for both frequency values, ($\Omega = 0, 50$ rad/s). To present two continuous regions of forced vibration ($0 \leq t^* \leq 1$) and free vibration ($t^* > 1$), Figs. 13 and 14 show the dynamic behavior

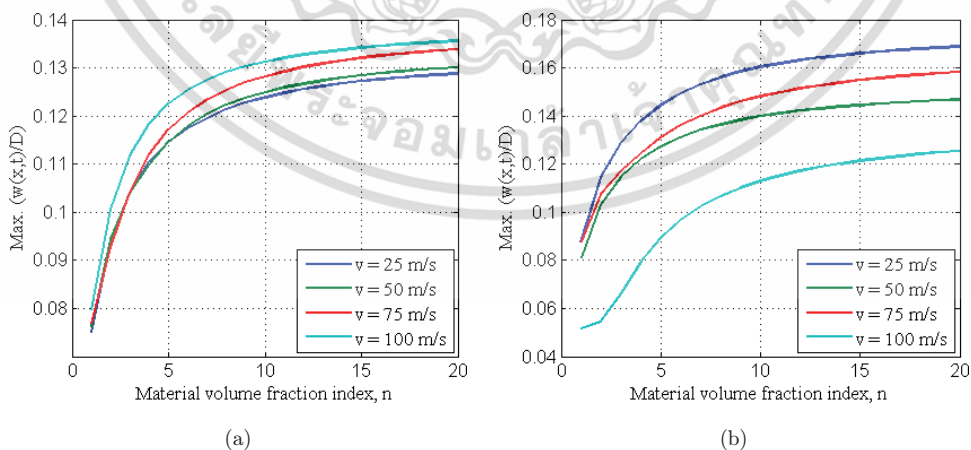


Fig. 12. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation (a) $\Omega = 0$ rad/s and (b) $\Omega = 50$ rad/s ($L/h = 20, K_w = K_s = 10$).

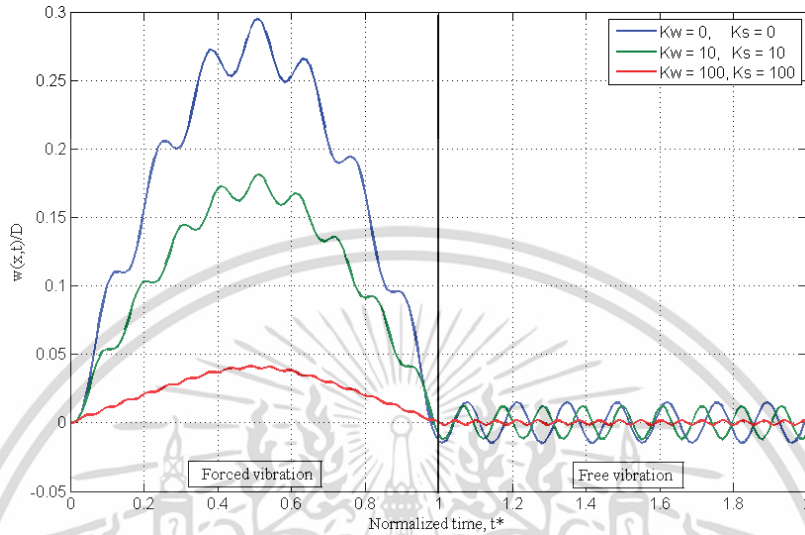


Fig. 13. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation ($L/h = 20, n = 0.5, v_p = 25 \text{ m/s}, \Omega = 0 \text{ rad/s}$).

of FG sandwich beams resting on elastic foundation under a moving load for the two regions. The beams considered in these figures are homogenous hardcore with 2-2-1 layer thickness ratio and hinged at both ends. In the region of free vibration where the moving load leaves the beam, we can see freely oscillating beam. In Fig. 13, the excitation frequency (Ω) is zero; while, Fig. 14 is the case of resonance in which the

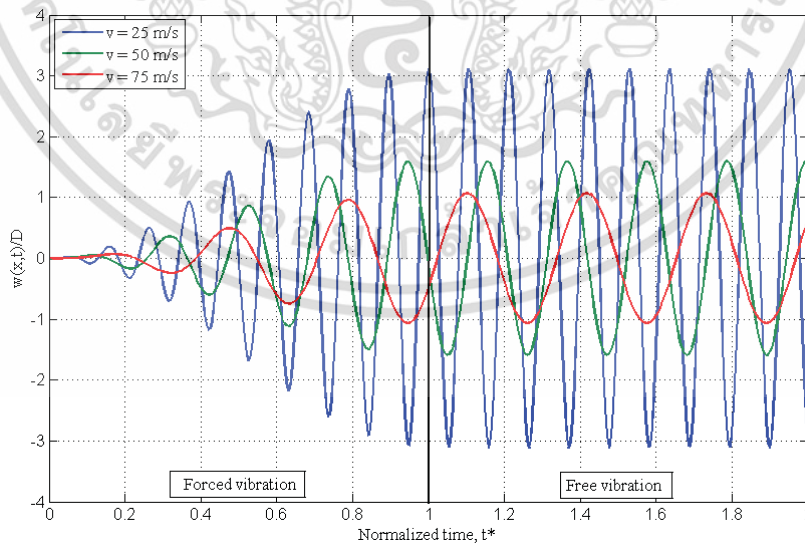


Fig. 14. Maximum dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich beams with elastic foundation ($L/h = 20, n = 0.5, K_w = K_s = 10, \Omega = \omega_1$).

excitation frequency equals to fundamental frequency ($\Omega = \omega_1$). It is remarkable that extreme deflection is always obtained in the case of resonance and then continues through the free vibration zone.

5. Conclusion

The free and forced vibration responses of FG sandwich beams resting on elastic foundation under a harmonic moving load are investigated using the Ritz and Newmark methods. Within the framework of Timoshenko beam theory including the effects of shear deformation and rotary inertia, the equation of motion is established for the beams with different boundary conditions. The influences of parametric studies such as layer thickness ratio, boundary condition, length to height ratio, spring constant, material volume fraction index of the beams and excitation frequency and velocity of the load on natural frequency and dynamic deflection results are presented and discussed in detail. Numerical results reveal that natural frequencies of the beams increase, but deflections, by contrast, decrease when the spring constants of elastic foundation are stiffer. The natural frequency is high, while, the dynamic deflection is low for the case of C-C beam as compared to C-H and H-H beams, respectively. In addition, the beams with low values of material volume fraction index (n) are very strong for the case of homogenous hardcore but reversed for the case of homogenous softcore. In resonance situation that the excitation frequency of the moving load equals fundamental frequency of the beam, very large dynamic deflection is obtained and then continues in free vibration region, although the load has already left the beam.

References

1. J. R. Vinson, *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials* (Technomic Publication, Pennsylvania, USA, 1999).
2. A. Sankar, S. Natarajan, T. Merzouki and M. Ganapathi, Nonlinear dynamic thermal buckling of sandwich spherical and conical shell with CNT reinforced facesheets, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **17**(9) (2017) 1750100.
3. S. V. Joseph and S. C. Mohanty, Free vibration of a rotating sandwich plate with viscoelastic core and functionally graded material constraining layer, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **17**(10) (2017) 1750114.
4. T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, A. Maheri and J. Lee, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Eng. Struct.* **64** (2014) 12–22.
5. T. K. Nguyen, T. T. P. Nguyen, T. P. Vo and H. T. Thai, Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory, *Compos. Part B* **76** (2015) 273–285.
6. T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, F. Inam and J. Lee, A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams, *Compos. Struct.* **119** (2015) 1–12.
7. T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, F. Inam and J. Lee, Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory, *Compos. Part B* **68** (2015) 59–74.

8. P. Tossapanon and N. Wattanasakulpong, Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation, *Compos. Struct.* **142** (2016) 215–225.
9. T. Q. Bui, A. Khosravifard, Ch. Zhang, M. R. Hematiyan and M. V. Golub, Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method, *Eng. Struct.* **47** (2013) 90–104.
10. A. M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflection and stresses, *Int. J. Solids Struct.* **42** (2005) 5224–5242.
11. A. M. Zenkour, A comprehensive analysis functionally graded sandwich plates: Part 2- Buckling and free vibration, *Int. J. Solids Struct.* **42** (2005) 5243–5258.
12. A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, R. M. N. Jorge and C. M. M. Soares, Static analysis of functionally graded sandwich plates according to a hyperbolic theory considering Zig-Zag and warping effects, *Adv. Eng. Soft.* **52** (2012) 30–43.
13. Q. Li, V. P. Iu and K. P. Kou, Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates, *J. Sound Vib.* **311** (2008) 498–515.
14. M. Kashtalyan and M. Menshykova, Three-dimensional elasticity solutions for sandwich panels with a functionally graded core, *Comput. Struct.* **87** (2009) 36–43.
15. S. Natarajan and G. Manickam, Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory, *Finite Elem. Anal. Des.* **57** (2012) 32–42.
16. O. Rahmani, S. M. R. Khalili, K. Malekzadeh and H. Hadavinia, Free vibration analysis of sandwich structures with a flexible functionally graded syntactic core, *Comput. Struct.* **91** (2009) 229–235.
17. M. Liu, Y. Cheng and J. Liu, High-order free vibration analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded flexible core, *Compos. Part B* **72** (2015) 97–107.
18. M. İmek and T. Kocatürk, Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving load, *Compos. Struct.* **90** (2009) 465–473.
19. M. İmek, Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load, *Compos. Struct.* **92** (2010) 2532–2546.
20. M. İmek, T. Kocatürk and D. Akba, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load, *Compos. Struct.* **94** (2012) 2358–2364.
21. M. İmek, Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions, *Compos. Struct.* **133** (2015) 968–978.
22. D. Hao and C. Wei, Dynamic characteristic analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams, *Compos. Struct.* **141** (2016) 253–263.
23. S. M. R. Khalili, A. A. Jafari and S. A. Eftekhari, A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads, *Compos. Struct.* **92** (2010) 2497–2511.
24. S. A. Eftekhari and A. A. Jafari, A mixed method for free and forced vibration of rectangular plates, *Appl. Math. Model.* **36** (2012) 2814–2831.
25. Y. Wang and D. Wu, Thermal effect on the dynamic response of axially functionally graded beam subjected to a moving harmonic load, *Acta Astronautica* **127** (2016) 171–181.
26. C. Tao, Y. M. Fu and H. L. Dai, Nonlinear dynamic analysis of fiber metal laminated beams subjected to moving loads in thermal environment, *Compos. Struct.* **140** (2016) 410–416.
27. T. Yan, S. Kitipornchai, J. Yang and X. Q. He, Dynamic behaviour of edge-cracked shear deformable functionally graded beams on elastic foundation under a moving load, *Compos. Struct.* **93** (2011) 2992–3001.

28. H. P. Lee, The dynamic response of a Timoshenko beam subjected to a moving mass, *J. Sound Vib.* **198**(2) (1996) 249–256.
29. E. Esmailzadeh and M. Ghorashi, Vibration analysis of a Timoshenko beam subjected to a travelling mass, *J. Sound Vib.* **199**(4) (1997) 615–628.
30. M. A. Mahmoud and M. A. Abou Zaid, Dynamic response of a beam with crack subject to a moving mass, *J. Sound Vib.* **256**(4) (2002) 591–603.
31. K. Kiani, A. Nikkhoo and B. Mehri, Prediction capabilities of classical and shear deformable beam models excited by a moving mass, *J. Sound Vib.* **320**(3) (2009) 632–648.
32. M. imek, Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories, *Compos. Struct.* **92** (2010) 904–917.
33. X. Sha, J. F. Lu, T. Lan and D. S. Jeng, Dynamic response of a defected periodic viaduct to a moving point load, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **17**(7) (2017) 1750078.
34. S. H. Yin and Y. B. Yang, Finite element analysis of an infinite beam on a viscoelastic foundation subjected to a moving vehicle, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **17**(4) (2017) 1750045.
35. J. Guo, J. Cai and W. Chen, Inertia effect on RC beam subjected to impact loads, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **17**(4) (2017) 1750053.
36. C. P. S. Kumar, C. Sujatha and K. Shankar, Vibration of nonuniform beams under moving point loads: An approximate analytical solutions in time domain, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **17**(3) (2017) 1750035.
37. M. imek and M. Al-shujairi, Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, *Compos. Part B* **108** (2017) 18–34.
38. D. Chen, J. Yang and S. Kitipornchai, Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams, *Int. J. Mech. Sci.* **108–109** (2016) 14–22.

International Journal of

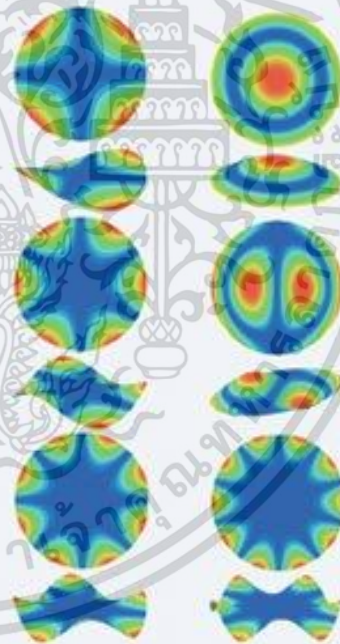
STRUCTURAL STABILITY AND DYNAMICS

Editors-in-Chief

Y. B. Yang

C. M. Wang

J. N. Reddy



 World Scientific

Year : 2021 ; Impact Factor : 2.957; Q1; SJR : 0.772

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Dynamic Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under Multiple Moving Loads by Ritz Method with Gram–Schmidt Polynomials

Wachirawit Songsuwan

*Department of Mechanical Engineering
School of Engineering
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Bangkok 10520, Thailand*

Nuttawit Wattanasakulpong

*Department of Mechanical and Robotic Engineering
School of Engineering and Technology
Walailak University
Thasala, Nakhon Si Thammarat 80160, Thailand
nuttawit_mut@hotmail.com*

Monsak Pimsarn*

*Department of Mechanical Engineering
School of Engineering
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Bangkok 10520, Thailand
monsak.pi@kmitl.ac.th*

Received 18 February 2021

Accepted 28 April 2021

Published 3 June 2021

This paper investigates the dynamic behavior of functionally graded sandwich plates under multiple moving loads. The first-order shear deformation theory of plates is adopted with the effects of shear deformation and rotary inertia included. By using Lagrange's equations, the equations of motion for the dynamic behavior of the plate are derived. Then they are solved by the Ritz and Newmark time integration methods for the free and forced vibrations of the plates with different boundary conditions. To guarantee that all terms in the admissible functions can cope with the essential boundary conditions, the Gram–Schmidt procedure is used to generate the shape functions for the Ritz method. The influences of several factors on the dynamic response of the plates, such as layer thickness ratio, boundary condition, velocity, excitation frequency, phase angle, etc., are examined and discussed in detail. The numerical study indicates that the dynamic deflection has initial fluctuated growth in the low range of moving load velocity before reaching the peak at the critical velocity, which is followed by the considerable

* Corresponding author. ไม่สามารถนำผลงานไปใช้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

decrease in magnitude. Besides, the gaps or distances between the moving loads also play an important role in predicting the dynamic deflections of the plate when subjected to more than one moving loads.

Keywords: FG sandwich plate; free and forced vibration; Gram–Schmidt polynomial; multiple moving loads.

1. Introduction

Sandwich structures are widely used in many engineering applications, ranging from aerospace and satellite applications to automobiles and wind energy systems. The beneficial aspects of these structures, in terms of their high strength and stiffness, low weight and cost effectiveness, mean that the use of sandwich structures will continue to be in demand. In general, sandwich structures consist of two face sheets with a single core between them. The core plays an important role in improving the flexural stiffness of the overall structure, with very little increase in weight.^{1–3} To enhance the structural performance of conventional sandwich structures, the concept of functionally graded materials (FGM), initially proposed by a group of Japanese scientists in 1984–1985 for the production of thermal barrier materials,^{4–9} was utilized to create a new type called a functionally graded (FG) sandwich structure.^{9–16}

Several studies are available in the open literature that have focused on static and dynamic analyses of FG sandwich structures in forms of beams, plates and shells. Karamanli¹⁷ applied a quasi-3D shear deformation theory and the symmetric smoothed particle hydrodynamics (SSPH) method to carry out bending and stress tests in a static analysis of FG sandwich beams. Kahya and Turan¹⁸ utilized a multi-layer finite element approach to carry out a vibration and buckling analysis of FG sandwich beams. In addition, various numerical techniques were applied to vibration and stability analyses of FG sandwich beams in Refs. 19–21. In a one-dimensional curvilinear analysis, the static behavior of curved FG sandwich beams was derived using a sinusoidal beam theory.²² In this study, it was found that the transverse shear stresses became almost the same for straight and curved beams as the radius of curvature of the beams was increased. Demirhan and Taskin²³ carried out a two-dimensional analysis of plates, where the two opposite edges were simply supported and the other edges were arbitrarily supported, and used a Levy-type solution with four variable plate theories to find the bending results. Thai *et al.*²⁴ developed a new first-order shear deformation theory (FSDT) to investigate mechanical problems in FG sandwich plates with different combined boundary conditions. Unlike the previous version of FSDT, this approach could provide accurate results without requiring a shear correction factor. Using the Chebyshev collocation method (CCM), the vibration of FG sandwich plates with different boundary conditions at each edge was accurately solved in an investigation by Tossapanon and Wattanasakulpong.²⁵ There have also been a number of investigations that form useful references for recent developments in the analysis of FG sandwich plates.^{26–31} Some effective methodologies for the analysis of composite shell structures have been presented in the

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ภายในเท่านั้น เมื่อผู้ยืมได้เห็นว่าไม่เหมาะสมหรือเสียหายกรุณา

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

literature (e.g. a unified solution for shallow shells,³² a Rayleigh–Ritz method for cylindrical shells with elastically constrained ends,³³ and an analytical solution for the impact response of cylindrical shells³⁴). A closed-form solution for the thermo-mechanical behavior of FG sandwich shells with double curvature was presented in an investigation by Trinh and Kim,³⁵ and a semi-analytical method was proposed to model the free vibration of doubly curved FG sandwich panels and shells of revolution.³⁶ Rezaiee-Pajand *et al.*³⁷ employed a triangular shell element to discretize FG sandwich plates and shells to determine the nonlinear behavior of these structures under in-plane loading. They found that the reductions in the buckling load and the extension of the unstable part of the equilibrium range were related to a reduction in the elastic modulus of the core. Further analyses of FG sandwich shell structures are also available in Refs. 38–44.

As observed above, most previous studies have focused on structural behavior in terms of the static bending, stability and vibration of FG sandwich structures. One of the most common problems faced in real engineering applications is that structures may be in a condition of dynamic excitation, with moving loads or masses. A number of research studies have explored the action of moving loads or masses on FGM structures. For instance, Şimşek and colleagues investigated the dynamic behavior of FGM beams under the action of a moving load at constant speed, e.g. double-FGM beams,⁴⁵ axial FGM beams,⁴⁶ and Timoshenko FGM beams.⁴⁷ By considering a load moving with a variable speed, Esen⁴⁸ derived finite element solutions for the dynamic response of FGM beams under an accelerating load. Tapered bi-directional FGM beams under moving loads have also been modeled using the boundary-domain integral equation method.⁴⁹ Esmailzadeh and Kadkhodayan⁵⁰ investigated FGM plates and shells under moving loads by using the dynamic relaxation method to analyze stiffened bi-directional FGM plates under a moving load, while Malekzadeh and Monajjemzadeh⁵¹ combined the finite element method with Newmark’s time integration and the Newton–Raphson iteration method to model the nonlinear dynamic response of FGM plates. Song *et al.*⁵² considered the effects of a moving mass on FGM plates, and Malekzadeh and Monajjemzadeh⁵³ included the thermal effects on the dynamic response of FGM plates subjected to moving loads. Although analyses of the dynamic behavior of FGM shells have been carried out in several studies,^{54–57} analyses of FG sandwich structures excited by moving loads are very rare. We found only two recent articles by Songsuwan *et al.*⁵⁸ and Şimşek and Al-shujairi,⁵⁹ who considered FG sandwich beams under one and two moving loads, respectively, using different scenarios and parametric studies.

To fill the gap in the existing research on the dynamic response of FG sandwich plates under multiple moving loads, the present study aims to analyze this response by using the Ritz method in conjunction with the Newmark time-integration method. The admissible displacement functions are created recursively with a Gram–Schmidt procedure. It is worth noting that all of the terms in the admissible functions in the form of Gram–Schmidt polynomials are related to essential boundary

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

conditions. Our models can be adapted to any number of moving loads acting on the plates, and can be used to analyze the free and forced vibration of plates with different combinations of boundary conditions. The accuracy of our results is validated based on some existing results in the literature. New results in relation to the influences of the layer thickness ratio, material composition index, loading velocity etc. are taken into consideration and applied to structural engineering designs.

2. FG Sandwich Plate under Multiple Moving Loads

An FG sandwich plate under multiple moving loads is shown in Fig. 1. The plate consists of three layers, of which the top and bottom layers are face sheets and the layer in the middle forms the core. The geometrical parameters (h, a, b) of the plate are defined as the thickness along the z -axis, the width along the x -axis, and the

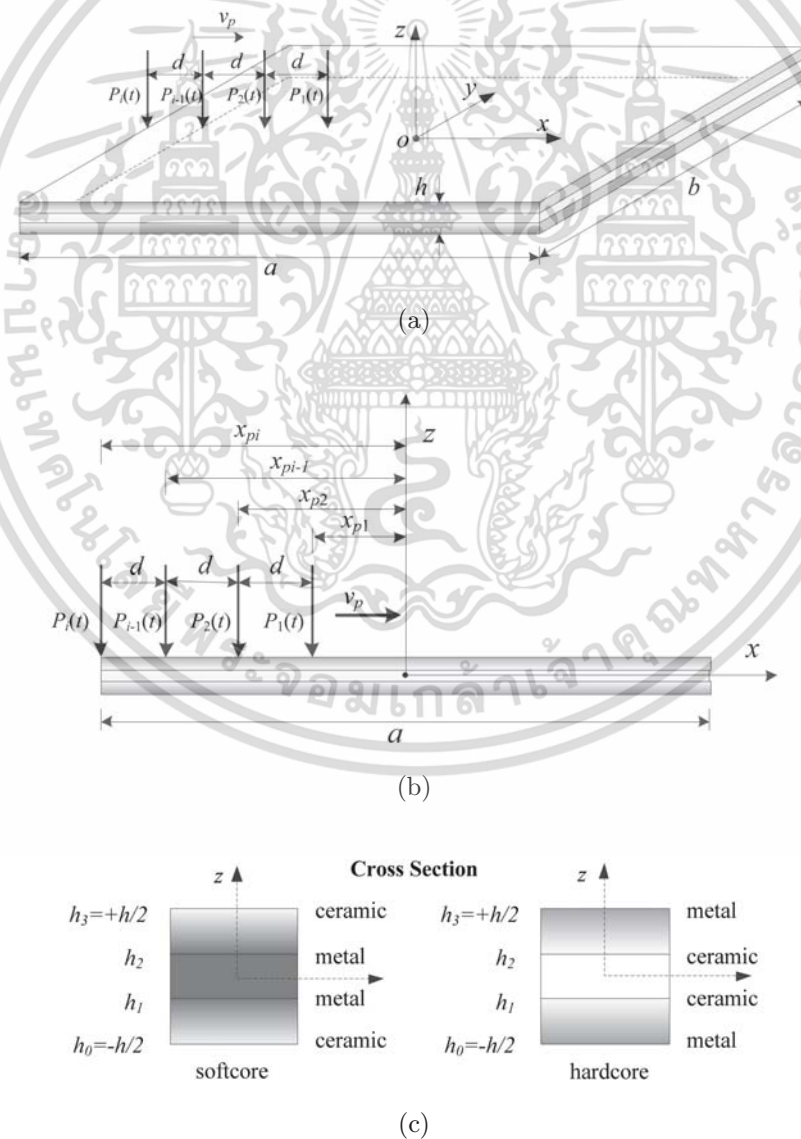


Fig. 1. Geometry and coordinates of an FG sandwich plate under multiple loads $P(t)$ moving with constant velocity (v_p).

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

width along the y -axis, respectively, and the origin of the coordinate system $O(x, y, z)$ is located at the mid-point of the plate, as shown in Fig. 1(a). The plate is subjected to multiple loads ($P_i(t)$) moving along the x -direction with constant velocity (v_p), as shown in Fig. 1(b). There is an equal distance d between the loads. The position of any load on the x -axis is dependent on the velocity and time (t), and can be found using the relation $x_{pi} = [v_p t - (i - 1)d]$.

In addition, we consider two types of FG sandwich plates, with homogeneous soft and hard cores, as depicted in Fig. 1(c). From the figure, it can be seen that the face sheets of both types are made of FG materials, and their ceramic and metal constituents vary smoothly in the direction of the thickness. Since Young's modulus of ceramic is much larger than that of metal, plates with a fully ceramic core are called FG sandwich plates with a homogeneous hard core, while plates with a metal core are known as FG sandwich plates with a homogeneous soft core. It is also assumed that there is perfect bonding at the interfaces between layers, with gradual changes in the material composition; in this way, the problems of de-bonding and stress concentration between layers are eliminated. The reader is referred to the refined zigzag theory, which takes into account the compatibility of deformation between different layers of the sandwich plates.⁶⁰

Under conditions of perfect bonding between the layers of the FG sandwich plates, their material properties in terms of Young's modulus of elasticity (E) and mass density (ρ) can be estimated as follows:

$$E^{(i)}(z) = (E_b - E_t)V_b^{(i)}(z) + E_t, \tag{1a}$$

$$\rho^{(i)}(z) = (\rho_b - \rho_t)V_b^{(i)}(z) + \rho_t. \tag{1b}$$

The value of Poisson's ratio (ν) is assumed to be constant. Note that the subscripts b and t in Eq. (1) refer to the properties at the bottom ($z = h_0 = -h/2$) and top ($z = h_3 = +h/2$) of the plates, respectively. To evaluate the material properties throughout the thickness of the plate, the layer thickness ratio is used, which takes the form of three numerals; for instance, a 1-1-1 layer thickness ratio represents a plate in which each layer has an equal thickness. The heights of each layer of the plate are $h_0 = -h/2$, $h_1 = -h/6$, $h_2 = +h/6$ and $h_3 = +h/2$.

Since the face sheets are made of FG materials, a power law distribution is used to characterize the volume fractions of the material in the top and bottom layers, whereas the middle sheet is a homogeneous core. The relations between the volume fractions can be expressed as follows^{24,25}:

$$\begin{cases} V_b^{(1)}(z) = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0}\right)^{\hat{n}}, & z \in [h_0, h_1], \\ V_b^{(2)}(z) = 1, & z \in [h_1, h_2], \\ V_b^{(3)}(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3}\right)^{\hat{n}}, & z \in [h_2, h_3], \end{cases} \tag{2}$$

where \hat{n} is the material volume fraction index or power law index, $0 \leq \hat{n} \leq \infty$.

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

As stated above, FG sandwich plates with homogeneous soft and hard cores are considered in this study. The material constituents are ceramic and metal phases, and are denoted using the subscripts c and m , respectively. The definitions in Eqs. (1) and (2) can therefore be replaced by $(E_b = E_c, \rho_b = \rho_c)$ and $(E_t = E_m, \rho_t = \rho_m)$ for homogeneous hard core plates and $(E_b = E_m, \rho_b = \rho_m)$ and $(E_t = E_c, \rho_t = \rho_c)$ for homogeneous soft core plates.

3. Mathematical Modeling

In this study, the FSDT, including the effects of shear deformation and rotary inertia, is employed to construct the equations of motion for the free and forced vibration of FG sandwich plates with different types of edge support. In accordance with theory, the displacement field of an arbitrary point on the plate can be written as

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t), \tag{3a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t), \tag{3b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t), \tag{3c}$$

where (u, v, w) are the displacements along the x, y, z -axes and (u_0, v_0, w_0) denote the displacement of a point on the plane $z = 0$. ψ_x and ψ_y are the rotations of a transverse normal about the y - and x -axes, respectively. Based on the displacement field in Eq. (3), the strain components, normal strains $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy})$ and shear strains $(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$, can be expressed as

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \tag{4a}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}, \tag{4b}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \end{Bmatrix}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The expressions for the constitutive relations can be written in the following forms:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{yy}^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^{(i)} \\ \tau_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

in which the elastic components are

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E^{(i)}(z)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E^{(i)}(z)}{1 - \nu^2}, \quad (6a)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = \kappa^{(i)} \frac{E^{(i)}(z)}{2[1 + \nu]}, \quad Q_{66} = \frac{E^{(i)}(z)}{2[1 + \nu]}, \quad (6b)$$

where $\kappa = 5/6$ is a shear correction factor for a layer of homogeneous material, and $\kappa = \frac{5}{6 - (\nu_c V_c + \nu_m V_m)}$ for a layer of FG material in which $V_m = 1 - V_c$. The values V_c and V_m are the material volume fractions of ceramic and metal, respectively. Similarly, ν_c and ν_m are the Poisson's ratios for the ceramic and metal components.

In a Cartesian co-ordinate system, the strain energy (U_s) of FG sandwich plates at any instant is

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz}^{(i)} \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(i)} \gamma_{xz} + \tau_{xy}^{(i)} \gamma_{xy}) dz dx dy. \quad (7)$$

Substituting Eqs. (3)–(5) into Eq. (7) gives us another form of the strain energy equation as follows:

$$\begin{aligned} U_s = & \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} \right. \\ & + 2A_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} + 2B_{11} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2B_{12} \frac{\partial u_o}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ & + 2B_{66} \frac{\partial u_o}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2A_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2A_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} \right)^2 \\ & + A_{66} \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} \right)^2 + 2B_{12} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2B_{22} \frac{\partial v_o}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ & + 2B_{66} \frac{\partial v_o}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + A_{44} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 + 2A_{55} \frac{\partial w_o}{\partial x} \psi_x \\ & + 2A_{44} \frac{\partial w_o}{\partial y} \psi_y + 2B_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial y} + 2B_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ & \left. + 2B_{66} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial x} + 2A_{55} \psi_x \frac{\partial w_o}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \psi_x^2 \right] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &+ D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + 2D_{66} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2B_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\
 &+ 2B_{66} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial u_o}{\partial y} + 2B_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial v_o}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial v_o}{\partial x} + 2A_{44} \psi_y \frac{\partial w_o}{\partial y} \\
 &+ 2D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 2D_{66} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 \\
 &+ A_{44} \psi_y^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \Big] dx dy,
 \end{aligned} \tag{8}$$

where A_{jk}, B_{jk} and $D_{jk} (j, k = 1, 2, 4, 5, 6)$ are the extensional, bending-extensional coupling and bending stiffness components, respectively, and can be obtained from integrating the elastic components of the sandwich plates across the thickness, as follows:

$$[A_{jk}, B_{jk}, D_{jk}] = \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} Q_{jk}[1, z, z^2] dz. \tag{9}$$

To carry out an analysis of the free vibration and dynamic of FG sandwich plates, the kinetic energy is required, and this is expressed as:

$$\begin{aligned}
 U_k &= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + I_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} + I_2 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy,
 \end{aligned} \tag{10}$$

where I_0, I_1 and I_2 are the components of inertia, and can be obtained from the following equation:

$$[I_0, I_1, I_2] = \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)} [1, z, z^2] dz. \tag{11}$$

In our investigation, FG sandwich plates are assumed to be under the action of multiple moving loads along the x -axis. Hence, the work done (U_{ex}) due to these external dynamic loads can be expressed and separated based on the number of moving loads. The work done when a single load moves onto a plate is

$$U_{ex} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_1 = \frac{a}{v_p}, \\ 0 & \text{if } t_1 < t, \end{cases} \tag{12}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and for two loads, the work is

$$U_{\text{ex}} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p}, \\ -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) & \text{if } t_1 \leq t \leq t_2 = \frac{a}{v_p}, \\ -P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) & \text{if } t_2 < t \leq t_1 + t_2, \\ 0 & \text{if } t_1 + t_2 < t. \end{cases} \quad (13)$$

For three loads, the work is

$$U_{\text{ex}} = \begin{cases} -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) & \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p}, \\ -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) & \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p}, \\ -P_1(t)w_0(x_{P1}, 0, t) - P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) - P_3(t)w_0(x_{P3}, 0, t) & \text{if } t_2 \leq t \leq t_3 = \frac{a}{v_p}, \\ -P_2(t)w_0(x_{P2}, 0, t) - P_3(t)w_0(x_{P3}, 0, t) & \text{if } t_3 < t \leq (t_3 + t_1), \\ -P_3(t)w_0(x_{P3}, 0, t) & \text{if } (t_3 + t_1) < t \leq (t_3 + t_2), \\ 0 & \text{if } (t_3 + t_2) < t, \end{cases} \quad (14)$$

where

$$\begin{aligned} P_1(t) &= P_0 \sin(\Omega_1 t + \phi_1), \\ P_2(t) &= P_0 \sin(\Omega_1 t + \phi_2), \\ P_3(t) &= P_0 \sin(\Omega_1 t - \phi_3). \end{aligned} \quad (15)$$

Here, P_0 , v_p and Ω_1 are the magnitude, velocity and excitation frequency of the moving loads, respectively, ϕ_i are the phase angles of the moving loads, and $x_p(t)$ represents the locations of the moving loads at any instant. Using the same technique, the work done by more than three loads moving onto the plates can be calculated.

We can use the expressions for the energy given above to define the total energy (Π) for the plate system as follows:

$$\Pi = U_s - U_k - U_{\text{ex}}. \quad (16)$$

The Ritz method is a popular tool for solving the total energy equation, due to its efficiency and simplicity. The most important aspect when using this method is the choice of appropriate admissible functions that will lead to accurate results with a fast convergence rate. We use the Gram–Schmidt procedure to generate admissible functions in the displacement field, as this creates terms in a polynomial series that satisfy the essential boundary conditions via recursive generation. Rango *et al.*⁶¹

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

reported that the use of the Gram–Schmidt polynomial series with the Ritz method allowed a high spectral accuracy to be achieved and gave faster convergence than other methods such as the Galerkin, finite element and differential quadrature methods. Due to the effectiveness of this method when combined with the Gram–Schmidt polynomial series, it has been extended to investigations of various scenarios and problems (e.g. buckling of skew plates,^{62,63} the dynamic response of shell panels^{64–66} and the vibration of cylindrical and shallow shells^{67,68}).

Our model can be used to estimate the dynamic response of an FG sandwich plate with arbitrary general boundary conditions, including simply supported (S), clamped (C) and free (F) conditions at each edge of the plates. The admissible functions can be written in general form as follows:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n U_{ij}(t) N_i^u(x) N_j^u(y), \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij}(t) N_i^v(x) N_j^v(y), \\
 w_0(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij}(t) N_i^w(x) N_j^w(y), \\
 \psi_x(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}(t) N_i^{\psi_x}(x) N_j^{\psi_x}(y), \\
 \psi_y(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{ij}(t) N_i^{\psi_y}(x) N_j^{\psi_y}(y),
 \end{aligned} \tag{17}$$

where $N_i^\varphi(x), i = 1, 2, 3, \dots, m, N_j^\varphi(y), j = 1, 2, 3, \dots, n$ and $\varphi = u, v, w, \psi_x, \psi_y$ are shape functions that must satisfy at least the essential boundary conditions. The shape functions in our admissible functions are generated using the Gram–Schmidt procedure, using the following equations.

Given a function (polynomial) $N_1(s)$ as an initial term, which must be in accordance with the required boundary conditions, an orthogonal set of functions (polynomial) can be developed over an arbitrary interval $c \leq s \leq d$ using the Gram–Schmidt procedure, as follows:

$$\begin{aligned}
 N_2(s) &= (s - \zeta_2)N_1(s), \\
 N_k(s) &= (s - \zeta_k)N_{k-1}(s) - \eta_k N_{k-2}(s), \quad k \geq 3,
 \end{aligned} \tag{18}$$

where ζ_k and η_k are obtained from:

$$\begin{aligned}
 \zeta_k &= \frac{\int_c^d s N_{k-1}^2(s) ds}{\int_c^d N_{k-1}^2(s) ds}, \quad k \geq 2, \\
 \eta_k &= \frac{\int_c^d s N_{k-1}(s) N_{k-2}(s) ds}{\int_c^d N_{k-2}^2(s) ds}, \quad k \geq 3.
 \end{aligned} \tag{19}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Using the above procedure, the shape functions in both the x - and y -directions, represented by (s) for the important variables u_0, v_0, w_0, ψ_x and ψ_y , can be considered in the problem domains of $-0.5a \leq x \leq 0.5a$ and $-0.5b \leq y \leq 0.5b$ in the integration limits. The generated shape functions are now ready for insertion into the admissible displacement functions in Eq. (17). In the Gram-Schmidt procedure, the recursive expression in Eq. (18) is used to complete the set of orthogonal shape functions, which depend on the choice of the initial term, $N_1(s)$.

Plate analysis generally involves numerous combinations of edge supports. To represent the boundary conditions of the plates, we use a counterclockwise four-character notation, in which the first character represents the boundary condition of edge $x = -0.5a$, and the subsequent characters represent the boundary conditions of the other edges, $y = -0.5b, x = 0.5a$ and $y = 0.5b$, respectively. Since our model can be used to solve for plates with any supports at any of the four edges, the essential or geometrical conditions can be expressed as:

$$\text{Simply supported (S): } \begin{aligned} v_o = w_o = \psi_y = 0 & \text{ at } x = -0.5a \text{ and } +0.5a, \\ u_o = w_o = \psi_x = 0 & \text{ at } y = -0.5b \text{ and } +0.5b, \end{aligned} \tag{20a}$$

$$\text{Clamped (C): } \begin{aligned} u_o = v_o = w_o = \psi_x = \psi_y = 0 & \text{ at } x = -0.5a \text{ and } +0.5a, \\ u_o = v_o = w_o = \psi_x = \psi_y = 0 & \text{ at } y = -0.5b \text{ and } +0.5b, \end{aligned} \tag{20b}$$

$$\text{Free (F): } \begin{aligned} u_o = v_o = w_o = \psi_x = \psi_y \neq 0 & \text{ at } x = -0.5a \text{ and } +0.5a, \\ u_o = v_o = w_o = \psi_x = \psi_y \neq 0 & \text{ at } y = -0.5b \text{ and } +0.5b. \end{aligned} \tag{20c}$$

For brevity, we only give the details of the initial term for each variable, for example for a plate that is simply supported at all edges (SSSS) or clamped at all edges (CCCC), as shown in Table 1. However, if the plates have other types of boundary conditions, the important variables can be determined based on other appropriate functions of the initial term.

Table 1. Initial term in each shape function for FG sandwich plates with different boundary conditions.

B.C.	SSSS	CCCC
$N_1^u(x)$	1	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^u(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^v(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^v(y)$	1	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^w(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^w(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^{\psi_x}(x)$	1	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^{\psi_x}(y)$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$
$N_1^{\psi_y}(x)$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$	$(0.5 + (x/a))(0.5 - (x/a))$
$N_1^{\psi_y}(y)$	1	$(0.5 + (y/b))(0.5 - (y/b))$

เอกสารนี้เป็นเอกสารทบทวนเนื้อหาสำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

These shape functions are expanded to a suitable number of polynomial terms ($n = m = \hat{N}$) as described in the convergence study. By inserting the admissible displacement functions given above into the total potential energy in Eq. (16), and then applying the Lagrange method, the manipulation of the process can be expressed as

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_{ij}} = 0, \tag{21}$$

in which q_{ij} represents the time-dependent unknown parameters ($U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), X_{ij}(t), Y_{ij}(t)$). Equation (21) can be rearranged into a matrix of equations of motion, as follows:

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\psi_x u} & K^{\psi_y u} \\ & K^{vv} & K^{wv} & K^{\psi_x v} & K^{\psi_y v} \\ & & K^{ww} & K^{\psi_x w} & K^{\psi_y w} \\ \text{sym} & & & K^{\psi_x \psi_x} & K^{\psi_y \psi_x} \\ & & & & K^{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\psi_x u} & M^{\psi_y u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\psi_x v} & M^{\psi_y v} \\ & & M^{ww} & M^{\psi_x w} & M^{\psi_y w} \\ \text{sym} & & & M^{\psi_x \psi_x} & M^{\psi_y \psi_x} \\ & & & & M^{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{W} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

where the over-dot represents the derivative with respect to time, \mathbf{K} and \mathbf{M} are the stiffness and mass matrices, respectively, and the size of each matrix is $5(m \times n) \times 5(m \times n)$. \mathbf{F} is the force vector due to the moving loads. The matrix elements in Eq. (22) are given by

$$\begin{aligned} K_{ijmn}^{uu} &= A_{11} P_{im}^{uu11} Q_{jn}^{uu00} + A_{66} P_{im}^{uu00} Q_{jn}^{uu11}, \\ K_{ijmn}^{vu} &= A_{12} P_{im}^{vu01} Q_{jn}^{vu10} + A_{66} P_{im}^{vu10} Q_{jn}^{vu01}, \\ K_{ijmn}^{vv} &= A_{22} P_{im}^{vv00} Q_{jn}^{vv11} + A_{66} P_{im}^{vv11} Q_{jn}^{vv00}, \\ K_{ijmn}^{wu} &= K_{ijmn}^{wv} = 0, \\ K_{ijmn}^{ww} &= A_{44} P_{im}^{ww00} Q_{jn}^{ww11} + A_{55} P_{im}^{ww11} Q_{jn}^{ww00}, \\ K_{ijmn}^{\psi_x u} &= B_{11} P_{im}^{\psi_x u11} Q_{jn}^{\psi_x u00} + B_{66} P_{im}^{\psi_x u00} Q_{jn}^{\psi_x u11}, \\ K_{ijmn}^{\psi_x v} &= B_{12} P_{im}^{\psi_x v10} Q_{jn}^{\psi_x v01} + B_{66} P_{im}^{\psi_x v01} Q_{jn}^{\psi_x v10}, \\ K_{ijmn}^{\psi_x w} &= A_{55} P_{im}^{\psi_x w01} Q_{jn}^{\psi_x w00}, \\ K_{ijmn}^{\psi_x \psi_x} &= D_{11} P_{im}^{\psi_x \psi_x 11} Q_{jn}^{\psi_x \psi_x 00} + A_{55} P_{im}^{\psi_x \psi_x 00} Q_{jn}^{\psi_x \psi_x 00} + D_{66} P_{im}^{\psi_x \psi_x 00} Q_{jn}^{\psi_x \psi_x 11}, \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 K_{ijmn}^{\psi_y u} &= B_{12} P_{im}^{\psi_y u 01} Q_{jn}^{\psi_y u 10} + B_{66} P_{im}^{\psi_y u 10} Q_{jn}^{\psi_y u 01}, \\
 K_{ijmn}^{\psi_y v} &= B_{22} P_{im}^{\psi_y v 00} Q_{jn}^{\psi_y v 11} + B_{66} P_{im}^{\psi_y v 11} Q_{jn}^{\psi_y v 00}, \\
 K_{ijmn}^{\psi_y w} &= A_{44} P_{im}^{\psi_y w 00} Q_{jn}^{\psi_y w 01}, \\
 K_{ijmn}^{\psi_y \psi_x} &= D_{12} P_{im}^{\psi_y \psi_x 01} Q_{jn}^{\psi_y \psi_x 10} + D_{66} P_{im}^{\psi_y \psi_x 10} Q_{jn}^{\psi_y \psi_x 01}, \\
 K_{ijmn}^{\psi_y \psi_y} &= D_{22} P_{im}^{\psi_y \psi_y 00} Q_{jn}^{\psi_y \psi_y 11} + A_{44} P_{im}^{\psi_y \psi_y 00} Q_{jn}^{\psi_y \psi_y 00} + D_{66} P_{im}^{\psi_y \psi_y 11} Q_{jn}^{\psi_y \psi_y 00},
 \end{aligned} \tag{23}$$

and

$$\begin{aligned}
 M_{ijmn}^{uu} &= I_0 P_{im}^{uu 00} Q_{jn}^{uu 00}, \quad M_{ijmn}^{vu} = 0, \quad M_{ijmn}^{vv} = I_0 P_{im}^{vv 00} Q_{jn}^{vv 00}, \\
 M_{ijmn}^{wu} &= 0, \quad M_{ijmn}^{wv} = 0, \quad M_{ijmn}^{ww} = I_0 P_{im}^{ww 00} Q_{jn}^{ww 00}, \\
 M_{ijmn}^{\psi_x u} &= I_1 P_{im}^{\psi_x u 00} Q_{jn}^{\psi_x u 00}, \quad M_{ijmn}^{\psi_x v} = 0, \quad M_{ijmn}^{\psi_x w} = 0, \\
 M_{ijmn}^{\psi_x \psi_x} &= I_2 P_{im}^{\psi_x \psi_x 00} Q_{jn}^{\psi_x \psi_x 00}, \quad M_{ijmn}^{\psi_x \psi_y} = 0, \quad M_{ijmn}^{\psi_y u} = 0, \\
 M_{ijmn}^{\psi_y v} &= I_1 P_{im}^{\psi_y v 00} Q_{jn}^{\psi_y v 00}, \quad M_{ijmn}^{\psi_y w} = 0, \quad M_{ijmn}^{\psi_y \psi_x} = 0, \\
 M_{ijmn}^{\psi_y \psi_y} &= I_2 P_{im}^{\psi_y \psi_y 00} Q_{jn}^{\psi_y \psi_y 00}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Details of the elements in Eqs. (23) and (24) are given in Appendix A.

$$\begin{aligned}
 F_{ij} &= -P_1(t) N_i(x_{p1}) N_j(0) \quad \text{if } 0 \leq t < t_1 = \frac{d}{v_p}, \\
 F_{ij} &= -P_1(t) N_i(x_{p1}) N_j(0) - P_2(t) N_i(x_{p2}) N_j(0) \quad \text{if } t_1 \leq t < t_2 = \frac{2d}{v_p}, \\
 F_{ij} &= -P_1(t) N_i(x_{p1}) N_j(0) - P_2(t) N_i(x_{p2}) N_j(0) - P_3(t) N_i(x_{p3}) N_j(0) \\
 &\quad \text{if } t_2 \leq t < t_3 = \frac{L}{v_p}, \\
 F_{ij} &= -P_2(t) N_i(x_{p2}) N_j(0) - P_3(t) N_i(x_{p3}) N_j(0) \quad \text{if } t_3 \leq t < t_3 + t_1, \\
 F_{ij} &= -P_3(t) N_i(x_{p3}) N_j(0) \quad \text{if } t_3 + t_1 \leq t < t_3 + t_2,
 \end{aligned} \tag{25}$$

A forced vibration analysis of FG sandwich plates under multiple moving loads can be carried out by solving the equations of motion in Eq. (22) in the time domain using Newmark's average acceleration method. Consequently, the displacements, velocities and accelerations of the plates at a given point and time are determined in the time domain relative to the distances and velocities of the moving loads. For example, for a single moving load, the time domain is $0 \leq t \leq a/v_p$.

To allow us to carry out a free vibration analysis of the plates that takes into account the harmonic phenomenon, it is assumed that the unknown vector $[U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), X_{ij}(t), Y_{ij}(t)]^T$ for $i = 1, 2, 3, \dots, m$ and $j = 1, 2, 3, \dots, n$ can be

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

expressed as:

$$\begin{bmatrix} U_{ij}(t) \\ V_{ij}(t) \\ W_{ij}(t) \\ X_{ij}(t) \\ Y_{ij}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij}e^{i\omega t} \\ \bar{V}_{ij}e^{i\omega t} \\ \bar{W}_{ij}e^{i\omega t} \\ \bar{X}_{ij}e^{i\omega t} \\ \bar{Y}_{ij}e^{i\omega t} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

in which $i = \sqrt{-1}$, and ω is the natural frequency in units of rad/s. By substituting Eq. (26) into Eq. (22) without considering a force vector, we can obtain an eigenvalue equation for the free vibration problem as follows:

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{vu} & K^{wu} & K^{\psi_x u} & K^{\psi_y u} \\ & K^{vv} & K^{wv} & K^{\psi_x v} & K^{\psi_y v} \\ & & K^{ww} & K^{\psi_x w} & K^{\psi_y w} \\ \text{sym} & & & K^{\psi_x \psi_x} & K^{\psi_y \psi_x} \\ & & & & K^{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{uu} & M^{vu} & M^{wu} & M^{\psi_x u} & M^{\psi_y u} \\ & M^{vv} & M^{wv} & M^{\psi_x v} & M^{\psi_y v} \\ & & M^{ww} & M^{\psi_x w} & M^{\psi_y w} \\ \text{sym} & & & M^{\psi_x \psi_x} & M^{\psi_y \psi_x} \\ & & & & M^{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \\ \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Solving Eq. (27) as a standard eigenvalue problem leads to a set of natural frequencies for the FG sandwich plates in which the lowest eigenvalue is the fundamental frequency of the plates.

4. Numerical Results and Discussion

Several examples of free and forced vibration analysis of FG sandwich plates under multiple moving loads are presented in this section. Before introducing these examples, we describe the materials used to produce FG sandwich plates. Alumina (Al_2O_3) and aluminium (Al) are chosen as the ceramic and metal constituents, respectively, for the construction of FG sandwich plates with the following material properties: $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0.3$, $\rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$ for Al_2O_3 , and $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.3$, $\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$ for Al.

The geometric parameters of the plate are as follows: $a = 1.0 \text{ m}$, $b = 1.0 \text{ m}$, and h is defined based on the side-to-height ratio (a/h). In the first part of this section, we analyze the free vibration of plates with various edge supports. For convenience, the frequency results of the free vibration are presented in dimensionless form, as follows:

$$\bar{\omega} = (\omega a^2/h) \sqrt{\rho_0/E_0}, \text{ where } E_0 = 1 \text{ GPa and } \rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3.$$

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1. Free vibration

Table 2 shows the results of a convergence study of the free vibration of FG sandwich plates that were simply supported at all edges (SSSS). Plates with a homogeneous soft core and a layer thickness ratio of 1-2-1 are considered here. We found that the results converged to accurate frequencies for all mode sequences, from the first to the sixth, using only $\hat{N} = 10$. The accuracy of our model in terms of the frequency analysis was confirmed by comparing our results with those of Thai *et al.*²⁴ and Tossapanon *et al.*,²⁵ and good agreement could be observed between the results for all mode sequences. Based on this convergence study, the following investigations were computed using 10 terms of the Gram–Schmidt shape functions.

Tables 3 and 4 compare our dimensionless fundamental frequencies for FG sandwich plates with existing results in the literature. Results for plates with a homogeneous hard core are shown in Table 3, while Table 4 shows the results for plates with a homogeneous soft core. The effects of the type of sandwich (symmetrical or asymmetrical) and the boundary conditions (simply supported or clamped) on the vibration of the plates are shown in both tables. For the plates in Table 3 with a homogeneous hard core, those with an asymmetric (2-2-1) layer thickness ratio had larger frequencies than those with a symmetric (2-1-2) layer thickness ratio, since the material composition of 2-2-1 plates is mainly ceramic. In contrast, for the homogeneous soft core plates in Table 4, the proportion of ceramic in the 2-2-1 plates is lower than in the 2-1-2 plates. The material composition can be controlled by varying the volume fraction index (\hat{n}). For example, in the range $\hat{n} \geq 1$, the higher frequencies for the plates in Table 4 result from an increase in \hat{n} . In this example, the plates will have fully ceramic face sheets when \hat{n} approaches infinity. The clamped (CCCC) plates are also much stiffer than the simply supported (SSSS) plates, and as a result, their frequencies are much higher. In both tables, the accuracy of our results is confirmed through a comparison with previous results reported in Refs. 24 and 25.

Table 2. Convergence study of the free vibration of simply supported FG sandwich plates ($a/h = 10$, $\hat{n} = 2$).

\hat{N}	Mode sequence					
	1	2	3	4	5	6
3	1.3785	3.7079	5.5302	8.9123	11.4082	14.0083
4	1.3011	3.6788	5.5302	7.8239	8.0469	11.0637
5	1.3011	3.1558	4.8979	7.8239	7.9399	11.0637
6	1.3009	3.1556	4.8976	6.0696	7.6531	10.1839
7	1.3009	3.1473	4.8866	6.0684	7.6474	9.9056
8	1.3009	3.1473	4.8866	5.9956	7.5898	9.8975
9	1.3009	3.1473	4.8865	5.9956	7.5898	9.6142
10	1.3009	3.1473	4.8865	5.9946	7.5890	9.6140
Ref. 24	1.3023	3.1563	4.9079	6.0262	7.6384	9.6811
Ref. 25	1.3009	3.1473	4.8865	5.9945	7.5890	9.6046

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอน ไม่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 3. Comparison of dimensionless fundamental frequencies, $\bar{\omega} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho_0/E_0}$, for FG sandwich plates ($a/h = 10$).

B.C.	Source	$\hat{n} = 0$	$\hat{n} = 0.5$	$\hat{n} = 1$	$\hat{n} = 2$	$\hat{n} = 5$	$\hat{n} = 10$
2-1-2 layer thickness ratio (hard core)							
SSSS	Present	1.8263	1.4830	1.2985	1.1205	0.9796	0.9405
	Ref. 25	1.8244	1.4829	1.2985	1.1205	0.9796	0.9405
	Ref. 24	1.8244	1.4841	1.3000	1.1218	0.9796	0.9390
CCCC	Present	3.1226	2.5681	2.2637	1.9652	1.7236	1.6541
	Ref. 25	3.1123	2.5680	2.2636	1.9650	1.7235	1.6540
	Ref. 24	3.2936	2.7099	2.3864	2.0680	1.8064	1.7268
2-2-1 layer thickness ratio (hard core)							
SSSS	Present	1.8259	1.5463	1.3943	1.2422	1.1071	1.0591
	Ref. 25	1.8244	1.5462	1.3942	1.2420	1.1065	1.0584
	Ref. 24	1.8244	1.5471	1.3956	1.2436	1.1077	1.0587
CCCC	Present	3.1202	2.6716	2.4235	2.1719	1.9446	1.8625
	Ref. 25	3.1123	2.6715	2.4233	2.1715	1.9441	1.8619
	Ref. 24	3.2936	2.8199	2.5556	2.2868	2.0415	1.9497

Table 4. Comparison of dimensionless fundamental frequencies, $\bar{\omega} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho_0/E_0}$, for FG sandwich plates ($a/h = 10$).

B.C.	Source	$\hat{n} = 0$	$\hat{n} = 0.5$	$\hat{n} = 1$	$\hat{n} = 2$	$\hat{n} = 5$	$\hat{n} = 10$
2-1-2 layer thickness ratio (soft core)							
SSSS	Present	0.9296	1.5531	1.7140	1.8156	1.8651	1.8711
	Ref. 25	0.9295	1.5531	1.7139	1.8157	1.8651	1.8712
CCCC	Present	1.5894	2.5968	2.8648	3.0420	3.1393	3.1581
	Ref. 25	1.5894	2.5967	2.8646	3.0420	3.1392	3.1581
2-2-1 layer thickness ratio (soft core)							
SSSS	Present	0.9293	1.4572	1.6078	1.7146	1.7831	1.8022
	Ref. 25	0.9294	1.4571	1.6076	1.7143	1.7829	1.8020
CCCC	Present	1.5882	2.4366	2.6842	2.8648	2.9874	3.0248
	Ref. 25	1.5881	2.4364	2.6841	2.8646	2.9871	3.0246

We extend our model to plates with different combinations of boundary conditions, and Tables 5 and 6 show the results of similar investigations in which we varied \hat{n} and considered plates with different materials in the core layer. Some results from Ref. 25 are used for validation, and new results for some types of boundary conditions are also presented that can provide future benchmarking solutions. It can be seen that the boundary conditions significantly affect the variation in the natural frequencies of the plates. The cantilever plate (in which one edge is clamped and the others are free) has the lowest frequency compared to the other plates, since it has fewer constraints.

Figure 2 shows the normalized mode shapes for FG sandwich plates that are simply supported at all edges (SSSS). The mode shapes are shown for four different modes of vibration, for plates with a homogeneous soft core with a layer thickness ratio of 2-1-2. Similarly, Fig. 3 shows the normalized fundamental mode shapes for

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 5. Comparison of dimensionless fundamental frequencies, $\bar{\omega} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho_0/E_0}$, for FG sandwich plates ($a/h = 10$).

B.C.	Source	$\hat{n} = 0$	$\hat{n} = 0.5$	$\hat{n} = 1$	$\hat{n} = 2$	$\hat{n} = 5$	$\hat{n} = 10$
1-2-1 layer thickness ratio (hard core)							
CFFF	Present	0.3284	0.2820	0.2573	0.2323	0.2090	0.1998
	Ref. 25	0.3285	0.2821	0.2573	N/A	0.2090	0.1998
CSSS	Present	2.1449	1.8548	1.6979	1.5386	1.3884	1.3288
	Ref. 25	2.1425	1.8548	1.6979	N/A	1.3884	1.3287
CFSC	Present	1.5923	1.3764	1.2597	1.1413	1.0298	0.9855
CFFC	Present	0.6390	0.5505	0.5030	0.4550	0.4100	0.3922
CFCC	Present	2.1177	1.8384	1.6864	1.5314	1.3846	1.3260
CCSS	Present	2.4228	2.0994	1.9239	1.7453	1.5765	1.5092
2-2-1 layer thickness ratio (hard core)							
CFFF	Present	0.3284	0.2771	0.2494	0.2218	0.1974	0.1888
CSSS	Present	2.1453	1.8230	1.6469	1.4699	1.3118	1.2554
CFSC	Present	1.5926	1.3528	1.2218	1.0904	0.9731	0.9312
CFFC	Present	0.6391	0.5410	0.4877	0.4345	0.3873	0.3706
CFCC	Present	2.1184	1.8076	1.6366	1.4640	1.3090	1.2533
CCSS	Present	2.4235	2.0638	1.8666	1.6679	1.4899	1.4261

Table 6. Comparison of dimensionless fundamental frequencies, $\bar{\omega} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho_0/E_0}$, for FG sandwich plates ($a/h = 10$).

B.C.	Source	$\hat{n} = 0$	$\hat{n} = 0.5$	$\hat{n} = 1$	$\hat{n} = 2$	$\hat{n} = 5$	$\hat{n} = 10$
1-2-1 layer thickness ratio (soft core)							
CFFF	Present	0.1671	0.2612	0.2903	0.3118	0.3267	0.3314
	Ref. 25	0.1672	0.2612	0.2902	N/A	0.3266	0.3314
CSSS	Present	1.0917	1.6775	1.8592	1.9960	2.0933	2.1248
	Ref. 25	1.0917	1.6775	1.8592	N/A	2.0934	2.1248
CFSC	Present	0.8105	1.2467	1.3820	1.4838	1.5561	1.5794
CFFC	Present	0.3253	0.5046	0.5601	0.6016	0.6306	0.6397
CFCC	Present	1.0779	1.6404	1.8157	1.9488	2.0449	2.0766
CCSS	Present	1.2332	1.8856	2.0883	2.2416	2.3515	2.3874
2-2-1 layer thickness ratio (soft core)							
CFFF	Present	0.1672	0.2642	0.2917	0.3110	0.3231	0.3263
CSSS	Present	1.0919	1.7003	1.8751	2.0001	2.0819	2.1054
CFSC	Present	0.8106	1.2635	1.3936	1.4865	1.5470	1.5644
CFFC	Present	0.3253	0.5108	0.5637	0.6012	0.6251	0.6317
CFCC	Present	1.0782	1.6652	1.8353	1.9583	2.0405	2.0650
CCSS	Present	1.2335	1.9125	2.1085	2.2494	2.3426	2.3699

1-2-1 homogeneous soft core plates with six different combinations of boundary conditions. It can be observed that the mode shapes for all configurations agree well with the specifications for each type of boundary condition at each edge.

4.2. Forced vibration

We now turn our attention to a forced vibration analysis. In this section, we begin with a numerical validation of the forced vibration of plates subjected to a moving

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

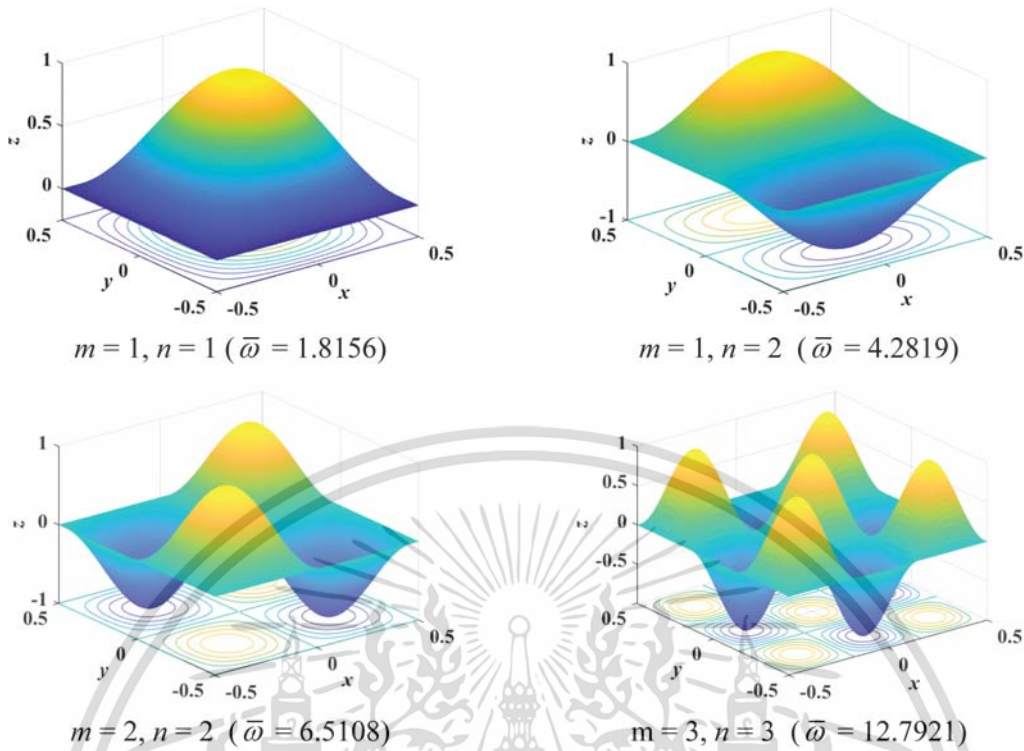


Fig. 2. Normalized mode shapes for simply supported FG sandwich plates ($\hat{n} = 2, a/h = 10$).

load. Since no forced vibration results are available in the literature for FG sandwich plates, our model can be simplified to isotropic plates by setting the material volume fraction index to zero ($\hat{n} = 0$) for homogeneous soft core plates. Our results can then be validated by comparison with the results from an analytical model⁶⁹ of SSSS isotropic plates under a moving load. This analytical model is given below:

$$w(x, y, t) = \left(\frac{4P_o}{ab}\right) \sum_{n=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_x} a_{mn} \left[\sin(\omega_m t) - \left(\frac{\omega_m}{\omega_{mn}}\right) \sin(\omega_{mn} t) \right] \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{28}$$

where

$$a_{mn} = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(D_{mn} - \rho h \omega_m^2)} \omega_{mn} = \sqrt{\frac{D_{mn}}{\rho h}} \text{ and } \omega_m = \frac{m\pi v_p}{a} D_{mn} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2.$$

The model in Eq. (28) is used to calculate the behavior of an aluminium plate with material properties $E = 70.0 \text{ GPa}$ and $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$. A single load travels on the plate along the path $y(t) = 0$ with constant velocity v_p (i.e. v_p is the velocity of the moving load along the x -axis), and the number of time steps is set to 400 in each case. It can be seen from Fig. 4 that there is very good agreement between the proposed and analytical solutions.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

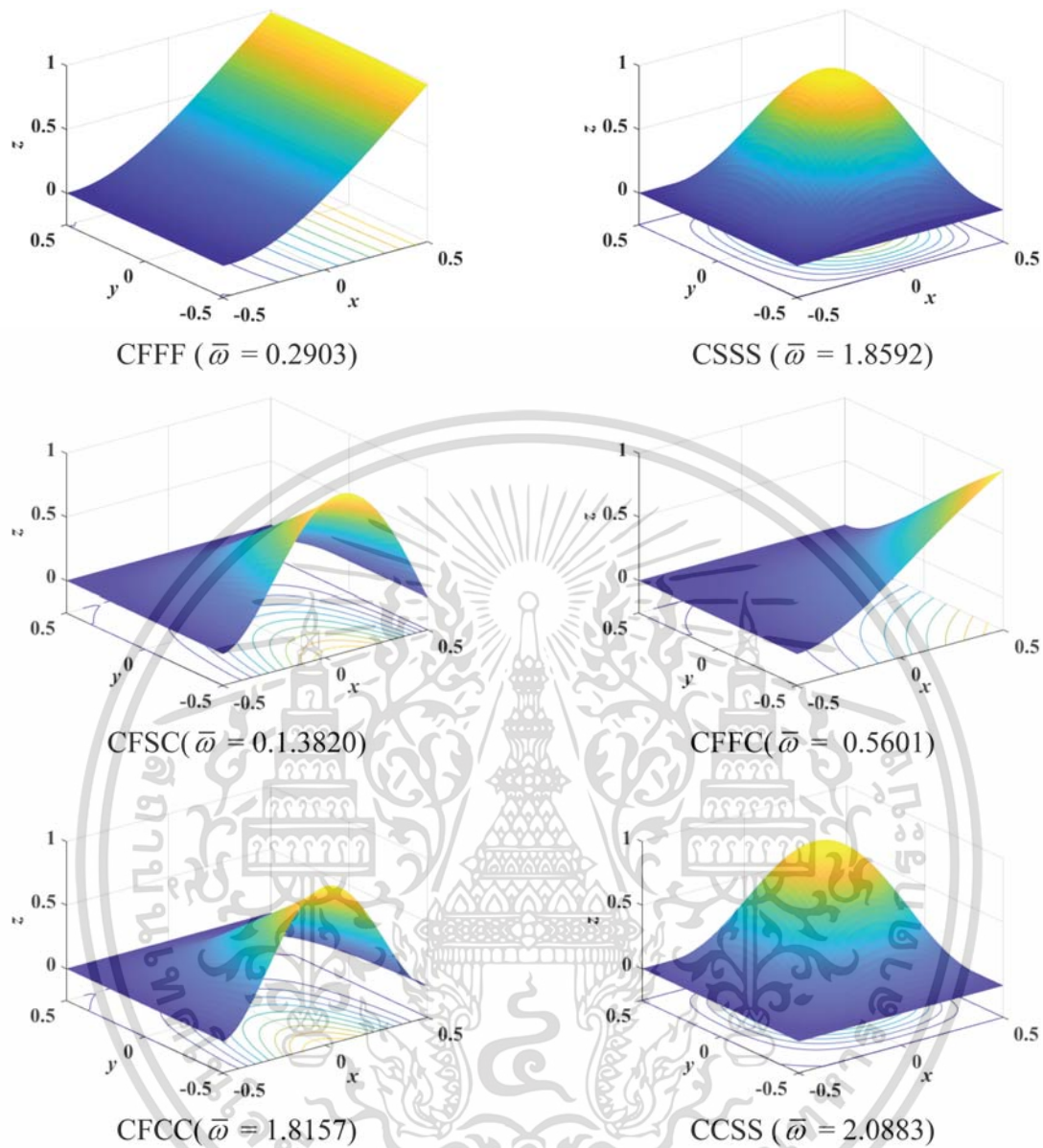


Fig. 3. Normalized fundamental mode shapes for FG sandwich plates with different combinations of boundary conditions ($\hat{n} = 1, a/h = 10$).

After validation based on a forced vibration analysis, the proposed model was extended to reflect the dynamic behavior of FG sandwich plates subjected to an arbitrary number of moving loads. The most significant parameters, such as the velocity, phase angle and excitation frequencies of the moving loads, the layer thickness ratio and the boundary conditions, were taken into consideration. In order to ensure that the results were universal, a dimensionless form of the dynamic deflection was derived by normalization based on the static deflection ($D = a^2 P_0 / E_m h^3$) of a fully aluminium plate under a single point load P_0 at the center of the plate.⁶² The magnitude of the moving and static loads (P_0) was set to $P_0 = 500$ kN in each case.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

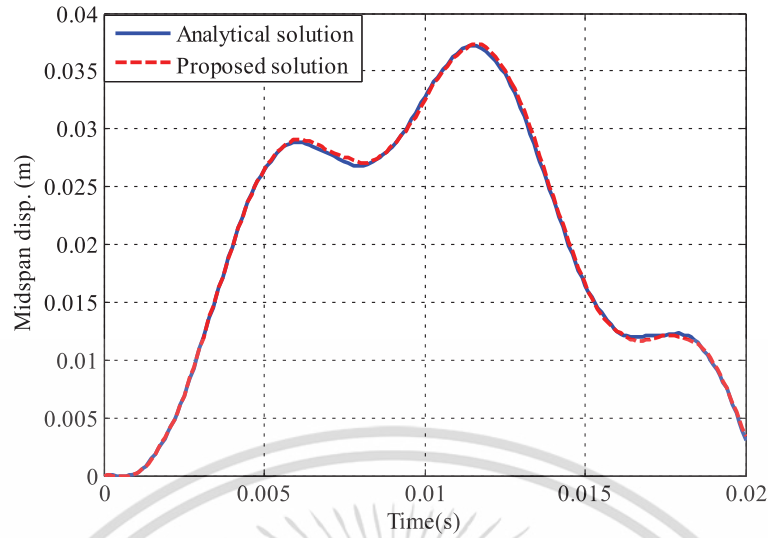


Fig. 4. Comparison of the central deflections of isotropic plates ($a = 1\text{ m}$, $b = 1\text{ m}$, $h = 0.03\text{ m}$, $v_p = 50\text{ m/s}$).

Figure 5 contains a plot of the dimensionless dynamic deflections ($w(x, t)/D$) versus the normalized time ($t^* = x_p/a = v_p t/a$) for FG sandwich plates with a homogeneous soft core and SSSS boundary conditions. It can be seen that the plate with a layer thickness ratio of 3-2-1 (the plate with the lowest percentage of the ceramic phase) is highly flexible and yields the largest deflection, while the 1-0-1 plate with the highest percentage of the ceramic phase is quite strong and has the smallest deflection. Although the 3-2-1 plate exhibits the largest deflection over the majority of the time period, this drops dramatically just before the moving load leaves the plate. This phenomenon occurs due to boundary constraints that the larger deflection needs to be zero faster.

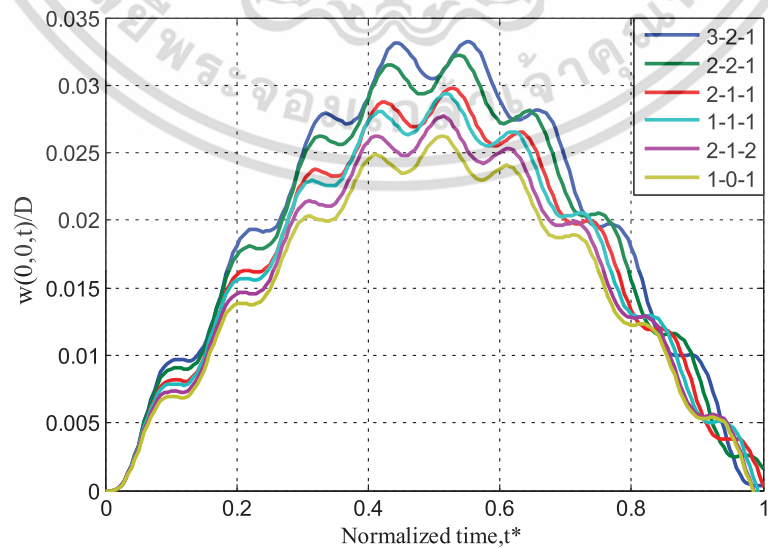


Fig. 5. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates under a single moving load ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50\text{ m/s}$, $\Omega_i = 0$).

ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

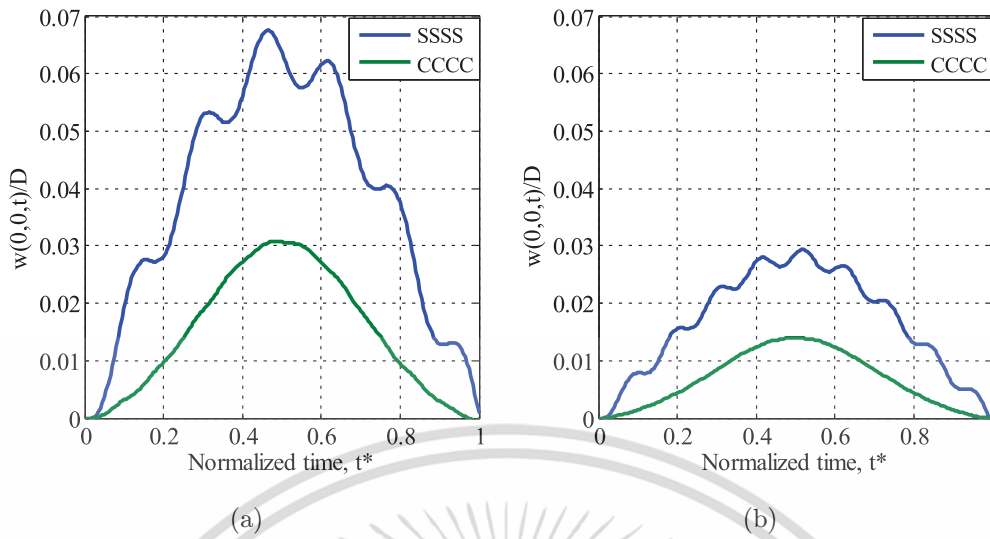


Fig. 6. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates under a single moving load, with different boundary conditions: (a) homogeneous hard core; (b) homogeneous soft core ($a/h = 20, \hat{n} = 2, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).

Figure 6 shows the dynamic deflections of FG sandwich plates under a single moving load, with a 1-1-1 layer thickness ratio and SSSS and CCCC boundary conditions. Deflection results for plates with homogeneous hard and soft cores are shown in Figs. 6(a) and 6(b), respectively. Due to the constraints of the clamped supports, the dynamic deflection of the CCCC plate is much lower than that of the SSSS plate throughout the time domain.

To illustrate the effect of the material volume fraction index (\hat{n}) on the dynamic deflection, Fig. 7 shows a plot of the deflections of FG sandwich plates against the

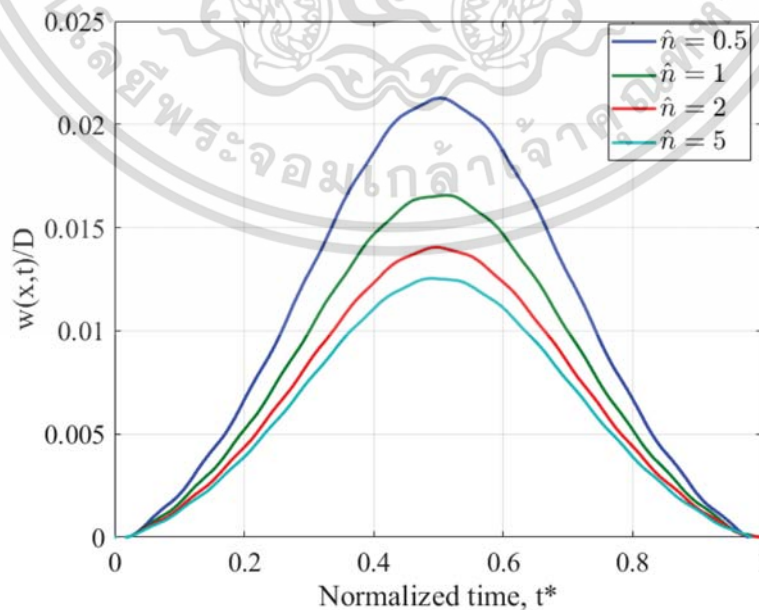


Fig. 7. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates under a single moving load, with different values of the material volume fraction index ($a/h = 20, v_p = 50 \text{ m/s}, \Omega_i = 0$).

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

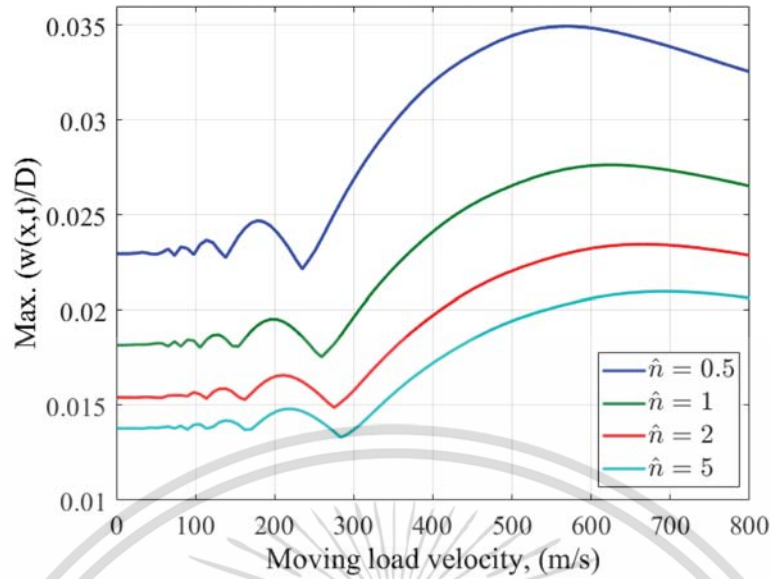


Fig. 8. Dimensionless maximum dynamic deflections of FG sandwich plates under a single moving load, for different material volume fraction indices ($a/h = 20, \Omega_i = 0$).

normalized time (t^*). In this figure, 1-1-1 plates with homogeneous soft cores are used to illustrate the effect of \hat{n} on plates under the action of a single moving load and with a CCCC boundary condition. The results show that increasing the value of \hat{n} causes a decrease in the dynamic deflection. This is due to the increase in the proportion of the ceramic phase in the face sheets that occurs when the value of \hat{n} is increased.

Figure 8 shows the maximum dynamic deflections of FG sandwich plates, clamped at all edges, under a single load moving with varying velocity. Different values of the material volume fraction index (\hat{n}) are considered for 2-2-1 plates with a homogeneous soft core. It can be seen that the dynamic deflection initially fluctuates before increasing sharply to reach a peak at the critical velocity. The deflection also decreases with an increase in the material volume fraction index. This is because the proportion of the ceramic phase decreases in this case as the index increases.

In order to highlight the two continuous regions of forced vibration ($0 \leq t^* \leq 1$) and free vibration ($t^* > 1$) in which the moving load leaves the plates, Fig. 9 illustrates the dynamic behavior of FG sandwich plates under a single moving load. This figure shows the results for homogeneous soft core plates with a layer thickness ratio of 2-1-2, with both CCCC and SSSS boundary conditions. The amplitudes are mostly related to the effects of the boundary conditions for all considered regions, and the highly constrained clamped plate has a smaller and smoother amplitude than a simply supported plate.

We now consider the action of three loads moving onto FG sandwich plates. Figure 10 shows the dimensionless dynamic deflections of 1-1-1 plates with a homogeneous soft core and SSSS boundary conditions. The first load is applied at the starting point at the left edge of the plates ($t = 0$), and the second and third loads are then applied at the starting point at $t = d/v_p$, $t = 2d/v_p$, respectively. At $t = a/v_p$,

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

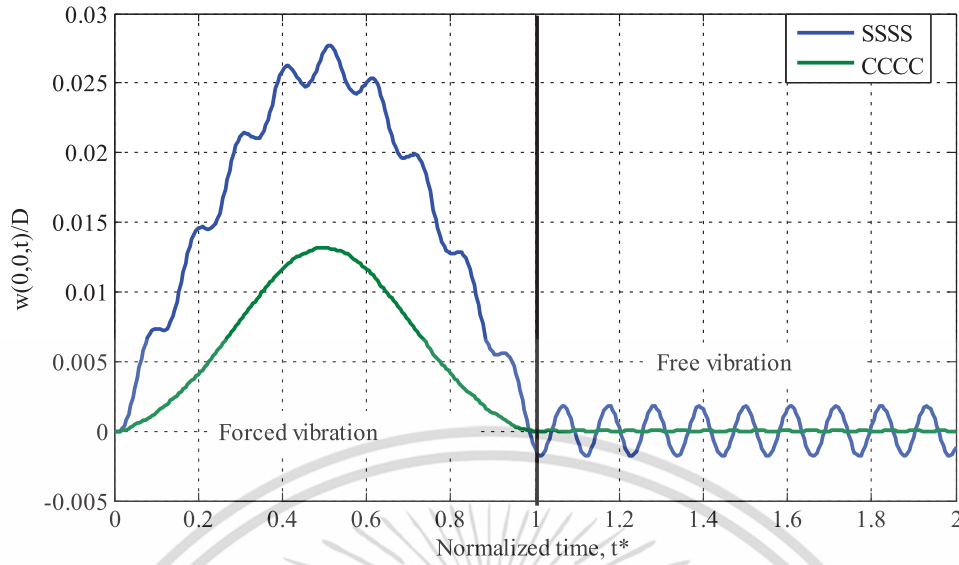


Fig. 9. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega_i = 0$).

the first load leaves the plate, and the second and third loads leave the plates at $t = (a + d)/v_p$ and $t = (a + 2d)/v_p$, respectively. Since each load has the same magnitude, an increase in the number of moving loads leads to a considerable increase in the dynamic deflection, as the total loading magnitude is correspondingly higher.

Figure 11 contains a plot of the dynamic deflections versus the velocity (v_p) of moving loads for (1-1-1) FG sandwich plates with a homogeneous hard core that are simply supported at all edges. The change in the deflection due to an increase in velocity is similar for all plates subjected to different numbers of loads; that is, the maximum deflection initially increases and fluctuates, and then dramatically

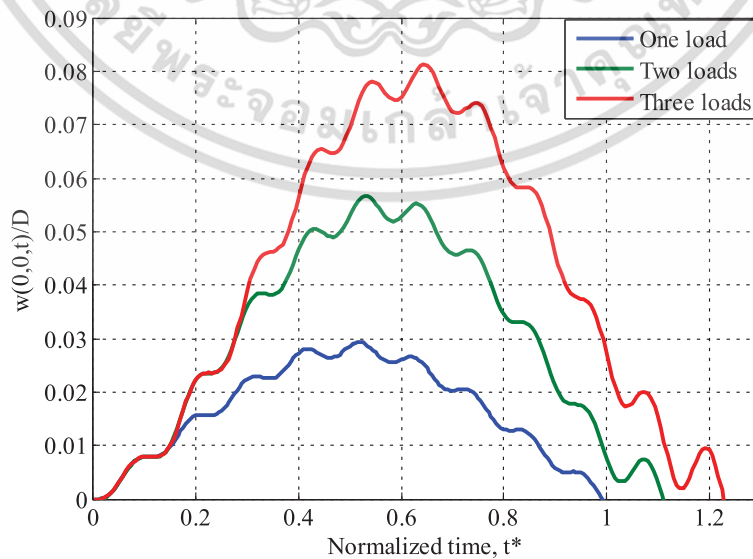


Fig. 10. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates with different numbers of moving loads ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50$ m/s, $d = a/8$, $\Omega_i = 0$)

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

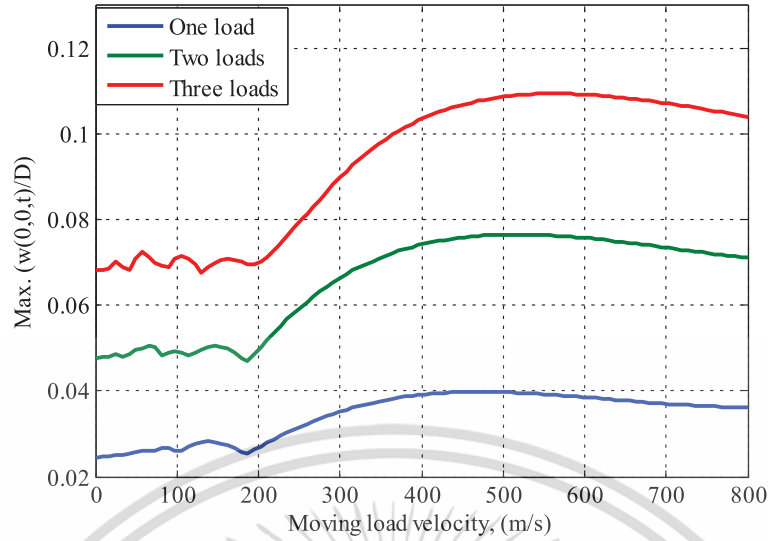


Fig. 11. Dimensionless maximum dynamic deflections of FG sandwich plates with different numbers of moving loads ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50$ m/s, $d = a/8$, $\Omega_i = 0$).

increases to reach its peak value before dropping again. The velocity at the peak is known as the critical velocity.

In Fig. 12, the dynamic deflections of 1-1-1 plates with a homogeneous soft core are considered for varying velocities. The plates are clamped at all edges and are subjected to two moving loads with different values of the equivalent distance (d). It can be observed that a short distance ($d = a/8$) between loads causes the deflection to be larger than for longer distances ($d = a/4$ and $d = a/6$).

To highlight the effect of the material volume fraction index (\hat{n}) on the maximum dynamic deflection, Fig. 13 shows plots of the deflections of FG sandwich plates for varying values of \hat{n} . The figure shows results for 2-1-2 plates with homogeneous soft cores, simply supported at all edges and acted on by different numbers of moving

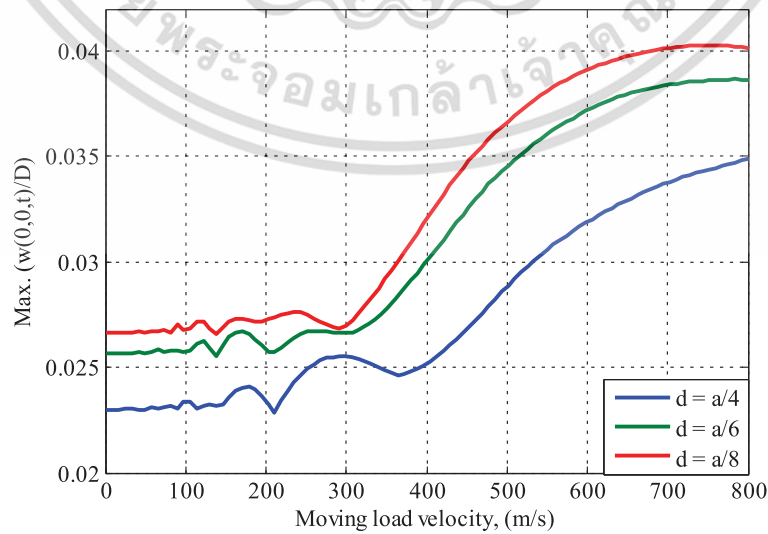


Fig. 12. Dimensionless maximum dynamic deflections of FG sandwich plates under two moving loads ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega_i = 0$).

งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

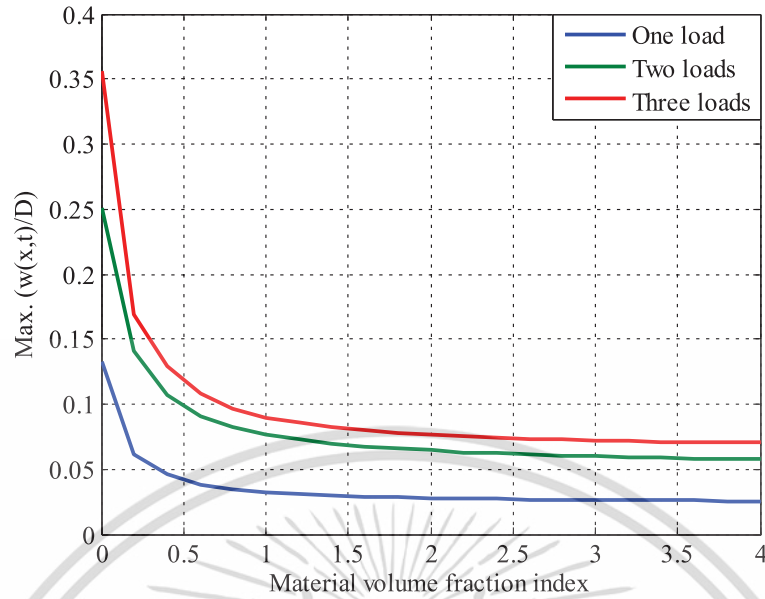
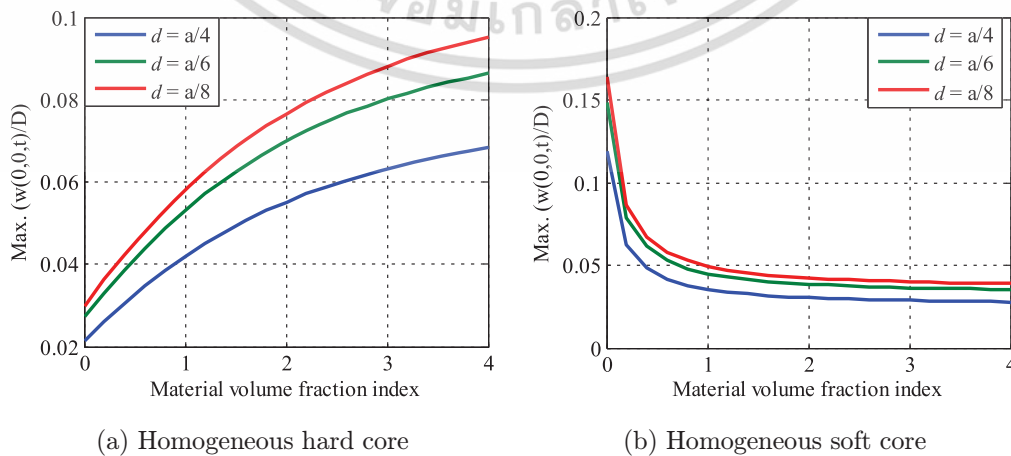


Fig. 13. Dimensionless maximum dynamic deflections of FG sandwich plates under different numbers of moving loads ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50$ m/s, $d = a/8$, $\Omega_i = 0$).

loads. It was found that increasing the value of \hat{n} yields a decrease in the deflection. Figure 14 shows the dynamic deflections of 3-2-1 plates with CCCC boundary conditions, for varying values of \hat{n} . As shown in Figs. 14(a) and 14(b), the deflections of the plates with a homogeneous hard core increased with an increase in the value of \hat{n} , and the reverse effect is seen for the plates with a homogeneous soft core. These phenomena arise due to the changes in the proportion of ceramic in the plates: a reduction in the total proportion of the ceramic phase causes the deflection to increase, whereas an increase in the ceramic phase causes the structures to be stronger, with less deflection.

Figure 15 illustrates the dynamic deflections of 3-2-1 plates with a homogeneous hard core (Fig. 15(a)) and a homogeneous soft core (Fig. 15(b)), under three moving



(a) Homogeneous hard core

(b) Homogeneous soft core

Fig. 14. Effect of material volume fraction index (\hat{n}) on the maximum dynamic deflections of FG sandwich plates under three moving loads ($a/h = 20$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega_i = 0$).

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

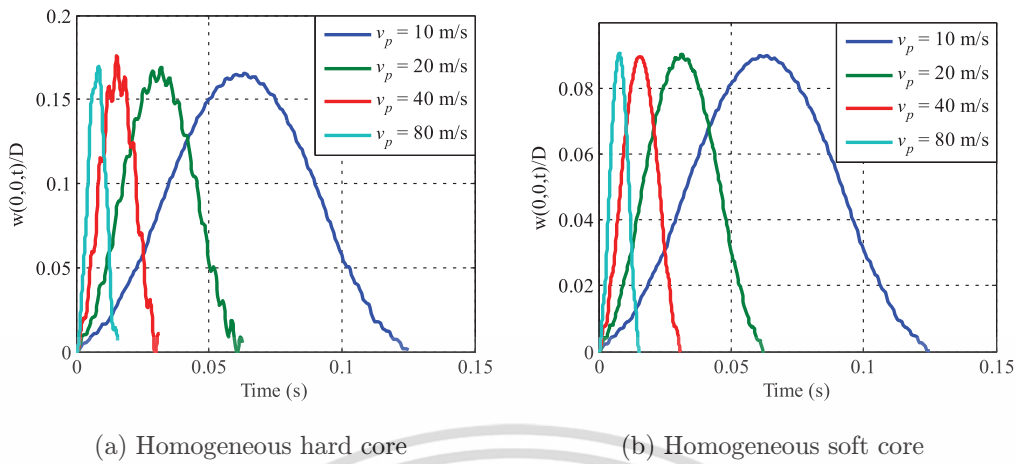


Fig. 15. Dimensionless dynamic deflections at the center of FG sandwich plates under three moving loads ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $d = a/8$, $\Omega_i = 0$).

loads with different velocities. The boundary conditions of the plates are SSSS. It can be seen that the peak in the deflections is similar for all values of the velocity. The differences lie in the time period of loading, since the loads travel on the plates for longer at lower velocities.

The investigations presented above did not consider any excitation frequency of the moving loads ($\Omega_i = 0$). The following experiments will therefore take into account the significant effect of external excitation on the dynamic behavior of FG sandwich plates. The excitation frequency of each load was set based on the resonance, i.e. the frequency of each load was equivalent to the fundamental frequency of the plate ($\Omega_i \Rightarrow \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \omega_1$). In general, when a structure is in a resonant situation, serious damage or very large deformation may arise, since the system will

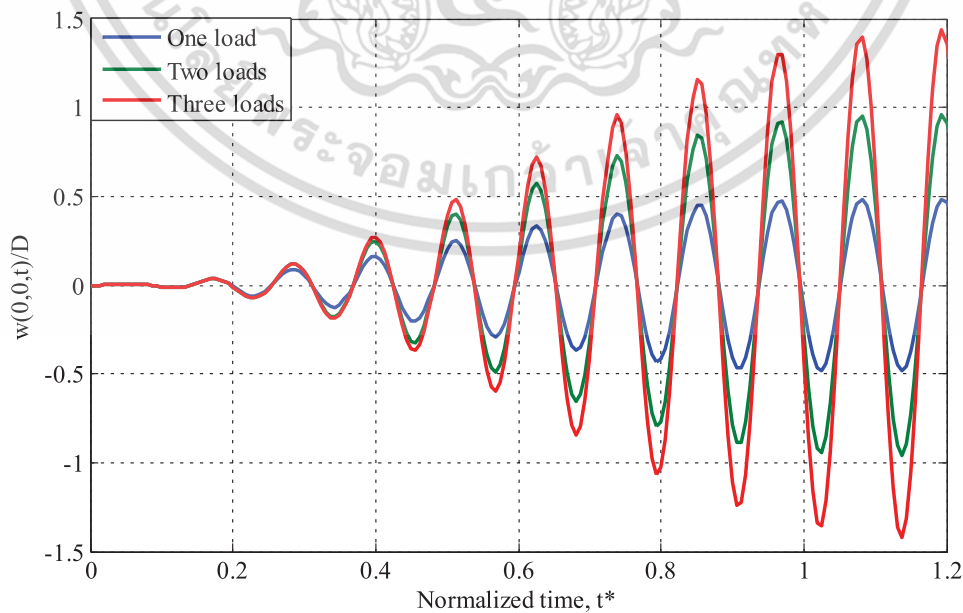


Fig. 16. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates with different numbers of moving loads ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50$ m/s, $d = a/8$, $\Omega_i = \omega_1$).

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

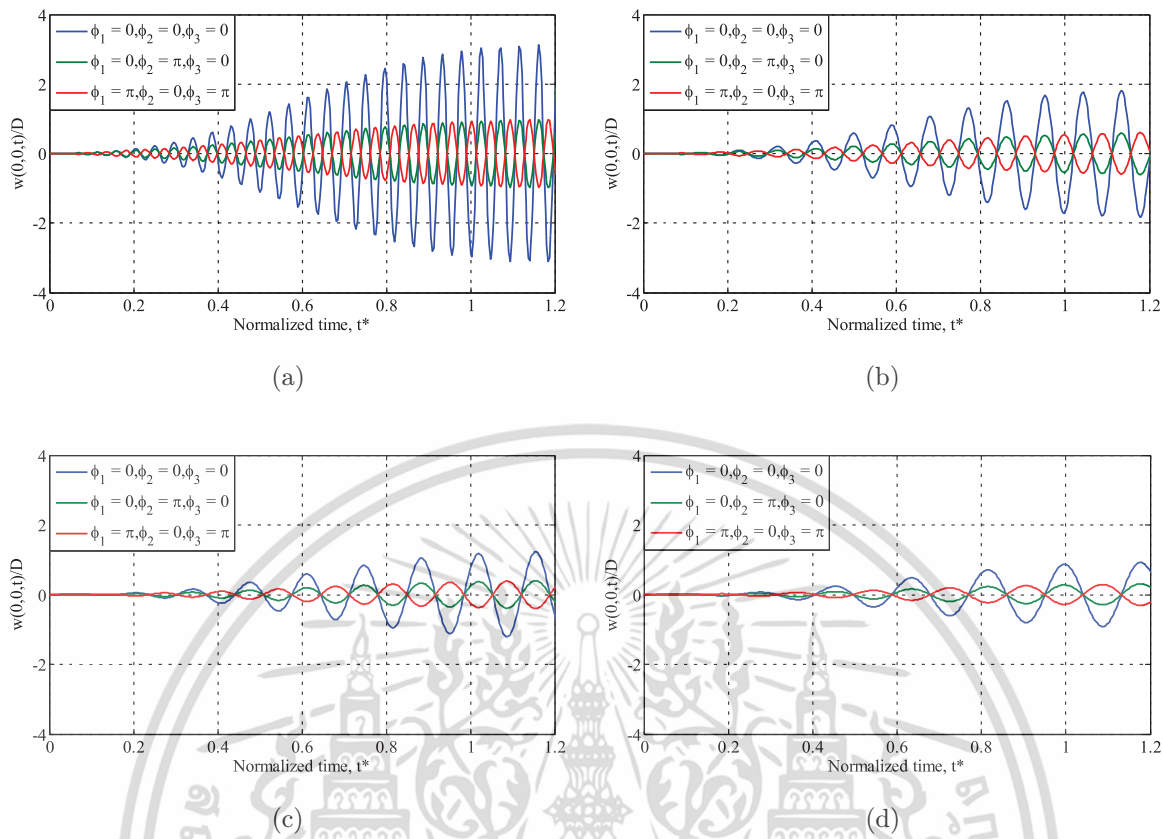


Fig. 17. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates under three moving loads: (a) $v_p = 20$ m/s, (b) $v_p = 40$ m/s, (c) $v_p = 60$ m/s, (d) $v_p = 80$ m/s ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $d = a/8$, $\Omega_i = \omega_1$).

oscillate at a higher amplitude than when the same load is applied at a non-resonant frequency. Figure 16 shows the effect of excitation frequency on the dynamic deflections of 2-2-1 plates with a homogeneous soft core and an SSSS boundary condition. It can be observed that the deflections grow dramatically as the time approaches infinity.

We investigated the effect of the phase angles ϕ_i of the moving loads on the dynamic response of 2-2-1 plates with a homogeneous soft core and SSSS boundary conditions, and Fig. 17 shows the dynamic deflections of these plates with different values of velocity. It can be seen that the phase angles can be used to reduce the deflection of the plates. The deflections of plates with zero phase angles ($\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$) were much higher than those of plates with ($\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi, \phi_3 = 0$) and ($\phi_1 = \pi, \phi_2 = 0, \phi_3 = \pi$). The plates used in Fig. 17 are shown again in Fig. 18 for varying values of the equivalent distance (d).

Figures 19 and 20 show results for plates with a homogeneous soft core subjected to three moving loads in a situation of resonance, and the significant effect of the phase angles ($\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi, \phi_3 = 0$) can be observed. It can be seen from Fig. 19 that there is a lower dynamic response from 2-2-1 plates with SSSS boundary conditions than for CCCC boundary conditions. Results for FG sandwich plates with various layer thickness ratios under SSSS boundary conditions are shown in Fig. 20.

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

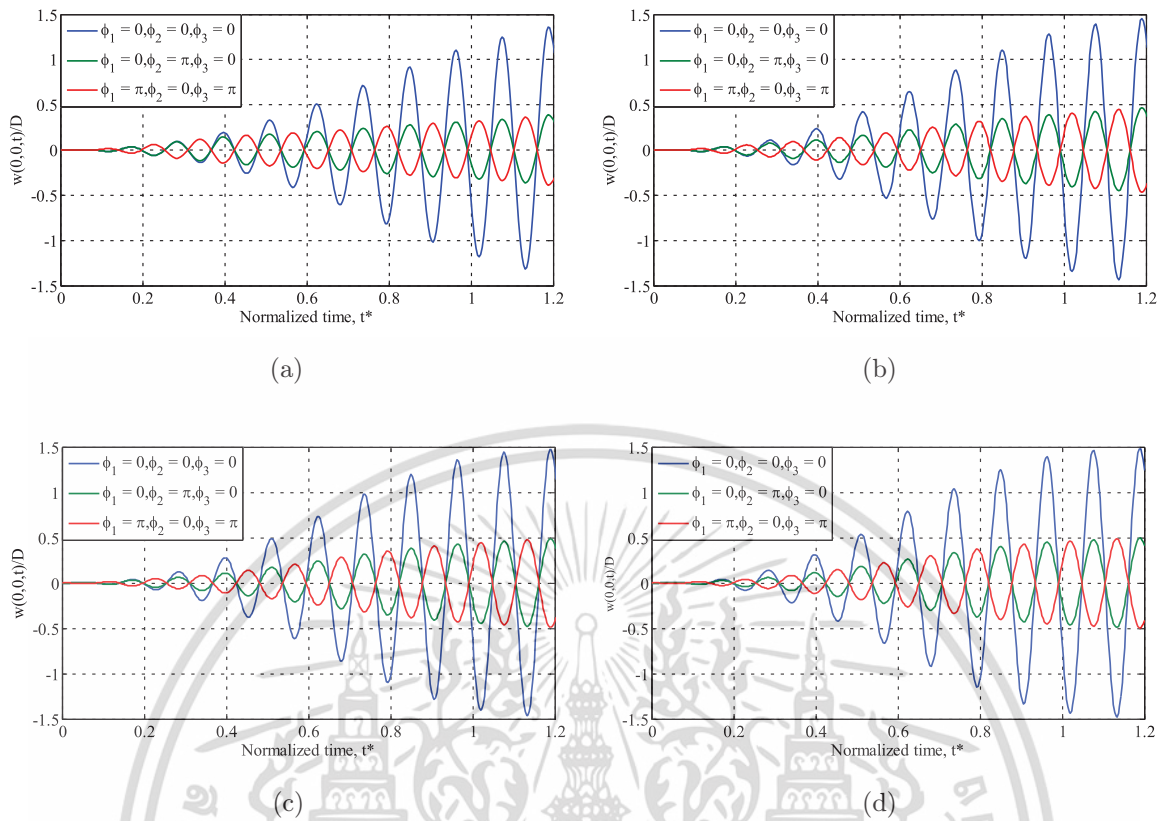


Fig. 18. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates under three moving loads: (a) $d = a/4$, (b) $d = a/6$, (c) $d = a/8$, (d) $d = a/10$ ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega_i = \omega_1$).

From this figure, it can be seen that the different layer thickness ratios affect the dynamic response of the plates only slightly in comparison with the other effects studied here, and the dynamic deflections in all cases are relatively similar to each other throughout the travelling time.

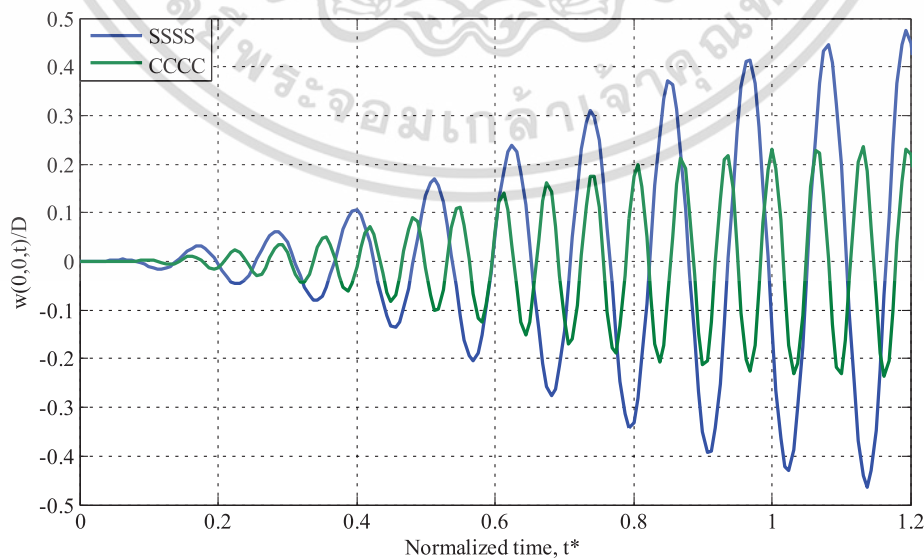


Fig. 19. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates with different boundary conditions ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $d = a/8$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega_i = \omega_1$).

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

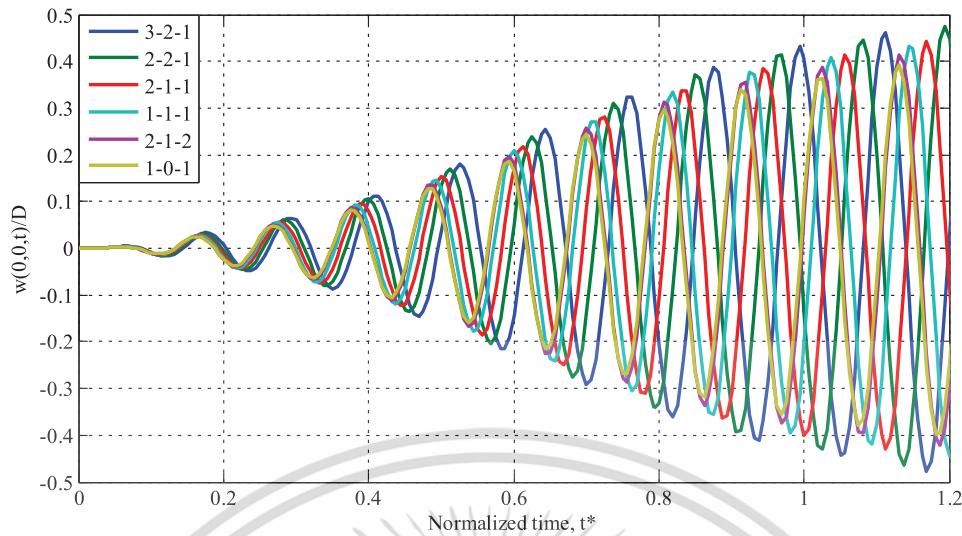


Fig. 20. Dimensionless dynamic deflections at the centre of FG sandwich plates with different layer thickness ratios ($a/h = 20$, $\hat{n} = 2$, $d = a/8$, $v_p = 50$ m/s, $\Omega_i = \omega_1$).

5. Conclusion

The dynamic response of FG sandwich plates under an arbitrary number of harmonic moving loads was investigated using Ritz-based Gram–Schmidt polynomials and the Newmark method. Based on the framework of the FSDT including the effects of shear deformation and rotary inertia, equations of motion were established for plates with different boundary conditions. The influence of parameters such as the layer thickness ratio, boundary conditions, material volume fraction index, excitation frequency, velocity and phase angle on the dynamic deflections were examined and discussed in detail.

From a free vibration analysis, it could be concluded that increasing the value of the material volume fraction index (\hat{n}) led to a reduction in the frequency of FG sandwich plates with a homogeneous hard core, while this effect was reversed for plates with a homogeneous soft core. Since the clamped boundary condition imposed stricter constraints, the frequency of a plate clamped at all edges was higher than for plates with other boundary conditions.

For forced vibration of the plates subjected to various numbers of harmonic moving loads, the following conclusions can be drawn:

- The dynamic deflection of an FG sandwich plate under moving loads initially shows a fluctuating increase, and then undergoes a continuous increase until the critical velocity is reached, before dropping down again.
- The dynamic deflection of an FG sandwich plate subjected to moving loads with a short equivalent distance is larger than for a longer distance.
- The dynamic deflection of an FG sandwich plate with a homogeneous hard core increases with an increase in the value of \hat{n} , while this is not the case for a plate with a homogeneous soft core.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- The dynamic deflection of an FG sandwich plate is also highly affected by the boundary conditions; the results for SSSS plates were much larger than for CCCC plates.
- The phase angles can be used to reduce the dynamic deflection of the plate.

Appendix A.

$$\begin{aligned}
 P_{im}^{uurs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^u}{dx^r} \frac{ds N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{uurs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^u}{dy^r} \frac{ds N_n^u}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{vurs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^v}{dx^r} \frac{ds N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{vurs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^v}{dy^r} \frac{ds N_n^u}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{wurs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^w}{dx^r} \frac{ds N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{wurs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^w}{dy^r} \frac{ds N_n^u}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_x urs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_x}}{dx^r} \frac{ds N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_x urs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_x}}{dy^r} \frac{ds N_n^u}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_y urs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_y}}{dx^r} \frac{ds N_m^u}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_y urs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_y}}{dy^r} \frac{ds N_n^u}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_x vrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_x}}{dx^r} \frac{ds N_m^v}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_x vrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_x}}{dy^r} \frac{ds N_n^v}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_x wrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_x}}{dx^r} \frac{ds N_m^w}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_x wrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_x}}{dy^r} \frac{ds N_n^w}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_x \psi_x rs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_x}}{dx^r} \frac{ds N_m^{\psi_x}}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_x \psi_x rs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_x}}{dy^r} \frac{ds N_n^{\psi_x}}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_y vrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_y}}{dx^r} \frac{ds N_m^v}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_y vrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_y}}{dy^r} \frac{ds N_n^v}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_y wrs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_y}}{dx^r} \frac{ds N_m^w}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_y wrs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_y}}{dy^r} \frac{ds N_n^w}{dy^s} dy, \\
 P_{im}^{\psi_y \psi_y rs} &= \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_y}}{dx^r} \frac{ds N_m^{\psi_y}}{dx^s} dx, & Q_{jn}^{\psi_y \psi_y rs} &= \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_y}}{dy^r} \frac{ds N_n^{\psi_y}}{dy^s} dy,
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_{im}^{\psi_y \psi_x rs} = \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_y}}{dx^r} \frac{ds N_m^{\psi_x}}{dx^s} dx, \quad Q_{jn}^{\psi_y \psi_x rs} = \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_y}}{dy^r} \frac{ds N_n^{\psi_x}}{dy^s} dy,$$

$$P_{im}^{\psi_y \psi_y rs} = \int_{-0.5a}^{+0.5a} \frac{dr N_i^{\psi_y}}{dx^r} \frac{ds N_m^{\psi_y}}{dx^s} dx, \quad Q_{jn}^{\psi_y \psi_y rs} = \int_{-0.5b}^{+0.5b} \frac{dr N_j^{\psi_y}}{dy^r} \frac{ds N_n^{\psi_y}}{dy^s} dy.$$

References

1. H. G. Allen, *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels* (Pergamon Press, Hungary, 1969).
2. J. R. Vinson, *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials* (Technomic Publications, Pennsylvania, USA, 1999).
3. J. R. Vinson, *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction* (Springer, Netherlands, 2010).
4. Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki and R. G. Ford, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Application* (Kluwer Academic Publishers, London, 1999).
5. J. H. Kim, M. C. Kim and C. G. Park, Evaluation of functionally graded thermal barrier coatings fabricated by detonation gun spray technique, *Surf. Coat Tech.* **168** (2003) 275–280.
6. U. Shults, M. Peters and F.-W. Bach, Graded coating for thermal, wear and corrosion barriers, *Mater. Sci. Eng.* **362** (2003) 61–80.
7. A. Raza, H. Pathak and M. Talha, Stochastic extended finite element implementation for natural frequency of cracked functionally gradient and bi-material structures, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **21**(3) (2021) 2150044.
8. W.-R. Chen and H. Chang, Vibration analysis of bidirectional functionally graded Timoshenko beams using Chebyshev collocation method, *Int. J. Struct. Stabi. Dyna.* **21**(1) (2021) 2150009.
9. N. Wattanasakulpong and J. Charoensuk, Vibration characteristics of stepped beams made of FGM using differential transformation method, *Meccanica* **50** (2015) 1089–1101.
10. M. Rahmani and S. Dehghanpour, Temperature-dependent vibration of various types of sandwich beams with porous FGM layers, *Int. J. Struct. Stabi. Dyna.* **21**(2) (2021) 2150016.
11. A. H. Sofiyev, The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure, *Compos. Struct.* **117** (2014) 124–134.
12. P. Tossapanon and N. Wattanasakulpong, Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation, *Compos. Struct.* **142** (2016) 215–225.
13. T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, F. Inam and J. Lee, A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams, *Compos. Struct.* **119** (2015) 1–12.
14. T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, A. Maheri and J. Lee, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Eng. Struct.* **64** (2014) 12–22.
15. T. K. Nguyen, T. T. P. Nguyen, T. P. Vo and H. T. Thai, Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory, *Compos. B Eng.* **76** (2015) 273–28.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

16. T. Q. Bui, A. Khosravifard, C. Zhang, M. R. Hematiyan and M. V. Golub, Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method, *Eng. Struct.* **47** (2013) 90–104.
17. A. Karamanli, Bending behavior of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3D shear deformation theory, *Compos. Struct.* **174** (2017) 70–86.
18. V. Kahya and M. Turan, Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element, *Compos. B Eng.* **146** (2018) 198–212.
19. L. C. Trinh, T. P. Vo, A. L. Osofero and J. Lee, Fundamental frequency analysis of functionally graded sandwich beams based on the state space approach, *Compos. Struct.* **156** (2016) 263–275.
20. T. K. Nguyen, T. P. Vo, B. D. Nguyen and J. Lee, An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory, *Compos. Struct.* **156** (2016) 238–252.
21. N. D. Nguyen, T. K. Nguyen, T. P. Vo, T. N. Nguyena and S. Lee, Vibration and buckling behaviours of thin-walled composite and functionally graded sandwich I-beams, *Compos. B Eng.* **166** (2019) 414–427.
22. A. S. Sayyad and Y. M. Ghugal, A sinusoidal beam theory for functionally graded sandwich curved beams, *Compos. Struct.* **226** (2019) 111246.
23. P. A. Demirhan and V. Taskin, Levy solution for bending analysis of functionally graded sandwich plates based on four variable plate theory, *Compos. Struct.* **177** (2017) 80–95.
24. H. T. Thai, T. K. Nguyen and T. P. Vo, Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory, *Eur. J. Mech.-A/Solids* **45** (2014) 211–225.
25. P. Tossapanon and N. Wattanasakulpong, Flexural vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation with arbitrary boundary conditions: Chebyshev collocation technique, *J. Sandwich Struct. Mater.* **22** (2020) 156–189.
26. S. Nikbakht, S. Jedari Salami and M. Shakeri, A 3D full layer-wise method for yield achievement in functionally graded sandwich plates with general boundary conditions, *Eur. J. Mech.-A/Solids* **75** (2019) 330–347.
27. D. Li, Z. Deng and H. Xiao, Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory, *Compos. B Eng.* **106** (2016) 107–119.
28. N. Liu and A. E. Jeffers, Isogeometric analysis of laminated composite and functionally graded sandwich plates based on a layerwise displacement theory, *Compos. Struct.* **176** (2017) 143–153.
29. C. Li, H. S. Shen, H. Wang and Z. Yu, Large amplitude vibration of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core, *Int. J. Mech. Sci.* **174** (2020) 105472.
30. M. Dorduncu, Stress analysis of sandwich plates with functionally graded cores using peridynamic differential operator and refined zigzag theory, *Thin-Walled Struct.* **146** (2020) 106468.
31. W. Gao, Z. Qin and F. Chu, Wave propagation in functionally graded porous plates reinforced with graphene platelets, *Aero. Sci. Tech.* **102** (2020) 105860.
32. Z. Qin, S. Zhao, X. Pang, B. Safaei and F. Chu, A unified solution for vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells reinforced by graphene with general boundary conditions, *Int. J. Mech. Sci.* **170** (2020) 105341.
33. Z. Qin, X. Pang, B. Safaei and F. Chu, Free vibration analysis of rotating functionally graded CNT reinforced composite cylindrical shells with arbitrary boundary conditions, *Compos. Struct.* **220** (2019) 847–860.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

34. Y. Liu, Z. Qin and F. Chu, Analytical study of the impact response of shear deformable sandwich cylindrical shell with a functionally graded porous core, *Mech. Adv. Mater. Struct.* (2020), doi: 10.1080/15376494.2020.1818904.
35. M. C. Trinh and S. E. Kim, Nonlinear thermomechanical behaviors of thin functionally graded sandwich shells with double curvature, *Compos. Struct.* **195** (2018) 335–348.
36. Q. Wang, X. Cui, B. Qin, Q. Liang and J. Tang, A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded (FG) sandwich doubly-curved panels and shells of revolution, *Int. J. Mech. Sci.* **134** (2017) 479–499.
37. M. Rezaiee-Pajand, E. Arabi and Amir R. Masoodi, Nonlinear analysis of FG-sandwich plates and shells, *Aero. Sci. Tech.* **87** (2019) 178–189.
38. B. Liu, M. Guo, C. Liu and Y. Xing, Free vibration of functionally graded sandwich shallow shells in thermal environments by a differential quadrature hierarchical finite element method, *Compos. Struct.* **225** (2019) 111173.
39. T. Q. Quan, N. H. Cuong and N. D. Duc, Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells, *Aero. Sci. Tech.* **90** (2019) 169–180.
40. M. C. Trinh, D. D. Nguyen and S. E. Kim, Effects of porosity and thermomechanical loading on free vibration and nonlinear dynamic response of functionally graded sandwich shells with double curvature, *Aero. Sci. Tech.* **87** (2019) 119–132.
41. A. H. Sofiyev and E. Osmancebioglu, The free vibration of sandwich truncated conical shells containing functionally graded layers within the shear deformation theory, *Compos. B Eng.* **120** (2017) 197–211.
42. D. Punera and T. Kant, Elastostatics of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models, *Compos. Struct.* **182** (2017) 505–523.
43. S. Pandey and S. Pradyumna, A finite element formulation for thermally induced vibrations of functionally graded material sandwich plates and shell panels, *Compos. Struct.* **160** (2017) 877–886.
44. T. D. Singha and M. Rout, Free vibration analysis of rotating pretwisted composite sandwich conical shells with multiple debonding in hygrothermal environment, *Eng. Struct.* **204** (2020) 110058.
45. M. Şimşek and S. Cansiz, Dynamics of elastically connected double-functionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load, *Compos. Struct.* **94**(9) (2012) 2861–2878.
46. M. Şimşek, T. Kocatürk and Ş. D. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load, *Compos. Struct.* **94**(8) (2012) 2358–2364.
47. M. Şimşek, Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load, *Compos. Struct.* **92**(10) (2010) 2532–2546.
48. I. Esen, Dynamic response of functional graded Timoshenko beams in a thermal environment subjected to an accelerating load, *Euro. J. Mech.-A/Solids* **78** (2019) 103841.
49. Y. Yang, K. Kunpang, C. Lama and V. Iu, Dynamic behaviors of tapered bi-directional functionally graded beams with various boundary conditions under action of a moving harmonic load, *Eng. Anal. Bound. Elem.* **104** (2019) 225–239.
50. M. Esmaeilzadeh and M. Kadkhodayan, Dynamic analysis of stiffened bi-directional functionally graded plates with porosities under a moving load by dynamic relaxation method with kinetic damping, *Aero. Sci. Tech.* **93** (2019) 105333.
51. P. Malekzadeh and S. M. Monajjemzadeh, Nonlinear response of functionally graded plates under moving load, *Thin-Walled Struct.* **96** (2015) 120–129.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

52. Q. Song, J. Shi and Z. Liu, Vibration analysis of functionally graded plate with a moving mass, *Appl. Math. Model.* **46** (2017) 141–160.
53. P. Malekzadeh and S. M. Monajjemzadeh, Dynamic response of functionally graded plates in thermal environment under moving load, *Compos. B Eng.* **45**(1) (2013) 1521–1533.
54. P. Malekzadeh and Y. Heydarpour, Response of functionally graded cylindrical shells under moving thermo-mechanical loads, *Thin-Walled Struct.* **58** (2012) 51–66.
55. P. Malekzadeh and M. Daraie, Dynamic analysis of functionally graded truncated conical shells subjected to asymmetric moving loads, *Thin-Walled Struct.* **84** (2014) 1–13.
56. G. G. Sheng and X. Wang, Studies on dynamic behavior of functionally graded cylindrical shells with PZT layers under moving loads, *J. Sound Vibr.* **323**(3–5) (2009) 772–789.
57. A. H. Sofiyev, Dynamic response of an FGM cylindrical shell under moving loads, *Compos. Struct.* **93**(1) (2010) 58–66.
58. W. Songsuwan, M. Pimsarn and N. Wattanasakulpong, Dynamic responses of functionally graded sandwich beams resting on elastic foundation under harmonic moving loads, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* **18**(9) (2018) 1850112.
59. M. Şimşek and M. Al-Shujairi, Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, *Compos. B Eng.* **108** (2017) 18–34.
60. M. D. Sciuva and M. Sorrenti, Bending and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates: An assessment of the Refined Zigzag Theory, *J. Sandwich Struct. Mater.* (2019), doi: 10.1177/1099636219843970.
61. R. F. Rango, F. J. Bellomo and L. G. Nallim, A variational Ritz formulation for vibration analysis of thick quadrilateral laminated plates, *Int. J. Mech. Sci.* **104** (2015) 60–74.
62. Y. Kiani and M. Mirzaei, Rectangular and skew shear buckling of FG-CNT reinforced composite skew plates using Ritz method, *Aero. Sci. Tech.* **77** (2018) 388–398.
63. Y. Kiani, Thermal buckling of temperature-dependent FG-CNT-reinforced composite skew plates, *J. Therm. Stress* **40**(11) (2017) 1442–1460.
64. Y. Kiani, Analysis of FG-CNT reinforced composite conical panel subjected to moving load using Ritz method, *Thin-Walled Struct.* **119** (2017) 47–57.
65. Y. Kiani, Free vibration of FG-CNT reinforced composite spherical shell panels using Gram–Schmidt shape functions, *Compos. Struct.* **159** (2017) 368–381.
66. Y. Kiani, Dynamics of FG-CNT reinforced composite cylindrical panel subjected to moving load, *Thin-Walled Struct.* **111** (2017) 48–57.
67. Z. Qin, F. Chu and J. Zu, Free vibrations of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions: A comparison study, *Int. J. Mech. Sci.* **133** (2017) 91–99.
68. Z. Qin, Z. Yang, J. Zu and F. Chu, Free vibration analysis of rotating cylindrical shells coupled with moderately thick annular plates, *Int. J. Mech. Sci.* **142–143** (2018) 127–139.
69. P. Malekzadeh, A. R. Fiouz and H. Razi, Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load, *Compos. Struct.* **90**(2) (2009) 105–114.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อผู้เขียน	นายวชิรวิทย์ สงสุวรรณ
วัน เดือน ปีเกิด	5 กรกฎาคม พ.ศ. 2518
ที่อยู่	209/44 หมู่ 8 แขวงหนองจอก เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530
ประวัติการศึกษา	2544 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร 2554 วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ประสบการณ์การทำงาน	พ.ศ. 2544 – ปัจจุบัน เป็นอาจารย์ประจำ ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัย เทคโนโลยีมหานคร เลขที่ 140 ถนนเชื่อมสัมพันธ์ แขวงกระทุ่มราย เขตหนองจอก กรุงเทพฯ 10530



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้