

เว็บแอปพลิเคชันสำหรับคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์และแสดง
รูปแบบของฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมฟูรีเยร์

WEB APPLICATION FOR CALCULATING FOURIER
COEFFICIENT AND DISPLAYING FUNCTIONS PATTERNS
USING FOURIER SERIES



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

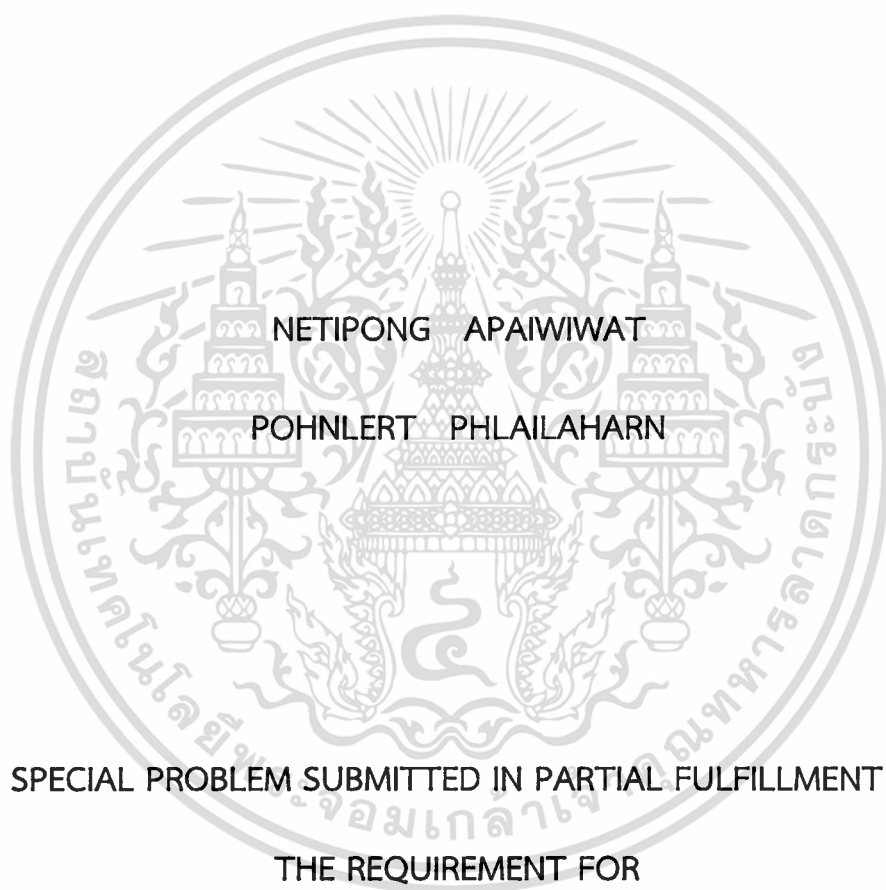
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

WEB APPLICATION FOR CALCULATING FOURIER
COEFFICIENT AND DISPLAYING FUNCTIONS PATTERNS
USING FOURIER SERIES



NETIPONG APAIWIWAT

POHNLERT PHLAILAHARN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2018

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ เว็บแอปพลิเคชันสำหรับคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์และแสดงรูปแบบของฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมฟูรีเยร์

WEB APPLICATION FOR CALCULATING FOURIER COEFFICIENT AND DISPLAYING FUNCTIONS PATTERNS USING FOURIER SERIES

ชื่อนักศึกษา นายเนติพงษ์ อภัยวิวัฒน์ รหัสนักศึกษา 57050089
นายพรเลิศ พล่ายละหาร รหัสนักศึกษา 57050103

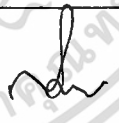
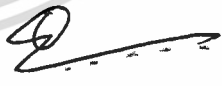
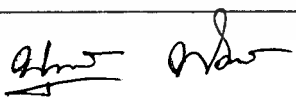
ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการคุมสอบ	ลายมือชื่อ
ดร. กัมปนาท นามงาม ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร. อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการ	
ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ เว็บแอปพลิเคชันสำหรับคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์และแสดงรูปแบบของฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมฟูรีเยร์

WEB APPLICATION FOR CALCULATING FOURIER COEFFICIENT AND DISPLAYING FUNCTIONS PATTERNS USING FOURIER SERIES

ชื่อนักศึกษา นายเนติพงษ์ อภัยวิวัฒน์ รหัสนักศึกษา 57050089

นายพรเลิศ พลายละหาร รหัสนักศึกษา 57050103

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชา คณิตศาสตร์

คณะ วิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ

บทคัดย่อ

โดยปกติแล้วสัญญาณจะสามารถอธิบายด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ (Deterministic) แต่จะมีสัญญาณอีกประเภทหนึ่งเช่นสัญญาณจากคลื่นไฟฟ้าสมองหรือคลื่นไฟฟ้าหัวใจเป็นสัญญาณที่ไม่สามารถอธิบายด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย สัญญาณประเภทนี้สามารถถูกเขียนแทนด้วยอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series) ซึ่งเป็นผลบวกของฟังก์ชันไซน์ (Sine) ที่แอมพลิจูด (Amplitude) และความถี่ต่างกัน จะเห็นได้ว่าอนุกรมฟูรีเยร์มีความสำคัญ จึงคิดค้นเว็บแอปพลิเคชันนำเสนออนุกรมฟูรีเยร์เพื่ออธิบายรูปแบบของฟังก์ชันสัญญาณและการวิเคราะห์ฟังก์ชันสัญญาณโดยใช้อนุกรมฟูรีเยร์

คำสำคัญ : สัญญาณรายคาบ แอมพลิจูด ฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	WEB APPLICATION FOR CALCULATING FOURIER COEFFICIENT AND DISPLAYING FUNCTIONS PATTERNS USING FOURIER SERIES		
Students	Mr. NETIPONG APAIWAT	Student ID 57050089	
	Mr. POHNLERT PHLAILAHARN	Student ID 57050103	
Degree	Bachelor of Science Applied Mathematics		
Department	Mathematics		
Faculty	Science		
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)		
Academic Year	2018		
Advisor	Dr. Busayamas Pimpunchat		

Abstract

Typically, the signal can be described by deterministic mathematical function. There will be the other type of signal, such as the Brain wave or the Electrocardiogram (ECG) that cannot be explained by Simple mathematical function. This type of signal can be represented with Fourier Series, which is the sum of sine functions with different of the amplitude and frequencies. This project can show that is very important method, Fourier Series, so we can develop the web application offers Fourier Series to describe the formulation of signal function and including the analysis of these signals using Fourier Series.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต ซึ่งจะสำเร็จได้เนื่องจากได้รับคำแนะนำ และตอบคำถามต่างๆในการศึกษางานวิจัยครั้งนี้ ทำให้ปัญหาพิเศษนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น คณะผู้จัดทำจึงใคร่ขอขอบพระคุณทุกท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ ที่คอยให้ความช่วยเหลือ คอยแนะนำให้คำปรึกษา และเป็นกำลังใจโดยตลอด

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ประจำวิชาภาคคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ได้อบรมและมอบความรู้ในด้านคณิตศาสตร์ที่ให้แก่ด้วยดีมาโดยตลอด รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ทุกท่านที่คอยให้ความช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นในการทำวิจัยครั้งนี้

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณบิดา มารดาที่เป็นกำลังใจ และให้การสนับสนุนตลอดมา ตลอดจนเพื่อนๆทุกคน ประโยชน์และคุณงามความดีที่เกิดจากปัญหาพิเศษ คณะผู้จัดทำขอมอบให้ บิดามารดา ครอบครัวซึ่งเป็นที่รัก และเคารพยิ่ง ตลอดจนคณาจารย์ที่เคารพทุกท่าน

เนติพงษ์ อภัยวิวัฒน์

พรเลิศ พลายละหาร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญรูป	ช
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	1
1.5 ระยะเวลาการดำเนินงานศึกษาและจัดทำปัญหาพิเศษ	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 สัญญาณ	3
2.2 อนุกรมฟูรีเยร์	8
2.2.1 ฟังก์ชันคาบ	8
2.2.2 ฟังก์ชันสัญญาณไซน์ซอเยต์	10
2.2.3 อนุกรมฟูรีเยร์	11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับกรรงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.2.4 คุณสมบัติของไชนและโคไซน์และโคไซน์; ฟังก์ชันออร์โธโกนอล	12
2.2.5 การหาค่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์	13
2.2.6 เงื่อนไข Dirichlet	18
2.2.7 อนุกรมฟูรีเยร์กับสมมาตรของฟังก์ชัน	19
2.2.8 รูปแบบเชิงซ้อนของอนุกรมฟูรีเยร์	21
2.2.9 สเปกตรัมความถี่เชิงซ้อน	25
2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	29
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย	32
3.1 การทำเว็บแอปพลิเคชันโดยใช้ ASP.NET	32
3.2 ขั้นตอนวิธีในการประมวลผลโปรแกรม MATLAB ผ่าน Web Server และส่งออกไปยัง Web Application	33
3.3 ฝังงานในการทำปัญหาพิเศษ	42
3.4 ฝังงานในการทำเว็บแอปพลิเคชัน	43
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล	44
4.1 ภาพรวมเว็บแอปพลิเคชัน	44
4.2 ตัวอย่างอนุกรมฟูรีเยร์	45
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	49
5.1 สรุปผลการวิจัย	49

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

5.2 ข้อเสนอแนะ	49
เอกสารอ้างอิง	50
ภาคผนวก	51
ภาคผนวก ก	52
ภาคผนวก ข	58



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่

หน้า

1.1 ตารางแสดงระยะเวลาในการดำเนินงาน

2



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 สัญญาณ Non-deterministic	4
2.2 ฟังก์ชันอิมพัลส์	6
2.3 การประมาณฟังก์ชันอิสระใดๆ (a) ฟังก์ชันใดๆ (b) การประมาณด้วยผลรวมของอิมพัลส์	7
2.4 ยูนิทแชนเปิลซีเควีน	7
2.5 ยูนิทสเต็ปซีเควีน	8
2.6 ฟังก์ชันคาบ	9
2.7 สัญญาณไซน์ซอยด์	10
2.8 รูปคลื่นในตัวอย่าง 2.4	16
2.9 ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องเป็นท่อนและลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา	19
2.10 (a) ฟังก์ชันคู่ (b) ฟังก์ชันคี่	19
2.11 ฟังก์ชันรูปฟันเลื่อย	23
2.12 ขบวนการพัลส์สี่เหลี่ยมที่เหมือนกัน	27
2.13 สเปกตรัมของแอมพลิจูด	28
2.14 การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันขั้นบันไดที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 5$ ฟังก์ชัน	29
2.15 การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันขั้นบันไดที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 20$ ฟังก์ชัน	30
2.16 การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันพาราโบลาที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 5$ ฟังก์ชัน	30
2.17 การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันพาราโบลาที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 20$ ฟังก์ชัน	30
2.18 การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียลที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 5$ ฟังก์ชัน	31

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
2.19 การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 20$ ฟังก์ชัน	31
3.1 ขั้นตอนวิธีในการประมวลผลโปรแกรม	32
3.2 โปรแกรม MATLAB R2015a	33
3.3 ไฟล์ m-file	33
3.4 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (1)	34
3.5 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (2)	34
3.6 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (3)	35
3.7 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (4)	35
3.8 การเริ่มใช้งาน MATLAB PRODUCTION SERVER	35
3.9 การออกแบบ User Interface	36
3.10 หน้าเว็บแอปพลิเคชันสำหรับผู้ใช้	36
3.11 การใส่ค่าของฟังก์ชันและขอบเขต	37
3.12 ผลลัพธ์ที่ได้จากการที่ใส่ค่าลงไป	38
3.13 กราฟที่นำอนุกรมฟูเรียร์ไปวิเคราะห์	39
3.14 กราฟที่นำอนุกรมฟูเรียร์ไปวิเคราะห์โดยแสดงแค่พจน์ที่ n	40
3.15 กราฟของฟังก์ชันไซน์	40
3.16 MATLAB PRODUCTION SERVER เมื่อประมวลผล	41
3.17 ผังงานในการทำปัญหาพิเศษ	42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.18 ผังงานในการทำเว็บแอปพลิเคชัน	43
รูปที่ 4.1 ภาพรวม Web Application	44
รูปที่ 4.2 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (a)	45
รูปที่ 4.3 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (b)	46
รูปที่ 4.4 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (c)	47
รูปที่ 4.5 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (d)	48
รูปที่ 4.6 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (e)	48



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ปัจจุบันสัญญาณมีความสำคัญมากในเรื่องวงจรไฟฟ้า คลื่นเสียง รวมถึงคลื่นความถี่ต่างๆของสัญญาณที่ส่งผลต่องานโดยรวมทางด้านกายภาพและด้านวิศวกรรม ถ้าสัญญาณไม่มีคุณภาพหรือความถี่ที่ไม่ดีอาจจะทำให้เกิดข้อผิดพลาด ซึ่งปัญหาที่เกิดขึ้นในด้านกายภาพและวิศวกรรม อาจจะนำผลกระทบมาในภายหลัง ดังนั้นนักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Joseph Fourier จึงได้พยายามคิดค้นเครื่องมือเพื่อที่จะแก้ปัญหที่เกิดขึ้นมา ซึ่งเรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series)

สัญญาณ (signal) และฟังก์ชัน (function) ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาทางกายภาพ (physical problem) ละปัญหาทางวิศวกรรม (engineering problem) ที่พบเห็นอยู่เสมอ มักจะเป็นฟังก์ชันคาบ (periodic function) ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้สามารถแทนให้อยู่ในเทอมหรือพจน์ของฟังก์ชันเป็นคาบของสัญญาณไซน์และโคไซน์ สัญญาณไซน์และสัญญาณโคไซน์เป็นสัญญาณพื้นฐานสำหรับการพิจารณาสัญญาณอื่นๆ ซึ่งอนุกรมฟูเรียร์เปรียบเสมือนเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อันหนึ่งที่มีประโยชน์ในการแก้ปัญหามากมาย เช่น การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

ดังนั้น จากปัญหาข้างต้น ทางคณะผู้ศึกษาจึงได้ศึกษาปัญหาพิเศษ เรื่อง เว็บบแอปพลิเคชันสำหรับคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์และแสดงรูปแบบของฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ เพื่อช่วยในการวิเคราะห์สัญญาณได้ดีมากขึ้นและเห็นภาพมากขึ้นประหยัดเวลามากขึ้น แทนการคิดมือในการแก้ปัญห และ เป็นแนวทางในการเอาไปต่อยอดในการเรียนการสอนต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์

- 1) ศึกษาอนุกรมฟูเรียร์เพื่อนำมาอธิบายคลื่นความถี่ของสัญญาณ
- 2) แสดงรูปแบบของสัญญาณผ่านเว็บแอปพลิเคชัน

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

วิเคราะห์คลื่นความถี่ของสัญญาณโดยใช้อนุกรมฟูเรียร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สามารถวิเคราะห์สัญญาณคลื่นความถี่โดยใช้ออนุกรมฟูเรียร์ได้

1.5 ระยะเวลาการดำเนินงานศึกษาและจัดทำปัญหาพิเศษ

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2560					ปี 2561				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1) ทาหัวข้อปัญหาพิเศษ	←→									
2) สืบค้นและค้นหาข้อมูลของปัญหา			←→							
3) เก็บรวบรวมข้อมูลปัญหาพิเศษ			←→							
4) ศึกษาและค้นคว้าทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง			←→							
5) derive สมการสูตรหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์			←→							
6) เริ่มการทำเว็บแอปพลิเคชัน				←→						
7) ทดสอบความผิดพลาดของเว็บแอปพลิเคชัน					←→					
8) สรุปผลที่ได้จากการศึกษา						←→				
9) เขียนเล่มรายงานปัญหาพิเศษ							←→			
10) จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ								←→		
11) ตรวจสอบรูปเล่มรายงานปัญหาพิเศษ									←→	

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงระยะเวลาในการดำเนินงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สัญญาณ (Signals)

สัญญาณคือปริมาณทางฟิสิกส์ที่มีการเปลี่ยนแปลงไปกับตัวแปรต้น (Independent variable) ที่มักเป็นเวลาหรือระยะทาง โดยทางคณิตศาสตร์แล้วสัญญาณสามารถถูกเขียนแทนด้วยฟังก์ชันของตัวแปรต้นหนึ่งตัวแปรหรือมากกว่าหนึ่งตัวแปร ตัวอย่างเช่น

$$s_1(t) = 5t \quad (2.1)$$

$$s_2(t) = 20t^2 \quad (2.2)$$

ฟังก์ชัน $s_1(t)$ เป็นสัญญาณที่มีการแปรผันต้น t และ $s_2(t)$ เป็นสัญญาณที่มีการแปรผันในลักษณะยกกำลังสองกับตัวแปรต้น t พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

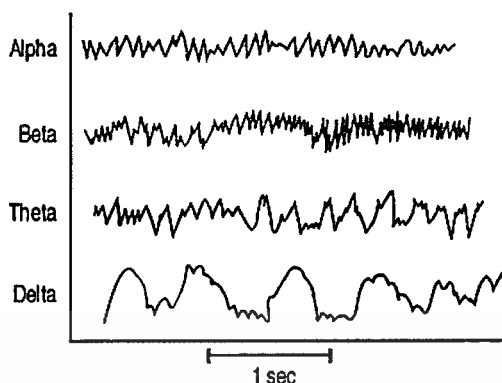
$$s(x, y) = 3x + 4xy + 10y^2 \quad (2.3)$$

ฟังก์ชันนี้แทนสัญญาณของตัวแปรต้น 2 ตัวแปรอันได้แก่ x กับ y ซึ่งอาจหมายถึงค่าพิกัดในระนาบใดๆ ตัวอย่างของสัญญาณแบบสองตัวแปรที่รู้จักกันดีได้แก่ภาพถ่าย (Image) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าความสว่างกับตัวแปรต้นสองตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง (Spatial) ในแนวนอนและแนวตั้ง (x, y)

สัญญาณ (2.1) และ (2.2) เป็นสัญญาณที่สามารถอธิบายด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ (Deterministic) มีสัญญาณอีกประเภทหนึ่งเช่นสัญญาณจากคลื่นไฟฟ้าสมองหรือคลื่นไฟฟ้าหัวใจ เป็นสัญญาณที่ไม่สามารถอธิบายด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ใดๆ (Non-Deterministic) โดยทั่วไปแล้วสัญญาณประเภทนี้สามารถถูกเขียนแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) ซึ่งเป็นผลบวกของฟังก์ชันไซน์ (Sine) ที่แอมพลิจูด (Amplitude) และความถี่ต่างกัน นั่นคือสัญญาณ Non-Deterministic สามารถแทนด้วย

$$\sum_{t=1}^N A_t(t) \sin[2\pi F_t(t) + \theta(t)] \quad (2.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.1 สัญญาณ Non-deterministic

โดยที่ $\{A_i(t), F_i(t)$ และ $\theta_i(t)\}$ เป็นเซตของแอมพลิจูด ความถี่และเฟสซึ่งเป็นฟังก์ชันกับเวลาตามลำดับ

โดยทั่วไปแล้วค่าตัวแปรต้นของสัญญาณที่มีตัวแปรของสัญญาณที่มีตัวแปรเดียวเราจะหมายถึงเวลา สำหรับสัญญาณที่มีตัวแปรต้นสองตัวเราจะหมายถึงระยะทาง (space) ค่าตัวแปรต้นอาจจะมีค่าต่อเนื่อง (Continuous) หรือ ไม่ต่อเนื่อง (Discrete) ก็ได้ สัญญาณที่ค่าตัวแปรต้นมีความต่อเนื่องนั้นจะถูกเรียกว่าสัญญาณอนาล็อก นอกจากนี้แล้วค่าแอมพลิจูดของสัญญาณอาจมีค่าต่อเนื่องหรือไม่ก็ได้ เราจะเรียกสัญญาณที่ค่าตัวแปรต้นและค่าแอมพลิจูดไม่ต่อเนื่องว่าสัญญาณดิจิทัล

ระบบ (System) หมายถึงอุปกรณ์ทางฟิสิกส์ที่จะทำขบวนการ (Operation) บางอย่างต่อสัญญาณ ตัวอย่างของระบบ เช่น ตัวกรองความถี่ (Filter) ซึ่งทำหน้าที่กำจัดสัญญาณรบกวน เมื่อเราทำการผ่านสัญญาณเข้าไปในระบบ เราจะเรียกว่าเป็นการประมวลผลสัญญาณ (Processing) ในตัวอย่างของการกรองความถี่ การประมวลผลสัญญาณเกี่ยวข้องกับการจัดสัญญาณรบกวนออกจากสัญญาณที่เราต้องการ

สัญญาณส่วนใหญ่ที่เราสนใจมักจะอยู่ในรูปของสัญญาณอนาล็อก ตัวอย่าง เช่น สัญญาณเสียงพูด สัญญาณเรดาร์ เป็นต้น การที่เราจะทำการประมวลผลสัญญาณเหล่านี้ทางดิจิทัลได้ เราจะต้องทำการแปลงสัญญาณเหล่านี้ให้อยู่ในรูปของสัญญาณดิจิทัลเสียก่อน อุปกรณ์ที่ทำการแปลงสัญญาณอนาล็อกเป็นดิจิทัลถูกเรียกว่าตัวแปลงสัญญาณอนาล็อกเป็นดิจิทัล เอาท์พุทของตัวแปลงสัญญาณอนาล็อกเป็นดิจิทัลจะเป็นซีควีน (Sequence) ของตัวเลข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในบางกรณี เราอาจมีความจำเป็นต้องเปลี่ยนสัญญาณที่ผ่านจากตัวประมวลผลทางดิจิทัลให้กลับไปเป็นสัญญาณอนาล็อกอีกครั้งหนึ่ง ขบวนการนี้เรียกว่าการแปลงสัญญาณจากดิจิทัลให้เป็นอนาล็อก

สัญญาณดิสครีต (Discrete Signal)

สัญญาณดิสครีต คือ ฟังก์ชันของตัวแปรต้นซึ่งเป็นเลขจำนวนเต็ม สัญญาณระหว่างช่องว่างของสัญญาณที่ต่อกันจะไม่ถูกนิยามไว้ และเราจะไม่ถือว่าสัญญาณดิสครีตมีค่าเป็นศูนย์ถ้า n ไม่ใช่เลขจำนวนเต็ม ให้ถือว่าสัญญาณ $x(n)$ ไม่ได้ถูกนิยามไว้ถ้า n ไม่ใช่เลขจำนวนเต็ม

สัญญาณดิสครีตโดยปกติจะถูกนิยามไว้สำหรับทุกค่าของเลขจำนวนเต็ม n เมื่อ $-\infty < n < \infty$ เราจะเรียก $x(n)$ ว่าเป็นสัญญาณอันดับที่ n

สัญญาณพื้นฐานที่สำคัญ (Important Basic Signal)

ในหัวข้อนี้เรากล่าวถึงสัญญาณพื้นฐานที่สำคัญซึ่งแบ่งได้เป็น สัญญาณอนาล็อกและสัญญาณดิจิทัล

1. สัญญาณอนาล็อก (Analog Signal)

a. ยูนิทอิมพัลส์ (Unit Impulse)

ยูนิทอิมพัลส์ เป็นสัญญาณที่มีความสำคัญอันหนึ่งในการศึกษาเกี่ยวกับระบบที่มีความต่อเนื่องทางเวลา กล่าวคือสัญญาณอนาล็อกใดๆสามารถถูกประมาณได้โดยสัญญาณอิมพัลส์ และเมื่อเราต้องการตอบสนองของระบบต่ออินพุทที่เป็นอิมพัลส์ เราสามารถรู้การตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุทอื่นๆ ยูนิทอิมพัลส์เขียนแทนด้วย $\delta(\sigma)$ ซึ่งถูกนิยามด้วยลิมิตของฟังก์ชันดังนี้

$$\delta(\sigma) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(\Delta, \sigma) \quad (2.5)$$

โดยที่ $f(\Delta, \sigma)$ คือฟังก์ชันแสดงในรูปที่ 2.2 (a)

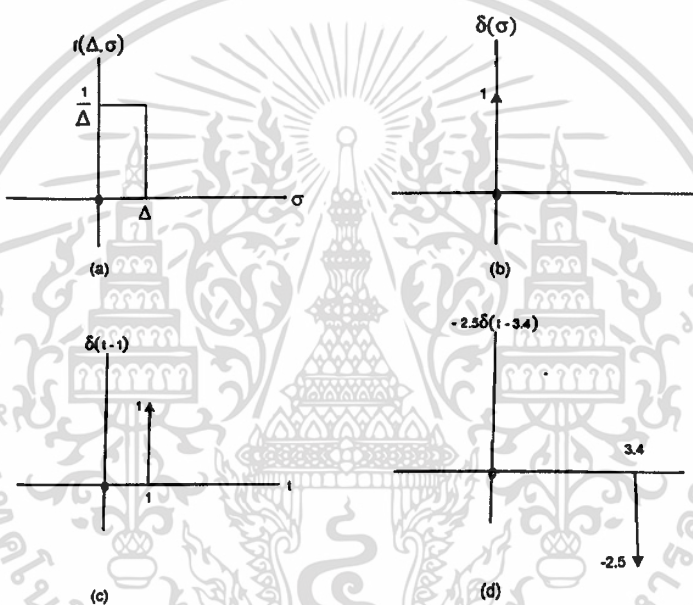
เมื่อ $\Delta \rightarrow 0$ ความสูงของพัลส์ (Pulse) จะโตขึ้นอย่างอนันต์ ในขณะที่ความกว้างของฐานจะเข้าใกล้ 0 อย่างไรก็ตามพื้นที่จะเป็น 1 เสมอ เมื่อเราทำการคูณอิมพัลส์ ด้วยค่าคงที่ A จะทำให้พื้นที่ของพัลส์มีค่าเท่ากับ A เพื่อความสะดวกเรามักเขียนแทนยูนิทอิมพัลส์ ด้วยสัญลักษณ์ในรูปที่ 2.2 (b) โดยที่เลข 1 ที่เขียนกำกับข้างๆ ลูกศรหมายถึงพื้นที่ของอิมพัลส์ เราสามารถทำการเปลี่ยนแปลงสัญญาณอิมพัลส์ได้หลายประการ ตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2.2 (c) และ 2.2 (d) เป็นการเปลี่ยนแปลงทางด้านขนาดและการเลื่อนตามแกนเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คุณสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับยูนิทพัลส์ คือคุณสมบัติที่เรียกว่า Sifting ซึ่งเขียนแทนด้วยสมการ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\lambda)dt = f(\lambda) \tag{2.6}$$

สำหรับทุกค่าของ λ ซึ่ง $f(\lambda)$ มีค่าต่อเนื่อง คุณสมบัตินี้กล่าวว่าเมื่อเราทำการอินทิเกรตผลคูณของสัญญาณใดๆ $f(t)$ กับยูนิทพัลส์ที่มีการเลื่อนเวลาไปเท่ากับ λ จะมีค่าเท่ากับฟังก์ชันนั้นๆหาค่าที่ตำแหน่ง $t = \lambda$ คุณสมบัตินี้มีประโยชน์มากมายในการพิสูจน์สูตรหรือหาคคุณสมบัติของสัญญาณดิจิทัล



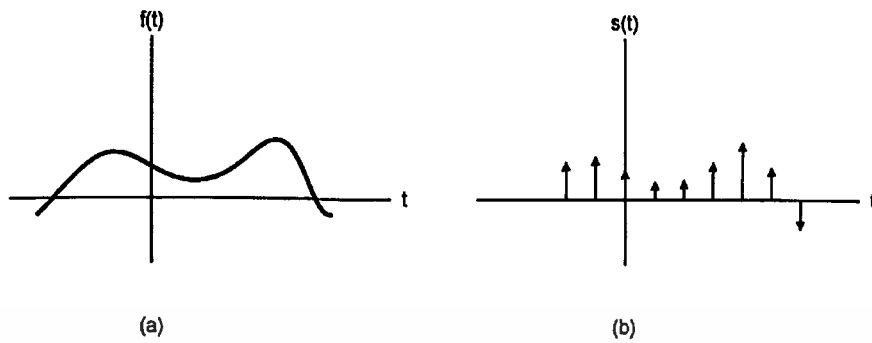
รูปที่ 2.2 ฟังก์ชันอิมพัลส์

b. ฟังก์ชันอิสระใดๆ (Arbitrary Function)

เราทราบว่าสัญญาณ Non-Deterministic เป็นสัญญาณที่ไม่สามารถอธิบายด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ใดๆ ตัวอย่างเช่นสัญญาณที่แสดงในรูปที่ 2.3 (a) สามารถเขียนแสดงสัญญาณโดยประมาณด้วยสัญญาณที่แสดงในรูป 2.3 (b) สังเกตว่าสัญญาณอิมพัลส์มีพื้นที่สอดคล้องกับค่าฟังก์ชัน $f(t)$ และเมื่อจำนวนของอิมพัลส์ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างอนันต์ เราจะได้ความสัมพันธ์

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2.7}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.3 การประมาณฟังก์ชันอิสระใดๆ (a) ฟังก์ชันใดๆ (b) การประมาณด้วยผลรวมของอิมพัลส์

1. สัญญาณดิจิตัล (Discrete-Time Signal)

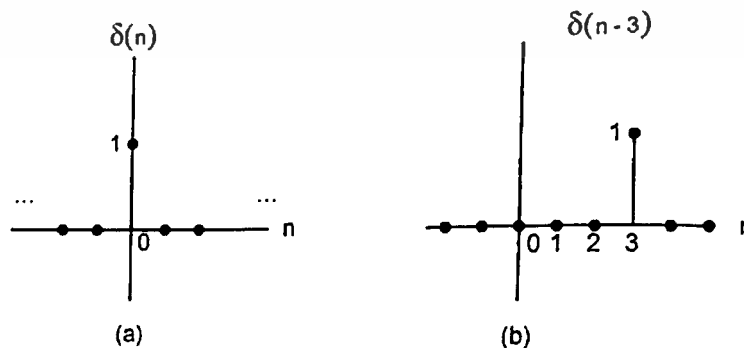
ในหัวข้อที่แล้วเราได้กล่าวถึงสัญญาณอนาล็อกที่สำคัญ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงสัญญาณดิจิตัลที่สำคัญ

a. ยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์ (Unit Sample Sequence)

สัญญาณยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์เขียนแสดงโดยสัญลักษณ์ $\delta(n)$ ถูกนิยามดังต่อไปนี้

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

โดยคำจำกัดความแล้ว ยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์เป็นสัญญาณที่มีค่าเป็น 0 ทุกที่ยกเว้นที่ $n = 0$ โดยที่ $n = 0$ สัญญาณจะมีค่าเท่ากับ 1 สัญญาณนี้บางทีถูกเรียกว่ายูนิทอิมพัลส์ ในการศึกษาเรื่องระบบการตอบสนองของระบบต่ออินพุทที่เป็นยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์ จะถูกเรียกว่าการตอบสนองยูนิทอิมพัลส์ (Unit Impulse Response) เมื่อเรารู้การตอบสนองยูนิทอิมพัลส์ เราสามารถรู้การสนองของระบบต่อสัญญาณใดๆ ยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์เขียนแสดงในรูปที่ 2.4 (a) ถ้าเราสเกลยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์ด้วยค่าคงที่ A และเลื่อนสัญญาณตามแกนเวลาที่ n_0 โดยทั่วไปเราสามารถเขียนแทนยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์ได้เป็น $A\delta(n - n_0)$ ตัวอย่างแสดงในรูปที่ 2.4 (b)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้รูปที่ 2.4 ยูนิทแซมเปิลซีแควเ็นซ์ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

b. ยูนิทสเต็ปซีเควีน (Unit-step Sequence)

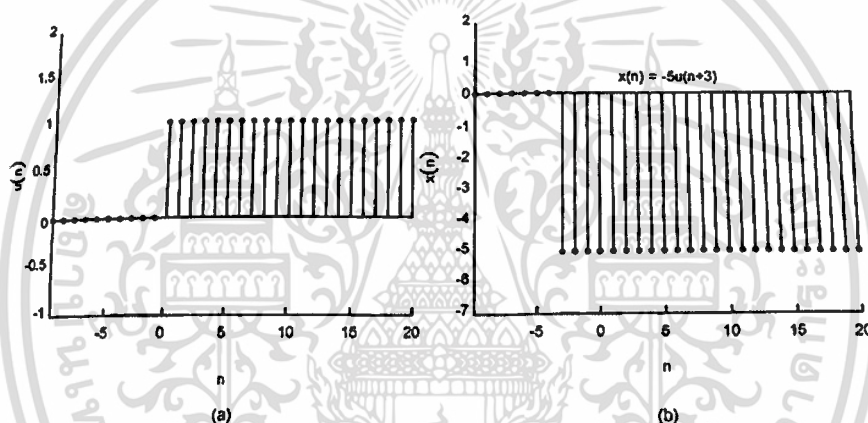
สัญญาณ ยูนิทสเต็ปซีเควีน เขียนแทนด้วยสัญญาณ $u(n)$ ถูกนิยามดังนี้

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

ยูนิทสเต็ปซีเควีนถูกแสดงในรูปที่ 2.5 (a) ยูนิทสเต็ปซีเควีนสามารถถูกสเกลหรือเลื่อนตามแกนเวลาตั้งแสดงในรูปที่ 2.5 (b)

ยูนิทสเต็ปซีเควีน มีความสัมพันธ์กับ ยูนิทแซมเปิลซีเควีน ดังนี้

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m) \quad (2.10)$$



รูปที่ 2.5 ยูนิทสเต็ปซีเควีน

2.2 อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series)

2.2.1 ฟังก์ชันคาบ (Periodic Function)

ฟังก์ชันเป็นคาบ $f(t)$ เรียกว่าเป็นฟังก์ชันที่มีคาบครบรอบ T ค่า T เป็นค่าจริงใดๆและไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$f(t) = f(t+T) \quad (2.11)$$

ซึ่ง T คือค่าครบรอบของฟังก์ชัน $f(t)$ เช่น $\sin t$ และ $\cos t$ มีคาบครบรอบเท่ากับ 2π

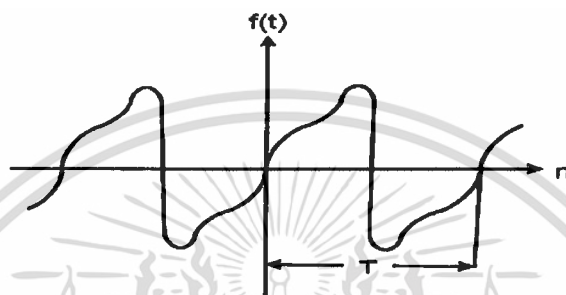
(1 รอบวงกลม : ครบ 1 รอบ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะเห็นได้ว่าสัญญาณมีค่าครบรอบเท่ากับ T และเกิดขึ้นซ้ำๆกันทุกๆค่าของ T ดังนั้นถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็ม สามารถกำหนดได้ว่า

$$f(t) = f(t+nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.12)$$

ตัวอย่างของฟังก์ชันคาบถูกแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ฟังก์ชันคาบ

ตัวอย่าง 2.1

ให้หาคาบของฟังก์ชัน $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$

วิธีทำ ถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบเวลา T ดังนั้นจาก (2.11) เราได้

$$\cos \frac{t}{3}(t+T) + \cos \frac{t}{4}(t+T) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$$

เนื่องจาก $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta$ สำหรับค่า m จำนวนเต็มใดๆ ดังนั้น

$$\frac{1}{3}T = 2\pi m, \quad \frac{1}{4}T = 2\pi n,$$

โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ดังนั้น $T = 6\pi m = 8\pi n$ เมื่อ $m = 4$ และ $n = 3$ เราจะได้ค่าของคาบที่เล็กที่สุด ดังนั้น $T = 24\pi$

โดยทั่วไป ถ้าฟังก์ชัน

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบเวลา T เราสามารถหาค่าจำนวนเต็ม m และ n ซึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega_1 T = 2\pi m \quad (2.13)$$

$$\omega_2 T = 2\pi n \quad (2.14)$$

ผลหารของ (2.13) และ (2.14) คือ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \quad (2.15)$$

นั่นคือ เราสรุปว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบเมื่อ ω_1 / ω_2 ต้องเป็นเศษส่วนของเลขจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 2.2

ฟังก์ชัน $f(t) = \cos 10t + \cos(10 + \pi)t$ เป็นฟังก์ชันคาบหรือไม่

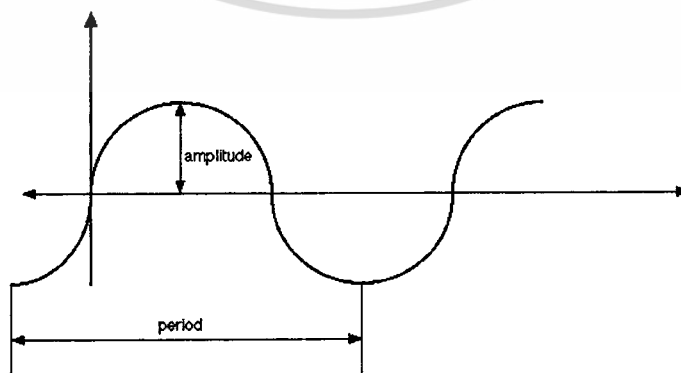
วิธีทำ กรณีนี้ $\omega_1 = 10$ และ $\omega_2 = 10 + \pi$ เนื่องจาก

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10}{10 + \pi}$$

ไม่ใช่เศษส่วนของเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะหาค่า T ที่ทำให้ความสัมพันธ์ (2.11) เป็นจริง ดังนั้น $f(t)$ ไม่ใช่ฟังก์ชันคาบ

2.2.2 ฟังก์ชันสัญญาณไซน์ซอซด์ (Sinusoid Signal Function)

สัญญาณไซน์ซอซด์คือสัญญาณรายคาบ (Periodic signal) ที่มีขนาด (Amplitude) เปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นแบบฟังก์ชัน Sine หรือ Cosine สัญญาณไซน์ซอซด์ถูกวาดเทียบกับเวลา โดยจะมีรูปสัญญาณครบหนึ่งรอบทุกๆ คาบเวลา T



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รูปที่ 2.7 สัญญาณไซน์ซอซด์
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญญาณดังรูปสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ $s(t) = A \sin(2\pi ft + \phi)$ โดยที่

$s(t)$ คือ ความเข้มของสัญญาณ ณ เวลา t ใดๆ ในช่วงที่พิจารณา

A คือ ความเข้มสูงสุดของสัญญาณ (Peak Amplitude) วัดจากจุดสมดุล ถึงยอดคลื่น

f คือ ความถี่ของสัญญาณ (จำนวนของรอบการเปลี่ยนของรูปแบบ ต่อวินาที) ซึ่งสัมพันธ์เป็นส่วนกลับของคาบเวลา T (วินาที) กล่าวคือ $f = 1/T$

ϕ คือ Phase หรือ ตำแหน่งเชิงมุม ณ จุดเริ่มต้น $t = 0$ ของสัญญาณ (เวลาอ้างอิง)

2.2.3 อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series)

ถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบเวลา T แล้วฟังก์ชันนี้สามารถแทนให้อยู่ในเทอมของอนุกรมตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

โดยที่ $\omega_0 = 2\pi / T$

อนุกรมใน (2.16) มีชื่อว่อนุกรมฟูรีเยร์ตรีโกณมิติ ซึ่งสามารถเขียนใหม่ในรูปของ

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (2.17)$$

ตัวอย่าง 2.3

ให้แสดง (2.17) สามารถได้มาจาก (2.16) และเขียน c_n และ θ_n ในเทอมของ a_n และ b_n

วิธีทำ

เราสามารถเขียน

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\cos n\omega_0 t \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} + \sin n\omega_0 t \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการใช้กฎของตรีโกณมิติ เราได้

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t &= c_n (\cos n\omega_0 t \cos \theta_n + \sin n\omega_0 t \sin \theta_n) \\ &= c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned} \quad (2.18)$$

โดย

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.19)$$

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad (2.20)$$

ดังนั้น

$$\tan \theta_n = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{หรือ} \quad \theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (2.21)$$

และโดยให้

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad (2.22)$$

เราได้

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (2.23)$$

2.2.4 คุณสมบัติของไซน์และโคไซน์และโคไซน์; ฟังก์ชันออร์โธโกนอล (Properties Of Sine Cosine; Orthogonal Function)

เราจะเรียกเซตของฟังก์ชัน $\{\phi_k(t)\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันออร์โธโกนอลในช่วง $a < t < b$ ถ้ามีสองฟังก์ชัน $\phi_m(t)$ และ $\phi_n(t)$ ในเซต $\{\phi_k(t)\}$ ซึ่ง

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ r_n & ; m = n \end{cases} \quad (2.24)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการใช้แคลคูลัสพื้นฐานเราสามารถแสดงให้เห็นว่า

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0 ; m \neq 0 \quad (2.25)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt = 0 ; \text{all } m \quad (2.26)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 ; m \wedge n \quad (2.29)$$

โดยที่ $\omega_0 = 2\pi / T$

ความสัมพันธ์นี้แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน

$$\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots\}$$

เป็นเซตของฟังก์ชันออร์โธโกนอลในช่วง $-T/2 < t < T/2$

2.2.5 การหาค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Evaluation of Coefficient)

โดยใช้ความสัมพันธ์ออร์โธโกนอล (2.25 - 2.29) เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n ของอนุกรมฟูเรียร์ได้ เริ่มจากสมการ (2.16)

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

ทำการคูณสองข้างของสมการด้วย $\cos m\omega_0 t$ แล้วอินทิเกรตในช่วง $[-T/2, T/2]$ เราได้

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& + \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt \\
& + \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt
\end{aligned}$$

ทำการกลับลำดับเครื่องหมายอินทิกรัล (Integral) และเครื่องหมายการรวม (Summation) เราได้ว่า

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt
\end{aligned}$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ออร์โธโกนอล (2.25 - 2.29) จะพบว่าอินทิกรัลเทอมแรกและเทอมที่สามทางขวามือมีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุก m และ n สำหรับอินทิกรัลเทอมที่สองทางขวามือจะมีค่าเป็นศูนย์ทุกเทอมยกเว้นที่ $m = n$ และผลของการอินทิกรัลในช่วง $[-T/2, T/2]$ เท่ากับ $T/2$ ดังนั้น

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = a_m \frac{T}{2} \quad (2.30)$$

และ

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad (2.31)$$

ในการหาสูตรของ a_0 เราอินทิเกรต (2.16) ในช่วง $[-T/2, T/2]$ และใช้ (2.25 - 2.29) เราได้

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] dt \\
&= \frac{1}{2} a_0 T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{2} a_0 T \quad (2.32)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.33)$$

หรือ

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.34)$$

$a_0/2$ เป็นการหาค่าเฉลี่ยของ $f(t)$ ในช่วงเวลาหนึ่งคาบ สมการ (2.34) แสดงให้เห็นว่า (2.31) ซึ่งใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมโคไซน์สามารถใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ a_0 อย่างถูกต้องเนื่องจาก $\cos m\omega_0 t|_{m=0} = 1$

ทำนองเดียวกันสำหรับการหาสูตรของ b_n เราทำการคูณ (2.16) ทั้งสองข้างด้วย $\sin m\omega_0 t$ แล้วทำการอินทิเกรตในช่วง $[-T/2, T/2]$ เราได้

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

ใช้ความสัมพันธ์ออร์โธโกนอล (2.25 – 2.29) เราได้

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt = b_m \frac{T}{2} \quad (2.35)$$

ดังนั้น

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \quad (2.36)$$

แทนที่ m ด้วย n เราสามารถเขียน (2.31) และ (2.36) ได้เป็น

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

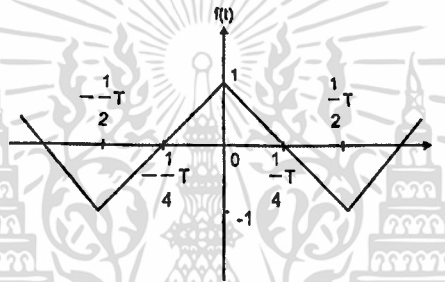
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

โดยทั่วไปแล้วช่วงของการอินทิกรัลของ (2.37) และ (2.38) ไม่จำเป็นต้องสมมาตรรอบจุดกำเนิด นั่นคือการอินทิเกรตในช่วง $[-T/2, T/2]$ เราจะเห็นว่าเราเพียงต้องการการอินทิกรัลให้ครบหนึ่งคาบก็เพียงพอ

ตัวอย่าง 2.4

ให้หาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันแสดงในรูป 2.7



รูปที่ 2.8 รูปคลื่นในตัวอย่าง 2.4

วิธีทำ

ฟังก์ชันสามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T}, & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T}, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (2.39)$$

เนื่องจากค่าเฉลี่ยสำหรับฟังก์ชัน $f(t)$ ในช่วงเวลาหนึ่งคาบเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad (2.40)$$

จาก (2.37) และ (2.39) เราได้

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{4}{T} t \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -\frac{4}{T} t \cos(n\omega_0 t) dt$$

อินทิกรัลเทอมแรกทางขวามือมีค่าเป็นศูนย์ เพื่อให้ง่ายในการอินทิเกรต เราให้ $t = -\tau$ ในอินทิกรัลเทอมที่สอง ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 (-\tau) \cos(n\omega_0(-\tau))(-d\tau) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 \tau \cos(n\omega_0 \tau) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

สลับอินทิกรัลกับกลางของอินทิกรัลแรก เราได้ว่า

$$\begin{aligned} &= -\frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} \tau \cos(n\omega_0 \tau) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= -\frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

ตอนนี้เราทำการอินทิเกรต By Part

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt &= \frac{1}{n\omega_0} t \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} - \frac{1}{n\omega_0} \int_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{(n\omega_0)^2} \cos(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{1}{(n2\pi/T)^2} (\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{16}{T^2 (n2\pi/T)^2} (\cos n\pi - 1) \quad (2.41) \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $\cos n\pi = (-1)^n$ ดังนั้น

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ is even} \\ \frac{8}{n^2 \pi^2}, & n \text{ is odd} \end{cases} \quad (2.42)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{4}{T} t \sin(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -\frac{4}{T} t \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 (-\tau) \sin(n\omega_0(-\tau))(-d\tau) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin(n\omega_0 t) dt - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right) \quad (2.44)$$

2.2.6 เงื่อนไข Dirichlet (Dirichlet's Condition)

ก่อนหน้านี้นี้เราได้กล่าวถึงการหาอนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ และเราสมมติว่าฟังก์ชันดังกล่าวสามารถแทนได้ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ ตอนนี้เราจะตรวจสอบเกี่ยวกับการลู่ออกของอนุกรมฟูเรียร์สู่ฟังก์ชัน $f(t)$ เงื่อนไข Dirichlet เป็นเงื่อนไขที่เราใช้ตรวจสอบว่ามีความเป็นไปได้หรือไม่ที่จะใช้อนุกรมฟูเรียร์แทนฟังก์ชัน $f(t)$ เงื่อนไขดังกล่าวนี้เรียกว่าเงื่อนไข Dirichlet ซึ่งระบุว่า

- 1) ฟังก์ชัน $f(t)$ ต้องมีจำนวนความต่อเนื่องที่จำกัดในช่วงเวลาหนึ่งคาบ
- 2) ฟังก์ชัน $f(t)$ ต้องมีจำนวนค่าสูงสุดและต่ำสุดที่จำกัดในช่วงเวลาหนึ่งคาบ
- 3) ฟังก์ชัน $f(t)$ สามารถรวมกันได้แบบแอบโซลูท (Absolutely Integrable) นั่นคือ

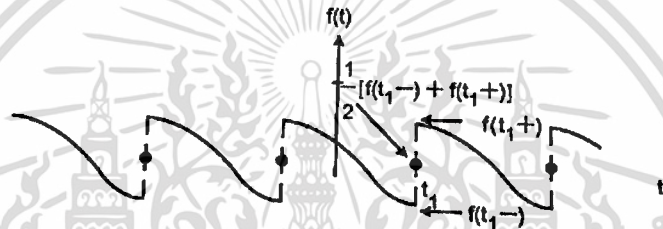
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty \quad (2.45)$$

เราจะกล่าวฟังก์ชัน $f(t)$ มีความต่อเนื่องเป็นท่อน (Piecewise Continuous) ในช่วงที่จำกัด $[-T/2, T/2]$ ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข (1) และ (2) และ ณ ตำแหน่งของจุดที่ไม่ต่อเนื่อง (ดังแสดงในรูปที่ 2.8) ซึ่งคือจุด $t = t_1$ อนุกรมฟูเรียร์มีค่าเข้าสู่

$$\frac{1}{2}[f(t_1^-) + f(t_1^+)] \quad (2.46)$$

โดยที่ $f(t_1^-)$ คือลิมิตของ $f(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_1 จากทางซ้ายและ $f(t_1^+)$ คือลิมิตของ $f(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_1 จากทางขวา



รูปที่ 2.9 ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องเป็นท่อนและลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา

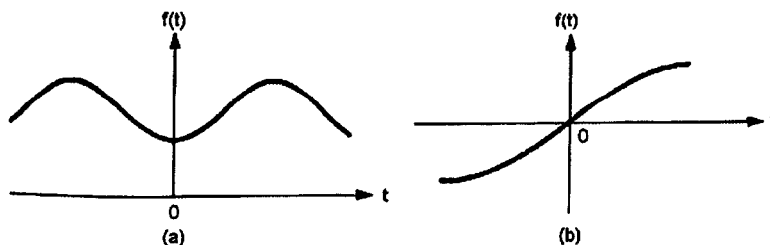
2.2.7 อนุกรมฟูเรียร์กับสมมาตรของฟังก์ชัน

คุณสมบัติบางประการของฟังก์ชันสามารถนำมาใช้เพื่อทำให้การคำนวณสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ง่ายขึ้น เช่นคุณสมบัติสมมาตรของฟังก์ชัน ซึ่งความสมมาตรของคลื่นในอนุกรมฟูเรียร์ ได้แก่สมมาตรของคลื่นแบบฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Even and Odd Function)

เรานิยามฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข

$$f(-t) = f(t) \quad (2.47)$$

และเป็นฟังก์ชันคี่ถ้า $f(-t) = -f(t)$ (2.48)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 2.10 (a) ฟังก์ชันคู่ (b) ฟังก์ชันคี่

คุณสมบัติจากสมมาตรของฟังก์ชัน

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ $f(t)$ มีคุณสมบัติดังนี้

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad (2.49)$$

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ $f(t)$ มีคุณสมบัติดังนี้

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0, \quad f(0) = 0 \quad (2.50)$$

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ที่เป็นคาบและมีคาบเวลา T ให้แสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์ประกอบด้วยค่าคงที่และเทอมที่เป็นโคไซน์เท่านั้น นั่นคือ

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad (2.51)$$

โดยที่

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

และ

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (2.52)$$

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ที่เป็นคาบและมีคาบเวลา T ให้แสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์เทอมที่เป็นไซน์เท่านั้น นั่นคือ

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

โดยที่

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (2.53)$$

2.2.8 รูปแบบเชิงซ้อนของอนุกรมฟูเรียร์ (Complex Form Fourier Series)

ในการประยุกต์ใช้งานหลายอย่างของอนุกรมฟูเรียร์ เป็นการสะดวกที่เราจะเขียนอนุกรมฟูเรียร์ในรูปแบบของเอ็กซ์โปเนนเชียลเชิงซ้อน $e^{\pm jn\omega_0 t}$

เราลองพิจารณาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคาบ $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (2.54)$$

โดยที่ $\omega_0 = 2\pi/T$ ไซน์และโคไซน์สามารถเขียนในเทอมของเอ็กซ์โปเนนเชียลได้เป็น

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \quad (2.55)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \quad (2.56)$$

แทนค่า (2.55) และ (2.56) ลงใน (2.54)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \quad (2.57)$$

เนื่องจาก $1/j = -j$ (2.57) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad (2.58)$$

ถ้าเราให้

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \quad (2.59)$$

ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2.60}
 \end{aligned}$$

สมการ (2.60) ถูกเรียกว่ารูปแบบเชิงซ้อนของอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(t)$ หรืออนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน (Complex Fourier Series) ของ $f(t)$

ถ้า $f(t)$ เป็นจำนวนจริงแล้ว

$$c_{-n} = c_n^* \tag{2.61}$$

โดยที่ * แทนคอนจูเกตเชิงซ้อน

แทนค่า a_n, b_n ใน c_n จะได้

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.62}$$

และเนื่องจากสำหรับฟังก์ชันคาบใดๆ $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ ดังนั้น c_n สามารถเขียนได้เป็น

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{2.63}$$

และถ้า

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}, \quad c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\phi_n} \tag{2.64}$$

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{2.65}$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) \tag{2.66}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับทุก n ยกเว้น $n = 0$ ในกรณีนั้น c_0 เป็นจำนวนจริงและ

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad (2.67)$$

ตัวอย่างที่ 2.5

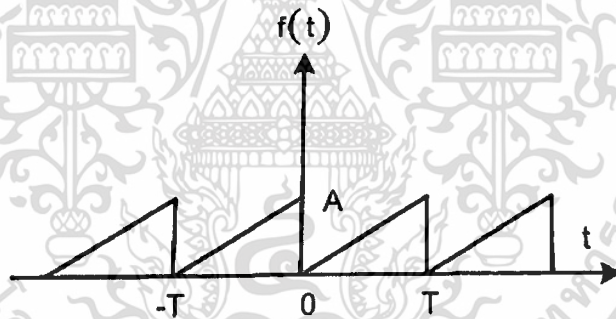
หาอนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนของฟังก์ชันรูปคลื่นฟันเลื่อย $f(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 2.10 และถูกนิยามดังนี้

$$f(t) = \frac{A}{T}t, \quad 0 < t < T, \quad f(t+T) = f(t)$$

วิธีทำ

อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนของ $f(t)$ คือ

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.68)$$



รูปที่ 2.11 ฟังก์ชันรูปฟันเลื่อย

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ c_n สามารถหาได้จาก (2.63) ดังนี้

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T^2} \int_0^T t e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T^2} \left(\left. \frac{t e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right|_0^T + \frac{1}{jn\omega_0} \int_0^T e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{A}{T^2} \left[\frac{T e^{-jn2\pi}}{-jn\omega_0} - \frac{1}{(jn\omega_0)^2} (e^{-jn2\pi} - 1) \right] \quad (2.70)$$

เนื่องจาก $e^{-jn2\pi} = 1$

$$c_n = j \frac{A}{n\omega_0 T} = j \frac{A}{2\pi n} = \frac{A}{2\pi n} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (2.71)$$

จะเห็นว่า $n = 0$ จะไม่สามารถหาค่าได้ ดังนั้น สำหรับ $n = 0$ เราใช้ $c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{1}{2} A \quad (2.72)$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{A}{2} + j \frac{A}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jn\omega_0 t} \quad (2.73)$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{(jn\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (2.74)$$

ตัวอย่าง 2.6

ให้หารูปแบบตรีโกณมิติของอนุกรมฟูเรียร์ในตัวอย่าง 2.5

วิธีทำ

เนื่องจาก

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n)$$

เราได้

$$a_0 = 2c_0 \quad (2.75)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = c_n + c_n^* = 2 \operatorname{Re}[c_n] \quad (2.76)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = j(c_n - c_n^*) = -2 \operatorname{Im}[c_n] \quad (2.77)$$

โดยที่ Re แทนส่วนที่เป็นจำนวนจริง Im แทนส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้นจากสมการ (2.71) และ (2.72)

$$a_0 = A, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{A}{n\pi} \quad (2.78)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.2.9 สเปกตรัมความถี่เชิงซ้อน (Complex Frequency Spectra)

พล็อตของขนาด (Magnitude) ของสัมประสิทธิ์เชิงซ้อน c_n กับความถี่ ω (ความถี่เชิงมุม) ถูกเรียกว่าสเปกตรัมแอมพลิจูดของฟังก์ชันคาบ $f(t)$ ซึ่งจะบอกให้ทราบว่าในสัญญาณที่เราสนใจมีตัวองค์ประกอบความถี่ใดอยู่บ้าง พล็อตของมุมเฟส ϕ_n ของ c_n กับความถี่ถูกเรียกว่าสเปกตรัมเฟสของ $f(t)$ เนื่องจากอินเด็กซ์ n ถูกสมมติว่าเป็นจำนวนเต็ม สเปกตรัมของแอมพลิจูดและเฟสจึงไม่มีค่าที่ต่อเนื่อง แต่จะมีค่าที่สคริตที่ $n\omega_0$ ดังนั้นเราจะเรียกว่าสเปกตรัมความถี่ที่สคริตหรือเส้นสเปกตรัม (Line Spectra)

ตัวอย่าง 2.7

หาสเปกตรัมความถี่ของฟังก์ชันคาบ $f(t)$ แสดงในรูปที่ 2.11 ซึ่งประกอบด้วยขบวนของพัลส์สี่เหลี่ยมที่เหมือนกันที่มีขนาดเท่ากับ A และช่วงเวลา d

วิธีทำ

ฟังก์ชัน $f(t)$ สามารถเขียนในช่วงเวลาหนึ่งคาบได้เป็น

$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0, & -\frac{1}{2}T < t < -\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}T \end{cases} \quad (2.80)$$

จาก (2.62) และด้วย $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ เราได้

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} \left[e^{-jn\omega_0 t} \right]_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) \\ &= \frac{Ad}{T} \frac{1}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) \\ &= \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} \end{aligned} \quad (2.81)$$

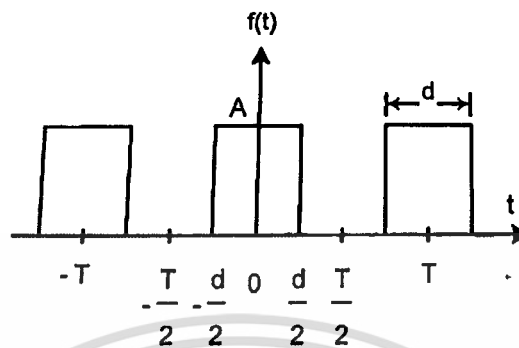
แต่ $n\omega_0 d/2 = n\pi d/T$ ดังนั้น

$$c_n = \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)} \quad (2.82)$$

เห็นได้ชัดจาก สมการ (2.81) และ (2.82) ว่า c_n เป็นจำนวนจริงและดังนั้นสเปกตรัมของเฟสมีค่าเป็นศูนย์ สเปกตรัมของแอมพลิจูดได้มาจากการพล็อตสมการ (2.81) และ (2.82) กับตัวแปรดีสคริต $n\omega_0$ สมการ (2.82) มีค่าได้เฉพาะที่มีความถี่ดีสคริต $n\omega_0$ นั่นคือสเปกตรัมความถี่คือฟังก์ชันดีสคริตและมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega_0 = 0, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots, \text{etc.}$$



รูปที่ 2.12 ขบวนการพัลส์สี่เหลี่ยมที่เหมือนกัน

เราจะพิจารณาสเปกตรัมที่ค่าเฉพาะบางค่าของ d และ T สำหรับ $d = 1/20$ และ $T = 1/4$ เราได้

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 8\pi$$

ดังนั้น สเปกตรัมแอมพลิจูดจะมีค่าเฉพาะที่

$$\omega_0 = 0, \pm 8\pi, \pm 16\pi, \dots, \text{etc.}$$

ดังแสดงในรูปที่ 2.12 (a)

เนื่องจาก $d/T = 1/5$ สเปกตรัมแอมพลิจูดมีค่าเป็นศูนย์ที่ค่า $n\omega_0$ ซึ่ง

$$n\omega_0 \frac{d}{2} = m\pi \quad \text{หรือ} \quad n\pi \frac{d}{T} = n\pi \left(\frac{1}{5}\right) = m\pi, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

นั่นคือ ที่ $\omega = \pm 5\omega_0 = \pm 40\pi, \pm 10\omega_0 = \pm 80\pi, \pm 15\omega_0 = \pm 120\pi$

กรณีต่อไปเราจะพิจารณกรณีสี่ $d = 1/20$ และ $T = 1/2$ และ

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4\pi, \quad \frac{d}{T} = \frac{1}{10}$$

ดังนั้นสเปกตรัมแอมพลิจูดจะมีค่าคงที่

$$\omega_0 = 0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \dots, \text{etc.}$$

และมีค่าเป็นศูนย์ที่ค่า $n\omega_0$ ซึ่ง

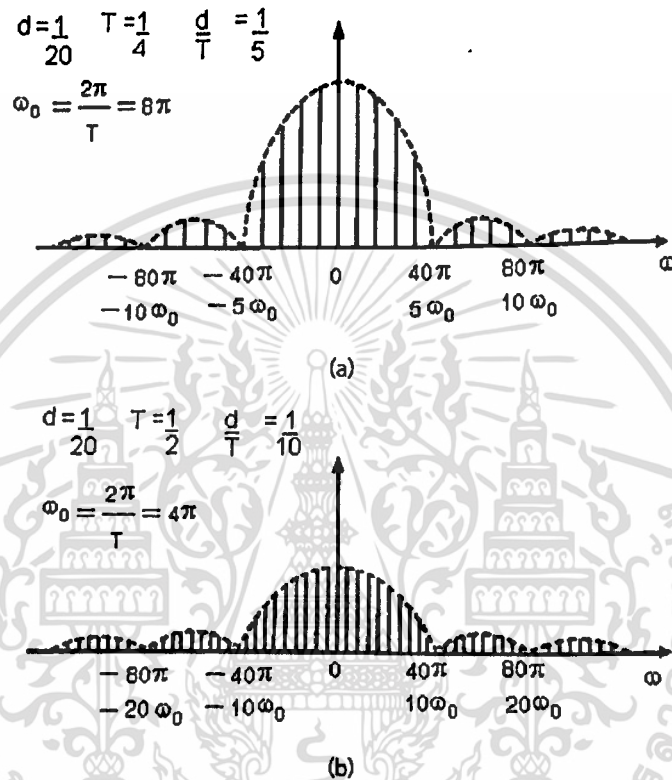
$$n\omega_0 \frac{d}{2} = m\pi \quad \text{หรือ} \quad n\pi \frac{d}{T} = n\pi \left(\frac{1}{10}\right) = m\pi, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

นั่นคือ ที่ $\omega = \pm 10\omega_0 = \pm 40\pi, \pm 20\omega_0 = \pm 80\pi, \pm 30\omega_0 = \pm 120\pi$

สเปกตรัมแอมพลิจูดสำหรับกรณีนี้แสดงในรูปที่ 2.12 (b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสังเกตว่าสเปกตรัมของเฟสในตัวอย่าง 2.7 มีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากความสมมาตรของพัลส์สี่เหลี่ยมในรูปที่ 2.11 รอบเส้นกึ่งกลางแนวตั้ง (Vertical Center Line) และเนื่องจากข้อนี้เลือกตำแหน่งจุดกำเนิด (Origin) ตัวอย่างต่อไปนี้จะสาธิตถึงกรณีซึ่งจุดกำเนิดเลื่อนไป $\frac{1}{2}d$



รูปที่ 2.13 สเปกตรัมของแอมพลิจูด

ตัวอย่าง 2.8

ให้แสดงว่าการเคลื่อนเวลาของฟังก์ชันคาบไม่มีผลต่อสเปกตรัมของขนาด แต่มีผลต่อสเปกตรัมเฟสขนาดเท่ากับ $-n\omega_0\tau$ เรเดียน สำหรับองค์ประกอบ (Components) ที่ความถี่ $n\omega_0$ ถ้าการเคลื่อนเวลามีขนาด τ

วิธีทำ

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบเวลา T และให้นุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนคือ

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.83)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(t-\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t-\tau)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0\tau} e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.84)$$

โดยที่

$$c_n = c_n e^{-jn\omega_0\tau} \quad (2.85)$$

ดังนั้น ถ้า

$$c_n = |c_n| e^{-j\phi_n} \quad (2.86)$$

ดังนั้น

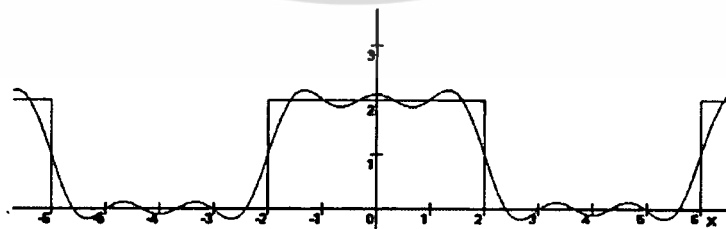
$$c_n = |c_n| e^{-j(\phi_n - n\omega_0\tau)} \quad (2.87)$$

จากสมการ (2.86) และ (2.87) เราเห็นได้ชัดว่าสเปกตรัมขนาดของ $f(t)$ และ $f(t-\tau)$ เหมือนกัน อย่างไรก็ตามเฟสจะต่างกัน การเลื่อนเวลา τ ทำให้เกิดการล่าช้า (Lag) ของเฟสเป็นจำนวน $n\omega_0\tau$ เรเดียน ในองค์ประกอบความถี่ $n\omega_0$

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

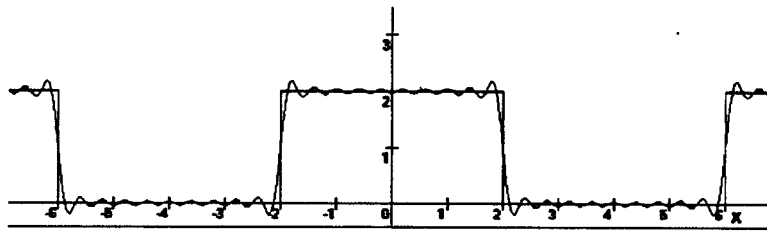
[3] จากงานวิจัยการสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ด้วยโปรแกรม Visual Basic (A Synthesis of Fourier Series by Visual Basic Program) การวิจัยนี้ได้ทำการสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ 3 ฟังก์ชันด้วยกัน คือ ฟังก์ชันซันบันได (Brown and Churchill, 1993) ฟังก์ชันพาราโบลาและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันที่ไม่มีใครวิจัยมาก่อนมี 2 ฟังก์ชันด้วยกัน คือ ฟังก์ชันพาราโบลาและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งสามารถแสดงผลเป็นภาพต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันซันบันได



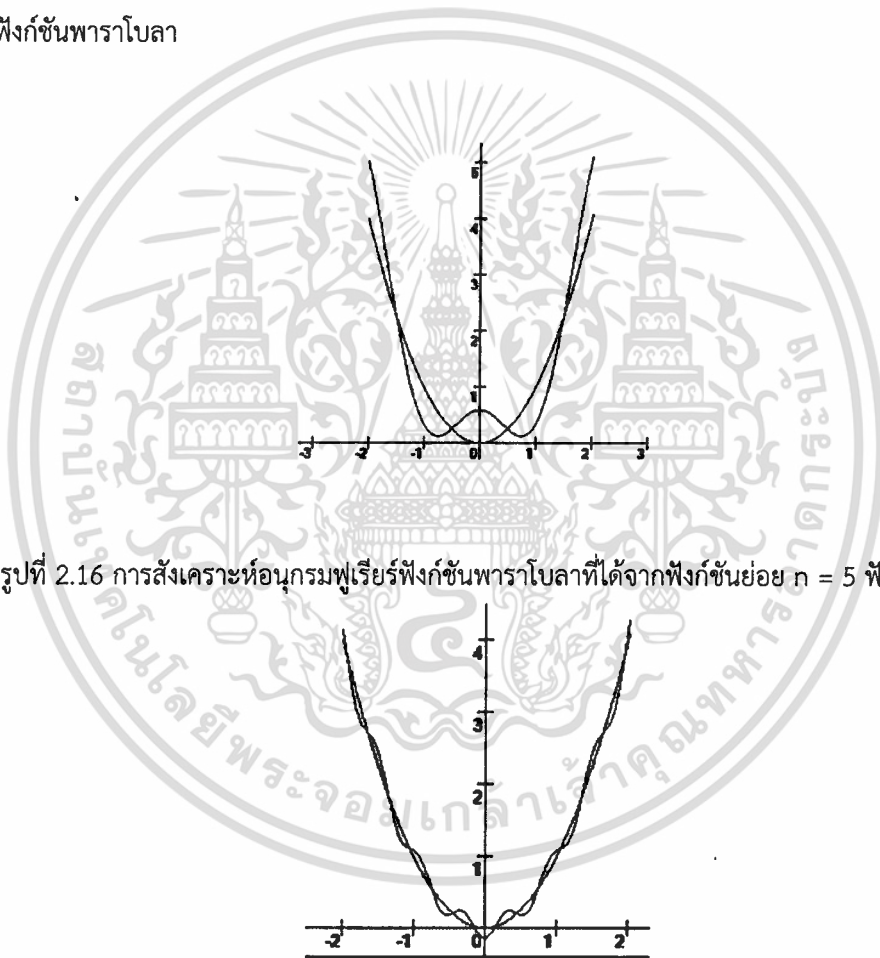
รูปที่ 2.14 การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันซันบันไดที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 5$ ฟังก์ชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

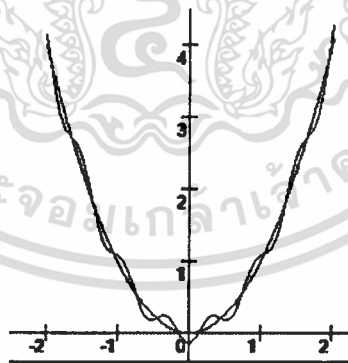


รูปที่ 2.15 การสังเคราะห์ท่อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันขั้นบันไดที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 20$ ฟังก์ชัน

2. ฟังก์ชันพาราโบลา



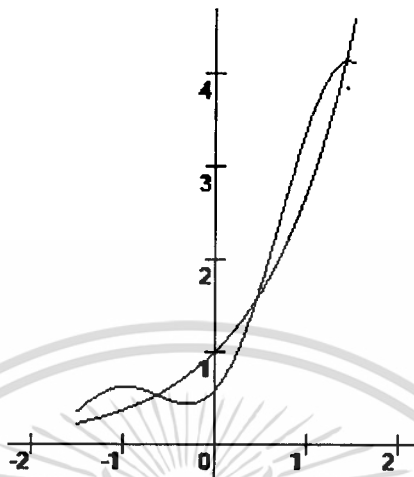
รูปที่ 2.16 การสังเคราะห์ท่อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันพาราโบลาที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 5$ ฟังก์ชัน



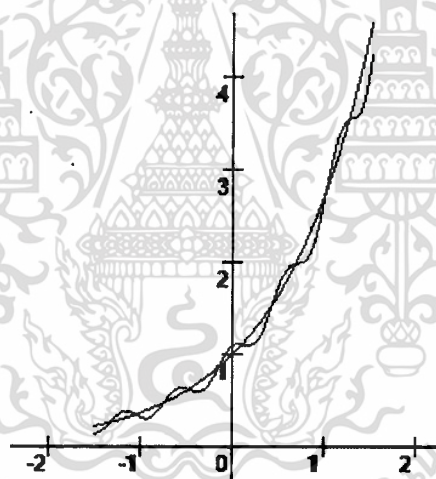
รูปที่ 2.17 การสังเคราะห์ท่อนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันพาราโบลาที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 20$ ฟังก์ชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล



รูปที่ 2.18 การสังเคราะห์หอนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 5$ ฟังก์ชัน



รูปที่ 2.19 การสังเคราะห์หอนุกรมฟูเรียร์ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่ได้จากฟังก์ชันย่อย $n = 20$ ฟังก์ชัน

[3] สำหรับการวิจัยนี้ได้ทำการสังเคราะห์หอนุกรมฟูเรียร์ 3 ฟังก์ชันด้วยกัน คือ ฟังก์ชันขั้นบันได ฟังก์ชันพาราโบลาและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันที่ไม่มีใครวิจัยมาก่อนมี 2 ฟังก์ชันด้วยกัน คือ ฟังก์ชันพาราโบลาและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จากการศึกษาวิจัยจะเห็นได้ว่าการบูรณาการความรู้ระหว่างคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์อันเกี่ยวกับการสังเคราะห์หอนุกรมฟูเรียร์ สามารถนำมาพัฒนาการศึกษาให้ผู้ศึกษาสามารถเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

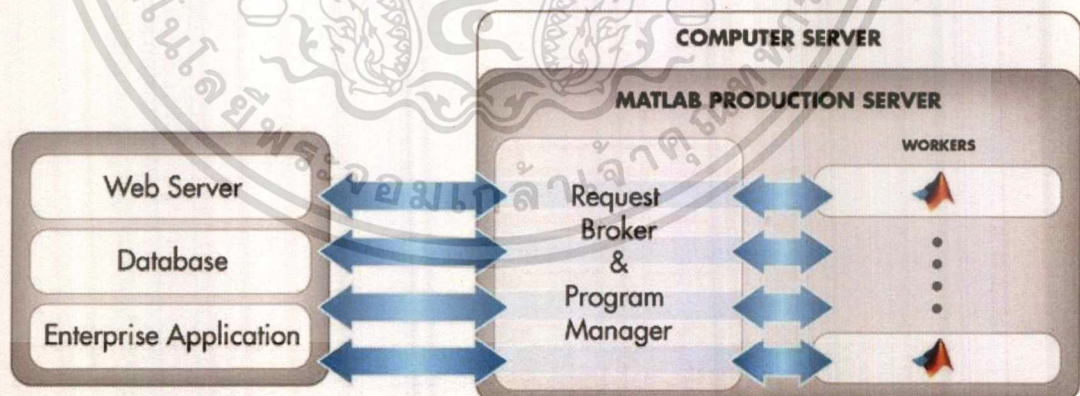
บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการดำเนินการสร้างเว็บแอปพลิเคชัน สำหรับคำนวณค่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ และวิเคราะห์ฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ เป้าหมายของบทนี้คือ เพื่อให้ทราบถึงขั้นตอนและการทำงานของงานวิจัย สามารถแบ่งหัวข้อที่สำคัญในขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยได้ดังนี้

3.1 การทำเว็บแอปพลิเคชันโดยใช้ ASP.NET

1. ศึกษาหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องอนุกรมฟูเรียร์ เพื่อนำมาใช้ในการทำเว็บแอปพลิเคชัน
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานในการทำเว็บแอปพลิเคชัน (MATLAB และ ASP.NET)
3. ออกแบบหน้า UI ของเว็บแอปพลิเคชัน
4. ทำการสร้างเว็บแอปพลิเคชัน
5. ทำทดสอบเว็บแอปพลิเคชันเพื่อหาข้อบกพร่องแล้วนำไปปรับปรุง



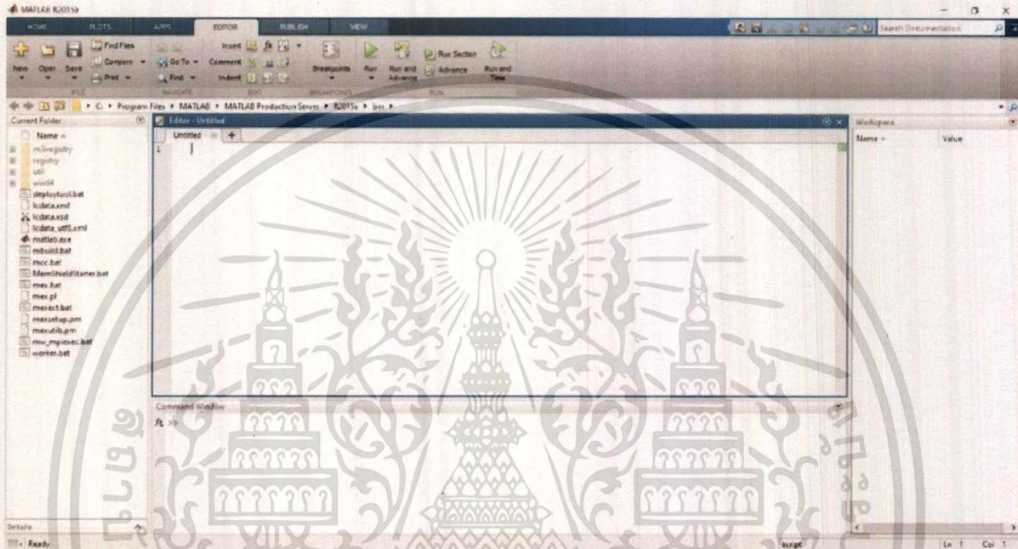
รูปที่ 3.1 ขั้นตอนวิธีในการประมวลผลโปรแกรม MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ขั้นตอนวิธีในการประมวลผลโปรแกรม MATLAB ผ่าน Web Server และส่งออกไปยัง Web Application

1. สร้างไฟล์ฟังก์ชันที่ต้องการประมวล (m-file) โดยมีกำหนด input และ output พารามิเตอร์ในฟังก์ชัน

- สร้าง m-file สำหรับประมวลผล โดยใช้ Editor ในโปรแกรม MATLAB R2015a



รูปที่ 3.2 โปรแกรม MATLAB R2015a

- โดย m-file ที่ใช้นั้นจะประกอบไปด้วยทั้งหมด 6 ไฟล์ ได้แก่ m-file ที่ใช้คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ แสดงกราฟของฟังก์ชัน ฟังก์ชันคู่ฟังก์ชันคี่ แสดงกราฟอนุกรมฟูเรียร์ และแสดงกราฟฟังก์ชันไซน์

coefficient	20/9/2561 12:10	M File	3 KB
creatgraph	24/8/2561 17:54	M File	4 KB
evao	5/8/2561 17:45	M File	2 KB
harmonicN	6/8/2561 22:18	M File	3 KB
harmonicNum	5/8/2561 17:48	M File	3 KB
sinusoidal	5/8/2561 17:46	M File	2 KB

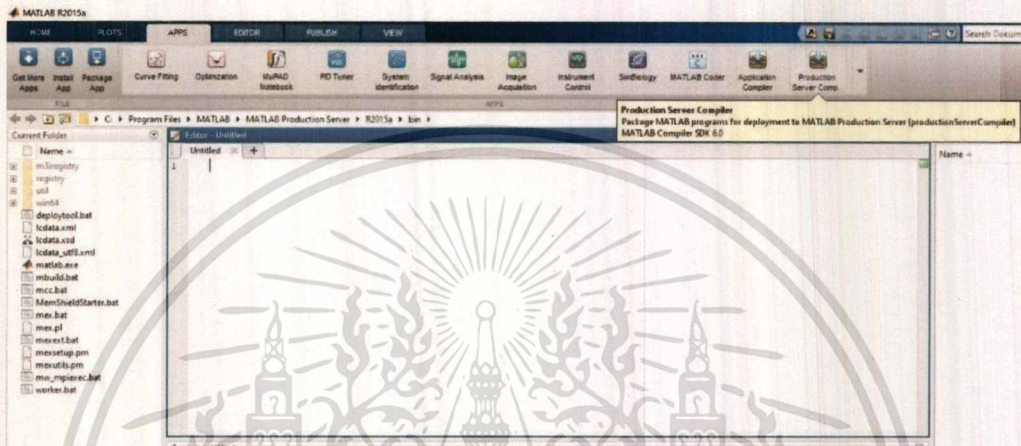
รูปที่ 3.3 ไฟล์ m-file

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. จำลองเซิร์ฟเวอร์บนเครื่อง Client (localhost) โดยใช้โมดูล MATLAB PRODUCTION SERVER

- เราสร้างเซิร์ฟเวอร์จำลองเพื่อเชื่อมต่อข้อมูลระหว่าง m-file ใน MATLAB กับ ASP.NET เข้าด้วยกัน

2.1 เข้าไปที่ MATLAB PRODUCTION SERVER ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (1)

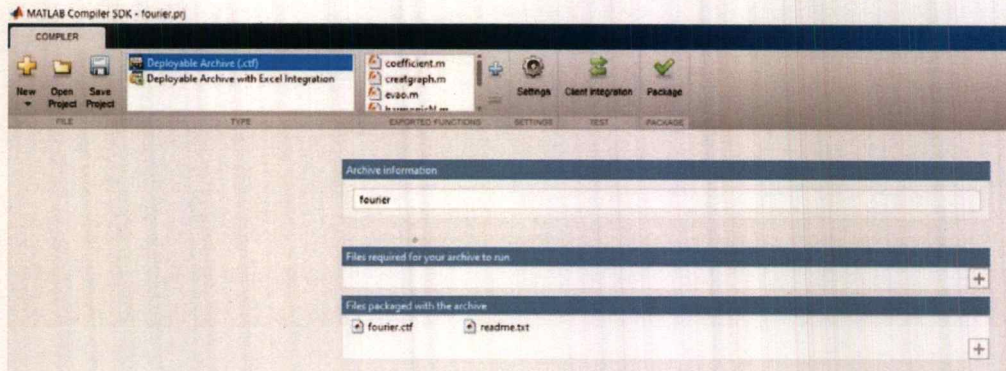
2.2 จะปรากฏหน้าต่างดังรูปที่ 3.5 จากนั้นกดที่รูป + เพื่อเพิ่มไฟล์ m-file ที่กล่าวไว้ข้างต้น
เข้าไป



รูปที่ 3.5 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (2)

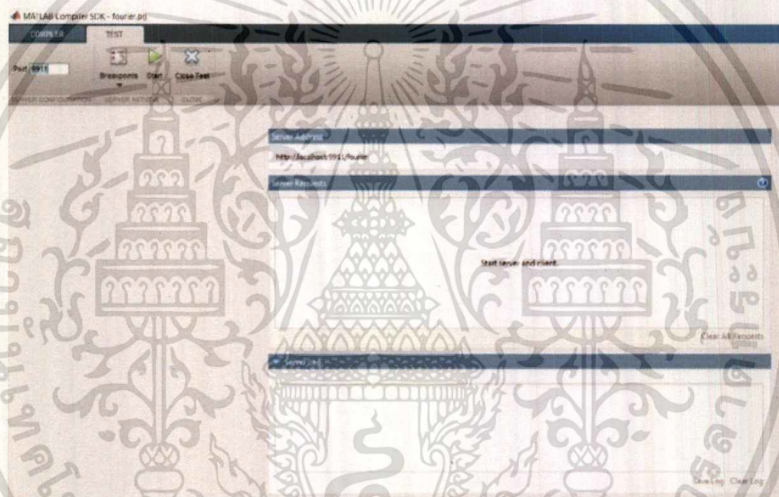
2.3 หลังจากเพิ่มไฟล์ m-file แล้วดังรูปที่ 3.6 ให้กดที่ Client Integration จะปรากฏหน้าต่างดังรูปที่ 3.7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

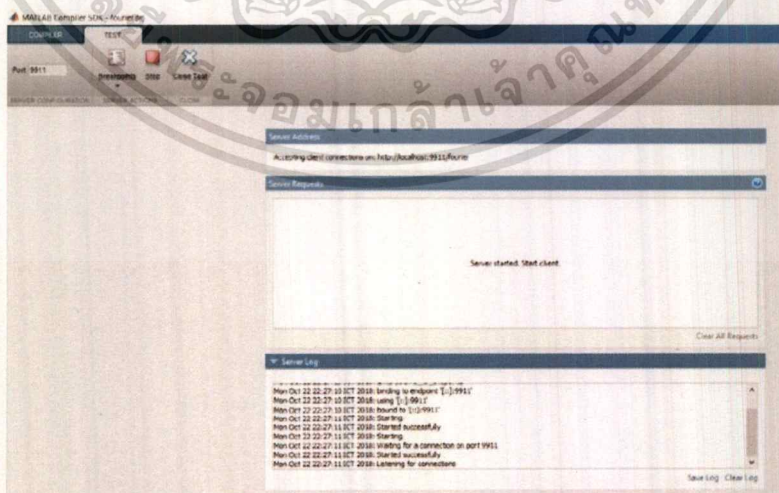


รูปที่ 3.6 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (3)

2.4 ให้เราทำการกรอกเลข Port ลงไปเป็น 9911 แล้วกด Start จะปรากฏหน้าต่างดังรูป 3.8 ก็จะได้เสร็จสิ้นการจำลองเซิร์ฟเวอร์



รูปที่ 3.7 ขั้นตอนการใช้ MATLAB PRODUCTION SERVER (4)

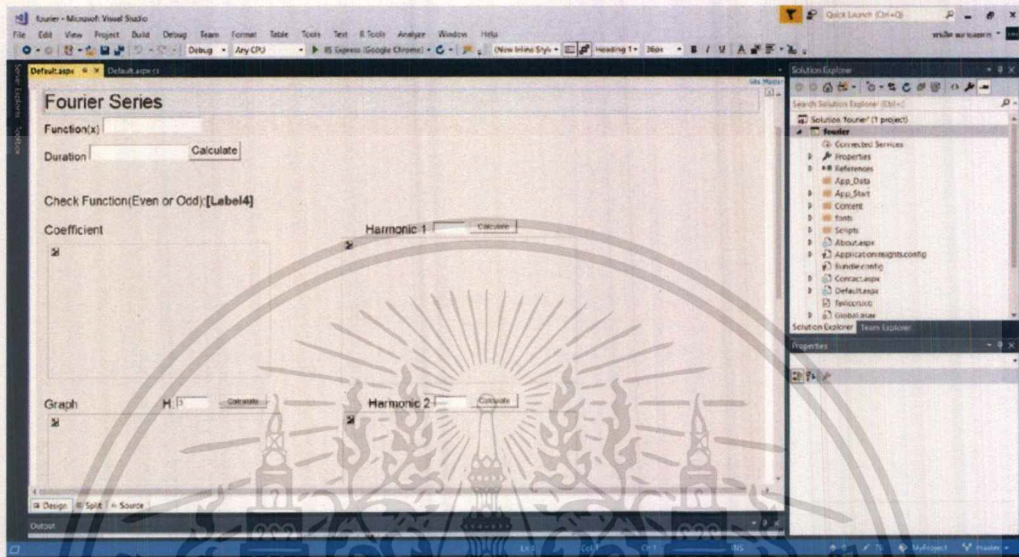


รูปที่ 3.8 การเริ่มใช้งาน MATLAB PRODUCTION SERVER

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

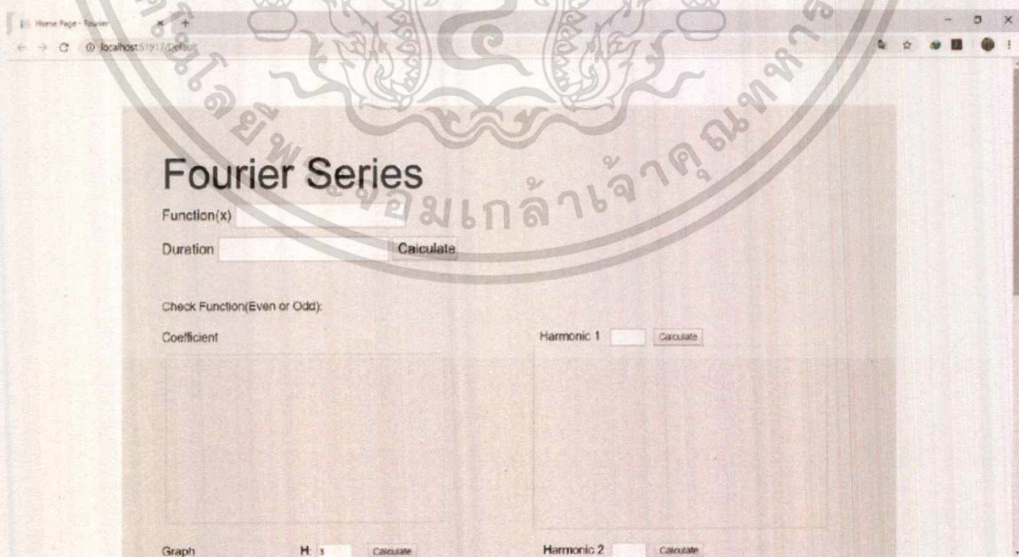
3. ออกแบบส่วนติดต่อกับผู้ใช้งาน (Web Form) โดยใช้ ASP.NET (C#)

- เราใช้โปรแกรม Visual Studio ในการออกแบบ User Interface ให้กับหน้าเว็บแอปพลิเคชัน



รูปที่ 3.9 การออกแบบ User Interface

หลังจากที่เราได้ทำการออกแบบ User Interface รวมถึงใส่ Code คำสั่ง และจำลองเซิร์ฟเวอร์เสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้เราทำการกดที่ IIS Express (Google Chrome) เพื่อการใช้งานเว็บแอปพลิเคชัน จะปรากฏหน้าต่างขึ้นดังรูป 3.10



รูปที่ 3.10 หน้าเว็บแอปพลิเคชันสำหรับผู้ใช้งาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. ข้อมูลที่กรอกใน Web Form จะถูกส่งเป็น Input ส่งไปฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นใน m-file ผ่าน MATLAB PRODUCTION SERVER เมื่อประมวลผลเสร็จ ก็จะส่ง Output ผ่าน MATLAB PRODUCTION SERVER เพื่อนำมาแสดงผลยัง Web Form ที่ได้ออกแบบไว้

การใส่ค่าฟังก์ชัน ขอบเขตและอื่นๆเพื่อจะส่ง input ไปยัง m-file ผ่าน MATLAB PRODUCTION SERVER โดยใส่ได้ดังนี้

การใส่ฟังก์ชันนั้นใส่อยู่ในรูปของเซตปิด แต่ในกรณีที่มีแค่ฟังก์ชันที่มีกรณีเดียวให้พิมพ์ใส่ไปเลย ส่วนการกำหนดขอบเขตของฟังก์ชันเราสามารถเลือกได้หลายแบบ โดยใส่ในรูปแบบของเซตปิด ดังรูป

Fourier Series

Function(x) [1 2]

Duration [-pi 0 pi] Calculate

รูปที่ 3.11 การใส่ค่าของฟังก์ชันและขอบเขต

หลังจากการใส่ค่าของฟังก์ชันและขอบเขตแล้ว เรากดปุ่ม Calculate ตัวเว็บจะแสดงค่าของสัมประสิทธิ์ และกราฟของตัวฟังก์ชัน รวมถึงบ่งบอกว่าฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่ หรือไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ดังรูป

Fourier Series

Function(x) [1 2]

Duration [-pi 0 pi]

Calculate

Check Function(Even or Odd): **Not Both**

Coefficient

$$A_0 = 3$$

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}{\pi n}$$

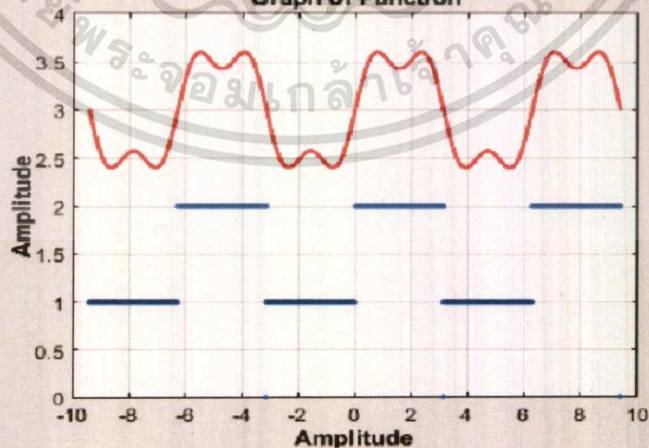
$$FS = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \sin(n x)}{\pi n}$$

Graph

H: 3

Calculate

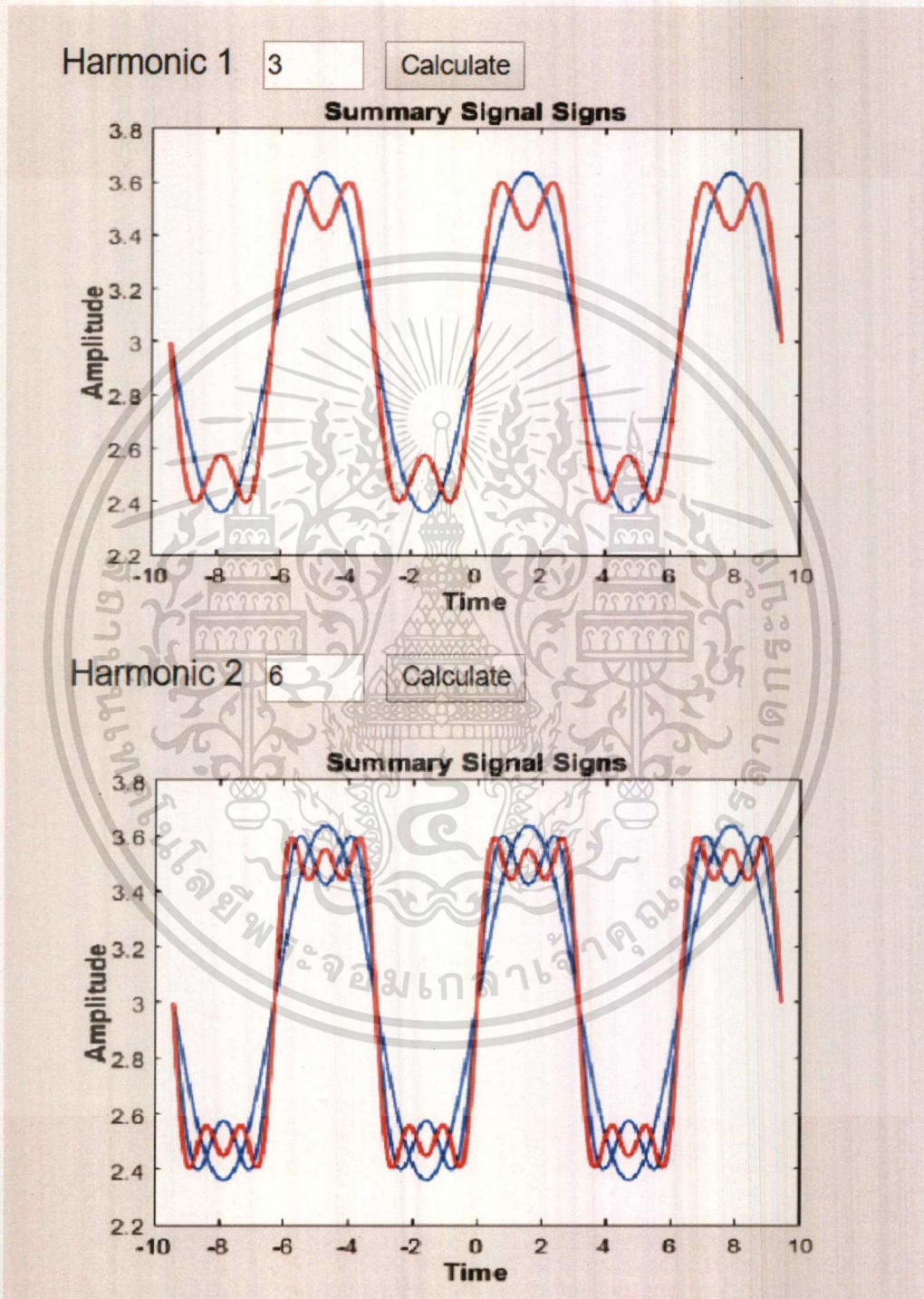
Graph of Function



รูปที่ 3.12 ผลลัพธ์ที่ได้จากการที่ใส่ค่าลงไป

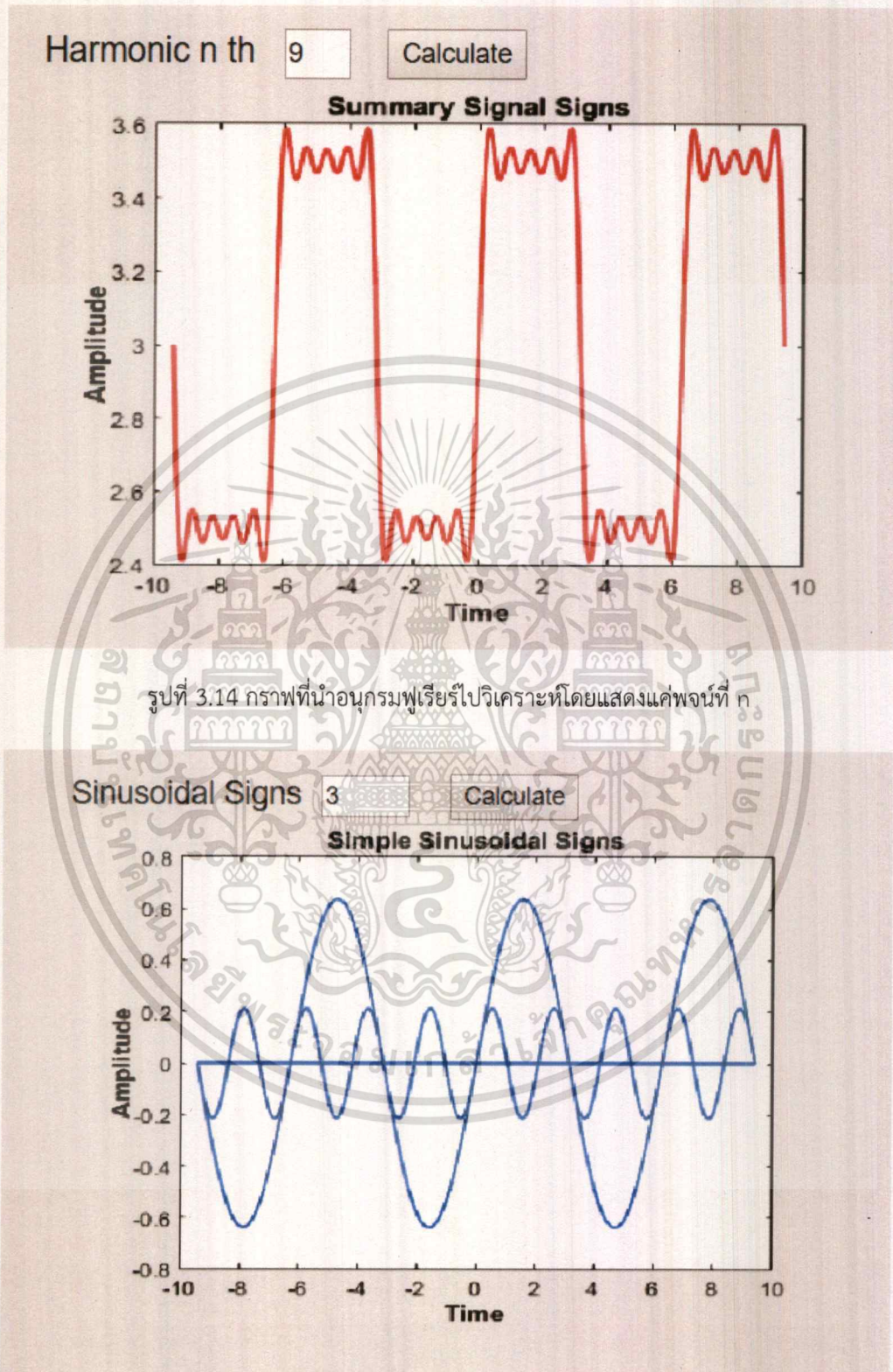
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอกจากนี้ยังแสดงกราฟที่นำอนุกรมฟูเรียร์ไปวิเคราะห์ โดยเรากำหนดค่าของฮาร์โมนิกได้ และกราฟของฟังก์ชันไซน์ด้วย



รูปที่ 3.13 กราฟที่นำอนุกรมฟูเรียร์ไปวิเคราะห์

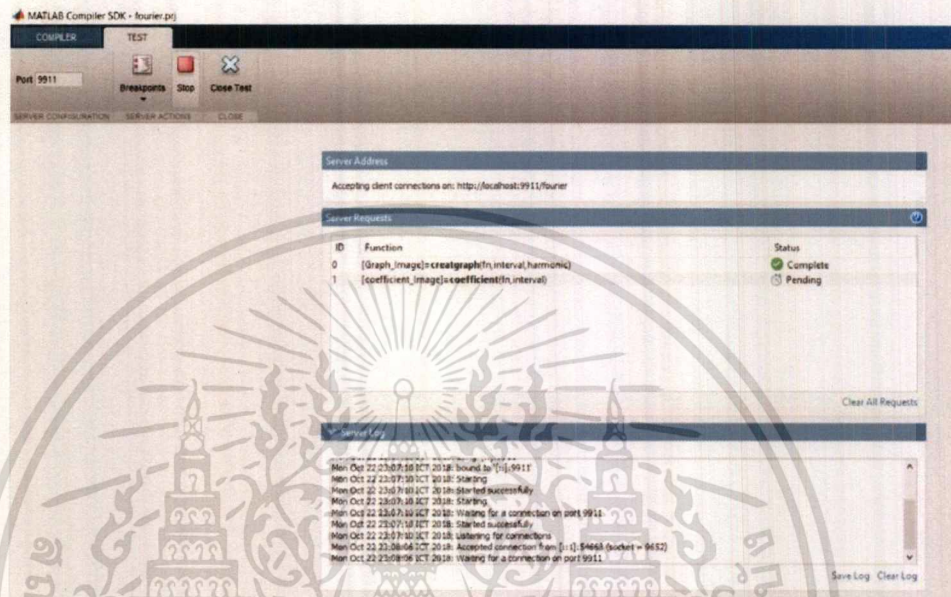
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.15 กราฟของฟังก์ชันไซน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

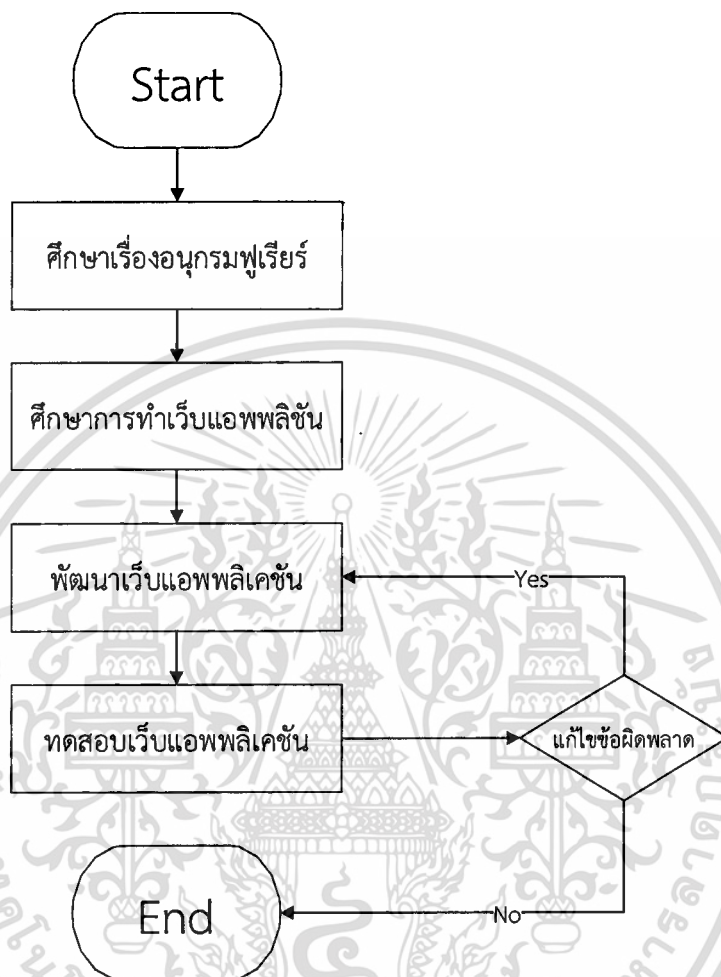
เมื่อทำการประมวลผล เซิร์ฟเวอร์จำลองก็จะทำการดึง input ที่ได้จากหน้า Web form มาคำนวณค่าแล้วส่งข้อมูลกลับเพื่อแสดง output ในหน้า Web Form ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ในบทที่ 4 ต่อไป



รูปที่ 3.16 MATLAB PRODUCTION SERVER เมื่อประมวลผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

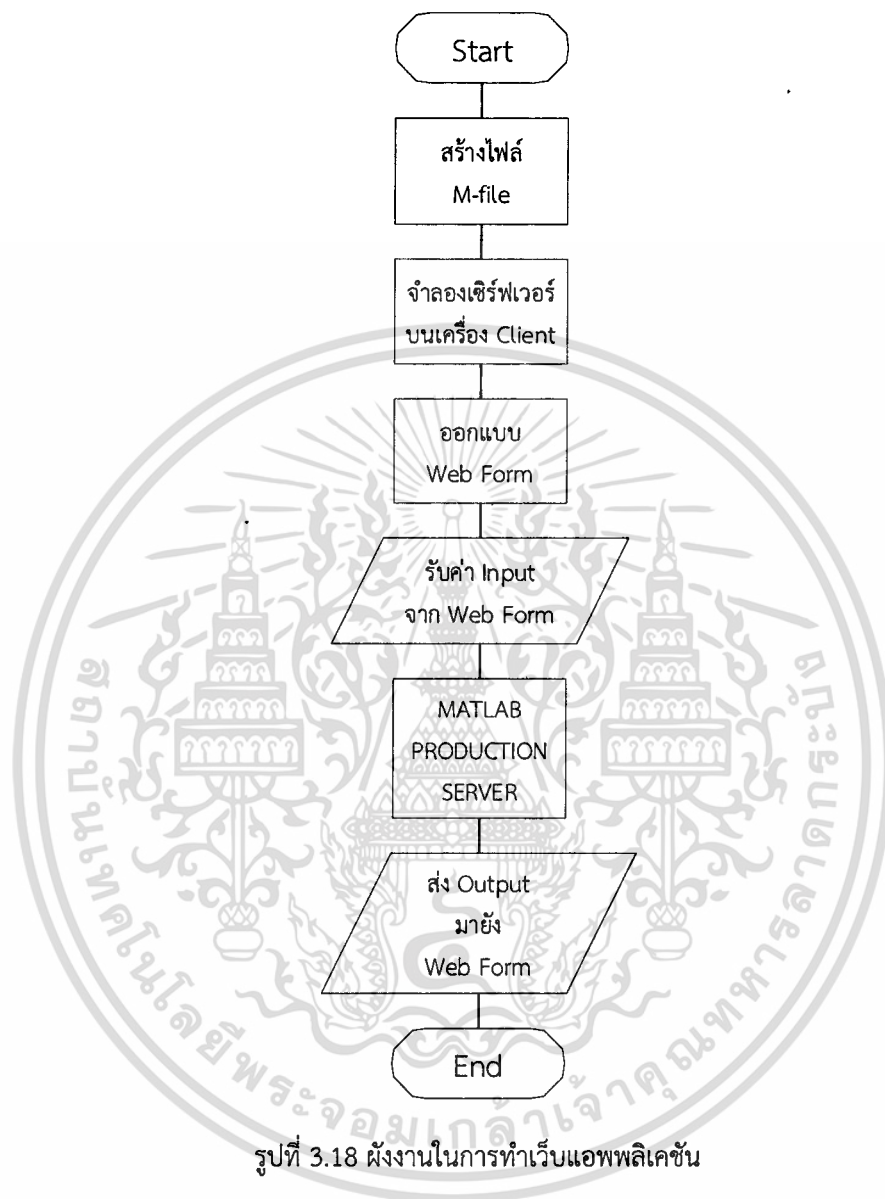
3.3 ผังงานในการทำปัญหาพิเศษ



รูปที่ 3.17 ผังงานในการทำปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 ผังงานในการทำเว็บแอปพลิเคชัน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

จากการศึกษาเนื้อหาที่ผ่านมาได้ศึกษาอนุกรมฟูรีเยร์ ในบทนี้ได้ทำการพัฒนาเว็บ แอปพลิเคชันเพื่อช่วยในการหาค่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์และแสดงรูปแบบของฟังก์ชันเมื่อมีขอบเขตของฟังก์ชันที่แตกต่างกันไป ในการทำเว็บแอปพลิเคชันนั้น เราได้ใช้ Visual Studio ในการทำ โดยเขียนด้วยภาษา C# หรือจะเรียกว่า ASP.NET ก็ได้เช่นเดียวกัน โดยส่วนตัวคำนวณค่าและแสดงกราฟ เราได้ใช้ MATLAB ในการดำเนินการ

4.1 ภาพรวมเว็บแอปพลิเคชัน

เว็บแอปพลิเคชันนี้ได้ถูกสร้างและพัฒนาเพื่อใช้ในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์และแสดงรูปแบบของฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมฟูรีเยร์



รูปที่ 4.1 ภาพรวม Web Application

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 ตัวอย่างอนุกรมฟูรีเยร์

$$\text{Ex } f(x) = \begin{cases} 3 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases} \text{ และ } f(x+2) = f(x)$$

ใส่ค่าที่โจทย์ให้มาลงในเว็บแอปพลิเคชัน ดังนี้

Fourier Series

Function(x) [3 x]

Duration [-1 0 1]

Check Function(Even or Odd): **Not Both**

Coefficient

$$A_0 = \frac{7}{2}$$

$$A_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$B_n = \frac{2(-1)^n - 3}{\pi n}$$

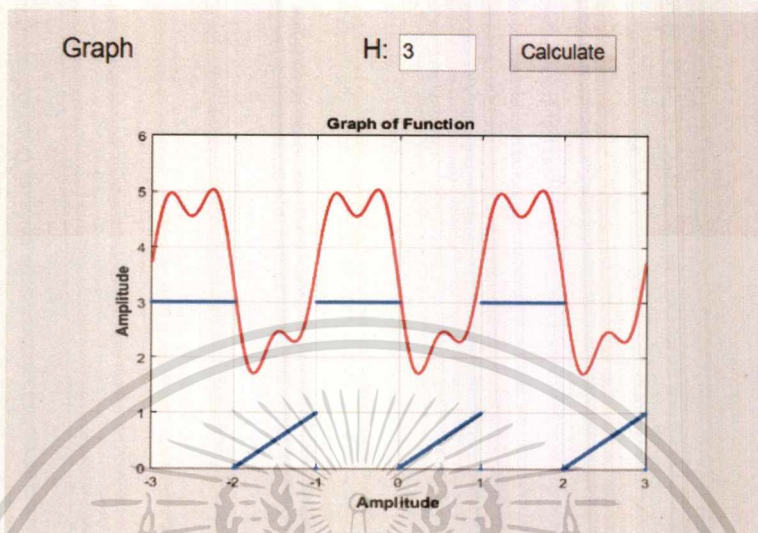
$$FS = \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx) (2(-1)^n - 3)}{\pi n} + \frac{\cos(nx) ((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$

รูปที่ 4.2 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (a)

จะเห็นว่าเว็บแอปพลิเคชันนั้นจะแสดงผลลัพธ์ของค่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์ รวมถึงอนุกรมฟูรีเยร์ของโจทย์ออกมา พร้อมทั้งบ่งบอกว่าฟังก์ชันของโจทย์ข้อนี้เป็นฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่ หรือไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

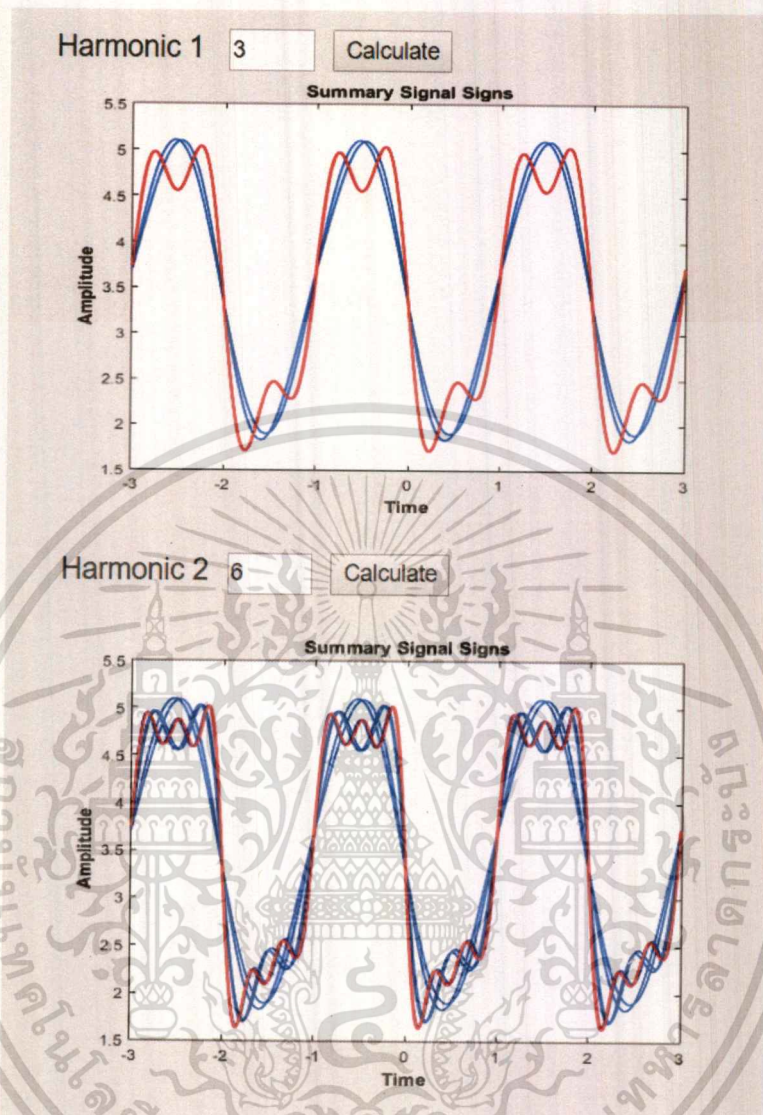
ต่อมาเป็นการแสดงรูปกราฟของฟังก์ชันโจทย์และฟังก์ชันที่นำอนุกรมฟูเรียร์มาเปรียบเทียบกับกัน



รูปที่ 4.3 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (b)

อธิบายจากรูปได้ว่า เส้นสีน้ำเงินคือกราฟฟังก์ชันของโจทย์ และกราฟสีแดงคือกราฟของโจทย์ที่นำอนุกรมฟูเรียร์มาวิเคราะห์ โดยแทนค่า n ในอนุกรมเป็น 3
ต่อมาเป็นการแสดงการใช้อนุกรมฟูเรียร์วิเคราะห์ต่อเนื่อง โดยกำหนดค่า n ขึ้นมา โดยกราฟนั้นจะซ้อนทับกันเพื่อให้เราดูการวิเคราะห์ได้อย่างชัดเจนมากขึ้น

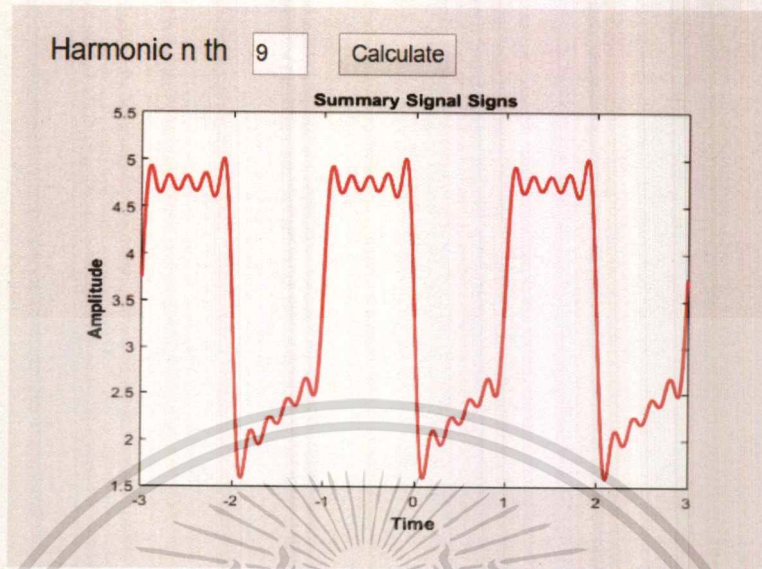
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (c)

แล้วเมื่อเราแทนค่า n เป็นจำนวนมากๆนั้น ทำให้เราเห็นเส้นซ้อนทับกันเยอะจนเกินไป เราจะได้ทำการกำหนดให้แสดงแค่เส้นที่ n ไว้ในอีกกราฟขึ้น

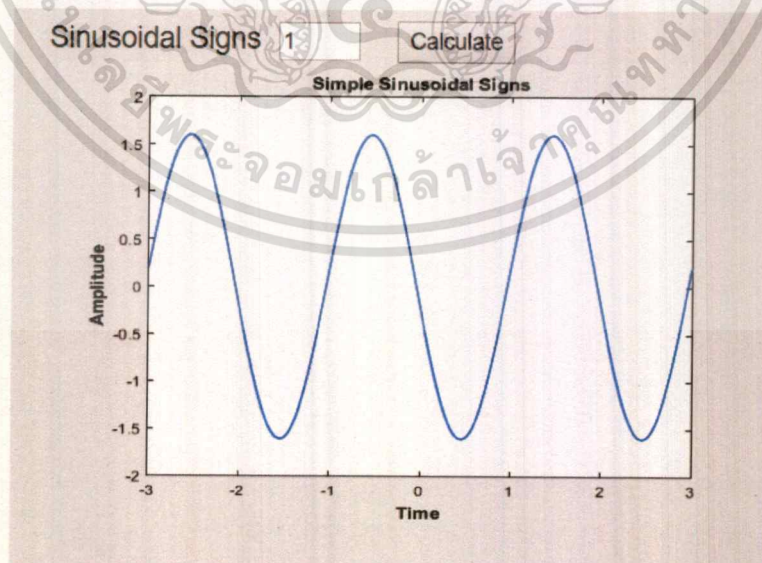
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (d)

จะเห็นได้ว่า เมื่อค่า n มากขึ้นจะเกิดการซ้ำของฟังก์ชันมากขึ้น รูปกราฟก็จะดูถี่ขึ้น ทำให้วิเคราะห์ได้ดีมากขึ้น

และในส่วนสุดท้ายของเว็บแอปพลิเคชันเราได้แสดงกราฟของฟังก์ชันไซน์ของโจทยขึ้นมา เพื่อให้เราเห็นว่าตัวกราฟของโจทยนั้นมีรูปร่างลักษณะการเคลื่อนที่อย่างไรเมื่อค่าของ n มากขึ้น จากรูปเราได้กำหนดค่า $n = 1$ เพื่อให้ดูง่ายขึ้น



รูปที่ 4.6 ผลลัพธ์ของตัวอย่าง (e)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์โจทย์ในเว็บแอปพลิเคชันแล้ว สามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ ที่เราต้องการหาค่าได้ เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ที่เราได้ในบางข้อนั้น สามารถบ่งบอกได้ว่าข้อนั้นเป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่โดยมีเงื่อนไขคือ

1. เมื่อ a_0, a_n หาค่าได้ที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ b_n มีค่าเป็นศูนย์ ฟังก์ชันในข้อนั้นสามารถสรุปได้เลยว่าเป็นฟังก์ชันคู่
2. เมื่อ b_n หาค่าได้ที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ a_0, a_n มีค่าเป็นศูนย์ ฟังก์ชันในข้อนั้นสามารถสรุปได้เลยว่าเป็นฟังก์ชันคี่
3. ถ้าค่าของสัมประสิทธิ์ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้น เราสามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชันในข้อนั้นไม่เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

ฟังก์ชันสัญญาณที่เป็นรายคาบ ซึ่งสามารถใช้เทคนิคของอนุกรม แยกฟังก์ชันสัญญาณรายคาบนั้นออกเป็น สัญญาณรูปขายน้อยๆรูปประกอบกัน

จากกราฟที่แสดงในเว็บแอปพลิเคชันสามารถวิเคราะห์จำนวนฮาร์โมนิก (Sine Wave) ได้ว่า ถ้าจำนวนฮาร์โมนิกมากขึ้น ซึ่งหมายถึงการนำอนุกรมฟูเรียร์มาวิเคราะห์ซ้ำๆ จะเห็นได้ว่ายิ่งจำนวนฮาร์โมนิกมากขึ้นก็จะสามารถวิเคราะห์คลื่นสัญญาณได้ดีมากขึ้น เนื่องจากคลื่นที่มีคาบ (Periodic Wave) เกิดจากผลรวมของคลื่นฮาร์โมนิกที่มีความถี่เดียว จะสรุปได้ว่า กราฟของอนุกรมจะมีลักษณะใกล้เคียงกับกราฟของฟังก์ชันมากยิ่งขึ้นตามจำนวนพจน์ของอนุกรมที่เพิ่มขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

เว็บแอปพลิเคชันนี้ไม่สามารถหาอนุกรมฟูเรียร์ในบางกรณีได้อย่างเช่น การกระจายครึ่งช่วง เว็บแอปพลิเคชันนี้ทำเพื่อเป็นสื่อที่ช่วยการเรียนการสอน เกี่ยวกับฟังก์ชันที่เป็นรายคาบในเบื้องต้นเท่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] มนัส สังวรศิลป์ และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณ์. กรุงเทพฯ : อินโฟเพรส, 2543.
- [2] ชูชาติ ปิณฑวิรุจน์. สัญญาณและระบบ Signals and Systems. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด มีน เซอร์วิส ซัพพลาย, 2560.
- [3] สำคัญ รัตนบุรี. (2557) “การสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ด้วยโปรแกรม Visual Basic A Synthesis of Fourier Series by Visual Basic Program,” วารสารวิจัยมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย. 6(1) : 64-76.
- [4] มณีโชติ สมานไทย. การเขียนโค้ด ASP.NET ฉบับสมบูรณ์. นนทบุรี : อินโฟเพรส, 2546.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก

ASP.NET

ASP.NET เป็นภาษาสคริปต์บนเซิร์ฟเวอร์ไซด์ (Server site scripting language) หมายถึง การประมวลผลจะเกิดขึ้นบนเครื่องแม่ข่าย หรือ เซิร์ฟเวอร์ (Server) ที่เป็นระบบปฏิบัติการของ windows แล้วจึงสร้างผลลัพธ์เป็นภาษา HTML ส่งให้กับเครื่องลูกข่าย หรือ ไคลเอ็นต์ (Client) เพื่อแสดงผล ซึ่งลดภาระการส่งถ่ายข้อมูลจำนวนมาก เพื่อมาประมวลผลบนเครื่องลูกข่าย การเขียนสามารถทำได้โดยการเขียนโค้ด ASP.NET แทรกลงไปในโค้ด HTML ได้ อีกทั้ง ASP.NET นั้นเป็นภาษาสคริปต์ยุคใหม่ที่ถูกสร้างขึ้นมาสำหรับการพัฒนาซอฟต์แวร์ภายใต้เทคโนโลยี Microsoft.NET ซึ่งเป็นเทคโนโลยีที่ได้รับความนิยมสูงที่สุดในปัจจุบัน



ส่วนประกอบของเว็บไซต์ใน ASP.NET

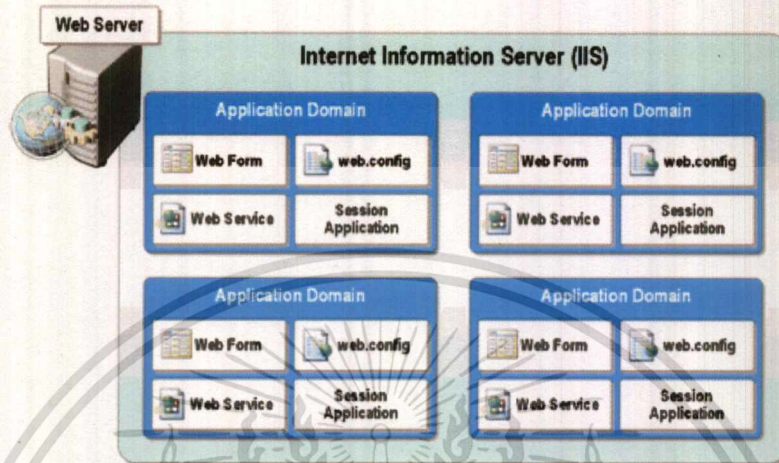
ส่วนประกอบของเว็บไซต์ใน ASP.NET มีด้วยกัน 3 ส่วนใหญ่ๆ ดังนี้

1. แอปพลิเคชันโดเมน ในเว็บไซต์แต่ละเว็บไซต์ จะประกอบด้วยไฟล์หลายๆ ไฟล์ ที่ทำงานภายใต้หน่วยความจำกลุ่มเดียวกัน และทำงานภายใต้ค่าคอนฟิก (Configuration Setting) เดียวกันที่เรียกว่า แอปพลิเคชันโดเมน

ในแต่ละเว็บไซต์จะมีแอปพลิเคชันโดเมนเป็นของตัวเอง แต่ละแอปพลิเคชันโดเมนจะไม่สามารถมองเห็นข้อมูลของแอปพลิเคชันโดเมนอื่นได้ เช่น ค่าของตัวแปรเซสชัน หรือตัวแปรแอปพลิเคชัน แม้ว่าจะมีหลายๆแอปพลิเคชันโดเมนทำงานอยู่ในเซิร์ฟเวอร์ตัวเดียวกันก็ตาม ซึ่งตรงนี้ทำให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เว็บไซต์มีความปลอดภัยในตัวเอง แต่ถ้าเกิดมีเว็บไซต์บางตัวเกิดตายไป ก็จะไม่ส่งผลกระทบต่อเว็บไซต์อื่นที่อยู่คนละแอฟพลิเคชันโดเมน



แอฟพลิเคชันโดเมนบนเว็บเซิร์ฟเวอร์



2. ไฟล์ในเว็บไซต์ ASP .NET

ไอคอน	ชนิดไฟล์	นามสกุล	รายละเอียด
	เว็บฟอร์ม	*.aspx	ใช้ออกแบบหน้าเว็บเพจ และติดต่อกับ Code Behind ได้
	เว็บยูสเซอร์คอนโทรล	*.ascx	ใช้สร้างคอนโทรลที่ใช้สำหรับเว็บฟอร์ม
	เว็บเซอร์วิส	*.asmx	ใช้สร้างเว็บเซอร์วิส
	HTML	*.html	หน้า HTML ที่สามารถบรรจุโคลเอ็นสคริปต์ได้
	สไตล์ชีต	*.css	ใช้กำหนดสไตล์ของหน้า HTML
	คลาส	*.cs	คลาสเปล่าที่ให้นำไปเขียนโค้ดต่อ
	ไฟล์ Global Application	*.asax	ไฟล์สำหรับจัดการกับเหตุการณ์ (Event) ต่างๆ ของเว็บไซต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูอาจารย์เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่ไปยังที่อื่นโดยไม่ได้รับอนุญาต
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

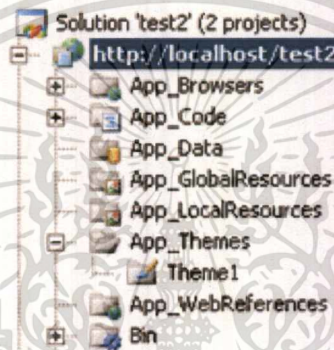
	ไฟล์คอนฟิกูเรชัน	*.config	ไฟล์สำหรับกำหนดค่า ต่างๆ ในเว็บไซต์
	XML	*.xml	ไฟล์ XML เปล่า
	สกีม่าของ XML	*.xsd	ไฟล์สกีม่า ที่ใช้สำหรับ ตรวจสอบความ ถูกต้องของ XML
	เท็กซ์	*.txt	ไฟล์ข้อความเปล่า
	รีซอร์ส	*.resx	ไฟล์ที่ใช้เก็บข้อมูลของ .NET
	เดต้าเซต	*.xsd	ใช้สร้างสกีม่า จาก คลาสเดต้าเซต
	คริสตรัล รีพอร์ต	*.rpt	ไฟล์ที่ใช้สร้างรายงาน สำหรับแอปพลิเคชัน เว็บ และวินโดว์
	XSLT	*.xslt	ไฟล์ที่ใช้แปลงข้อมูล XML ให้เป็นรูปแบบ ต่างๆ
	ฐานข้อมูล SQL	*.mdf	ฐานข้อมูล SQL เปล่า ที่ใช้กับ SQL Server
	Generic Handler	*.ashx	ไฟล์ที่ใช้จัดการกับร้อง ขอไฟล์ต่างๆ ภายใน เว็บไซต์
	แผนผังเว็บไซต์	*.sitemap	ใช้เก็บแผนที่เว็บไซต์ ซึ่งอยู่ในรูปของ XML
	รายงาน	*.rdlc	ใช้สร้างรายงาน โดย ใช้เทคโนโลยีการสร้าง รายงานของ ไมโครซอฟท์
	Skin	*.skin	ใช้กำหนดสีสัน (Theme) ภายใน เว็บไซต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่บนอินเทอร์เน็ต
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	Browser	*.browser	ไฟล์ที่ใช้กำหนดความ หมายของเบราเซอร์
	คลาสไดอะแกรม	*.cd	คลาสไดอะแกรม


3. โพลเดอร์ในเว็บไซต์ ASP .NET

ภายในเว็บไซต์ที่สร้างบน ASP .NET สามารถเพิ่มไฟล์ต่างๆ เช่น Code Behind เว็บฟอร์ม หรือ User Control ได้







โพลเดอร์ในเว็บไซต์ ASP .NET

สามารถเพิ่มโพลเดอร์เหล่านี้ โดยคลิกขวาที่โพรเจกต์ แล้วเลือก Add ASP .NET Folder จะมีโพลเดอร์ 7 โพลเดอร์มาให้เลือก ซึ่งโพลเดอร์เหล่านี้จะมีหน้าที่ต่างๆ กัน ดังตารางด้านล่าง

ไอคอน	ชนิดโพลเดอร์	รายละเอียด
	Bin	บรรจุแอสเซมบลีที่ได้ถูก คอมไพล์ไว้แล้วเพื่อใช้กับ เว็บไซต์
	App_Browsers	เป็นไฟล์ XML ที่อนุญาตให้เรา สามารถเขียนขึ้นมาได้เองเพื่อ บอกถึงคุณสมบัติในด้านต่างๆ ทางฝั่งไคลเอนต์ของเบราเซอร์ แต่ละชนิด เช่น ไคลเอนต์ สคริปต์ การรองรับเฟรม การ รองรับคุกกี้ เราสามารถเขียน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุ
 ตรีจส่งแบร่าเซอร์ขณะด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		<p>ติดต่อกับเว็บเซิร์ฟเวอร์ได้ว่าตรงกับ เบราเซอร์ตัวใดที่เรา กำหนด เพื่อที่จะได้คืนผลลัพธ์ ให้เหมาะสมให้กับโคลเอนต์</p>
	App_Code	<p>บรรจุไฟล์คลาสต่างๆ ที่อยู่ในรูปของ Source Code (*.vb หรือ *.cs) โดยไฟล์คลาสที่ถูกเขียนขึ้น แล้วนำไปวางในโฟลเดอร์นี้ จะถูกคอมไพล์โดยอัตโนมัติ ดังนั้นจึงเหมาะสำหรับการเก็บคอมโพเนนต์หรือไลบรารีต่างๆ ที่สามารถถูกเรียกใช้ได้จากเว็บฟอร์มทุกตัวในเว็บไซค์ หลังจากที่มีการคอมไพล์ไฟล์คลาสในโฟลเดอร์นี้แบบอัตโนมัติแล้ว จะได้แอสเซมบลีชุดหนึ่ง ซึ่งจะถูกเก็บไว้ในโฟลเดอร์ชั่วคราว ที่ไม่ได้เก็บในโฟลเดอร์ Bin</p>
	App_Data	<p>บรรจุไฟล์ข้อมูลต่าง รวมทั้งไฟล์ฐานข้อมูล SQL (*.mdf) หรือไฟล์ข้อมูล XML แต่เราก็ไม่จำเป็นเสมอไปที่จะต้องเก็บไฟล์ข้อมูลไว้ในที่นี้ เป็นเพียงแค่ข้อเสนอแนะเท่านั้น</p>
	App_GlobalResources	<p>บรรจุไฟล์รีซอร์สสำหรับ .NET ซึ่งสามารถถูกดึงข้อมูลไปใช้จากทุกเว็บฟอร์มต่างๆ ภายในเว็บไซค์</p>
	App_LocalResources	<p>คล้ายกับโฟลเดอร์ App_GlobalResources แต่</p>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		จะสามารถดึงข้อมูลไปใช้กับเฉพาะเว็บฟอร์มเท่านั้น
	App_Themes	บรรจุ Theme ที่ใช้กับเว็บไซต์
	Theme	บรรจุรูปภาพ และสีสันทันที่ใช้กับเว็บไซต์
	App_WebReferences	บรรจุการอ้างอิงไปถึงเว็บเซอร์วิสอื่นๆ ที่สามารถถูกเรียกใช้ได้ภายในเว็บไซต์ ซึ่งภายในจะบรรจุข้อมูล WSDL และ Discovery ของเว็บเซอร์วิส



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้


```

    {
        byte[] sinusoidal(string fn, string interval, string number);
    }
public interface IHarmonic
    {
        byte[] harmonicNum(string fn, string interval, string harmonic);
    }
public interface IHarmonicN
    {
        byte[] harmonicN(string fn, string interval, string harmonic);
    }
public partial class _Default: Page
    {
        protected void Page_Load(object sender, EventArgs e)
        {

        }

        protected void Button1_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            //DispGraph obj = new DispGraph();
            MWClient client = new MWHttpClient();
            IGraph me = client.CreateProxy<IGraph>
            (new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
            byte[] imgArray = me.creatgraph(textBox1.Text, textBox2.Text, textBox7.Text);
            string base64String = Convert.ToBase64String(imgArray,
            0, imgArray.Length);
            Image1.ImageUrl = "data:image/png;base64," + base64String;
            Image1.Visible = true;

            ICoeff me2 = client.CreateProxy<ICoeff>
            (new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
            byte[] imgArray2 = me2.coefficient(textBox1.Text, textBox2.Text);
            string base64String2 = Convert.ToBase64String(imgArray2,
            0, imgArray2.Length);
            Image2.ImageUrl = "data:image/png;base64," + base64String2;
            Image2.Visible = true;

            IEvao me3 = client.CreateProxy<IEvao>
            (new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
            Label4.Text = me3.evao(textBox1.Text, textBox2.Text);

            //WebFigureControl1.WebFigure = new WebFigure(obj.creatgraph(textBox1.Text,
            textBox2.Text));
        }

        protected void Button2_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            MWClient client = new MWHttpClient();
            IHarmonic me5 = client.CreateProxy<IHarmonic>
            (new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
            byte[] imgArray4 = me5.harmonicNum(textBox1.Text, textBox2.Text, textBox3.Text);
            string base64String4 = Convert.ToBase64String(imgArray4,
            0, imgArray4.Length);
            Image4.ImageUrl = "data:image/png;base64," + base64String4;
            Image4.Visible = true;
        }
    }

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

    }

protected void Button3_Click(object sender, EventArgs e)
{
    MWClient client = new MWHttpClient();
    IHarmonic me5 = client.CreateProxy<IHarmonic>
(new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
byte[] imgArray4 = me5.harmonicNum(TextBox1.Text, TextBox2.Text, TextBox4.Text);
string base64String4 = Convert.ToBase64String(imgArray4,
0, imgArray4.Length);
Image5.ImageUrl = "data:image/png;base64," + base64String4;
Image5.Visible = true;
}

protected void Button5_Click(object sender, EventArgs e)
{
    MWClient client = new MWHttpClient();
    ISin me4 = client.CreateProxy<ISin>
(new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
byte[] imgArray3 = me4.sinusoidal(TextBox1.Text, TextBox2.Text, TextBox5.Text);
string base64String3 = Convert.ToBase64String(imgArray3,
0, imgArray3.Length);
Image3.ImageUrl = "data:image/png;base64," + base64String3;
Image3.Visible = true;
}

protected void Button6_Click(object sender, EventArgs e)
{
    MWClient client = new MWHttpClient();
    IHarmonicN me5 = client.CreateProxy<IHarmonicN>
(new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
byte[] imgArray4 = me5.harmonicN(TextBox1.Text, TextBox2.Text, TextBox6.Text);
string base64String4 = Convert.ToBase64String(imgArray4,
0, imgArray4.Length);
Image6.ImageUrl = "data:image/png;base64," + base64String4;
Image6.Visible = true;
}

protected void Button7_Click(object sender, EventArgs e)
{
}

protected void Button7_Click1(object sender, EventArgs e)
{
    MWClient client = new MWHttpClient();
    IGraph me = client.CreateProxy<IGraph>
(new Uri("http://localhost:9911/fourier"));
byte[] imgArray = me.creatgraph(TextBox1.Text, TextBox2.Text, TextBox7.Text);
string base64String = Convert.ToBase64String(imgArray,
0, imgArray.Length);
Image1.ImageUrl = "data:image/png;base64," + base64String;
Image1.Visible = true;
}
}

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้