แบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์สำหรับการพยากรณ์ราคาทองคำ

A Markov Chain-Grey Model for Forecasting Gold Price

พัชรียา คำกวน

อรัญญา สิงเสนา

อังคณา แก้วเมือง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

A Markov Chain-Grey Model for Forecasting Gold Price

PATCHAREEYA KAMKUAN

ARANYA SINGSENA

ANGKHANA KAEOMUANG

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

หัวข้อปัญหาพิเศษ	แบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์สำหรับการพยากรณ์ราคาทองคำ A Markov Chain-Grey Model for Forecasting Gold Price
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพัชรียา คำกวน รหัสนักศึกษา 57050105 นางสาวอรัญญา สิงเสนา รหัสนักศึกษา 57050162 นางสาวอังคณา แก้วเมือง รหัสนักศึกษา 57050164
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.จิรภัทร์ หยกรัตนศักดิ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.เดชา สมนะ ประธานกรรมการ	
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการ	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
ดร.จิรภัทร์ หยกรัตนศักดิ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ แบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์สำหรับการพยากรณ์ราคาทองคำ

ชื่อนักศึกษา นางสาวพัชรียา คำกวน รหัสนักศึกษา 57050105
นางสาวอรัญญา สิงเสนา รหัสนักศึกษา 57050162
นางสาวอังคณา แก้วเมือง รหัสนักศึกษา 57050164

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

คณะ วิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.จิรภัทร์ หยกรัตนศักดิ์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาแบบจำลองเกรย์ GM(1,1) โดยผสมผสานแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟของค่าคลาดเคลื่อนแบบจำลองเกรย์ GM(1,1) และทดสอบแบบจำลองโดยพยากรณ์ราคาทองคำแท่งของประเทศไทย สำหรับการทำนายซึ่งเป็นการทำนายระยะยาว จะพิจารณาราคาทองคำแท่งตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 จำนวน 132 ข้อมูล โดยเก็บข้อมูลแบบรายเดือน จากนั้นเปรียบเทียบความแม่นยำของรูปแบบการพยากรณ์ด้วย 3 หลักเกณฑ์ คือ ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง (Mean Square Error : MSE) ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยสัมบูรณ์ (Absolute Mean Error : AME) และค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยสัมพัทธ์ (Absolute Relative Mean Error : ARE) และตรวจสอบความแม่นยำจากตารางแสดงระดับความแม่นยำของแบบจำลอง

คำสำคัญ : ทฤษฎีเกรย์, แบบจำลอง GM(1,1), ลูกโซ่มาร์คอฟ, ราคาทองคำ

Title	A Markov Chain-Grey Model for Forecasting Gold Price
Students	Miss Patchareeya Kamkuan Student ID 57050105
	Miss Aranya Singsena Student ID 57050162
	Miss Angkhana Kaeomuang Student ID 57050164
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2017
Advisor	Dr. Jiraphat Yokrattanasak

Abstract

This special problem has an objective to develop grey model (GM1,1) by using Marcov chain of error of GM(1,1) and testing a forecast gold price model in Thailand. The forecast which is the long term will consider from January 2007 to December 2017 by collect monthly data. After that, comparing an accuracy of forecast type in 3 methods. (1) Mean Square Error (MSE), (2) Absolute Mean Error (AME), (3) Absolute Relative Mean Error (ARE). And verify the accuracy from table that show accuracy level of the model.

Keywords: Grey theory, GM (1,1) model, Marcov chain, Gold price

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้คงไม่อาจสำเร็จสมบูรณ์ได้ หากปราศจากความเมตตาและความกรุณาจากทุก ๆ ท่าน ขอขอบพระคุณ ดร.จิรภัทร์ หยกรัตนศักดิ์ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาในการทำปัญหาพิเศษนี้ อีกทั้งยังคอยช่วยเหลือ แนะนำ ชี้แนะ และตรวจสอบความถูกต้อง ตลอดทั้งการแก้ไขข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำปัญหาพิเศษ

อีกทั้งคณาจารย์ทุกท่านซึ่งคณะผู้ศึกษาอาจมิได้เอ่ยนาม ที่ให้ความรู้ ประสิทธิ์ประศาสตร์วิชา คณะผู้ศึกษารู้สึกซาบซึ้งและสำนึกในพระคุณของอาจารย์ทุกท่านเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ ทีนี้และขอขอบคุณเจ้าของตำรา เอกสาร และงานวิจัยทุกชิ้นที่คณะผู้ศึกษาได้ค้นคว้า อ้างอิง จนทำให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงโดยดี

หากปัญหาพิเศษฉบับนี้มีประโยชน์และคุณค่าทางการศึกษาต่อผู้อื่น คณะผู้ศึกษาขอยกความดีทั้งหมดแด่อาจารย์ ดร.จิรภัทร์ หยกรัตนศักดิ์ และกรรมการสอบปัญหาพิเศษทุกท่าน ซึ่งหากปัญหาพิเศษฉบับนี้มีความบกพร่องประการใด คณะผู้ศึกษาขอน้อมรับความผิดพลาดไว้แต่เพียงผู้เดียว

พัชรียา คำกวน
อรัญญา สิงเสนา
อังคณา แก้วเมือง

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

คำย่อ/สัญลักษณ์

คำย่อ/สัญลักษณ์	คำอธิบาย
GM	แบบจำลองเกรย์ (Grey Model)
$GM(1,1)$	แบบจำลองเกรย์ที่มีจำนวนตัวแปรสุ่มที่ศึกษา 1 ตัว และมีการหาปริพันธ์ 1 อันดับ (Grey Model (1,1))
MC	ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain)
$MCGM$	แบบจำลองลูกโซ่ผสมมาร์คอฟเกรย์ (Markov Chain Grey Model)
AGO	กลุ่มผลรวมสะสมของชุดข้อมูล (Accumulating Generation Operator)
M_i	จำนวนข้อมูลในสถานะ i
M_{ij}	จำนวนการเปลี่ยนแปลงในขั้นที่ m จากสถานะ i ไปยังสถานะ j
P_{ij}	เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจาก สถานะ i ไปยังสถานะ j
P^m	เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ ณ เวลา m ขั้น
$X^{(0)}$	เซตของข้อมูลเดิม
$X^{(1)}$	ผลรวมสะสมของข้อมูลเดิม
$x(n)$	ลำดับของข้อมูล
$e(i)$	ค่าความคลาดเคลื่อน
A	โอกาสของเหตุการณ์ซึ่งอยู่ในสถานะ i ที่เวลา T ขั้น
R	เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ
V	เมทริกซ์จุดกึ่งกลาง
S	ช่วงของสถานะ (state)
MSE	ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง (Mean Square Error)
AME	ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยสัมบูรณ์ (Absolute Mean Error)
ARE	ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยสัมพัทธ์ (Absolute Relative Mean Error)
θ_1	ขอบเขตล่างของคู่อันดับ
θ_2	ขอบเขตบนของคู่อันดับ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทองคำเป็นโลหะที่มีค่าและเป็นสินทรัพย์ที่ได้รับความนิยมสูงในการลงทุนทั่วไป ซึ่งทองคำเป็นโลหะที่มีมูลค่าในตัวเองและเป็นที่ยอมรับของทุกคนในสังคม สามารถที่จะเปลี่ยนเป็นเงินสดได้ตลอดเวลา โดยปกติแล้วนักลงทุนจะซื้อทองคำเพื่อป้องกันความเสี่ยงทางเศรษฐกิจ การเมือง หรือวิกฤตทางสกุลเงิน เช่น เงินเฟ้อ สงคราม และความไม่สงบทางสังคม ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมาราคาทองคำได้ผันผวนทุกวันหรือทุกเดือน ซึ่งแสดงการผันผวนของราคาทองคำในประเทศไทยตามรูปที่ 1.1

รูปที่ 1.1 : ราคาทองคำแท่งในประเทศไทยตั้งแต่มกราคม 2550 - ธันวาคม 2560

ที่มา : สมาคมค้าทองคำ [1]

สำหรับการคาดการณ์ของราคาทองคำ Julong Deng[3] ได้คิดค้นทฤษฎีระบบเกรย์เพื่อศึกษาความไม่แน่นอนของข้อมูล ในทฤษฎีเกรย์ถ้าเป็นข้อมูลที่ครบถ้วนสมบูรณ์จะเรียกว่า White system ในขณะที่ข้อมูลไม่ครบถ้วนสมบูรณ์จะเรียกว่า Black system ส่วนข้อมูลที่ทราบข้อมูลบางส่วนและไม่ทราบข้อมูลบางส่วนจะเรียกว่า Grey system

ทฤษฎีเกรย์เป็นรูปแบบที่นำมาใช้ในการหาแนวโน้มของค่าพยากรณ์ ค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวจีน Julong Deng และยังได้นำเสนอแบบจำลองเกรย์ (GM) ซึ่งหลักการของแบบจำลองเกรย์ คือ การศึกษาข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่อง รูปแบบการแจกแจงข้อมูลไม่แน่นอน เช่น ข้อมูลทางการแพทย์ ข้อมูลทางการเกษตร ข้อมูลทางวิศวกรรม ข้อมูลทางการตลาด เป็นต้น จากนั้นในปีต่อ ๆ มาทฤษฎีเกี่ยวกับแบบจำลองเกรย์ได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่องและเป็นที่นิยมใช้เป็นอย่างมาก ซึ่งขั้นตอนในการคำนวณจะพิจารณาค่าข้อมูล เริ่มต้นโดยนำชุดข้อมูลมาสร้างเป็นเมทริกซ์ข้อมูลและนำไปหาตัวประมาณพารามิเตอร์ ที่สำคัญ คือ จำนวนข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ไม่ต้องมีจำนวนมาก โดยแบบจำลองที่นิยมคือ GM(1,1) ซึ่งขยายมาจากแบบจำลอง GM (n,h) เมื่อ n แทนจำนวนตัวแปรสุ่มที่ศึกษา และ h แทนจำนวนครั้งของการหาปริพันธ์ ดังนั้นจึงได้มีการนำแบบจำลอง GM(1,1) มาใช้ในการพยากรณ์ราคาทองคำเพื่อดูแนวโน้มของราคาที่จะเกิดขึ้นในอนาคต

ในกรณีของราคาทองคำเป็นข้อมูลซึ่งมีความผันผวนเป็นอย่างมาก ดังนั้นแบบจำลองเกรย์จึงมีการเพิ่มลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain)[2] ซึ่งเป็นกระบวนการสุ่ม (stochastic process) เพื่อให้การคาดการณ์ของราคาทองคำมีความแม่นยำขึ้น โดยลูกโซ่มาร์คอฟถูกคิดค้นขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ Andrei Grigorievich Markov มีหลักการคือ ลำดับของเหตุการณ์ ซึ่งความน่าจะเป็นของเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์จะขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นก่อนหน้า 1 ขั้นเท่านั้น โดยศึกษาถึงพฤติกรรมหรือความเป็นไปของการดำเนินงานของสถานการณ์ (State Variable) จากเวลาหนึ่งไปยังอีกเวลาหนึ่งว่าได้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ซึ่งจะทำให้คาดการณ์เกี่ยวกับสถานการณ์ในอนาคตได้

ดังนั้น ในปัญหาพิเศษนี้จะสร้างแบบจำลองผสมระหว่างแบบจำลองเกรย์และลูกโซ่มาร์คอฟ โดยเพิ่มค่าเฉลี่ยของการสุ่มลงไปที่แบบจำลองเกรย์ซึ่งเรียกว่า Markov Chain Grey model (MCGM) เพื่อให้การพยากรณ์ของราคาทองคำแท่งในอนาคตมีความแม่นยำมากขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. สร้างแบบจำลองเกรย์ ในการพยากรณ์ราคาทองคำแท่ง
2. สร้างแบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟ-เกรย์ เพื่อพยากรณ์ราคาทองคำแท่ง
3. เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของแต่ละแบบจำลอง

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ปัญหาพิเศษนี้จะใช้ข้อมูลราคาทองคำแท่งย้อนหลังจำนวน 132 ข้อมูล โดยศึกษาข้อมูลราคาทองคำแท่ง 1 บาทแบบขายออกของตลาดทองคำแท่งในประเทศไทย โดยเก็บข้อมูลรายเดือน เริ่มเก็บรวบรวมตั้งแต่เดือนมกราคม 2550 ถึงเดือนธันวาคม 2560 รวมทั้งหมด 132 เดือน แบ่งเป็นส่วนที่สร้างแบบจำลอง 126 ข้อมูล(เดือนมกราคม 2550 ถึงเดือนมิถุนายน 2560) และส่วนของการพยากรณ์ 6 ข้อมูล(เดือนกรกฎาคม 2560 ถึงเดือนธันวาคม 2560)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. มีความรู้ความเข้าใจทฤษฎีเกรย์และลูกโซ่มาร์คอฟ
2. ได้แบบจำลองสำหรับการพยากรณ์ราคาทองคำแท่ง
3. สามารถพยากรณ์ราคาทองคำแท่งในตลาดทองคำของไทยในระยะยาว

1.5 ระยะเวลาการดำเนินงาน

การดำเนินงาน	ระยะเวลาการดำเนินงาน									
	2560					2561				
	สิงหาคม	กันยายน	ตุลาคม	พฤศจิกายน	ธันวาคม	มกราคม	กุมภาพันธ์	มีนาคม	เมษายน	พฤษภาคม
1.ศึกษาและกำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจ										
2.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีเกรย์และลูกโซ่มาร์คอฟ										
3.เก็บข้อมูลราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน										
4.สร้างแบบจำลองเกรย์พยากรณ์ราคาทองคำแท่งโดยใช้ข้อมูล 132 ข้อมูล แบ่งข้อมูลออกเป็นสองส่วน โดยข้อมูล 126 ข้อมูล ระหว่างเดือนมกราคม 2550 ถึงเดือนมิถุนายน 2560 ใช้สำหรับเพื่อศึกษา และข้อมูลส่วนที่เหลือใช้ทดสอบและทำนาย										
5.สร้างแบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์ พยากรณ์ราคาทองคำแท่ง โดยใช้ข้อมูลชุดเดียวกันกับข้อ 4										
6.ทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง										
7.เปรียบเทียบแบบจำลองที่สร้างขึ้น										
8.วิเคราะห์และสรุปผลการวิจัย										
9.จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ และเตรียมการนำเสนอ										
10.นำเสนอปัญหาพิเศษ										

1.6 นิยามศัพท์เฉพาะ

1.6.1 ทองคำแท่ง หมายถึง ทองคำแท่งในประเทศไทยเป็นทองคำแท่งที่มีมาตรฐานความบริสุทธิ์ของทองคำ 96.5 เปอร์เซ็นต์ โดยทองคำแท่ง 1 บาท หนัก 15.244 กรัม

1.6.2 ทฤษฎีเกรย์ (Grey Theory) คือ เทคนิคที่นำมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ในประเทศจีนในปี ค.ศ.1982 โดยนำมาประยุกต์ใช้ทางการเกษตร ทางจิตวิทยา ทางเศรษฐศาสตร์ ทางการแพทย์ ทางประวัติศาสตร์ เป็นต้น การวิเคราะห์จะเหมาะนำมาใช้กับตัวแบบที่ไม่ใช่ฟังก์ชัน จะกำหนดแบบจำลองเกรย์มาแทนที่โดยอาศัยช่วงเวลา จากการใช้ข้อมูลแทนที่สร้าง Grey Model (GM) ที่เหมาะสม

1.6.3 GM (1,1) Forecasting Model คือ แบบจำลองเกรย์ (GM) และรูปแบบการถดถอยที่ต้องการทำนายการวิเคราะห์ครอบคลุมความหลากหลายของเทคนิคทางสถิติจากการสร้างแบบจำลองกับข้อมูลที่มีการทำนายรูปแบบและการพยากรณ์ ซึ่ง GM (1,1) ขยายมาจากแบบจำลอง GM (n, h) เมื่อ n แทน จำนวนตัวแปรสุ่มที่ศึกษา และ h แทน จำนวนครั้งของการหาอนุพันธ์ ดังนั้น GM (1,1) คือ แบบจำลองเกรย์ที่มีจำนวนตัวแปร 1 ตัว และหาอนุพันธ์จำนวน 1 ครั้ง

1.6.4 แบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์ (Markov Chain – Grey Model) คือ การผสมผสานลูกโซ่มาร์คอฟและแบบจำลองเกรย์ (GM) เข้าด้วยกัน

1.6.5 ออนซ์ (ounce) คือ สัญลักษณ์ oz เป็นหน่วยจัดมวลในระบบอังกฤษ โดยที่ทองคำแท่ง 1 ออนซ์ เท่ากับ 31.104 กรัม หรือ 2.0403 บาทคำว่าออนซ์ในสำเนียงภาษาอังกฤษอเมริกันจะอ่านว่าอาวซ์

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ราคาทองคำและการลงทุน

2.1.1 ราคาทองคำ

การกำหนดราคาทองของไทยนั้น ประกอบด้วยปัจจัยหลายอย่าง โดยมีคณะกรรมการควบคุมราคาทองของสมาคมคอยดูแลตลอดช่วงเวลาการซื้อขาย โดยยึดถือหลักประชาธิปไตยในการกำหนดราคาทองคำ ถือเสียงส่วนมาก 3 ใน 5 เสียงในการตัดสินใจ ซึ่งคณะกรรมการประกอบไปด้วยคณะกรรมการจาก

1.ห้างทองจินฮั้วเฮง

2.ห้างทองฮั่วเซ่งเฮง

3.ห้างทองเลี่ยงเส็งเฮงพาณิชย์

4.ห้างทองหลูชั้งฮวด

5.ห้างทองแต้จิบฮุย

ซึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามความเหมาะสม สำหรับการกำหนดราคาทองของสมาคม จะอ้างอิงจากราคาทองคำในตลาดโลก (Gold Spot) บวกหรือลบค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการนำเข้า/ส่งออกทองคำ (Premium) จากผู้ค้าทองในต่างประเทศ (ขึ้นอยู่กับสถานการณ์ว่าเป็นสภาวะการนำเข้า หรือการส่งออก) แล้วนำมาคำนวณกับค่าเงินบาท หลังจากนั้นจะทำการแปลงหน่วยน้ำหนักจากหน่วยออนซ์ให้เป็นหน่วยน้ำหนักของไทย คือ บาท โดยการตัดสินใจประกาศราคาทองในประเทศแต่ละครั้งนั้น ทางสมาคมจะต้องพิจารณาองค์ประกอบของอุปสงค์และอุปทานของทองคำภายในประเทศเป็นสำคัญด้วย

สำหรับตัวแปรที่สำคัญในการกำหนดราคาทองของไทย สามารถสรุปได้ 4 ประการดังนี้

1.ราคาทองคำในตลาดโลก (Gold spot)

เป็นราคาอ้างอิงทางอิเลกทรอนิกส์ ซึ่งยังไม่ได้มีการบวก หรือลบค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริงในการส่งมอบทองคำ เป็นการซื้อขายทองคำที่ไม่มีการส่งมอบ ซึ่งหากพิจารณาดูราคาทองคำในตลาดโลก จะเห็นว่ามีทั้งฝั่งราคารับซื้อและราคาขายออก ในการซื้อทองคำจากต่างประเทศ ผู้ขายจะใช้ราคาขายออกในการคำนวณ ส่วนเมื่อเราขายกลับไปยังผู้ค้าทองคำต่างประเทศ จะใช้ราคารับซื้อใน

การคำนวณ ดังนั้นในการกำหนดราคาทองภายในประเทศก็ต้องคำนึงถึงเรื่องดังกล่าวว่าสภาวะตลาดทองคำภายในประเทศเป็นเช่นไร เช่นมีความต้องการซื้อทองคำอย่างมากก็ต้องนำเข้าทองคำ หรือหากมีความต้องการขายทองคำจำนวนมากก็ต้องส่งออก เป็นต้น

2.อัตราค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการนำเข้า/ส่งออกทองคำ (Premium)

เมื่อมีความต้องการซื้อทองคำจำนวนมากจากผู้สนใจลงทุนในทองคำ และปริมาณทองคำภายในประเทศมีไม่เพียงพอ ร้านค้าทองจึงจำเป็นต้องอาศัยการนำเข้าทองคำจากต่างประเทศ ซึ่งก็คือการซื้อจากผู้นำเข้า ซึ่งผู้นำเข้าต้องซื้อต่ออีกทอดหนึ่งจากผู้ค้าในต่างประเทศ โดยจะมีการคิดค่าใช้จ่ายต่าง ๆ เพื่อที่นำเข้าหรือส่งออกทองคำ รวมถึงค่าขนส่ง ค่าความเสี่ยง ดอกเบี้ยธนาคาร ค่าประกันภัยต่าง ๆ ซึ่งถูกกำหนดมาโดยผู้ค้าทองในต่างประเทศ ซึ่งเรียกง่ายๆว่าเป็นต้นทุนในการนำเข้าทองคำจากต่างประเทศเข้ามาขายผู้บริโภคในไทยนั้นเอง โดยในการคำนวนจะนำราคาทองคำในตลาดโลก จะรวมค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการนำเข้า/ส่งออกทองคำดังกล่าวนี้เข้าไปด้วย ซึ่งในทางกลับกัน เมื่อมีประชาชนมาขายทองคำแท่งคืนให้กับร้านทองจำนวนมาก ๆ ร้านทองจำเป็นต้องทำการขายกลับคืนมาให้กับบริษัทผู้นำเข้า และผู้นำเข้าก็จะทำการขายคืนกลับไปให้กับผู้ค้าทองในต่างประเทศอีกทอดนึง ซึ่งในต่างประเทศจะใช้ราคาทองคำในตลาดโลกฝั่งราคารับซื้อ และหักลบค่าใช้จ่าย โดยค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการนำเข้า/ส่งออกทองคำ จะอยู่ที่ ± 1 ถึง 2 เหรียญต่อออนซ์ แต่ในสภาวะวิกฤตปัจจุบันจากการที่ราคาทองคำในต่างประเทศลดลงอย่างมาก และรวดเร็วในระยะเวลาอันสั้น ทำให้มีความต้องการซื้อทองคำจากทุกประเทศในโลกพร้อม ๆกัน ทำให้มีความต้องการในโลกมาก เกิดการแย่งซื้อ ส่งผลให้มีการปรับขึ้นลงค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการนำเข้า/ส่งออกทองคำ จากผู้ค้าในต่างประเทศอย่างรวดเร็วและรุนแรงมากเช่นกัน โดยอยู่ที่ช่วง ± 10 ถึง ± 20 เหรียญต่อออนซ์ และในบางครั้งสูงถึง ± 25 เหรียญต่อออนซ์ด้วย

3.ค่าเงินบาทต่อดอลล่าสหรัฐ

ค่าเงินบาทในการคำนวณราคาทองในประเทศ จะใช้อัตราการโอนเงินระหว่างประเทศ ซึ่งมีการเปลี่ยนกันอยู่ตลอดเวลา เช่นเดียวกับราคาทองคำในตลาดโลก และมีการใช้ราคาในฝั่งราคารับซื้อและราคาขายออก สำหรับในสภาวะวิกฤตของสถาบันการเงินแต่ละธนาคารก็จะบวกค่าความเสี่ยงเข้าไปด้วย

4.อุปสงค์และอุปทานภายในประเทศ

คณะกรรมการควบคุมราคาทองคำของสมาคม นอกจากจะพิจารณาราคาทองคำในตลาดโลก ค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการนำเข้า/ส่งออกทองคำ และค่าเงินบาท ที่เปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลาแล้ว ยังต้องคำนึงถึงปัจจัยของอุปสงค์และอุปทานภายในประเทศด้วยเป็นหลัก เพื่อที่จะตัดสินใจประกาศราคาทองคำภายในประเทศ ณ ช่วงเวลานั้น ๆ โดยคณะกรรมการกำหนดราคาทั้ง 5 ท่าน จะพิจารณาจากปริมาณและราคาจากการซื้อขายระหว่าง

4.1 ผู้นำเข้าหรือผู้ส่งออกทองคำ

4.2 ร้านค้าทองเยาวราช

4.3 ร้านค้าส่งทองคำ

4.4 ร้านค้าปลีกทองคำ

4.5 ผู้ลงทุนทองคำรายใหญ่

4.6 ผู้ลงทุนทองคำรายย่อย

ร้านทองจะซื้อขายกับประชาชนผู้สนใจลงทุนในทองคำเพียงฝ่ายเดียว ตามที่ผู้ลงทุนทั่วไปเข้าใจ ทุกภาคส่วนล้วนมีการซื้อและขายทองคำด้วยกันเองตลอดเวลา และการซื้อขายของร้านค้าทองด้วยกันเองจะมีปริมาณที่มากกว่าการซื้อขายกับผู้ลงทุนทั่วไปหลายสิบเท่า ดังนั้นหากสมาคมประกาศราคาทองคำสูงหรือต่ำกว่าความเป็นจริงจากตลาดต่างประเทศมากไป ร้านทองด้วยกันเองจะมีการวิ่งเข้าหาซื้อหรือเทขายกันเอง ส่งผลให้สมาคมต้องปรับราคาให้เหมาะสมในที่สุด เพื่อสะท้อนถึงความต้องการทองคำของตลาดตามความเป็นจริงตามกฎของอุปสงค์อุปทาน กลไกของตลาดดำเนินการไปด้วยตัวของมันเอง เช่น หากราคาทองของสมาคมประกาศต่ำกว่าตลาดโลกมาก ก็จะมีกลุ่มผู้ตระเวนซื้อทองรูปพรรณเก่าตามร้านทองทั่วประเทศ และขายทองให้ผู้ส่งออกต่างประเทศได้ส่วนต่างผลกำไรโดยตรง โดยไม่ผ่านร้านทองทำให้ร้านทองเสียรายได้ส่วนนี้ไป หรือหากมีการกำหนดราคาที่สูงกว่าราคาตลาดโลกมากจะมีผู้นำเข้าทองนำทองมาขายให้ร้านทอง เนื่องจากได้กำไรจากส่วนต่างการขาย

ดังนั้นการที่ผู้สนใจลงทุนในทองคำดูราคาทองคำในตลาดโลกจากเว็บไซต์ต่างประเทศ แล้วนำมาคำนวณตามสูตรตรง ๆ ก็จะได้ราคาที่ไม่สะท้อนความเป็นจริงในการซื้อขายที่มีการส่งมอบทองจริง โดยเฉพาะในสภาวะเหตุการณ์ที่ไม่ปกติ ทั้งนี้หากพิจารณาข้อมูลที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นว่าตลาดทองคำของไทยเป็นตลาดที่มีการแข่งขันอย่างสมบูรณ์และสามารถดำเนินไปด้วยกลไกตลาดอย่างแท้จริง

2.1.2 การลงทุนในตลาดทองคำ

ตั้งแต่สภาวะเศรษฐกิจโลกผันผวนในช่วงหลายปีที่ผ่านมา ส่งผลให้นักลงทุนเริ่มมองหาช่องทางอื่น ๆ ในการออมและการลงทุน เพราะนอกจากการฝากเงินไว้ในธนาคาร การลงทุนในตราสารหนี้หรือตราสารทุนก็ไม่ปลอดภัย และดอกเบี้ยที่ได้รับยังลัดลงเรื่อย ๆ ตามสภาพเศรษฐกิจ เพื่อเป็นการกระจายความเสี่ยงและให้ผลตอบแทนที่คุ้มค่า ทองคำจึงเป็นอีกหนึ่งทางเลือกในการลงทุนที่นักลงทุนยอมรับ เนื่องจากการลงทุนในทองคำมีประโยชน์หลายอย่าง ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1.ให้โอกาสสร้างผลตอบแทนจากการเพิ่มขึ้นของราคาทองคำ (Price Appreciation) เนื่องจากทองคำเป็นโลหะมีค่า (Precious Metal) ที่คนนิยมลงทุนมากที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงปัจจัยต่าง ๆ อาทิ ต้นทุนการผลิตทองคำที่เพิ่มสูงขึ้น ทรัพยากรที่มีจำกัด ความต้องการทองคำที่เพิ่มขึ้นทั้งจากภาคผลิตและภาคการเงิน ทำให้คาดการณ์ว่าราคาทองคำมีแนวโน้มจะปรับตัวขึ้นในระยะยาว

2.เพื่อรักษาระดับความมั่งคั่ง (Wealth Preservation) เพราะทองคำสามารถป้องกันความเสี่ยงจากอัตราเงินเฟ้อได้ ในยามที่อัตราเงินเฟ้อสูงขึ้นราคาทองคำมักจะขยับขึ้นด้วย ทำให้รักษาอำนาจการซื้อในระยะยาวได้อย่างมีประสิทธิภาพ

3.เป็นการกระจายการลงทุนเพื่อลดความเสี่ยง (Diversification) เนื่องจากผลตอบแทนจากการลงทุนในทองคำมักจะไม่เคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกันกับการลงทุนในหุ้น และสินทรัพย์เพื่อการลงทุนอื่น ๆ จึงเหมาะแก่การนำทองคำมาเป็นส่วนหนึ่งของสินทรัพย์เพื่อการลงทุนในพอร์ต

การลงทุนในทองคำสามารถลงทุนได้ทั้งทางตรงและทางอ้อม

1.การลงทุนทางตรง เป็นการลงทุนโดยการซื้อทองคำแท่งมาเก็บไว้เองโดยดูราคาขึ้นลงของทองคำ โดยช่วงที่ราคาทองคำปรับลดลงก็จะไปซื้อเก็บไว้เพื่อเก็งกำไรหรือในบางช่วงที่ราคาทองคำสูงก็จะขายเพื่อทำกำไรเช่นเดียวกัน

2.การลงทุนทางอ้อม เป็นการลงทุนโดยอาศัยความชำนาญของผู้บริหารกองทุน การลงทุนทองคำผ่านกองทุนรวม คือ การที่กองทุนรวมที่มีนโยบายการลงทุนในทองคำ เพื่อให้ราคาหน่วยลงทุนเคลื่อนไหวใกล้เคียงที่สุดกับราคาทองคำโลกเท่านั้น

ดังนั้น จึงไม่มีการให้ผู้จัดการกองทุนมาบริหารจัดการหรือเก็งกำไรในราคาทองคำ เช่น ซื้อทองคำเมื่อถูกหรือขายทองคำออกเมื่อแพงเหมือนการลงทุนในกองทุนหุ้นหรือตราสารหนี้ทั่วไป ทั้งนี้ราคาของหน่วยลงทุนจะถูกหนุนหลังโดยทองคำแท่งที่เก็บรักษาไว้ในห้องมั่นคงของผู้รักษาทรัพย์สิน โดยกองทุนทองคำแท่งทุกกองทุนที่เปิดขึ้นในปัจจุบันล้วนอยู่ภายใต้หลักการเดียวกันคือ

พยายามที่จะให้ราคาของหน่วยลงทุนขึ้นลงใกล้เคียงกับราคาทองคำโลกมากที่สุด โดยกองทุนทองคำที่มีชื่อเสียงและมีมูลค่ากองทุนสูงที่สุด ได้แก่ กองทุน SPDR Gold Trust ซึ่งจัดตั้งและจัดการโดยสมาพันธ์ทองคำโลก (World Gold Council) จดทะเบียนในตลาดหลักทรัพย์นิวยอร์ก (New York Stock Exchange, NYSE) เมื่อพฤศจิกายน พ.ศ. 2547 แม้ทองคำจะอยู่ในทิศทางขาขึ้นและเป็นสินทรัพย์ที่ให้ผลตอบแทนที่ดีแต่การลงทุนในกองทุนทองคำยังคงมีความเสี่ยงอยู่ในปัจจัยหลัก 2 ปัจจัยคือ

1.ปัจจัยจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อดอลลาร์สหรัฐ

2.ปัจจัยความเสี่ยงจากความผันผวนของราคาทองคำในตลาดโลก ที่ต้องขึ้นอยู่กับอุปสงค์และอุปทานของตลาดในอนาคตซึ่งอาจจะมีการเปลี่ยนแปลงได้

2.2 ทฤษฎีเกรย์

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาแนวคิดพื้นฐานและบทนิยามบางส่วนของข้อมูลเกรย์ที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองได้

2.2.1 ทฤษฎีระบบเกรย์

ทฤษฎีระบบของเกรย์ถูกสร้างขึ้นโดย Julong Deng [3] โดยเกิดจากแนวคิดที่ว่าหากข้อมูลทุกประเภทเป็นข้อมูลที่ครบถ้วนสมบูรณ์จะเป็น White theory แต่หากเป็นข้อมูลที่ไม่มีความครบถวนสมบูรณ์จะถือว่าเป็น Black theory แต่การพยากรณ์ในทางปฏิบัติข้อมูลที่จะนำมาใช้ประกอบการพยากรณ์นั้นสามารถเป็นได้ทั้งข้อมูลที่มีความครบถ้วนสมบูรณ์ หรืออาจจะเป็นข้อมูลที่ไม่ครบถ้วนสมบูรณ์ ก็นำมาใช้ประกอบการพยากรณ์ได้ แบบจำลองการพยากรณ์มีหลักการว่าแนวโน้มของข้อมูลจะเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล โดยแบบจำลองเกรย์มีการนำไปประยุกต์การพยากรณ์ในหลายอุตสาหกรรม

ทฤษฎีนี้ถูกใช้ในการศึกษาความไม่คงที่ของข้อมูลที่ไม่ทราบแหล่งที่มาและข้อมูลที่ทราบแหล่งที่มาเพียงบางส่วน การควบคุมทฤษฎีนี้คือ จุดบอดของข้อมูลที่พบได้บ่อย จะแสดงให้เห็นความชัดเจนของข้อมูล ซึ่งใช้ในการแย้งกับความสัมพันธ์ของตัวอย่างภายในระบบทั้งหมดที่ไม่ทราบแหล่งที่มาของข้อมูลที่วิเคราะห์ได้ ทฤษฎีนี้ไม่นิยมใช้กับข้อมูลที่มีนัยสำคัญทางสถิติและขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่จำกัด ทำให้ได้ข้อมูลที่ขาดความต่อเนื่อง แนวคิดเกี่ยวกับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ที่บอกถึงความไม่สมบูรณ์ทางสถิติของข้อมูล ระบุว่าเมื่อขนาดตัวอย่างมีจำนวนอย่างน้อย 30 ตัวอย่างขึ้นไป

จะถือว่าเป็นกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ ยิ่งกว่านั้นในบางกรณีที่มีตัวอย่างมากถึงหลักพัน ผลของการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติจะไม่ครอบคลุมกับค่าที่ควรจะเป็น

ทฤษฎีเกรย์ระบุว่า ชื่อของผลการวิเคราะห์ทางสถิติจะขึ้นกับลักษณะสาขาของกลุ่มตัวอย่างที่เลือกมา เช่น สังคมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เกษตรกรรม อุตสาหกรรม งานวิจัยทางวิทยาศาสตร์ มักจะพบกับความไม่สมบูรณ์ของข้อมูลอยู่บ่อยครั้ง เช่น ข้อมูลที่ได้จากงานวิจัยทางเกษตรกรรม ถึงแม้ว่าข้อมูลที่ได้จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับพื้นที่เพาะปลูก คุณภาพของเมล็ดพันธุ์ คุณภาพของปุ๋ย ข้อมูลด้านชลประทาน แต่ข้อมูลที่ได้มักไม่สามารถประเมินผลผลิตและรายได้ต่อปีอย่างต่อเนื่องได้ เนื่องมาจากข้อมูลที่ได้มีความไม่ชัดเจนในเรื่องของคุณภาพคนงาน ระดับของเทคโนโลยีที่ใช้ วัตถุดิบธรรมชาติและสภาพภูมิอากาศ

2.2.2 ลำดับเกรย์

กระบวนการแบบสุ่มของทฤษฎีนี้อ้างอิงมาจากกฎทางสถิติที่ไม่มีความครอบคลุมกับข้อมูลของกลุ่มตัวอย่าง สำหรับระบบของทฤษฎีเกรย์แล้ว มีความจำเป็นอย่างมากที่นักวิจัยจะต้องจัดการกับข้อมูลดิบให้เป็นไปตามกฎหรือหลักเกณฑ์ที่ได้พัฒนาขึ้น ระบบของทฤษฎีเกรย์มักเกี่ยวข้องกับข้อมูลที่มีความซับซ้อน สิ่งสำคัญ คือ ต้องใช้กฎของทฤษฎีเกรย์ในการนำมาเลือกวิธีที่เหมาะสม จากเส้นโค้ง $X^{(0)}$ เป็นคลื่นที่มีความกว้างขนาดใหญ่(undulates with relatively large amplitude) ดังนั้น จึงใช้วิธีการ Accumulating Generation Operator (AGO) เทียบกับข้อมูลเดิมในเซต $X^{(0)}$ และพิจารณาผลลัพธ์ที่ลำดับ $X^{(1)}$ ที่สร้างขึ้นจากข้อมูลเดิมซึ่งกลายเป็นลำดับ $X^{(1)}$ ตามรูปแบบต่อไปนี้

$$x_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{i} x_j^{(0)} \tag{2.1}$$

เมื่อ i คือ ตำแหน่งของข้อมูล โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots$

และ $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots\right)$

ตัวอย่างให้ $X^{(0)} = (5, 3, 9, 2, 4)$

จะได้ $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} = 5$

$$x_2^{(1)} = x_1^{(0)} + x_2^{(0)} = 5 + 3 = 8$$

$$x_3^{(1)} = x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)} = 5 + 3 + 9 = 17$$

$$x_4^{(1)} = x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + x_4^{(0)} = 5+3+9+2 = 19$$

$$x_5^{(1)} = x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + x_4^{(0)} + x_5^{(0)} = 5+3+9+2+4 = 23$$

ดังนั้น $X^{(1)} = (5,8,17,19,23)$

บทนิยาม 1 สมมติให้

$$X = (x(1), x(2),\ldots, x(k), x(k+1),\ldots, x(n))$$

เป็นลำดับ แล้ว $x(k)$ และ $x(k+1)$ ตัวที่อยู่ติดกันในลำดับ X

$x(k)$ คือข้อมูลตัวก่อนหน้า และ $x(k+1)$ คือข้อมูลตัวถัดไป

ถ้า $x(k)$ คือข้อมูลใหม่ สำหรับทุก $k \le n-1$ จะเรียก $x(k)$ ว่าข้อมูลเก่า

บทนิยาม 2 ถ้าลำดับ X ที่ได้มีข้อมูลที่ไม่ทราบค่าในตำแหน่ง k แล้วจะแทนข้อมูลที่ไม่ทราบค่าด้วย $\varnothing(k)$ นั่นคือ จะได้ลำดับของ X ดังต่อไปนี้

$$X = (x(1), x(2),\ldots, x(k-1), \varnothing(k), x(k+1),\ldots., x(n)) \tag{2.2}$$

ในกรณี $x(k-1)$ และ $x(k+1)$ ถูกเรียกว่า ค่าจำกัดของ $\varnothing(k)$ ที่มี $x(k-1)$ เป็นขอบเขตล่าง และ $x(k+1)$ เป็นขอบเขตบน

เมื่อ $\varnothing(k) = x(k)$ เป็นค่าที่ได้จาก $x(k-1)$ และค่า $x(k+1)$ จะเรียก $x(k)$ ว่าจุดอันตรภาค(internal point) ของ $[x(k-1), x(k+1)]$ หรือ $[x(k+1), x(k-1)]$

บทนิยาม 3 สมมติให้

$$X = (x(1), x(2),\ldots, x(k-1), \varnothing(k), x(k+1),\ldots, x(n))$$

เป็นลำดับที่ไม่ทราบค่า $\varnothing(k)$ ที่ตำแหน่ง k จะได้ค่า

$$x^*(k) = 0.5x(k-1) + 0.5x(k+1) \tag{2.3}$$

$x^*(k)$ ถูกเรียกว่า ค่าเฉลี่ยที่ถูกสร้างจากค่าที่ไม่ติดกัน หากนำค่าเฉลี่ยนี้ไปแทนในค่าที่ไม่ทราบข้อมูล จะได้ค่าที่ได้จากการสร้างค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่ไม่ติดกัน และ ค่า $x(k+1)$ คือ ค่าของข้อมูลใหม่

ค่าเฉลี่ยที่เกิดจากลำดับข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่องจะขึ้นอยู่กับค่าของข้อมูลเก่าและข้อมูลใหม่ (วิธีสร้างความสมดุลของข้อมูล) หากข้อมูลที่ได้มาไม่มากพอจะทำให้ตัดสินความน่าเชื่อถือของข้อมูลเก่าและข้อมูลใหม่ได้ยาก วิธีสร้างความสมดุลของข้อมูลที่อาศัยข้อมูลในรูปค่าเฉลี่ยถือเป็นวิธีที่นิยมวิธีหนึ่ง

บทนิยาม 4 สมมติให้ลำดับข้อมูล

$$X = (x(1), x(2), \ldots, x(n))$$

ถ้า $x^*(k) = 0.5x(k-1) + 0.5x(k)$

โดยที่ค่า $x^*(k)$ ถูกเรียกว่า ค่าเฉลี่ยที่ถูกสร้างจากข้อมูลที่อยู่ติดกัน จากต้นแบบของทฤษฎีระบบเกรย์ (GM) พบว่าบ่อยครั้งที่มักจะสร้างค่าเฉลี่ยจากข้อมูลที่อยู่ติดกัน ซึ่งเป็นวิธีที่อ้างอิงจากค่าที่ได้จากข้อมูลดิบเพื่อที่จะนำมาสร้างเป็นรูปแบบพื้นฐานสำหรับสร้างค่าของข้อมูลที่ได้ขึ้นมาใหม่

สมมติ $X = (x(1), x(2), \ldots, x(n))$ มีค่าในลักษณะแบบ $n-tuple$ แล้ว Z คือ ลำดับเฉลี่ยที่เกิดจากค่าที่อยู่ติดกันของ X ดังนั้น Z จะเป็น $(n-1)tuple$

$$Z = (z(2), z(3), \ldots, z(n)) \tag{2.4}$$

ในความเป็นจริง จะไม่สามารถสร้างค่า $z(1)$ จาก X ได้ เนื่องจากบทนิยามที่ระบุไว้เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยที่ถูกสร้างจากข้อมูลที่อยู่ติดกัน ดังนั้นสมการที่ได้จะเป็น

$$z(1) = 0.5x(0) + 0.5x(1)$$

อย่างไรก็ตาม $x(0) = \emptyset(k)$ คือข้อมูลไม่ทราบค่าใน X หากไม่มีข้อมูลที่สามารถอธิบายได้ จะมีเพียง 3 ทางเลือกดังต่อไปนี้

1.ไม่นิยามค่า $x(0)$ เป็นจำนวนเกรย์

2.ให้ $x(0)$ เป็น 0 หรือค่าคงที่ใดๆ

3.ให้ $x(0)$ เป็นค่าที่ได้จาก $x(1)$

หมายเหตุ ทางเลือกที่ 2 ไม่มีข้อมูลอ้างอิงจากข้อมูลเดิม จะกำหนดให้ $x(0) = 0$ และในทางเลือกที่ 1 และ 3 จะต้องไม่ใช่ค่าที่เกี่ยวข้องกับค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อมูลที่อยู่ติดกัน

2.2.3 สมการเชิงอนุพันธ์เกรย์ (Grey Differential Equations)

เมื่อพบว่าลำดับของข้อมูลไม่ต่อเนื่อง บางครั้งจะเห็นว่าเป็นเรื่องที่ซับซ้อนเนื่องจากเงื่อนไขที่แตกต่างของข้อมูล สมการเชิงอนุพันธ์จะสามารถช่วยหาคำตอบของเงื่อนไขนี้ได้ ค่าที่ได้จากแนวคิดของเกรย์จะช่วยสร้างรูปแบบของข้อมูลที่มีความคล้ายกับสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับลำดับข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่อง

บทนิยาม 5 สมมติให้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นดังนี้

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \tag{2.5}$$

โดยที่ค่า $\frac{dx}{dt}$ เรียกว่า การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน x ซึ่งไม่ทราบข้อมูล โดย x คือ ค่าข้อมูลเดิม และ a , b เป็นค่าพารามิเตอร์

สมการข้างต้นนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วย 3 ส่วน ดังนี้ ค่าที่ได้จากการอนุพันธ์ ค่าข้อมูลเดิม และค่าพารามิเตอร์

บทนิยาม 6 สมมติให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเทียบกับเวลา T ถ้า $\Delta t \to 0$ แล้วสมการต่อไปนี้จะเป็นจริงเสมอ

$$x(t+\Delta t) - x(t) \neq 0$$

แล้วจะได้ว่าความหนาแน่นของข้อมูล(information density) $x(t)$ ณ เวลาที่ T เป็นค่าอนันต์

ประพจน์ 1 ฟังก์ชัน $x(t)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

และสอดคล้องกับเงื่อนไขความหนาแน่นของข้อมูลเป็นอนันต์

บทนิยาม 7 กำหนดให้ A และ B เป็นเซต และ $*$ เป็นการดำเนินการจากเซต A ไป B สำหรับ $a_1, a_2 \in A$ และ $b \in B$ ถ้า

$$a_1 * b = a_2 * b$$

แล้ว b จะเรียกว่า horizontal mapping ของ a_1 และ a_2

บทนิยาม 8 กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินการจากเซต A ไป B ให้ $b \in B$ และ b เป็น horizontal mapping สำหรับทุก a_1 และ a_2 แล้ว $*$ จะเรียกว่า horizontal mapping

ให้ $*$ เป็นการดำเนินการค่าสัมบูรณ์ นั่นคือ

$$a * b = |a - b|$$

จะเห็นว่า $*$ เป็น horizontal mapping อย่างหนึ่ง และเราจะเรียกการดำเนินการค่าสัมบูรณ์ว่า arithmetic horizontal mapping

บทนิยาม 9 กำหนดให้

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

$x(t+\Delta t)$ และ $x(t)$ เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซตของข้อมูลเดิม และ

$$X = \{x(t+\Delta t), x(t)\}$$

1.เมื่อ

$$\frac{dx}{dt} * x(t+\Delta t) = \frac{dx}{dt} * x(t)$$

จะได้ว่า การหาอนุพันธ์และสมาชิกของข้อมูลเดิมสอดคล้องกันแบบ horizontal mapping

2.ถ้า x เป็นค่าที่ถูกแทนไปในค่าของข้อมูลเดิม และสอดคล้องกับ

$$x(t) \neq x \neq x(t+\Delta t) \text{ โดยที่ } x(t) \text{ และ } x(t+\Delta t) \in X$$

ให้ $\delta(t+\Delta t)$ และ $\delta(t)$ เป็นส่วนหนึ่งของ

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

ที่ $\delta(t+\Delta t) * x = \delta(t) * x$

ดังนั้นจะสรุปได้ว่าค่าข้อมูลเดิม(background value) และส่วนประกอบของอนุพันธ์ (derivative components) มีความสัมพันธ์แบบ horizontal mapping

ประพจน์ 2 ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันบวก นั่นคือสำหรับทุก ๆ $t > 0$ แล้วอนุพันธ์ $x(t)$ จะอยู่ในรูป

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

และสมาชิกในเซตข้อมูลเดิมจะมีความสัมพันธ์แบบ simple horizontal mapping

จากบทนิยาม 4 - 8 ทำให้ได้ทฤษฎีบท 1 นั่นคือ

ทฤษฎีบท 1 เงื่อนไขพื้นฐาน 3 ข้อที่ได้มาจากสมการเชิงอนุพันธ์(differential equations)

1.ความหนาแน่นของข้อมูลเป็นอนันต์

2.ค่าของข้อมูลเดิมเป็นจำนวนเกรย์

3.ค่าของอนุพันธ์และค่าของข้อมูลเดิมจะมีความสัมพันธ์กันแบบ horizontal mapping

บทนิยาม 10 สมมติให้ I เป็นเซตของหน่วยเวลา ถ้า

$I =${..., ปี, เดือน, วัน, ชั่วโมง, นาที, วินาที,...}

แล้ว I เรียกว่า เซตของหน่วยเวลาทั่วไป

บทนิยาม 11 ให้ 1_i และ 1_j เป็นหน่วยเวลาของระดับ i และระดับ j ในเซตของหน่วยเวลาทั่วไปตามลำดับ ถ้า $1_i < 1_j$ แล้ว จะกล่าวว่า ระดับเวลาที่ i จะมีความหนาแน่นมากกว่าระดับ เวลาที่ j

บทนิยาม 12 สมมติให้

$$X = (x(1_i),\ x(2_i), \ldots,\ x(n_i))$$

เป็นลำดับของหน่วยเวลาที่ระดับ i ดังนั้น

$$d^{(i)} = x(k_i) - x(k_i - 1_i) \tag{2.6}$$

$k_i = 1_i, 2_i, \ldots, n_i$ เรียกว่าการเพิ่มข้อมูลของหน่วยเวลาที่ระดับ i

บทนิยาม 13 สมมติให้ X เป็นลำดับเวลา ซึ่งหน่วยเวลาสามารถแบ่งได้เป็นอนันต์ และ 1_i ที่ระดับ i ของหน่วยเวลา เมื่อ $1_i \to 0$

$$d^{(i)} = x(k_i) - x(k_i - 1_i), \neq 0$$

ดังนั้น จึงกล่าวว่า X เป็น**ลำดับของสมการอนุพันธ์** หรือ **สมการอนุพันธ์เชิงเกรย์**และ

$$d^{(i)}(k_i) = \lim_{1_i \to 0} [x(k_i) - x(k_i - 1_i)] \tag{2.7}$$

เรียกว่าอนุพันธ์เชิงเกรย์ของลำดับ X อนุพันธ์เชิงเกรย์ของลำดับทั่วไปเขียนแทนด้วย $d(k)$

ประพจน์ 3 สมมติให้

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \ldots, x^{(0)}(n)) \tag{2.8}$$

เป็นลำดับของค่าข้อมูลเดิม และ

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \ldots, x^{(1)}(n)) \tag{2.9}$$

เป็นลำดับที่ได้จากการหาผลรวมสะสม (accumulating generation) นั่นคือ

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i) \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

แล้วอนุพันธ์เกรย์ของ $X^{(1)}$ คือ

$$d(k) \;=\; x^{(0)}(k)$$

2.2.4. แบบจำลองเกรย์ GM (1,1)

แบบจำลองเกรย์ GM (1,1) เป็นแบบจำลองที่พิจารณาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งกับตัวแปรหนึ่งตัว โดยขึ้นอยู่กับทฤษฎีระบบเกรย์ซึ่งแบบจำลองนี้จะประยุกต์ใช้การดำเนินการของเงื่อนไขต่าง ๆ ในทฤษฎีระบบเกรย์

บทนิยาม 14 กำหนดให้

$$d^{(i)}(k_i) + ax^{(1)}(k_i) = b \tag{2.10}$$

และเรียกสมการนี้ว่า สมการของอนุพันธ์ชนิดเกรย์(equation of grey differential type)

ประพจน์ 4 สำหรับสมการที่เป็นไปตามสมการของอนุพันธ์ชนิดเกรย์

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$$

อนุพันธ์เกรย์ที่ $x^{(0)}k$ และสมาชิกในเซตของค่าข้อมูลเดิม

$$\left\{x^{(1)}(k), x^{(1)}(k-1)\right\}$$

ซึ่งไม่สอดคล้องกับ horizontal mapping

พิสูจน์

$$\left|x^{(0)}(k) - x^{(1)}(k)\right| \;=\; \left|-x^{(1)}(k-1)\right| \;=\; x^{(1)}(k-1)$$

แต่

$$\left|x^{(0)}(k) \;-\; x^{(1)}(k-1)\right| = \left|2x^{(0)}(k) \;-\; x^{(1)}(k)\right|$$

จะได้ว่า

$$\left|x^{(0)}(k) - x^{(1)}(k)\right| \neq \left|x^{(0)}(k) \;-\; x^{(1)}(k-1)\right|$$

ดังนั้น สมการของอนุพันธ์ชนิดเกรย์จะไม่สอดคล้องกับ arithmetic horizontal mapping

ประพจน์ 5 ถ้าค่าของข้อมูลเดิมถูกนำมาเป็นค่าเฉลี่ยของลำดับข้อมูล $X^{(1)}$ นั่นคือ

$$z^{(1)}(k) \;=\; 0.5x^{(1)}(k) + \; 0.5x^{(1)}(k-1) \tag{2.11}$$

แล้วค่าของข้อมูลเดิมที่ $z^{(1)}(k)$ และ $x^{(1)}(k)$ และ $x^{(1)}(k-1)$ ของอนุพันธ์เกรย์(grey derivative) จะสอดคล้องกับ arithmetic horizontal mapping

ถ้าพิจารณาการดำเนินการของผลต่าง

$$\begin{aligned} \left|z^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)\right| &= \left|0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) - x^{(1)}(k)\right| \\ &= \left|0.5x^{(1)}(k-1) - 0.5x^{(1)}(k)\right| \\ &= \left|0.5x^{(1)}(k-1) - 0.5x^{(1)}(k)\right| \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \left|z^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)\right| &= \left|0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) - x^{(1)}(k-1)\right| \\ &= \left|0.5x^{(1)}(k) - 0.5x^{(1)}(k-1)\right| \\ &= \left|0.5x^{(1)}(k-1) - 0.5x^{(1)}(k)\right| \end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\left|z^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)\right| = \left|z^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)\right|$$

ดังนั้น จากบทนิยาม 7 จะได้

$$z^{(1)}(k)*x^{(1)}(k) = z^{(1)}(k)*x^{(1)}(k-1)$$

บทนิยาม 15 ถ้าสมการของอนุพันธ์ชนิดเกรย์ เป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1.ความหนาแน่นของข้อมูลเป็นอนันต์

2.เป็นลำดับของการหาอนุพันธ์เกรย์

3.การส่งค่าจากเซตของค่าข้อมูลเดิมไปยังส่วนประกอบของอนุพันธ์เกรย์จะสอดคล้องกับ horizontal mapping แล้วสมการของอนุพันธ์ชนิดเกรย์จะเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์เกรย์ (grey differential equation)**

ประพจน์ 6 สมการต่อไปนี้

$$x^{(0)}(k)+ax^{(1)}(k) = bx^{(0)}(k)+a$$

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)\ ,\ k=2,3,\ldots n$$

ที่

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) \ , \ k = 2,3,...n$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เกรย์(grey differential equation) และเรียกว่าแบบจำลองเกรย์ GM (1,1)

ทฤษฎีบท 2 สมมติให้

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(n))$$

เป็นลำดับไม่เป็นลบ ที่ $x^{(0)}(k) \geq 0$, $k = 1,2,...,n$, $X^{(1)}$ เป็นค่าผลรวมสะสมของข้อมูลเดิม $X^{(0)}$ จะได้เป็น

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), ..., x^{(1)}(n))$$

โดยที่

$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$, $k = 1,2,...,n$ และ $Z^{(1)}$ เป็นลำดับการสร้างค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่อยู่ติดกันของลำดับ $X^{(1)}$ โดยให้ $X^{(1)}$

$$Z^{(1)} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), z^{(1)}(n))$$

โดยที่ $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1), \ k = 1,2,3,...,n$

ถ้า $\hat{a} = [a,b]^T$ เป็นลำดับของพารามิเตอร์(sequence of parameters) และ

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

แล้วการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของสมการเชิงอนุพันธ์เกรย์

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

$$-az^{(1)}(k) + b = x^{(0)}(k)$$

สอดคล้องกับ

$$\hat{a} = \left[B^T B\right]^{-1} B^T Y$$

พิสูจน์ สมการเชิงอนุพันธ์เกรย์

$$-az^{(1)}(k)+b = x^{(0)}(k)$$

แทนค่าของข้อมูลทั้งหมดลงไปในสมการข้างต้น จะได้

$$\begin{aligned} -az^{(1)}(2)+b &= x^{(0)}(2) \\ -az^{(1)}(3)+b &= x^{(0)}(3) \\ &\vdots \\ -az^{(1)}(n)+b &= x^{(0)}(n) \end{aligned}$$

นั่นคือ $B\hat{a} = Y$

สำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ a และ b โดยใช้ $-az^{(1)}(k)+b$ แทนลงไปใน $x^{(0)}(k)$

สำหรับ $k=2,3,\ldots,n$ ให้ลำดับความคลาดเคลื่อน

$$e = Y-B\hat{a} \tag{2.12}$$

ให้

$$\begin{aligned} s &= e^T e \\ &= \left[Y-B\hat{a}\right]^T\left[Y-B\hat{a}\right] \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left[x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b\right]^2 \end{aligned}$$

ค่าของพารามิเตอร์ a และ b คือ การประมาณค่าโดยผลรวมของค่าความคลาดเคลื่อนยกกำลังสองที่น้อยที่สุดของ s ซึ่งหมายความว่าให้อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ s เทียบกับพารามิเตอร์ a และ b เท่ากับ 0 นั่นคือ

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 2\sum_{k=2}^{n}\left[x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b\right]z^{(1)}(k)=0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = -2\sum_{k=2}^{n}\left[x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b\right]=0 \tag{2.14}$$

ดังนั้น

$$\sum_{k=2}^{n}\{x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)+a\left[z^{(1)}(k)\right]^2-bz^{(1)}(k)\} = 0 \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left[x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b\right] = 0 \tag{2.16}$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 & -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) & -(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบ คือ

$$a = \frac{\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \cdot \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) - (n-1)\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \cdot z^{(1)}(k)}{(n-1)\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 - \left[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right]^2} \tag{2.17}$$

$$b = \frac{\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{(n-1)\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 - \left[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right]^2} \tag{2.18}$$

จาก $Y = B\hat{a}$ เป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$B^T B\hat{a} = B^T Y$, B ไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัส แล้วจะได้

$$\hat{a} = \left[B^T B\right]^{-1} B^T Y$$

หมายเหตุ

$$B^T B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 & -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) & n-1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะได้

$$\left[B^T B\right]^{-1} = \frac{1}{\det(B^T B)}\begin{bmatrix} n-1 & \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} n-1 & \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 \end{bmatrix}}{(\mathrm{n}-1)\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 - \left[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right]^2}$$

และ

$$B^T Y = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\hat{a} = \left[B^T B\right]^{-1} B^T Y$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\det(B^T B)}\begin{bmatrix} -(n-1)\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k) + \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) + \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k) + \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -(n-1)\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k) + \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) + \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k) + \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 \end{bmatrix}}{(\mathrm{n}-1)\sum_{k=2}^{n}\left[z^{(1)}(k)\right]^2 - \left[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right]^2}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) - (n-1) \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{(n-1)\sum_{k=2}^{n} \left[z^{(1)}(k) \right]^2 - \left[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \right]^2} \\ \dfrac{\sum_{k=2}^{n} \left[z^{(1)}(k) \right]^2 \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{(n-1)\sum_{k=2}^{n} \left[z^{(1)}(k) \right]^2 - \left[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \right]^2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[a \;\; b \right]^T$$

เพราะฉะนั้น ลำดับของพารามิเตอร์ คือ

$$\hat{a} = \left[a \;\; b \right]^T = \left[B^T B \right]^{-1} B^T Y$$

บทนิยาม 16 สมมติ ให้ $X^{(0)}$ เป็นลำดับที่ไม่ติดลบ $X^{(1)}$ เป็นลำดับที่ได้จากการหาค่าผลรวมสะสมของข้อมูลเดิมที่ $X^{(0)}$ และ $Z^{(1)}$ เป็นลำดับค่าเฉลี่ยที่ถูกสร้างจากลำดับข้อมูลที่อยู่ติดกันของ X^1 ถ้า $\hat{a} = \left[a \;\; b \right]^T = \left[B^T B \right]^{-1} B^T Y$ แล้ว $\dfrac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$

จะได้ $$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

ซึ่งสมการดังกล่าวจะจัดอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์เกรย์

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)} = b$$

ทฤษฎีบท 3 สมมติให้ B, Y และ $\hat{a}$ เป็นไปตามทฤษฎีบท 2

ถ้า $\left[a \;\; b \right]^T = \left[B^T B \right]^{-1} B^T Y$ แล้วจะได้ข้อความดังต่อไปนี้เป็นจริง

1.การแก้ปัญหาหรือหาคำตอบต้องเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการ

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

โดยกำหนดให้ $$x^{(1)}(t) = \left[x^{(1)}(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-at} + \frac{b}{a}$$

2.ลำดับของคำตอบตามสมการอนุพันธ์เกรย์ GM(1,1) ตามหลักการของเกรย์สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k) = b$$

กำหนดให้

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(1)}(0)-\frac{b}{a}\right]e^{-ak}+\frac{b}{a} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

3.กำหนดให้ $x^{(1)}(0)=x^{(0)}(1)$ แล้ว

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-ak}+\frac{b}{a} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

4.ผลลัพธ์ของ $x^{(0)}(k)$ จากหลักสมการเชิงอนุพันธ์เกรย์ คือ $x^{(1)}(k)$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1)+\hat{x}^{(1)}(k)$$
$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-ak}(1-e^{a})$$

พิสูจน์ จากการเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการ

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)} = b$$

และ $$x^{(1)}(t) = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$$

กำหนดให้ $t=0$ สามารถเขียนแทนค่าในสมการข้างต้น ได้ดังนี้

$$K = x^{(1)}(0) - \frac{b}{a}$$

ดังนั้น $$x^{(1)}(t) = \left(x^{(1)}(0) - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$$

กำหนดให้ $x^{(1)}(0) = x^{(0)}(1)$

$$x^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$$

โดยที่ $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(1)}(0) - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$$

โดยค่าของ $x^{(0)}k$ สามารถคำนวณได้จากสมการ ดังนี้

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-at}(1-e^{a}) \qquad (2.19)$$

2.3 ทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟ

ลูกโซ่มาร์คอฟเป็นชื่อมาจากนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย A. Markov [2] ลูกโซ่มาร์คอฟ เป็นกระบวนการสุ่มของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของความน่าจะเป็น เป็นการคาดคะเนการทดสอบก่อนหน้านี้ ตัวอย่างเช่น ในการอภิปรายในสังคมมนุษย์ได้จัดกลุ่มบุคคลออกเป็นสามสถานะ: ชนชั้นล่าง ชนชั้นกลาง และชนชั้นสูง จากรายได้ของแต่ละคน สมมติว่าชนชั้นล่างคือสถานะ 1 ชนชั้นกลางเป็นสถานะ 2 และชนชั้นสูงเป็นสถานะ 3 ซึ่งจะพิจารณารุ่นถัดไปเป็นความน่าจะเป็นในระดับรายได้จากรุ่นหนึ่งไปสู่รุ่นต่อไป โดยที่สัญลักษณ์ a_{ij} จะใช้เพื่อแสดงถึงความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากสถานะ i ไปยังสถานะ j ดังแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะของรายได้

	สถานะอนาคต			
	สถานะ	1	2	3
สถานะปัจจุบัน	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

ตารางที่ 2.1 แสดงให้เห็นว่าถ้าสถานะปัจจุบันบุคคลในสถานะ 1 (ชนชั้นล่าง) ดังนั้นสถานะในอนาคตจะมีความน่าจะเป็น a_{11} จะอยู่ในชนชั้นล่าง ความน่าจะเป็นของ a_{12} จะอยู่ในชนชั้นกลาง และความน่าจะเป็นที่ a_{13} จะอยู่ในชนชั้นสูง ในทำนองดียวกับ a_{23} จะแสดงถึงความเป็นไปได้ที่ว่า

บุคคลในสถานะ 2 (ชนชั้นกลาง) จะมีลูกหลานที่เปลี่ยนไปในสถานะชนชั้นสูง ซึ่งจากตารางที่ 2.1 สามารถเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ได้เป็น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

นอกจากนี้ลูกโซ่มาร์คอฟจะเชื่อมกับสถานะที่แยกจากกัน และสถานะถัดไปของเหตุการณ์โดยขึ้นอยู่กับสถานะปัจจุบัน แต่ละสถานะได้สร้างขึ้นตามช่วงเวลาของข้อมูลในลักษณะที่กระบวนการของสถานะเหล่านี้เปลี่ยนจากสถานะหนึ่งไปสู่สถานะอื่นในช่วงเวลาที่กำหนด $(i \rightarrow j)$ เรียกว่าขั้นตอนเวลา ในแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟถ้าหากอยู่ในสถานะปัจจุบัน i แล้วย้ายไปที่สถานะ j ในขั้นตอนต่อไปด้วยความน่าจะเป็น P_{ij} ความเป็นไปได้เหล่านี้จะเรียกว่า ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงหรือเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ ความน่าจะเป็นเริ่มต้นที่กำหนดไว้ในแต่ละสถานะจะสอดคล้องกับสถานะเริ่มต้นซึ่งเป็นเมทริกซ์จัตุรัส แต่ละแถวจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 เนื่องจากข้อมูลทั้งหมดแสดงความน่าจะเป็นและผลรวมของข้อมูลในแถวใด ๆ ต้องมีค่าเท่ากับ 1 ในความหมายนี้คือสามารถสร้างเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะจากสถานะหนึ่งไปยังสถานะอื่น ๆ ดังนี้

เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1r} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M_{r1} & M_{r2} & \cdots & M_{rr} \end{bmatrix} \end{array}$$

โดยที่

M_{ij} คือ จำนวนของข้อมูลในการเปลี่ยนสถานะ จากสถานะ i ไปสถานะ j

M_i เป็นจำนวนข้อมูลของสถานะ i

$$M_i = \sum_{j=1}^{r} M_{ij} \qquad , i = 1,2,3,\ldots,r \tag{2.20}$$

กำหนด เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะเป็นสูตร

$$P_{ij} = \frac{M_{ij}}{M_i} \qquad , i,j = 1,2,3,\ldots,r \tag{2.21}$$

จะได้ว่า P_{ij} คือ ความน่าจะเป็นจาก สถานะ i ไปยังสถานะ j ดังนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ คือ

$$R = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1r} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & P_{r1} & \cdots & P_{rr} \end{bmatrix} \quad , \quad \sum_{j=1}^{r} P_{ij} = 1 \, , i = 1,2,3,\ldots,r$$

ณ เวลาขั้นตอนที่ 2 เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ คือ

$$R^2 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1r} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & P_{r1} & \cdots & P_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1r} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & P_{r1} & \cdots & P_{rr} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ ณ เวลาขั้นตอนที่ m คือ $R^m = R^{m-1}R$

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.4.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีระบบเกรย์

อัมทิมา เขียวเข้ม(2552) [4] ทดสอบจำนวนข้อมูลที่จะให้ผลพยากรณ์แม่นยำที่สุดและคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ดัชนีราคาหลักทรัพย์ในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยด้วยแบบจำลองการพยากรณ์เกรย์โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ คือ ราคาปิดของดัชนีราคาหลักทรัพย์ในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยรายวันจำนวน 26 ดัชนี (SET, SET50, SETA , SETAU , SETB , SETC , SETCO , SETEC , SETEN , SETF , SETFA , SETFB , SETHC , SETHM , SETIC , SETIN , SETMN , SETMP , SETPA , SETPF , SETPK , SETPR , SETPS , SETPT , SETTO , SETTR) ตั้งแต่วันอังคารที่ 4 มกราคม 2543 ถึง วันอังคารที่ 9 มิถุนายน 2552 รวมทั้งสิ้น 2,313 วัน ผลการวิจัยพบว่ามีดัชนีราคาหลักทรัพย์จำนวน 19 ดัชนีที่การใช้ข้อมูลจำนวน 5 ข้อมูลในการพยากรณ์ให้ผลแม่นยำที่สุดมีดัชนีราคาหลักทรัพย์จำนวน 3 ดัชนีที่การใช้ข้อมูลจำนวน 4 ข้อมูลในการพยากรณ์ให้ผลแม่นยำที่สุดมีดัชนีราคาหลักทรัพย์จำนวน 2 ดัชนีที่การใช้ข้อมูลจำนวน 6 ข้อมูลในการพยากรณ์ให้ผลแม่นยำที่สุด และมีดัชนีราคาหลักทรัพย์จำนวน 2 ดัชนีที่การใช้ข้อมูลจำนวน 7 ข้อมูลในการพยากรณ์ให้ผลแม่นยำที่สุดในด้านค่าพารามิเตอร์พบว่าค่าพารามิเตอร์ที่เท่ากับ 0.30

เป็นค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมในการนำไปใช้พยากรณ์ดัชนีราคาหลักทรัพย์ในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

พิมพ์พรรณ อำพันธ์ทอง และปิยภัทร บุษบาบดินทร์(2557) [5] ทำการพยากรณ์ปริมาณ PM10 ซึ่งเป็นอนุภาคหรือฝุ่นละอองที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางตั้งแต่ 10 ไมครอนลงมา ด้วยทฤษฎีระบบเกรย์ในบริเวณภาคเหนือตอนบนของประเทศไทย 4 จังหวัด ได้แก่ เชียงใหม่ เชียงราย ลำปาง และแม่ฮ่องสอน โดยใช้ทฤษฎีระบบเกรย์มาสร้างแบบจำลองของการพยากรณ์เพื่อพยากรณ์หาค่าปริมาณ PM10 และหาค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์เฉลี่ย ขั้นแรกเริ่มจากการกำหนดข้อมูลเริ่มต้น จากนั้นหาค่าผลรวมสะสมของข้อมูลเดิม แล้วหา Background Value โดยใช้ลำดับของค่ากลางและการหาอนุพันธ์ของลำดับข้อมูล จึงจะได้รูปแบบของการพยากรณ์ GM(1,1) เพื่อนำผลการศึกษาไปใช้เป็นแนวทางในการแก้ไข บรรเทาปัญหาที่เกิดขึ้นจากมลพิษทางอากาศต่อไป และจากข้อมูลพบว่าคุณภาพอากาศในบริเวณที่ศึกษามีปริมาณ PM10 สูงเกินกว่าเกณฑ์มาตรฐาน ซึ่งผลของการพยากรณ์ในปี 2557-2560 โดยใช้ข้อมูลแบบรายเดือนตั้งแต่ปี 2551-2556 (6ปี) พบว่าทฤษฎีเกรย์สามารถแสดงค่าพยากรณ์ได้ใกล้เคียงกับค่าจริง โดยจะพิจารณาผลของความแม่นยำจาก MAE (Mean Absolute Error) โดยเดือนมกราคมจนถึงเดือนเมษายนมีค่า MAE ค่อนข้างต่ำ ซึ่งค่า MAE ที่ต่ำที่สุดคือ จังหวัดลำปางในเดือนเมษายน ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนที่ 0.078 รองลงมาคือจังหวัดเชียงรายในเดือนมกราคมมีความคลาดเคลื่อนที่ 0.100 และมีค่าความคลาดเคลื่อนมากที่สุดที่จังหวัดลำปางในเดือนกันยายนคือ 2.607 ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าค่าที่ได้จากการพยากรณ์มีความใกล้เคียงกับค่าจริงรายเดือนที่นำมาวิเคราะห์

พิมพ์พรรณ อำพันธ์ทอง(2558) [6] ศึกษาเรื่อง การประยุกต์ใช้ทฤษฎีระบบเกรย์ในการทำนายแนวโน้มการส่งออกข้าวไทยในภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีระบบเกรย์ในการทำนายแนวโน้มการส่งออกข้าวไทยใน 9 ประเทศในภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้และอีก 3 ประเทศคู่ค้าของไทย ได้แก่ กัมพูชา บรูไน พม่า ฟิลิปปินส์ มาเลเซีย ลาว เวียดนาม สิงคโปร์ อินโดนีเซีย ออสเตรเลีย นิวซีแลนด์ และจีน โดยการคำนวณหาจำนวนข้อมูลและค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมกับงานวิจัยที่เกิดขึ้น โดยการปรับใช้ข้อมูลราย 10 ปีและใช้จำนวนข้อมูลรวมถึงค่าพารามิเตอร์ เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำตัวแบบพยากรณ์เกรย์ และใช้เกณฑ์ตัวแบบ Mean Absolute Percentage Error (MAPE) ในการวัดค่าความคลาดเคลื่อนของผลการพยากรณ์ ผลการศึกษาพบว่า (1) การส่งออกข้าวไทยลดลงกลุ่มประเทศที่สั่งซื้อข้าวไทยน้อยลงได้แก่ ประเทศ

สิงค์โปร์ ประเทศอินโดนีเซีย ประเทศมาเลเซีย ประเทศฟิลิปปินส์ ประเทศกัมพูชา และประเทศจีน ทั้งนี้เพราะการเข้าสู่ประชาคมเศรษฐกิจอาเซียนมีผลต่อการส่งออกข้าวไทย (2) การส่งออกข้าวไทยเพิ่มขึ้นกลุ่มประเทศที่สั่งซื้อข้าวไทยเพิ่มมากขึ้น ได้แก่ ประเทศลาว ประเทศเวียดนาม ประเทศพม่า ประเทศนิวซีแลนด์และประเทศออสเตรเลีย ทั้งนี้ เพราะว่าตลาดที่เปิดกว้างมากและกำลังซื้อที่เพิ่มขึ้น ทำให้ประเทศเหล่านี้มีทางเลือกมากขึ้นและ (3) การส่งออกข้าวไทยคงที่ ได้แก่ ประเทศบูรไน ทั้งนี้ เพราะข้าวไทยจำกัดเฉพาะกลุ่มคน ตลาดข้าวไทยไม่เติบโต

2.4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟ

รุจานันทน์ บดีนิธิวัตน์(2554) [7] สร้างตัวแบบ Markov-Switching มาทำนายกำไรส่วนเกินจากตลาดหลักทรัพย์ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลตอบแทนจากการใช้กฎเกณฑ์การซื้อขาย (Trading rules) สองกฎเกณฑ์ระหว่าง Markov Switching trading rule และ Moving-Average trading rule โดยใช้ข้อมูลผลตอบแทนรายวันของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET) ในช่วงปี 1990 – 2012 ผลการศึกษาพบว่า ผลตอบแทนเฉลี่ยในช่วงการพยากรณ์นอกช่วงตัวอย่าง (Out-of-sample) ที่ได้จากการใช้ Markov Switching trading rule น้อยกว่าผลตอบแทนเฉลี่ยที่ได้จากการใช้ Moving-Average trading rule แต่เมื่อพิจารณาความเสี่ยงร่วมด้วย พบว่าการใช้ Markov Switching trading rule นั้นมีความแปรปรวนน้อยกว่า และมี Sharpe ratio ที่สูงกว่า แสดงให้เห็นถึงความเสี่ยงจากการลงทุนที่น้อยกว่า นอกจากนี้ยังได้เปรียบเทียบผลตอบแทนที่ได้จากการใช้กฎการซื้อขายทั้งสองกับการลงทุนแบบซื้อแล้วถือ (Buy and Hold) พบว่าการลงทุนแบบซื้อแล้วถือให้ผลตอบแทนที่มากกว่าการใช้กฎการซื้อขาย และให้ Sharpe ratio มากกว่าการใช้ Moving-Average trading rule จะเห็นได้ว่ามีความขัดแย้งกันในเรื่องของผลตอบแทนและความเสี่ยง ดังนั้นผู้ลงทุนจะต้องเลือกใช้กฎเกณฑ์การซื้อขายที่สอดคล้องกับเป้าหมายการลงทุนของตนเอง

ชัยโรจน์ ตระกูลกาญจน์ และอนุชา ยอดเชียงคำ (2559) [8] ทำการคาดการณ์สัดส่วนวิธีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟเพื่อในไปใช้ในงานด้านวิศวกรรมไฟฟ้า โดยนำแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟมาวิเคราะห์หาสัดส่วนวิธีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าเพื่อให้เห็นถึงความน่าจะเป็นโดยนำข้อมูลทางสถิติจำนวน 5 Session ได้แก่ S1 S2 S3 S4 S5 (วิธีที่ 1 : การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแบบโนด วิธีที่ 2 : การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแบบเมช วิธีที่ 3 : การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแบบ

ซุปเปอร์โพสซิชัน วิธีที่ 4 : การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแบบเทวินิน,วิธีที่ 5 : การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแบบนอร์ตัน)มาสร้าง Transition Matrix เพื่อหาความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงจากสถานะ i ไปยังสถานะ j จากนั้น ได้ทำกระบวนการ Matrix ของความน่าจะเป็นในลำดับที่ 2 ถึงลำดับที่ 5(Long Term Probability) พบว่าในแถวของ Matrix มีค่า Converge เข้าสู่ค่าคงที่ดังนี้ วิธีที่ 1 มีค่าร้อยละ 20.87 เปอร์เซ็นต์ วิธีที่ 2 มีค่าร้อยละ 19.03 เปอร์เซ็นต์ วิธีที่ 3 มีค่าร้อยละ 21.13 เปอร์เซ็นต์ วิธีที่ 4 มีค่าร้อยละ 20.42 เปอร์เซ็นต์ วิธีที่ 5 มีค่าร้อยละ 18.51 เปอร์เซ็นต์ และเมื่อนำมากำหนด Vector of Initial Distribution ในอัตราส่วน 20:20:20:20:20 ผ่านกระบวนการจำนวน 5 รอบ พบว่าข้อมูลทั้งหมดมีการ Converge เข้าสู่อัตราส่วนเดียวกันกับ Long Term Probability

2.4.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับราคาทองคำ

นิภาพร ลิ้มกุลสวัสดิ์(2552) [9] ศึกษาปัจจัยที่มีผลต่อราคาทองคำแท่งในประเทศ และเปรียบเทียบความแม่นยำของการพยากรณ์ราคาทองคำแท่งในประเทศไทย ราคาทองคำแท่งในตลาดโลก และอัตราการแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อดอล์ลาร์สหรัฐฯ ระหว่างข้อมูลรายวันกับข้อมูลรายเดือนโดยวิธีอารีมา ใช้ข้อมูลแบบรายปีตั้งแต่ปี 2533-2550 การพยากรณ์ด้วยวิธีอารีมาจะใช้ข้อมูลรายวันและรายเดือนของราคาทองคำแท่งในประเทศไทย ราคาทองคำแท่งในตลาดโลก และอัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อดอลลาร์สหรัฐฯ ที่ใช้ในการวิเคราะห์ ได้แก่ การวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงซ้อน และการวิเคราะห์อารีมา(Autoregressive integrated moving average model) ซึ่งพบว่าปัจจัยราคาทองคำแท่งในตลาดโลก ปริมาณการนำเข้าทองคำของไทย และปริมาณการผลิตทองคำของโลก มีความสัมพันธ์ทางบวกกับราคาทองคำแท่งในประเทศไทยอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่นร้อยละ 99 และจากการเปรียบเทียบความแม่นยำ พบว่าแบบจำลองที่สร้างจากข้อมูลรายวันมีความแม่นยำมากกว่าแบบจำลองที่สร้างจากข้อมูลรายเดือน

ปัญญา โชติประภา(2555) [10] พยากรณ์ราคาทองคำแท่งในประเทศไทย ด้วยวิธีบ๊อกซ์และเจนกินส์ และเพื่อทดสอบปัจจัยทางเศรษฐกิจที่มีผลชี้นำราคาทองคำในประเทศไทย โดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาแบบรายเดือนทองคำในประเทศไทย ราคาทองคำแท่งในตลาดต่างประเทศ อัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อดอลลาร์สหรัฐ ดัชนีราคาผู้บริโภคในประเทศไทย และดัชนีหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 - ธันวาคม พ.ศ.2555 การพยากรณ์ราคาทองคำแท่งใน

ประเทศไทยจากแบบจำลองอารีมา พบว่าแบบจำลอง AR(4) AR(21) MA(4) เป็นแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดเนื่องจากมีค่า Root Mean Squared Error และค่า Theil's Inequality Coefficient ต่ำที่สุด การทดสอบความเป็นเหตุเป็นผลของดัชนีชี้นำราคาทองคำแท่งในประเทศไทย พบว่า ราคาทองคำแท่งในต่างประเทศเป็นปัจจัยชี้นำราคาทองคำในประเทศไทย โดยที่อัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อดอลลาร์สหรัฐ ดัชนีราคาผู้บริโภคในประเทศไทย และดัชนีตลาดหลักทรัพย์ในประเทศไทย ไม่เป็นปัจจัยชี้นำราคาทองคำแท่งในประเทศไทย การพยากรณ์ราคาทองคำแท่งในประเทศไทยจากแบบจำลองอารีแมกซ์ พบว่าแบบจำลอง AR(4) AR(21) MA(4) PGW(-2) เป็นแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดเนื่องจากมีค่า Root Mean Squared Error และค่า Theil's Inequality Coefficient ต่ำที่สุด เมื่อได้ผลพยากรณ์จากแบบจำลองอารีมาและอารีแมกซ์ จึงนำค่า Root Mean Squared Error ทั้งสองแบบจำลองมาเปรียบเทียบกัน เพื่อคำนวณค่า Relative Root Mean Squared Error (RRMSE) ซึ่งค่าที่คำนวณได้เท่ากับ 1.0 หมายความว่าแบบจำลองอารีมาและอารีแมกซ์ให้ผลการพยากรณ์ที่แม่นยำไม่ต่างกัน

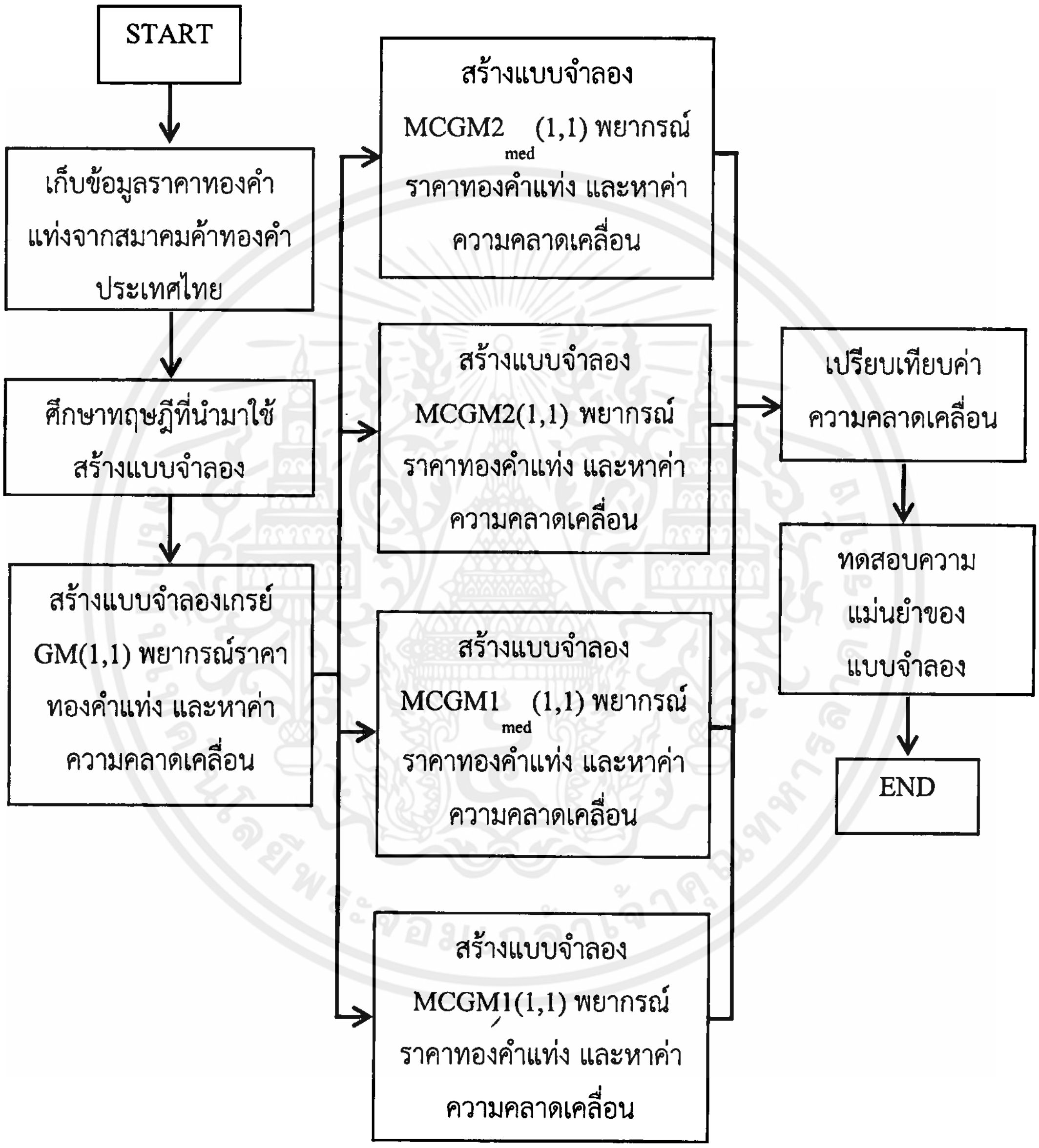
ณภาส์อัญญ์ พิบูลพาณิชย์การ(2558) [11] ศึกษาเรื่อง การวิเคราะห์ปัจจัยที่มีผลต่อราคาทองคำแท่งในประเทศไทย โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาตลาดทองคำ การลงทุนในทองคำและสถานการณ์ราคาทองคำใน ประเทศไทยและปัจจัยที่ส่งผลกระทบต่อราคาทองคำในประเทศไทย ซึ่งแนวทางการวิเคราะห์จะเลือกศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยต่าง ๆ ที่คาดว่าจะส่งผลกระทบต่อราคาทองคำในประเทศไทยโดยเลือกปัจจัยที่ส่งผลต่อราคาทองคำแท่งในประเทศไทยคือ ราคาทองคำตลาดโลก อัตราแลกเปลี่ยนสกุลเงินบาทต่อดอลลาร์สหรัฐฯ ดัชนีราคาผู้บริโภคในประเทศไทย อัตราดอกเบี้ย นโยบายธนาคารแห่งประเทศไทย โดยเก็บรวบรวมเป็นรายเดือนตั้งแต่เดือนพฤษภาคม 2549 - เดือน มิถุนายน 2558 โดยใช้การวิเคราะห์สมการถดถอยพหุคูณ (Multiple Regression Analysis) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square Method) ผลการวิจัยพบว่า ราคาทองคำแท่งในประเทศไทยมีความสัมพันธ์กับราคาทองคำตลาดโลก อัตราแลกเปลี่ยนสกุลเงินบาทต่อดอลลาร์สหรัฐฯ และดัชนีราคาผู้บริโภคในประเทศไทยแต่ไม่มีความสัมพันธ์กับอัตราดอกเบี้ยนโยบายธนาคารแห่งประเทศไทยโดยที่ราคาทองคำตลาดโลก มีค่าเป็นบวกหมายถึงหากราคาทองคำตลาดโลกเพิ่มขึ้น 1% จะมีผลต่อราคาทองคำแท่งในประเทศไทยเท่ากับ 0.942% อัตราแลกเปลี่ยนสกุลเงินบาทต่อดอลลาร์สหรัฐฯมีค่าเป็นบวก แสดงว่าหากอัตราแลกเปลี่ยนสกุลเงินบาทต่อดอลลาร์ สหรัฐฯ เพิ่มขึ้น 1% จะมีผลต่อราคาทองคำแท่งในประเทศไทยจะมีค่าเท่ากับ 0.839% ดัชนีราคาผู้บริโภคใน

ประเทศไทย มีค่าเป็นบวกแสดงว่าหากดัชนีราคาผู้บริโภคในประเทศไทยเพิ่มขึ้น 1% จะมีผลต่อราคาทองคำแท่งในประเทศไทยเท่ากับ 0.250%

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

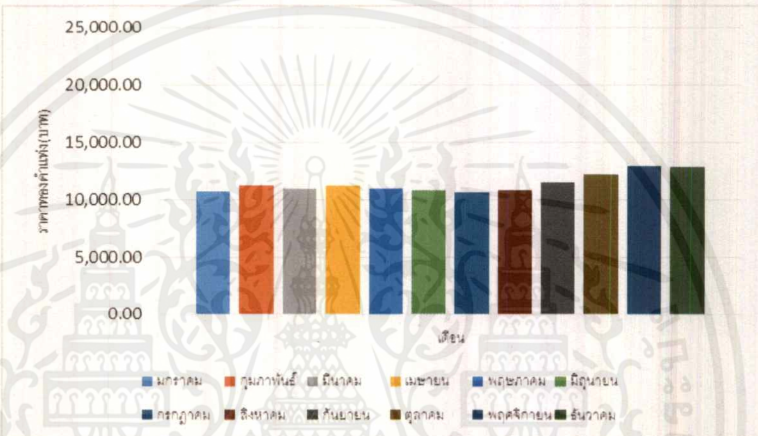
3.1 ขั้นตอนการดำเนินงาน



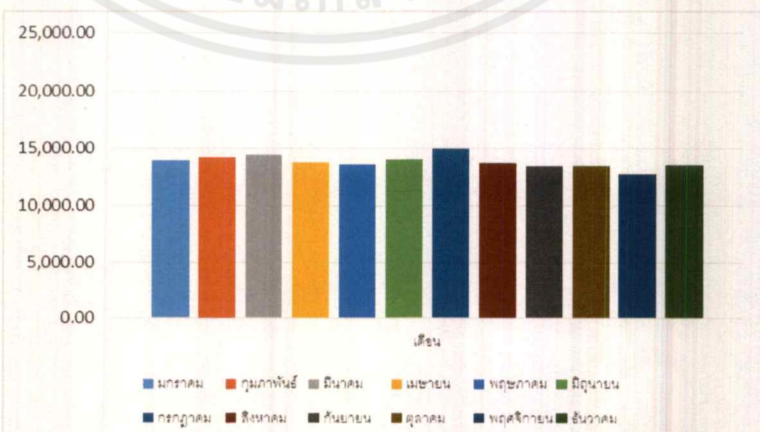
3.1.1 สร้างแบบจำลองเกรย์ GM (1,1) และพยากรณ์ราคาทองคำแท่ง

ขั้นที่ 1 เก็บข้อมูลและวิเคราะห์ราคาทองคำแท่ง ซึ่งเป็นราคาถัวเฉลี่ยต่อเดือนมาวิเคราะห์ โดยข้อมูลที่เก็บได้ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

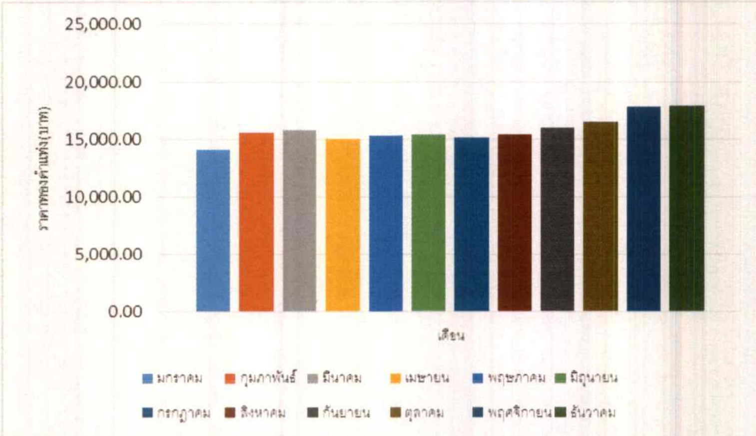
- จำนวนข้อมูลมี 132 ค่า
- ค่าเฉลี่ยของราคาทองคำแท่งน้ำหนัก 1 บาท อยู่ที่ 18,786.18 บาท
- ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของราคาทองคำแท่งน้ำหนัก 1 บาท อยู่ที่ 3819.93 บาท
- ข้อมูลมีค่าต่ำสุดคือ 10,674.00 บาท ค่าที่เป็นไปได้มากที่สุดคือ 18,310 บาท และค่าสูงสุดคือ 25,738.46 บาท
- เมื่อนำข้อมูลราคาทองคำแท่งตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 จนถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 มาพล็อตอนุกรมเวลาจะได้ดังรูปต่อไปนี้



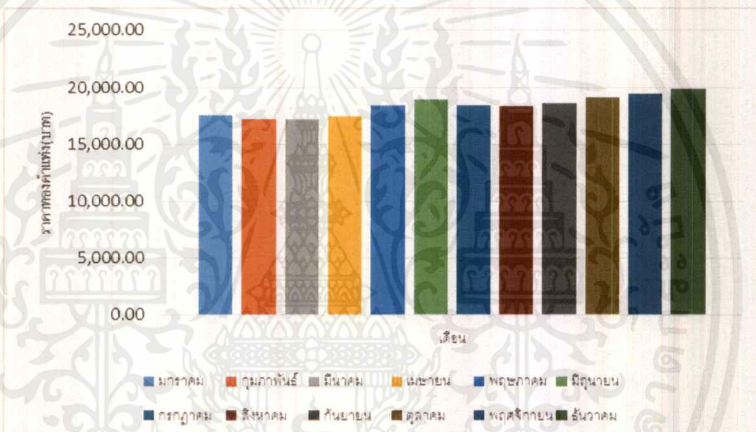
รูปที่ 3.1 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2550



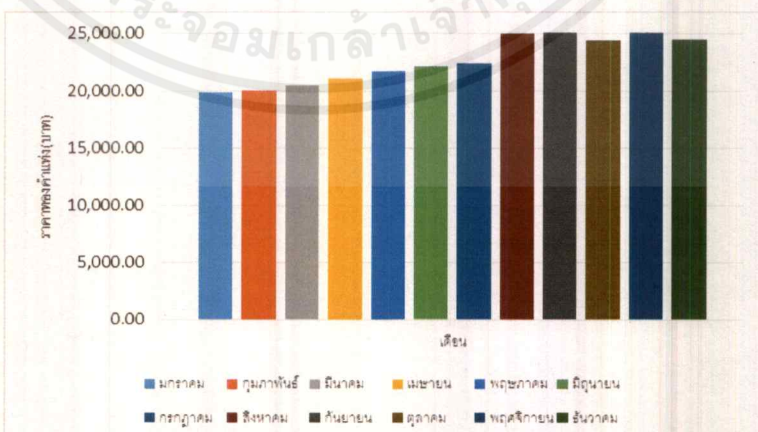
รูปที่ 3.2 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ.2551



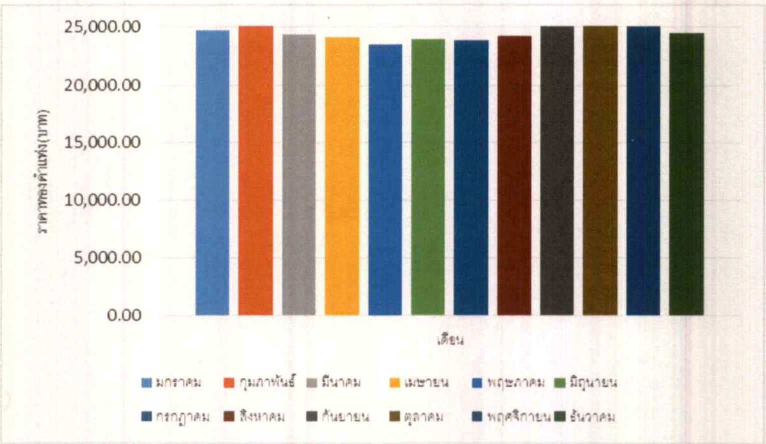
รูปที่ 3.3 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2552



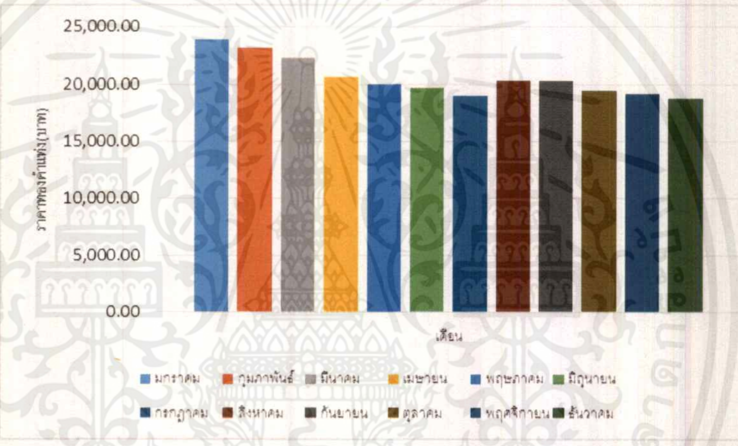
รูปที่ 3.4 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2553



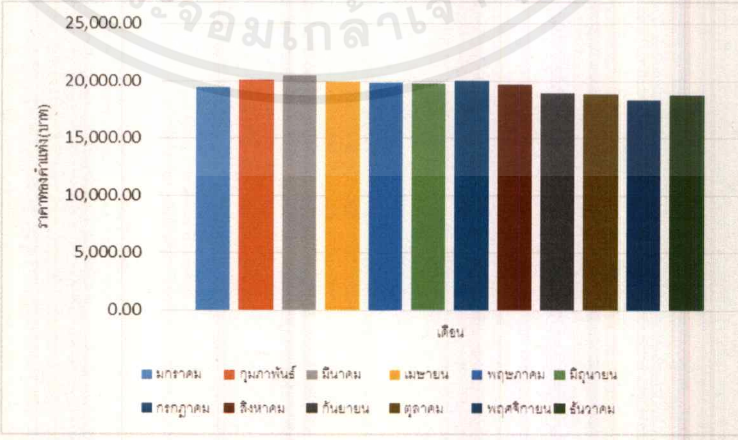
รูปที่ 3.5 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2554



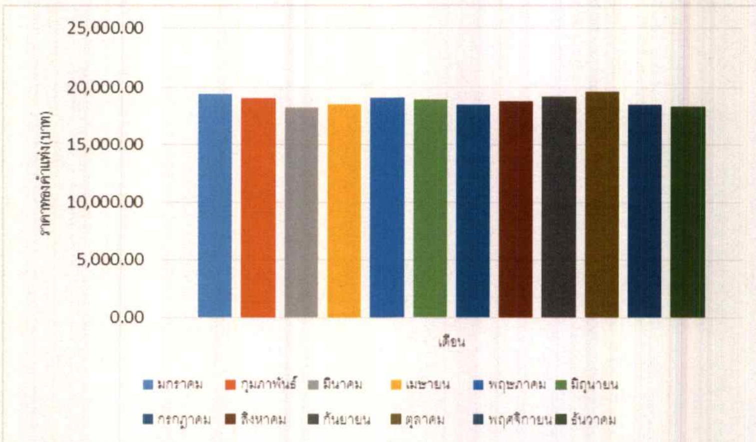
รูปที่ 3.6 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2555



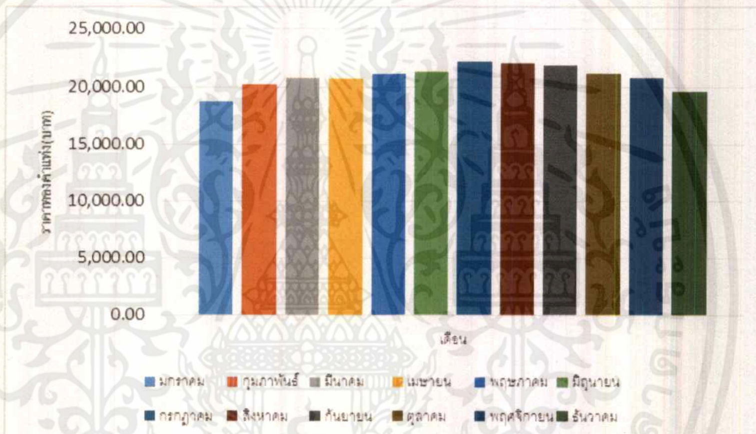
รูปที่ 3.7 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2556



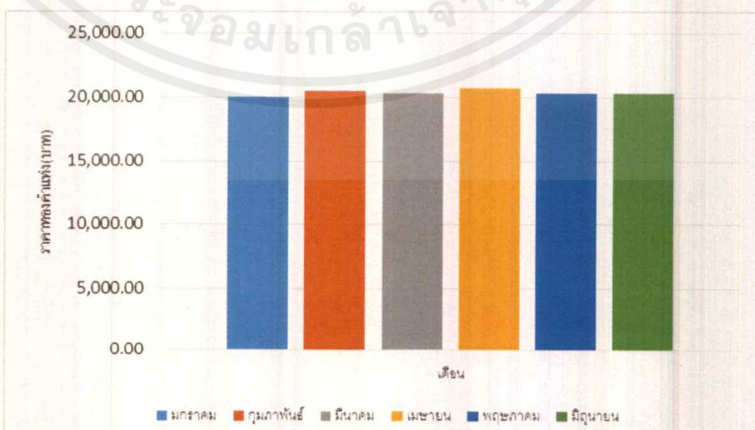
รูปที่ 3.8 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2557



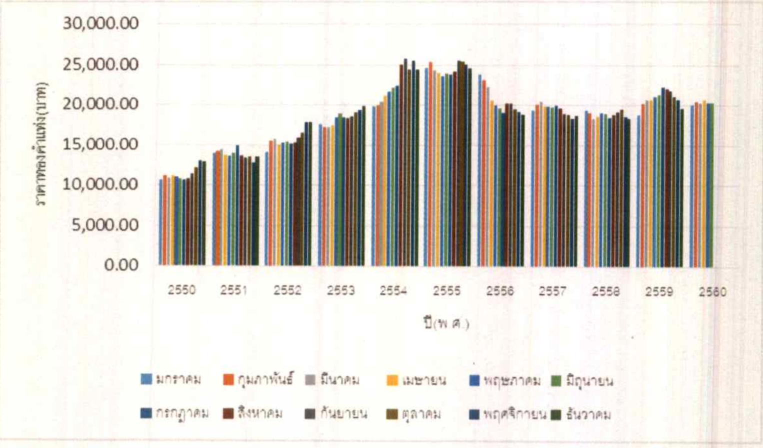
รูปที่ 3.9 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2558



รูปที่ 3.10 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2559



รูปที่ 3.11 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือน ในปี พ.ศ. 2560



รูปที่ 3.12 แสดงราคาทองคำแท่งแบบรายเดือนตั้งแต่ พ.ศ.2550 – พ.ศ. 2560

จากราฟราคาทองคำแท่งในแต่ละปี ตั้งแต่ปีพ.ศ.2550 ถึง พ.ศ.2560 แสดงให้เห็นถึงเดือนที่ราคาทองคำแท่งมีการปรับตัวขึ้นสูงในปีนั้นๆ และกราฟรวมจะแสดงให้เห็นถึงปีที่ทองคำแท่งมีราคาสูงในช่วงระยะเวลา 11 ปี ซึ่งปีที่มีราคาทองคำแท่งผันผวนและปรับราคามากที่สุดคือช่วงปี พ.ศ. 2554 และปีพ.ศ. 2555

ขั้นที่ 2 สร้างแบบจำลองเกรย์ GM (1,1)

(1) กำหนดให้ราคาทองคำแท่งที่เก็บรวบรวม แทนด้วย $X^{(0)}$ นั่นคือ

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(n))$$

ใช้วิธีการ Accumulating Generation Operator (AGO) ในการหา $X^{(1)}$

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), ..., x^{(1)}(n))$$

ที่

$$X_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{i} X_j^{(0)} \quad , i = 1,2,3$$

จะได้

$$x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) , \quad k = 2,3,...,n$$

(2) สมการเชิงอนุพันธ์เกรย์

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)} = b$$

เมื่อ z คือ ลำดับค่าเฉลี่ยที่เกิดจากค่าของข้อมูลที่อยู่ติดกันของลำดับ $X^{(1)}$

นั่นคือ $$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)$$

หาค่าพารามิเตอร์ a , b ของแบบจำลองเกรย์ GM(1,1) คำนวณโดย

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left[B^T B\right]^{-1} B^T Y$$

จาก $-az^{(1)}(k)+b = x^{(0)}(k) \quad , k = 2,3,\ldots,n$

จะได้

$$\begin{aligned} -az^{(1)}(2)+b &= x^{(0)}(2) \\ -az^{(1)}(3)+b &= x^{(0)}(3) \\ &\vdots \\ -az^{(1)}(n)+b &= x^{(0)}(n) \end{aligned}$$

โดยที่

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) \\ -z^{(1)}(3) \\ \vdots \\ -z^{(1)}(n) \end{bmatrix}$$

หาค่าพารามิเตอร์ a และ b ได้ดังนี้

$$\therefore a = -0.0032 \quad , b = 15295.5975$$

(3) สมการแบบจำลองการพยากรณ์ GM (1,1)

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right]e^{-ak}(1-e^{a})$$

$$= \left(10,736.00 - \left(\frac{15,295.5975}{-0.0032}\right)\right)\times\left(1-e^{-0.0032}\right)\times e^{-0.0032k}$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = 15,305.3853e^{0.0032k} \tag{3.1}$$

เมื่อ k คือ ตำแหน่งของข้อมูลตั้งแต่ 0,1,2,...

ขั้นที่ 3 พยากรณ์ราคาทองคำแท่งจากแบบจำลองเกรย์ GM (1,1) และหาค่าความคลาดเคลื่อนจากราคาทองคำแท่งที่เก็บข้อมูลกับค่าราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์โดยแบบจำลองเกรย์ GM (1,1)

ขั้นที่ 4 พยากรณ์ราคาทองคำแท่งของเดือนกรกฎาคม พ.ศ.2560 - เดือนธันวาคม พ.ศ.2560 โดยใช้แบบจำลองเกรย์ GM (1,1)

3.1.2 แบบจำลอง MCGM (1,1)

ในส่วนนี้จะรวมแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟและแบบจำลองเกรย์ GM(1,1) เข้าด้วยกันเพื่อปรับปรุงแบบจำลองการพยากรณ์ โดยสร้างกฎของลูกโซ่มาร์คอฟจากเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะของค่าความคลาดเคลื่อน ระหว่างข้อมูลทองคำแท่งจริงกับข้อมูลทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์แบบจำลองเกรย์ GM(1,1) ซึ่งใช้ข้อมูลตั้งแต่เดือนมกราคม 2550 จนถึง เดือนมิถุนายน 2560 เรียกแบบจำลองการพยากรณ์นี้ว่าแบบจำลอง MCGM(1,1) มีรูปแบบการหา 2 วิธี คือ

(1) แบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่พิจารณาจากกฎของลูกโซ่มาร์คอฟ มี 2 แบบจำลอง คือ MCGM1(1,1) และ MCGM2(1,1)

(2) แบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่ใช้ค่าจุดกึ่งกลางของสถานะ มี 2 แบบจำลอง คือ $\text{MCGM1}_{med}(1,1)$ และ $\text{MCGM2}_{med}(1,1)$

พิจารณาการสร้างแบบจำลอง MCGM (1,1) ดังนี้

(1) แบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่พิจารณาจากกฎของลูกโซ่มาร์คอฟ

กำหนดให้

$$S_0 = \min\{e(i), i = 1,2,...,n\} \text{ และ } S_1 = \max\{e(i), i = 1,2,...,n\}$$

ค่าความคลาดเคลื่อน e_0 อยู่ใน สถานะ j ; $(1 \le j \le r)$ เมื่อ

$$e_0 \in \left(s_0 + (j-1)\frac{(s_1 - s_0)}{r} , s_0 + (j)\frac{(s_1 - s_0)}{r} \right)$$

และ L คือ ความกว้างของแต่ละสถานะ จะได้

$$L = \frac{(s_1 - s_0)}{r} \tag{3.2}$$

ในกรณีที่ $e_0 = s_0$ จะให้ e_0 อยู่ในสถานะ 1 และได้จุดกึ่งกลางของสถานะ j

$$v_j = s_0 + (2j-1)\frac{(s_1 - s_0)}{2r} \quad , \quad j = 1,2,3,...,r \tag{3.3}$$

โดยที่ $R = \left[P_{ij}\right]_{rxr}$ คือ เมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ และ P_{ij} คือความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะ i ไปยังสถานะ j

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ สามารถนำมาสร้างเป็นเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะได้ดังนี้

$$R = \left[P_{ij}\right]_{rxr} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1r} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & P_{r2} & \cdots & P_{rr} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

จะได้ว่า

$A_{T+k} = A_T R^k$ เมื่อ $A_T = \left[a_1(T), a_2(T), ..., a_r(T)\right]$ และ $a_i(T)$ คือ โอกาสของเหตุการณ์ซึ่งอยู่ในสถานะ i ณ ขั้นตอนเวลา T ดังนั้น แบบจำลองการพยากรณ์ของลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์ MCGM (1,1) คือ

$$\tilde{x}^{(0)}(T+k) = \hat{x}^{(0)}(T+k) + (A_{T+k-1}R)V \quad , \; k = 1,2,3,... \tag{3.5}$$

เมื่อ $V = \left[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r\right]'$ คือ เมทริกซ์ของจุดกึ่งกลางในแต่ละสถานะ

ในกรณีที่ลำดับของข้อมูลเดิมมี n ตัว กำหนดให้ $T = 0$ จะได้ว่า

$$\tilde{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(0)}(k+1) + (A_T R^k)V \tag{3.6}$$

เมื่อ $\left\{\tilde{x}^{(0)}(1), \tilde{x}^{(0)}(2), ..., \tilde{x}^{(0)}(n)\right\}$ เรียกว่า ลำดับข้อมูลเทรนนิ่ง (Training data) ของ MCGM(1,1) และ $\left\{\tilde{x}^{(0)}(n+1), \tilde{x}^{(0)}(n+2), ..., \tilde{x}^{(0)}(n+k), ...\right\}$ เรียกว่า ลำดับข้อมูลที่ใช้ทดสอบ (Testing data) ของแบบจำลอง MCGM(1,1) และคู่อันดับของแต่ละสถานะสามารถคำนวณได้ดังนี้

สถานะ 1 $S1 \in \left(s_0 \ , s_0 + \frac{s_1 - s_0}{r} \right) = \left(s_0 \ , s_0 + L \right)$

สถานะ 2 $S2 \in \left(s_0 + \frac{s_1 - s_0}{r} \ , s_0 + \frac{s_1 - s_0}{r} + \frac{s_1 - s_0}{r} \right) = \left(s_0 + L \ , s_0 + 2L \right)$

สถานะ 3 $S3 \in \left(s_0 + 2L \ , s_0 + 3L \right)$

$$\vdots$$

สถานะ r $Sr \in \left(s_0 + (r-1)L \ , s_0 + rL \right) = \left(s_0 + (r-1)L \ , s_1 \right)$

และจุดกึ่งกลางของแต่ละสถานะ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$m(1) = \frac{s_0 + s_0 + L}{2} = \frac{2s_0 + L}{2}$$

$$m(2) = \frac{s_0 + L + s_0 + 2L}{2} = \frac{2s_0 + 3L}{2}$$

$$m(3) = \frac{s_0 + 2L + s_0 + 3L}{2} = \frac{2s_0 + 5L}{2}$$

$$\vdots$$

$$m(r) = \frac{s_0 + (r-1)L + s_1}{2} = \frac{2s_0 + (2r-1)L}{2}$$

จากจุดกึ่งกลางของสถานะและเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะ จะได้แบบจำลองการพยากรณ์ตามกฎของลูกโซ่มาร์คอฟ คือ

$$\tilde{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(0)}(k) + (A_T R^{k-1})V \quad , \ k = 0,1,2,... \tag{3.7}$$

เมื่อ A_k เป็นเมทริกซ์ความน่าจะเป็นที่อยู่ในแถวของแต่ละสถานะโดยพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนของข้อมูล

(2) แบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่ใช้ค่าจุดกึ่งกลางของสถานะ

จากค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณมาได้ จะสามารถทำให้หาเมทริกซ์ความน่าจะเป็นในเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้น P_{ij} ได้ ซึ่งแบบจำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่พิจารณาจากค่าจุดกึ่งกลางของสถานะนั้นสามารถพยากรณ์โดยการพิจารณาจากเมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ P_{ij} ได้ ซึ่งมีวิธีการพิจารณา 2 วิธี คือ

1. พิจารณาจากสถานะก่อนหน้า โดยดูความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้น จากสถานะ i ไปยังสถานะ j ในเมทริกซ์ R ที่ $j = 1,2,...,r$ ว่าสถานะใดมีความน่าจะเป็นที่มากที่สุด ให้ใช้ P_{ij} นั้นในการพยากรณ์

2. ถ้าความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้น จากสถานะ i ไปยังสถานะ j ในเมทริกซ์ R ที่ $j = 1,2,...,r$ มีความน่าจะเป็นเท่ากัน ให้พิจารณาความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะตั้งแต่ 2 ขั้นขึ้นไป

3.2 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อน

การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองการพยากรณ์นั้นแบ่งออกเป็น 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนทั่วไป (Residual error) โดยแบบจำลองที่คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนแบบทั่วไป คือ GM(1,1) ,MCGM1(1,1) และ MCGM1$_{med}$(1,1)

$$e(i) = x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i) \quad , \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.8}$$

วิธีที่ 2 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error) โดยแบบจำลองที่คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ GM(1,1), MCGM2(1,1) และ MCGM2$_{med}$(1,1)

$$e(i) = \frac{x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i)}{x^{(0)}(i)} \quad , \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.9}$$

3.3 การเปรียบเทียบค่าพยากรณ์

เปรียบเทียบความแม่นยำของแบบจำลอง GM(1,1) , MCGM1(1,1) , $MCGM1_{med}(1,1)$, MCGM2(1,1) และ $MCGM2_{med}(1,1)$ ด้วยการเปรียบเทียบค่าพยากรณ์ราคาทองคำแท่งตั้งแต่เดือนกรกฎาคม พ.ศ.2560 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 โดยใช้ 3 หลักเกณฑ์ในการพิจารณา คือ ค่าของ Mean Square Error (MSE), Absolute Mean Error (AME) และ Absolute Relative Mean Error (ARE)

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x(i) - \hat{x}(i)\right)^2 \tag{3.10}$$

$$AME = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x(i) - \hat{x}(i)\right| \tag{3.11}$$

$$ARE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x(i) - \hat{x}(i)}{x(i)}\right| \tag{3.12}$$

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

4.1 การพยากรณ์ราคาทองคำแท่ง

จากเก็บรวบรวมราคาทองคำแท่งตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 จนถึงเดือนธันวาคม พ.ศ. 2560 โดยแบ่งข้อมูลราคาทองคำแท่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ในส่วนแรกใช้ในการคำนวณหาสมการพยากรณ์ราคาทองคำแท่ง (เดือนมกราคม พ.ศ.2550 ถึงเดือนมิถุนายน พ.ศ.2560) และในส่วนที่สองใช้ในการทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองการพยากรณ์ราคาทองคำแท่ง GM(1,1) MCGM1(1,1) , MCGM2(1,1), MCGM1$_{med}$(1,1) และ MCGM2$_{med}$(1,1) (เดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2560 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560)

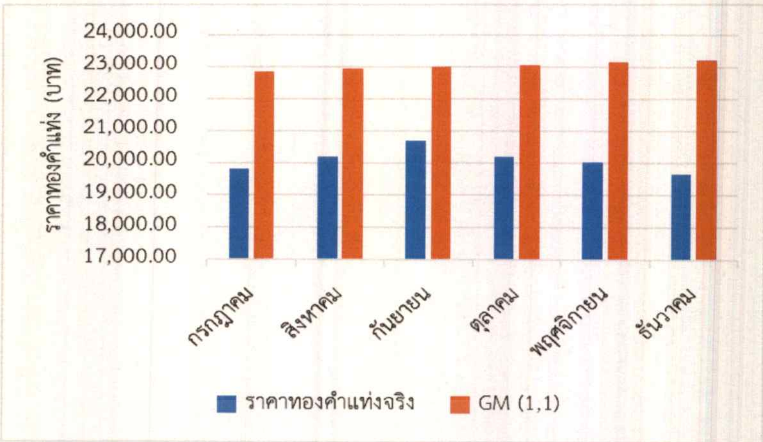
4.1.1 พยากรณ์โดยแบบจำลอง GM (1,1)

แบบจำลองนี้พิจารณาข้อมูลของราคาทองคำแท่งตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 จนถึงเดือนมิถุนายน พ.ศ.2560 เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมกับแบบจำลองโดยวิธีกำลังสองที่น้อยที่สุด ซึ่งค่าพารามิเตอร์ที่ได้ คือ $a = -0.0032$, $b = 15,295.5975$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = 15,295.59752e^{0.0032k} \quad , k = 0,1,2,... \qquad (4.1)$$

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าของราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ของแบบจำลอง GM (1,1) และค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ของราคาทองคำแท่ง

เดือน - ปี	ราคาทองคำแท่งจริง $x(i)$	GM (1,1) $\hat{x}(i)$	ค่าความคลาดเคลื่อน $x(i) - \hat{x}(i)$
กรกฎาคม 2560	19,794.23	22,844.48	-3,050.25
สิงหาคม 2560	20,196.30	22,917.21	-2,720.91
กันยายน 2560	20,669.23	22,990.17	-2,320.94
ตุลาคม 2560	20,192.31	23,063.37	-2,871.06
พฤศจิกายน 2560	20,023.08	23,136.79	-3,113.71
ธันวาคม 2560	19,636.54	23,210.45	-3,573.91



รูปที่ 4.1 แสดงราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งจากการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง GM(1,1)

จากรูปจะเห็นว่าค่าของราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ยังมีค่าไม่ใกล้เคียงกับค่าราคาทองคำแท่งจริง ซึ่งสามารถสังเกตจากค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการคำนวณระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ของราคาทองคำแท่ง

4.1.2 พยากรณ์โดยแบบจำลอง MCGM (1,1)

แบบจำลองการพยากรณ์นี้จะแบ่งรูปแบบการพยากรณ์ออกเป็นทั้งหมด 4 รูปแบบ คือ

(1) แบบจำลอง MCGM1(1,1)

(2) แบบจำลอง $MCGM1_{med}(1,1)$

(3) แบบจำลอง MCGM2(1,1)

(4) แบบจำลอง $MCGM2_{med}(1,1)$

ซึ่งแบบจำลอง MCGM1(1,1) กับ $MCGM1_{med}(1,1)$ จะคิดค่าความคลาดเคลื่อนแบบธรรมดา (Residual error) โดยที่แบบจำลอง MCGM2(1,1) และ $MCGM2_{med}(1,1)$ จะคิดค่าความคลาดเคลื่อนแบบสัมพัทธ์ (Relative error)

(1) พยากรณ์โดยแบบจำลอง MCGM1(1,1)

จากการพยากรณ์โดยแบบจำลอง GM (1,1) สามารถแบ่งสถานะของข้อมูลได้ 8 สถานะ ซึ่งจะพิจารณาสถานะของข้อมูลจากค่าคลาดเคลื่อนทั่วไป ดังนั้น จะได้เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้น (R_T) คือ

$$R_T = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.76 & 0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18 & 0.71 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.20 & 0.65 & 0.10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.72 & 0.14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0 & 0.66 & 0 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.74 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์จุดกึ่งกลางของสถานะ

$$V_T = \begin{bmatrix} -4152.51 & -2605.36 & -1058.20 & 488.96 & 2036.11 & 3583.27 & 5130.43 & 6677.58 \end{bmatrix}'$$

ดังนั้นจะได้แบบจำลองการพยากรณ์ MCGM1 (1,1) ดังนี้

$$\tilde{x}^{(0)}(k) = GM(1,1) + (AR^{k-1})V \qquad , k = 1,2,3,... \qquad (4.2)$$

เมื่อ $GM(1,1)$ คือ ค่าพยากรณ์จากแบบจำลอง GM(1,1)

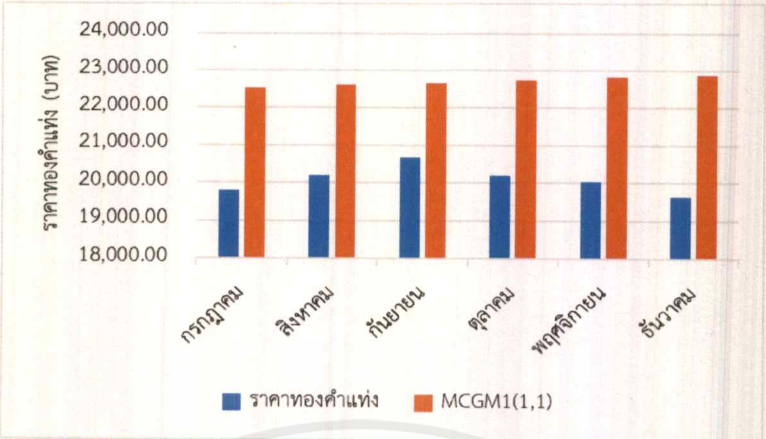
A คือ เมทริกซ์ความน่าจะเป็นที่อยู่ในแถวของแต่ละสถานะ

R คือ เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ

V คือ เมทริกซ์จุดกึ่งกลางของแต่ละสถานะ

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าของราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ของแบบจำลอง MCGM1 (1,1) และค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ของราคาทองคำแท่ง

เดือน-ปี	ราคาทองคำแท่งจริง $x(i)$	MCGM1(1,1) $\hat{x}(i)$	ค่าความคลาดเคลื่อน $x(i) - \hat{x}(i)$
กรกฎาคม 2560	19,794.23	22511.81	-2,717.58
สิงหาคม 2560	20,196.30	22,584.35	-2,388.05
กันยายน 2560	20,669.23	22,657.13	-1,987.90
ตุลาคม 2560	20,192.31	22,730.14	-2,537.83
พฤศจิกายน 2560	20,023.08	22,803.39	-2,780.31
ธันวาคม 2560	19,636.54	22,876.89	-3,240.35



รูปที่ 4.2 แสดงราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งจากการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง MCGM1(1,1)

จากรูปจะเห็นว่าค่าของราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ยังมีค่าไม่ใกล้เคียงกับค่าราคาทองคำแท่งจริง ซึ่งสามารถสังเกตได้จากค่าความคลาดเคลื่อนที่มีอยู่ไม่น้อยระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ของราคาทองคำแท่งที่คำนวณได้ แต่ก็ยังคงมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าแบบจำลอง GM(1,1)

(2) การพยากรณ์โดยแบบจำลอง $MCGM1_{med}(1,1)$

จากการพยากรณ์โดยแบบจำลองเกรย์ GM (1,1) สามารถแบ่งสถานะของข้อมูลได้ 8 สถานะ ซึ่งจะพิจารณาสถานะของข้อมูลจากค่าคลาดเคลื่อน โดยการพยากรณ์จะพิจารณาจากสถานะก่อนหน้า นั่นคือ ความน่าจะเป็นในการเป็นสถานะ จากสถานะ i ไปยังสถานะ j นั้นสถานะใดมีความน่าจะเป็นมากที่สุด จะเลือกใช้สถานะนั้นในการพยากรณ์ ดังนั้นจะได้แบบจำลองการพยากรณ์ $MCGM1_{med}(1,1)$ ดังนี้

$$\tilde{x}^{(0)}(k) = GM(1,1) + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \qquad (4.3)$$

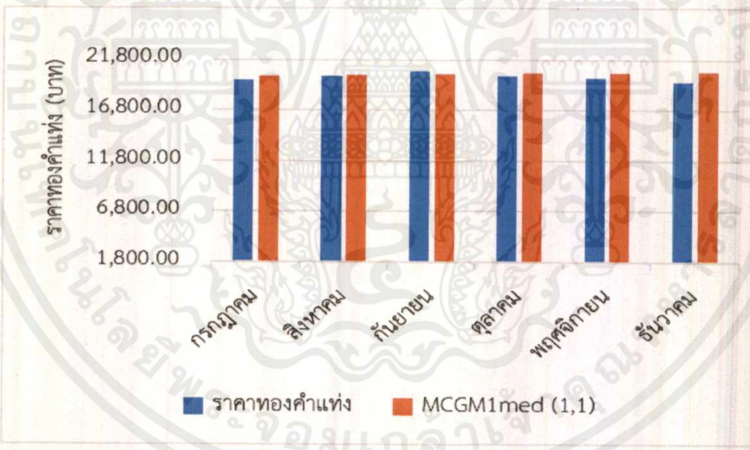
เมื่อ $GM(1,1)$ คือ ค่าพยากรณ์จากแบบจำลอง GM(1,1)

θ_1 คือ ขอบเขตล่างของสถานะ

θ_2 คือ ขอบเขตบนของสถานะ

ตารางที่ 4.3 แสดงค่าของราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ของแบบจำลอง $MCGM1_{med}$ (1,1) และค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ของราคาทองคำแท่ง

เดือน-ปี	ราคาทองคำแท่งจริง $x(i)$	$MCGM1_{med}$ (1,1) $\hat{x}(i)$	ค่าความคลาดเคลื่อน $x(i) - \hat{x}(i)$
กรกฎาคม 2560	19,794.23	20,239.13	-444.90
สิงหาคม 2560	20,196.30	20,311.86	-115.56
กันยายน 2560	20,669.23	20,384.82	284.41
ตุลาคม 2560	20,192.31	20,458.01	-265.71
พฤศจิกายน 2560	20,023.08	20,531.44	-508.36
ธันวาคม 2560	19,636.54	20,605.10	-968.56



รูปที่ 4.3 แสดงราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งจากการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง $MCGM1_{med}$ (1,1)

จากรูปจะเห็นว่าค่าของราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์เริ่มมีค่าใกล้เคียงกับค่าของราคาทองคำแท่งจริง ซึ่งสามารถสังเกตได้จากค่าความคลาดเคลื่อนที่มีค่าลดลงระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ของราคาทองคำแท่งที่คำนวณได้ และมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าแบบจำลอง GM(1,1) , MCGM1(1,1)

(3) พยากรณ์โดยแบบจำลอง MCGM2 (1,1)

จากการพยากรณ์โดยแบบจำลองเกรย์ GM (1,1) สามารถแบ่งสถานะของข้อมูลได้ 8 สถานะ ซึ่งจะพิจารณาสถานะของข้อมูลจากค่าคลาดเคลื่อนแบบสัมพัทธ์ ดังนั้น จะได้เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ (R_F) นั่นคือ

- เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้น

$$R_{F_1} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0.43 & 0.43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 & 0.82 & 0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0 & 0 & 0.13 & 0.67 & 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.28 & 0.61 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.94 \end{bmatrix}$$

- เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ 2 ขั้น

$$R_{F_2} = \begin{bmatrix} 0.74 & 0.13 & 0.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0.29 & 0.43 & 0.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.72 & 0.19 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0 & 0 & 0.23 & 0.47 & 0.27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0.44 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.88 \end{bmatrix}$$

- เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ 3 ขั้น

$$R_{F_3} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.12 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0.29 & 0.43 & 0.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.68 & 0.19 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0 & 0 & 0.30 & 0.44 & 0.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.39 & 0.44 & 0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.20 & 0.40 & 0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.18 & 0.82 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จุดกึ่งกลางสถานะ คือ

$$V_F = \begin{bmatrix} -41.46 & -32.07 & -22.68 & -13.29 & -3.91 & 5.48 & 14.87 & 24.26 \end{bmatrix}'$$

ดังนั้นจะได้แบบจำลอง MCGM2 (1,1) ดังนี้

$$x^{(0)}(k) = GM(1,1)\cdot\left[1 + \frac{AR^{k-1}V}{100}\right] \tag{4.4}$$

เมื่อ $GM(1,1)$ คือ ค่าพยากรณ์จากแบบจำลอง GM(1,1)

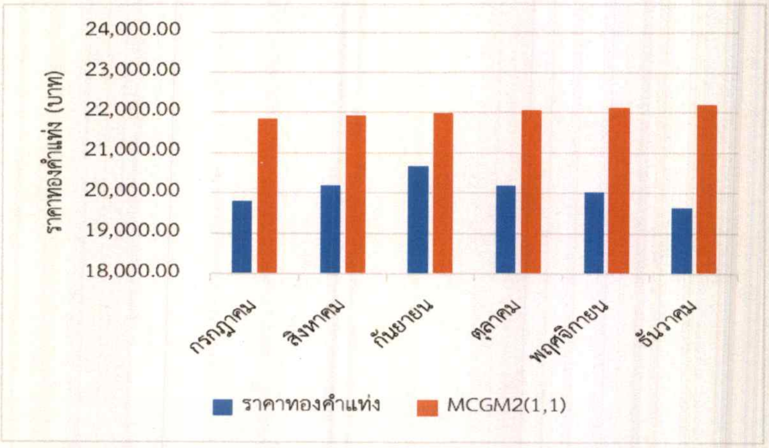
A คือ เมทริกซ์ความน่าจะเป็นที่อยู่ในแถวของแต่ละสถานะ

R คือ เมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ

V คือ เมทริกซ์จุดกึ่งกลางของแต่ละสถานะ

ตารางที่ 4.4 แสดงราคาทองคำแท่งจริงที่เก็บรวบรวมและราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ MCGM2 (1,1)

เดือน - ปี	**ราคาทองคำแท่งจริง** $x(i)$	**MCGM2(1,1)** $\hat{x}(i)$	**ค่าความคลาดเคลื่อน** $x(i) - \hat{x}(i)$
กรกฎาคม 2560	19,794.23	21,840.45	-2,046.23
สิงหาคม 2560	20,196.30	21,909.94	-1,713.64
กันยายน 2560	20,669.23	21,979.65	-1,310.42
ตุลาคม 2560	20,192.31	22,049.58	-1,857.27
พฤศจิกายน 2560	20,023.08	22,119.73	-2,096.66
ธันวาคม 2560	19,636.54	22,190.11	-2,553.58



รูปที่ 4.4 แสดงราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งจากการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง MCGM2 (1,1)

(4) การพยากรณ์โดยแบบจำลอง $\mathrm{MCGM2}_{med}$ (1,1)

จากการพยากรณ์โดยแบบจำลอง GM (1,1) สามารถแบ่งสถานะของข้อมูลได้เป็น 8 สถานะ ซึ่งจะพิจารณาสถานะของข้อมูลจากค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ โดยการพยากรณ์จะพิจารณาจากสถานะก่อนหน้า นั่นคือ ความน่าจะเป็นในการเป็นสถานะ จากสถานะ i ไปยังสถานะ j นั้น สถานะใดมีความน่าจะเป็นมากที่สุด จะเลือกใช้สถานะนั้นในการพยากรณ์ ดังนั้นจะได้แบบจำลองการพยากรณ์ $\mathrm{MCGM1}_{med}(1,1)$ ดังนี้

$$\tilde{x}^{(0)}(k) = GM(1,1)^* \left(1 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{200} \right) \tag{4.5}$$

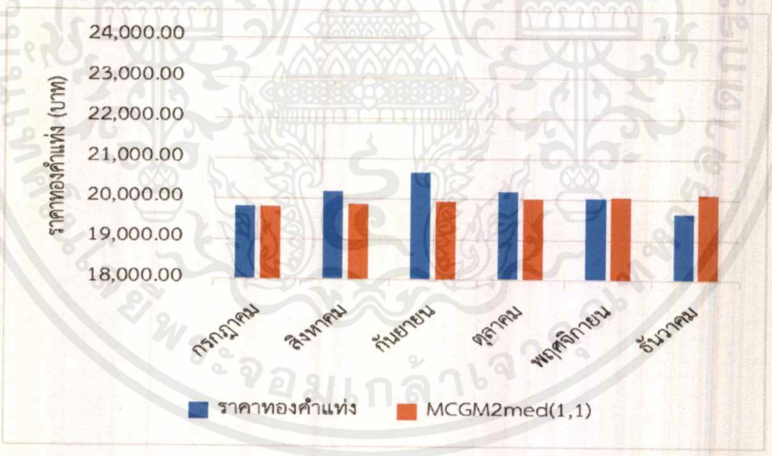
เมื่อ $GM(1,1)$ คือ ค่าพยากรณ์จากแบบจำลอง GM(1,1)

θ_1 คือ ขอบเขตล่างของสถานะ

θ_2 คือ ขอบเขตบนของสถานะ

ตารางที่ 4.5 แสดงราคาทองคำแท่งที่เก็บรวบรวมและราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ $MCGM2_{med}$ (1,1)

เดือน - ปี	**ราคาทองคำแท่งจริง** $x(i)$	$\mathbf{MCGM2_{med}(1,1)}$ $\hat{x}(i)$	**ค่าความคลาดเคลื่อน** $x(i) - \hat{x}(i)$
กรกฎาคม 2560	19,794.23	19,809.59	-15.36
สิงหาคม 2560	20,196.30	19,872.66	323.64
กันยายน 2560	20,669.23	19,935.93	733.30
ตุลาคม 2560	20,192.31	19,999.40	192.91
พฤศจิกายน 2560	20,023.08	20,063.07	-39.99
ธันวาคม 2560	19,636.54	20,126.94	-490.40

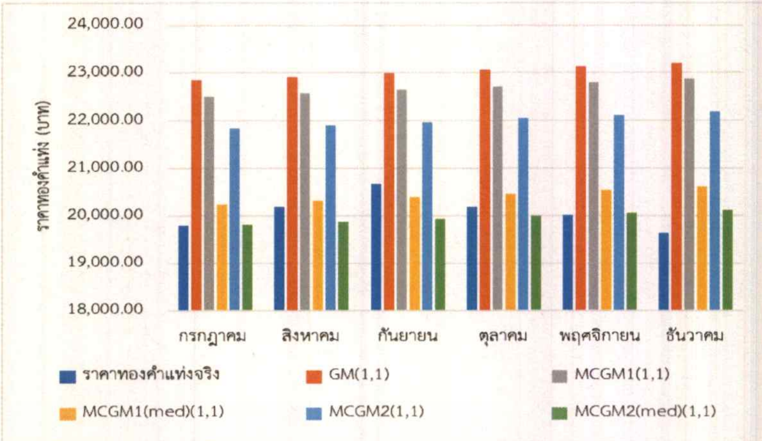


รูปที่ 4.5 แสดงราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งจากการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง $MCGM2_{med}$ (1,1)

จากรูปจะเห็นว่าค่าของราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์เริ่มมีค่าใกล้เคียงกับค่าของราคาทองคำแท่งจริงมากขึ้น ซึ่งสามารถสังเกตได้จากค่าความคลาดเคลื่อนที่มีค่าลดลงระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ของราคาทองคำแท่งที่คำนวณได้ และมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าแบบจำลอง GM(1,1) , MCGM1(1,1) , $MCGM1_{med}$(1,1) และ MCGM2(1,1)

ตารางที่ 4.6 แสดงราคาทองคำแท่งที่เก็บรวบรวมและราคาทองคำแท่งที่ได้จากการพยากรณ์ GM(1,1) , MCGM1(1,1) , $MCGM1_{med}(1,1)$, MCGM2(1,1) และ $MCGM2_{med}(1,1)$

เดือน	ราคาทองคำแท่งจริง	GM(1,1)	MCGM1(1,1)	$MCGM1_{med}(1,1)$	MCGM2(1,1)	$MCGM2_{med}(1,1)$
ก.ค.-60	19,794.23	22,844.48	22,511.81	20,239.13	21,840.46	19,809.59
ส.ค.-60	20,196.30	22,917.21	22,584.35	20,311.86	21,909.94	19,872.66
ก.ย.-60	20,669.23	22,990.17	22,657.13	20,384.82	21,979.65	19,935.93
ต.ค.-60	20,192.31	23,063.37	22,730.14	20,458.02	22,049.58	19,999.40
พ.ย.-60	20,023.08	23,136.79	22,803.39	20,531.44	22,119.74	20,063.07
ธ.ค.-60	19,636.54	23,210.45	22,876.89	20,605.10	22,190.12	20,126.94



รูปที่ 4.6 แผนภูมิแสดงราคาทองคำแท่งจริงและราคาทองคำแท่งจากการพยากรณ์

จารูปที่ 4.6 แสดงให้เห็นถึงการเปรียบเทียบราคาทองคำแท่งพยากรณ์จากแบบจำลอง GM(1,1) , MCGM1(1,1) , MCGM2(1,1) , $MCGM1_{med}(1,1)$ และ $MCGM2_{med}(1,1)$ กับข้อมูลราคาทองคำแท่งจริง โดยที่แผนภูมิแท่งสีน้ำเงินแสดงข้อมูลราคาทองคำแท่งจริงที่เก็บรวบรวมมา แผนภูมิแท่งสีแดงแสดงการพยากรณ์ GM(1,1) แผนภูมิแท่งสีเทาแสดงการพยากรณ์ MCGM1(1,1) แผนภูมิแท่งสีเหลืองแสดงการพยากรณ์ $MCGM1_{med}(1,1)$ แผนภูมิแท่งสีน้ำเงินแสดงถึงการพยากรณ์ MCGM2(1,1) และ แผนภูมิแท่งสีเขียวแสดงการพยากรณ์ $MCGM2_{med}(1,1)$

ซึ่งจากรูปที่ 4.6 จะเห็นว่าการพยากรณ์ $MCGM1_{med}(1,1)$ และ$MCGM2_{med}(1,1)$ มีค่าใกล้เคียงกับราคาทองคำแท่งจริงมากที่สุด

4.2 เปรียบเทียบความแม่นยำของแบบจำลอง

เปรียบเทียบความแม่นยำของ GM(1,1),MCGM1(1,1),$MCGM1_{med}(1,1)$,MCGM2(1,1) และ $MCGM2_{med}(1,1)$ ด้วยการทดสอบราคาทองคำแท่งตั้งแต่เดือนกรกฎาคม พ.ศ.2560 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 โดยใช้ 3 หลักเกณฑ์ คือ Mean Square Error (MSE), Absolute Mean Error (AME) และ Absolute Relative Mean Error (ARE)

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x(i) - \hat{x}(i)\right)^2$$

$$AME = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x(i) - \hat{x}(i)\right|$$

$$ARE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x(i) - \hat{x}(i)}{x(i)}\right|$$

ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังตาราง

ตารางที่ 4.7 แสดงค่า MSE , AME และ ARE

แบบจำลอง	MSE	AME	ARE	ARE (%)
GM (1,1)	8,800,871.2527	2,941.7990	0.14680	14.68%
MCGM1(1,1)	6,951,718.9589	2,608.6690	0.13021	13.02%
$MCGM1_{med}$ (1,1)	259,888.0650	366.2567	0.02164	2.16%
MCGM2(1,1)	3,867,836.6660	1,929.6334	0.09639	9.64%
$MCGM2_{med}$ (1,1)	153,669.7186	299.2682	0.01480	1.48%

พิจารณาจากค่า MSE พบว่าแบบจำลองการพยากรณ์ $MCGM2_{med}(1,1)$ ให้ค่าต่ำสุดเท่ากับ 153,669.7186 รองลงมาคือ $MCGM1_{med}(1,1)$ ให้ค่า 259,888.0650 , MCGM2(1,1) ให้ค่า 3,867,836.6660, MCGM1(1,1) ให้ค่า 6,951,718.9589 และ GM(1,1) ให้ค่าสูงสุดเท่ากับ 8,800,871.2527

พิจารณาจากค่า AME พบว่าแบบจำลองการพยากรณ์ $MCGM2_{med}(1,1)$ ให้ค่าต่ำสุดเท่ากับ 299.2682 รองลงมาคือ $MCGM1_{med}(1,1)$ ให้ค่า 366.2567 , MCGM2(1,1) ให้ค่า 1,929.6334 , MCGM1(1,1) ให้ค่า 2,608.6690 และ GM(1,1) ให้ค่าสูงสุดเท่ากับ 2,941.7990

พิจารณาจากค่า ARE พบว่าแบบจำลองการพยากรณ์ $MCGM2_{med}(1,1)$ ให้ค่าต่ำสุดเท่ากับ 0.01480 หรือ 1.48% รองลงมาคือ $MCGM1_{med}(1,1)$ ให้ค่า 0.02164 หรือ 2.16% , MCGM2(1,1) ให้ค่า 0.09639 หรือ 9.64% , MCGM1(1,1) ให้ค่า 0.13021 หรือ13.02% และ GM(1,1) ให้ค่าสูงสุดเท่ากับ 0.14680 หรือ 14.68%

จากการเปรียบเทียบการพยากรณ์ เกณฑ์ที่ใช้ในการวัดความถูกต้องของการพยากรณ์จะพิจารณาจากค่า MSE , AME และ ARE ที่ต่ำที่สุด ดังนั้นแบบจำลองการพยากรณ์ $MCGM2_{med}(1,1)$ จึงเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการพยากรณ์ราคาทองแท่ง เพราะสามารถพยากรณ์ราคาทองคำแท่งได้ใกล้เคียงกับราคาทองคำแท่งจริงมากที่สุด

4.3 ทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองการพยากรณ์

การตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อนแบบย้อนกลับ คือ วิธีการทดสอบทางสถิติระหว่างแบบจำลองการพยาการณ์และค่าจริงของข้อมูล โดยสร้างจากรูปแบบความน่าจะเป็นของค่าพยากรณ์ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าคลาดเคลื่อน(สัมบูรณ์) ช่วงของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ตรวจสอบแนวคิดของจุดที่ค่าคลาดเคลื่อนเหลือน้อยและความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อน

ลำดับของค่าข้อมูลเดิม

$$X = \{x(1), x(2), ..., x(n)\} \tag{4.6}$$

ลำดับของค่าพยากรณ์

$$\hat{x} = \{\hat{x}(1), \hat{x}(2), ..., \hat{x}(n)\} \tag{4.7}$$

ค่าความคลาดเคลื่อน ณ เวลาที่ k

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad , k = 1,2,3,... \tag{4.8}$$

ค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ ของค่าข้อมูลเดิม $x(k)$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) \quad , k = 1,2,3,... \tag{4.9}$$

ค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อน $e(k)$

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(k) \quad , k = 1,2,3,... \tag{4.10}$$

ค่าความแปรปรวน S_1^2 ของข้อมูลเดิม

$$S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [x(k) - \bar{x}]^2 \quad , k = 1,2,3,... \tag{4.11}$$

ค่าความแปรปรวน S_2^2 ของข้อมูลเดิม

$$S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [e(k) - \bar{e}]^2 \quad , k = 1,2,3,... \tag{4.12}$$

$$c = \frac{S_2}{S_1} \tag{4.13}$$

$$p = p(|e(i) - \bar{e}| < 0.6745 S_1) \tag{4.14}$$

ตารางที่ 4.8 ตารางแสดงระดับของความแม่นยำของแบบจำลอง [12]

Model precision grade	c	p
Level 1 (Good)	≤ 0.35	≥ 0.95
Level 2 (Qualified)	$0.35 < c \leq 0.50$	$0.80 \leq p < 0.95$
Level 3 (Reluctant)	$0.50 < c \leq 0.65$	$0.70 \leq p < 0.80$
Level 4 (Unqualified)	> 0.65	< 0.70

ตารางที่ 4.9 แสดงค่า c และ p ที่บ่งบอกความแม่นยำของแต่ละแบบจำลอง

Model	c	p
GM (1,1)	0.79	0.65
MCGM1(1,1)	0.80	0.65
$MCGM1_{med}$ (1,1)	0.23	0.98
MCGM2(1,1)	0.78	0.65
$MCGM2_{med}$ (1,1)	0.28	0.96

จากตารางจะเห็นว่าค่า c และ p ของ $MCGM1_{med}(1,1)$ และ $MCGM2_{med}(1,1)$ อยู่ในระดับ 1 คือ ระดับที่น่าพอใจ ถือว่าอยู่ในเกณฑ์ที่ดี ซึ่งแสดงถึงความแม่นยำของการพยากรณ์อยู่ในระดับที่ดี

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การศึกษาปัญหาพิเศษในครั้งนี้ได้นำเสนอวิธีการพยากรณ์ราคาทองคำแท่งโดยใช้แบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์ โดยใช้ข้อมูลจากสมาคมค้าทองคำแห่งประเทศไทย ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 จำนวน 132 ข้อมูล ได้แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ชุด

ข้อมูลชุดที่ 1 คือ ข้อมูลตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 ถึงเดือนมิถุนายน พ.ศ.2560 จำนวน 126 ข้อมูล สำหรับการสร้างแบบจำลองการพยากรณ์ด้วยวิธีเกรย์ GM(1,1) วิธีผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์แบบ MCGM1(1,1) , MCGM2(1,1) , $MCGM1_{med}(1,1)$ และ $MCGM2_{med}(1,1)$ โดยการปรับปรุงแบบจำลองเกรย์ GM(1,1) ด้วยการหาค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 วิธี

วิธีที่ 1 ค่าความคลาดเคลื่อนทั่วไป (Residual error) : MCGM1(1,1)

$$e(i) = x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

วิธีที่ 2 ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error) : MCGM2(1,1)

$$e(i) = \frac{x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i)}{x^{(0)}(i)} \ , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ข้อมูลชุดที่ 2 คือ ข้อมูลตั้งแต่เดือนกรกฎาคม พ.ศ.2560 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 จำนวนทั้งหมด 6 ข้อมูล สำหรับการเปรียบเทียบความแม่นยำของค่าพยากรณ์จากแบบจำลองทั้ง 5 แบบ คือ GM(1,1), MCGM1(1,1) , MCGM2(1,1) , $MCGM1_{med}(1,1)$ และ $MCGM2_{med}(1,1)$ ด้วยค่า MSE , AME และ ARE โดยพิจารณาดูจากค่าที่ต่ำที่สุด ซึ่งแสดงให้ถึงความแม่นยำในการพยากรณ์ของแบบจำลองมากที่สุด

ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์แบบ $MCGM2_{med}(1,1)$ เป็นวิธีที่สามารถพยากรณ์ราคาทองคำแท่งได้ใกล้เคียงกับราคาทองคำแท่งจริงมากที่สุด โดยสมการการพยากรณ์เป็นดังนี้

$$\tilde{x}^{(0)}(k) \;=\; GM(1,1)\cdot\left(1 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{200}\right)$$

โดยแบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์แบบ $MCGM2_{med}(1,1)$ พยากรณ์ราคาทองคำแท่ง ตั้งแต่เดือนกรกฎาคม พ.ศ.2560 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 มีค่าคลาดเคลื่อน MSE เท่ากับ 153,669.7186 , AME เท่ากับ 299.2682 , ARE เท่ากับ 0.01480 หรือ ARE(%) เท่ากับ 1.48% และจากการทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองผสมลูกโซ่มาร์คอฟเกรย์แบบ $MCGM2_{med}(1,1)$ จะพบว่าค่า c เท่ากับ 0.28 และ ค่า p เท่ากับ 0.96 ซึ่งแบบจำลองนี้จัดอยู่ในระดับที่ดี ตามตารางแสดงระดับของความแม่นยำของแบบจำลอง

5.2 ข้อเสนอแนะจากผลการศึกษาวิจัย

1. ในการศึกษาครั้งนี้ข้อมูลที่ใช้เป็นข้อมูลรายเดือนของราคาทองคำในประเทศไทย ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ.2550 ถึงเดือนธันวาคม พ.ศ.2560 รวมทั้งสิ้น 132 ข้อมูล (แหล่งที่มาจากสมาคมค้าทองคำแห่งประเทศไทย) ซึ่งเป็นข้อมูลที่เหมาะสมกับการพยากรณ์ในระยะยาว หากต้องการพยากรณ์ราคาทองคำแท่งในช่วงเวลาที่ยาวนานกว่า ควรมีการอัพเดตข้อมูลเพื่อสร้างแบบจำลองสำหรับการพยากรณ์ให้มีความเหมาะสมกับชุดข้อมูลและเพื่อผลการพยากรณ์ที่แม่นยำมากขึ้น

2. นักลงทุนสามารถนำผลการศึกษาปัญหาพิเศษในครั้งนี้ไปใช้ในการพิจารณาแนวโน้มราคาทอง เพื่อลดความเสี่ยงจากการลงทุน

ข้อเสนอแนะเพื่อการศึกษาครั้งต่อไป

1. เข้าไปขอข้อมูลราคาทองคำจากสมาคมค้าทองคำแห่งประเทศไทยด้วยตัวเอง เพื่อให้ได้ข้อมูลต่างๆ มากยิ่งขึ้น

2. ศึกษาทฤษฎีอื่นๆ เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างแบบจำลอง

เอกสารอ้างอิง

[1] สมาคมค้าทองคำ *ข้อมูลราคาทองเฉลี่ย.* สืบค้นจาก https://www.goldtraders.or.th/AvgPriceList.aspx

[2] Chen, Q. & Shi, D. (2006). Markov chains theory for scale-free networks

[3] Liu, S. & Lin, Y. (2006). Grey information. London: Springer

[4] อัมทิมา เขียวเข้ม (2552) *การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการพยากรณ์ดัชนีราคาในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยด้วยตัวแบบการพยากรณ์เกรย์* (วิทยานิพนธ์ปริญญาบัณฑิต). นครปฐม : มหาวิทยาลัยศิลปากร

[5] พิมพ์พรรณ อำพันธ์ทอง และปิยภัทร บุษบาบดินทร์ (2557) *การพยากรณ์ PM10 ในบริเวณภาคเหนือตอนบนของประเทศไทยด้วยทฤษฎีเกรย์.* วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา ปีที่ 20 (ฉบับที่ 1) มกราคม – มิถุนายน พ.ศ. 2558

[6] พิมพ์พรรณ อำพันธ์ทอง (2558) การประยุกต์ใช้ทฤษฎีระบบเกรย์ในการทำนายแนวโน้มการส่งออกข้าวไทยในภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้. ศูนย์สุพรรณบุรี : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

[7] รุจานันทน์ บดีนิธิวัตน์ (2554) *ตัวแบบ Markov – Switching สามารถทำนายกำไรส่วนเกินจากตลาดหลักทรัพย์ได้หรือไม่* (วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

[8] ชัยโรจน์ ตระกูลกาญจน์ และอนุชา ยอดเชียงคำ (2559) *การคาดการณ์สัดส่วนวิธีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยตัวแบบมาร์คอฟ.* นเรศวรวิจัย ครั้งที่ 12: วิจัยและนวัตกรรมกับการพัฒนาประเทศ

[9] นิภาพร ลิ้มกุลสวัสดิ์ (2552*) การเปรียบเทียบข้อมูลการพยากรณ์ราคาทองคำแท่งโดยวิธีอารีมา* (วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

[10] ปัญญา โชติประภา (2555) *การพยากรณ์ราคาทองคำแท่งในประเทศไทยโดยวิธีบ๊อกซ์และเจนกินส์* (วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิตย์

[11] ณภาส์อัญญ์ พิบูลพาณิชย์การ (2558) *การวิเคราะห์ปัจจัยที่มีผลต่อราคาทองคำแท่งในประเทศไทย* (วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต). กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยกรุงเทพ

[12] Hang Li, Chi Zhang, Dong Miao, Tong Wang, Yang Feng, Hao Fu, Chunsheng Zhang, Ming Zhao (2559) *Water Demand Prediction of Grey Markov Model Based on GM(1,1)*