ผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

Kronecker Meet of Matrices over a Boolean Algebra

ปรียาวรรณ ภานุวาส

พิมพิศา กรัดสุวรรณ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

Kronecker Meet of Matrices over a Boolean Algebra

PREEYAWAN PANUVAS

PIMPISA KRADSUWAN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2018

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน	
	Kronecker Meet of Matrices over a Boolean Algebra	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวปรียาวรรณ ภานุวาส	รหัสนักศึกษา 58050109
	นางสาวพิมพิศา กรัดสุวรรณ์	รหัสนักศึกษา 58050124
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์	
ปีการศึกษา	2561	
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม	

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ประธานกรรมการ	
รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน
ชื่อนักศึกษา	นางสาวปรียาวรรณ ภานุวาส รหัสนักศึกษา 58050109
	นางสาวพิมพิศา กรัดสุวรรณ์ รหัสนักศึกษา 58050124
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน เราให้บทนิยามของผลคูณดังกล่าวและพิจารณาตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับการดำเนินการพื้นฐานสำหรับเมทริกซ์ ได้แก่ สมบัติเชิงพีชคณิต สมบัติการมีทแบบผสม สมบัติการจอยน์แบบผสม ความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทโครเนคเคอร์กับผลจอยน์โครเนคเคอร์ รวมทั้งสมบัติเชิงโครงสร้าง

คำสำคัญ : ผลจอยน์โครเนคเคอร์ ผลมีทโครเนคเคอร์ เมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

Title	Kronecker Meet of Matrices over a Boolean Algebra
Students	Miss. Preeyawan Panuvas Student ID 58050109
	Miss. Pimpisa Kradsuwan Student ID 58050124
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2018
Advisor	Asst.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam

Abstract

This special problem aims to study the Kronecker meet of matrices over a Boolean algebra. We provide the definition of the product and investigate its properties involving certain matrix operations, such as, algebraic properties, the mixed meet property, the mixed joint property, relations between the Kronecker meet and the Kronecker join, and structural properties.

Keywords : Kronecker Join, Kronecker Meet, Matrices over a Boolean Algebra

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาปัญหาพิเศษนี้ ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ที่ได้ให้ความกรุณาในการเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาในหัวข้อปัญหาพิเศษนี้ และคอยเอาใจใส่ในทุก ๆ เรื่องตลอดระยะเวลาดำเนินงาน โดยให้คำปรึกษา คำแนะนำ สั่งสอนวิชาความรู้ สนับสนุน และสอนทักษะในการทำงานเป็นอย่างดี ตลอดจนช่วยตรวจสอบแก้ไขให้ถูกต้องสมบูรณ์มากที่สุด

ขอกราบขอบพระคุณ รศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ประธานกรรมการสอบปัญหาพิเศษและ รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ ที่กรุณารับเป็นกรรมการสอบปัญหาพิเศษ และได้สละเวลามาให้คำแนะนำชี้แนะแนวทางแก้ไขปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้มีความถูกต้องสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังทุกท่านที่ประสิทธิประศาสน์วิชาความรู้ พร้อมทั้งให้คำปรึกษา แนะนำเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณบุคลากรและเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่คอยเอื้อเฟื้ออำนวยความสะดวกในทุก ๆ ด้าน ตลอดระยะเวลาการดำเนินงาน

ขอขอบพระคุณพี่ ๆ เพื่อน ๆ ทุกท่านสำหรับการช่วยเหลือในทุกอย่าง และเป็นกำลังใจให้การดำเนินงานผ่านพ้นไปได้ด้วยดี

ท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และญาติพี่น้อง ที่ให้การอุปการะเลี้ยงดู อบรมสั่งสอน ให้ปรึกษาแนะนำ ตลอดจนสนับสนุนในทุก ๆ เรื่อง อีกทั้งยังเป็นกำลังใจที่สำคัญอย่างยิ่งตลอดการศึกษา

สำหรับคุณงามความดีอันใดซึ่งเกิดจากปัญหาพิเศษฉบับนี้ ผู้จัดทำขอมอบให้ผู้มีพระคุณและผู้ที่มีความปรารถนาดีต่อผู้จัดทำเสมอมา และขอขอบพระคุณเจ้าของเอกสารและงานวิจัยทุกท่านที่ผู้จัดทำได้นำมาศึกษาและอ้างอิง จนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ปรียาวรรณ ภานุวาส

พิมพิศา กรัดสุวรรณ์

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

โดยทั่วไปในทางคณิตศาสตร์เรามักคุ้นเคยกับโครงสร้างของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากจำนวนจริง($\mathbb{R}$) หรือจำนวนเชิงซ้อน($\mathbb{C}$) และการดำเนินการเชิงพีชคณิตพื้นฐาน เช่น การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การคูณเมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน และรอยเมทริกซ์ ต่อมาในทฤษฎีเมทริกซ์มีนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ Leopold Kronecker ได้คิดค้นผลคูณโครเนคเคอร์ซึ่งเป็นผลคูณรูปแบบหนึ่ง โดยจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\otimes$ (o-time) สำหรับเมทริกซ์จริง $A=[a_{ij}]$ ขนาด $m\times n$ และ B ขนาด $p\times q$ แล้วเรานิยามผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B โดย

$$A\otimes B=[a_{ij}B]\in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$$

นั่นคือ $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีบล็อกที่ (i,j) เป็น $a_{ij}B$ ผลคูณนี้มีสมบัติเชิงพีชคณิตหลายอย่างที่น่าสนใจ ได้แก่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม การแจกแจงทางซ้ายและการแจกแจงทางขวาเหนือการบวก ความเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์ และการสลับเปลี่ยน เป็นต้น ผลคูณโครเนคเคอร์นั้นได้มีการประยุกต์ใช้ในทางคณิตศาสตร์หลายอย่าง ได้แก่ การวิเคราะห์เมทริกซ์ สมการเมทริกซ์เชิงเส้น แคลคูลัสของเมทริกซ์ และสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น นอกจากนี้ยังการนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น ทฤษฎีระบบ สถิติ ฟิสิกส์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์ เป็นต้น

ในพีชคณิตนามธรรม พีชคณิตบูลีนหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าแลตทิซบูลีน เป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซตร่วมกับการดำเนินการทวิภาค การดำเนินการเอกภาค และความสัมพันธ์การเรียงอันดับบางส่วนบนเซตดังกล่าว ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติที่สำคัญของการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเซต (ยูเนี่ยน อินเตอร์เซคชัน และส่วนเติมเต็ม) ความสัมพันธ์การเป็นสับเซต การดำเนินการทางตรรกศาสตร์(AND OR และ NOT) การดำเนินการทางพีชคณิตของจำนวนนับ(ห.ร.ม. ค.ร.น.) และความสัมพันธ์การหารลงตัวของจำนวนนับ ดังนั้นพีชคณิตบูลีนจึงเป็นการวางนัยทั่วไปของพีชคณิตของเซต ตรรกศาสตร์บูลีน และแนวคิดการหารลงตัวสำหรับจำนวนนับ

ในปัญหาพิเศษนี้ เราจะพัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนใด ๆ โดยพิจารณาความเข้ากันได้ของผลมีทดังกล่าวกับการมีทเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การ

มีทเมทริกซ์แบบปรกติ การมีท การจอยน์ การจอยน์เมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การจอยน์เมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน นิเสธ และรอยเมทริกซ์

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อนิยามผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากพีชคณิตบูลีนใด ๆ และพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของผลมีทดังกล่าวที่สัมพันธ์กับการดำเนินการเชิงพีชคณิตพื้นฐานสำหรับเมทริกซ์

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนใด ๆ กับการดำเนินการเชิงพีชคณิตพื้นฐานต่าง ๆ ดังนี้ การมีทเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การมีทเมทริกซ์แบบปรกติ การมีท การจอยน์ การจอยน์เมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การจอยน์เมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน นิเสธ และรอยเมทริกซ์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รับความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตบูลีน และการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์
2. พัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับนิยาม สมบัติและการดำเนินการของพีชคณิตบูลีน พีชคณิตของเมทริกซ์ และผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนใด ๆ
3. ได้ฝึกฝนกระบวนการคิดวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางในการประยุกต์ใช้ในการทำวิจัยต่อในระดับที่สูงขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ
2. กำหนดขอบเขต วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

3. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับแลตทิซ พีชคณิตบูลีน พีชคณิตของเมทริกซ์ และผลคูณโครเนคเคอร์

4. ศึกษานิยามและสมบัติเกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์จริง

5. ให้บทนิยามของการมีทเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การมีทเมทริกซ์แบบปรกติ การมีท การจอยน์ การจอยน์เมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การจอยน์เมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน นิเสธ และรอยเมทริกซ์

6. ให้บทนิยามของผลมีทโครเนคเคอร์

7. พิจารณาสมบัติพีชคณิตของผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

8. จัดทำเอกสารและนำเสนอปัญหาพิเศษ

ตารางที่ 1.1 ตารางขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน (ปี 2561 - 2562)									
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1. กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ										
2. กำหนดขอบเขตวัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ										
3. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับแลตทิซ พีชคณิตบูลีน พีชคณิตเมทริกซ์ และผลคูณโครเนคเคอร์										
4. ศึกษานิยามและสมบัติเกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์จริง										
5. ให้บทนิยามของการมีทเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การมีทเมทริกซ์แบบปรกติ การมีท การจอยน์ การจอยน์เมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การจอยน์เมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน นิเสธ และรอยเมทริกซ์										
6. ให้บทนิยามของผลมีทโครเนคเคอร์										
7. พิจารณาสมบัติพีชคณิตของผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน										
8. จัดทำเอกสารและนำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในการจัดทำปัญหาพิเศษนี้ จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับแลตทิซ (Lattice) พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) พีชคณิตของเมทริกซ์ (Matrix Algebra) และผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker Product)

การดำเนินการเอกภาค

<u>บทนิยาม</u> ให้ A เป็นเซต

เราเรียกฟังก์ชันจาก A ไปยัง A ว่าการดำเนินการเอกภาค (Unary operation) บน A

การดำเนินการทวิภาค

<u>บทนิยาม</u> ให้ A เป็นเซต

เราเรียกฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไปยัง A ว่าการดำเนินการทวิภาค (Binary operation) บน A

โพเซต : เซตและความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบนเซต

<u>บทนิยาม</u> เซตอันดับบางส่วน (โพเซต)

ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต A จะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วน (Partial ordered relation) ถ้า R มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด และถ้า A เป็นเซต โดยที่ R เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบนเซต A จะเรียก (A,R) ว่าเป็นอันดับบางส่วน (Partially ordered set) หรือเรียกโดยย่อว่าโพเซต (Poset)

2.1 แลตทิซ

เราสามารถพิจารณาแลตทิซ (Lattice) ได้จากทั้งมุมมองทางพีชคณิตและทางทฤษฎีอันดับ (order theory) นี่เป็นเหตุผลว่าทำไมการประยุกต์ทฤษฎีแลตทิซจึงเป็นที่แพร่หลายอย่างมากในสาขาอื่น ๆ แลตทิซได้รับการศึกษาเป็นครั้งแรกในหนังสือ Boole's The Mathematical Analysis of Logic ตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1847 ต่อมาในปี ค.ศ. 1890 นักคณิตศาสตร์ชื่อ Schroder และ Dedekind ได้ให้บทนิยามของแลตทิซดังนี้

บทนิยาม 2.1.1 แลตทิซ เป็นโครงสร้างเชิงพีชคณิตที่ประกอบด้วยเซต L กับการดำเนินการทวิภาค 2 อย่างบน L (ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วยการคูณ และการบวก) โดยที่การคูณกับการบวกสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้ สำหรับทุก $a,b,c \in L$

สมบัติ IA (สมบัติปิดการคูณ)

$$ab \in L$$

สมบัติ IB (สมบัติปิดการบวก)

$$a+b \in L$$

สมบัติ IIA (สมบัติการสลับที่การคูณ)

$$ab = ba$$

สมบัติ IIB (สมบัติการสลับที่การบวก)

$$a+b = b+a$$

สมบัติ IIIA (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ)

$$a(bc) = (ab)c$$

สมบัติ IIIB (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก)

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

สมบัติ IVA (สมบัติการดูดกลืน)

$$a(a+b) = a$$

สมบัติ IVB (สมบัติการดูดกลืน)

$$a+ab = a$$

จะเห็นว่าสมบัติการดูดกลืน ข้อ IVA และ IVB เป็นการเชื่อมโยงระหว่างการดำเนินการคูณและการบวกเข้าด้วยกัน

เราจะพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับแลตทิซ โดยใช้บทนิยาม

ให้ L เป็นแลตทิซ และ $a,b,c \in L$

ทฤษฎีบท 2.1.2 $aa = a$

พิสูจน์ $aa = a(a+ab)$ จาก IVB

$= a$ จาก IVA

ทฤษฎีบท 2.1.3 $a+a=a$

พิสูจน์ $a+a = a+aa$ จาก ทฤษฎีบท 2.1.2

$= a$ จาก IVB

ทฤษฎีบท 2.1.2 และ 2.1.3 แสดงให้เห็นว่า การคูณและการบวก มีสมบัตินิจพล (idempotent)

ทฤษฎีบท 2.1.4 ถ้า $ab=a$ แล้ว $a+b=b$

พิสูจน์ สมมติ $ab=a$ สำหรับทุก $a,b \in L$

$a+b = ab+b$ จาก สมมติฐาน

$= b+ab$ จาก IIB

$= b+ba$ จาก IIA

$= b$ จาก IVB

ทฤษฎีบท 2.1.5 ถ้า $a+b=b$ แล้ว $ab=a$

พิสูจน์ สมมติ $a+b=b$ สำหรับทุก $a,b \in L$

$ab = a(a+b)$ จาก สมมติฐาน

$= a$ จาก IVA

<u>บทนิยาม 2.1.6</u> เรานิยามความสัมพันธ์ R ระหว่างสมาชิก 2 สมาชิกของแลตทิซ โดย

(i) aRb ก็ต่อเมื่อ $ab=a$

เมื่อพิจารณา ทฤษฎีบท 2.1.4 และ 2.1.5 จะสมมูลกับ

(ii) aRb ก็ต่อเมื่อ $a+b=b$

<u>ทฤษฎีบท 2.1.7</u> aRa

<u>พิสูจน์</u> $aa=a$ จาก ทฤษฎีบท 2.1.2

ดังนั้น aRa โดย นิยาม 2.1.6(i)

<u>ทฤษฎีบท 2.1.8</u> ถ้า aRb และ bRa แล้ว $a=b$

<u>พิสูจน์</u> สมมติ $ab=a$ และ $ba=b$ สำหรับทุก $a,b\in L$

a	$=ab$	จาก สมมติฐานแรก และนิยาม 2.1.6(i)
	$=ba$	จาก IIA
	$=b$	จาก สมมติฐานที่2 และนิยาม 2.1.6(i)

<u>ทฤษฎีบท 2.1.9</u> ถ้า aRb และ bRc แล้ว aRc

<u>พิสูจน์</u> สมมติ $ab=a$ และ $bc=b$ สำหรับทุก $a,b,c\in L$

ac	$=(ab)c$	จาก สมมติฐานแรก และนิยาม 2.1.6(i)
	$=a(bc)$	จาก IIIA
	$=ab$	จาก สมมติฐานที่2 และนิยาม 2.1.6(i)
	$=a$	จาก สมมติฐานแรก และนิยามเดียวกัน

เพราะฉะนั้น aRc จากนิยามเดียวกัน

ดังนั้น R เป็นความสัมพันธ์จาก L ไปยัง L (จากนิยาม), สมบัติสะท้อน (ทฤษฎีบท 2.1.7), สมบัติการปฏิสมมาตร (ทฤษฎีบท 2.1.8) และสมบัติถ่ายทอด (ทฤษฎีบท 2.1.9) ฉะนั้น ความสัมพันธ์จะเป็นอันดับบางส่วน เราอาจเขียน $a \le b$ แทน aRb ไม่จำเป็นต้องพิสูจน์เพิ่มสำหรับทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

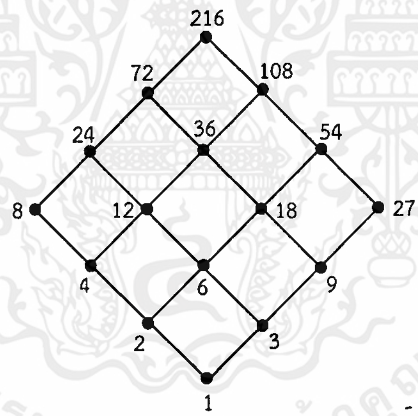
<u>ทฤษฎีบท 2.1.10</u> แลตทิซเป็นเซตมีอันดับบางส่วน (poset) เมื่อ $a \le b$ หมายความว่า $ab = a$ และ $a+b=b$

<u>ตัวอย่าง 2.1.11</u> ให้สมาชิกของเซต L เป็นตัวประกอบ 16 ตัวของ 216 ได้แก่

$$1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,27,36,54,72,108,216$$

เซตนี้ประกอบด้วย ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของสมาชิก 2 จำนวน

ฉะนั้น ถ้าเรากำหนด ab แทน ห.ร.ม. ของ (a,b) และ $a+b$ แทน ค.ร.น. ของ (a,b)



พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของแลตทิซ ตามบทนิยามของแลตทิซจำนวนจริงทั้งหมด 8 ข้อ

หลักมูลของเลขคณิต : จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนที่มากกว่า 1 จะสามารถเขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะได้รูปแบบเดียวเท่านั้น โดยไม่สนใจลำดับของตัวประกอบ

ให้ $a = \prod_{j=1}^{t} p_j^{\alpha_j}$, $b = \prod_{j=1}^{t} p_j^{\beta_j}$ และ $c = \prod_{j=1}^{t} p_j^{\gamma_j}$

โดยที่ a,b และ c เป็นสมาชิกในเซต L จะได้ว่ามี p_j เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับบาง

$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j = 0,1,2,\ldots$

IA) สำหรับแต่ละสมาชิก $a,b \in L$ เราจะแสดงว่า $\gcd(a,b) \in L$ ด้วย
นั่นคือ เมื่อเลือกสมาชิกใด ๆ ใน L มา 2 ตัว แล้ว ห.ร.ม. ของ 2 ตัวนั้น ยังคงอยู่ในเซต L

IB) สำหรับแต่ละสมาชิก $a,b \in L$ เราจะแสดงว่า $\operatorname{lcm}(a,b) \in L$ ด้วย
นั่นคือ เมื่อเลือกสมาชิกใด ๆ ใน L มา 2 ตัว แล้ว ค.ร.น. ของ 2 ตัวนั้น ยังคงอยู่ในเซต L

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $a = 24,\ b = 108$ สามารถแยกตัวประกอบในรูปจำนวนเฉพาะได้เป็น

$$a = 24 = 2^3 \times 3$$
$$b = 108 = 2^2 \times 3^3$$
$$\gcd(a,b) = 2^2 \times 3 = 12 \in L$$
$$\operatorname{lcm}(a,b) = 2^3 \times 3^3 = 216 \in L$$

จะเห็นว่า 216 สามารถแยกตัวประกอบในรูปจำนวนเฉพาะได้เป็น $2^3 \times 3^3$ ดังนั้น ตัวประกอบใด ๆ ของ 216 อยู่ในรูป $2^m \times 3^n$ สำหรับบาง $m,n \in \{0,1,2,3\}$ นั่นคือ 2,3 เป็นตัวประกอบร่วมกัน

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ IA, IB เป็นจริง

IIA) เราต้องการแสดงว่า $ab = ba$

<u>พิสูจน์</u>
$$
\begin{aligned}
ab &= \gcd(a,b) \\
&= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\min(\alpha_j,\beta_j)} \\
&= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\min(\beta_j,\alpha_j)} \\
&= \gcd(b,a) \\
&= ba
\end{aligned}
$$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ IIA เป็นจริง

IIB) เราต้องการแสดงว่า $a+b=b+a$

<u>**พิสูจน์**</u>

$$\begin{aligned} a+b &= \operatorname{lcm}(a,b) \\ &= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\max(\alpha_j,\beta_j)} \\ &= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\max(\beta_j,\alpha_j)} \\ &= \operatorname{lcm}(b,a) \\ &= b+a \end{aligned}$$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ IIB เป็นจริง

IIIA) เราต้องการแสดงว่า $a(bc)=(ab)c$

<u>**พิสูจน์**</u>

$$\begin{aligned} a(bc) &= \gcd(a,\gcd(b,c)) \\ &= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\min(\alpha_j,\min(\beta_j,\gamma_j))} \\ &= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\min(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)} \\ &= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\min(\min(\alpha_j,\beta_j),\gamma_j)} \\ &= \gcd(\gcd(a,b),c) \\ &= (ab)c \end{aligned}$$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ IIIA เป็นจริง

IIIB) เราต้องการแสดงว่า $a+(b+c)=(a+b)+c$

<u>**พิสูจน์**</u>

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= \operatorname{lcm}(a,\operatorname{lcm}(b,c)) \\ &= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\max(\alpha_j,\max(\beta_j,\gamma_j))} \\ &= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\max(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)} \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\max(\max(\alpha_j,\beta_j),\gamma_j)}$$

$$= \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b),c)$$

$$= (a+b)+c$$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ IIIB เป็นจริง

IVA) เราต้องการแสดงว่า $a(a+b)=a$

<u>พิสูจน์</u> $a(a+b) = \gcd(a,\operatorname{lcm}(a,b))$

$$= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\min(\alpha_j,\max(\alpha_j,\beta_j))}$$

$$= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\alpha_j} \qquad \text{(จาก *)}$$

$$= a$$

* จะแสดงว่า $\min(\alpha_j,\max(\alpha_j,\beta_j))$ โดยการแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $\alpha_j < \beta_j$

ดังนั้น $\min(\alpha_j,\max(\alpha_j,\beta_j)) = \min(\alpha_j,\beta_j) = \alpha_j$

กรณีที่ 2 ถ้า $\alpha_j \geq \beta_j$

ดังนั้น $\min(\alpha_j,\max(\alpha_j,\beta_j)) = \min(\alpha_j,\alpha_j) = \alpha_j$

ฉะนั้น $\gcd(a,\operatorname{lcm}(a,b)) = a$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ IVA เป็นจริง

IVB) เราต้องการแสดงว่า $a+ab=a$

<u>พิสูจน์</u> $a+ab = \operatorname{lcm}(a,\gcd(a,b))$

$$= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\max(\alpha_j,\min(\alpha_j,\beta_j))}$$

$$= \prod_{j=1}^{t} p_j^{\alpha_j} \qquad \text{(จาก **)}$$

$= a$

** จะแสดงว่า $\max(\alpha_j, \min(\alpha_j, \beta_j))$ โดยการแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $\alpha_j < \beta_j$

ดังนั้น $\max(\alpha_j, \min(\alpha_j, \beta_j)) = \max(\alpha_j, \alpha_j) = \alpha_j$

กรณีที่ 2 ถ้า $\alpha_j \geq \beta_j$

ดังนั้น $\max(\alpha_j, \min(\alpha_j, \beta_j)) = \max(\alpha_j, \beta_j) = \alpha_j$

ฉะนั้น $\text{lcm}(a, \gcd(a,b)) = a$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ IVB เป็นจริง

สรุปได้ว่า $(L, \gcd, \text{lcm})$ เป็นแลตทิซ

<u>ทฤษฎีบท 2.1.12</u> $ab \leq a$

<u>พิสูจน์</u> $ab + a = a + ab$ จาก IIB

$= a$ จาก IVB

สรุปได้ว่า $ab \leq a$ จาก บทนิยาม 2.1.6(ii)

<u>ทฤษฎีบท 2.1.13</u> $a \leq a + b$

<u>พิสูจน์</u> $a(a+b) = a$ จาก IVA

สรุปได้ว่า $a \leq a + b$ จาก บทนิยาม 2.1.6(i)

<u>ทฤษฎีบท 2.1.14</u> $ab \leq b$

<u>พิสูจน์</u> $ba \leq b$ จาก ทฤษฎีบท 2.1.12

แต่ $ba = ab$ จาก IIA

สรุปได้ว่า $ab \leq b$

จากข้างต้น จะได้ว่า ab เป็นขอบเขตล่าง ของ a, b

<u>ทฤษฎีบท 2.1.15</u> $b \le a+b$

<u>พิสูจน์</u>	b	$\le b+a$	จาก ทฤษฎีบท 2.1.13
แต่	$b+a$	$= a+b$	จาก IIB
สรุปได้ว่า	$b \le a+b$		

จากข้างต้น จะได้ว่า $a+b$ เป็นขอบเขตบน ของ a,b

<u>ทฤษฎีบท 2.1.16</u> ถ้า $c \le a$ และ $c \le b$ แล้ว $c \le ab$

<u>พิสูจน์</u>	สมมติ $ca = c$ และ $cb = c$		สำหรับทุก $a,b,c \in L$
	c	$= ca$	จาก สมมติฐานแรก และนิยาม 2.1.6(i)
		$= (cb)a$	จาก สมมติฐานที่2 และนิยามเดียวกัน
		$= c(ba)$	จาก IIIA
		$= c(ab)$	จาก IIA

ดังนั้น $c \le ab$ จาก นิยามเดียวกัน

สรุปได้ว่า ab เป็นขอบเขตล่างที่มากที่สุด ของ a,b

<u>ทฤษฎีบท 2.1.17</u> ถ้า $a \le d$ และ $b \le d$ แล้ว $a+b \le d$

<u>พิสูจน์</u>	สมมติ $a+d = d$ และ $b+d = d$		สำหรับทุก $a,b,c \in L$
	$(a+b)+d$	$= a+(b+d)$	จาก IIIB
		$= a+d$	จาก สมมติฐานที่2 และนิยาม 2.1.6(ii)
		$= d$	จาก สมมติฐานแรก และนิยามเดียวกัน

ดังนั้น $a+b \le d$ จาก นิยามเดียวกัน

สรุปได้ว่า $a+b$ เป็นขอบเขตบนที่น้อยที่สุด ของ a,b

<u>ทฤษฎีบท 2.1.18</u> แลตทิซเป็นเซตมีอันดับบางส่วน เมื่อ $a \le b$ คือ $ab = a$ และ $a+b = b$ ซึ่งทุกคู่ของสมาชิกมีขอบเขตล่างที่มากที่สุด และขอบเขตบนที่น้อยที่สุดภายในเซต

<u>พิสูจน์</u> ทฤษฎีบท 2.1.10 ครอบคลุมส่วนแรก สำหรับส่วนที่สอง จากนิยาม 2.1.1 IA, IB ทุกคู่ของสมาชิก a,b มีผลคูณ ab และผลบวก $a+b$ ภายในแลตทิซ และจากทฤษฎีบท 2.1.12 – 2.1.17 เป็นขอบเขตที่กำหนด

นิยามแลตทิซในทางพีชคณิต (นิยาม 2.1.1) เราได้พิสูจน์แล้ว (ทฤษฎีบท 2.1.18) นั่นคือ ทุก ๆ แลตทิซเป็นเซตมีอันดับบางส่วนที่มีคุณสมบัติพิเศษ เราเริ่มต้นกำหนดแลตทิซในทางทฤษฎีเซตเป็นเพียงเซตมีอันดับบางส่วน (นิยาม 2.1.19) เราจะแสดง (ทฤษฎีบท 2.1.29) ว่าแลตทิซที่กำหนดขึ้นใหม่มีคุณสมบัติเกี่ยวกับพีชคณิตที่กำหนด ในนิยาม 2.1.1

<u>**บทนิยาม 2.1.19**</u> แลตทิซเป็นเซตมีอันดับบางส่วน ซึ่งทุกคู่ของ a,b มีขอบล่างที่มากที่สุด (แสดงโดย $a \cap b$) และขอบบนที่น้อยที่สุด (แสดงโดย $a \cup b$) ภายในเซต L

<u>**ทฤษฎีบท 2.1.20**</u> แลตทิซเป็นพีชคณิตที่มีการดำเนินการทวิภาค

<u>พิสูจน์</u> ให้การดำเนินการอยู่ในรูปของ $a \cap b$ และ $a \cup b$ จากนิยาม 2.1.19 สำหรับทุก a,b มี $a \cap b \in L$ นอกจากนี้เซตของขอบเขตล่างของ a,b ไม่เป็นเซตว่างสำหรับ $a \cap b$ ของตัวมันเอง ฉะนั้น $a \cap b$ เป็นขอบล่างที่มากที่สุด ในทำนองเดียวกันจะแสดงว่า $a \cup b \in L$

<u>**ทฤษฎีบท 2.1.21**</u> $a \cap b = b \cap a$

<u>**ทฤษฎีบท 2.1.22**</u> $a \cup b = b \cup a$

<u>พิสูจน์</u> (สำหรับทั้ง 2 ทฤษฎีบท) เมื่อพิจารณาขอบเขตของเซตจำกัด a,b ซึ่งเราอาจจะพิจารณา a หรือ b ก่อนก็ได้

<u>ทฤษฎีบท 2.1.23</u> $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

<u>พิสูจน์</u> จาก นิยามของขอบเขตล่าง $(a \cap b) \cap c \le a \cap b \le b$

และ $(a \cap b) \cap c \le c$

ฉะนั้น จาก นิยามของขอบเขตล่างที่มากที่สุด $(a \cap b) \cap c \le b \cap c$

นั่นคือ $(a \cap b) \cap c \le a \cap b \le a$

ดังนั้น $(a \cap b) \cap c \le a \cap (b \cap c)$

นอกจากนั้น $a \cap (b \cap c) \le a$

และ $a \cap (b \cap c) \le b \cap c \le b$

ฉะนั้น $a \cap (b \cap c) \le a \cap b$

นั่นคือ $a \cap (b \cap c) \le b \cap c \le c$

ดังนั้น $a \cap (b \cap c) \le (a \cap b) \cap c$

แต่ ความสัมพันธ์ $\le$ เป็นสมบัติปฏิสมมาตร

สรุปได้ว่า $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

<u>ทฤษฎีบท 2.1.24</u> $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

<u>พิสูจน์</u> จาก นิยามของขอบเขตบน $b \le a \cup b \le (a \cup b) \cup c$

และ $c \le (a \cup b) \cup c$

ฉะนั้น จาก นิยามของขอบเขตบนที่น้อยที่สุด $b \cup c \le (a \cup b) \cup c$

นั่นคือ $a \le a \cup b \le (a \cup b) \cup c$

ดังนั้น $a \cup (b \cup c) \le (a \cup b) \cup c$

นอกจากนั้น $a \le a \cup (b \cup c)$

และ $b \le b \cup c \le a \cup (b \cup c)$

ฉะนั้น $a \cup b \le a \cup (b \cup c)$

นั่นคือ $c \le b \cup c \le a \cup (b \cup c)$

ดังนั้น $(a \cup b) \cup c \le a \cup (b \cup c)$

แต่ ความสัมพันธ์ $\le$ เป็นสมบัติปฏิสมมาตร

สรุปได้ว่า $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

<u>ทฤษฎีบท 2.1.25</u> ถ้า $a \le b$ แล้ว $a \cap b = a$

<u>พิสูจน์</u>	สมมติ $a \le b$	สำหรับทุก $a, b \in L$
	$a \le a$	จาก สมบัติการสะท้อน
	$a \le b$	จาก สมมติฐาน
สรุปได้ว่า	a เป็นขอบเขตล่างที่มากที่สุด ของ a, b	

<u>ทฤษฎีบท 2.1.26</u> ถ้า $a \le b$ แล้ว $a \cup b = b$

<u>พิสูจน์</u>	สมมติ $a \le b$	สำหรับทุก $a, b \in L$
	$a \le b$	จาก สมมติฐาน
	$b \le b$	จาก สมบัติการสะท้อน
สรุปได้ว่า	b เป็นขอบเขตบนที่น้อยที่สุด ของ a, b	

<u>ทฤษฎีบท 2.1.27</u> $a \cap (a \cup b) = a$

<u>พิสูจน์</u>	$a \le a \cup b$	จาก นิยามของขอบเขตบน
ฉะนั้น	$a \cap (a \cup b) = a$	จาก ทฤษฎีบท 2.1.25

<u>ทฤษฎีบท 2.1.28</u> $a \cup (a \cap b) = a$

<u>พิสูจน์</u>	$a \cap b \le a$	จาก นิยามของขอบเขตล่าง
ฉะนั้น	$(a \cap b) \cup a = a$	จาก ทฤษฎีบท 2.1.26
แต่	$(a \cap b) \cup a = a \cup (a \cap b)$	จาก ทฤษฎีบท 2.1.22
ดังนั้น	$a \cup (a \cap b) = a$	

<u>ทฤษฎีบท 2.1.29</u> ทุกแลตทิซเป็นพีชคณิตที่มีการดำเนินการทวิภาค ซึ่งมีการสลับที่, การเปลี่ยนกลุ่ม และการดูดกลืนร่วมกัน

<u>พิสูจน์</u> ทฤษฎีบทที่ 2.1.20 เป็นการพิสูจน์สมบัติปิด, ทฤษฎีบทที่ 2.1.21 และ 2.1.22 เป็นการพิสูจน์การดำเนินการสลับที่, ทฤษฎีบทที่ 2.1.23 และ 2.1.24 เป็นการพิสูจน์การดำเนินการเปลี่ยนกลุ่ม และทฤษฎีบทที่ 2.1.27 และ 2.1.28 เป็นการพิสูจน์การดูดกลืน

เราได้แสดงว่า 2 นิยามของแลตทิซมีค่าเท่ากัน ผลคูณ ab หรือ $a \cap b$ มักเรียกว่า intersection หรือ meet และผลบวก $a+b$ หรือ $a \cup b$ จะเรียกว่า union หรือ join เรามักใช้สัญกรณ์พีชคณิต

$$a(b+c) \quad \text{กับ} \quad a \cap (b \cup c)$$

$$a+bc \quad \text{กับ} \quad a \cup (b \cap c)$$

สำหรับชื่อ โดยทั่วไปเรามักใช้ meet แทน ab และ join แทน $a+b$

2.2 พีชคณิตบูลีน

พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) คิดค้นโดย จอร์จ บูล (George Boole) ในปี ค.ศ. 1815 ถึง 1864 ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ต่อมาถูกพัฒนาให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น จนนำมาประยุกต์ใช้ในการออกแบบวงจรลอจิก (Logic Circuits)

บทนิยาม 2.2.1 พีชคณิตบูลีน คือ 6 สิ่งอันดับที่ประกอบด้วย

- เซต L
- การดำเนินการทวิภาค $\wedge$ บน L เรียกว่า มีท (meet)
- การดำเนินการทวิภาค $\vee$ บน L เรียกว่า จอยน์ (join)
- การดำเนินการเอกภาค $\neg$ บน L เรียกว่า นิเสธ (not)
- สมาชิก $0 \in L$ เรียกว่า สมาชิกที่เล็กที่สุด (the least element)
- สมาชิก $1 \in L$ เรียกว่า สมาชิกที่ใหญ่ที่สุด (the greatest element)

โดยที่สำหรับทุก ๆ สมาชิก a,b และ c ของเซต L มีสมบัติดังต่อไปนี้

สมบัติ IA (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการมีท)

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

สมบัติ IB (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการจอยน์)

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

สมบัติ IIA (สมบัติการสลับที่การมีท)

$$a \wedge b = b \wedge a$$

สมบัติ IIB (สมบัติการสลับที่การจอยน์)

$$a \vee b = b \vee a$$

สมบัติ IIIA (สมบัติการดูดกลืนการมีท)

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

สมบัติ IIIB (สมบัติการดูดกลืนการจอยน์)

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

สมบัติ IVA (สมบัติการเป็นเอกลักษณ์การมีท)

$$a \wedge 1 = a$$

สมบัติ IVB (สมบัติการเป็นเอกลักษณ์การจอยน์)

$$a \vee 0 = a$$

สมบัติ VA (สมบัติการแจกแจงการมีท)

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

สมบัติ VB (สมบัติการแจกแจงการจอยน์)

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

สมบัติ VIA (สมบัติส่วนเติมเต็มการมีท)

$$a \wedge \neg a = 0$$

สมบัติ VIB (สมบัติส่วนเติมเต็มการจอยน์)

$$a \vee \neg a = 1$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u>

$(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1)$ เป็นพีชคณิตบูลีนจากความรู้ในเรื่องตรรกศาสตร์

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

a	0	1
$\neg a$	1	0

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u>

ให้ A เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง

พิจารณา $P(A)$ เรานิยามสำหรับแต่ละ $X,Y \in P(A)$

$$X \wedge Y = X \cap Y$$
$$X \vee Y = X \cup Y$$
$$\neg X = X^c = A - X$$

<u>พิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $X,Y,Z \in P(A)$ จากความรู้ในทฤษฎีเซต จะได้ว่า

1) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

2) $X \cap Y = Y \cap X$

$X \cup Y = Y \cup X$

3) $X \cap (X \cup Y) = X$

$X \cup (X \cap Y) = X$

4) $X \cap A = X$

$X \cup \varnothing = X$

5) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

6) $X \cap \neg X = \varnothing$

$X \cup \neg X = A$

จะได้ว่า $(P(A), \cap, \cup, A - X, \varnothing, A)$ เป็นพีชคณิตบูลีนจากความรู้ในเรื่องเซต

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u>

ให้ S เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ว่าง

ให้ $X = \{A \subseteq S \mid A$ เป็น finite set หรือ cofinite subset$\}$

<u>นิยาม</u> A เป็น cofinite subset ก็ต่อเมื่อ A^c เป็น finite set

เช่น ให้ $S = \mathbb{N}$

$A = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$A^c = \{1, 2\}$ เป็น finite set ดังนั้น A เป็น cofinite subset

$A = \{1, 2\}$ เป็น finite set ของ S

$A^c = \mathbb{N} - \{1, 2\}$ ไม่เป็น finite set ดังนั้น A ไม่เป็น cofinite subset

<u>พิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $A, B \in X$ จะแสดงว่า $A \cap B \in X$ และ $A \cup B \in X$ หรือไม่ (สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ $\cap, \cup$)

<u>กรณีที่ 1</u> A และ B เป็น finite set

- จะได้ว่า $A \cap B$ เป็น finite set
  ดังนั้น $A \cap B \in X$
- จะได้ว่า $A \cup B$ เป็น finite set
  ดังนั้น $A \cup B \in X$

<u>กรณีที่ 2</u> A เป็น finite set และ B เป็น cofinite subset ของ S

- จะได้ว่า $A \cap B \subseteq A$
  ดังนั้น $A \cap B$ เป็น finite set
  ฉะนั้น $A \cap B \in X$
- $S-(A \cup B)=(S-A) \cap (S-B) \subseteq S-B$
  เนื่องจาก B เป็น cofinite subset ดังนั้น $S-B$ เป็น finite set
  จะได้ว่า $S-(A \cup B)$ เป็น finite set
  ดังนั้น $A \cup B$ เป็น cofinite subset
  ฉะนั้น $A \cup B \in X$

<u>กรณีที่ 3</u> A เป็น cofinite subset และ B เป็น finite set ของ S

- จะได้ว่า $A \cap B \subseteq B$
  ดังนั้น $A \cap B$ เป็น finite set
  ฉะนั้น $A \cap B \in X$
- $S-(A \cup B)=(S-A) \cap (S-B) \subseteq S-A$
  เนื่องจาก A เป็น cofinite subset ดังนั้น $S-A$ เป็น finite set
  จะได้ว่า $S-(A \cup B)$ เป็น finite set
  ดังนั้น $A \cup B$ เป็น cofinite subset
  ฉะนั้น $A \cup B \in X$

<u>กรณีที่ 4</u> A และ B เป็น cofinite subset ของ S

- $S-(A \cap B)=(S-A) \cup (S-B)$ เป็น finite set
  ดังนั้น $A \cap B$ เป็น cofinite subset
  ฉะนั้น $A \cap B \in X$
- $S-(A \cup B)=(S-A) \cap (S-B)$ เป็น finite set
  ดังนั้น $A \cup B$ เป็น cofinite subset
  ฉะนั้น $A \cup B \in X$

ดังนั้น $\cap$ มีสมบัติปิดบน X และ $\cup$ มีสมบัติปิดบน X

เนื่องจาก $(P(S),\cap,\cup,-^{c},\varnothing,S)$ เป็นพีชคณิตบูลีน และ $X\subseteq P(S)$
จะได้ว่า X มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ $\cap,\cup$ จึงทำให้ได้ว่ามีสมบัติข้อ IA – IIIA, VA และ IB – IIIB, VB

จะแสดงว่า $\varnothing\in X$ หรือไม่ และ $S\in X$ หรือไม่
(สมบัติการเป็นเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $\cap,\cup$)

- เนื่องจาก $\varnothing$ เป็น finite set
  ดังนั้น $\varnothing\in X$
- เนื่องจาก $S-S=\varnothing$ เป็น finite set
  จะได้ว่า S เป็น cofinite subset
  ดังนั้น $S\in X$

ดังนั้น $\varnothing$ เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด
S เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

ให้ $A\in X$ การดำเนินการ complement เป็นการดำเนินการเอกภาคบน X หรือไม่
(สมบัติส่วนเติมเต็มภายใต้การดำเนินการ $\cap,\cup$)

<u>กรณีที่ 1</u> A เป็น finite set
จะได้ $S-(S-A)=A$ เป็น finite set
ดังนั้น $S-A$ เป็น cofinite subset
ฉะนั้น $S-A\in X$

<u>กรณีที่ 2</u> A เป็น cofinite subset
จะได้ $S-A$ เป็น finite set
ดังนั้น $S-A\in X$

จะได้ว่า X มีสมบัติข้อ IVA, VIA และ IVB, VIB

สรุปได้ว่า $(X,\cap,\cup,S-A,\varnothing,S)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>ตัวอย่าง 2.2.5</u>

ให้ $n \in \mathbb{N}$ ที่มีสมบัติ square – free

<u>บทนิยาม</u> จำนวนนับ n จะเป็น square – free ก็ต่อเมื่อ n ไม่มีตัวประกอบในรูป p^2 สำหรับบางจำนวนเฉพาะ p

เช่น	$10 = 2\cdot 5$	เป็น	square – free
	$12 = 2^2 \cdot 3$	ไม่เป็น	square – free
	$16 = 2^4$	ไม่เป็น	square – free
	$42 = 2\cdot 3\cdot 7$	เป็น	square – free

ดังนั้น n เป็น square – free ก็ต่อเมื่อ n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่ต่างกันหมด นั่นคือ $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ สำหรับบางจำนวนเฉพาะ $p_1 p_2 \ldots p_k$

ให้ $n = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$ เป็น square – free

ให้ $A = \{a \in \mathbb{N} : a \mid n\}$

ดังนั้น $A = \{1, 2, 3, 5, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 3\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 5\}$

จากความรู้เดิมเราจะได้ว่า $(A, \gcd, \mathrm{lcm})$ เป็นแลตทิซ นั่นคือมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม การสลับที่ และการดูดกลืน

ต่อไปเราจะเช็คสมบัติข้อ IVA – VIA และ IVB – VIB

<u>พิสูจน์</u> เขียน $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ และ $c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}$ โดยที่ $a, b, c \in A$ จะได้ว่า p_i เป็นจำนวนเฉพาะ เมื่อ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \{0, 1\}$

IVA) จะแสดงว่า $a \wedge 1 = a$

(สมบัติการเป็นเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $\gcd$)

<u>พิสูจน์</u> $a \wedge 1 = \gcd(a, n) = a$

IVB) จะแสดงว่า $a \vee 0 = a$

(สมบัติการเป็นเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ lcm)

<u>พิสูจน์</u> $a \vee 0 = \mathrm{lcm}(a,1) = a$

VA) จะแสดงว่า $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(สมบัติการแจกแจงภายใต้การดำเนินการ gcd)

นั่นคือ ต้องการแสดงว่า $\gcd(a, \mathrm{lcm}(b,c)) = \mathrm{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c))$

<u>พิสูจน์</u>
$$\begin{aligned} \gcd(a, \mathrm{lcm}(b,c)) &= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i))} \\ &= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))} && \text{(จาก *)} \\ &= \mathrm{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c)) \end{aligned}$$

* ต้องการทราบว่า $\min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i))$ เท่ากับเท่าใด โดยพิจารณาเป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $\alpha_i < \max(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i)) = \alpha_i$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $\alpha_i \geq \max(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i)) = \max(\beta_i, \gamma_i)$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

- ถ้า $\beta_i < \gamma_i$ จะได้ γ_i
- ถ้า $\beta_i \geq \gamma_i$ จะได้ β_i

* ต่อไปต้องการทราบว่า $\max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))$ เท่ากับเท่าใด โดยพิจารณาเป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $\alpha_i < \max(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

- ถ้า $\alpha_i < \beta_i$ และ $\alpha_i < \gamma_i$ จะได้ $\max(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i$
- ถ้า $\alpha_i < \beta_i$ หรือ $\alpha_i < \gamma_i$

ดังนั้น $\max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

ถ้า $\gamma_i < \alpha_i < \beta_i$ จะได้ $\max(\alpha_i, \gamma_i) = \alpha_i$

ถ้า $\beta_i < \alpha_i < \gamma_i$ จะได้ $\max(\beta_i, \alpha_i) = \alpha_i$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $\alpha_i \geq \max(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i)) = \max(\beta_i, \gamma_i)$ แบ่งพิจารณาเป็น 2กรณี

- ถ้า $\beta_i < \gamma_i$ จะได้ γ_i
- ถ้า $\beta_i \geq \gamma_i$ จะได้ β_i

สรุปได้ว่า $\gcd(a, \mathrm{lcm}(b,c)) = \mathrm{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c))$

VB) จะแสดงว่า $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(สมบัติการแจกแจงภายใต้การดำเนินการ lcm)

นั่นคือ ต้องการแสดงว่า $\mathrm{lcm}(a, \gcd(b,c)) = \gcd(\mathrm{lcm}(a,b), \mathrm{lcm}(a,c))$

<u>พิสูจน์</u> $\mathrm{lcm}(a, \gcd(b,c)) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max(\alpha_i, \min(\beta_i, \gamma_i))}$

$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min(\max(\alpha_i, \beta_i), \max(\alpha_i, \gamma_i))}$. (จาก **)

$= \gcd(\mathrm{lcm}(a,b), \mathrm{lcm}(a,c))$

** ต้องการทราบว่า $\max(\alpha_i, \min(\beta_i, \gamma_i))$ เท่ากับเท่าใด โดยพิจารณาเป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $\alpha_i < \min(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\max(\alpha_i, \min(\beta_i, \gamma_i)) = \min(\beta_i, \gamma_i)$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

- ถ้า $\beta_i < \gamma_i$ จะได้ β_i
- ถ้า $\beta_i \geq \gamma_i$ จะได้ γ_i

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $\alpha_i \geq \min(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\max(\alpha_i, \min(\beta_i, \gamma_i)) = \alpha_i$

** ต่อไปต้องการทราบว่า $\min(\max(\alpha_i, \beta_i), \max(\alpha_i, \gamma_i))$ เท่ากับเท่าใด โดยพิจารณาเป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $\alpha_i < \min(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\min(\max(\alpha_i, \beta_i), \max(\alpha_i, \gamma_i)) = \min(\beta_i, \gamma_i)$ แบ่งพิจารณาเป็น 2กรณี

- ถ้า $\beta_i < \gamma_i$ จะได้ β_i
- ถ้า $\beta_i \geq \gamma_i$ จะได้ γ_i

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $\alpha_i \geq \min(\beta_i, \gamma_i)$

ดังนั้น $\min(\max(\alpha_i, \beta_i), \max(\alpha_i, \gamma_i))$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

- ถ้า $\alpha_i \geq \beta_i$ และ $\alpha_i \geq \gamma_i$ จะได้ $\min(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i$
- ถ้า $\alpha_i \geq \beta_i$ หรือ $\alpha_i \geq \gamma_i$

  ดังนั้น $\min(\max(\alpha_i, \beta_i), \max(\alpha_i, \gamma_i))$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

  ถ้า $\beta_i < \alpha_i < \gamma_i$ จะได้ $\min(\alpha_i, \gamma_i) = \alpha_i$

  ถ้า $\gamma_i < \alpha_i < \beta_i$ จะได้ $\min(\beta_i, \alpha_i) = \alpha_i$

สรุปได้ว่า $\mathrm{lcm}(a, \gcd(b,c)) = \gcd(\mathrm{lcm}(a,b), \mathrm{lcm}(a,c))$

VI) (สมบัติส่วนเติมเต็มภายใต้การดำเนินการ $\gcd, \mathrm{lcm}$)

เรานิยาม $\neg$ บน A โดย $\neg a = \dfrac{n}{a}$ สำหรับทุก $a \in A$

เนื่องจาก $a \mid n$ และ $\dfrac{n}{a}$ เป็นตัวประกอบของ n

ดังนั้น $\dfrac{n}{a} \in A$

<u>เช็ค</u> $a \wedge \neg a = 0$

จะได้ $\gcd(a, \neg a) = \gcd(a, \frac{n}{a})$

ให้ $n = p_1 p_2 \cdots p_m p_{m+1} \cdots p_l$

$a = p_1 p_2 \cdots p_m$

ดังนั้น $\dfrac{n}{a} = p_{m+1} \cdots p_l$

จะเห็นว่า a กับ $\frac{n}{a}$ ไม่มีตัวประกอบที่ซ้ำกันเลยนอกจาก 1

ดังนั้น $\gcd(a,\frac{n}{a})=1$

<u>เช็ค</u> $a\vee\neg a=1$

จะได้ $\operatorname{lcm}(a,\neg a)=\operatorname{lcm}(a,\frac{n}{a})$

เนื่องจาก a กับ $\frac{n}{a}$ ไม่มีตัวประกอบที่ซ้ำกันเลยนอกจาก 1

ดังนั้น $\operatorname{lcm}(a,\frac{n}{a})=a\cdot\frac{n}{a}=n$

สรุปได้ว่า $(A,\gcd,\operatorname{lcm},\neg,1,n)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า n ไม่เป็น square – free จะได้ว่ามีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p^2 \mid n$

ซึ่งทำให้ $\operatorname{lcm}(p,\frac{n}{p})=\frac{n}{p}\neq n$

ดังนั้น A เป็นพีชคณิตบูลีน ก็ต่อเมื่อ n เป็น square – free

$A=\{a\in\mathbb{N}:a\mid n\}$

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้จะใช้บทนิยาม 2.2.1 ในการพิสูจน์

<u>ทฤษฎีบท 2.2.6</u> ให้ $(A,\wedge,\vee,\neg,0,1)$ เป็นพีชคณิตบูลีน และ $x,y\in A$ จะได้

1) $x\wedge 0=0$

2) $x\vee 1=1$

1), 2) ใช้ความรู้จากทฤษฎีบทของแลตทิซ กล่าวว่าแลตทิซเป็นเซตมีอันดับบางส่วน เมื่อ $a\leq b$ หมายความว่า $ab=a$ และ $a+b=b$ ซึ่งเราจะนิยาม $ab=a\wedge b$ และ $a+b=a\vee b$

3) ถ้า $x\vee y=1$ และ $x\wedge y=0$ แล้ว $y=\neg x$

<u>พิสูจน์</u> สมมติ $x\vee y=1$ และ $x\wedge y=0$

จะได้	y	=	$y\wedge 1$	จาก IVA
		=	$y\wedge(x\vee\neg x)$	จาก VIB
		=	$(y\wedge x)\vee(y\wedge\neg x)$	จาก VA
		=	$(x\wedge y)\vee(\neg x\wedge y)$	จาก IIA
		=	$0\vee(\neg x\wedge y)$	จาก สมมติฐานที่ 2
		=	$(x\wedge\neg x)\vee(\neg x\wedge y)$	จาก VIA
		=	$(\neg x\wedge x)\vee(\neg x\wedge y)$	จาก IIA
		=	$\neg x\wedge(x\vee y)$	จาก VA
		=	$\neg x\wedge 1$	จาก สมมติฐานแรก
		=	$\neg x$	จาก IVA

4) $\neg\neg x=x$

<u>พิสูจน์</u>	$\neg x\vee x$	=	$x\vee\neg x$	จาก IIB
		=	1	จาก VIB
และ	$\neg x\wedge x$	=	$x\wedge\neg x$	จาก IIA
		=	0	จาก VIA

ดังนั้น $x=\neg\neg x$ จาก 3)

5) $x \wedge (\neg x \wedge y) = 0$

<u>พิสูจน์</u> $x \wedge (\neg x \wedge y) = (x \wedge \neg x) \wedge (x \wedge y)$ จาก VA

$= 0 \wedge (x \wedge y)$ จาก VIA

$= (x \wedge y) \wedge 0$ จาก IIA

$= 0$ จาก 1)

6) $x \vee (\neg x \vee y) = 1$

<u>พิสูจน์</u> $x \vee (\neg x \vee y) = (x \vee (\neg x \vee y)) \wedge 1$ จาก IVA

$= 1 \wedge (x \vee (\neg x \vee y))$ จาก IIA

$= (x \vee \neg x) \wedge (x \vee (\neg x \vee y))$ จาก VIB

$= x \vee (\neg x \wedge (\neg x \vee y))$ จาก VB

$= x \vee \neg x$ จาก IIA

$= 1$ จาก VIB

7) $(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) = 0$

<u>พิสูจน์</u> $(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

$= ((x \wedge y) \wedge \neg x) \vee ((x \wedge y) \wedge \neg y)$ จาก VA

$= ((y \wedge x) \wedge \neg x) \vee ((x \wedge y) \wedge \neg y)$ จาก IIA

$= (y \wedge (x \wedge \neg x)) \vee (x \wedge (y \wedge \neg y))$ จาก IA

$= (y \wedge 0) \vee (x \wedge 0)$ จาก VIA

$= 0 \vee 0$ จาก 1)

$= 0$ จาก IVB

8) $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1$

<u>พิสูจน์</u> $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

$= ((x \vee y) \vee \neg x) \wedge ((x \vee y) \vee \neg y)$ จาก VB

$= (\neg x \vee (x \vee y)) \wedge (\neg y \vee (x \vee y))$ จาก IIB

$= \quad (\neg x \vee (\neg\neg x \vee y)) \wedge (\neg y \vee (\neg\neg y \vee x))$ จาก 4)

$= \quad 1 \wedge 1$ จาก 6)

$= \quad 1$ จาก IVA

9) $(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) = 1$

<u>พิสูจน์</u> $(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y)$

$= \quad (\neg x \vee \neg y) \vee (x \wedge y)$ จาก IIB

$= \quad ((\neg x \vee \neg y) \vee x) \wedge ((\neg x \vee \neg y) \vee y)$ จาก VB

$= \quad (x \vee (\neg x \vee \neg y)) \wedge (y \vee (\neg x \vee \neg y))$ จาก IIB

$= \quad 1 \wedge 1$ จาก 6)

$= \quad 1$ จาก IVA

10) $(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = 0$

<u>พิสูจน์</u> $(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y)$

$= \quad (\neg x \wedge \neg y) \wedge (x \vee y)$ จาก IIA

$= \quad ((\neg x \wedge \neg y) \wedge x) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge y)$ จาก VA

$= \quad (x \wedge (\neg x \wedge \neg y)) \vee (y \wedge (\neg x \wedge \neg y))$ จาก IIA

$= \quad 0 \vee 0$ จาก 5)

$= \quad 0$ จาก IVB

11) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

<u>พิสูจน์</u> จาก 7), 9) และ 3)

12) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

<u>พิสูจน์</u> จาก 8), 10) และ 3)

2.3 พีชคณิตของเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการต่าง ๆ สำหรับเมทริกซ์ ได้แก่ การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การคูณเมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน (transpose) และรอยเมทริกซ์ (trace)

2.3.1 การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์

<u>บทนิยาม</u> ให้ $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $k\in\mathbb{R}$ เรานิยามการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ของเมทริกซ์ ดังนี้

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$k\cdot A=[ka_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $k\cdot A$ ด้วย kA สำหรับแต่ละ $k\in\mathbb{R}$ และ $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

2.3.2 การคูณเมทริกซ์แบบปรกติ

<u>บทนิยาม</u> ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{n,p}(\mathbb{R})$ เรานิยามการคูณของ A กับ B ดังนี้

$$AB=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]_{i,j=1}^{m,p}\in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

ในกรณีทั่วไป $AB\neq BA$

2.3.3 การสลับเปลี่ยน (transpose)

<u>บทนิยาม</u> เรานิยามการสลับเปลี่ยนของ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ดังนี้

$$A^T=[a_{ji}]_{i,j=1}^{n,m}\in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

นั่นคือที่สมาชิกในตำแหน่งที่ (i,j) ของ A^T เท่ากับ สมาชิกในตำแหน่งที่ (j,i) ของ A

2.3.4 รอยเมทริกซ์ (trace)

<u>บทนิยาม</u> รอยของเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{R})$ คือ ผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

2.4 ผลคูณโครเนคเคอร์

ในทฤษฎีเมทริกซ์ มีนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ Leopold Kronecker ได้คิดค้นผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker product) ซึ่งเป็นผลคูณรูปแบบหนึ่ง โดยจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\otimes$ (o-times) สำหรับทุกเมทริกซ์จริง

<u>**บทนิยาม 2.4.1**</u> สำหรับ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ เรานิยามผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์ A และ B โดย $A\otimes B=[a_{ij}B]\in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$
จะได้

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$$

<u>**ตัวอย่าง 2.4.2**</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ และ $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix}\in M_{3,4}(\mathbb{R})$

แล้วผลคูณโครเนคเคอร์ของ A กับ B คือ

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix} & -3\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \\ 2\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix} & 0\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -6 \\ -5 & -1 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -6 & -12 & -18 \\ -15 & -3 & 15 & 0 \\ -12 & 6 & -18 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 & 12 \\ 10 & 2 & -10 & 0 \\ 8 & -4 & 12 & -6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -6 & 3 & -6 & -12 & -18 \\ -5 & -1 & 5 & 0 & -15 & -3 & 15 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 3 & -12 & 6 & -18 & 9 \\ -2 & 4 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{6,8}(\mathbb{R})$$

และผลคูณโครเนคเคอร์ของ B กับ A คือ

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 4\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 6\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 5\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 1\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -5\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 0\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 4\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -2\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 6\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -3\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -6 & -4 & -12 & -6 & -18 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 \\ -5 & -15 & -1 & -3 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -12 & 2 & 6 & -6 & -18 & 3 & 9 \\ 8 & 0 & -4 & 0 & 12 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \in M_{6,8}(\mathbb{R})$$

จะเห็นว่าผลคูณโครเนคเคอร์สลับที่การคูณไม่ได้ นั่นคือ $A \otimes B \neq B \otimes A$

<u>ทฤษฎีบท 2.4.3</u> ([3]) ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ แล้ว

1. $(\alpha A)\otimes B = \alpha(A\otimes B) = A\otimes(\alpha B)$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

2. $(A\otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

3. $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ และ $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$

4. $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$ สำหรับ $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$

5. $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$ สำหรับ $B, C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

6. $A\otimes 0 = 0\otimes A = 0$

7. $I_m \otimes I_n = I_{mn}$

<u>ทฤษฎีบท 2.4.4</u> ([3]) ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ และ $D \in M_{q,r}(\mathbb{R})$ แล้ว $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$

<u>บทแทรก 2.4.5</u> ([3]) ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ แล้ว

a) $(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k)(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k) = (A_1B_1)\otimes(A_2B_2)\otimes\cdots\otimes(A_kB_k)$

b) $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\cdots(A_k \otimes B_k) = (A_1A_2\cdots A_k)\otimes(B_1B_2\cdots B_k)$

<u>ทฤษฎีบท 2.4.6</u> ([3]) ถ้า $A \in M_n(\mathbb{R})$ และ $B \in M_m(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน แล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน

<u>ทฤษฎีบท 2.4.7</u> ([3]) ถ้า $A \in M_n(\mathbb{R})$ และ $B \in M_m(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง แล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง

<u>ทฤษฎีบท 2.4.8</u> ([3]) ถ้า $A \in M_n(\mathbb{R})$ และ $B \in M_m(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์แบบทแยงมุม แล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบทแยงมุม

<u>ทฤษฎีบท 2.4.9</u> ([3]) ถ้า $A \in M_n(\mathbb{R})$ และ $B \in M_m(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์แบบสมมาตร แล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสมมาตร

<u>บทแทรก 2.4.10</u> ([3]) ถ้า $A \in M_n(\mathbb{R})$ และ $B \in M_m(\mathbb{R})$ แล้ว $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B \otimes A)$

<u>ทฤษฎีบท 2.4.11</u> ([3]) ให้ $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_m(\mathbb{R})$ และ $C \in M_p(\mathbb{R})$ แล้ว $(A \circ B) \otimes C = (A \otimes C) \circ (B \otimes C)$

บทที่ 3

การดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

บทนิยาม เมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน กำหนดให้ L เป็นพีชคณิตบูลีน และ $M_{m,n}(L)$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก L สำหรับแต่ละ $m,n \in \mathbb{N}$ ถ้า $A = M_{m,n}(L)$ เราจะเขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ ij ของเมทริกซ์ A ด้วย a_{ij} สำหรับแต่ละ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n$ ในกรณีนี้เราเขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{m,n}$ หรือ $A = [a_{ij}]$ ในกรณีที่ $m = n$ เราจะเขียน $M_{m,n}(L)$ ด้วย $M_n(L)$

มีสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน ดังนี้

3.1 การจอยน์ฮาดามาร์ดและการมีทด้วยสเกลาร์

บทนิยาม สำหรับแต่ละ $A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ เรานิยาม

$$A \vee B = [a_{ij} \vee b_{ij}] \in M_{m,n}(L)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L = (\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$

เมื่อ $\wedge$ แทนการดำเนินการ AND และ $\vee$ แทนการดำเนินการ OR

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ $A \vee B = \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 0\vee 1 \\ 0\vee 0 & 1\vee 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

บทนิยาม สำหรับแต่ละ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ $k\in L$ เรานิยาม

$$k\wedge A=[k\wedge a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L=(P(\mathbb{N}),\cap,\cup,-^{c},\varnothing,\mathbb{N})$

เรานิยาม $X\wedge Y=X\cap Y$ และ $X\vee Y=X\cup Y$ สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(\mathbb{N})$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\varnothing & \{1,2\} & \{5,6,7,...\}\\ \{3\} & \{1,2,3,4,...\} & \{3,4,5\}\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$ และ $k=\{5\}$

จะได้ $k\wedge A=\{5\}\wedge\begin{bmatrix}\varnothing & \{1,2\} & \{5,6,7,...\}\\ \{3\} & \{1,2,3,4,...\} & \{3,4,5\}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\{5\}\wedge\varnothing & \{5\}\wedge\{1,2\} & \{5\}\wedge\{5,6,7,...\}\\ \{5\}\wedge\{3\} & \{5\}\wedge\{1,2,3,4,...\} & \{5\}\wedge\{3,4,5\}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\{5\}\cap\varnothing & \{5\}\cap\{1,2\} & \{5\}\cap\{5,6,7,...\}\\ \{5\}\cap\{3\} & \{5\}\cap\{1,2,3,4,...\} & \{5\}\cap\{3,4,5\}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varnothing & \varnothing & \{5\}\\ \varnothing & \{5\} & \{5\}\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$$

3.2 การมีทเมทริกซ์แบบปรกติ

บทนิยาม สำหรับแต่ละ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{n,p}(L)$ เรานิยาม

$$A\wedge B=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})\right]\in M_{m,p}(L)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L=(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1)$

เมื่อ $\wedge$ แทนการดำเนินการ AND และ $\vee$ แทนการดำเนินการ OR

ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\in M_{3,2}(L)$ และ $B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\in M_{2,1}(L)$

จะได้ $A \wedge B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \\ 1 \vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in M_{3,1}(L)$$

3.3 การจอยน์เมทริกซ์แบบปรกติ

<u>**บทนิยาม**</u> สำหรับแต่ละ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ และ $B = [b_{ij}] \in M_{n,p}(L)$ เรานิยาม

$$A \triangledown B = \left[\bigwedge_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj}) \right] \in M_{m,p}(L)$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> กำหนดให้ $L = (\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$

เมื่อ $\wedge$ แทนการดำเนินการ AND และ $\vee$ แทนการดำเนินการ OR

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(L)$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{2,1}(L)$

จะได้ $A \triangledown B = \begin{bmatrix} (1 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) \\ (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) \\ (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 \\ 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in M_{3,1}(L)$$

3.4 การมีทฮาดามาร์ดเมทริกซ์

บทนิยาม สำหรับแต่ละ $A=[a_{ij}],\ B=[b_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ เรานิยาม

$$A\barwedge B=[a_{ij}\wedge b_{ij}]\in M_{m,n}(L)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L=(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1)$

เมื่อ $\wedge$ แทนการดำเนินการ AND และ $\vee$ แทนการดำเนินการ OR

ให้ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\in M_2(L)$

จะได้ $A\barwedge B=\begin{bmatrix}1\wedge1&0\wedge1\\0\wedge0&1\wedge0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\in M_2(L)$$

3.5 การจอยน์ด้วยสเกลาร์

บทนิยาม สำหรับแต่ละ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ $k\in L$ เรานิยาม

$$k\vee A=[k\vee a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L=(P(\mathbb{N}),\cap,\cup,-^c,\varnothing,\mathbb{N})$

เรานิยาม $X\wedge Y=X\cap Y$ และ $X\vee Y=X\cup Y$ สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(\mathbb{N})$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\varnothing&\{1,2\}&\{5,6,7,\dots\}\\\{3\}&\{1,2,3,\dots\}&\{3,4,5\}\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$ และ $k=\{5\}$

จะได้ $k\vee A=\{5\}\vee\begin{bmatrix}\varnothing&\{1,2\}&\{5,6,7,\dots\}\\\{3\}&\{1,2,3,\dots\}&\{3,4,5\}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\{5\}\vee\varnothing&\{5\}\vee\{1,2\}&\{5\}\vee\{5,6,7,\dots\}\\\{5\}\vee\{3\}&\{5\}\vee\{1,2,3,\dots\}&\{5\}\vee\{3,4,5\}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \{5\}\cup\varnothing & \{5\}\cup\{1,2\} & \{5\}\cup\{5,6,7,...\} \\ \{5\}\cup\{3\} & \{5\}\cup\{1,2,3,...\} & \{5\}\cup\{3,4,5\} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \{5\} & \{1,2,5\} & \{5,6,7,...\} \\ \{3,5\} & \{1,2,3,...\} & \{3,4,5\} \end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$$

<u>ทฤษฎีบท 3.5.1</u> ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน L ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย และ $k,p\in L$ จะได้ว่า

(1) $k\wedge(A\vee B)=(k\wedge A)\vee(k\wedge B)$

<u>พิสูจน์</u> $k\wedge(A\vee B)$ $=k\wedge[a_{ij}\vee b_{ij}]$

$=[k\wedge(a_{ij}\vee b_{ij})]$

$=[(k\wedge a_{ij})\vee(k\wedge b_{ij})]$

$=[k\wedge a_{ij}]\vee[k\wedge b_{ij}]$

$=(k\wedge A)\vee(k\wedge B)$

(2) $(k\vee p)\wedge A=(k\wedge A)\vee(p\wedge A)$

<u>พิสูจน์</u> $(k\vee p)\wedge A$ $=(k\vee p)\wedge[a_{ij}]$

$=[(k\vee p)\wedge a_{ij}]$

$=[(k\wedge a_{ij})\vee(p\wedge a_{ij})]$

$=[k\wedge a_{ij}]\vee[p\wedge a_{ij}]$

$=(k\wedge A)\vee(p\wedge A)$

(3) $k\vee(A\barwedge B)=(k\vee A)\barwedge(k\vee B)$

<u>พิสูจน์</u> $k\vee(A\barwedge B)$ $=k\vee[a_{ij}\wedge b_{ij}]$

$=[k\vee(a_{ij}\wedge b_{ij})]$

$$=[(k \vee a_{ij}) \wedge (k \vee b_{ij})]$$

$$=[k \vee a_{ij}] \overline{\wedge} [k \vee b_{ij}]$$

$$=(k \vee A) \overline{\wedge} (k \vee B)$$

(4) $(k \wedge p) \vee A = (k \vee A) \overline{\wedge} (p \vee A)$

<u>พิสูจน์</u> $(k \wedge p) \vee A \quad = (k \wedge p) \vee [a_{ij}]$

$$=[(k \wedge p) \vee a_{ij}]$$

$$=[(k \vee a_{ij}) \wedge (p \vee a_{ij})]$$

$$=[k \vee a_{ij}] \overline{\wedge} [p \vee a_{ij}]$$

$$=(k \vee A) \overline{\wedge} (p \vee A)$$

(5) $\left(\bigvee_{i=1}^{n} k_i\right) \wedge A = \bigvee_{i=1}^{n} (k_i \wedge A)$

<u>พิสูจน์</u> $\left(\bigvee_{i=1}^{n} k_i\right) \wedge A \quad = (k_1 \vee k_2 \vee \cdots \vee k_n) \wedge A$

$$=(k_1 \wedge A) \vee (k_2 \wedge A) \vee \cdots \vee (k_n \wedge A)$$

$$=\bigvee_{i=1}^{n} (k_i \wedge A)$$

(6) $\left(\bigwedge_{i=1}^{n} k_i\right) \vee A = \bigwedge_{i=1}^{n} (k_i \vee A)$

<u>พิสูจน์</u> $\left(\bigwedge_{i=1}^{n} k_i\right) \vee A \quad = (k_1 \wedge k_2 \wedge \cdots \wedge k_n) \vee A$

$$=(k_1 \vee A) \wedge (k_2 \vee A) \wedge \cdots \wedge (k_n \vee A)$$

$$=\bigwedge_{i=1}^{n} (k_i \vee A)$$

3.6 การสลับเปลี่ยน (transpose)

<u>บทนิยาม</u> ถ้า $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ แล้วการสลับเปลี่ยนของ A แทนด้วย A^T ซึ่ง

$$A^T=[a_{ji}]_{i,j=1}^{n,m}\in M_{n,m}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $L=(P(\mathbb{N}),\cap,\cup,-^c,\varnothing,\mathbb{N})$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \{7,8,9\}\end{bmatrix}\in M_2(L)$

จะได้ $A^T=\begin{bmatrix}\{1\} & \{5,6\}\\ \{2,3,4,\ldots\} & \{7,8,9\}\end{bmatrix}\in M_2(L)$

<u>ทฤษฎีบท 3.6.1</u> ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือ L ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการในแต่ละข้อมีความหมาย จะได้ว่า

(1) $(A^T)^T=A$

<u>พิสูจน์</u> $(A^T)^T$ $=[a_{ji}]^T$

$=[a_{ij}]$

$=A$

(2) $(A\vee B)^T=(A^T\vee B^T)$

<u>พิสูจน์</u> $(A\vee B)^T$ $=[a_{ij}\vee b_{ij}]^T$

$=[a_{ji}\vee b_{ji}]$

$=[a_{ji}]\vee[b_{ji}]$

$=(A^T\vee B^T)$

(3) $(k \wedge A)^T = k \wedge A^T$ สำหรับ $k \in L$

<u>พิสูจน์</u> $(k \wedge A)^T$

$$
\begin{aligned}
(k \wedge A)^T &= [k \wedge a_{ij}]^T \\
&= [k \wedge a_{ji}] \\
&= k \wedge [a_{ji}] \\
&= k \wedge A^T
\end{aligned}
$$

(4) $(A \wedge B)^T = B^T \wedge A^T$

<u>พิสูจน์</u> $(A \wedge B)^T$

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B)^T &= [a_{ij} \wedge b_{ij}]^T \\
&= \left[\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} \wedge b_{kj}\right]^T \\
&= [b_{ij} \wedge a_{ij}]^T \\
&= [b_{ji} \wedge a_{ji}] \\
&= [b_{ji}] \wedge [a_{ji}] \\
&= B^T \wedge A^T
\end{aligned}
$$

3.7 รอยเมทริกซ์ (trace)

<u>**บทนิยาม**</u> รอยของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}] \in M_n(L)$ คือ ผลจอยน์ของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ

$$\operatorname{tr}(A) = \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L=(P(\mathbb{N}),\cap,\cup,-^{c},\varnothing,\mathbb{N})$

เรานิยาม $X\wedge Y=X\cap Y$ และ $X\vee Y=X\cup Y$ สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(\mathbb{N})$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\{1,2\} & \{2,3,4,\ldots\} & \{5\}\\ \{2\} & \{3,4\} & \{7,8,9\}\\ \{4,5\} & \{1,5,6\} & \varnothing\end{bmatrix}\in M_3(L)$

จะได้ $\mathrm{tr}(A)=\{1,2\}\vee\{3,4\}\vee\varnothing=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\varnothing=\{1,2,3,4\}$

ทฤษฎีบท 3.7.1 สำหรับแต่ละ $A,B\in M_n(L)$ และ $k\in L$ จะได้ว่า

(1) $\mathrm{tr}(A\vee B)=\mathrm{tr}(A)\vee\mathrm{tr}(B)$

พิสูจน์
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A\vee B) &= \bigvee_{i=1}^{n}(a_{ii}\vee b_{ii})\\ &= \bigvee_{i=1}^{n}a_{ii}\vee\bigvee_{i=1}^{n}b_{ii}\\ &= \mathrm{tr}(A)\vee\mathrm{tr}(B)\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{tr}(k\wedge A)=k\wedge\mathrm{tr}(A)$

พิสูจน์
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(k\wedge A) &= \bigvee_{i=1}^{n}(k\wedge a_{ii})\\ &= k\wedge\bigvee_{i=1}^{n}a_{ii}\\ &= k\wedge\mathrm{tr}(A)\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{tr}(A\wedge B)=\mathrm{tr}(B\wedge A)$

พิสูจน์
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A\wedge B) &= \bigvee_{i=1}^{n}(a_{ii}\wedge b_{ii})\\ &= \bigvee_{i=1}^{n}a_{ii}\wedge\bigvee_{i=1}^{n}b_{ii}\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} b_{ii} \wedge \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$= \mathrm{tr}(B \wedge A)$$

(4) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$

<u>พิสูจน์</u> $\mathrm{tr}(A^T) = \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$= \mathrm{tr}(A)$$

(5) $\mathrm{tr}(A \barwedge B) = \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B)$

<u>พิสูจน์</u> $\mathrm{tr}(A \barwedge B) = \bigvee_{i=1}^{n} (a_{ii} \wedge b_{ii})$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii} \wedge \bigvee_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B)$$

(6) $\mathrm{tr}(k \vee A) = k \vee \mathrm{tr}(A)$

<u>พิสูจน์</u> $\mathrm{tr}(k \vee A) = \bigvee_{i=1}^{n} (k \vee a_{ii})$

$$= k \vee \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$= k \vee \mathrm{tr}(A)$$

3.8 นิเสธของเมทริกซ์

<u>บทนิยาม</u> ถ้า $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ แล้วนิเสธของ A แทนด้วย $\neg A$ ซึ่ง

$$\neg A=[\neg a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $L=(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1)$

เมื่อ $\wedge$ แทนการดำเนินการ AND และ $\vee$ แทนการดำเนินการ OR

ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in M_2(L)$

จะได้ $\neg A=\begin{bmatrix}\neg 1 & \neg 0\\ \neg 0 & \neg 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in M_2(L)$

บทที่ 4

ผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

4.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(L)$ ผลมีทโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A\otimes B=[a_{ij}\wedge B]\in M_{mp\times nq}(L)$$

นั่นคือแต่ละบล็อกที่ (i,j) ของ $A\otimes B$ คือ $a_{ij}\wedge B$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,m$ และ $j=1,2,\ldots,n$

ตัวอย่าง 4.1.2 ให้ $n=2\cdot 3\cdot 5=30$ ซึ่งมีสมบัติเป็นจำนวนอิสระกำลังสอง และให้ $L=\{a\in\mathbb{N}:a\mid n\}=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

เรานิยาม $a\wedge b=\gcd(a,b)$ และ $a\vee b=\operatorname{lcm}(a,b)$ สำหรับแต่ละ $a,b\in L$

ให้ $A=\begin{bmatrix}3 & 15\\ 30 & 5\end{bmatrix}\in M_2(L)$ และ $B=\begin{bmatrix}5 & 15 & 1\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$

จะได้ $A\otimes B=\begin{bmatrix} 3\wedge\begin{bmatrix}5 & 15 & 1\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix} & 15\wedge\begin{bmatrix}5 & 15 & 1\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}\\ 30\wedge\begin{bmatrix}5 & 15 & 1\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix} & 5\wedge\begin{bmatrix}5 & 15 & 1\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}(3\wedge 5) & (3\wedge 15) & (3\wedge 1)\\ (3\wedge 6) & (3\wedge 2) & (3\wedge 10)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(15\wedge 5) & (15\wedge 15) & (15\wedge 1)\\ (15\wedge 6) & (15\wedge 2) & (15\wedge 10)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}(30\wedge 5) & (30\wedge 15) & (30\wedge 1)\\ (30\wedge 6) & (30\wedge 2) & (30\wedge 10)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(5\wedge 5) & (5\wedge 15) & (5\wedge 1)\\ (5\wedge 6) & (5\wedge 2) & (5\wedge 10)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\gcd(3,5) & \gcd(3,15) & \gcd(3,1)\\ \gcd(3,6) & \gcd(3,2) & \gcd(3,10)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gcd(15,5) & \gcd(15,15) & \gcd(15,1)\\ \gcd(15,6) & \gcd(15,2) & \gcd(15,10)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\gcd(30,5) & \gcd(30,15) & \gcd(30,1)\\ \gcd(30,6) & \gcd(30,2) & \gcd(30,10)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gcd(5,5) & \gcd(5,15) & \gcd(5,1)\\ \gcd(5,6) & \gcd(5,2) & \gcd(5,10)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3&1&5&15&1\\3&1&1&3&1&5\\5&15&1&5&5&1\\3&2&10&1&1&5\end{bmatrix}\in M_{4,6}(L)$$

<u>ตัวอย่าง 4.1.3</u> ให้ $S=\{1,2,3,4\}$

จะได้ $P(S)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},$

$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

เรานิยาม $X\wedge Y=X\cap Y$ และ $X\vee Y=X\cup Y$ สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(S)$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\{1,2\}&\{1,2,3\}\\\{4\}&\{2,4\}\\\{2,3,4\}&\varnothing\end{bmatrix}\in M_{3,2}(P(S))$ และ $B=\begin{bmatrix}\{1\}&\{2,3\}\\\{1,2,3,4\}&\{1,4\}\end{bmatrix}\in M_2(P(S))$

จะได้ $$A\otimes B=\begin{bmatrix}\{1,2\}\wedge\begin{bmatrix}\{1\}&\{2,3\}\\\{1,2,3,4\}&\{1,4\}\end{bmatrix}&\{1,2,3\}\wedge\begin{bmatrix}\{1\}&\{2,3\}\\\{1,2,3,4\}&\{1,4\}\end{bmatrix}\\\{4\}\wedge\begin{bmatrix}\{1\}&\{2,3\}\\\{1,2,3,4\}&\{1,4\}\end{bmatrix}&\{2,4\}\wedge\begin{bmatrix}\{1\}&\{2,3\}\\\{1,2,3,4\}&\{1,4\}\end{bmatrix}\\\{2,3,4\}\wedge\begin{bmatrix}\{1\}&\{2,3\}\\\{1,2,3,4\}&\{1,4\}\end{bmatrix}&\varnothing\wedge\begin{bmatrix}\{1\}&\{2,3\}\\\{1,2,3,4\}&\{1,4\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\{1,2\}\wedge\{1\}&\{1,2\}\wedge\{2,3\}\\\{1,2\}\wedge\{1,2,3,4\}&\{1,2\}\wedge\{1,4\}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}\{1,2,3\}\wedge\{1\}&\{1,2,3\}\wedge\{2,3\}\\\{1,2,3\}\wedge\{1,2,3,4\}&\{1,2,3\}\wedge\{1,4\}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\{4\}\wedge\{1\}&\{4\}\wedge\{2,3\}\\\{4\}\wedge\{1,2,3,4\}&\{4\}\wedge\{1,4\}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}\{2,4\}\wedge\{1\}&\{2,4\}\wedge\{2,3\}\\\{2,4\}\wedge\{1,2,3,4\}&\{2,4\}\wedge\{1,4\}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\{2,3,4\}\wedge\{1\}&\{2,3,4\}\wedge\{2,3\}\\\{2,3,4\}\wedge\{1,2,3,4\}&\{2,3,4\}\wedge\{1,4\}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}\varnothing\wedge\{1\}&\varnothing\wedge\{2,3\}\\\varnothing\wedge\{1,2,3,4\}&\varnothing\wedge\{1,4\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\{1,2\}\cap\{1\} & \{1,2\}\cap\{2,3\}\\ \{1,2\}\cap\{1,2,3,4\} & \{1,2\}\cap\{1,4\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1,2,3\}\cap\{1\} & \{1,2,3\}\cap\{2,3\}\\ \{1,2,3\}\cap\{1,2,3,4\} & \{1,2,3\}\cap\{1,4\}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\{4\}\cap\{1\} & \{4\}\cap\{2,3\}\\ \{4\}\cap\{1,2,3,4\} & \{4\}\cap\{1,4\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{2,4\}\cap\{1\} & \{2,4\}\cap\{2,3\}\\ \{2,4\}\cap\{1,2,3,4\} & \{2,4\}\cap\{1,4\}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\{2,3,4\}\cap\{1\} & \{2,3,4\}\cap\{2,3\}\\ \{2,3,4\}\cap\{1,2,3,4\} & \{2,3,4\}\cap\{1,4\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing\cap\{1\} & \varnothing\cap\{2,3\}\\ \varnothing\cap\{1,2,3,4\} & \varnothing\cap\{1,4\}\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\{1\} & \{2\} & \{1\} & \{2,3\}\\
\{1,2\} & \{1\} & \{1,2,3\} & \{1\}\\
\varnothing & \varnothing & \varnothing & \{2\}\\
\{4\} & \{4\} & \{2,4\} & \{4\}\\
\varnothing & \{2,3\} & \varnothing & \varnothing\\
\{2,3,4\} & \{4\} & \varnothing & \varnothing
\end{bmatrix}\in M_{6,4}(L)
$$

4.2 ทฤษฎีบทของผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

<u>บทตั้ง 4.2.1</u> ถ้า $A=[A_{ij}]$ (นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์แบบบล็อค ซึ่งมีบล็อกที่ (i,j) เป็น A_{ij}) แล้ว $A\otimes B=[A_{ij}\otimes B]$ นั่นคือ $A\otimes B$ มีบล็อกที่ (i,j) เป็น $A_{ij}\otimes B$

<u>ทฤษฎีบท 4.2.2</u> ให้ $A\in M_{m,n}(L)$ แล้ว

1. $(\alpha\wedge A)\otimes B=\alpha\wedge(A\otimes B)=A\otimes(\alpha\wedge B)$ สำหรับทุก $\alpha\in L$ และ $B\in M_{p,q}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $(\alpha\wedge A)\otimes B$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\wedge A)\otimes B &= [\alpha\wedge a_{ij}]\otimes B\\
&= [(\alpha\wedge a_{ij})\wedge B]\\
&= [\alpha\wedge(a_{ij}\wedge B)]\\
&= \alpha\wedge[a_{ij}\wedge B]\\
&= \alpha\wedge(A\otimes B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\otimes(\alpha\wedge B) &= [a_{ij}\wedge(\alpha\wedge B)]\\
&= [(a_{ij}\wedge\alpha)\wedge B]\\
&= [(\alpha\wedge a_{ij})\wedge B]\\
&= [\alpha\wedge(a_{ij}\wedge B)]\\
&= \alpha\wedge[a_{ij}\wedge B]\\
&= \alpha\wedge(A\otimes B)
\end{aligned}
$$

2. $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$ สำหรับ $B\in M_{p,q}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $(A\otimes B)^T$

$$
\begin{aligned}
(A\otimes B)^T &= [a_{ij}\wedge B]^T\\
&= [(a_{ji}\wedge B)^T]\\
&= [a_{ji}\wedge B^T]
\end{aligned}
$$

โดยทฤษฎีบท 3.7.1 ข้อ 2

$$= [a_{ji}] \otimes B^T$$

$$= A^T \otimes B^T$$

3. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(L)$ และ $C \in M_{r,s}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $(A \otimes B) \otimes C$ $= [a_{ij} \wedge B] \otimes C$

$= [(a_{ij} \wedge B) \otimes C]$ โดยบทตั้ง 4.2.1

$= [a_{ij} \wedge (B \otimes C)]$ โดยทฤษฎีบท 4.2.2 ข้อ 2

$= A \otimes (B \otimes C)$

4. $(A \vee B) \otimes C = (A \otimes C) \vee (B \otimes C)$ สำหรับ $B \in M_{m,n}(L)$ และ $C \in M_{r,s}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $(A \vee B) \otimes C$ $= [(a_{ij} \vee b_{ij}) \wedge C]$

$= [(a_{ij} \wedge C) \vee (b_{ij} \wedge C)]$ โดยทฤษฎีบท 3.5.1 ข้อ 2

$= [a_{ij} \wedge C] \vee [b_{ij} \wedge C]$

$= (A \otimes C) \vee (B \otimes C)$

5. $A \otimes (B \vee C) = (A \otimes B) \vee (A \otimes C)$ สำหรับ $B, C \in M_{p,q}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $A \otimes (B \vee C)$ $= [a_{ij} \wedge (B \vee C)]$

$= [(a_{ij} \wedge B) \vee (a_{ij} \wedge C)]$ โดยทฤษฎีบท 3.5.1 ข้อ 1

$= [a_{ij} \wedge B] \vee [a_{ij} \wedge C]$

$= (A \otimes B) \vee (A \otimes C)$

6. $A \otimes 0_{p,q} = 0_{p,q} \otimes A = 0_{mp,nq}$

<u>พิสูจน์</u> $A \otimes 0_{p,q}$

$$= [a_{ij} \wedge 0_{p,q}]$$

$$= [0_{ij}]$$

$$= 0_{mp,nq}$$

$0_{p,q} \otimes A$

$$= [0_{ij} \wedge A]$$

$$= [0_{ij}]$$

$$= 0_{mp,nq}$$

7. $I_m \otimes I_n = I_{mn}$

<u>พิสูจน์</u> $I_m \otimes I_n$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \otimes I_n$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \wedge I_n & 0 \wedge I_n & \cdots & 0 \wedge I_n \\ 0 \wedge I_n & 1 \wedge I_n & \cdots & 0 \wedge I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \wedge I_n & 0 \wedge I_n & \cdots & 1 \wedge I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix}$$

$$= I_{mn}$$

<u>ทฤษฎีบท 4.2.3</u> ให้ $A\in M_{m,n}(L)$, $B\in M_{p,q}(L)$, $C\in M_{n,k}(L)$ และ $D\in M_{q,r}(L)$ แล้ว $(A\otimes B)\wedge(C\otimes D)=(A\wedge C)\otimes(B\wedge D)$

<u>พิสูจน์</u> $(A\otimes B)\wedge(C\otimes D)$

$$=[a_{ij}\wedge B]\wedge[c_{ij}\wedge D]$$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge B)\wedge(c_{kj}\wedge D)\right]$$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge c_{kj})\wedge(B\wedge D)\right]$$

$$=\left[\left(\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge c_{kj})\right)\wedge(B\wedge D)\right]$$ โดยทฤษฎีบท 3.5.1 ข้อ 5

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge c_{kj})\right]\otimes(B\wedge D)$$

$$=(A\wedge C)\otimes(B\wedge D)$$

<u>บทแทรก 4.2.4</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{p,q}(L)$ แล้ว

a) $(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k) \wedge (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k) = (A_1 \wedge B_1) \otimes (A_2 \wedge B_2) \otimes \cdots \otimes (A_k \wedge B_k)$

b) $(A_1 \otimes B_1) \wedge (A_2 \otimes B_2) \wedge \cdots \wedge (A_k \otimes B_k) = (A_1 \wedge A_2 \cdots \wedge A_k) \otimes (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_k)$

a) (พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

<u>พิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $p(k)$ แทนข้อความ

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k) \wedge (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k) = (A_1 \wedge B_1) \otimes (A_2 \wedge B_2) \otimes \cdots \otimes (A_k \wedge B_k)$$

ขั้นฐาน : เมื่อ $k = 1$ จะได้ $A_1 \wedge B_1 = (A_1 \wedge B_1)$ ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $(A_1 \otimes A_2) \wedge (B_1 \otimes B_2) = (A_1 \wedge B_1) \otimes (A_2 \wedge B_2)$

ดังนั้น $p(2)$ เป็นจริง (จากทฤษฎีบท 4.2.3 สมบัติผลมีทแบบผสม)

ขั้นอุปนัย : ให้ $n \in \mathbb{N}$ สมมติ $p(2), p(3), \ldots, p(n)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n) \wedge (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n) = (A_1 \wedge B_1) \otimes (A_2 \wedge B_2) \otimes \cdots \otimes (A_n \wedge B_n)$$

จะได้ $(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_{n+1}) \wedge (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_{n+1})$

$= [(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n) \otimes A_{n+1}] \wedge [(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n) \otimes B_{n+1}]$

$= [(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n) \wedge (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n)] \otimes [A_{n+1} \wedge B_{n+1}]$

(จากทฤษฎีบท 4.2.3 สมบัติผลมีทแบบผสม)

$= [(A_1 \wedge B_1) \otimes (A_2 \wedge B_2) \otimes \cdots \otimes (A_n \wedge B_n)] \otimes [A_{n+1} \wedge B_{n+1}]$

(จากสมมติฐาน)

$= (A_1 \wedge B_1) \otimes (A_2 \wedge B_2) \otimes \cdots \otimes (A_n \wedge B_n) \otimes (A_{n+1} \wedge B_{n+1})$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $p(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

b) (พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

<u>พิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $p(k)$ แทนข้อความ

$$(A_1 \otimes B_1) \wedge (A_2 \otimes B_2) \wedge \cdots \wedge (A_k \otimes B_k) = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \otimes (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_k)$$

ขั้นฐาน : เมื่อ $k = 1$ จะได้ $(A_1 \otimes B_1) = A_1 \otimes B_1$ ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $(A_1 \otimes B_1) \wedge (A_2 \otimes B_2) = (A_1 \wedge A_2) \otimes (B_1 \wedge B_2)$

ดังนั้น $p(2)$ เป็นจริง (จากทฤษฎีบท 4.2.3 สมบัติผลมีทแบบผสม)

ขั้นอุปนัย : ให้ $n \in \mathbb{N}$ สมมติ $p(2), p(3), \ldots, p(n)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$(A_1 \otimes B_1) \wedge (A_2 \otimes B_2) \wedge \cdots \wedge (A_n \otimes B_n) = (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \otimes (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)$$

จะได้ $(A_1 \otimes B_1) \wedge (A_2 \otimes B_2) \wedge \cdots \wedge (A_{n+1} \otimes B_{n+1})$

$$= [(A_1 \otimes B_1) \wedge (A_2 \otimes B_2) \wedge \cdots \wedge (A_n \otimes B_n)] \wedge (A_{n+1} \otimes B_{n+1})$$

$$= [(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \otimes (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)] \wedge (A_{n+1} \otimes B_{n+1})$$

(จากสมมติฐาน)

$$= [(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \wedge A_{n+1} \otimes (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n) \wedge B_{n+1}]$$

(จากทฤษฎีบท 4.2.3 สมบัติผลมีทแบบผสม)

$$= (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge A_{n+1}) \otimes (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n \wedge B_{n+1})$$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $p(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

<u>ทฤษฎีบท 4.2.5</u>

(1) ถ้า $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน แล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน

จะได้ว่า $A = [a_{ij}]$ เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i > j$ และ $B = [b_{ij}]$ เมื่อ $b_{ij} = 0$ สำหรับ $i > j$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & a_{12} \wedge B & \cdots & a_{1n} \wedge B \\ a_{21} \wedge B & a_{22} \wedge B & \cdots & a_{2n} \wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \wedge B & a_{n2} \wedge B & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & a_{12} \wedge B & \cdots & a_{1n} \wedge B \\ 0 \wedge B & a_{22} \wedge B & \cdots & a_{2n} \wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \wedge B & 0 \wedge B & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & a_{12} \wedge B & \cdots & a_{1n} \wedge B \\ 0 & a_{22} \wedge B & \cdots & a_{2n} \wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก B เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน จะได้ว่าแต่ละบล็อคที่ (i, j) ของ $A \otimes B$ คือ $a_{ij} \wedge B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน สำหรับทุก $i > j$

ดังนั้น $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน

(2) ถ้า $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง แล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง

จะได้ว่า $A = [a_{ij}]$ เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i < j$ และ $B = [b_{ij}]$ เมื่อ $b_{ij} = 0$ สำหรับ $i < j$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & a_{12} \wedge B & \cdots & a_{1n} \wedge B \\ a_{21} \wedge B & a_{22} \wedge B & \cdots & a_{2n} \wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \wedge B & a_{n2} \wedge B & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & 0 \wedge B & \cdots & 0 \wedge B \\ a_{21} \wedge B & a_{22} \wedge B & \cdots & 0 \wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \wedge B & a_{n2} \wedge B & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} \wedge B & a_{22} \wedge B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \wedge B & a_{n2} \wedge B & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก B เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง จะได้ว่าแต่ละบล็อคที่ (i, j) ของ $A \otimes B$ คือ $a_{ij} \wedge B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง สำหรับทุก $i < j$

ดังนั้น $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง

(3) ถ้า $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม แล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

จะได้ว่า $A = [a_{ij}]$ เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$ และ $B = [b_{ij}]$ เมื่อ $b_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & a_{12} \wedge B & \cdots & a_{1n} \wedge B \\ a_{21} \wedge B & a_{22} \wedge B & \cdots & a_{2n} \wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \wedge B & a_{n2} \wedge B & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} \wedge B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \wedge B \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม จะได้ว่าแต่ละบล็อคที่ (i, j) ของ $A \otimes B$ คือ $a_{ij} \wedge B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม สำหรับทุก $i \neq j$

ดังนั้น $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>ทฤษฎีบท 4.2.6</u> ถ้า $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A=[a_{ij}] \in M_n(L)$ และ $B=[b_{ij}] \in M_m(L)$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T = A \otimes B$$

ดังนั้น $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

<u>บทแทรก 4.2.7</u> ถ้า $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ แล้ว
$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B \otimes A)$

<u>พิสูจน์</u> $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(a_{ii} \wedge B)$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} (a_{ii} \wedge \mathrm{tr}(B))$$ โดยทฤษฎีบท 3.7.1 ข้อ 2

$$= \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_{ii} \right) \wedge \mathrm{tr}(B)$$

$$= \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B)$$

$$= \mathrm{tr}(B) \wedge \mathrm{tr}(A)$$

$$= \mathrm{tr}(B \otimes A)$$

ดังนั้น $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B) \wedge \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B \otimes A)$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{n,m}(L)$ แล้ว $\mathrm{tr}(A \otimes B) \neq \mathrm{tr}(B \otimes A)$ ในกรณีทั่วไป

ให้ $L = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ และ

นิยาม $a \wedge b = \gcd(a,b)$ และ $a \vee b = \mathrm{lcm}(a,b)$ สำหรับทุก $a,b \in L$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(L)$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(L)$

จะได้ $A \otimes B \quad = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} & 3 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} & 15 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} \\ 30 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} & 5 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} & 6 \wedge \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \wedge 2 & 1 \wedge 6 \\ 1 \wedge 10 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 15 & 1 \wedge 30 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \wedge 2 & 3 \wedge 6 \\ 3 \wedge 10 & 3 \wedge 1 \\ 3 \wedge 15 & 3 \wedge 30 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 \wedge 2 & 15 \wedge 6 \\ 15 \wedge 10 & 15 \wedge 1 \\ 15 \wedge 15 & 15 \wedge 30 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 30 \wedge 2 & 30 \wedge 6 \\ 30 \wedge 10 & 30 \wedge 1 \\ 30 \wedge 15 & 30 \wedge 30 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \wedge 2 & 5 \wedge 6 \\ 5 \wedge 10 & 5 \wedge 1 \\ 5 \wedge 15 & 5 \wedge 30 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \wedge 2 & 6 \wedge 6 \\ 6 \wedge 10 & 6 \wedge 1 \\ 6 \wedge 15 & 6 \wedge 30 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gcd(1,2) & \gcd(1,6) \\ \gcd(1,10) & \gcd(1,1) \\ \gcd(1,15) & \gcd(1,30) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gcd(3,2) & \gcd(3,6) \\ \gcd(3,10) & \gcd(3,1) \\ \gcd(3,15) & \gcd(3,30) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gcd(15,2) & \gcd(15,6) \\ \gcd(15,10) & \gcd(15,1) \\ \gcd(15,15) & \gcd(15,30) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gcd(30,2) & \gcd(30,6) \\ \gcd(30,10) & \gcd(30,1) \\ \gcd(30,15) & \gcd(30,30) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gcd(5,2) & \gcd(5,6) \\ \gcd(5,10) & \gcd(5,1) \\ \gcd(5,15) & \gcd(5,30) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gcd(6,2) & \gcd(6,6) \\ \gcd(6,10) & \gcd(6,1) \\ \gcd(6,15) & \gcd(6,30) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 15 & 15 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 10 & 1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 15 & 30 & 5 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \in M_6(L)$$

$$\operatorname{tr}(A\otimes B) = 1\vee 1\vee 3\vee 1\vee 2\vee 6 = \operatorname{lcm}(1,1,3,1,2,6) = 6$$

$$B\otimes A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 1 \\ 15 & 30 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\wedge\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} & 6\wedge\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ 10\wedge\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} & 1\wedge\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ 15\wedge\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} & 30\wedge\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\wedge 1 & 2\wedge 3 & 2\wedge 15 \\ 2\wedge 30 & 2\wedge 5 & 2\wedge 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6\wedge 1 & 6\wedge 3 & 6\wedge 15 \\ 6\wedge 30 & 6\wedge 5 & 6\wedge 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 10\wedge 1 & 10\wedge 3 & 10\wedge 15 \\ 10\wedge 30 & 10\wedge 5 & 10\wedge 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\wedge 1 & 1\wedge 3 & 1\wedge 15 \\ 1\wedge 30 & 1\wedge 5 & 1\wedge 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 15\wedge 1 & 15\wedge 3 & 15\wedge 15 \\ 15\wedge 30 & 15\wedge 5 & 15\wedge 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 30\wedge 1 & 30\wedge 3 & 30\wedge 15 \\ 30\wedge 30 & 30\wedge 5 & 30\wedge 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gcd(2,1) & \gcd(2,3) & \gcd(2,15) \\ \gcd(2,30) & \gcd(2,5) & \gcd(2,6) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gcd(6,1) & \gcd(6,3) & \gcd(6,15) \\ \gcd(6,30) & \gcd(6,5) & \gcd(6,6) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gcd(10,1) & \gcd(10,3) & \gcd(10,15) \\ \gcd(10,30) & \gcd(10,5) & \gcd(10,6) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gcd(1,1) & \gcd(1,3) & \gcd(1,15) \\ \gcd(1,30) & \gcd(1,5) & \gcd(1,6) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gcd(15,1) & \gcd(15,3) & \gcd(15,15) \\ \gcd(15,30) & \gcd(15,5) & \gcd(15,6) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gcd(30,1) & \gcd(30,3) & \gcd(30,15) \\ \gcd(30,30) & \gcd(30,5) & \gcd(30,6) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 15 & 1 & 3 & 15 \\ 15 & 5 & 3 & 30 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_6(L)$$

$$\operatorname{tr}(B \otimes A) = 1 \vee 1 \vee 5 \vee 1 \vee 3 \vee 6 = \operatorname{lcm}(1,1,5,1,3,6) = 30$$

ดังนั้น $\operatorname{tr}(A \otimes B) \neq \operatorname{tr}(B \otimes A)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า ผลมีทโครเนคเคอร์แจกแจงทางขวาเหนือผลบวกตรงได้

<u>ทฤษฎีบท 4.2.8</u> ให้ $A \in M_n(L)$, $B \in M_m(L)$ และ $C \in M_p(L)$

แล้ว $(A \circ B) \otimes C = (A \otimes C) \circ (B \otimes C)$

<u>พิสูจน์</u>

$$(A \circ B) \otimes C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \otimes C$$

$$= \begin{bmatrix} A \otimes C & 0 \otimes C \\ 0 \otimes C & B \otimes C \end{bmatrix}$$ โดยบทตั้ง 4.2.1

$$= \begin{bmatrix} A \otimes C & 0 \\ 0 & B \otimes C \end{bmatrix}$$

$$= (A \otimes C) \circ (B \otimes C)$$

ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า ผลมีทโครเนคเคอร์แจกแจงทางซ้ายเหนือผลบวกตรงไม่ได้ นั่นคือ $A\otimes(B\circ C)\neq(A\otimes B)\circ(A\otimes C)$

ตัวอย่าง ให้ $L=(P(\mathbb{N}),\cap,\cup,-^{c},\varnothing,\mathbb{N})$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\{1\} & \{1,2\}\\ \{2,3,4,\ldots\} & \varnothing\end{bmatrix}\in M_2(L)$, $B=\begin{bmatrix}\{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\}\\ \{1,2,3,\ldots\} & \{5\}\end{bmatrix}\in M_2(L)$

และ $C=\begin{bmatrix}\varnothing & \{3,4\}\\ \{1\} & \{10,11,12,\ldots\}\end{bmatrix}\in M_2(L)$

จะได้ $A\otimes(B\circ C)=\begin{bmatrix}\{1\} & \{1,2\}\\ \{2,3,4,\ldots\} & \varnothing\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\\ \{1,2,3,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{3,4\}\\ \varnothing & \varnothing & \{1\} & \{10,11,12,\ldots\}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\{1\}\wedge\begin{bmatrix}\{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\\ \{1,2,3,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{3,4\}\\ \varnothing & \varnothing & \{1\} & \{10,11,12,\ldots\}\end{bmatrix} & \{1,2\}\wedge\begin{bmatrix}\{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\\ \{1,2,3,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{3,4\}\\ \varnothing & \varnothing & \{1\} & \{10,11,12,\ldots\}\end{bmatrix}\\ \{2,3,4,\ldots\}\wedge\begin{bmatrix}\{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\\ \{1,2,3,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{3,4\}\\ \varnothing & \varnothing & \{1\} & \{10,11,12,\ldots\}\end{bmatrix} & \varnothing\wedge\begin{bmatrix}\{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\\ \{1,2,3,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{3,4\}\\ \varnothing & \varnothing & \{1\} & \{10,11,12,\ldots\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \{1\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{1,2\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \{1\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{1\} & \varnothing\\ \{3,4,5,\ldots\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \{2,3,4,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{3,4\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{10,11,12,\ldots\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\end{bmatrix}\in M_8(L)$$

$$(A\otimes B)\circ(A\otimes C)=\begin{bmatrix}\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \{1\} & \varnothing & \{1,2\} & \varnothing\\ \{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\\ \{2,3,4,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \{1\} & \varnothing & \{1\} & \varnothing\\ \varnothing & \{3,4\} & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \{10,11,12,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \{1\} & \varnothing & \{1,2\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \{3,4,5\} & \{5,6,7,\ldots\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \{2,3,4,\ldots\} & \{5\} & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{1\} & \varnothing & \{1\} & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{3,4\} & \varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{10,11,12,\ldots\} & \varnothing & \varnothing\end{bmatrix}\in M_8(L)$$

ดังนั้น $A\otimes(B\circ C)\neq(A\otimes B)\circ(A\otimes C)$

บทที่ 5

ผลจอยน์โครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

5.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลจอยน์โครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

<u>บทนิยาม 5.1.1</u> ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(L)$ ผลจอยน์โครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A\oplus B=[a_{ij}\vee B]\in M_{mp\times nq}(L)$$

นั่นคือแต่ละบล็อกที่ (i,j) ของ $A\oplus B$ คือ $a_{ij}\vee B$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,m$ และ $j=1,2,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 5.1.2</u> กำหนดให้ $L=(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1)$

เมื่อ $\wedge$ แทนตัวดำเนินการ AND และ $\vee$ แทนตัวดำเนินการ OR

ให้ $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\in M_2(L)$ และ $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$

จะได้ $A\oplus B=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0\vee\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} & 1\vee\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\\ 1\vee\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} & 1\vee\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(0\vee1)&(0\vee0)&(0\vee1)\\(0\vee1)&(0\vee1)&(0\vee0)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(1\vee1)&(1\vee0)&(1\vee1)\\(1\vee1)&(1\vee1)&(1\vee0)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}(1\vee1)&(1\vee0)&(1\vee1)\\(1\vee1)&(1\vee1)&(1\vee0)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(1\vee1)&(1\vee0)&(1\vee1)\\(1\vee1)&(1\vee1)&(1\vee0)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}\in M_{4,6}(L)$$

<u>**ตัวอย่าง 5.1.3**</u> กำหนดให้ $L=(P(\mathbb{N}),\cap,\cup,-^{c},\varnothing,\mathbb{N})$

เรานิยาม $X\wedge Y=X\cap Y$ และ $X\vee Y=X\cup Y$ สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(\mathbb{N})$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\{1,2\} & \{5\} & \{1,2,3,\ldots\}\\ \varnothing & \{10,11,12,\ldots\} & \{3,4\}\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$ และ

$$B=\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix}\in M_{3,2}(L)$$

จะได้ $A\oplus B=\begin{bmatrix}\{1,2\} & \{5\} & \{1,2,3,\ldots\}\\ \varnothing & \{10,11,12,\ldots\} & \{3,4\}\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\{1,2\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \{5\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \{1,2,3,\ldots\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix}\\ \varnothing\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \{10,11,12,\ldots\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \{3,4\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\{1,2\}\cup\{1\} & \{1,2\}\cup\{2,3,4,\ldots\}\\ \{1,2\}\cup\{5,6\} & \{1,2\}\cup\varnothing\\ \{1,2\}\cup\{10\} & \{1,2\}\cup\{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{5\}\cup\{1\} & \{5\}\cup\{2,3,4,\ldots\}\\ \{5\}\cup\{5,6\} & \{5\}\cup\varnothing\\ \{5\}\cup\{10\} & \{5\}\cup\{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1,2,3,\ldots\}\cup\{1\} & \{1,2,3,\ldots\}\cup\{2,3,4,\ldots\}\\ \{1,2,3,\ldots\}\cup\{5,6\} & \{1,2,3,\ldots\}\cup\varnothing\\ \{1,2,3,\ldots\}\cup\{10\} & \{1,2,3,\ldots\}\cup\{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\varnothing\cup\{1\} & \varnothing\cup\{2,3,4,\ldots\}\\ \varnothing\cup\{5,6\} & \varnothing\cup\varnothing\\ \varnothing\cup\{10\} & \varnothing\cup\{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{10,11,12,\ldots\}\cup\{1\} & \{10,11,12,\ldots\}\cup\{2,3,4,\ldots\}\\ \{10,11,12,\ldots\}\cup\{5,6\} & \{10,11,12,\ldots\}\cup\varnothing\\ \{10,11,12,\ldots\}\cup\{10\} & \{10,11,12,\ldots\}\cup\{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{3,4\}\cup\{1\} & \{3,4\}\cup\{2,3,4,\ldots\}\\ \{3,4\}\cup\{5,6\} & \{3,4\}\cup\varnothing\\ \{3,4\}\cup\{10\} & \{3,4\}\cup\{7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\{1,2\} & \{1,2,3\} & \{1,5\} & \{2,3,4,\ldots\} & \{1,2,3,\ldots\} & \{1,2,3,\ldots\}\\ \{1,2,5,6\} & \{1,2\} & \{5,6\} & \{5\} & \{1,2,3,\ldots\} & \{1,2,3,\ldots\}\\ \{1,2,10\} & \{1,2,7,8,9,\ldots\} & \{5,10\} & \{5,7,8,9,\ldots\} & \{1,2,3,\ldots\} & \{1,2,3,\ldots\}\\ \{1\} & \{2,3,4,\ldots\} & \{1,10,11,12,\ldots\} & \{2,3,4,\ldots\} & \{1,3,4\} & \{2,3,4,\ldots\}\\ \{5,6\} & \varnothing & \{5,6,10,11,12,\ldots\} & \{10,11,12,\ldots\} & \{3,4,5,6\} & \{3,4\}\\ \{10\} & \{7,8,9,\ldots\} & \{10,11,12,\ldots\} & \{7,8,9,\ldots\} & \{3,4,10\} & \{3,4,7,8,9,\ldots\}\end{bmatrix}\in M_6(L)$$

5.2 ทฤษฎีบทของผลจอยน์โครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

บทตั้ง 5.2.1 ถ้า $A=[A_{ij}]$ (นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์แบบบล็อค ซึ่งมีบล็อกที่ (i,j) เป็น A_{ij}) แล้ว $A\oplus B=[A_{ij}\oplus B]$ นั่นคือ $A\oplus B$ มีบล็อกที่ (i,j) เป็น $A_{ij}\oplus B$

ทฤษฎีบท 5.2.2 ให้ $A\in M_{m,n}(L)$ แล้ว

1. $(\alpha\vee A)\oplus B=\alpha\vee(A\oplus B)=A\oplus(\alpha\vee B)$ สำหรับทุก $\alpha\in L$ และ $B\in M_{p,q}(L)$

พิสูจน์ $(\alpha\vee A)\oplus B$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\vee A)\oplus B &= [\alpha\vee a_{ij}]\oplus B \\
&= [(\alpha\vee a_{ij})\vee B] \\
&= [\alpha\vee(a_{ij}\vee B)] \\
&= \alpha\vee[a_{ij}\vee B] \\
&= \alpha\vee(A\oplus B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\oplus(\alpha\vee B) &= [a_{ij}\vee(\alpha\vee B)] \\
&= [(a_{ij}\vee\alpha)\vee B] \\
&= [(\alpha\vee a_{ij})\vee B] \\
&= [\alpha\vee(a_{ij}\vee B)] \\
&= \alpha\vee[a_{ij}\vee B] \\
&= \alpha\vee(A\oplus B)
\end{aligned}
$$

2. $(A\oplus B)^T=A^T\oplus B^T$ สำหรับ $B\in M_{p,q}(L)$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
(A\oplus B)^T &= [a_{ij}\vee B]^T \\
&= [(a_{ji}\vee B)^T] \\
&= [a_{ji}\vee B^T] && \text{โดยทฤษฎีบท 3.7.1 ข้อ 6}
\end{aligned}
$$

$$= [a_{ji}] \oplus B^T$$

$$= A^T \oplus B^T$$

3. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(L)$ และ $C \in M_{r,s}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $(A \oplus B) \oplus C$ $= [a_{ij} \vee B] \oplus C$

$= [(a_{ij} \vee B) \oplus C]$ โดยบทตั้ง 5.2.1

$= [a_{ij} \vee (B \oplus C)]$ โดยทฤษฎีบท 5.2.2 ข้อ 1

$= A \oplus (B \oplus C)$

4. $(A \barwedge B) \oplus C = (A \oplus C) \barwedge (B \oplus C)$ สำหรับ $B \in M_{m,n}(L)$ และ $C \in M_{r,s}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $(A \barwedge B) \oplus C$ $= [(a_{ij} \wedge b_{ij}) \vee C]$

$= [(a_{ij} \vee C) \wedge (b_{ij} \vee C)]$ โดยทฤษฎีบท 3.5.1 ข้อ 4

$= [a_{ij} \vee C] \wedge [b_{ij} \vee C]$

$= (A \oplus C) \barwedge (B \oplus C)$

5. $A \oplus (B \barwedge C) = (A \oplus B) \barwedge (A \oplus C)$ สำหรับ $B, C \in M_{p,q}(L)$

<u>พิสูจน์</u> $A \oplus (B \barwedge C)$ $= [a_{ij} \vee (B \barwedge C)]$

$= [(a_{ij} \vee B) \barwedge (a_{ij} \vee C)]$ โดยทฤษฎีบท 3.5.1 ข้อ 3

$= [a_{ij} \vee B] \barwedge [a_{ij} \vee C]$

$= (A \oplus B) \barwedge (A \oplus C)$

6. $A \oplus 1_{p,q} = 1_{p,q} \oplus A = 1_{mp,nq}$

<u>พิสูจน์</u> $A \oplus 1_{p,q}$

$$= [a_{ij} \vee 1_{p,q}]$$

$$= [1_{ij}]$$

$$= 1_{mp,nq}$$

$1_{p,q} \oplus A$

$$= [1_{ij} \vee A]$$

$$= [1_{ij}]$$

$$= 1_{mp,nq}$$

7. $0_m \oplus 0_n = 0_{mn}$

<u>พิสูจน์</u> $0_m \oplus 0_n$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \oplus 0_n$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \vee 0 & 0 \vee 0 & \cdots & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 0 & \cdots & 0 \vee 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 0 & \cdots & 0 \vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & 0_n & \cdots & 0_n \end{bmatrix}$$

$$= 0_{mn}$$

<u>ทฤษฎีบท 5.2.3</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{p,q}(L)$ แล้ว $\neg(A \otimes B) = \neg A \oplus \neg B$

<u>พิสูจน์</u> $\neg(A \otimes B)$

$$
\begin{aligned}
&= \neg[a_{ij} \wedge B] \\
&= [\neg(a_{ij} \wedge B)] \\
&= [\neg a_{ij} \vee \neg B] \\
&= \neg A \oplus \neg B
\end{aligned}
$$

<u>ทฤษฎีบท 5.2.4</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L)$, $B \in M_{p,q}(L)$, $C \in M_{n,k}(L)$ และ $D \in M_{q,r}(L)$ แล้ว $(A \oplus B) \triangledown (C \oplus D) = (A \triangledown C) \oplus (B \triangledown D)$

<u>พิสูจน์</u> $(A \oplus B) \triangledown (C \oplus D)$

$$
\begin{aligned}
&= [a_{ij} \vee B] \triangledown [c_{ij} \vee D] \\
&= \left[\bigwedge_{k=1}^{n} (a_{ik} \vee B) \triangledown (c_{kj} \vee D) \right] \\
&= \left[\bigwedge_{k=1}^{n} (a_{ik} \vee c_{kj}) \vee (B \triangledown D) \right] \\
&= \left[\left(\bigwedge_{k=1}^{n} (a_{ik} \vee c_{kj}) \right) \vee (B \triangledown D) \right] \quad \text{โดยทฤษฎีบท 3.5.1 ข้อ 6} \\
&= \left[\bigwedge_{k=1}^{n} (a_{ik} \vee c_{kj}) \right] \oplus (B \triangledown D) \\
&= (A \triangledown C) \oplus (B \triangledown D)
\end{aligned}
$$

<u>บทแทรก 5.2.5</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{p,q}(L)$ แล้ว

a) $(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k) \triangledown (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k) = (A_1 \triangledown B_1) \oplus (A_2 \triangledown B_2) \oplus \cdots \oplus (A_k \triangledown B_k)$

b) $(A_1 \oplus B_1) \triangledown (A_2 \oplus B_2) \triangledown \cdots \triangledown (A_k \oplus B_k) = (A_1 \triangledown A_2 \triangledown \cdots \triangledown A_k) \oplus (B_1 \triangledown B_2 \triangledown \cdots \triangledown B_k)$

a) (พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

<u>พิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $p(k)$ แทนข้อความ

$$(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k) \triangledown (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k) = (A_1 \triangledown B_1) \oplus (A_2 \triangledown B_2) \oplus \cdots \oplus (A_k \triangledown B_k)$$

ขั้นฐาน : เมื่อ $k = 1$ จะได้ $A_1 \triangledown B_1 = (A_1 \triangledown B_1)$ ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $(A_1 \oplus A_2) \triangledown (B_1 \oplus B_2) = (A_1 \triangledown B_1) \oplus (A_2 \triangledown B_2)$

ดังนั้น $p(2)$ เป็นจริง (จากทฤษฎีบท 5.2.4 สมบัติผลจอยน์แบบผสม)

ขั้นอุปนัย : ให้ $n \in \mathbb{N}$ สมมติ $p(2), p(3), ..., p(n)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n) \triangledown (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n) = (A_1 \triangledown B_1) \oplus (A_2 \triangledown B_2) \oplus \cdots \oplus (A_n \triangledown B_n)$$

จะได้ $(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{n+1}) \triangledown (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_{n+1})$

$$= [(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n) \oplus A_{n+1}] \triangledown [(B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n) \oplus B_{n+1}]$$

$$= [(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n) \triangledown (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n)] \oplus [A_{n+1} \triangledown B_{n+1}]$$

(จากทฤษฎีบท 5.2.4 สมบัติผลจอยน์แบบผสม)

$$= [(A_1 \triangledown B_1) \oplus (A_2 \triangledown B_2) \oplus \cdots \oplus (A_n \triangledown B_n)] \oplus [A_{n+1} \triangledown B_{n+1}]$$

(จากสมมติฐาน)

$$= (A_1 \triangledown B_1) \oplus (A_2 \triangledown B_2) \oplus \cdots \oplus (A_n \triangledown B_n) \oplus (A_{n+1} \triangledown B_{n+1})$$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $p(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

b) (พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

<u>พิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ $p(k)$ แทนข้อความ

$$(A_1 \oplus B_1) \triangledown (A_2 \oplus B_2) \triangledown \cdots \triangledown (A_k \oplus B_k) = (A_1 \triangledown A_2 \triangledown \cdots \triangledown A_k) \oplus (B_1 \triangledown B_2 \triangledown \cdots \triangledown B_k)$$

ขั้นฐาน : เมื่อ $k=1$ จะได้ $(A_1 \oplus B_1) = A_1 \oplus B_1$ ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

เมื่อ $k=2$ จะได้ $(A_1 \oplus B_1) \triangledown (A_2 \oplus B_2) = (A_1 \triangledown A_2) \oplus (B_1 \triangledown B_2)$

ดังนั้น $p(2)$ เป็นจริง (จากทฤษฎีบท 5.2.4 สมบัติผลจอยน์แบบผสม)

ขั้นอุปนัย : ให้ $n \in \mathbb{N}$ สมมติ $p(2), p(3), \ldots, p(n)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$(A_1 \oplus B_1) \triangledown (A_2 \oplus B_2) \triangledown \cdots \triangledown (A_n \oplus B_n) = (A_1 \triangledown A_2 \triangledown \cdots \triangledown A_n) \oplus (B_1 \triangledown B_2 \triangledown \cdots \triangledown B_n)$$

จะได้ $(A_1 \oplus B_1) \triangledown (A_2 \oplus B_2) \triangledown \cdots \triangledown (A_{n+1} \oplus B_{n+1})$

$= [(A_1 \oplus B_1) \triangledown (A_2 \oplus B_2) \triangledown \cdots \triangledown (A_n \oplus B_n)] \triangledown (A_{n+1} \oplus B_{n+1})$

$= [(A_1 \triangledown A_2 \triangledown \cdots \triangledown A_n) \oplus (B_1 \triangledown B_2 \triangledown \cdots \triangledown B_n)] \triangledown (A_{n+1} \oplus B_{n+1})$

(จากสมมติฐาน)

$= [(A_1 \triangledown A_2 \triangledown \cdots \triangledown A_n) \triangledown A_{n+1} \oplus (B_1 \triangledown B_2 \triangledown \cdots \triangledown B_n) \triangledown B_{n+1}]$

(จากทฤษฎีบท 5.2.4 สมบัติผลจอยน์แบบผสม)

$= (A_1 \triangledown A_2 \triangledown \cdots \triangledown A_n \triangledown A_{n+1}) \oplus (B_1 \triangledown B_2 \triangledown \cdots \triangledown B_n \triangledown B_{n+1})$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $p(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

<u>ทฤษฎีบท 5.2.6</u> ถ้า $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ เป็นเมทริกซ์แบบสมมาตร แล้ว $A \oplus B$ เป็นเมทริกซ์แบบสมมาตร

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A = [a_{ij}] \in M_n(L)$ และ $B = [b_{ij}] \in M_m(L)$

$$(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T = A \oplus B$$

ดังนั้น $A \oplus B$ เป็นเมทริกซ์แบบสมมาตร

<u>บทแทรก 5.2.7</u> ถ้า $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ แล้ว
$\mathrm{tr}(A \oplus B) = \mathrm{tr}(A) \vee \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B \oplus A)$

<u>พิสูจน์</u> $\mathrm{tr}(A \oplus B) = \bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(a_{ii} \vee B)$

$= \bigvee_{i=1}^{n} (a_{ii} \vee \mathrm{tr}(B))$ โดยทฤษฎีบท 3.7.1 ข้อ 6

$$= \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_{ii} \right) \vee \mathrm{tr}(B)$$

$$= \mathrm{tr}(A) \vee \mathrm{tr}(B)$$

$$= \mathrm{tr}(B) \vee \mathrm{tr}(A)$$

$$= \mathrm{tr}(B \oplus A)$$

ดังนั้น $\mathrm{tr}(A \oplus B) = \mathrm{tr}(A) \vee \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B) \vee \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B \oplus A)$

<u>**ตัวอย่าง**</u> ถ้า $A\in M_{m,n}(L)$ และ $B\in M_{n,m}(L)$ แล้ว $\mathrm{tr}(A\oplus B)\neq \mathrm{tr}(B\oplus A)$ ในกรณีทั่วไป

กำหนดให้ $L=(P(\mathbb{N}),\cap,\cup,-^{c},\varnothing,\mathbb{N})$

เรานิยาม $X\wedge Y=X\cap Y$ และ $X\vee Y=X\cup Y$ สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(\mathbb{N})$

ให้ $A=\begin{bmatrix}\{1,2\} & \{3,4,5,...\}\\ \{7,8\} & \{10,11\}\\ \{12,13\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\in M_{3,2}(L)$

และ $B=\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$

จะได้ $A\oplus B \quad =\begin{bmatrix}\{1,2\} & \{3,4,5,...\}\\ \{7,8\} & \{10,11\}\\ \{12,13\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\{1,2\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix} & \{3,4,5,...\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\\ \{7,8\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix} & \{10,11\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\\ \{12,13\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix} & \{14,15,16,...\}\vee\begin{bmatrix}\{1\} & \{2\} & \varnothing\\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\{1,2\}\cup\{1\} & \{1,2\}\cup\{2\} & \{1,2\}\cup\varnothing\\ \{1,2\}\cup\{10,11\} & \{1,2\}\cup\{20\} & \{1,2\}\cup\{14,15,16,...\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{3,4,5,...\}\cup\{1\} & \{3,4,5,...\}\cup\{2\} & \{3,4,5,...\}\cup\varnothing\\ \{3,4,5,...\}\cup\{10,11\} & \{3,4,5,...\}\cup\{20\} & \{3,4,5,...\}\cup\{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\{7,8\}\cup\{1\} & \{7,8\}\cup\{2\} & \{7,8\}\cup\varnothing\\ \{7,8\}\cup\{10,11\} & \{7,8\}\cup\{20\} & \{7,8\}\cup\{14,15,16,...\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{10,11\}\cup\{1\} & \{10,11\}\cup\{2\} & \{10,11\}\cup\varnothing\\ \{10,11\}\cup\{10,11\} & \{10,11\}\cup\{20\} & \{10,11\}\cup\{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\{12,13\}\cup\{1\} & \{12,13\}\cup\{2\} & \{12,13\}\cup\varnothing\\ \{12,13\}\cup\{10,11\} & \{12,13\}\cup\{20\} & \{12,13\}\cup\{14,15,16,...\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{14,15,16,...\}\cup\{1\} & \{14,15,16,...\}\cup\{2\} & \{14,15,16,...\}\cup\varnothing\\ \{14,15,16,...\}\cup\{10,11\} & \{14,15,16,...\}\cup\{20\} & \{14,15,16,...\}\cup\{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\{1,2\} & \{1,2\} & \{1,2\} & \{1,3,4,5,...\} & \{2,3,4,...\} & \{3,4,5,...\}\\ \{1,2,10,11\} & \{1,2,20\} & \{1,2,14,15,16,...\} & \{3,4,5,...\} & \{3,4,5,...\} & \{3,4,5,...\}\\ \{1,7,8\} & \{2,7,8\} & \{7,8\} & \{1,10,11\} & \{2,10,11\} & \{10,11\}\\ \{7,8,10,11\} & \{7,8,20\} & \{7,8,14,15,16,...\} & \{10,11\} & \{10,11,20\} & \{10,11,14,15,16,...\}\\ \{1,12,13\} & \{2,12,13\} & \{12,13\} & \{1,14,15,16,...\} & \{2,14,15,16,...\} & \{14,15,16,...\}\\ \{10,11,12,13\} & \{12,13,20\} & \{12,13,14,...\} & \{10,11,14,15,16,...\} & \{14,15,16,...\} & \{14,15,16,...\}\end{bmatrix}\in M_6(L)$$

$\mathrm{tr}(A\oplus B)=\{1,2\}\vee\{1,2,20\}\vee\{7,8\}\vee\{10,11\}\vee\{2,14,15,16,...\}\vee\{14,15,16,...\}$

$=\{1,2\}\cup\{1,2,20\}\cup\{7,8\}\cup\{10,11\}\cup\{2,14,15,16,...\}\cup\{14,15,16,...\}=\{1,2,7,8,10,11,14,15,16,...\}$

$$B \oplus A = \begin{bmatrix} \{1\} & \{2\} & \varnothing \\ \{10,11\} & \{20\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{1\} \vee \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \{2\} \vee \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \varnothing \vee \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} \\ \{10,11\} \vee \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \{20\} \vee \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \{14,15,16,\dots\} \vee \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \{1\} \cup \{1,2\} & \{1\} \cup \{3,4,5,\dots\} \\ \{1\} \cup \{7,8\} & \{1\} \cup \{10,11\} \\ \{1\} \cup \{12,13\} & \{1\} \cup \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \{2\} \cup \{1,2\} & \{2\} \cup \{3,4,5,\dots\} \\ \{2\} \cup \{7,8\} & \{2\} \cup \{10,11\} \\ \{2\} \cup \{12,13\} & \{2\} \cup \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \varnothing \cup \{1,2\} & \varnothing \cup \{3,4,5,\dots\} \\ \varnothing \cup \{7,8\} & \varnothing \cup \{10,11\} \\ \varnothing \cup \{12,13\} & \varnothing \cup \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \{10,11\} \cup \{1,2\} & \{10,11\} \cup \{3,4,5,\dots\} \\ \{10,11\} \cup \{7,8\} & \{10,11\} \cup \{10,11\} \\ \{10,11\} \cup \{12,13\} & \{10,11\} \cup \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \{20\} \cup \{1,2\} & \{20\} \cup \{3,4,5,\dots\} \\ \{20\} \cup \{7,8\} & \{20\} \cup \{10,11\} \\ \{20\} \cup \{12,13\} & \{20\} \cup \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \{14,15,16,\dots\} \cup \{1,2\} & \{14,15,16,\dots\} \cup \{3,4,5,\dots\} \\ \{14,15,16,\dots\} \cup \{7,8\} & \{14,15,16,\dots\} \cup \{10,11\} \\ \{14,15,16,\dots\} \cup \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \cup \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{1,3,4,5,\dots\} & \{1,2\} & \{2,3,4,\dots\} & \{1,2\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{1,7,8\} & \{1,10,11\} & \{2,7,8\} & \{2,10,11\} & \{7,8\} & \{10,11\} \\ \{1,12,13\} & \{1,14,15,16,\dots\} & \{2,12,13\} & \{2,14,15,16,\dots\} & \{12,13\} & \{14,15,16,\dots\} \\ \{1,2,10,11\} & \{3,4,5,\dots\} & \{1,2,20\} & \{3,4,5,\dots\} & \{1,2,14,15,16,\dots\} & \{3,4,5,\dots\} \\ \{7,8,10,11\} & \{10,11\} & \{7,8,20\} & \{10,11,20\} & \{7,8,14,15,16,\dots\} & \{10,11,14,15,16,\dots\} \\ \{10,11,12,13\} & \{10,11,14,15,16,\dots\} & \{12,13,20\} & \{14,15,16,\dots\} & \{12,13,14,\dots\} & \{14,15,16,\dots\} \end{bmatrix} \in M_6(L)$$

$$\mathrm{tr}(B \oplus A) = \{1,2\} \vee \{1,10,11\} \vee \{2,12,13\} \vee \{3,4,5,\dots\} \vee \{7,8,14,15,16,\dots\} \vee \{14,15,16,\dots\}$$

$$= \{1,2\} \cup \{1,10,11\} \cup \{2,12,13\} \cup \{3,4,5,\dots\} \cup \{7,8,14,15,16,\dots\} \cup \{14,15,16,\dots\} = \{1,2,3,\dots\}$$

ดังนั้น $\mathrm{tr}(A \oplus B) \neq \mathrm{tr}(B \oplus A)$

บทที่ 6

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผล

เราให้นิยามผลมีทโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนขึ้น และพิจารณาความเข้ากันได้ของผลมีทดังกล่าวกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตต่าง ๆ จึงทำให้เกิดสมบัติหลายอย่างที่น่าสนใจ ดังนี้

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
- การแจกแจงทางซ้าย และทางขวาเหนือการจอยน์
- ความเข้ากันได้กับการมีทด้วยสเกลาร์
- ความเข้ากันได้กับการสลับเปลี่ยน
- สมบัติผลมีทแบบผสม
- การคงสภาพเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง เมทริกซ์ทแยงมุม และเมทริกซ์สมมาตร
- การแจกแจงทางขวาเหนือผลบวกตรง
- ความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทโครเนคเคอร์กับผลจอยน์โครเนคเคอร์ ในรูปกฎของเดอมอร์แกน

เราให้นิยามผลจอยน์โครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนขึ้น และพิจารณาความเข้ากันได้ของผลจอยน์ดังกล่าวกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตต่าง ๆ จึงทำให้เกิดสมบัติหลายอย่างที่น่าสนใจ ดังนี้

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
- การแจกแจงทางซ้าย และทางขวาเหนือการมีท
- ความเข้ากันได้กับการจอยน์ด้วยสเกลาร์
- ความเข้ากันได้กับการสลับเปลี่ยน
- สมบัติผลจอยน์แบบผสม
- การคงสภาพเมทริกซ์สมมาตร

- ความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทโครเนคเคอร์กับผลจอยน์โครเนคเคอร์ ในรูปกฎของเดอมอร์แกน

6.2 ข้อเสนอแนะ

จากที่เราให้นิยามผลมีทโครเนคเคอร์ และผลจอยน์โครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน พบว่ามีบางสมบัติที่ยังคงเหมือนกันอยู่ และบางสมบัติที่แตกต่างกัน เช่น การคงสภาพเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง เมทริกซ์ทแยงมุม และการแจกแจงทางขวาเหนือผลบวกตรง เนื่องจากสมบัติดังกล่าวของผลจอยน์โครเนคเคอร์ไม่เป็นจริง ดังนั้นผลมีทโครเนคเคอร์มีสมบัติที่สามารถนำไปใช้ได้มากกว่า

เอกสารอ้างอิง

[1] Thomas Donnellan. **Lattice Theory.** New York: Pergamon Press Inc.; 1968. p. 43-52

[2] Zabeh, L.: Fuzzy sets. Information and Control 8, 338-353 (1965)

[3] Broxson, Bobbl Jo, “The Kronecker Product” (2006). *UNF Theses and Dissertations*. Paper 25. http://digitalcommons.unf.edu/etd/25