จำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ
ACHROMATIC NUMBERS OF STAR FLOWER PLANAR GRAPH

ปกรณ์ ภัทรมนัส
ศิรนันท์ ศรีนนท์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2561

ACHROMATIC NUMBERS OF STAR FLOWER PLANAR GRAPH

PAKORN PHATTHARAMANAT
SIRANAN SRINON

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2018

หัวข้อปัญหาพิเศษ	จำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ Achromatic Numbers of Star Flower Planar Graph
ชื่อนักศึกษา	นายปกรณ์ ภัทรมนัส รหัสนักศึกษา 58050100 นายศิรนันท์ ศรีนนท์ รหัสนักศึกษา 58050154
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.เดชา สมนะ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการ	
ผศ.ดร.เดชา สมนะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	จำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ
ชื่อนักศึกษา	นายปกรณ์ ภัทรมนัส รหัสนักศึกษา 58050100
	นายศิรนันท์ ศรีนนท์ รหัสนักศึกษา 58050154
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.เดชา สมนะ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

บทคัดย่อ

จำนวนอโครมาติกของกราฟ G แทนด้วยสัญลักษณ์ $\Psi(G)$ คือจำนวนเต็มบวก c ที่มากสุดที่สามารถระบายสีสมบูรณ์ c สี ให้กับกราฟ G ได้ ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ศึกษาจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ และขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ นอกจากนี้ได้พัฒนาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบจากงานวิจัย [7] และ [9] และยังได้จำนวนรงคเลขของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ ดังนี้

$$\chi\left(S_{n,k}\right)=\begin{cases}2 & \text{; เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคู่}\\ 3 & \text{; เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคี่}\end{cases}$$

คำสำคัญ : การระบายสีสมบูรณ์ กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ จำนวนอโครมาติก จำนวนรงคเลข

Title	Achromatic Numbers of Star Flower Planar Graph
Students	Mr.Pakorn Phattharamanat Student ID 58050100
	Mr.Siranun Srinon Student ID 58050154
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2018
Advisor	Assist.Prof.Dr.Decha Samana
Co-advisor	Dr.Wannaporn Sanprasert

Abstract

Achromatic number of graph G denoted by $\Psi(G)$ is the maximum integer c which there is complete coloring c in graph G. In this special problem, we study the achromatic number of star flower planar graph $S_{n,k}$ and find bounds of achromatic number star flower planar graph. Moreover we improve the bound of the star flower planar graph in the research [7], [9] and have chromatic number of star flower planar graph as following

$$\chi(S_{n,k}) = \begin{cases} 2 \text{ ; if } k \text{ is even} \\ 3 \text{ ; if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

Keyword: Achromatic Number, chromatic number, complete coloring, star flower planar graph

กิตติกรรมประกาศ

กิตติกรรมประกาศในปัญหาพิเศษ เรื่อง จำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.เดชา สมนะ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษและ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษร่วมฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของ ปัญหาพิเศษฉบับนี้

กราบขอบพระคุณ รศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์ และ ผศ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ประธานกรรมการและกรรมการสอบปัญหาพิเศษครั้งนี้ที่ให้คำแนะนำในการแก้ปัญหาต่าง ๆ และขอขอบคุณสถานที่ที่อำนวยความสะดวกในการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้

หากปัญหาพิเศษฉบับนี้มีประโยชน์และคุณค่าทางการศึกษาต่อผู้อื่น คณะผู้ศึกษาขอยกความดีทั้งหมดแด่อาจารย์ ผศ.ดร.เดชา สมนะ และ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ซึ่งหากปัญหาพิเศษฉบับนี้มีความบกพร่องประการใด คณะผู้ศึกษาขอน้อมรับความผิดพลาดไว้แต่เพียงผู้เดียว

ปกรณ์ ภัทรมนัส
ศิรนันท์ ศรีนนท์

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... ข
กิตติกรรมประกาศ .... ค
สารบัญ .... ง
สารบัญตาราง .... ฉ
สารบัญรูป .... ช
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ 1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ 2
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ 3
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 3
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน 3
1.6 แผนการและระยะเวลาในการดำเนินงาน 4
บทที่ 2 บทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้น 5
2.1 ความรู้เบื้องต้นในทฤษฎีกราฟ 5
2.2 กราฟลักษณะพิเศษ 8
2.3 กราฟเชื่อมโยง 13
2.4 การระบายสี 15
บทที่ 3 ผลการวิจัยและอภิปรายผล 17
3.1 การทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงสุดเพื่อหา $\Psi\left(S_{n,1}\right)$ 17
3.2 การหาค่าขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 22
3.2.1 ค่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 22
3.2.2 ค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 26
3.2.2.1 ค่าขอบเขตบนจากการใช้ค่า Randić index ของกราฟ 26
3.2.2.2 ค่าขอบเขตบนจากขนาดของกราฟ G 30
3.2.2.3 เงื่อนไขของกราฟระบายสีสมบูรณ์ของกราฟ $S_{n,k}$ 35

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 4 สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ 41
4.1 สรุปผลวิจัย 41
4.1.1 ค่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 41
4.1.2 ค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 41
4.2 ข้อเสนอแนะ 42
เอกสารอ้างอิง 43

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

3.1 แสดงค่าที่ได้จากการทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงสุดของกราฟ $S_{n,k}$ 21

3.2 แสดงค่า $2R\left(S_{n,1}\right)$ เมื่อ $n=1,2,3,...,20$ 27

3.3 แสดงค่า $2R\left(S_{n,2}\right)$ เมื่อ $n=1,2,3,...,20$ 28

3.4 แสดงค่า $2R\left(S_{n,3}\right)$ เมื่อ $n=1,2,3,...,20$ 29

3.5 แสดงค่าเขตบนจากอสมการ $\Psi\left(S_{n,1}\right)\leq\left\lfloor\frac{1+\sqrt{24n+1}}{2}\right\rfloor$ เมื่อ $n=1,2,3,...,12$ 32

3.6 แสดงค่าเขตบนจากอสมการ $\Psi\left(S_{n,2}\right)\leq\left\lfloor\frac{1+\sqrt{32n+1}}{2}\right\rfloor$ เมื่อ $n=1,2,3,...,12$ 33

3.7 แสดงค่าเขตบนจากอสมการ $\Psi\left(S_{n,3}\right)\leq\left\lfloor\frac{1+\sqrt{40n+1}}{2}\right\rfloor$ เมื่อ $n=1,2,3,...,12$ 34

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

1.1 ลวดลายของพื้นภายในมัสยิด....2
2.1 กราฟที่มีรูปบ่วงและมีเส้นหลายชั้น....6
2.2 กราฟ H 6
2.3 แผนภาพแสดง $\deg_G\left(V\left(G\right)\right)$ 7
2.4 กราฟ G_1 8
2.5 กราฟบริบูรณ์อันดับ $1,2,3,4,5$ 9
2.6 กราฟสองส่วน 9
2.7 กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{3,4}$ 9
2.8 กราฟดาว $K_{1,5}$ 9
2.9 กราฟวัฏจักรอันดับ $3,4,5,6$ 10
2.10 กราฟเชิงระนาบ K_4 10
2.11 รูปแบบทั่วไปของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ 10
2.12 การสร้างกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,1}$ 11
2.13 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{5,3}$ 11
2.14 รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,1}$ 12
2.15 รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,2}$ 12
2.16 รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,3}$ 13
2.17 การระบายสีจุดยอดของกราฟ $S_{3,1}$ 15
2.18 การระบายสีสมบูรณ์กราฟ C_{10} และ C_{11} 16
3.1 แสดงการระบายสี 4 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{5,1}$ 17
3.2 แสดงการระบายสี 5 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{5,1}$ 18
3.3 แสดงการระบายสี 6 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{5,1}$ 18
3.4 แสดงการระบายสี 4 สี และ 5 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{3,1}$ และ $S_{4,1}$ 19
3.5 แสดงการระบายสี 5 สี และ 6 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{5,1}$ และ $S_{6,1}$ 19
3.6 แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{7,1}$ 19
3.7 แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{8,1}$ 20
3.8 แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{9,1}$ 20
3.9 แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{10,1}$ 21

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ หน้า

3.10 แผนภาพแสดงการหา $\chi(C_3)$ และ $\Psi(C_3)$ 22
3.11 แผนภาพแสดงการหา $\chi(S_{5,1})$ และ $\Psi(S_{5,1})$ 22
3.12 การระบายสีกราฟ $S_{n,1}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,1})$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่.......... 24
3.13 การระบายสีกราฟ $S_{n,1}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,1})$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่.......... 24
3.14 การระบายสีกราฟ $S_{n,k}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,k})$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่และ n เป็นจำนวนคี่.......... 25
3.15 การระบายสีกราฟ $S_{n,k}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,k})$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่และ n เป็นจำนวนคู่.......... 25
3.16 การระบายสีกราฟ $S_{n,k}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,k})$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่.......... 26
3.17 แสดงการระบายสีสมบูรณ์ของ $S_{10,1}$ 38
3.18 แสดงการระบายสีสมบูรณ์ของ $S_{5,2}$ 39
3.19 แสดงการระบายสีสมบูรณ์ของ $S_{3,3}$ 40

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

จุดเริ่มต้นของทฤษฎีกราฟเริ่มขึ้นในปี ค.ศ. 1736 โดย เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonard Euler) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ ได้ค้นพบวิธีในการตอบปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์เบิร์ก (Seven Bridges of Königsberg Problem) และได้มีการตีพิมพ์บทความตอบปริศนาดังกล่าว นอกจากนั้นยังได้วางรูปแบบในการตอบคำถามในลักษณะนี้และแนะนำแนวคิดซึ่งเป็นที่รู้จักกันในปัจจุบันว่า กราฟออยเลอร์เลียน (Eulerian graph) นับต่อจากนั้น ทฤษฎีกราฟได้ถูกพัฒนาเรื่อยมาจนกลายเป็นสาขาหนึ่งในคณิตศาสตร์

กราฟมักถูกเสนอในลักษณะของรูปภาพ โดยใช้จุดแทนจุดยอดแต่ละจุด และลากเส้นเชื่อมถึงกันระหว่างจุดยอด เนื่องจากกราฟหนึ่ง ๆ สามารถเขียนออกมาได้หลายแบบ เราจึงไม่ควรสับสน เพราะประเด็นที่สำคัญของกราฟนั้นมีแค่ว่าจุดยอดใด เชื่อมต่ออยู่กับจุดยอดใด ด้วยเส้นเชื่อมกี่เส้น ไม่ใช่วิธีการวาดมันออกมา แต่ในทางปฏิบัติแล้ว การจะตัดสินว่ากราฟที่วาดออกมาสองกราฟนั้นมาจากกราฟเดียวกัน ในบางกรณีการวาดกราฟบางแบบอาจมีความเหมาะสมซึ่งทำให้เข้าใจได้ง่ายกว่าแบบอื่น

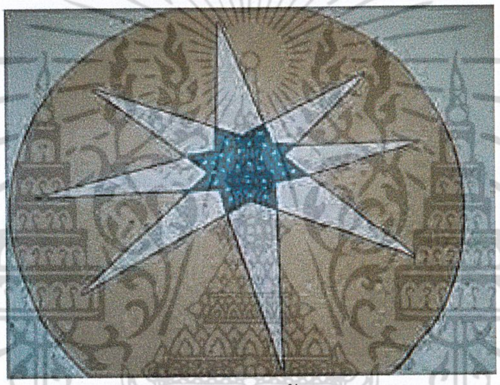
การพัฒนาของทฤษฎีกราฟมาอย่างต่อเนื่องนั้นทำให้เกิดนิยามของ รงคเลข (Chromatic number) ขึ้น โดยเราจะแทนรงคเลขของกราฟ G ด้วยสัญลักษณ์ $\chi(G)$ ซึ่งการที่เราจะหาว่ารงคเลขของกราฟ G จะมีค่าเท่ากับ m จะต้องประกอบไปด้วย 2 ส่วนกล่าวคือ จะต้องแสดงว่าการระบายสีจุดยอดทุก ๆ จุดบนกราฟ G ได้เท่ากับ m สี และเราไม่สามารถระบายสีให้จุดยอดทุก ๆ จุดบนกราฟ G ให้ได้น้อยกว่า m สี ภายใต้เงื่อนไข หากจุด u ประชิด (adjacent) กับจุด v แล้วจุด u จะถูกระบายด้วยสีที่แตกต่างกับสีที่ระบายของจุด v

ต่อมาในปี ค.ศ. 1852 ฟรานซิส กัทธรี (Francis Guthrie) ได้ตั้งปัญหาสี่สี (Four color problem) เพื่อศึกษาความเป็นไปได้ที่จะใช้สีเพียง 4 สี เพื่อระบายให้กับประเทศต่าง ๆ บนแผนที่ใด ๆ โดยที่ประเทศเพื่อนบ้านจะใช้สีที่แตกต่างกัน จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1976 ปัญหาดังกล่าว ได้ถูกพิสูจน์ โดย แอพเพล (Apple) และฮาเคน (Haken) ซึ่งทั้งสองไดแสดงวาสามารถระบายสีแผนที่ทุก ๆ แผนที่ไดโดยใชสี 4 สี การพิสูจน์ปัญหานี้เขาได แบงปญหาออกเปนเกือบ 2,000 กรณี ซึ่งแบงตามจำนวนของการจัดเรียงประเทศในแผนที่และในการหาวิธีที่เปนไปไดของการระบายสีของการจัดเรียงหลาย ๆ แบบนั้น เขาได้ใช้คอมพิวเตอรเขาช่วย และหลังจากที่ คอมพิวเตอร์ใช้เวลาคำนวณกว่า 1,200 ชั่วโมงแล้วเขาจึงสรุปว่าคำตอบนี้เปนจริง ซึ่งทำให้เกิดการวิพากษ์วิจารณ์อย่างกว้างขวาง อย่างไรก็ตามจากการแก้ปัญหานี้ ทำให้มีการสร้างแนวคิดและบทนิยามพื้นฐานในทฤษฎีกราฟเพิ่มขึ้นอย่างมาก

อีกทั้งในปี ค.ศ. 1968 แฟรงค์ ฮาร์รี (Frank Harrary) ได้ นิยามถึงจำนวนของสี ซึ่งเกิดจากการระบายสีสมบูรณ์ (complete m-coloring) เมื่อเราสามารถกำหนดสีให้กับจุดยอดทั้งหมดใน G

โดยไม่ใช้สีเกิน m สี แบบใหม่ขึ้นโดยที่มีความซับซ้อนกว่า รงคเลข (Chromatic number) ขึ้นมาซึ่งเรียกว่า (Achromatic number) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Psi(G)$

และในงานวิจัยที่มีชื่อว่า การนับจำนวนต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ [5] (Counting the Number of Spanning Trees in the Star Flower Planar Map) ซึ่งถูกตีพิมพ์ขึ้นมาใน ค.ศ. 2012 ได้มีการนำเสนอ กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ (Star Flower Planar Graph) ซึ่งมีลักษณะของกราฟคล้ายคลึงกับลวดลายของพื้นภายในมัสยิด ซึ่งมีความงดงามและแสดงให้เป็นศิลปะที่สามารถจำลองด้วยโครงสร้างของจุดยอดและเส้นเชื่อม อันเป็นส่วนประกอบสำคัญของทฤษฎีกราฟที่ได้กล่าวมาในช่วงต้น ทำให้คณะผู้วิจัยเกิดความสนใจในการศึกษาหาจำนวนอโครมาติกโดยเริ่มต้นจากการหาความสัมพันธ์ระว่างจำนวนจุดยอดและจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบขึ้นมาซึ่งเป็นที่มาของการจัดทำปัญหาพิเศษเล่มนี้ขึ้นมา



รูป 1.1 ลวดลายของพื้นภายในมัสยิด

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวข้องกับการหาจำนวนอโครมาติก

1.2.2 เพื่อศึกษาบทนิยาม และสมบัติของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

1.2.3 เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อม และจำนวนอโครมาติกของ กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.2.4 เพื่อศึกษาบทนิยาม และทฤษฎีบทของจำนวนอโครมาติก

1.2.5 เพื่อศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

1.2.6 เพื่อศึกษาจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.3 ขอบเขตการศึกษา

1.3.1 ศึกษาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ และหาจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3$

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้ความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวข้องกับการหาจำนวนอโครมาติก

1.4.2 ได้นิยามและสมบัติของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

1.4.3 ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อม และจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.4.4 ได้ขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.4.5 ได้จำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาลักษณะความสัมพันธ์ของจุดยอด และเส้นเชื่อมบนกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.5.2 ศึกษาวิธีการหาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.5.3 ศึกษาวิธีการหาจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.5.4 ศึกษาการพิสูจน์เพื่อหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.5.5 หาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.5.6 หาจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$

1.5.7 วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้

1.5.8 จัดทำรูปเล่มและนำเสนอ

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

การดำเนินงาน	ระยะเวลาการดำเนินงาน									
	2561					2562				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
ตั้งหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจศึกษา										
ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นและทฤษฎีกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ										
วิเคราะห์และสังเคราะห์ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ										
ทดสอบคุณสมบัติต่าง ๆ ซึ่งได้จากการวิเคราะห์สังเคราะห์ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ										
สรุปและวิเคราะห์ผล										
จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษและเตรียมนำเสนอ										
นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2
นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้เบื้องต้นในทฤษฎีกราฟ

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและสมบัติทั่วไปของกราฟที่จำเป็นต้องนำไปใช้ในบทที่ 3 โดยจะกล่าวถึง บทนิยาม ทฤษฎีบท และตัวอย่าง[3]ที่สำคัญพอสังเขป

บทนิยาม 2.1.1 กราฟ (graph) G ประกอบด้วยเซตจำกัด $V(G)$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และเซต $E(G)$ ซึ่งเป็นเซตของ**คู่ไม่เป็นอันดับ (unordered pair)** ของสมาชิกที่แตกต่างกันใน $V(G)$ โดยที่เซต $E(G)$ อาจเป็นเซตว่างก็ได้

- สมาชิกของเซต $V(G)$ เรียกว่า **จุดยอด** หรือ **จุด** (vertex)

- สมาชิกของเซต $E(G)$ เรียกว่า **เส้นเชื่อม** หรือ **เส้น** (edge)

- ถ้า $|V(G)| = n$ แล้วกราฟ G เป็นกราฟที่มี**อันดับ (order)** n นั่นคือ กราฟ G มีจุดยอดเป็นจำนวน n จุด

- ถ้า $|E(G)| = m$ แล้วกราฟ G เป็นกราฟที่มี**ขนาด (size)** m นั่นคือ กราฟ G มีเส้นเชื่อมเป็นจำนวน m เส้น

หมายเหตุ

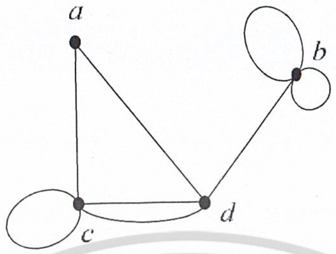
1. นอกจากสัญลักษณ์ G จะใช้แทนชื่อกราฟแล้ว สัญลักษณ์อื่นก็นิยมใช้แทนชื่อกราฟด้วย เช่น $G', G'', G_1, G_2, H, J, K$

2. ถ้า $\{u,v\}$ เป็นเส้นเชื่อมของกราฟแล้ว โดยบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า $u \neq v$ และ $\{u,v\}$ เป็นคู่ไม่เป็นอันดับ นั่นคือ $\{u,v\} = \{v,u\}$ ดังนั้น เพื่อความสะดวกเส้นเชื่อมของกราฟสามารถเขียนแทนด้วย uv หรือ vu

3. เนื่องจากเซตของจุดยอดในกราฟไม่เป็นเซตว่าง ดังนั้น อันดับของกราฟมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 และสำหรับกราฟที่มีอันดับ 1 (นั่นคือ กราฟที่มีจุดยอดเพียง 1 จุด) จะเรียกว่า **กราฟชัด (trivial graph)** และเรียกกราฟที่มีอันดับมากกว่า 1 ว่า **กราฟไม่ชัด (nontrivial graph)**

บทนิยาม 2.1.2 เราเรียกเส้นที่จุดปลายทั้งสองของเส้นเป็นจุดเดียวกันว่า **รูปบ่วง (loop)** และเรียกเส้นตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดคู่เดียวกันว่า **เส้นหลายชั้น (multiple edges)**

ตัวอย่าง 2.1 กราฟในรูป เป็นกราฟที่มีรูปบ่วงและมีเส้นหลายชั้น



รูป 2.1 : กราฟที่มีรูปบ่วงและมีเส้นหลายชั้น

บทนิยาม 2.1.3 เราเรียกกราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้นและไม่มีรูปบ่วงว่า **กราฟอย่างง่าย (simple graph)**

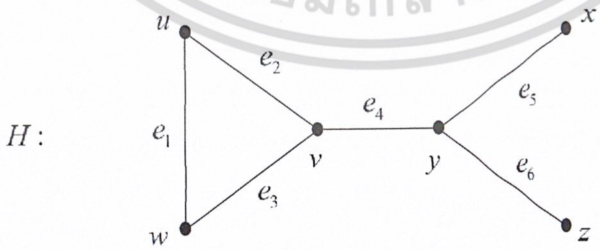
บทนิยาม 2.1.4 ให้ $e = uv$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ G จะกล่าวว่า

- จุดยอด u **ประชิด (adjacent)** กับจุดยอด v
- เส้นเชื่อม e **กระทบ (incident)** กับจุดยอด u หรือกล่าวว่า จุดยอด u **กระทบ**กับเส้นเชื่อม e
- ในทำนองเดียวกัน เส้นเชื่อม e กระทบกับจุดยอด v หรือกล่าวว่า จุดยอด v กระทบกับเส้นเชื่อม e
- เส้นเชื่อม e **เชื่อม (join)** จุดยอด u และจุดยอด v

กำหนดให้ e, f เป็นเส้นในกราฟ G โดยที่ $e \neq f$

- ถ้าเส้นเชื่อม e และ f กระทบกับจุดยอดเดียวกันในกราฟ G และจะกล่าวว่า เส้นเชื่อม e **ประชิด**กับเส้นเชื่อม f

ตัวอย่าง 2.2



รูป 2.2 : กราฟ H

จากรูปเห็นว่า u และ w ประชิดกัน เพราะมีเส้นเชื่อม e_1 และ e_1 กระทบ กับ u และ w

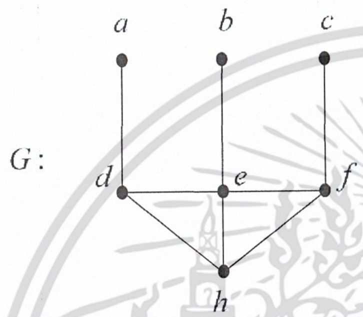
e_1 และ e_2 ประชิดกัน เพราะมีจุดยอด u กระทบ กับ e_1 และ e_2

e_4 เชื่อม จุดยอด v และจุดยอด y

บทนิยาม 2.1.5 ดีกรี (degree) ของจุดยอด ในกราฟ คือจำนวนเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุดยอด v ในกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $\deg v$ หรือ $\deg_G v$ โดยเรียกจุดยอด v ว่า

- **จุดคู่ (even vertex)** ถ้าดีกรีของจุดยอด v เป็นจำนวนคู่
- **จุดคี่ (odd vertex)** ถ้าดีกรีของจุดยอด v เป็นจำนวนคี่
- **จุดเอกเทศ (isolated vertex)** ถ้าดีกรีของจุดยอด v เท่ากับ 0
- **จุดปลาย (end vertex)** ถ้าดีกรีของจุดยอด v เท่ากับ 1

ตัวอย่าง 2.3 ให้ G เป็นกราฟที่แสดงดังรูป



จะได้ว่า $\deg_G(a)=1 \quad \deg_G(e)=4$

$\deg_G(b)=1 \quad \deg_G(f)=3$

$\deg_G(c)=1 \quad \deg_G(h)=3$

$\deg_G(d)=3$

รูป 2.3 : แสดง $\deg_G(V(G))$ เมื่อ $a,b,c,d,e,f,g,h \in V(G)$

บทนิยาม 2.1.6 ดีกรีต่ำสุด (minimum degree) ของกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $\delta(G)$ คือ ดีกรีที่ต่ำที่สุดของจุดยอดเมื่อเปรียบเทียบกับดีกรีจุดยอดทุกจุดในกราฟ G นั่นคือ

$$\delta(G) = \min\{\deg v \mid v \in V(G)\}$$

บทนิยาม 2.1.7 ดีกรีสูงสุด (maximum degree) ของกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $\Delta(G)$ คือ ดีกรีที่สูงที่สุดของจุดยอดเมื่อเปรียบเทียบกับดีกรีจุดยอดทุกจุดในกราฟ G นั่นคือ

$$\Delta(G) = \max\{\deg v \mid v \in V(G)\}$$

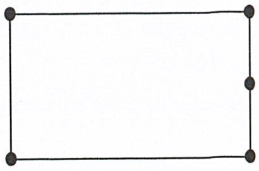
ทฤษฎีบท 2.1.8 กำหนดให้ G เป็นกราฟที่มีขนาด m จะได้ว่า $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m$

การพิสูจน์ เนื่องจากดีกรีของแต่ละจุดยอด v ในกราฟ G คือจำนวนเส้นที่กระทบจุดยอด v และเนื่องจากแต่ละเส้นเชื่อมกระทบกับจุดยอด 2 จุดที่แตกต่างกัน จึงได้ว่า ผลรวมดีกรีของจุดยอดเกิดจากการนับเส้นเชื่อมแต่ละเส้นซ้ำ 2 ครั้ง โดยที่จำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดในกราฟ G เท่ากับขนาดของกราฟ G ดังนั้น ผลรวมดีกรีของจุดในกราฟ G เท่ากับสองเท่าของขนาดของกราฟ G

บทนิยาม 2.1.9[7] **Randić index** ของกราฟ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $R(G)$ คือผลรวมของ $\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}$ สำหรับเส้นเชื่อม uv ทุกเส้นของกราฟ G ซึ่งมีจุดยอด u และ v กระทบกับเส้นเชื่อม uv กล่าวคือ $R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}$

ตัวอย่าง 2.4 แสดงการหาค่า $R(G)$ จากกราฟ G ดังรูป

G_1 :



รูป 2.4 : กราฟ G_1

ดังนั้น $R(G_1)=\frac{1}{\sqrt{2\times 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\times 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\times 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\times 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\times 2}}=\frac{5}{2}$

บทนิยาม 2.1.10 [13] **ฟังก์ชันพื้น (floor function)** ของจำนวนจริง x คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x ค่าของฟังก์ชันพื้นของ x เขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$

บทนิยาม 2.1.11 [13] **ฟังก์ชันเพดาน (ceiling function)** ของจำนวนจริง x คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุด ที่มากกว่าหรือเท่ากับ x ค่าของฟังก์ชันเพดานของ x เขียนแทนด้วย $\lceil x \rceil$

ตัวอย่าง 2.5 $\lfloor 3.4 \rfloor = 3$

$\lfloor 10 \rfloor = 10$

$\lceil 7.9 \rceil = 8$

$\lceil 8.1 \rceil = 9$

2.2 กราฟที่มีชื่อเฉพาะ

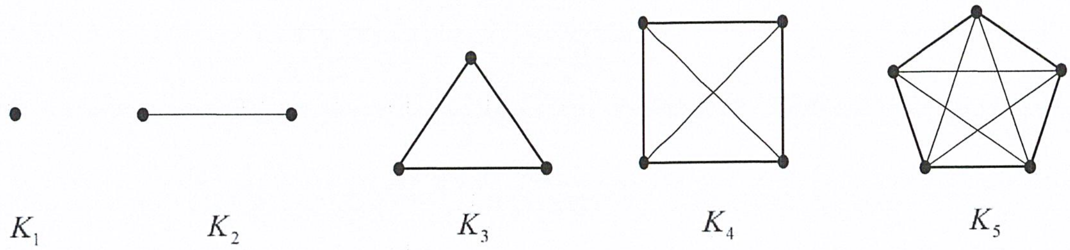
บทนิยาม 2.2.1 กราฟ G เรียกว่า **กราฟปกติ (regular graph)** ถ้ากราฟ G มีดีกรีต่ำสุดเท่ากับดีกรีสูงสุดนั่นคือ $\delta(G)=\Delta(G)$ ถ้ากราฟปกติ G มี $\delta(G)=\Delta(G)=r$ แล้ว กราฟปกติ G เรียกอีกแบบว่า **กราฟปกติ**$-r$ ($r-$ **regular graph**)

ในกรณีกราฟปกติ-3 อาจเรียกชื่อได้อีกอย่างว่า **กราฟทรงลูกบาศก์ (cubic graph)**

บทนิยาม 2.2.2 กราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph) ซึ่งเขียนแทนด้วย K_n คือกราฟที่มีอันดับ n โดยที่ทุก ๆ สองจุดยอดที่แตกต่างกันจะประชิดกัน

กราฟบริบูรณ์ K_n เป็นกราฟที่มีจำนวนเส้นมากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบรรดากราฟที่มีอันดับ n ทั้งหมด โดยมีขนาดเท่ากับ $|E(K_n)|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

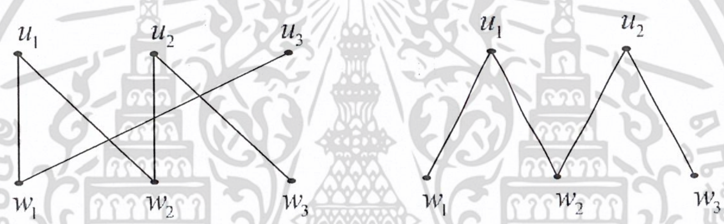
ตัวอย่าง 2.6 กราฟในรูป เป็นกราฟแบบบริบูรณ์อันดับ $1,2,3,4,5$ ตามลำดับ



รูป 2.5 : กราฟบริบูรณ์อันดับ $1,2,3,4,5$

บทนิยาม 2.2.3 กราฟ G เรียกว่า **กราฟสองส่วน (Bipartite graph)** ถ้าเซตของจุดยอด $V(G)$ สามารถแบ่งเป็น 2 เซตย่อย U และ W ที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $U \cap W = \varnothing$ และ $V(G) = U \cup W$ แต่ละเส้นของกราฟ G จะเชื่อมระหว่างจุดยอดในเซต U กับจุดยอดในเซต W เซตย่อย U และ W ที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียกว่า **เซตแบ่งส่วน (partite set)** ของเซต $V(G)$

ตัวอย่าง 2.7

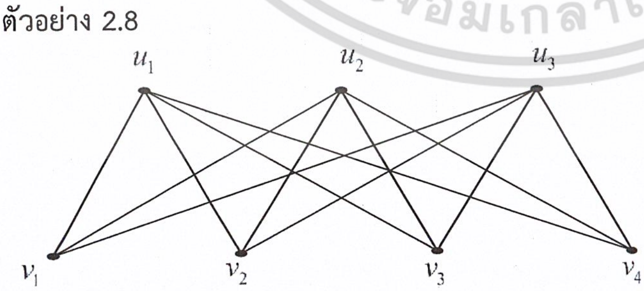


รูป 2.6 : กราฟสองส่วน

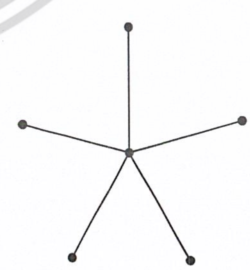
บทนิยาม 2.2.4 กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete bipartite graph) คือกราฟสองส่วนซึ่งมีเซต แบ่งส่วน U และ W ซึ่งจุดแต่ละจุดยอดในเซตแบ่งส่วน U ประชิดกับทุกจุดยอดในเซตแบ่งส่วน W

ถ้า $r = |U| \leq |W| = s$ แล้ว กราฟสองส่วนบริบูรณ์เขียนแทนด้วย $K_{r,s}$ สำหรับกรณีที่ $r = 1$ กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{1,s}$ เรียกว่า **กราฟดาว (Star graph)**

ตัวอย่าง 2.8



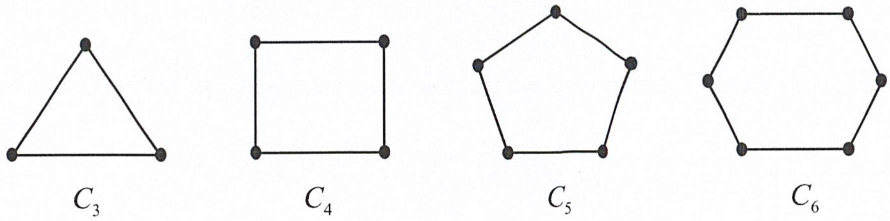
รูป 2.7 : กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{3,4}$



รูป 2.8 : กราฟดาว $K_{1,5}$

บทนิยาม 2.2.5 กราฟวง (cycle) โดยเขียนแทนด้วย C_n เมื่อ $n \geq 3$ คือกราฟที่มีอันดับ n และขนาด n ซึ่งถ้ากำหนดชื่อจุดของกราฟวง C_n เป็น $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n$ แล้วจะได้ว่าเส้นของกราฟวง C_n คือ $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n$ และ v_nv_1

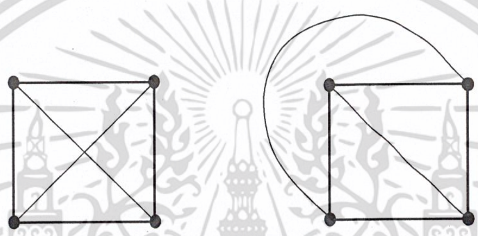
ตัวอย่าง 2.9 แสดงกราฟวัฏจักรที่มี $n = 3, 4, 5, 6$



รูป 2.9 : กราฟวัฏจักรอันดับ $3, 4, 5, 6$

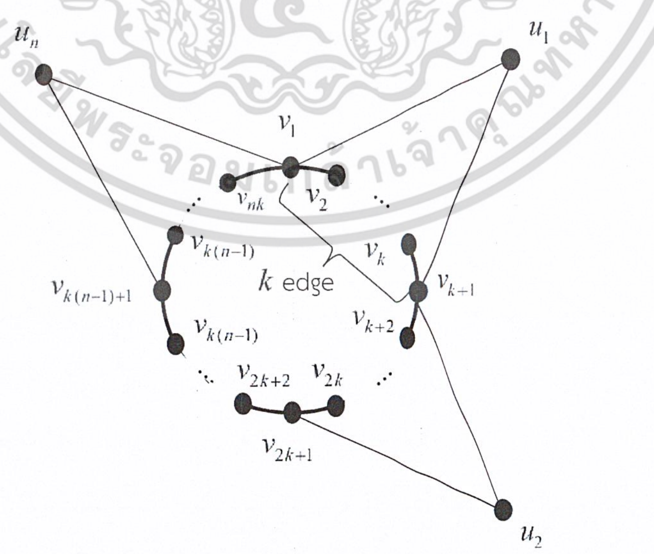
บทนิยาม 2.2.6 กราฟเชิงระนาบ (planar graph) คือกราฟที่สามารถวาดบนระนาบโดยเส้นของกราฟไม่ไขว้ทับกัน (ตัดหรือสัมผัสกัน)

ตัวอย่าง 2.10 แสดงแผนภาพของกราฟเชิงระนาบ K_4



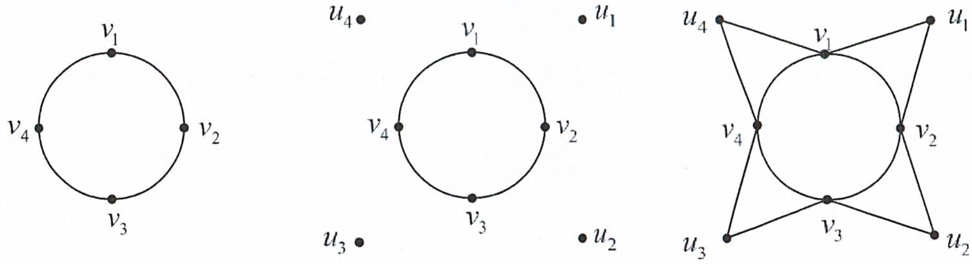
รูป 2.10 : กราฟเชิงระนาบ K_4

บทนิยาม 2.2.7[5] **กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ (Star Flower Planar graph)** $S_{n,k}$ คือกราฟเชิงเดียวที่มี $V(S_{n,k}) = V(C_{nk}) \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ เมื่อ $V(C_{nk}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{nk}\}$ และจุดยอด u_j มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{k(j-1)+1}$ และ v_{kj+1} โดยที่ $j = 1, 2, \ldots, n-1$ และ u_n จะมีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{k(n-1)+1}$ และ v_1



รูป 2.11 : รูปแบบทั่วไปของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$

ในการสร้างกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ สามารถสร้างได้ดังรูป 2.12



รูป 2.12 : การสร้างกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,1}$

ข้อสังเกต

1. กราฟ $S_{n,k}$ จะมีจำนวนของจุดยอดซึ่งแทนด้วย $\left|V\left(S_{n,k}\right)\right| = n(k+1)$ จุด ซึ่งประกอบด้วย

- จุดยอด $v_1, v_{k+1}, v_{2k+1}, \ldots, v_{(n-2)k+1}, v_{(n-1)k+1}$ ซึ่งมีดีกรีเท่ากับ 4 จำนวน n จุด
- จุดยอด v_j ที่ $j \neq 1, k+1, 2k+1, \ldots, (n-2)k+1, (n-1)k+1$ และ จุดยอด u_j ซึ่งมีดีกรีเท่ากับ 2 จำนวน $(k-1)n + n = nk$ จุด

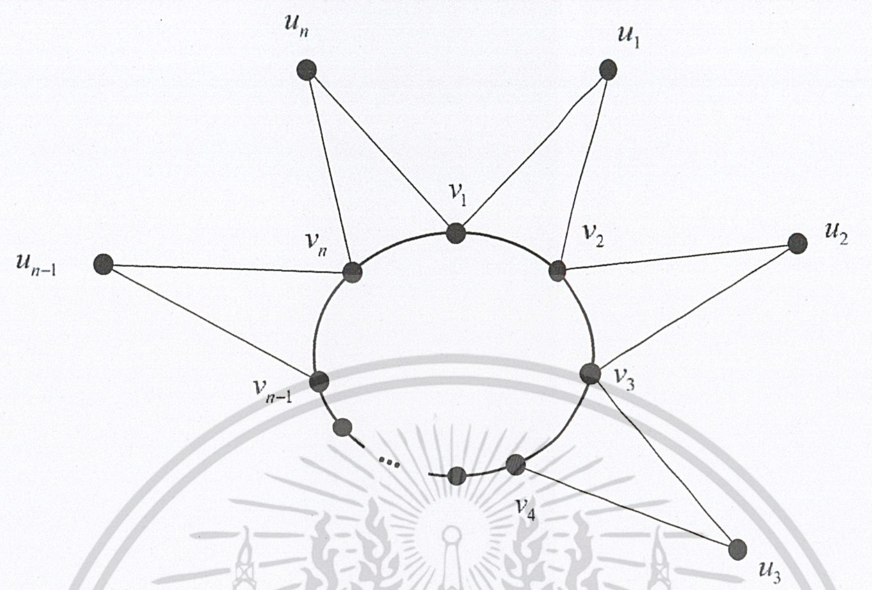
2. กราฟ $S_{n,k}$ จะมีจำนวนของเส้นเชื่อมซึ่งแทนด้วย $\left|E\left(S_{n,k}\right)\right| = n(k+2)$ เส้น

ตัวอย่าง 2.11 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{5,3}$

รูป 2.13 : กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{5,3}$

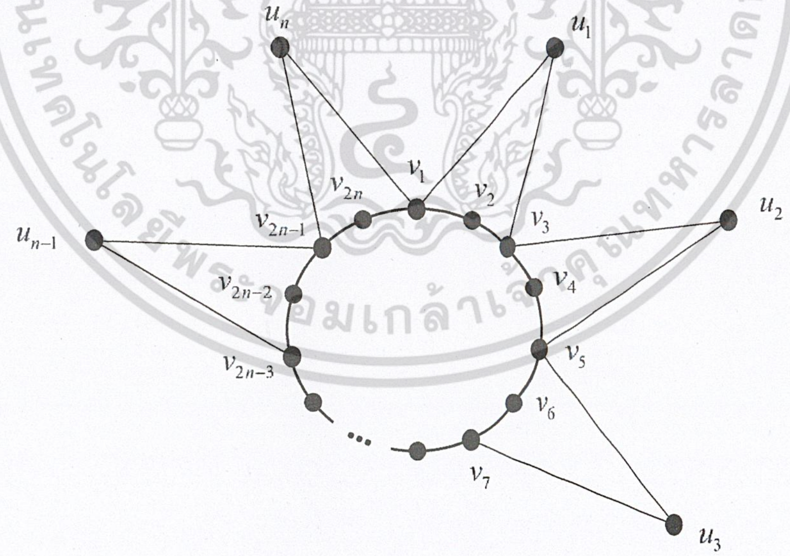
จากรูปที่ 2.13 จะเห็นว่า กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{5,3}$ โดยที่ $n=5$ และ $k=3$ คือกราฟเชิงเดียวที่มี $V(S_{5,3}) = V(C_{15}) \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_5\}$ เมื่อ $V(C_{15}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{15}\}$ และจุดยอด u_j ประชิดกับจุดยอด $v_{3(j-1)+1}$ และ v_{3j+1} โดยที่ $j = 1, 2, \ldots, 4$ และ u_5 มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด v_{13} และ v_1 ซึ่ง $S_{5,3}$ มี $\left|V\left(S_{5,3}\right)\right| = 20$ และ $\left|E\left(S_{5,3}\right)\right| = 25$ จะสังเกตว่าจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 4 มี 5 จุด และจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 2 มี 15 จุด

รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,1}$



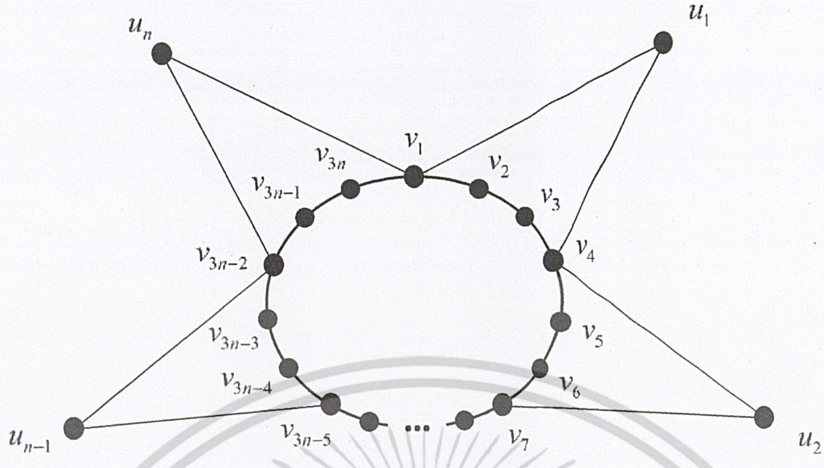
รูป 2.14 : รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,1}$

รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,2}$



รูป 2.15 : รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,2}$

รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,3}$



รูป 2.16 : รูปทั่วไปของกราฟ $S_{n,3}$

2.3 กราฟเชื่อมโยง

บทนิยาม 2.3.1 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดยอดของกราฟ G โดยที่จุดยอด u และ v ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดที่แตกต่างกัน **แนวเดิน** $u-v$ ($u-v$ **walk**) ในกราฟ G คือลำดับของจุดยอดและเส้นเชื่อม โดยที่ แนวเดิน $u-v:u=u_0,e_1,u_1,e_2,u_3,e_3,...,u_{k-1},e_k,u_k=v$ ซึ่งเส้น $e_i=u_{i-1}u_i\in E(G)$ สำหรับแต่ละ i โดยที่ $i\in\{1,2,...,k\}$

ความยาว (length) ของแนวเดิน $u-v$ คือจำนวนเส้นเชื่อมในแนวเดิน $u-v$ โดยทั่วไปแนวเดิน $u-v$ นิยมเขียนเป็นลำดับของจุดเท่านั้น นั่นคือ แนวเดิน $u-v:u=u_0,u_1,u_3,...,u_{k-1},u_k=v$ สำหรับแต่ละ i โดยที่ $i\in\{1,2,...,k\}$ จะได้ว่า เส้นเชื่อม $u_{i-1}u_i\in E(G)$ และกล่าวว่า

- เส้น $u_{i-1}u_i$ อยู่ในแนวเดิน $u-v$ นี้ หรือกล่าวว่า แนวเดิน $u-v$ บรรจุเส้น $u_{i-1}u_i$
- แนวเดิน $u-v$ นี้มีความยาว k
- กราฟ G บรรจุแนวเดิน $u-v$ หรือกล่าวว่า มีแนวเดิน $u-v$ อยู่ในกราฟ G
- จุด u เรียกว่า **จุดเริ่มต้น (beginning vertex)** และจุด v เรียกว่า **จุดสุดท้าย (ending vertex)** ของแนวเดิน $u-v$

หมายเหตุ

1. จุดยอดทั้งหมดในแนวเดิน $u-v:u=u_0,u_1,u_3,...,u_{k-1},u_k=v$ ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดยอดที่แตกต่างกันในกราฟ G แต่อย่างไรก็ตาม เนื่องจากเส้น $u_{i-1}u_i\in E(G)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ i โดยที่ $i\in\{1,2,...,k\}$ จะได้ว่า จุด $u_{i-1}\neq u_i$

2. ถ้าจุดเริ่มต้น u และจุดสุดท้าย v เป็นจุดเดียวกัน นั่นคือ $u=v$ แล้วแนวเดิน $u-v$ เรียกว่า**แนวเดินปิด (closed walk)** แต่ถ้า $u\neq v$ แล้ว แนวเดิน $u-v$ เรียกว่า **แนวเดินเปิด (open walk)**

3. แนวเดิน $u-v:u$ ซึ่งมีความยาว 0 เรียกว่า **แนวเดินชัด (trivial walk)** สำหรับแนวเดิน $u-v$ ที่มีความยาวอย่างน้อย 1 เรียกว่า **แนวเดินไม่ชัด (nontrivial walk)**

บทนิยาม 2.3.2 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดของกราฟ G

รอยเดิน $u-v$ ($u-v$ trail) ในกราฟ G คือแนวเดิน $u-v$ ในกราฟ G ซึ่งไม่มีเส้นเชื่อมในแนวเดินซ้ำกัน

วิถี $u-v$ ($u-v$ parth) ในกราฟ G คือแนวเดิน $u-v$ ในกราฟ G ซึ่งทุก ๆ จุดยอดในแนวเดินต้องแตกต่างกัน โดยรียกจุดในวิถี $u-v$ ซึ่งไม่ใช่จุดเริ่มต้น u และไม่ใช่จุดสุดท้าย v ว่า **จุดภายใน (internal vertex)** ของวิถี $u-v$

หมายเหตุ

1. ในทำนองเดียวกันกับแนวเดิน จะได้ว่า รอยเดิน $u-v$ เรียกว่า **รอยเดินปิด (closed trail)** แต่ถ้า $u \neq v$ แล้ว $u-v$ เรียกว่า **รอยเดินเปิด (open trail)**

ทฤษฎีบท 2.3.3 ถ้ากราฟ G บรรจุแนวเดิน $u-v$ ที่มีความยาว k แล้ว จะได้ว่า มีวิถี $u-v$ ซึ่งมีความยาวไม่เกิน k ในกราฟ G

บทนิยาม 2.3.4 วงจร (circuit) ในกราฟ G คือรอยเดินปิดในกราฟ G ที่มีความยาวอย่างน้อย 3

บทนิยาม 2.3.5 วง (cycle) ในกราฟ G คือวงจรในกราฟ G ซึ่งไม่มีจุดยอดซ้ำกัน ยกเว้นจุดเริ่มต้นกับจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน นั่นคือ

วง $C: u=u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k = u$ โดยที่จุดยอด $u_i \neq u_j$ สำหรับแต่ละ i, j ซึ่ง $1 \leq i \leq j \leq k$ และ $k \geq 3$

วงคู่ (even cycle) คือวงที่มีความยาวเป็นจำนวนเต็มคู่

วงคี่ (odd cycle) คือวงที่มีความยาวเป็นจำนวนเต็มคี่

บทนิยาม 2.3.6 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ของกราฟ G จะได้ว่า

- ถ้ามีวิถี $u-v$ ในกราฟ G แล้วกล่าวว่า จุด u **เชื่อมโยง (connect)** กับจุด v หรือกล่าวว่าจุด u และจุด v เชื่อมโยงกัน

- ถ้าทุก ๆ สองจุดในกราฟ G เชื่อมโยงกันแล้ว กราฟ G เรียกว่า **กราฟเชื่อมโยง (connected graph)**

บทนิยาม 2.3.7 กำหนดให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง

- รอยเดินเปิด T ในกราฟ G เรียกว่า **รอยเดินออยเลอเรียน (Eulerian trail)** ถ้ารอยเดินเปิด T บรรจุเส้นทุกเส้นของกราฟ G

- วงจร C ในกราฟ G เรียกว่า **วงจรออยเลอเรียน (Eulerian circuit)** ถ้าวงจร C บรรจุเส้นทุกเส้นของกราฟ G

- กราฟ G เรียกว่า **กราฟออยเลอเรียน (Eulerian graph)** ถ้ากราฟ G บรรจุวงจรออยเลอเรียน

บทนิยาม 2.3.6[1] **เกิร์ธ (girth)** ของกราฟ G คือความยาวของวงจรที่สั้นที่สุดใน G และแทนด้วยสัญลักษณ์ $g(G)$

2.4 การระบายสีจุดยอด

บทนิยาม 2.4.1[2] **การระบายสีจุดยอดของกราฟ (a vertex coloring of a graph)** คือการกำหนดสีให้กับจุดยอดของกราฟ โดยถ้าจุดยอดสองจุดประชิดกัน จุดทั้งสองจะต้องมีสีต่างกัน

หมายเหตุ

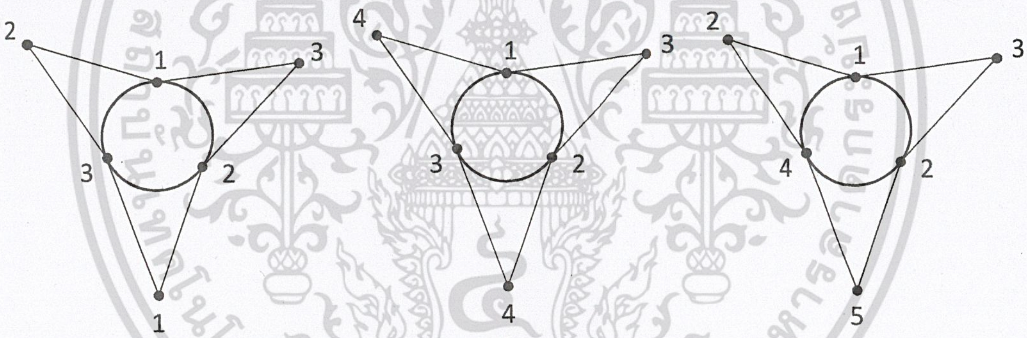
1. ในที่นี้จะให้จำนวนนับแทนสีต่าง ๆ

2. จะกล่าวว่าฟังก์ชันแบบทั่วถึง $f:V(G)\to\{1,2,3,...,c\}$ เป็นฟังก์ชันการระบายสี c สีของกราฟ G ถ้า $f(u)\neq f(v)$ สำหรับทุก $u,v\in V(G)$ และ $uv\in E(G)$

บทนิยาม 2.4.2[2] **รงคเลขของกราฟ G (chromatic number of graph G)** คือจำนวนนับ m ที่น้อยที่สุด ที่เราสามารถใช้สี m สี ระบายสีจุดยอดให้กับกราฟ G ได้ โดยใช้สัญลักษณ์แทน $\chi(G)$

บทนิยาม 2.4.3[2] **การระบายสีสมบูรณ์ (complete coloring)** คือการระบายสีให้กับจุดยอดของกราฟโดยที่สำหรับสองสี i และ j ใด ๆ จะมีคู่ของจุดยอดที่ประชิดกันในกราฟที่จุดยอดหนึ่งถูกระบายสี i และอีกจุดยอดหนึ่งถูกระบายสี j

ตัวอย่าง 2.12 การระบายสีจุดยอดให้กับกราฟ $S_{3,1}$ โดยใช้สี 3, 4 และ 5 สี แสดงดังรูป 2.17



รูป 2.17 : การระบายสีจุดยอดของกราฟ $S_{3,1}$

โดยใช้สี 3, 4 และ 5 สี ตามลำดับ

จากรูป 2.17 จะเห็นได้ว่าเราสามารถใช้สี 3 สี ระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ $S_{3,1}$ ได้เพราะทุกคู่ของจุดยอดที่ประชิดกันซึ่งถูกระบายสีสองสีที่แต่ต่างจากสีทั้งหมด 3 สี (จากรูปสีที่ 1 ประชิดกับสีที่ 2, สีที่ 1 ประชิดสีที่กับ 3 และสีที่ 2 ประชิดกับสีที่ 3)

ในทำนองเดียวกันเราสามารถใช้สี 4 สี ระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ $S_{3,1}$ ได้ (จากรูปสีที่ 1 ประชิดกับสีที่ 2, สีที่ 1 ประชิดกับสีที่ 3, สีที่ 1 ประชิดกับสีที่ 4, สีที่ 2 ประชิดกับสีที่ 3, สีที่ 2 ประชิดกับสีที่ 4 และ สีที่ 3 ประชิดกับสีที่ 4)

แต่เราไม่สามารถใช้สี 5 สี ระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ $S_{3,1}$ ได้ ไม่ว่าจะระบายสีแบบใดก็ตามโดยใช้สี 5 สี

ข้อสังเกต ถ้าเราสามารถใช้สี c สี ระบายสีสมบูรณ์ให้กราฟ G ได้ แล้ว $|E(G)|\geq\binom{c}{2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ $c\geq 2$ ซึ่งจะได้บทกลับว่า ถ้า $|E(G)|<\binom{c}{2}$ แล้ว เราไม่สามารถใช้สี c สี ระบายสีสมบูรณ์ให้กราฟ G ได้

บทนิยาม 2.4.4[2] **จำนวนอโครมาติกของกราฟ G (achromatic number of graph G)** คือจำนวนนับ c ที่มากที่สุด ที่เราสามารถใช้สี c สี ระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ G ได้ โดยใช้สัญลักษณ์แทน $\Psi(G)$

ตัวอย่าง 2.13 ในรูป 2.17 แสดงให้เห็นว่าสามารถระบายสีสมบูรณ์สูงสุดให้กับกราฟ $S_{3,1}$ ได้เท่ากับ 4 สี ดังนั้น $\Psi(S_{3,1})=4$

ทฤษฎีบท 2.4.5[11] ถ้า $\binom{c}{2}\leq n<\binom{c+1}{2}$ แล้ว

$$\Psi(C_n)=c-1 \qquad \text{เมื่อ } n=\binom{c}{2}+1 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

และ
$$\Psi(C_n)=c \qquad \text{เมื่อ } n\neq\binom{c}{2}+1 \text{ หรือ } n \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

ตัวอย่าง 2.14 การหาจำนวนอโครมาติกของ C_{10} และ C_{11} ตามลำดับ

สำหรับ C_{10}

เนื่องจาก $\binom{5}{2}\leq 10<\binom{6}{2}$ แต่ $\binom{5}{2}+1\neq 10$

ดังนั้น $\Psi(C_{10})=5$

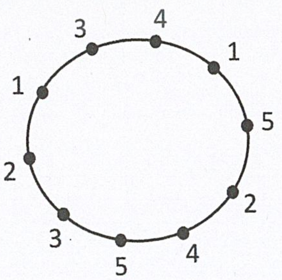
สำหรับ C_{11}

เนื่องจาก $\binom{5}{2}\leq 11<\binom{6}{2}$ และ $\binom{5}{2}+1=11$ และ 11 เป็นจำนวนคี่

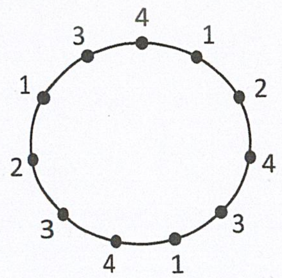
ดังนั้น $\Psi(C_{11})=5-1=4$

เมื่อระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ C_{10} และ C_{11} จะได้ดังรูป 2.18

C_{10} :



C_{11} :



รูปที่ 2.18 การระบายสีสมบูรณ์กราฟ C_{10} และ C_{11}

โดยใช้สี 5 และ 4 สี ตามลำดับ

บทที่ 3

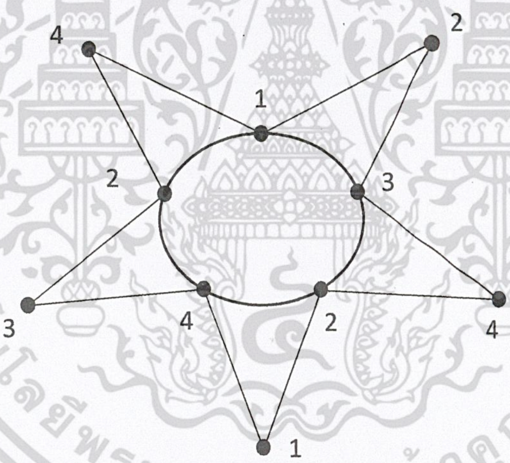
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในเนื้อหาบทนี้จะกล่าวถึง การหาค่าขอบเขตล่าง ขอบเขตบน และ ค่าจริงของ จำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ โดยใช้บทนิยามและทฤษฎีบทที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 เพื่อความสะดวก จึงจะให้ $S_{n,k}$ แทนกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $\chi(S_{n,k})$ แทนรงคเลขของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ และ $\Psi(S_{n,k})$ แทนจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

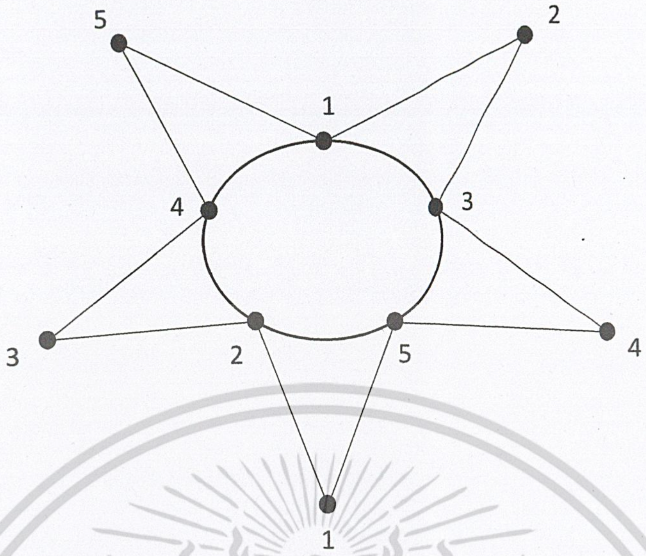
3.1 การทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงสุดเพื่อหา $\Psi(S_{n,1})$

ในหัวข้อนี้จะเป็นการการทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงลงบนจุดยอดทุก ๆ จุดยอดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบโดยพอสังเขปเพื่อแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของปัญหา

ตัวอย่าง 3.1 การทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงสุดลงบนกราฟ $S_{5,1}$



รูป 3.1 : แสดงการระบายสี 4 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{5,1}$



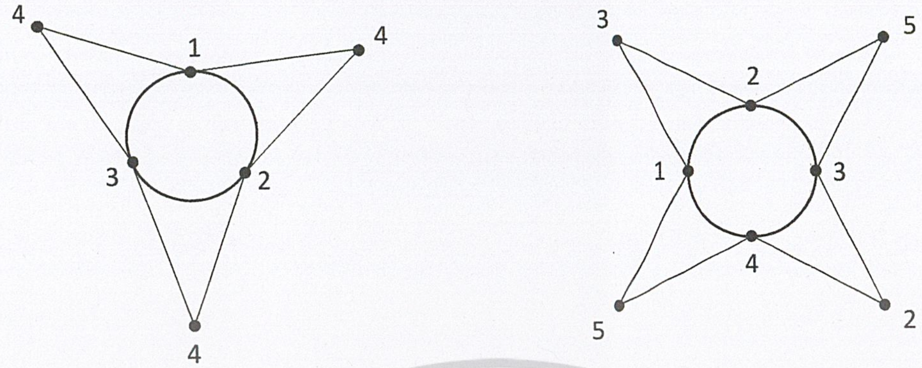
รูป 3.2 : แสดงการระบายสี 5 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{5,1}$

รูป 3.3 : แสดงการระบายสี 6 สี ของกราฟ $S_{5,1}$

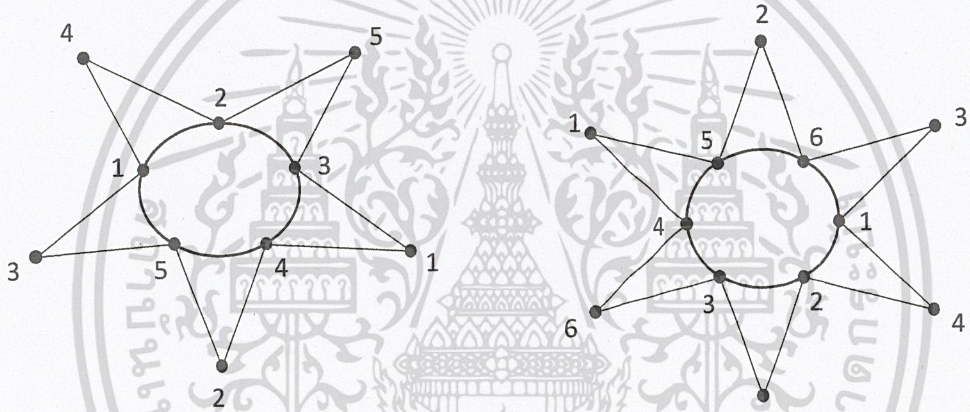
จากรูป 3.3 เนื่องจากกราฟ $S_{5,1}$ มีขนาดเท่ากับ 30 หากจะระบายสีสมบูรณ์ 6 สีให้กับ $S_{5,1}$ แล้ว จะเกิดเส้นเชื่อมทั้งหมดจำเป็นที่จะต้องระบายสีสมบูรณ์โดยไม่ให้เกิดคู่ของจุดยอดที่จุดปลายถูกระบายด้วยสีเดียวกันเพียงแค่ 1 เส้น

ดังนั้น $\Psi(S_{5,1}) = 5$

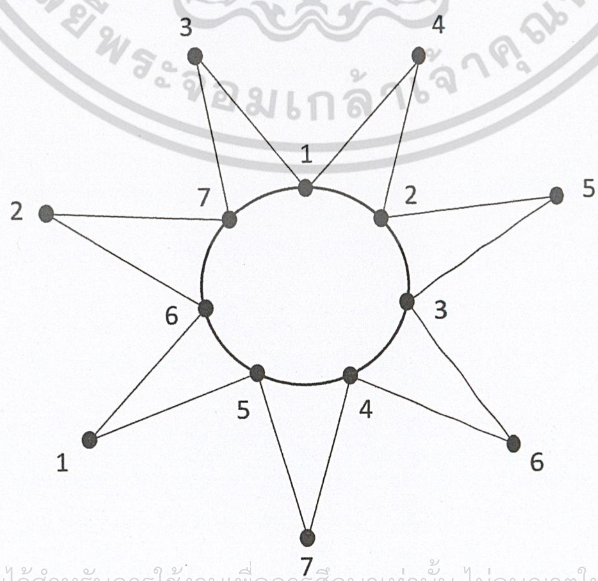
ตัวอย่างที่ 3.2 การทดลองระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ $S_{n,1}$ เมื่อ $n = 3,4,5,...,10$



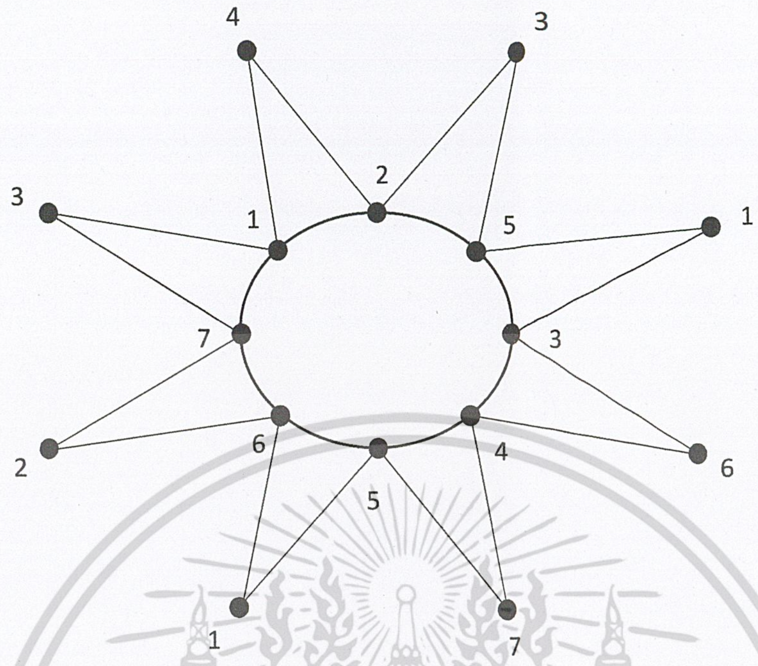
รูป 3.4 : แสดงการระบายสี 4 สี และ 5 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{3,1}$ และ $S_{4,1}$ ตามลำดับ



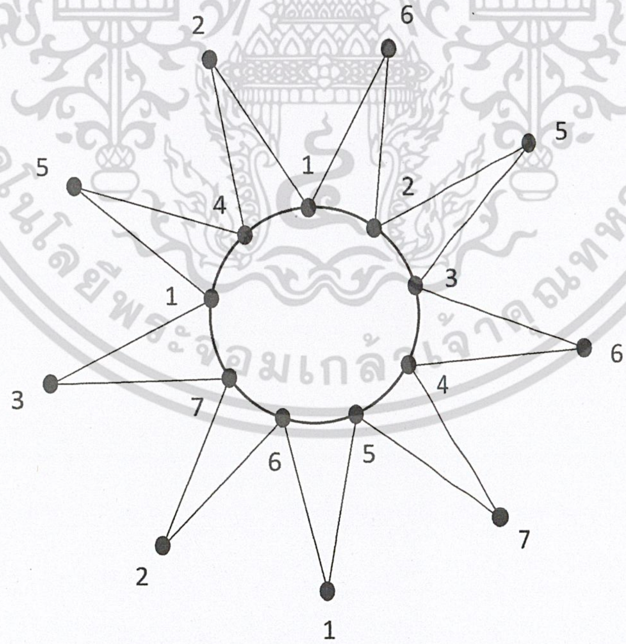
รูป 3.5 : แสดงการระบายสี 5 สี และ 6 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{5,1}$ และ $S_{6,1}$ ตามลำดับ



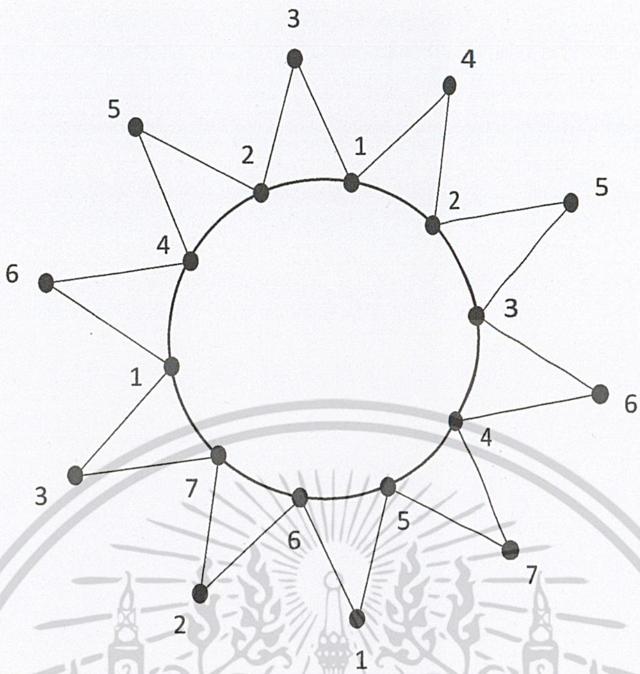
รูป 3.6 : แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{7,1}$



รูป 3.7 : แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{8,1}$



รูป 3.8 : แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{9,1}$



รูป 3.9 : แสดงการระบายสี 7 สี สมบูรณ์ของกราฟ $S_{10,1}$

นำค่าที่ได้จากกาทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงสุดมาใส่ในตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 3.1 : แสดงค่าที่ได้จากการทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงสุดของกราฟ $S_{n,k}$

เมื่อ $k = 1, 2, 3$ และ $n = 2, 3, 4, \ldots, 12$

n	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$	$S_{n,3}$
2	ไม่นิยาม	2	4
3	4	4	5
4	5	5	6
5	5	5	6
6	6	6	7
7	7	7	8
8	7	8	9
9	7	9	9
10	7	9	9
11	8	9	10
12	9	9	10

จากการทดลองระบายสีสมบูรณ์ c สีลงบนจุดยอดทุก ๆ จุดยอดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบโดยพอสังเขป เห็นได้ว่ามีความยุ่งยากและเป็นไปได้อย่างยากลำบากที่จะหาจำนวนสีที่มาก

ที่สุดซึ่งสามารถระบายบนกราฟ $S_{n,k}$ นั้น ๆ ได้ เราจึงต้องมีการนำงานวิจัยที่ศึกษาค้นคว้ามาประยุกต์ใช้เพื่อกำหนดขอบเขตของค่างและขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกขึ้นมา

3.2 การหาค่าขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

เนื่องจากการหาค่าจริงของจำนวนอโครมาติกของกราฟบางชนิดนั้นมีขั้นตอนในการหาที่ซับซ้อน ทำให้ผู้จัดทำศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาใช้หาค่าขอบเขตของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ ให้สอดคล้องกับค่าจริงของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่เราศึกษา

3.2.1 ค่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

ในปี ค.ศ. 1968 แฟรงค์ ฮาร์รี (Frank Harrary) ได้นิยามถึง การหาค่าจำนวนอโครมาติก (Achromatic number) ของกราฟ G และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Psi(G)$ ซึ่งเกิดจากการระบายสีสมบูรณ์ที่จำนวนสีมากที่สุดการหาค่าดังกล่าวมีความซับซ้อนมากกว่าการหารงคเลขของกราฟ G

ทฤษฎีบท 3.1[9] $\chi(G) \le \Psi(G)$

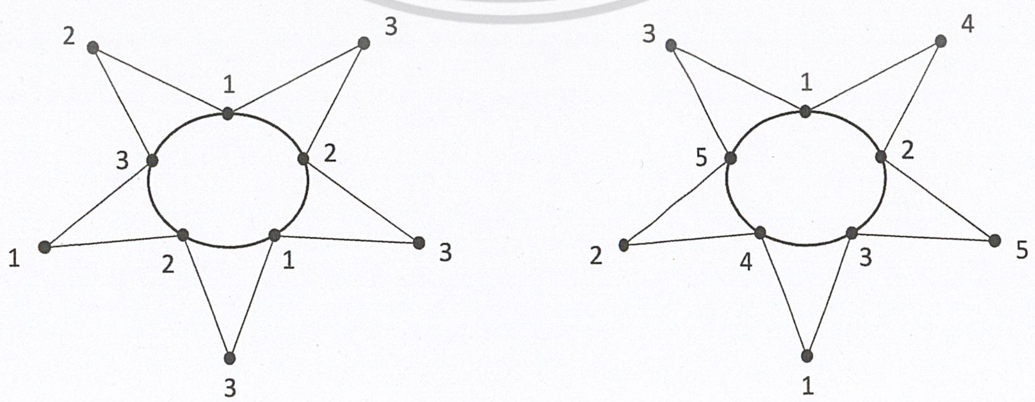
ทำให้ทราบว่าจำนวนอโครมาติกของกราฟใด ๆ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับรงคเลขของกราฟเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.3 สำหรับกราฟ C_3

รูป 3.10 : แสดงการหา $\chi(C_3)$ และ $\Psi(C_3)$

ดังนั้น $\chi(C_3) = 3$ และ $\Psi(C_3) = 3$

ตัวอย่าง 3.4 แต่สำหรับกราฟ $S_{5,1}$



รูป 3.11 : แสดงการหา $\chi(S_{5,1})$ และ $\Psi(S_{5,1})$

ดังนั้น $\chi\left(S_{5,1}\right)=3$ และ $\Psi\left(S_{5,1}\right)=5$

จากตัวอย่าง 3.3 และ 3.4 จึงจะได้ว่า รงคเลขเป็นขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติก เราจึงจะหา $\chi\left(S_{n,k}\right)$ โดย

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับกราฟ $S_{n,k}$

$$\chi\left(S_{n,k}\right)=2 \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

และ

$$\chi\left(S_{n,k}\right)=3 \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

พิสูจน์

กำหนดฟังก์ชันการระบายสีโดย $f:V\left(S_{n,k}\right)\rightarrow\{1,2,3,...,c\}$ เป็นฟังก์ชันการระบายสี c สีให้กับกราฟ $S_{n,k}$ แบ่งเป็น 3 กรณีได้ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ k เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคี่

กำหนด $i=1,2,3,...,nk-1$ และ $j=1,2,3,...,n-2$

ให้ $f\left(v_i\right)=1$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่

$f\left(v_i\right)=2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ เพราะ $f\left(v_i\right)=1$ ที่ i เป็นจำนวนคี่

$f\left(v_{nk}\right)=3$ เพราะ $f\left(v_1\right)=1$ และ $f\left(v_{nk-1}\right)=2$

และให้ $f\left(u_j\right)=3$ เพราะ u_j ประชิดกับ v_i ที่ i เป็นจำนวนคี่ และ v_i ที่ i เป็นจำนวนคู่

$f\left(u_{n-1}\right)=1$ เมื่อ $k=1$ เพราะ $f\left(v_n\right)=3$ และ $f\left(v_{n-1}\right)=2$

$f\left(u_{n-1}\right)=3$ เพราะ $f\left(v_{n(k-1)+1}\right)=1$ และ $f\left(v_{n(k-2)+1}\right)=2$

$f\left(u_n\right)=2$ เมื่อ $k=1$ เพราะ $f\left(v_1\right)=1$ และ $f\left(v_n\right)=3$

$f\left(u_n\right)=2$ เพราะ $f\left(v_1\right)=1$ และ $f\left(v_{n(k-1)+1}\right)=1$

กรณีที่ 2 เมื่อ k เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคู่

กำหนด $i=1,2,3,...,nk$ และ $j=1,2,3,...,n$

ให้ $f\left(v_i\right)=1$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่

$f\left(v_i\right)=2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ เพราะ $f\left(v_i\right)=1$ ที่ i เป็นจำนวนคี่

และให้ $f\left(u_j\right)=3$ เพราะ u_j ประชิดกับ v_i ที่ i เป็นจำนวนคี่ และ v_i ที่ i เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 3 เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

กำหนด $i=1,2,3,...,nk$ และ $j=1,2,3,...,n$

ให้ $f\left(v_i\right)=1$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่

$f\left(v_i\right)=2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ เพราะ $f\left(v_i\right)=1$ ที่ i เป็นจำนวนคี่

และให้ $f\left(u_j\right)=2$ เพราะ $f\left(v_i\right)=1$ ที่ i เป็นจำนวนคี่

จากทั้ง 3 กรณี จึงสรุปได้ว่า

$\chi\left(S_{n,k}\right)=2$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

$\chi\left(S_{n,k}\right)=3$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

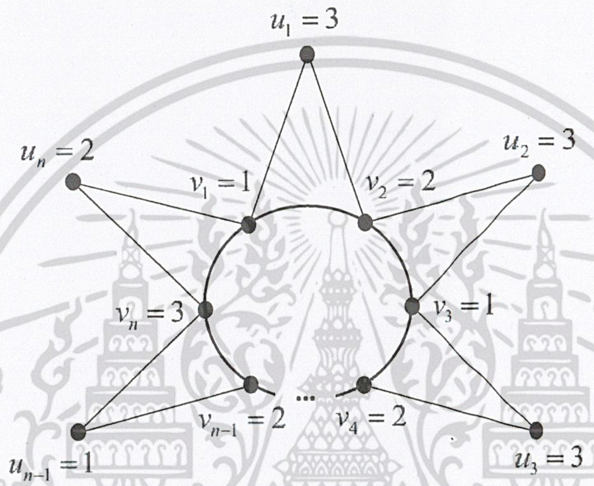
ดังนั้นจาก ทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 จะได้ว่า

$2\le\Psi\left(S_{n,k}\right)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

$3\le\Psi\left(S_{n,k}\right)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

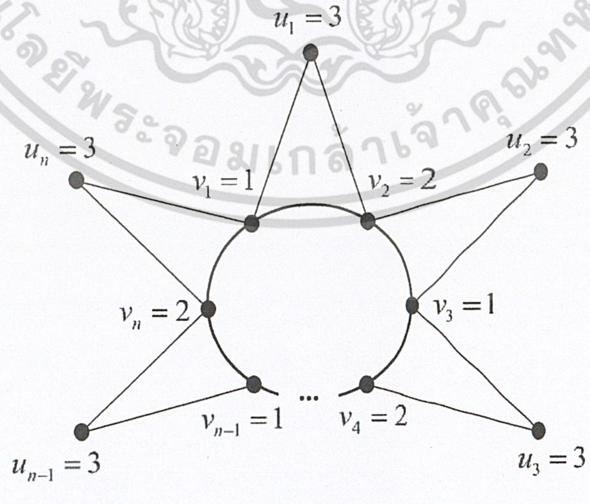
โดยเราสามารถระบายสีของกราฟ $S_{n,k}$ เพื่อหาค่า $\chi\left(S_{n,k}\right)$ ดังรูปตามกรณีต่อไปนี้

กรณี $S_{n,1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่



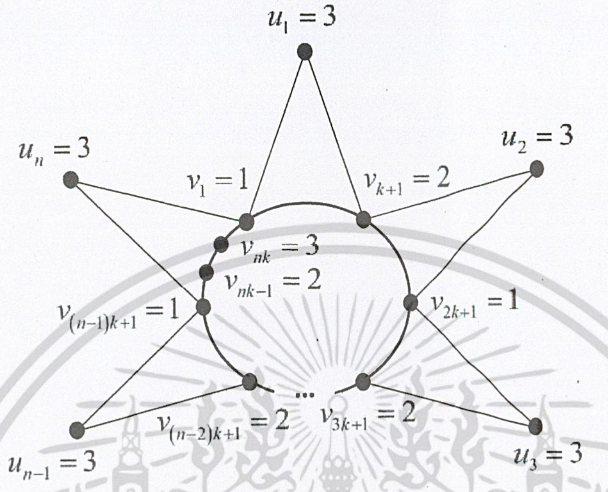
รูป 3.12 การระบายสีกราฟ $S_{n,1}$ เพื่อหา $\chi\left(S_{n,1}\right)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

กรณี $S_{n,1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่



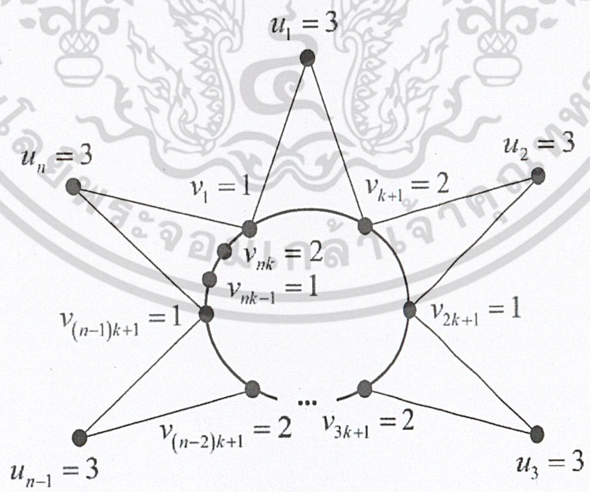
รูป 3.13 การระบายสีกราฟ $S_{n,1}$ เพื่อหา $\chi\left(S_{n,1}\right)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

กรณี $S_{n,k}$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่และ n เป็นจำนวนคี่



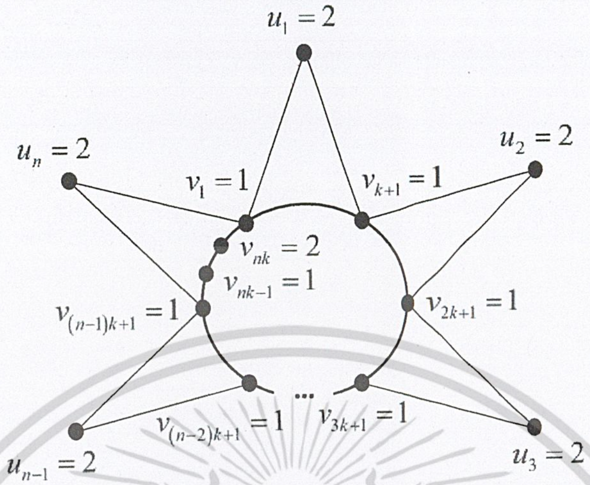
รูป 3.14 การระบายสีกราฟ $S_{n,k}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,k})$
เมื่อ k เป็นจำนวนคี่และ n เป็นจำนวนคี่

กรณี $S_{n,k}$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่และ n เป็นจำนวนคู่



รูป 3.15 การระบายสีกราฟ $S_{n,k}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,k})$
เมื่อ k เป็นจำนวนคี่และ n เป็นจำนวนคู่

กรณี $S_{n,k}$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่



รูป 3.16 การระบายสีกราฟ $S_{n,k}$ เพื่อหา $\chi(S_{n,k})$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

3.2.2 ค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

3.2.2.1 ค่าขอบเขตบนจากการใช้ค่า Randić index ของกราฟ

จากงานวิจัย ค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติก ซึ่งได้ใช้ค่า Randić index ของกราฟ G เนื่องจากมีความเหมาะสมและหาได้สะดวก เพื่อหาค่าขอบเขตบนจำนวนอโครมาติก ซึ่งในงานวิจัยได้กล่าวไว้ว่า

ทฤษฎีบท 3.3[7] สำหรับกราฟเชิงเดียว G ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด และจำนวนเส้น m เส้น แล้ว

$$\Psi(G) \le 2R(G)$$

และจากนิยาม 2.1.9 $\quad R(G) = \sum_{uv\in E(G)} \frac{1}{\sqrt{(\deg u)(\deg v)}}$

ดังนั้น $\quad 2R(G) = \sum_{uv\in E(G)} \frac{2}{\sqrt{(\deg u)(\deg v)}}$

เราจะหาขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $S_{n,k}$ โดยจะได้ว่า $\Psi(S_{n,k}) \le 2R(S_{n,k})$ โดยจะแบ่งเป็นกรณีของ $S_{n,1}, S_{n,2}$ และ $S_{n,3}$

กรณี $S_{n,1}$ เนื่องจากกราฟ $S_{n,1}$ มีเส้นเชื่อมที่ดีกรีของจุดปลายของเส้นเชื่อมมีดีกรีดังต่อไปนี้

จุดปลายที่มีดีกรี 4 และ 4 ของ $S_{n,1}$ มีจำนวน n เส้น

จุดปลายที่มีดีกรี 2 และ 4 ของ $S_{n,1}$ มีจำนวน $2n$ เส้น

ดังนั้น $$2R\left(S_{n,1}\right)=2\left[\frac{n}{4}+2n\frac{\left(\sqrt{2}\right)}{4}\right]$$
$$=2\left[\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{4}n\right]$$
$$=\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{2}n$$

ตารางที่ 3.2 : แสดงค่า $2R\left(S_{n,1}\right)$ เมื่อ $n=3,4,5,\ldots,20$

n	$2R\left(S_{n,1}\right)$
3	5.742641
4	7.656854
5	9.571068
6	11.48528
7	13.39949
8	15.31371
9	17.22792
10	19.14214
11	21.05635
12	22.97056
13	24.88478
14	26.79899
15	28.7132
16	30.62742
17	32.54163
18	34.45584
19	36.37006
20	38.28427

กรณี $S_{n,2}$ เนื่องจากกราฟ $S_{n,2}$ มีเส้นเชื่อมที่ดีกรีของจุดปลายของเส้นเชื่อมมีดีกรีดังต่อไปนี้

จุดปลายที่มีดีกรี 2 และ 4 ของ $S_{n,2}$ มีจำนวน $4n$ เส้น

ดังนั้น $2R\left(S_{n,2}\right)=2\left[4n\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

$=2\sqrt{2}n$

ตารางที่ 3.3 : แสดงค่า $2R\left(S_{n,2}\right)$ เมื่อ $n=2,3,4,\ldots,20$

n	$2R\left(S_{n,2}\right)$
2	5.656854
3	8.485281
4	11.31371
5	14.14214
6	16.97056
7	19.79899
8	22.62742
9	25.45584
10	28.28427
11	31.1127
12	33.94113
13	36.76955
14	39.59798
15	42.42641
16	45.25483
17	48.08326
18	50.91169
19	53.74012
20	56.56854

กรณี $S_{n,3}$ เนื่องจากกราฟ $S_{n,3}$ มีเส้นเชื่อมที่ดีกรีของจุดปลายของเส้นเชื่อมมีดีกรีดังต่อไปนี้

จุดปลายที่มีดีกรี 2 และ 4 ของ $S_{n,3}$ มีจำนวน $4n$ เส้น

จุดปลายที่มีดีกรี 2 และ 2 ของ $S_{n,3}$ มีจำนวน n เส้น

ดังนั้น $$2R(S_{n,3}) = 2\left[\frac{n}{2} + 4n\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$
$$= n + 2\sqrt{2}n$$
$$= \left(1 + 2\sqrt{2}\right)n$$

ตารางที่ 3.4 : แสดงค่า $2R(S_{n,3})$ เมื่อ $n = 2, 3, 4, \ldots, 20$

n	$2R(S_{n,3})$
2	7.656854
3	11.48528
4	15.31371
5	19.14214
6	22.97056
7	26.79899
8	30.62742
9	34.45584
10	38.28427
11	42.1127
12	45.94113
13	49.76955
14	53.59798
15	57.42641
16	61.25483
17	65.08326
18	68.91169
19	72.74012
20	76.56854

และสำหรับกรณี $S_{n,k}$ เมื่อ $k \geq 3$ เนื่องจากกราฟ $S_{n,3}$ มีเส้นเชื่อมที่ดีกรีของจุดปลายของเส้นเชื่อมมีดีกรีดังต่อไปนี้

จุดปลายที่มีดีกรี 2 และ 4 ของ $S_{n,k}$ มีจำนวน $4n$ เส้น

จุดปลายที่มีดีกรี 2 และ 2 ของ $S_{n,k}$ มีจำนวน $n(k-2)$ เส้น

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 2R(S_{n,k}) &= 2\left[\left(\frac{k-2}{2}\right)n + 4n\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right] \\ &= 2\left[\frac{\left(k-2+2\sqrt{2}\right)}{2}n\right] \\ &= \left(k-2+2\sqrt{2}\right)n \qquad \text{เมื่อ } k \geq 3 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต เมื่อนำข้อมูลจากตารางที่ 3.1 ซึ่งเกิดจากการทดลองการระบายสีสมบูรณ์สูงสุดและนำมาเปรียบเทียบกับขอบเขตบนจากการใช้ค่า Randić index จากตารางที่ 3.2, 3.3 และ 3.4 ทำให้เห็นว่าค่าขอบเขตบนดังกล่าวมีค่าค่อนข้างที่จะห่างจากค่าที่ทดลองระบายสีสูงสุดค่อนข้างมาก

3.2.2.2 ค่าขอบเขตบนจากขนาดของกราฟ G

จากงานวิจัย การระบายสีสมบูรณ์ของกราฟเชิงระนาบ[9] ได้มีการกล่าวถึงงานวิจัยของแฟรงค์ ฮาร์รี ซึ่งเป็นผู้ที่นิยามจำนวนอโครมาติกของกราฟขึ้นมา และจากข้อสังเกตว่า หากเราสามารถใช้สีจำนวน c สีระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ G ที่มีจำนวนส้นเชื่อม m เส้น

เราจะได้ว่า
$$\binom{c}{2} \leq m$$
$$c^2 - c - 2m \leq 0$$

เนื่องจาก $c \in \mathbb{Z}^+$ และ c มากที่สุด

จึงได้ว่า $\Psi(G) \leq \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8m+1}}{2} \right\rfloor$ ก็ต่อเมื่อ m เป็นขนาดของกราฟ G (2)

หากกราฟ G เป็นกราฟเชิงระนาบที่มีอันดับ $n \geq 3$ กราฟ G จะมีขนาดของกราฟได้มากที่สุด $3(n-2)$

จึงได้ว่า $\Psi(G) \leq \left\lfloor \sqrt{6n - \dfrac{47}{4}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$ ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟเชิงระนาบ (3)

และหากกราฟ G เป็นกราฟเชิงระนาบที่มีอันดับ $n \geq 4$ และมี $g(G) \geq 4$ กราฟ G จะมีขนาดของกราฟได้มากที่สุด $2(n-2)$

จึงได้ว่า $\Psi(G) \leq \left\lfloor \sqrt{4n - \dfrac{31}{4}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$ ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟเชิงระนาบและ $g(G) \geq 4$ (4)

เราทราบว่า $S_{n,k}$ เป็นกราฟเชิงระนาบซึ่งมีอันดับ เท่ากับ $n(k+1)$ และขนาด เท่ากับ $n(k+2)$ จึงให้ $n=n(k+1)$ และให้ $m=n(k+2)$ และสำหรับกราฟ $S_{n,k}$ จะมี $g(S_{n,k})\geq 4$ ก็ต่อเมื่อ $k\geq 2$

จาก (2) แทน m ด้วย $n(k+2)$ จะได้

$$\Psi(S_{n,\mathrm{k}})\leq\left\lfloor\sqrt{2(nk+2n)+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

$$\leq\left\lfloor\frac{1+\sqrt{1+8n(k+2)}}{2}\right\rfloor \qquad (5)$$

จาก (3) แทน n ด้วย $n(k+1)$ จะได้

$$\Psi(S_{n,\mathrm{k}})\leq\left\lfloor\sqrt{6(nk+n)-\frac{47}{4}}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

$$\leq\left\lfloor\frac{1+\sqrt{-47+24n(k+1)}}{2}\right\rfloor \qquad (6)$$

จาก (4) แทน n ด้วย $n(k+1)$ จะได้

$$\Psi(S_{n,\mathrm{k}})\leq\left\lfloor\frac{\sqrt{4(nk+n)-\frac{31}{4}}+1}{2}\right\rfloor$$

$$\leq\left\lfloor\frac{1+\sqrt{-31+16n(k+1)}}{2}\right\rfloor \quad \text{เมื่อ } k\geq 2 \qquad (7)$$

นำอสมการซึ่งเป็นค่าขอบเขตบนของ $S_{n,k}$ นั่นคืออสมการที่ (5), (6) และ (7) มาเปรียบเทียบกัน เพื่อให้เห็นได้ชัดมากยิ่งขึ้น จึงสร้างตารางเพื่อหาค่าขอบเขตบนของ $S_{n,1}, S_{n,2}$ และ $S_{n,3}$

กรณี $S_{n,1}$ จะได้ว่า $\Psi\left(S_{n,1}\right) \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{24n+1}}{2} \right\rfloor$

ตารางที่ 3.5 : แสดงค่าเขตบนจากอสมการ $\Psi\left(S_{n,1}\right) \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{24n+1}}{2} \right\rfloor$ เมื่อ $n = 3, 4, 5, \ldots, 12$

n	$\left\lfloor \frac{1+\sqrt{24n+1}}{2} \right\rfloor$
3	4
4	5
5	6
6	6
7	7
8	7
9	7
10	8
11	8
12	9

กรณี $S_{n,2}$ จะได้ว่า $\Psi\left(S_{n,2}\right) \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{32n+1}}{2} \right\rfloor$

ตารางที่ 3.6 : แสดงค่าเขตบนจากอสมการ $\Psi\left(S_{n,2}\right) \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{32n+1}}{2} \right\rfloor$ เมื่อ $n = 2,3,4,\ldots,12$

n	$\left\lfloor \frac{1+\sqrt{32n+1}}{2} \right\rfloor$
2	4
3	5
4	6
5	6
6	7
7	8
8	8
9	9
10	9
11	10
12	10

กรณี $S_{n,3}$ จะได้ว่า $\Psi\left(S_{n,3}\right) \le \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{40n+1}}{2} \right\rfloor$

ตารางที่ 3.7 : แสดงค่าเขตบนจากอสมการ $\Psi\left(S_{n,3}\right) \le \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{40n+1}}{2} \right\rfloor$ เมื่อ $n = 2,3,4,\ldots,12$

n	$\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{24n+1}}{2} \right\rfloor$
2	5
3	6
4	6
5	7
6	8
7	8
8	9
9	10
10	10
11	11
12	11

ข้อสังเกต เมื่อนำข้อมูลจากตารางที่ 3.1 ซึ่งเกิดจากการทดลองการระบายสีสมบูรณ์สูงสุดและนำมาเปรียบเทียบกับขอบเขตบน จากตารางที่ 3.5 , 3.6 และ 3.7 ทำให้เห็นว่าค่าขอบเขตบนจากตารางที่ 3.5 มีค่าค่อนข้างใกล้เคียงจากค่าที่ทดลองอย่างมาก

เนื่องจากกราฟ $S_{n,k}$ เป็นกราฟออยเลอเรียน ซึ่งงานวิจัยของในปี 1984 ได้มีการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟออยเลอเรียนซึ่งเป็นค่าที่พัฒนามาจากค่าขอบเขตบนจากอสมการที่ (2) จึงทำให้เราได้นำค่าขอบเขตบนดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับกราฟ $S_{n,k}$ ที่เราศึกษา

ทฤษฎีบท 3.4[16] ถ้ากราฟ G เป็นกราฟออยเลอเรียนและกราฟ G มี ขนาดเท่ากับ $\binom{c}{2}$

เมื่อ c เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\Psi(G) \le c-1$

เนื่องจาก $\left|E\left(S_{n,k}\right)\right| = n(k+2)$

และหาก $\left|E\left(S_{n,k}\right)\right| = \binom{c}{2}$ เมื่อ c เป็นจำนวนคู่

จึงให้ $$n(k+2)=\binom{c}{2}$$

$$n=\frac{\binom{c}{2}}{k+2}$$

จะได้ว่าสำหรับกราฟ $S_{n,k}$

$$\Psi\left(S_{\frac{\binom{c}{2}}{k+2},k}\right)\le c-1 \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

ข้อสังเกต ค่าขอบเขตบนข้างต้นนั้นเป็นค่าที่ดีแต่มีข้อจำกัดเพราะใช้ได้สำหรับ $S_{n,k}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $\binom{c}{2}$ ที่ c เป็นจำนวนคู่

3.2.2.3 เงื่อนไขการระบายสีสมบูรณ์ของกราฟ $S_{n,k}$

ในหัวข้อนี้ เป็นการศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นต่อการระบายสีสมบูรณ์ของกราฟ $S_{n,k}$

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้าสามารถระบายสีสมบูรณ์ด้วย c สีให้กับกราฟ $S_{n,k}$ ได้แล้ว มี b ที่ทำให้

$$c-1\le 2b\le\frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})}\deg v}{c}$$

พิสูจน์ กำหนดให้กราฟ $S_{n,k}$ ระบายสีสมบูรณ์ด้วยสี c สี และ A แทนด้วยเซตและสี โดยที่ $A=\{1,2,3,...,c\}$

ให้ $v_{i,j}$ เป็นจุดยอดที่ระบายสีที่ i ครั้งที่ j โดยที่ $i\in A$ $j=1,2,3,...,n_{i,j}$ และ $n_{i,j}$ เป็นจำนวนจุดยอดที่ระบายสี i และ $p\in A$ และ $\sum_j \deg\left(v_{p,j}\right)\le\sum_j\deg\left(v_{i,j}\right)$

ฉะนั้น จะต้องมีจุดยอดที่ระบายด้วยสีครบทุกสีในเซต A อย่างน้อย 1 จุด และประชิดกับจุดยอดที่ถูกระบายสีที่แตกต่างกันทั้งหมด $c-1$ สี จำนวน $c-1$ จุด

ทำให้ได้ว่า

$$\sum_j \deg\left(v_{1,j}\right)\ge c-1$$

$$\sum_j \deg\left(v_{2,j}\right)\ge c-1$$

$$\vdots$$

$$\sum_j \deg\left(v_{c,j}\right)\ge c-1$$

นั่นคือ
$$\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v \ge (c-1)c$$
$$\frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v}{c} \ge c-1$$

แต่เนื่องจากจุดยอดของกราฟ $S_{n,k}$ มีจุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคู่

และ จำนวนจุดยอดที่มีดรีกรี 2 มากกว่าหรือเท่ากับจำนวนจุดยอดที่มีดรีกรี 4

$\sum_j \deg(v_{i,j}) = 2h_i$ เมื่อ $h_i \in \mathbb{Z}^+$

จาก $\sum_j \deg(v_{p,j}) \le \sum_j \deg(v_{i,j})$

ทำให้ $2h_p \le 2h_i$
$$c-1 \le 2h_p \le \frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$$

ดังนั้น ถ้าสามารถระบายสีสมบูรณ์ด้วย c สีให้กับกราฟ $S_{n,k}$ ได้แล้ว มี b ที่ทำให้
$$c-1 \le 2b \le \frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$$

จากทฤษฎีบท 3.5 เราจึงสามารถหาขอบเขตบนของกราฟ $S_{n,k}$ ขั้นตอนวิธี การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $S_{n,k}$ ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

จะใช้ค่าขอบเขตบน c จากหัวข้อ 3.2.2.2 $m \ge \binom{c}{2}$ เมื่อ m เป็นขนาดของกราฟ $S_{n,k}$ เราจึงประมาณค่า c ที่สูงที่สุดได้ นั่นคือ $m = n(k+2)$

ทำให้ได้ว่า $n(k+2) \ge \binom{c}{2}$

$c^2 - c - 2n(k+2) \le 0$

แต่ $c \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ $c \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n(k+2)}}{2} \right\rfloor$

การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $S_{n,k}$

ขั้นตอนที่ 1 $c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n(k+2)}}{2} \right\rfloor$

ขั้นตอนที่ 2 ให้ $c_0 = c$ และนำไปแทน $c-1 \le 2b \le \frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$

ขั้นตอนที่ 3 หาก $c_0 = c$ ซึ่งนำไปแทนในขั้นตอนที่ 2 เป็นจริง ให้หยุด และจะได้ค่าขอบเขตบน คือ c_0 เป็นเท็จ ให้นำ $c_0 - 1 = c_1 = c$ และนำไปแทนตามขั้นตอนที่ 2 จนกว่าจะได้ c ที่ $c - 1 \le 2b \le \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$ เป็นจริง แล้วจึงสรุปได้ว่า $\Psi(S_{n,k}) \le c$

ตัวอย่าง 3.5 กราฟ $S_{10,1}$ ขั้นตอนการหาค่าขอบเขตบนของกราฟ $S_{10,1}$ ดังนี้

$$c_0 = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8(10)(1+2)}}{2} \right\rfloor$$

$c_0 = 8$ ให้ $c_0 = c$

จะได้ว่า $c = 8$ ซึ่งนำไปแทนในอสมการ $c - 1 \le 2b \le \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$

เราทราบว่า $\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v = 2m$

ดังนั้น $\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v = 2n(k+2)$

สำหรับ $S_{10,1}$ และ $c = 8$ จะได้

$$\sum_{v \in V(S_{10,1})} \deg v = 2(10)(1+2) = 60$$

และ $\frac{\sum_{v \in V(S_{10,1})} \deg v}{c} = \frac{60}{8} = 7\frac{1}{2}$

จะได้ $7\frac{1}{2} \ge 2b \ge 8 - 1$

เห็นว่าไม่มีจำนวนนับ $2b$ ซึ่งทำให้อสการ $c - 1 \le 2b \le \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$ เป็นจริง

แสดงว่า กราฟ $S_{10,1}$ ไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ 8 สีได้

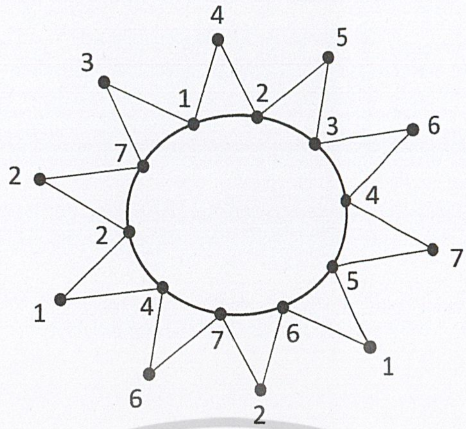
จึงต้องนำ $c_0 - 1 = 7 = c$

และ $\frac{\sum_{v \in V(S_{10,1})} \deg v}{7} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$

จะได้ $8\frac{4}{7} \ge 2b \ge 7 - 1$

เห็นว่ามีจำนวนนับ $2b$ ซึ่งทำให้อสการ $c - 1 \le 2b \le \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$ เป็นจริง

ดังนั้น $\Psi(S_{10,1}) \le 7$



รูป 3.17 : แสดงการระบายสีสมบูรณ์ของ $S_{10,1}$

ดังนั้น $\Psi\left(S_{10,1}\right)=7$

ตัวอย่าง 3.6 กราฟ $S_{5,2}$ ขั้นตอนการหาค่าขอบเขตบนของกราฟ $S_{5,2}$ ดังนี้

$$c_0=\left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8(5)(2+2)}}{2} \right\rfloor$$

$$c_0=6 \text{ ให้ } c_0=c$$

จะได้ว่า $c=6$ ซึ่งนำไปแทนในอสมการ $c-1\le 2b\le \frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$

สำหรับ $S_{5,2}$ และ $c=6$ จะได้

$$\frac{\sum_{v\in V(S_{5,2})} \deg v}{c}=\frac{2(5)(2+2)}{6}=\frac{40}{6}=6\frac{2}{3}$$

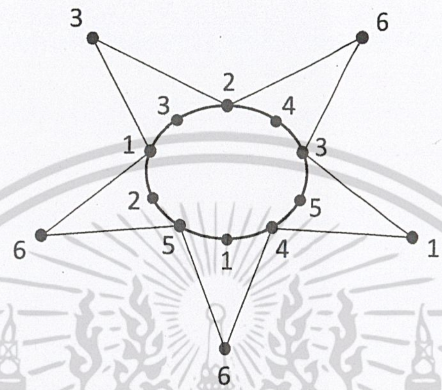
จะได้ $\quad 6\frac{4}{6}\ge 2b\ge 6-1$

เห็นว่าไม่มีจำนวนนับ $2b$ ซึ่งทำให้อสการ $c-1\le 2b\le \frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$ เป็นจริง

จะได้ $\quad 6\frac{4}{6}\ge 2b\ge 6-1$

เห็นว่ามีจำนวนนับ $2b$ ซึ่งทำให้อสการ $c-1\le 2b\le \frac{\sum_{v\in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$ เป็นจริง

ดังนั้น $\Psi\left(S_{5,2}\right)\le 6$



รูป 3.18 : แสดงการระบายสีสมบูรณ์ของ $S_{5,2}$

ดังนั้น $\Psi\left(S_{5,2}\right)=6$

ตัวอย่าง 3.7 กราฟ $S_{3,3}$ ขั้นตอนการหาค่าขอบเขตบนของกราฟ $S_{3,3}$ ดังนี้

$$c_0=\left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8(3)(3+2)}}{2} \right\rfloor$$

$$c_0=6 \text{ ให้ } c_0=c$$

จะได้ว่า $c=6$ ซึ่งนำไปแทนในอสมการ $c-1\le 2b\le \dfrac{\sum_{v\in V(S_{n,k})}\deg v}{c}$

สำหรับ $S_{3,3}$ และ $c=6$ จะได้

$$\sum_{v\in V(S_{3,3})}\deg v=2(3)(3+2)=30$$

และ $$\frac{\sum_{v\in V(S_{3,3})}\deg v}{c}=\frac{30}{6}=5$$

จะได้ $$5\ge 2b\ge 6-1$$

เห็นว่าไม่มีจำนวนนับ $2b$ ซึ่งทำให้อสการ $c-1\le 2b\le \dfrac{\sum_{v\in V(S_{n,k})}\deg v}{c}$ เป็นจริง

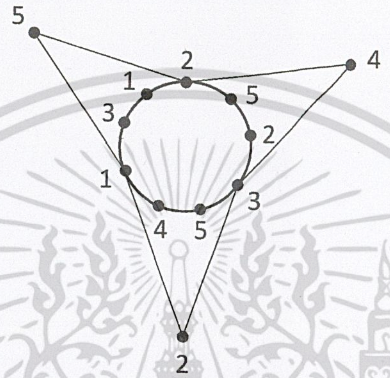
แสดงว่า กราฟ $S_{3,3}$ ไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ 6 สีได้

จึงต้องนำ $c_0 - 1 = 5 = c$

และ $$\frac{\sum_{v \in V(S_{3,3})} \deg v}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

เห็นว่ามีจำนวนนับ $2b$ ซึ่งทำให้อสการ $c - 1 \le 2b \le \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$ เป็นจริง

ดังนั้น $\Psi(S_{3,3}) \le 5$



รูป 3.19 : แสดงการระบายสีสมบูรณ์ของ $S_{3,3}$

ดังนั้น $\Psi(S_{3,3}) = 5$

ข้อสังเกต จากค่าขอบเขตบนในหัวข้อ 3.2.2.3 นี้เป็นค่าขอบเขตบนที่พัฒนามาจากค่าขอบเขตบนในหัวข้อ 3.2.2.2 ซึ่งทำให้ได้ค่าขอบเขตบนที่ดีกว่าซึ่งสอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองระบายสีสมบูรณ์สูงสุดจากตารางที่ 3.1

บทที่ 4
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $S_{n,1}, S_{n,2}$ และ $S_{n,3}$ ค่าขอบเขตล่างของ $\Psi\left(S_{n,k}\right)$

4.1.1 ค่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

จากการศึกษาค่าขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบจากอสมการ $\chi\left(S_{n,k}\right) \leq \Psi\left(S_{n,k}\right)$ ค่าขอบเขตล่างของ $\Psi\left(S_{n,k}\right)$ หาได้จาก $\chi\left(S_{n,k}\right)$

นั่นคือ $\chi\left(S_{n,k}\right) = 2$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

$\chi\left(S_{n,k}\right) = 3$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

จึงจะได้ว่า $2 \leq \Psi\left(S_{n,k}\right)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

$3 \leq \Psi\left(S_{n,k}\right)$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

เห็นได้ชัดจากอสมการนี้มีค่าที่ไม่เหมาะสำหรับสำหรับการหาค่าจริงของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$

4.1.2 ค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

จากการศึกษาเราได้แบ่งค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบออกเป็น 3 ส่วน

ส่วนที่ 1 ค่าขอบเขตบนของ $\Psi\left(S_{n,k}\right)$ ซึ่งเกิดจากอสมการ $\Psi\left(S_{n,k}\right) \leq 2R(S_{n,k})$

ซึ่งนั่นคือ $2R\left(S_{n,1}\right) = \dfrac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{2}n$

$2R\left(S_{n,2}\right) = 2\sqrt{2}n$

$2R\left(S_{n,k}\right) = \left(k-2+2\sqrt{2}\right)n$ เมื่อ $k \geq 3$

จึงจะได้ว่า $\Psi\left(S_{n,1}\right) \leq \frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{2} n$

$\Psi\left(S_{n,2}\right) \leq 2\sqrt{2}n$

$\Psi\left(S_{n,k}\right) \leq \left(k-2+2\sqrt{2}\right)n$ เมื่อ $k \geq 3$

ส่วนที่ 2 ค่าขอบเขตบนของ $\Psi\left(S_{n,k}\right)$ ซึ่งเกิดจากอสมการ

$$\Psi\left(S_{n,\mathrm{k}}\right) \leq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n(k+2)}}{2} \right\rfloor$$

ค่าขอบเขตบนจากขนาดของกราฟดังกล่าวมีค่าค่อนข้างใกล้เคียงจากค่าที่ทดลองระบายสีสูงสุดอย่างมากเพราะเนื่องจากสำหรับกราฟ $S_{n,k}$ เมื่อ n หรือ k เพิ่มขึ้นแล้วจำนวนจุดและจำนวนเส้นเพิ่มขึ้นเท่า ๆ กัน

ส่วนที่ 3 ค่าขอบเขตบนซึ่งเกิดจากเงื่อนไขของกราฟระบายสีสมบูรณ์ของกราฟ $S_{n,k}$ ในส่วนนี้ เป็นการศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นต่อการระบายสีสมบูรณ์ของกราฟ $S_{n,k}$

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้าสามารถระบายสีสมบูรณ์ด้วย c สีให้กับกราฟ $S_{n,k}$ ได้แล้ว มี b ที่ทำให้

$$c-1 \leq 2b \leq \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$$

โดยมีขั้นตอนวิธี การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟ $S_{n,k}$

ขั้นตอนที่ 1 $c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n(k+2)}}{2} \right\rfloor$

ขั้นตอนที่ 2 ให้ $c_0 = c$ และนำไปแทน $c-1 \leq 2b \leq \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$

ขั้นตอนที่ 3 หาก $c_0 = c$ ซึ่งนำไปแทนในขั้นตอนที่ 2 เป็นจริง ให้หยุด และจะได้ค่าขอบเขตบน คือ c_0 เป็นเท็จ ให้นำ $c_0 - 1 = c_1 = c$ และนำไปแทนตามขั้นตอนที่ 2 จนกว่าจะได้ c ที่ $c-1 \leq 2b \leq \frac{\sum_{v \in V(S_{n,k})} \deg v}{c}$ เป็นจริง

4.2 ข้อเสนอแนะ

เราหาค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ ตามที่ได้เสนอข้างต้น แต่ยังไม่สามารถหาค่าจริงของจำนวนอโครมาติกของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบใด ๆ ได้ และยังไม่สามารถหาค่าจริงของจำนวนอโครมาติกของกราฟอื่น ๆ ได้

เอกสารอ้างอิง

[1] นิตยา ณ เชียงใหม่. **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.** เชียงใหม่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[2] ภูวนาถ ไชยนุรักษ์. **"จำนวนอโครมาติกของกราฟพิเศษบางชนิด."** วิทยานิพนธ์ วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. 2561.

[3] วรานุช แขมมณี. **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2558.

[4] A.D. King, B.A. Reed and A. Vetta. **An upper bound for the chromatic number of line graphs.** McGill University, 2007.

[5] A. Modabish and M. El Marraki. **Counting the Number of Spanning Trees in the Star Flower Planar Map.** Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011.

[6] Aparna K M, Henila Correya and Manjusha P. **Achromatic Number of Some Graphs.** Amrita School of Art and Sciences, Vol. 118, 2018.

[7] Baoyindureng Wu. **Upper bound for the achromatic and coloring number of a graphs.** Xinjiang University, 2015.

[8] C.S. EDWARDS and C.H. ELPHICK. **LOWER BOUND FOR THE CLIQUE AND THE CHROMATIC NUMBERS OF A GRAPH.** University of Birmingham, 1982.

[9] G. Araujo-Pardo, F. E. Contreras-Mendoza, S. J. Murillo-Garcia, A. B. Ramos-Tort and C. Rubio-Montiel. **Complete colorings of planar graphs.** Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2018.

[10] Guy Kortsarz and Robert Krauthgamer. **On approximating achromatic number.** Open University of Isarael, 2001.

[11] Jaeun Lee and Young-hee Shin. **The achromatic number of union of cycles.** Yeungnam University, 2003.

[12] K.P. Thilagavathy and A. Santha. **A COMPARATIVE STUDY ON ACHROMATIC AND B-BHROMATIC NUMER OF CERTAIN GRAPHS.** Kumaraguru College of Technology Tamil Nadu, 2018.

[13] Kenneth H. Rosen, Discrete **Mathematies and Its Applications** , McGraw-Hill Education, Laboratories, 2007

[14] L. Stacho. **A NOTE ON UPPER BOUND FOR CHROMATIC NUMBER OF A GRAPH.** Simon Fraser University, 2002.

[15] M. Venkatachalam and Vivin J. Vernold. **THE b-CHROMATIC NUMBER OF STAR GRAPH FAMILIES.** Le Matematiche, Vol. 65, 2010.

[16] Martin Farber, Gena Hahn, Pavol Hell and Donald Miller. **Concerning the Archromatic Number of Graphs.** Unversity of Waterloo, 1984

[17] Mostafa Blidia, Frederic Maffray and Zoham Zemir. **On b-colorings in regular graphs.** Universite de Blida, 2008.