ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

DETERMINANTS OF ADJACENCY MATRIX OF STAR FLOWER PLANAR GRAPH

จิตรลดา รอดสวัสดิ์

ชลรัตน์ อินทศร

เอกภักดิ์ สงวนสิน

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

DETERMINANTS OF ADJACENCY MATRIX OF STAR FLOWER PLANAR GRAPH

JITLADA RODSAWAT
CHONLARAT INTHASORN
AEKKAPAK SA-NGUANSIN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2018

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ Determinants of Adjacency Matrix of Star Flower Planar Graph
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจิตรลดา รอดสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 58050027 นางสาวชลรัตน์ อินทศร รหัสนักศึกษา 58050039 นายเอกภักดิ์ สงวนสิน รหัสนักศึกษา 58050201
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.เดชา สมนะ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	พรชัย ชัยสนิท
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการ	
ผศ.ดร.เดชา สมนะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจิตรลดา รอดสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 58050027
	นางสาวชลรัตน์ อินทศร รหัสนักศึกษา 58050039
	นายเอกภักดิ์ สงวนสิน รหัสนักศึกษา 58050201
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.เดชา สมนะ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

บทคัดย่อ

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ เป็นที่สนใจในทางทฤษฎีเคมีในระดับโมเลกุล โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ (กราฟโมเลกุล) มีค่าเป็นศูนย์

งานวิจัยนี้จึงได้ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ เป็นค่าเป็นศูนย์ โดยที่กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ คือกราฟเชิงเดียวที่มี $V(S_{n,k})=V(C_{nk})\cup\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ เมื่อ $V(C_{nk})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{nk}\}$ และจุดยอด u_j มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{k(j-1)+1}$ และ v_{kj+1} โดยที่ $j=1,2,...,n-1$ และ u_n จะมีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{k(n-1)+1}$ และ v_1

คำสำคัญ : ดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ประชิด กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

Title	Determinants of Adjacency Matrix of Star Flower Planar Graph
Students	Miss Jitlada Rodsawat Student ID 58050027
	Miss Chonlarat Inthasorn Student ID 58050039
	Mr. Aekkapak Sa-nguansin Student ID 58050201
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2018
Advisor	Assist.Prof. Dr. Decha Samana
Co-advisor	Dr. Ngarmcherd Danpattanamongkon

Abstract

Finding the determinant of the adjacency matrix of graph is of interest in theoretical chemistry in molecules. In particular, finding a necessary and sufficient condition for determinant of the adjacency matrix of the graph (molecular graph) is zero.

This work study conditions of the adjacency matrix of star flower planar graph $S_{n,k}$ which the determinant is zero by the definition star flower planar graph $S_{n,k}$ is a simple graph with $V(S_{n,k}) = V(C_{nk}) \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $V(C_{nk}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{nk}\}$ and vertex u_j join with $v_{k(j-1)+1}$ and v_{kj+1} , $j = 1, 2, \ldots, n-1$ and u_n join with $v_{k(n-1)+1}$ and v_1

Keywords: Determinant, adjacency matrix, star flower planar graph

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาจัดทำ **"ปัญหาพิเศษเรื่องดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ"** นี้ จัดทำขึ้นในวิชาปัญหาพิเศษ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต เพื่อให้เกิดกระบวนการคิดและพัฒนาความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น และทฤษฎีกราฟ ทั้งนี้ ในการจัดทำจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ตรงตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด คณะผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.เดชา สมนะ และ ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ที่กรุณาเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ให้ความช่วยเหลือ ให้คำแนะนำ ให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ ตรวจสอบแก้ไข และให้กำลังใจอันเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้วิจัยมีมานะ และความพยายามในการจัดทำปัญหาพิเศษฯ เรื่องนี้ให้ประสบผลสำเร็จได้ในที่สุด

คณะผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการสอบ และ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการสอบ ที่กรุณาให้ความรู้และข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์เพื่อนำไปแก้ไขให้ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ตลอดจนกรุณาสละเวลามาเป็นกรรมการการสอบในการจัดทำปัญหาพิเศษฯ ฉบับนี้

สุดท้ายนี้คณะผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ พี่น้อง และเพื่อน ๆ ที่รักทุกคนที่ให้กำลังใจ และส่งเสริมสนับสนุนคณะผู้วิจัยได้ทำการศึกษา และจัดทำปัญหาพิเศษฯ นี้จนลุล่วงด้วยดีตลอดมา

คณะผู้วิจัย

พฤษภาคม 2562

สารบัญ

บทคัดย่อภาษาไทย ก

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ข

กิตติกรรมประกาศ ค

สารบัญ ง

สารบัญรูป จ

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ 4

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ 5

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ 5

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน 5

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 5

1.6 แผนการและระยะเวลาในการดำเนินงาน 6

บทที่ 2 บทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้น

2.1 เมทริกซ์ 7

2.2 ดีเทอร์มิแนนต์ 9

2.3 ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ 11

2.4 ทฤษฎีกราฟ 11

บทที่ 3 ขั้นตอนการดำเนินงาน

3.1 ขั้นตอนการออกแบบการกำหนดชื่อจุดและเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 22

3.2 การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 26

3.2.1. การหาดีเทอร์มิแนนต์ด้วยวิธีโคแฟกเตอร์ 26

3.2.2. การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการใช้บทตั้ง 2.1 29

3.2.3. การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการใช้วิธีการดำเนินการตามแถว 33

3.3 กราฟและเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ 36

บทที่ 4 ผลงานวิจัย

4.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$ ที่ $k=2q+1$ โดยที่ $q\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ 42

4.2 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$ ที่ $k=2$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม 50

บทที่ 5 สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลวิจัย 53

5.2 ข้อเสนอแนะ 54

เอกสารอ้างอิง **57**

สารบัญรูป

รูป 2.1 กราฟ G 12

รูป 2.2 กราฟเชิงเดียวและกราฟหลายเชิง 13

รูป 2.3 กราฟ G 14

รูป 2.4 กราฟบริบูรณ์ 14

รูป 2.5 กราฟสองส่วน 15

รูป 2.6 กราฟสองส่วนบริบูรณ์ 15

รูป 2.7 กราฟดาว $K_{1,5}$ 15

รูป 2.8 กราฟวัฏจักร 16

รูป 2.9 กราฟที่มีรอยเดินปิด 17

รูป 2.11 กราฟ basic figure 18

รูป 2.12 การสร้างกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,1}$ 19

รูป 2.13 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{5,2}$ 20

รูป 2.14 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{6,3}$ 21

รูป 3.1 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$ 22

รูป 3.2 การกำหนดชื่อจุดกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$ แบบที่ 1 23

รูป 3.3 การกำหนดชื่อจุดกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$ แบบที่ 2 24

รูป 3.4 การกำหนดชื่อจุดกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$ แบบที่ 3 25

รูป 3.5 กราฟ $S_{3,1}$ 26

รูป 3.6 กราฟ $S_{4,1}$ 28

รูป 3.7 กราฟ $S_{3,1}$ 33

รูป 3.8 กราฟ $S_{5,1}$ 37

รูป 3.9 กราฟ $S_{6,1}$ 37

รูป 3.10 กราฟ $S_{7,1}$ 38

รูป 3.11 กราฟ $S_{8,1}$ 39

รูป 4.1 กราฟ $S_{n,k}$ 40

รูป 4.2 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,1}$ 45

รูป 4.3 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,5}$ 49

รูป 4.4 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{3,2}$ 50

รูป 4.5 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,2}$ 51

รูป 5.1 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,4}$ 55

รูป 5.2 กราฟโมเลกุล

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟเป็นการนำองค์ความรู้ทางทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นมาประยุกต์รวมกัน ซึ่งมีการศึกษาไว้มากมาย โดยในปี 1893 Hadamard [14] ได้ศึกษาว่า ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์เชิงซ้อนขนาด $n\times n$ ซึ่ง $\|a_{ij}\|\geq 1$ แล้ว $\|\det A\|\leq n^{\frac{n}{2}}$ ต่อมาได้ศึกษาการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์จากงานวิจัยของ N. Biggs [16] ในปี 1974 ทำให้ทราบว่าค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟชนิดต่าง ๆ ซึ่งได้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ไว้ดังนี้

1. กราฟวิถี (P_n)

$$\det(A(P_n))=\begin{cases}0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}\\ 1 & \text{เมื่อ } n=2k \text{ และ } k \text{ เป็นจำนวนคี่}\\ -1 & \text{เมื่อ } n=2k \text{ และ } k \text{ เป็นจำนวนคู่}\end{cases}$$

2. กราฟบริบูรณ์ (K_n)

$$\det(A(K_n))=(-1)^{n-1}(n-1)$$

3. กราฟวัฏจักร (C_n)

$$\det(A(C_n))=\begin{cases}2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}\\ 0 & \text{เมื่อ } n=2k \text{ และ } k \text{ เป็นจำนวนคี่}\\ -4 & \text{เมื่อ } n=2k \text{ และ } k \text{ เป็นจำนวนคู่}\end{cases}$$

และในปีเดียวกัน Abdulhafid [7] ได้ศึกษาการนับจำนวนการแผ่ทั่วรูปต้นไม้ของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบพบว่า $\tau(S_{n,k})=2kn(k+2)^{n-1}, n\geq 2$ ต่อมาในปี 1997 S. Fallat และ P. Van Den Driessche [13] ศึกษาการหาค่ามากสุด $W(n,k)$ และค่าน้อยสุด $w(n,k)$ ของค่าสัมบูรณ์ของดีเทอร์มิแนนต์ที่ไม่เป็นศูนย์ของกราฟปรกติดีกรี k ที่มี n จุดยอดและได้คำนวณค่าของ $W(n,2), W(n,n-3)$ และ $w(n,2), w(n,n-3)$ เอาไว้ ต่อมาในปี 2012 Hu [15] และ Abdullahi [1] ได้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ ของกราฟที่มีวัฏจักรอย่างน้อย 1 วัฏจักรและ 2 วัฏจักรไว้ ซึ่งทำให้คณะผู้จัดทำสนใจการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ แต่การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบทำได้ยาก เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบจะขึ้นอยู่กับจำนวนจุดยอดและจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนั้นๆ โดยผู้จัดทำจึงศึกษาเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบพร้อมหาเงื่อนไขที่ทำให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบเป็นศูนย์

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทของทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.2.2 เพื่อหารูปแบบของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

1.2.3 เพื่อหาเงื่อนไขบางประการของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบเป็นศูนย์

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ศึกษาเงื่อนไขบางประการของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ทำให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดเป็นศูนย์

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทของทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.4.2 ศึกษารูปแบบของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

1.4.3 ศึกษาเงื่อนไขบางประการของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดเป็นศูนย์

1.4.4 ตั้งสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีบทเพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

1.4.5 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้ศึกษาเกี่ยวกับบทนิยามและทฤษฎีบทของทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.5.2 ได้รูปแบบของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

1.5.3 ได้เงื่อนไขบางประการของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบเป็นศูนย์

1.6 แผนการและระยะเวลาในการดำเนินงาน

ตาราง 1.1 แผนการและระยะเวลาในการดำเนินงาน

การดำเนินงาน	ระยะเวลา									
	ปี 2561					ปี 2562				
	สิงหาคม	กันยายน	ตุลาคม	พฤศจิกายน	ธันวาคม	มกราคม	กุมภาพันธ์	มีนาคม	เมษายน	พฤษภาคม
ตั้งหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจศึกษา	■									
ศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น		■								
ศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น		■	■							
ศึกษาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ			■	■						
ตั้งสมมติฐานและบทพิสูจน์ทฤษฎีบทเพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ					■	■				
สรุปและวิเคราะห์ผล							■	■		
ทำรูปเล่มปัญหาพิเศษและเตรียมการนำเสนอ									■	
นำเสนอปัญหา										■

บทที่ 2

บทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้น

ในปัญหาพิเศษนี้ผู้จัดทำได้ศึกษาเกี่ยวกับบทนิยามและทฤษฎีบทของพีชคณิตเชิงเส้นและทฤษฎีกราฟ โดยทฤษฎีเบื้องต้น อ้างอิงจาก [2] , [4] , [5] และ [6] เพื่อนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 เมทริกซ์ (Matrix)

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์ขนาด $m\times n$ ประกอบด้วย จำนวนจริงที่เขียนเรียงเป็น**แถว (Row)** m แถวและเขียนในแนวดิ่ง n **หลัก (Column)** โดยปิดล้อมจำนวนจริงเหล่านี้ด้วยเครื่องหมาย [ ] หรือ ( ) จำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ เรียกว่า **สมาชิกของเมทริกซ์**

เราใช้อักษรพิมพ์ใหญ่ภาษาอังกฤษ $A,B,C,\ldots$ แทนเมทริกซ์และอักษรพิมพ์เล็ก $a,b,c,\ldots$ แทนสมาชิกหรือจำนวนในเมทริกซ์ เช่น

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ จะใช้ a_{ij} แทน สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และหลักที่ j ของ A และถ้า A มีขนาดเป็น $m\times n$ แล้ว จะเขียน A ด้วย

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \text{ หรือ } A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

ตัวอย่างเช่น เมทริกซ์ A ที่มีขนาด 4×4 จะเขียนแทนด้วย

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix} \text{ หรือ } A=\left[a_{ij}\right]_{4\times 4}$$

ในกรณีที่เมทริกซ์ A มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลักเท่ากับ n จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็น เมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ และจะเรียก $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ ว่าเป็น**สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของ** A ดังตัวอย่างข้างต้น

บทนิยาม 2.2 $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ จะเป็น**ทรานสโพส** (Transpose) ของ $A=\left[a_{ji}\right]_{n\times m}$ ก็ต่อเมื่อ $b_{ij}=a_{ji}$ เมื่อ $i=1,2,\ldots,m$ และ $j=1,2,\ldots,n$ ใช้สัญลักษณ์ A^T แทนทรานสโพสของ A

เมทริกซ์ชนิดต่างๆ

บทนิยาม 2.3[3] **เมทริกซ์แบบบล็อก (Block Matrix)** คือเมทริกซ์ที่ถูกแบ่งเป็นเมทริกซ์ย่อยในขนาดเท่า ๆ กัน

เช่น กำหนดให้เมทริกซ์ $$B=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\1&1&2&2\\3&3&4&4\\3&3&4&4\end{bmatrix}$$

ซึ่งเมทริกซ์ B สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$

โดยที่ $B_{11}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},B_{12}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix},B_{21}=\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix},B_{22}=\begin{bmatrix}4&4\\4&4\end{bmatrix}$

ดังนั้นเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์แบบบล็อก

บทนิยาม 2.4 **เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)**

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใต้แนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

เช่น U เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$U=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่เหนือแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

เช่น L เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}$$

บทนิยาม 2.5 เมทริกซ์เชิงวงกลม (Circulant Matrix) คือเมทริกซ์ที่ขนาด $n \times n$ ซึ่งประกอบด้วยแถวของการวนสลับของ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ในรูปแบบดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

เช่น A เป็นเมทริกซ์เชิงวงกลม โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)

ค่าหรือตัวเลขที่ได้จากการปฏิบัติการภายในสมาชิกของเมทริกซ์ ซึ่งเมทริกซ์จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น คือ จำนวนแถว และหลักเท่ากัน ดีเทอร์มิแนนต์ของ A จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A|$

ในกรณีที่ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

เราจะเขียน $\det A = |A|$ ในรูป $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

บทนิยาม 2.6[18] ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) คือ ค่าตัวเลขจำนวนใดจำนวนหนึ่ง และมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับเมทริกซ์จัตุรัส ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะเขียนแทนดีเทอร์มิแนนต์ ของ A ด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$

1) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 ถ้า $A = [a]$ แล้ว $\det(A) = a$
2) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

   แล้ว $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3) ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ถ้า $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้ว

$$\det(A)=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23})$$

บทนิยาม 2.7 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$

1. **ไมเนอร์ของ A ที่ตำแหน่ง i,j** $(M_{ij}(A))$ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการตัด แถวที่ i และ หลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออก
2. **โคแฟกเตอร์ของ A ที่ตำแหน่ง i,j** $(C_{ij}(A))$ คือผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ สำหรับแต่ละ $j\in\{1,2,\ldots,n\}$

$$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\ldots+a_{kj}C_{kj}=\sum_{i=1}^{k}a_{ij}C_{ij}$$

ทฤษฎีบท 2.2[3] **ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์แบบบล็อก** (Determinant of Block Matrix) ให้ M เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นเมทริกซ์ย่อย $\boldsymbol{A,B,C}$ และ $\boldsymbol{D}$ ที่มีขนาด $\boldsymbol{n\times n}$ นั่นคือ

$$M=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

ถ้าเมทริกซ์ย่อย $\boldsymbol{C}$ และ $\boldsymbol{D}$ มีสมบัติการสลับที่การคูณแล้ว

$$\det(M)=\det\left(\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{BC}\right)$$

ทฤษฎีบท 2.3 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สามเหลี่ยม (Determinant of Triangular Matrix) ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมแล้ว $\det(A)=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ นั่นคือตัวกำหนดของเมทริกซ์สามเหลี่ยม คือผลคูณของสมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมหลัก

สมบัติดีเทอร์มิแนนต์ กำหนดให้ A,B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ และ k เป็นจำนวนจริง

1) $\det(A^T)=\det(A)$

2) ถ้า A มีสมาชิกในแถวสองแถวหรือสองหลักใด ๆ ซ้ำกันแล้ว $\det(A)=0$

3) ถ้า A มีสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็นศูนย์ทุกตัวแล้ว $\det(A)=0$

4) ถ้า B เป็นเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจาก A โดยการสลับที่กันระหว่างแถวคู่ใดคู่หนึ่ง (หรือหลักคู่ใดคู่หนึ่ง) ของ A เพียงคู่เดียว แล้ว $\det(B)=-\det(A)$

5) $\det(A^n) = (\det(A))^n$

6) $\det(kA) = k^n \det(A)$

7) ถ้า $B = [b_{ij}]$ ได้มาจาก $A = [a_{ij}]$ โดยการบวกแต่ละสมาชิกของแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ของที่ r ของ A ด้วย c เท่าของสมาชิกที่สมนัยกันในแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ที่ s $(r \neq s)$ ของ A แล้ว $\det(B) = \det(A)$

8) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

หมายเหตุ $\det(A) = 0$ เราจะเรียกว่า **เมทริกซ์เอกฐาน (Singular matrix)**

2.3 ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ (Eigenvalue of Matrix)

บทนิยาม 2.8 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ จะเรียกสเกลาร์ λ ที่ทำให้ $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ว่าเป็น **ค่าเฉพาะ (Eigenvalue)** ของ A และเรียกเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับ λ ว่าเป็น **เวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvector)** ของ A

ในการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A เราจะเขียน $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ ใหม่เป็น $\lambda(I - A)\mathbf{v} = 0$ โดย λ จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ถ้าสมการ $\lambda(I - A)\mathbf{v} = 0$ มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ เรียกสมการ $\lambda(I - A)\mathbf{v} = 0$ นี้ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)** ของ A สำหรับสเกลาร์ที่สอดคล้องกับสมการนี้ เป็นค่าเฉพาะของ A และเมื่อกระจาย $|\lambda I - A|$ ออกจะได้**พหุนาม (Polynomial)** ใน λ ซึ่งเรียกว่า **พหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial)** ของ A จะได้ว่า

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สามารถหาโดยการใช้ค่าเฉพาะได้ดังทฤษฎีบท 2.4

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

2.4 ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory)

บทนิยาม 2.9 **กราฟ (graph)** G ประกอบด้วยเซตจำกัด $V(G)$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และเซต $E(G)$ ซึ่งเป็นเซตของ**คู่ไม่เป็นอันดับ (unordered pair)** ของสมาชิกที่แตกต่างกันใน $V(G)$ โดยที่เซต $E(G)$ อาจเป็นเซตว่างก็ได้

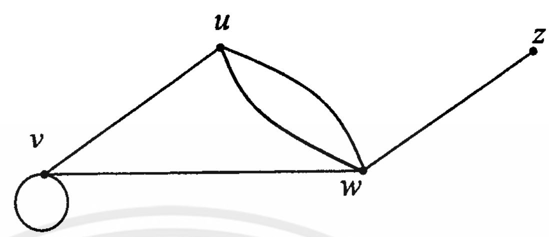
1) สมาชิกของเซต $V(G)$ เรียกว่า **จุดยอด** หรือ **จุด (vertex)**

2) สมาชิกของเซต $E(G)$ เรียกว่า **เส้นเชื่อม** หรือ **เส้น (edge)**

3) ถ้า $|V(G)| = n$ แล้วจะเรียก กราฟ G ว่าเป็นกราฟที่มี**อันดับ** (order) n นั่นคือ กราฟ G มีจุดเป็นจำนวน n จุด

4) ถ้า $|E(G)| = m$ แล้วจะเรียก กราฟ G ว่าเป็นกราฟที่มี**ขนาด** (size) m นั่นคือ กราฟ G มีเส้นเป็นจำนวน m เส้น

ตัวอย่าง 2.1



รูป 2.1 กราฟ G

(ดังรูป2.1) จะเห็นว่า

$V(G) = \{u, v, w, z\}$

$E(G) = \{\{u, v\}, \{v, v\}, \{v, w\}, \{w, z\}, \{u, w\}, \{u, w\}\}$

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกในการเขียนเส้น เราจะเขียน uv แทนเส้น $\{u, v\}$

บทนิยาม 2.10 วงวน (Loop) คือ เส้นที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดยอดเดียวกัน

บทนิยาม 2.11 เส้นเชื่อมขนาน (Multiple edge) คือ เส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดยอดคู่เดียวกัน

ตัวอย่าง 2.2 จากกราฟ (ดังรูป2.1) จะได้ว่า

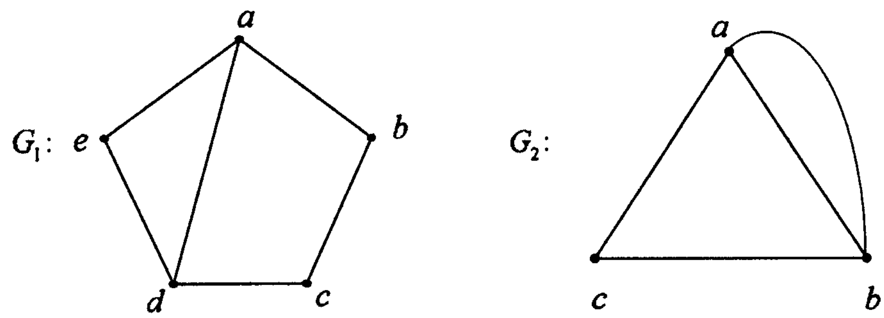
เส้น vv เป็นวงวน

เส้น vv, uw เป็นเส้นเชื่อมขนาน

บทนิยาม 2.12 ให้ G เป็นกราฟ โดยจะเรียกกราฟที่เขียนชื่อของจุดกำกับไว้ว่า **กราฟกำหนดชื่อจุด** (Labeled graph) ส่วนกราฟที่ไม่มีชื่อของจุดกำกับไว้ว่า **กราฟไม่กำหนดชื่อจุด** (Unlabeled graph)

บทนิยาม 2.13 กราฟเชิงเดียว (Simple graph) คือ กราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวนในกราฟ G สำหรับกราฟที่ไม่ใช่กราฟเชิงเดียว เรียกว่า **กราฟหลายเชิง** (Multigraph)

ตัวอย่าง 2.3 กำหนดกราฟ G_1, G_2 ดังรูป



รูป 2.2 กราฟเชิงเดียวและกราฟหลายเชิง

จะได้ว่า G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะไม่มีเส้นเชื่อมขนานและวงวน

G_2 เป็นกราฟหลายเชิง เพราะมีเส้นเชื่อมขนาน

บทนิยาม 2.14 กำหนดให้ $e = uv$ เป็นเส้นในกราฟ G จะกล่าวว่า

- จุดยอด u **ประชิด (adjacent)** กับจุดยอด v
- เส้น e **กระทบ (incident)** กับจุดยอด u หรือกล่าวว่า จุดยอด u กระทบกับเส้น e
- ในทำนองเดียวกัน เส้น e **กระทบ**กับจุดยอด v หรือกล่าวว่า จุดยอด v **กระทบ** กับเส้น e
- เส้น e **เชื่อม (join)** จุดยอด u และจุดยอด v

กำหนดให้ e, f เป็นเส้นในกราฟ G โดยที่ $e \neq f$

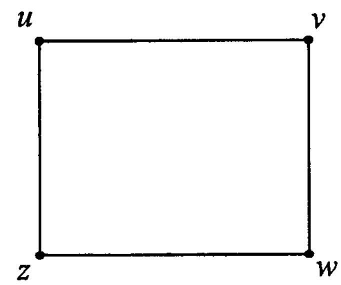
- ถ้าเส้น e และ f กระทบกับจุดยอดเดียวกันในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่า เส้น e **ประชิด**กับเส้น f

บทนิยาม 2.15 กำหนดให้ G เป็นกราฟ โดยที่ $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$

เมทริกซ์ประชิด (Adjacency Matrices) ของกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $A(G) = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าจุด } v_i \text{ ประชิดกับจุด } v_j \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.4 ให้ G เป็นกราฟ (ดังรูป2.3) โดยที่



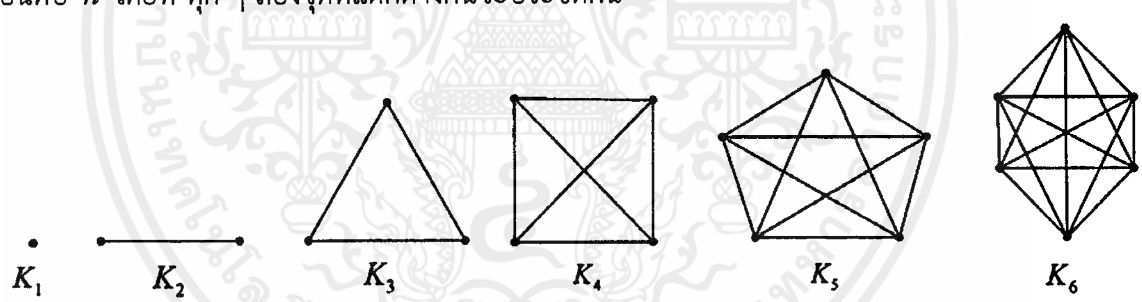
รูป 2.3 กราฟ G

และให้ $A(G)$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G

จะได้เมทริกซ์

$$A(G)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u & v & w & z \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ z \end{array} \end{array}$$

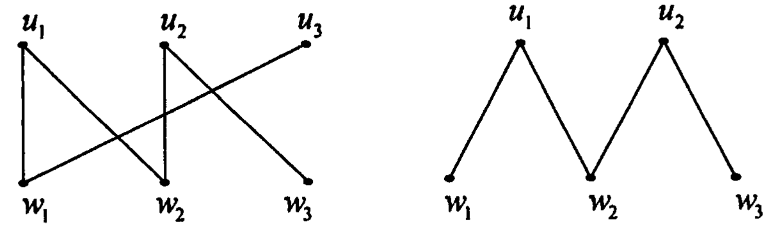
บทนิยาม 2.16 กราฟแบบบริบูรณ์ (Complete graph) ซึ่งเขียนแทนด้วย K_n คือกราฟที่มีอันดับ n โดยที่ ทุก ๆ สองจุดที่แตกต่างกันจะประชิดกัน



รูป 2.4 กราฟบริบูรณ์

บทนิยาม 2.17 กราฟ G เรียกว่า **กราฟสองส่วน** (Bipartite graph) ถ้าเซตของจุดยอด $V(G)$ สามารถแบ่งเป็น 2เซตย่อย U และ W ที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $U \cap W = \varnothing$ และ $V(G) = U \cup W$ แต่ละเส้นของกราฟ G จะเชื่อมระหว่างจุดยอดในเซต U กับจุดยอดในเซต W

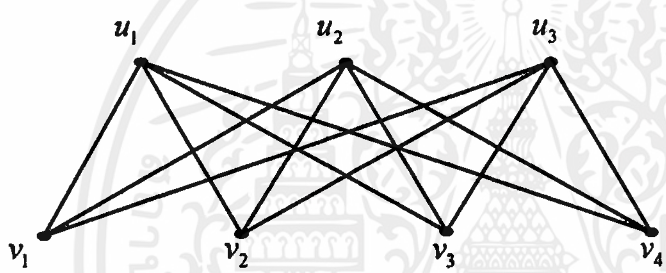
เซตย่อย U และ W ที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียกว่า **เซตแบ่งส่วน (partite set)** ของเซต $V(G)$



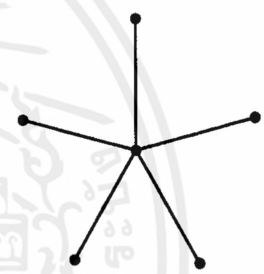
รูป 2.5 กราฟสองส่วน

บทนิยาม 2.18 กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete bipartite graph) คือกราฟสองส่วนซึ่งมีเซต แบ่งส่วน U และ W ซึ่งจุดแต่ละจุดยอดในเซตแบ่งส่วน U ประชิดกับทุกจุดยอดในเซตแบ่งส่วน W

ถ้า $r=|U|\leq|W|=s$ แล้ว กราฟสองส่วนบริบูรณ์เขียนแทนด้วย $K_{r,s}$ สำหรับกรณีที่ $r=1$ กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{1,s}$ เรียกว่า **กราฟดาว (Star graph)**



รูป 2.6 กราฟสองส่วนบริบูรณ์



รูป 2.7 กราฟดาว $K_{1,5}$

บทนิยาม 2.19 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดของกราฟ G

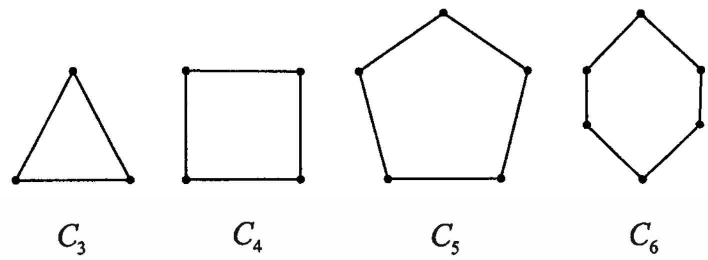
รอยเดิน $u-v$ ($u-v$ trail) ในกราฟ G คือแนวเดิน $u-v$ ในกราฟ G ซึ่งไม่มีเส้นในแนวเดินซ้ำกัน

วิถี $u-v$ ($u-v$ path) ในกราฟ G คือแนวเดิน $u-v$ ในกราฟ G ซึ่งทุก ๆ จุดในแนวเดินต้องแตกต่างกัน โดยเรียกจุดในวิถี $u-v$ ซึ่งไม่ใช่จุดเริ่มต้น u และไม่ใช่จุด v สุดท้ายว่า **จุดภายใน (internal vertex)** ของวิถี $u-v$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันกับแนวเดิน จะได้ว่า รอยเดิน $u-u$ เรียกว่า **รอยเดินปิด (closed trail)** แต่ถ้า $u\neq v$ แล้ว รอยเดิน $u-v$ เรียกว่า **รอยเดินเปิด (open trail)**

ทฤษฎีบท 2.5 ถ้ากราฟ G บรรจุแนวเดิน $u-v$ ที่มีความยาว k แล้ว จะได้ว่า มีวิถี $u-v$ ซึ่งมีความยาวไม่เกิน k ในกราฟ G

บทนิยาม 2.20 กราฟวัฏจักร (Cycle graph) โดยเขียนแทนด้วย C_n เมื่อ $n \geq 3$ คือกราฟที่มีอันดับ n และขนาด n ซึ่งถ้ากำหนดชื่อจุดของกราฟวัฏจักร C_n เป็น $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ แล้วจะได้ว่า เส้นของกราฟวัฏจักร C_n คือ $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n$ และ v_nv_1

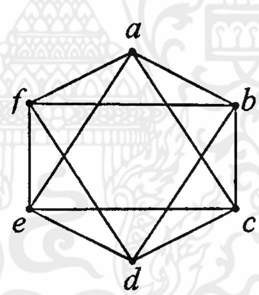


รูป 2.8 กราฟวัฏจักร

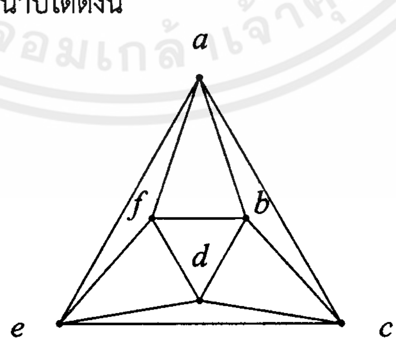
บทนิยาม 2.21 กราฟเชิงระนาบ (Planar graph) คือกราฟที่สามารถวาดบนระนาบโดยเส้นของกราฟไม่ไขว้ทับกัน (ตัดหรือสัมผัสกัน)

กราฟที่ไม่สามารถวาดบนระนาบโดยที่ไม่มีเส้นไขว้ทับกัน เรียกว่า **กราฟไม่เชิงระนาบ (Non-Planar graph)**

เช่น กราฟ G เป็นกราฟเชิงระนาบ

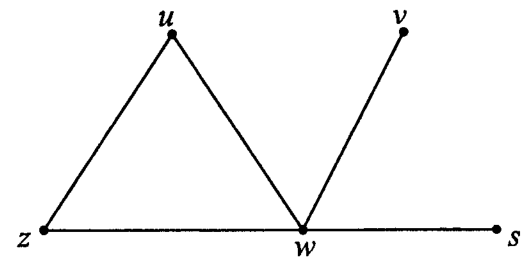


เนื่องจากสามารถวาดบนระนาบได้ดังนี้



บทนิยาม 2.22 วงจร (Circuit) ในกราฟ G คือรอยเดินปิดในกราฟ G ที่มีความยาวอย่างน้อย 3

ตัวอย่าง 2.5 ให้กราฟ G มีรอยเดินปิด ความยาวรอยเดินคือ 3 ดังรูป



รูป 2.9 กราฟที่มีรอยเดินปิด

บทนิยาม 2.23 กำหนดให้ G และ H เป็นกราฟกำหนดชื่อจุด กราฟ H เป็น**กราฟย่อย (subgraph)** ของกราฟ G ก็ต่อเมื่อ $V(H) \subseteq V(G)$ และ $E(H) \subseteq E(G)$

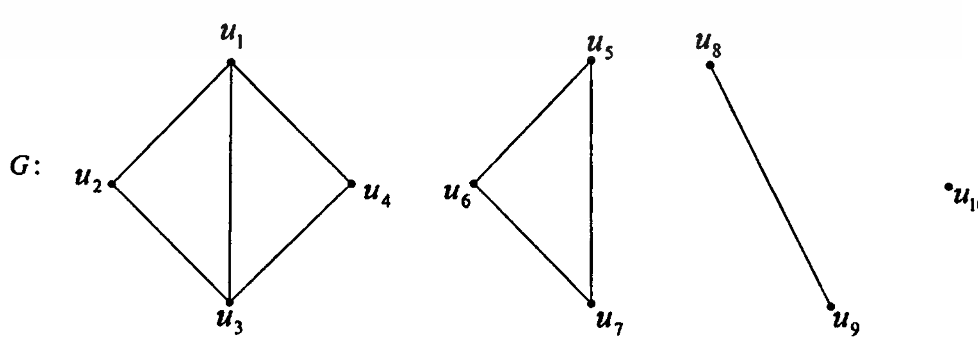
บทนิยาม 2.24 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ของกราฟ G จะได้ว่า

1) ถ้ามีวิถี $u-v$ ในกราฟ G แล้วกล่าวว่า จุด u **เชื่องโยง (connect)** กับจุด v หรือกล่าวว่า จุด u และจุด v **เชื่อมโยงกัน**
2) ถ้าทุก ๆ สองจุดยอดในกราฟ G เชื่อมโยงกันแล้ว กราฟ G เรียกว่า **กราฟเชื่อมโยง (connected graph)**
3) ส่วนกราฟที่ไม่เชื่องโยงกัน จะเรียกว่า **กราฟไม่เชื่อมโยง (disconnected graph)**

หมายเหตุ กราฟที่มีจุดยอด 1 จุด จะเป็นกราฟเชื่อมโยง

บทนิยาม 2.25 ให้ H เป็นกราฟเชื่อมโยงที่เป็นกราฟย่อยของกราฟ G จะเรียกกราฟ H ว่าเป็น**ส่วนประกอบ (Component)** ของกราฟ G ถ้า H ไม่บรรจุอยู่ในกราฟเชื่อมโยงที่เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ที่มีจุดยอดหรือเส้นเชื่อมมากกว่า H

ตัวอย่าง 2.7 ให้ G เป็นกราฟ

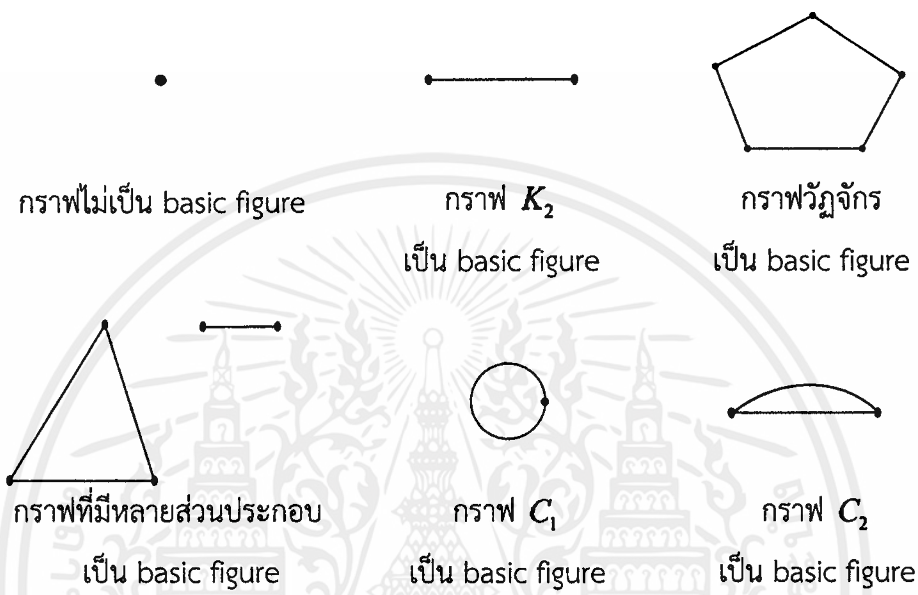


รูป 2.10 กราฟ 4 ส่วนประกอบ

บทนิยาม 2.26 กราฟ U จะเรียกว่า **basic figure** ถ้าในแต่ละ ส่วนประกอบของ U เป็นกราฟแบบบริบูรณ์อันดับที่ 2 (K_2) หรือ กราฟวัฏจักรอันดับที่ q (C_q) โดยที่ C_1 คือวงวน และ C_2 คือกราฟหลายเชิงที่มีจุดยอด 2 จุด และ $p(U)$ คือจำนวนส่วนประกอบของกราฟ U และ $c(U)$ คือจำนวนวงจรทั้งหมดที่บรรจุใน U

หมายเหตุ ในบทนิยามนี้กำหนดให้ C_1 คือวงวน และ C_2 คือกราฟหลายเชิงที่มีจุดยอด 2 จุด

ตัวอย่าง 2.8 กราฟ basic figure



รูป 2.11 basic figure

บทตั้ง 2.1 ให้ G เป็นกราฟหลายเชิง และ $P_G(\lambda)=|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1}+\ldots+c_n$ U_i เป็นเซตของ basic figure อันดับที่ i ที่บรรจุอยู่ใน G จะได้ว่า

$$c_i = \sum_{U\in U_i} (-1)^{p(U)} \cdot 2^{c(U)} \text{ โดยที่ } i = 1,2,3,\ldots,n$$

บทนิยาม 2.27 **กราฟเชิงวงกลม (Circulant graph)** คือกราฟที่สามารถเขียนเมทริกซ์ประชิดของกราฟนั้นให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์เชิงวงกลม

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้าสมาชิกแถวแรกของเมทริกซ์เชิงวงกลมมีสมาชิกเป็น $[0,a_2,\ldots,a_n]$ โดยที่ $a_j=a_{n-j+2}$ สำหรับ $j=2,\ldots,n$ ดังนั้นค่าเฉพาะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(A(G);v)$ มีค่าเป็น

$$E(A(G);v)=\sum_{j=1}^{n}a_j z^{j-1}$$

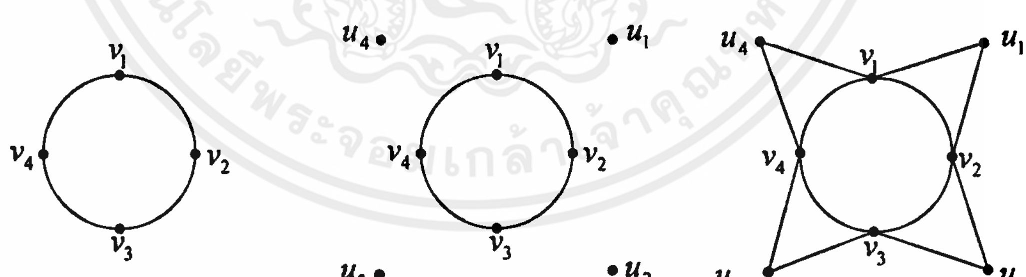
โดยที่ $z=e^{\frac{2v\pi i}{n}}, v=1,2,\ldots,n$

ทฤษฎีบท 2.7[19] **ขั้นตอนวิธีการหาร (Division algorithm)** ให้ m,n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $n\neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียว ซึ่ง $m=nq+r$ โดยที่ $0\leq r<|n|$

บทแทรก 2.1 ให้ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n\neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียว ซึ่ง $m=nq+r$ โดยที่ $0<r\leq n$

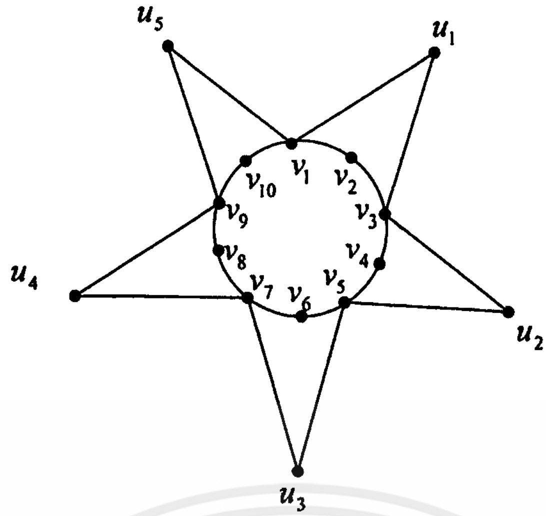
บทนิยาม 2.28 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ (Star Flower Planar graph) $S_{n,k}$ คือกราฟเชิงเดียวที่มี $V(S_{n,k})=V(C_{nk})\cup\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ เมื่อ $V(C_{nk})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{nk}\}$ และจุดยอด u_j มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{k(j-1)+1}$ และ v_{kj+1} โดยที่ $j=1,2,\ldots,n-1$ และ u_n จะมีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{k(n-1)+1}$ และ v_1

ในการสร้างกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ สามารถสร้างได้ (ดังรูป 2.12)



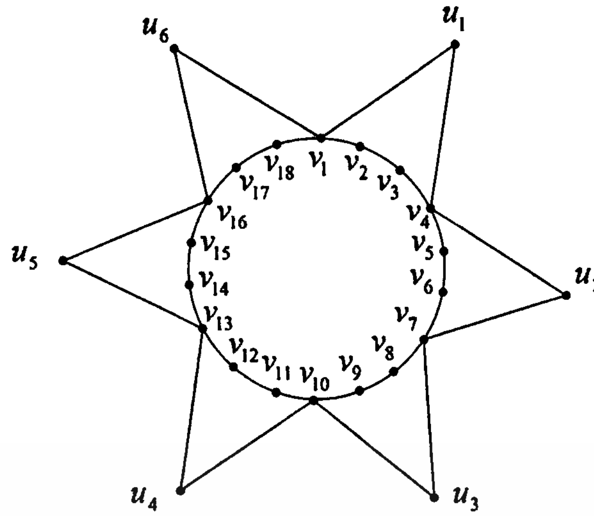
รูป 2.12 การสร้างกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,1}$

จะเห็นได้ว่า [6] กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ จะมีจำนวนจุดทั้งหมดเท่ากับ $n(k+1)$ สำหรับจุดยอดที่มีดีกรี 4 มีจำนวนจุดเท่ากับ n จุด และ สำหรับจุดยอดที่มีดีกรี 2 จะมี $n+(k-1)n$ จุด และมีจำนวนเส้นเท่ากับ $n(k+2)$ เส้น



รูป 2.13 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{5,2}$

(ดังรูป 2.13) จะเห็นว่า กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{5,2}$ โดยที่ $n=5$ และ $k=2$ คือกราฟเชิงเดียวที่มี $V(S_{5,2})=V(C_{10})\cup\{u_1,u_2,\ldots,u_5\}$ เมื่อ $V(C_{10})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{10}\}$ และจุดยอด u_j มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{2(j-1)+1}$ และ v_{2j+1} โดยที่ $j=1,2,\ldots,4$ และ u_5 มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด v_9 และ v_1 และ $S_{5,2}$ มีจำนวนจุดเท่ากับ 5(2+1)=15 จุด และมีจำนวนเส้นเท่ากับ 5(2+2)=20 เส้น จะสังเกตว่าจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 4 มี 5 จุด และจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 2 มี 5+[(2-1)5] = 10 จุด



รูป 2.14 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{6,3}$

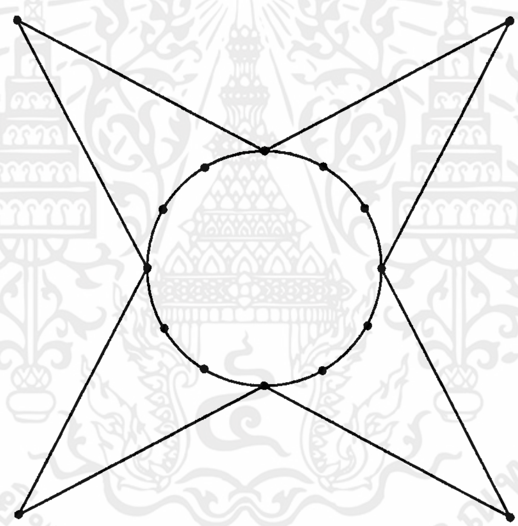
(ดังรูป 2.14) จะเห็นว่า กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{6,3}$ โดยที่ $n=6$ และ $k=3$ คือกราฟเชิงเดียวที่มี $V(S_{6,3})=V(C_{18})\cup\{u_1,u_2,\ldots,u_6\}$ เมื่อ $V(C_{18})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{18}\}$ และจุดยอด u_j มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด $v_{3(j-1)+1}$ และ v_{3j+1} โดยที่ $j=1,2,\ldots,5$ และ u_6 มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด v_{16} และ v_1 และ $S_{6,3}$ มีจำนวนจุดเท่ากับ 6(3+1)=24 จุด และมีจำนวนเส้นเท่ากับ 6(3+2)=30 เส้น จะสังเกตว่าจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 4 มี 6 จุด และจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 2 มี 6+[(3-1)6] = 18 จุด

บทที่ 3
ขั้นตอนการดำเนินงาน

ในเนื้อหาบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการดำเนินงานเพื่อหาเงื่อนไขบางประการของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบเป็นศูนย์ โดยใช้บทนิยามและทฤษฎีบทที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 เพื่อความสะดวกต่อจากนี้เราจะให้สัญลักษณ์ $S_{n,k}$ แทนกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบและ $A(S_{n,k})$ แทนเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

3.1 ขั้นตอนการออกแบบการกำหนดชื่อจุดและเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$

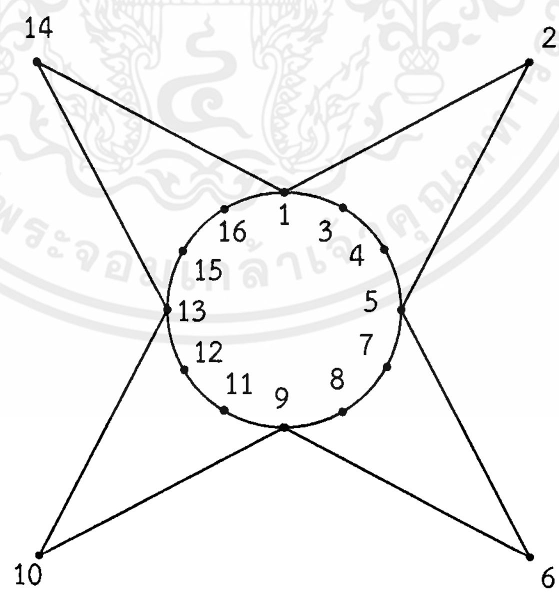
พิจารณากราฟ $S_{4,3}$ (ดังรูป 3.1)



รูป 3.1 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$

เมื่อกำหนดชื่อจุดของกราฟ $S_{4,3}$ แบบที่ 1 (ดังรูป 3.2) จะทำให้ได้เมทริกซ์ประชิด $A(S_{4,3})$ ของกราฟ $S_{4,3}$ ดังนี้

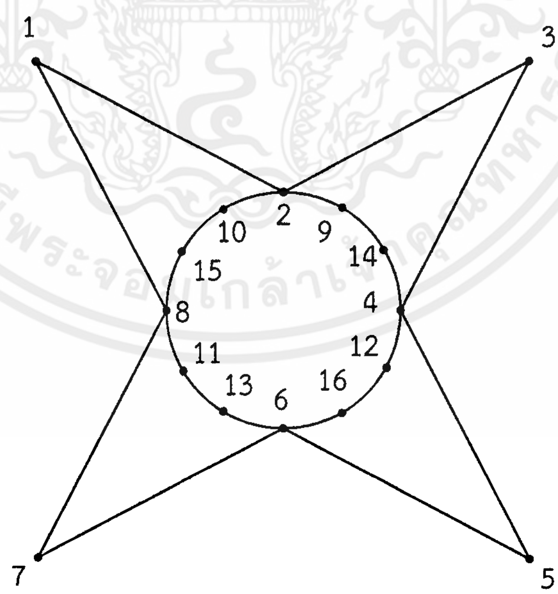
$$A(S_{4,3}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right] \end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array}$$



รูป 3.2 การกำหนดชื่อจุดกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$ แบบที่ 1

เมื่อกำหนดชื่อจุดของกราฟ $S_{4,3}$ แบบที่ 2 (ดังรูป 3.3) จะทำให้ได้เมทริกซ์ประชิด $A(S_{4,3})$ ของกราฟ $S_{4,3}$ ดังนี้

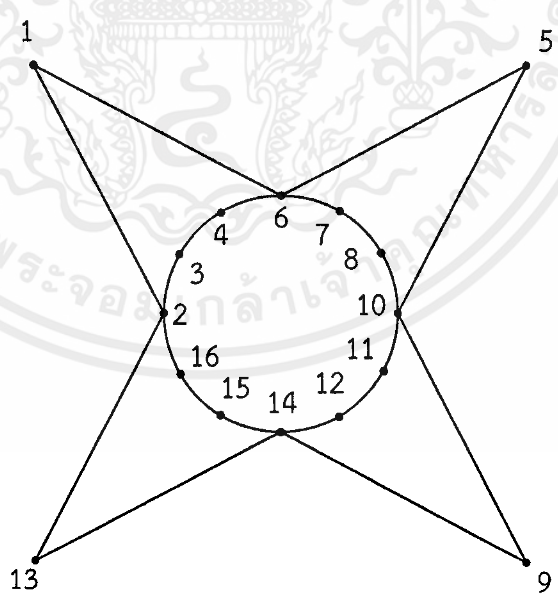
$$A(S_{4,3}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \end{array}$$



รูป 3.3 การกำหนดชื่อจุดกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$ แบบที่ 2

เมื่อกำหนดชื่อจุดของกราฟ $S_{4,3}$ แบบที่ 3 (ดังรูป 3.4) จะทำให้ได้เมทริกซ์ประชิด $A(S_{4,3})$ ของกราฟ $S_{4,3}$ ดังนี้

$$A(S_{4,3}) = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16 \end{array}
\end{array}$$



รูป 3.4 การกำหนดชื่อจุดกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,3}$ แบบที่ 3

สังเกตว่าเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ได้จากการกำหนดชื่อจุดตามข้างต้นในลักษณะที่ต่างกัน จะทำให้เมทริกซ์ประชิดที่ได้ มีลักษณะที่จะนำไปหาดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีต่างๆค่อนข้างยาก ดังนั้นผู้จัดทำจึงออกแบบการกำหนดชื่อจุดของกราฟ $S_{n,k}$ ใหม่เพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้หาดีเทอร์มิแนนต์ในหัวข้อต่อไป

3.2 การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

เราทดลองหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบด้วยวิธีการต่างๆต่อไปนี้

3.2.1. การหาดีเทอร์มิแนนต์ด้วยวิธีโคแฟกเตอร์

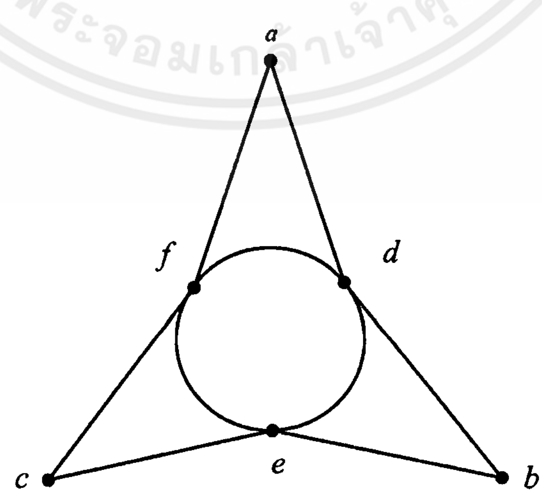
ตัวอย่าง 3.1 ให้ $A(S_{3,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{3,1}$ (ดังรูป 3.5)

$$A(S_{3,1}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}$$

หาดีเทอร์มิแนนต์ด้วยวิธีโคแฟกเตอร์

จาก $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ สำหรับ $j \in \{1,2,\ldots,n\}$

โดย $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$



รูป 3.5 กราฟ $S_{3,1}$

(เลือกหลักที่ 1 เนื่องจากมีเลข 0 มากที่สุดเพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์)

$$A(S_{3,1})=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\1&0&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\det(A(S_{3,1}))=a_{41}C_{41}+a_{61}C_{61}$$

$$=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{vmatrix}+(-1)^{6+1}\begin{vmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{4+1}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}+(-1)^{6+1}(-1)^{5+2}\begin{vmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{4+1}(-1)^{4+1}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}+(-1)^{6+1}(-1)^{5+2}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}$$

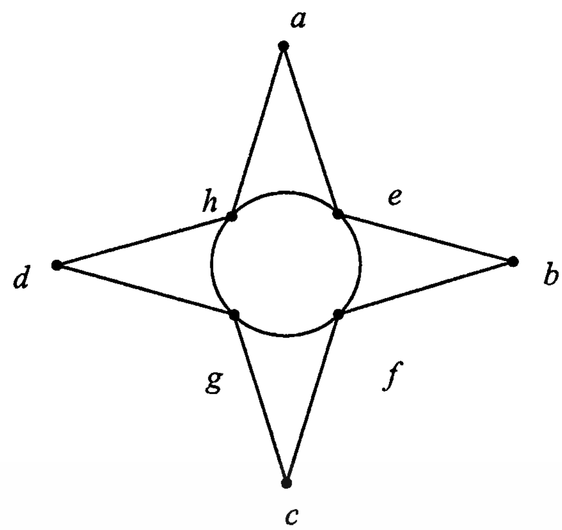
$$=(-1)^{15}[(1+0+1)-(0+0+0)]+(-1)^{19}[(1+0+1)-(0+0+0)]$$

$$=(-1)(2)+(-1)(2)$$

$$= -4$$

ตัวอย่าง 3.2 ให้ $A(S_{4,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{4,1}$ (ดังรูป 3.6)

$$A(S_{4,1})=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}a&b&c&d&e&f&g&h\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&1&0&1\\0&1&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\a\\b\\c\\d\\e\\f\\g\\h\end{array}$$



รูป 3.6 กราฟ $S_{4,1}$

ทำการหาดีเทอร์มิแนนต์ด้วยวิธีโคแฟกเตอร์

$$A(S_{4,1})=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&1&0&1\\0&1&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\det(A(S_{4,1}))=(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\1&1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&1&0\end{vmatrix}+(-1)^{8+1}\begin{vmatrix}0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1&0&1\\1&1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{5+1}(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\1&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&1&0\end{vmatrix}+(-1)^{8+1}(-1)^{7+3}\begin{vmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\1&0&0&1&0&1\\1&1&1&0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{12}(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&1&0&1&0\end{vmatrix}+(-1)^{19}(-1)^{6+2}\begin{vmatrix}0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1\end{vmatrix}.$$

$$=(-1)^{18}(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}+(-1)^{27}(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\left\{(-1)^{24}\left[(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\right]\right\}$$

$$+\left\{(-1)^{33}\left[(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\right]\right\}$$

$$=\left\{(-1)^{24}\left\{(-1)^{1+1}[(1+0+0)-(0+0+0)]+(-1)^{2+1}[(0+0+1)-(0+0+0)]\right\}\right\}$$

$$+\left\{(-1)^{33}\left\{(-1)^{1+1}[(1+0+0)-(0+0+0)]+(-1)^{2+1}[(0+0+1)-(0+0+0)]\right\}\right\}$$

$$=[(1-0)-(1-0)]+(-1)[(1-0)-(1-0)]$$

$$=0$$

3.2.2. การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการใช้บทตั้ง 2.1

ให้ G เป็นกราฟหลายเชิง และ $P_G(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\ldots+c_n$ U_i เป็นเซตของ basic figure อันดับที่ i ที่บรรจุอยู่ใน G จะได้ว่า

$$c_i=\sum_{U\in U_i}(-1)^{p(U)}\cdot 2^{c(U)} \text{ โดยที่ } i=1,2,3,\ldots,n$$

ตัวอย่าง 3.3 สำหรับกราฟ $S_{3,1}$ (จากรูป 3.5) และเมทริกซ์ $A(S_{3,1})$ สามารถหาสัมประสิทธิ์ของพหุนามลักษณะเฉพาะ $P(A(S_{3,1}))=|\lambda I-A(S_{3,1})|=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\ldots+c_n$ ได้ดังนี้

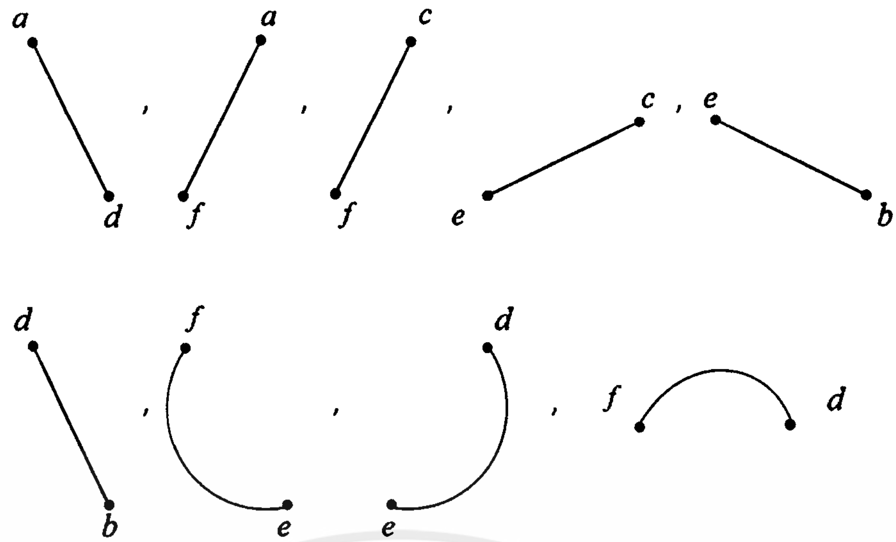
U_1: $\underset{a}{\bullet}$, $\underset{b}{\bullet}$, $\underset{c}{\bullet}$, $\underset{d}{\bullet}$, $\underset{e}{\bullet}$, $\underset{f}{\bullet}$

เนื่องจาก U_1 ไม่เป็น basic figure

ดังนั้น $U_1=\varnothing$

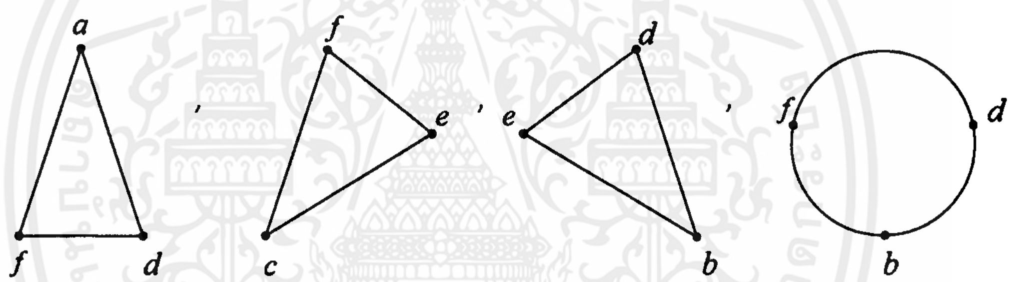
ทำให้ $c_1=0$

U_2 :



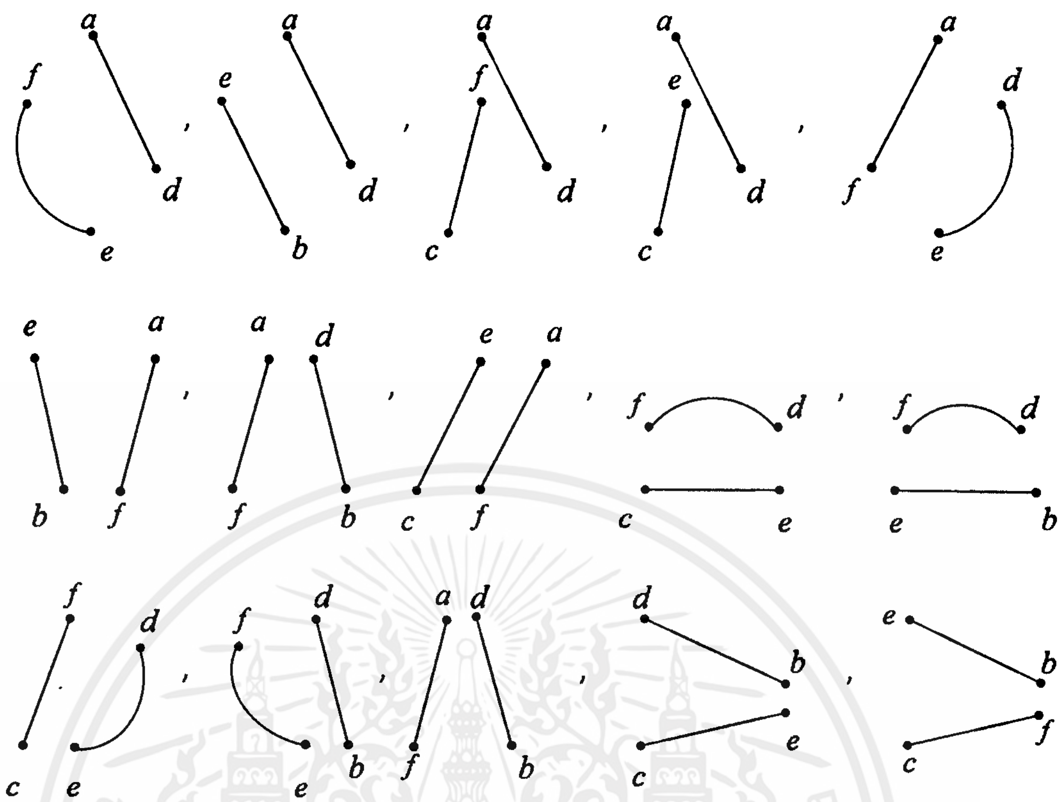
$$c_2 = [(-1)^1 \cdot 2^0] \cdot 9$$
$$c_2 = -9$$

U_3 :



$$c_3 = [(-1)^1 \cdot 2^1] \cdot 4$$
$$c_3 = -8$$

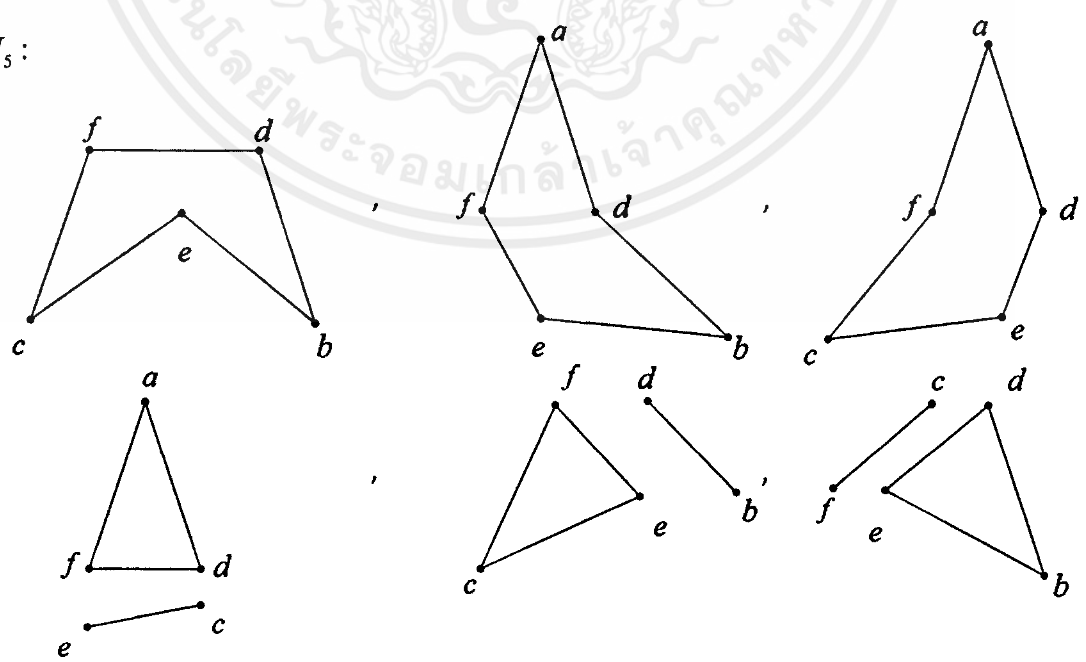
U_4 :

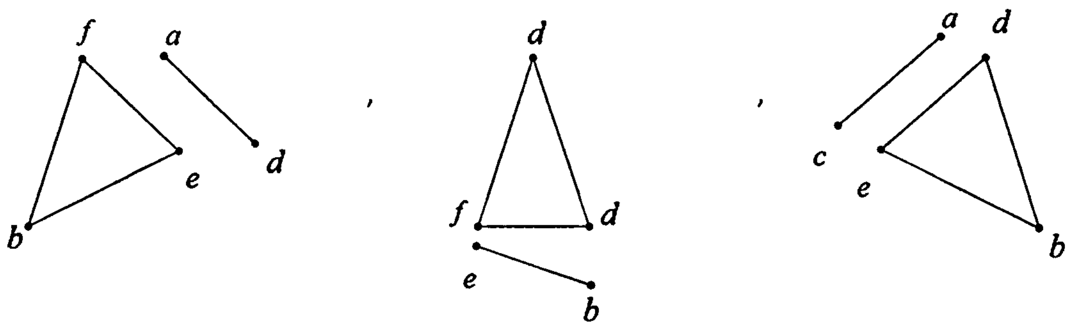


$$c_4 = [(-1)^2 \cdot 2^0] \cdot 15 + [(-1)^1 \cdot 2^1] \cdot 3$$

$$c_4 = 9$$

U_5 :

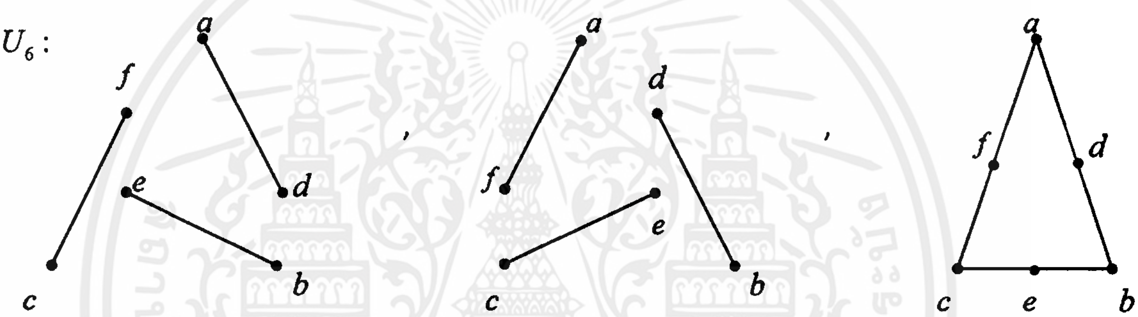




$$c_5 = [(-1)^1 \cdot 2^1] \cdot 3 + [(-1)^2 \cdot 2^1] \cdot 6$$

$$c_5 = 6$$

U_6 :



$$c_6 = [(-1)^3 \cdot 2^0] \cdot 2 + [(-1)^1 \cdot 2^1] \cdot 2$$
$$c_6 = -4$$

ทำให้ได้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\begin{aligned} P(S_{3,1}) &= \left|\lambda I - A(S_{3,1})\right| \\ &= \lambda^6 + c_1\lambda^5 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_4\lambda^2 + c_5\lambda + c_6 \\ &= \lambda^6 - 9\lambda^4 - 8\lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 4 \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A(S_{3,1})$ คือ

$\lambda_1 = -1.61803, \lambda_2 = -1.61803, \lambda_3 = 0.61803, \lambda_4 = 0.61803, \lambda_5 = -1.23607, \lambda_6 = 3.23607$

จาก ทฤษฎีบท 2.4 $\quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

ดังนั้น $\quad \det(A(S_{3,1})) = (-1.61803)(-1.61803)(0.61803)$

$(0.61803)(-1.23607)(3.23607)$

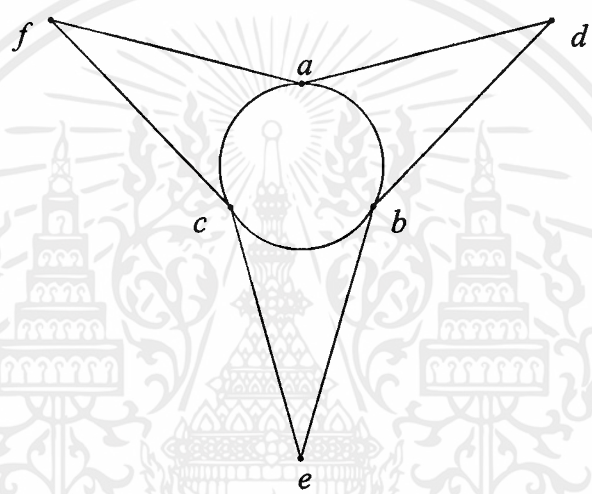
$= -4$

ซึ่งวิธีนี้ได้ผลลัพธ์เท่ากับการคิดแบบวิธีโคแฟกเตอร์

3.2.3. การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการใช้วิธีการดำเนินการตามแถว (Row operation)

ตัวอย่าง 3.4 ให้ $A(S_{3,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{3,1}$ (ดังรูป 3.7)

$$A(S_{3,1}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix}$$



รูป 3.7 กราฟ $S_{3,1}$

ด้วยวิธีการดำเนินการตามแถวจะได้ว่า

$$\det\left(A(S_{3,1})\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \left(R_2 - R_1 \rightarrow R_1\right)$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \quad (R_1 - R_2 \to R_2)$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \quad (R_3 - R_4 \to R_3)$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \quad (R_4 - R_6 \to R_4)$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix} \quad (R_1 - R_6 \to R_1)$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix} \quad (R_4 - R_5 \to R_4)$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix} \quad (R_2 - R_5 \to R_5)$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} \quad (-R_2 + R_6 \to R_6)$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} \quad (-R_2)$$

$$=(-1)(-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} \quad (R_3 \leftrightarrow R_4)$$

$$=(-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} \quad (R_4 \leftrightarrow R_5)$$

$$=(-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \left(R_4+R_6 \to R_6\right)$$

$$=(-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \left(R_5-R_6 \to R_6\right)$$

จาก ทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

$$\det\left(A(S_{3,1})\right)=(-1)(-1)(-1)[(1)(1)(-2)(-1)(1)(2)]$$

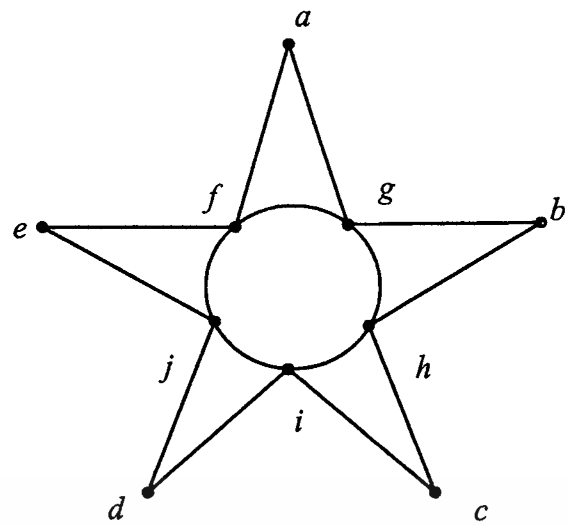
$$=-4$$

3.3 กราฟและเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงถึงบางตัวอย่างของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ และเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบเพื่อแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของจุดยอดกับขนาดของเมทริกซ์ประชิด

ตัวอย่าง 3.5 ให้ $A(S_{5,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{5,1}$ (ดังรูป 3.8)

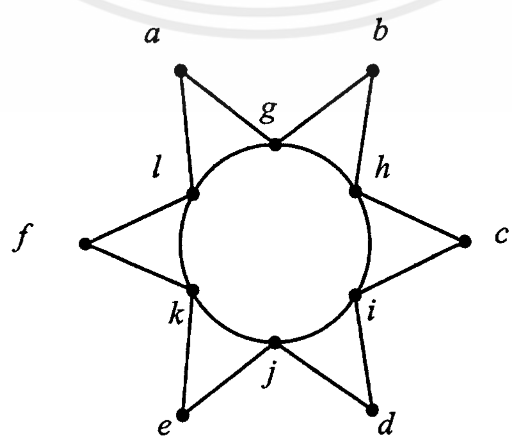
$$A(S_{5,1})=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{array}$$



รูป 3.8 กราฟ $S_{5,1}$

ตัวอย่าง 3.6 ให้ $A(S_{6,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{6,1}$ (ดังรูป 3.9)

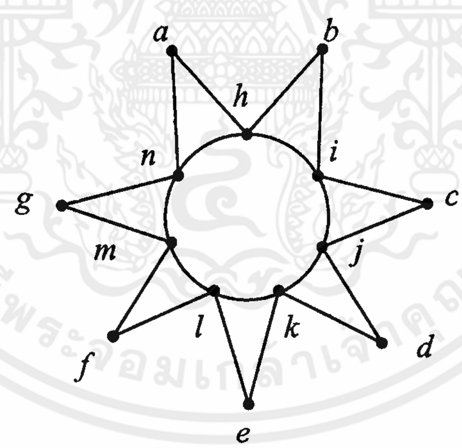
$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l \end{array} \\
A(S_{6,1}) = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ k \\ l \end{array}
\end{array}
$$



รูป 3.9 กราฟ $S_{6,1}$

ตัวอย่าง 3.7 ให้ $A(S_{7,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{7,1}$ (ดังรูป 3.10)

$$
A(S_{7,1}) = \begin{array}{c} \\ \end{array}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
\hline
1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0
\end{array}\right] &
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i\\ j\\ k\\ l\\ m\\ n \end{array}
\end{array}
$$

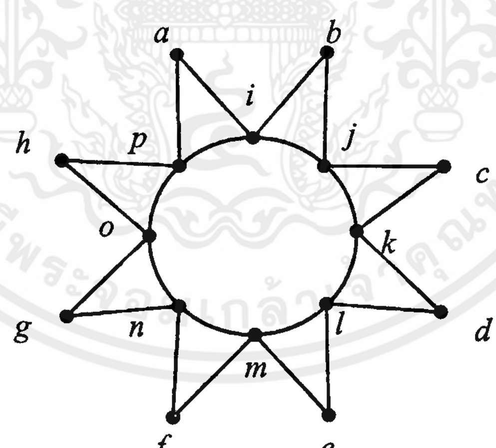


รูป 3.10 กราฟ $S_{7,1}$

ตัวอย่าง 3.8 ให้ $A(S_{8,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{8,1}$ (ดังรูป 3.11)

$$
A(S_{8,1}) = \begin{array}{c} \\ \end{array}
\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p & \\
\end{array}
$$

$$
A(S_{8,1}) = \left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ k \\ l \\ m \\ n \\ o \\ p \end{array}
$$



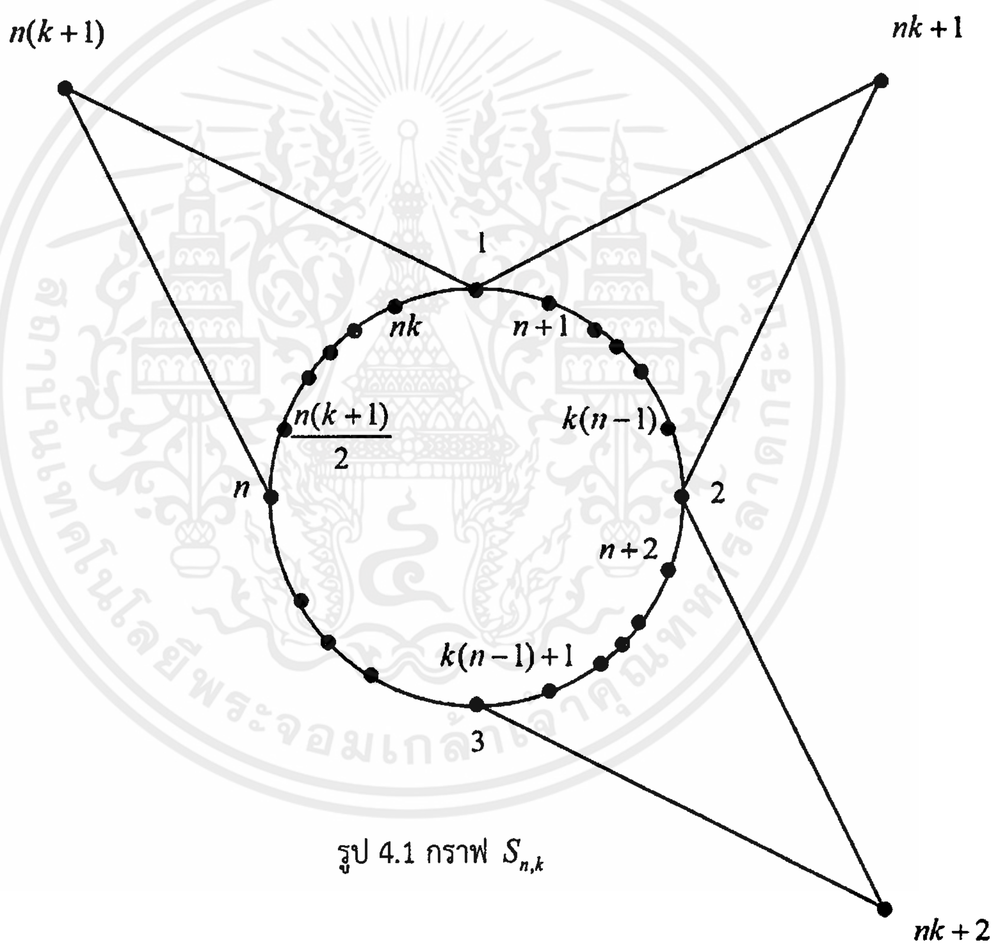
รูป 3.11 กราฟ $S_{8,1}$

จากการดำเนินงานที่กล่าวมาข้างต้นทำให้เราทราบว่า จำนวนจุดของกราฟเพิ่มขึ้น ทำให้ขนาดของเมทริกซ์ประชิดของกราฟใหญ่ขึ้นด้วย ดังนั้นการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $(S_{n,k})$ จึงทำได้ยากเราจึงนำข้อมูลที่ได้มาดำเนินการวิเคราะห์ต่อเพื่อหาแนวทางในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

บทที่ 4
ผลงานวิจัย

จากบทที่ 3 ทำให้เราได้ทราบถึงแนวทางที่จะใช้การหาดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ นั่นคือวิธีการกำหนดชื่อจุด และการนำนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ และเพื่อความสะดวกในบทนี้เราจะให้ $v_j = \{1,2,\ldots,nk\}$ และ $u_t = \{nk+1, nk+2, \ldots, n(k+1)\}$ แทนจุดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ

โดยเราจะกำหนดชื่อจุดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,k}$ (ดังรูป 4.1)



รูป 4.1 กราฟ $S_{n,k}$

จากกำหนดชื่อจุดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบเช่นนี้จะทำให้ได้เมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบดังนี้

หลักที่

$$
A(S_{n,k}) = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & n(k+1)/2 & [n(k+1)/2]+1 & [n(k+1)/2]+2 & \cdots & nk & nk+1 & nk+2 & \cdots & n(k+1)
\end{array} & \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ n+2 \\ \vdots \\ n(k+1)/2 \\ [n(k+1)/2]+1 \\ [n(k+1)/2]+2 \\ \vdots \\ nk \\ nk+1 \\ nk+2 \\ \vdots \\ n(k+1)
\end{array}
\end{array}
$$

แถวที่

4.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$ ที่ $k=2q+1$ โดยที่ $q\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มคี่ เราจะใช้ทฤษฎีบท 2.2 เป็นเครื่องมือในการพิจารณา ดังนั้นในการสร้าง $A(S_{n,k})$ เราจะกำหนดชื่อจุดให้แต่ละจุดของ $S_{n,k}$

บทตั้ง 4.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม $q\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ โดยบทแทรก 2.1 สำหรับจำนวนเต็ม j ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม p,r ซึ่ง $j=(2q+1)p+r,\quad 0<r\le 2q+1$

กำหนดให้ $f:\{1,2,...,n(2q+1)\}\to\{1,2,...,n(2q+1)\}$ โดย

$$f(j)=n(r-1)+(p+1)$$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

บทตั้ง 4.2 ให้ $S_{n,2q+1}$ เป็นกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ $q\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ กำหนดชื่อจุดโดยฟังก์ชัน $f:V(C_{n(2q+1)})\cup\{u_1,u_2,...,u_n\}\to\{1,2,...,2n(q+1)\}$ โดย

$$f(u_t)=n(2q+1)+t \text{ และ}$$

$$f(v_j)=n(r-1)+(p+1)$$

เมื่อ $j=(2q+1)p+r;\quad 0<r\le 2q+1$ สำหรับทุก $t\in\{1,2,...,n\}$, $j\in\{1,2,...,n(2q+1)\}$

จะได้ว่า $A(S_{n,2q+1})$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยที่

$$A(S_{n,2q+1})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$ และ $\boldsymbol{0}=[0_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$

พิสูจน์ กำหนดชื่อจุดโดยฟังก์ชัน

$f:V(C_{n(2q+1)})\cup\{u_1,u_2,...,u_n\}\to\{1,2,...,2n(q+1)\}$ โดย

$$f(u_t)=n(2q+1)+t \qquad \text{และ}$$

$$f(v_j)=n(r-1)+(p+1)$$

เมื่อ $j=(2q+1)p+r;\quad 0<r\le 2q+1$

สำหรับทุก $t\in\{1,2,...,n\}$, $j\in\{1,2,...,n(2q+1)\}$ ทำให้ได้ว่า เมื่อสร้าง

$A(S_{n,2q+1})=\left[a_{ij}\right]$ โดยที่

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{เมื่อจุดชื่อ } i \text{ ประชิดกับจุดชื่อ } j\\ 0 & \text{อื่นๆ}\end{cases}$$

ดังนั้น

หลักที่

$$
\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & n(q+1) & n(q+1)+1 & n(q+1)+2 & \cdots & n(2q+1) & n(2q+1)+1 & n(2q+1)+2 & \cdots & 2n(q+1) \end{array} & \\
A(S_{n,k})= & \left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\hline
0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right] &
\begin{array}{c} 1\\ 2\\ \vdots\\ n\\ n+1\\ n+2\\ \vdots\\ n(q+1)\\ n(q+1)+1\\ n(q+1)+2\\ \vdots\\ n(2q+1)\\ n(2q+1)+1\\ n(2q+1)+2\\ \vdots\\ 2n(q+1) \end{array}
\end{array}
$$

แถวที่

และสามารถจัดรูปแบบเป็นเมทริกซ์แบบบล็อก ได้โดย

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix},\
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

$$, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\boldsymbol{C}$ เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ $\boldsymbol{B}$ และ $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$

ดังนั้น $$A(S_{n,2q+1})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

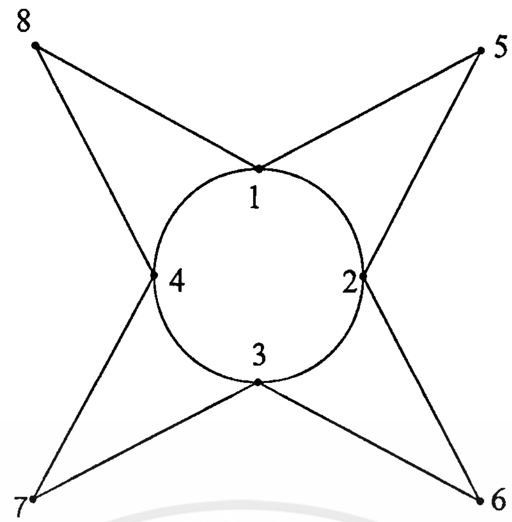
ตัวอย่าง 4.1 **ให้** $A(S_{4,1})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{4,1}$ (ดังรูป 4.2)

$$A(S_{4,1})=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

โดยที่ $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ซึ่ง $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^T$ และ $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$

ดังนั้น $$A(S_{4,1})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$



รูป 4.2 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,1}$

จากรูปแบบเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบข้างต้น ทำให้เราสามารถนำทฤษฎีบท 2.2 มาใช้ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบได้

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $S_{n,2q+1}$ เป็นกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $A(S_{n,2q+1})$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยที่

$$A(S_{n,2q+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B^T} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}, \boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$ และ $\boldsymbol{0} = [0_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$

แล้ว $$\det(A(S_{n,2q+1})) = \det(\boldsymbol{B}^2)$$

และเมทริกซ์ $A(S_{n,2q+1})$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

พิสูจน์ จากบทตั้ง 4.2

$$A(S_{n,2q+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B^T} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.2

$$\begin{aligned} \det(A(S_{n,2q+1})) &= \det(\boldsymbol{A0} - \boldsymbol{BC}) \\ &= \det(-\boldsymbol{BC}) \\ &= \det(-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{C}) \\ &= \det(-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{B^T}) \\ &= \det(-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{B}) \end{aligned}$$

เนื่องจากเมทริกซ์ $\boldsymbol{B}$ มีขนาดเป็นจำนวนเต็มคู่ทำให้ได้ว่า

$$\det(A(S_{n,2q+1})) = \det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{B})$$

ดังนั้น
$$\det(A(S_{n,2q+1})) = \det(\boldsymbol{B}^2) \tag{4.1}$$

ดังนั้นในขั้นตอนต่อไปเราจะพิจารณาที่เมทริกซ์ $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่สามารถจัดรูปแบบเป็นเมทริกซ์แบบบล็อก ดังนี้

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T$ และ $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$

ทำให้ได้ว่า
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

จากบทตั้ง 4.1

และเนื่องจากเมทริกซ์ $\boldsymbol{X}$ มีขนาดเป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น
$$\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{X}^2) \tag{4.2}$$

พิจารณาเมทริกซ์ $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $\boldsymbol{X}$ เป็นเมทริกซ์เชิงวงกลมซึ่งเมื่อทำการดำเนินการบนแถวจะได้ว่า

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

จาก ทฤษฎีบท 2.6 จะได้ว่า

$$E(\boldsymbol{X};v)=\sum_{j=1}^{n}a_j z^{j-1}$$

โดยที่ $z=e^{\frac{2v\pi i}{n}}, v=1,2,\ldots,n$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาแถวแรกของเมทริกซ์ $\boldsymbol{X}$ จะเห็นว่า $a_j=1$ สำหรับ $j=2,3$

ดังนั้น
$$E(\boldsymbol{X};v)=z+z^2$$

นั่นคือ
$$E(\boldsymbol{X};v)=e^{\frac{2v\pi i}{n}}+e^{\frac{4v\pi i}{n}}$$

โดยที่ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ทำให้ได้ว่า

$$E(\boldsymbol{X};v)=\cos\left(\frac{2v\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2v\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{4v\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{4v\pi}{n}\right)$$

$$=\left(\cos\left(\frac{2v\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{4v\pi}{n}\right)\right)+\left(i\sin\left(\frac{2v\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{4v\pi}{n}\right)\right)$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin\theta+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\theta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)$

และ $\cos\theta+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\theta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)$

จะได้ว่า

$$E(\boldsymbol{X};v)=2\cos\left(\frac{\frac{2v\pi}{n}+\frac{4v\pi}{n}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{2v\pi}{n}-\frac{4v\pi}{n}}{2}\right)$$

$$+i\left(2\sin\left(\frac{\frac{2v\pi}{n}+\frac{4v\pi}{n}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{2v\pi}{n}-\frac{4v\pi}{n}}{2}\right)\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{3v\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{-v\pi}{n}\right)+i\left(2\sin\left(\frac{3v\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{-v\pi}{n}\right)\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{3v\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{v\pi}{n}\right)+i\left(2\sin\left(\frac{3v\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{v\pi}{n}\right)\right)$$

$$E(\boldsymbol{X};v)=\cos\left(\frac{v\pi}{n}\right)\left(2\cos\left(\frac{3v\pi}{n}\right)+2i\sin\left(\frac{3v\pi}{n}\right)\right)$$

พิจารณา $v=\frac{n}{2}$

$$E\left(X;\frac{n}{2}\right)=\cos\left(\frac{\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n}\right)\left(2\cos\left(\frac{3\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n}\right)+2i\sin\left(\frac{3\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n}\right)\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\doteq 0$ ทำให้ได้ว่า

$$E\left(X;\frac{n}{2}\right)=0 \tag{4.3}$$

จากสมการ (4.1), (4.2), (4.3) และ ทฤษฎีบท 2.4 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\det(A(S_{n,2q+1})) &= \det(\boldsymbol{B}^2)\\ &= \det(\boldsymbol{X}^2)\det(\boldsymbol{X}^2)\\ &= \det(\boldsymbol{X}^4)\\ &= \left[\prod_{i=1}^{n}E(\boldsymbol{X};v)\right]^4\end{aligned}$$

ดังนั้น $\det(A(S_{n,2q+1}))=0$

สรุปได้ว่า $\det(A(S_{n,2q+1}))=\det(\boldsymbol{B}^2)$ และ เมทริกซ์ $A(S_{n,2q+1})$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

ตัวอย่าง 4.2 จาก ตัวอย่าง 4.1 จะได้ว่า

$$A(S_{4,1})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

เนื่องจากกราฟ $S_{4,1}$ เป็นกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ $q=0$ และ $n=4$ โดยที่มีการกำหนดชื่อจุดโดยฟังก์ชัน $f:V(C_4)\cup\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\to\{1,2,\ldots,8\}$ โดย

$$f(u_t)=4(2(0)+1)+t=4+t \text{ และ}$$

$$f(v_j)=4(r-1)+(p+1)$$

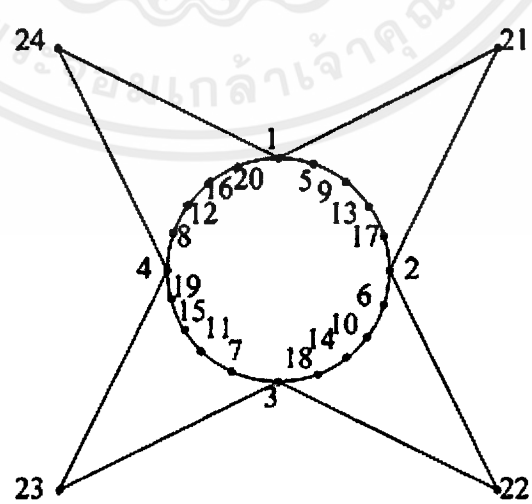
เมื่อ $j=p+r;\quad 0<r\le 1$ สำหรับทุก $t\in\{1,2,3,4\}$, $j\in\{1,2,3,4\}$

จาก ทฤษฎีบท 4.1

ดังนั้น $\det\left(A(S_{4,1})\right)=\det(\boldsymbol{B}^2)$ และ $A(S_{4,1})$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

ตัวอย่าง 4.3 ให้ $A(S_{4,5})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{4,5}$ (ดังรูป 4.3)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21&22&23&24\end{array} \\
A(S_{4,5})= & \begin{bmatrix}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\\17\\18\\19\\20\\21\\22\\23\\24\end{array}
\end{array}$$



รูป 4.3 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,5}$ จะได้เมทริกซ์ประชิดดังนี้

เนื่องจากกราฟ $S_{4,5}$ เป็นกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ $q=2$ และ $n=4$ โดยที่มีการกำหนดชื่อจุดโดยฟังก์ชัน $f: V(C_4) \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \to \{1,2,\ldots,24\}$ โดย

$$f(u_t) = 4(2(2)+1) + j = 20 + t \text{ และ}$$

$$f(v_j) = 4(r-1) + (p+1)$$

เมื่อ $j = 5p + r;\ \ 0 < r \le 5$ สำหรับทุก $t \in \{1,2,3,4\}$, $j \in \{1,2,\ldots,20\}$

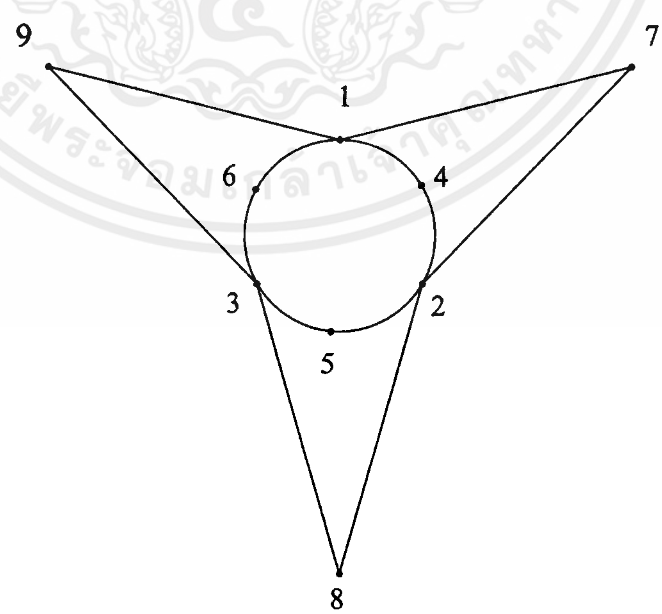
จาก ทฤษฎีบท 4.1

ดังนั้น $\det(A(S_{4,5})) = \det(B^2)$ และ $A(S_{4,5})$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

4.2 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$ ที่ $k=2$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 4.4 ให้ $A(S_{3,2})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{3,2}$ (ดังรูป 4.4)

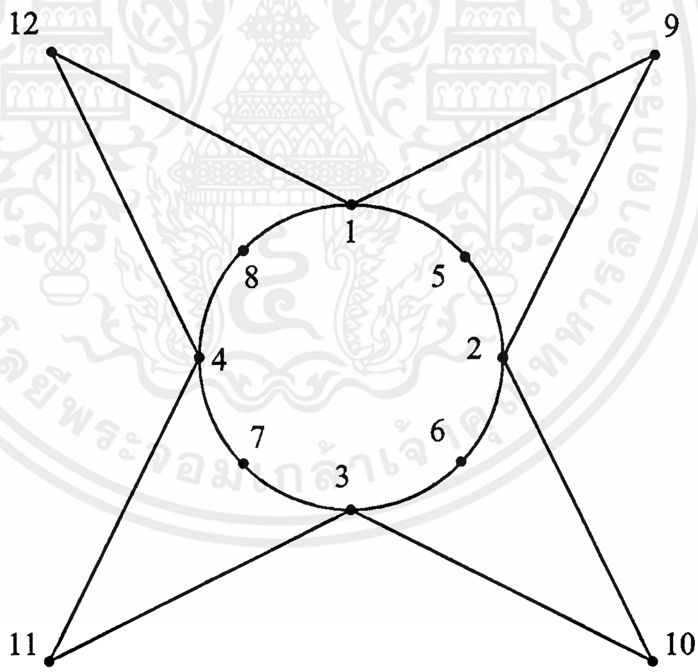
$$A(S_{3,2}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$



รูป 4.4 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{3,2}$

ตัวอย่าง 4.5 ให้ $A(S_{4,2})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{4,2}$ (ดังรูป 4.5)

$$A(S_{4,2}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}$$



รูป 4.5 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{4,2}$

ทำให้ได้รูปแบบของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบดังนี้

หลักที่

$$A(S_{n,2}) = \begin{array}{|ccccccccccccccc|c}
1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n & \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n+1 \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n+2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n+3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3n
\end{array}$$

แถวที่

จะเห็นว่าแถวที่ $n+1$ มีสมาชิกเหมือนกับแถวที่ $2n+1$ และหลักที่ $n+1$ มีสมาชิกเหมือนกับหลักที่ $2n+1$

ดังนั้นจากสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

$$\det(A(S_{n,2})) = 0$$

บทที่ 5
สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

จากที่เราได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบทำให้ได้ข้อสรุปและข้อเสนอแนะผลวิจัยดังนี้

5.1 สรุปผลวิจัย

1) ให้ n เป็นจำนวนเต็ม $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ โดยบทแทรก 2.1 สำหรับจำนวนเต็ม j ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม p, r ซึ่ง $j = (2q+1)p + r, \quad 0 < r \le 2q+1$

กำหนดให้ $f : \{1, 2, ..., n(2q+1)\} \to \{1, 2, ..., n(2q+1)\}$ โดย

$$f(j) = n(r-1) + (p+1)$$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

2) ให้ $S_{n,2q+1}$ เป็นกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ กำหนดชื่อจุดโดยฟังก์ชัน $f : V(C_{n(2q+1)}) \cup \{u_1, u_2, ..., u_n\} \to \{1, 2, ..., 2n(q+1)\}$

โดย $$f(u_t) = n(2q+1) + t \text{ และ}$$

$$f(v_j) = n(r-1) + (p+1)$$

เมื่อ $j = (2q+1)p + r;\ 0 < r \le 2q+1$ สำหรับทุก $t \in \{1, 2, ..., n\}$

$j \in \{1, 2, ..., n(2q+1)\}$ จะได้ว่า $A(S_{n,2q+1})$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยที่

$$A(S_{n,2q+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}, \boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$ และ $\boldsymbol{0} = [0_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$

3) ให้ $S_{n,2q+1}$ เป็นกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบที่ $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $A(S_{n,2q+1})$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกโดยที่

$$A(S_{n,2q+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}, \boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$ และ $\boldsymbol{0} = [0_{ij}]_{n(q+1)\times n(q+1)}$

แล้ว $$\det(A(S_{n,2q+1})) = \det(\boldsymbol{B}^2)$$

และเมทริกซ์ $A(S_{n,2q+1})$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

4) เมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$ เป็นเมทิรกซ์เอกฐานเมื่อ $k=2$ และ n เป็นจำนวนเต็มนั่นคือ

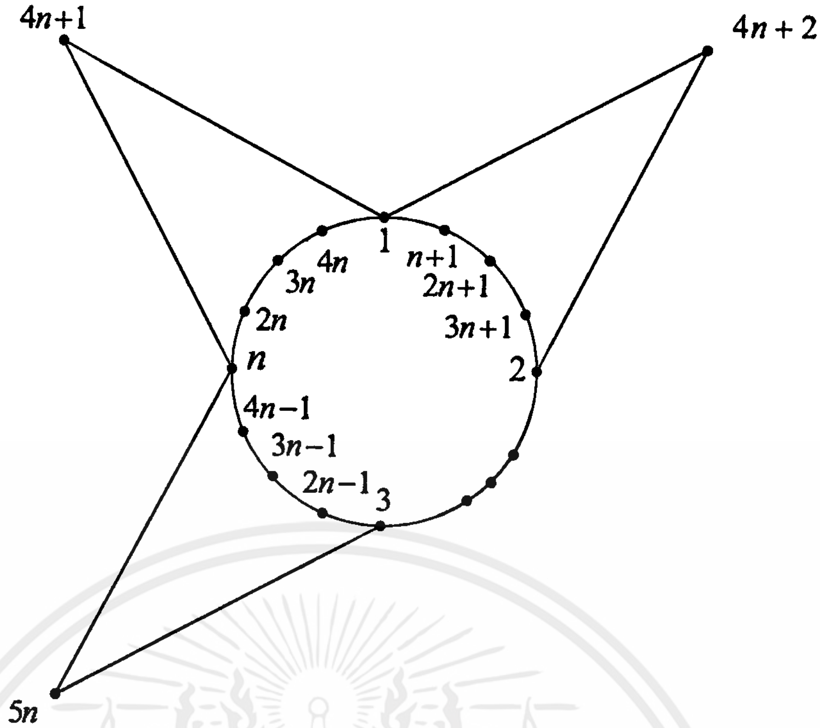
$$\det(A(S_{n,2}))=0$$

5.2 ข้อเสนอแนะ

1) การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,k}$ ที่ $k=4$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือ $S_{n,4}$

ให้ $A(S_{n,4})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $S_{n,4}$ (ดังรูป 5.1)

$$
\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \ldots & 3n & 3n+1 & 3n+2 & 3n+3 & \ldots & 4n & 4n+1 & 4n+2 & 4n+3 & \ldots & 5n
\end{array} & \\
A(S_{n,4})= & \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix} & \begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ n+2 \\ n+3 \\ \vdots \\ 2n \\ 2n+1 \\ 2n+2 \\ 2n+3 \\ \vdots \\ 3n \\ 3n+1 \\ 3n+2 \\ 3n+3 \\ \vdots \\ 4n \\ 4n+1 \\ 4n+2 \\ 4n+3 \\ \vdots \\ 5n
\end{array}
\end{array}
$$



รูป 5.1 กราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ $S_{n,4}$

และสามารถจัดรูปแบบเป็นเมทริกซ์ขนาด 5×5 ดังนี้

$$A(S_{n,4}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & A & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A^T} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

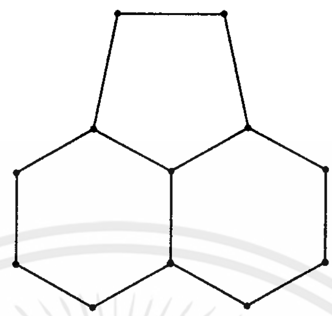
โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$

และ $\boldsymbol{I}$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

จะได้เมทริกซ์ประชิดของ $S_{n,4}$ คือ $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & A & B \\ I & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ A^T & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

2) การนำไปศึกษาต่อและใช้ประโยชน์ในด้านของเคมี

เนื่องจากกราฟโมเลกุลมีรูปร่างใกล้เคียงกับกราฟดาวดอกไม้เชิงระนาบ และดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟโมเลกุลที่เป็นศูนย์ จะสามารถพบได้ว่าจะมีอิเล็กตรอนในออร์บิทัลแบบไม่สร้างพันธะ (non-bonding molecular orbitals: NBMO's)



รูป 5.2 กราฟโมเลกุล

เอกสารอ้างอิง

[1] Alireza Abdollahi. **Determinants of Adjacency Matrices of Graphs.** University of Isfahan Vol.1, 2012.

[2] Nitiphoom Adsawatithisakul and Decha Samana. **Determinant of Adjacency Matrix of Square Cycle Graph.** International Journal of Pure and Applied Mathematics. Mathematical Department of KMITL Vol. 90, 2014.

[3] I. Kovacs, D. Silver and Susan G. Williams. **Determinants of Block Matrices and Schur's Formula** ค้นเมื่อ 20 เมษายน 2562, จาก http://citeseerx.ist.psu.edu

[4] วรานุช แขมมณี. **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2558.

[5] พัชรินทร์ เหมโชติ และ ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์. **พีชคณิตเชิงเส้น 1.** กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด มีนเซอร์วิส ซัพพลาย

[6] นิตยา ณ เชียงใหม่. **การประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ.** เชียงใหม่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[7] A. Modabish and M. El Marraki. **Counting the Number of Spanning Trees in the Star Flower Planar Map.** Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011.

[8] A. Graovac and I. Gutman. **The determinant of the Adjacency Matrix of the Graph of a Conjugated Molecule.** Serbia : Croatica Chemica Acta, 1978.

[9] Lingling Huang and Weigen Yan. **On the Determinant of the Adjacency Matrix of a Type of Plane Bipartite Graphs.** MATCH Commun. Math. Comput. Chem, 2012.

[11] John Silvester. **Determinants of Block Matrices.** Mathematical Gazette, The Mathematical Association, 2000.

[12] Nat Sothanaphan. **Determinants of Block Matrices with Non-commuting Blocks.** ค้นเมื่อ 11 เมษายน 2562, จาก https://arxiv.org/abs/1805.06027

[13] S. Fallat and P. van den Driessche. 1997. "Maximum determinant of (0,1) matrices with certain constant row and column sums." *Linear and Multilinear Algebra.* 42(4):303-318.

[14] J. Hadamard. 1935. " Résolution d'une question relative aux determinants. " *Selecta*. 136-142.

[15] S. Hu. 1997. " The Classification and maximum determinants of the adjacency matrices of graphs with one cycle." *J. Math Study*. 36(1):102-104.

[16] N. Biggs. **Algebraic Graph Theory 2nd edition.** University of Cambridge, 1993.

[17] Anna Vainchtein. **Using row reduction to calculate the inverse and determinant of a square matrix.** Department of Mathematics University of Pittsburgh

[18] กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริฐทรัพย์. **แบบฝึกหัดและประเมินผลผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2.** กรุงเทพ ฯ : บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด , 2553

[19] **พัฒนี อุดมกะวานิช. หลักคณิตศาสตร์.** กรุงเทพ ฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2555