โปรแกรมการหาความเสถียรภาพของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นแบบต่อเนื่อง

PROGRAM FOR FINDING THE STABILITY OF SYSTEM OF CONTINUOUS NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

ดุศิตา แสงเงิน
นัฐลดา มีผิว
อรปรียา แดงมิน

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2561

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

PROGRAM FOR FINDING THE STABILITY OF SYSTEM OF CONTINUOUS NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

DUSITA SANGNGERN

NATLADA MEEPHIW

ONPREEYA DANGMIN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2018

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อหัวข้อ โปรแกรมการหาความเสถียรภาพของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นแบบต่อเนื่อง
Program for finding the stability of system of continuous non-linear differential equations

ชื่อนักศึกษา นางสาวดุศิตา แสงเงิน รหัสนักศึกษา 58050062
นางสาวนัฐลดา มีผิว รหัสนักศึกษา 58050093
นางสาวอรปรียา แดงมิน รหัสนักศึกษา 58050192

ปริญญา วิทยาศาตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.ภูษณิศา ล้อมทอง ประธานกรรมการ	
ดร.สิริพร วินเทอร์ กรรมการ	
รศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อหัวข้อ	โปรแกรมการหาความเสถียรภาพของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นแบบต่อเนื่อง Program for finding the stability of system of continuous non-linear differential equations
ชื่อนักศึกษา	นางสาวดุศิตา แสงเงิน รหัสนักศึกษา 58050062 นางสาวนัฐลดา มีผิว รหัสนักศึกษา 58050093 นางสาวอรปรียา แดงมิน รหัสนักศึกษา 58050192
ปริญญา	วิทยาศาตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ศึกษาการหาความเสถียรภาพของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นแบบต่อเนื่องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยนำมาสร้างเป็นโปรแกรมสำหรับช่วยในการ คำนวณหาจุดสมดุล ค่าลักษณะเฉพาะ และบอกความเสถียรภาพของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ รวมถึงแสดงกราฟ ค่าความเสถียรภาพของจุดสมดุล ซึ่งจากการศึกษาการคำนวณหาจุดสมดุลของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น ทำให้ทราบว่ากฎของคราเมอร์มีความเหมาะสมที่สุดที่จะนำมาใช้ในการคำนวณหาจุดสมดุลของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นแบบต่อเนื่อง ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ ในส่วนการหาค่าลักษณะเฉพาะจะใช้ฟังก์ชันของโปรแกรม Scilab มาช่วยคำนวณหาค่าลักษณะเฉพาะ หลังจากคำนวณหาค่าลักษณะเฉพาะแล้ว โปรแกรมจะสามารถบอกได้ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ มีค่าความเสถียรภาพแบบใด และถ้าหากอยากทราบว่ากราฟความเสถียรภาพมีลักษณะแบบใด ก็สามารถเลือกให้โปรแกรมแสดงกราฟความเสถียรภาพได้โดยจะใช้โปรแกรม Wolfram Mathematica ในการแสดงกราฟ

คำสำคัญ : กฎของคราเมอร์, ค่าลักษณะเฉพาะ, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, โปรแกรม Wolfram Mathematica

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Program for finding the stability of system of continuous non-linear differential equations
Students	Miss Dusita Sangngern Student ID 58050062
	Miss Natlada Meephiw Student ID 58050093
	Miss Onpreeya Dangmin Student ID 58050192
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2018
Advisor	Assoc.Prof.Dr.Puntani Pongsumpun
Co-advisor	Dr.Thurdkwan Changpuek

Abstract

This research studied about the stability for system of continuous non-linear model and develop program for finding the equilibrium solutions,eigenvalues and the stability for system of continuous non-linear model and the numerical solutions of model are shown. Moreover, we apply Cramer rule for finding the equilibrium solutions for this model. Eigenvalues are found by using scilab program's function. Also, the program can show the characteristic of the stability for each equilibrium solution and their numerical solutions. The numerical solutions are shown by using Wolfram Mathematica

Keyword : Cramer's rule, eigenvalue, Mathematic model, Wolfram Mathematica Program

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความร่วมมือ และความสามัคคีของทุกๆท่าน รวมไปถึงได้รับคำปรึกษาและคำแนะนำที่ดีจาก รศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์ และ ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก ที่ให้ความช่วยเหลือ แก้ไขข้อผิดพลาดต่างๆที่เกิดให้จนสามารถทำให้ปัญหาพิเศษสำเร็จไปได้ด้วยดี

ขอขอบคุณ ดร.ภูษณิศา ล้อมทอง และ ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ ที่คอยแนะนำรูปแบบของโปรแกรมให้สมบูณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ นายธีรพันธ์ เหล็กเพชร ที่คอยแนะนำและให้คำปรึกษาด้านการเขียนโปรแกรมเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องในการทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้

ท้ายสุดนี้ขอขอบคุณอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ให้ความช่วยเหลือและความสะดวกในการศึกษางานวิจัยและถ่ายทอดวิชาความรู้อันเป็นประโยชน์ในการศึกษางานวิจัยและประยุกต์ใช้งานต่อไป

ดุศิตา แสงเงิน

นัฐลดา มีผิว

อรปรียา แดงมิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข
กิตติกรรมประกาศ ..... ค
สารบัญ ..... ง
สารบัญรูป ..... ช
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ 1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ 1
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน 1
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2
1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน 3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 4
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) 4
2.1.1 สมการแยกตัวแปรได้ 7
2.1.2 สมการเชิงเส้น 8
2.1.3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 13
2.1.3.1 การหาผลเฉลยโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน 14
2.1.3.2 การหาผลเฉลยโดยใช้กฎคราเมอร์ 15
2.2 ระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง (Dynamical System Model) 18
2.2.1 ระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง (Continuous Dynamical System Model) 18
2.2.1.1 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่องแบบไม่จำกัด 19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

2.2.1.2 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่องแบบจำกัด 20
2.2.1.3 การหาจุดสมดุลของระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง 21
2.2.1.4 การหาความเสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง 23
2.2.2 ระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Dynamical System Model) 33
2.2.2.1 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่องแบบไม่จำกัด 34
2.2.2.2 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่องแบบจำกัด 34
2.3 พื้นฐานและทฤษฎีทางคอมพิวเตอร์ 35
2.3.1 โปรแกรม Visual Basic 2010 Express 35
2.3.1.1 ส่วนประกอบของโปรแกรม 35
2.3.2 การเขียนโปรแกรมด้วย SCILAB 41
2.3.2.1 คำสั่งวนซ้ำ 41
2.3.2.2 คำสั่งทดสอบเงื่อนไข 42
2.3.2.3 การวาดกราฟสองมิติ 43
2.3.2.4 การวาดกราฟสามมิติ 44
2.3.3 การใช้งานโปรแกรม Visual Basic ร่วมกับ SCILAB 44
2.3.3.2 ขั้นตอนการเรียกใช้งานไลบรารี Microsoft Scripting Runtime 44
2.3.4 ฟังก์ชันที่เกี่ยวของโปรแกรม Visual Basic 2010 46
2.3.5 ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องของโปรแกรม SCILAB 48
บทที่ 3 การออกแบบระบบและขั้นตอนการดำเนินงาน 50
3.1 การออกแบบระบบ 50
3.2 ระบบงาน 50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

3.3 แผนงานและการพัฒนาระบบ 50
3.4 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม 51
บทที่ 4 การใช้งานโปรแกรม 53
4.1 หน้าแรกของโปรแกรม 53
4.2 หน้าหลักโปรแกรม 53
4.2.1 กำลังสอง 54
4.2.2 กำลังสาม 55
4.2.3 กำลังสี่ 56
4.2.4 กำลังห้า 57
4.2.5 แสดงคู่มือการใช้งาน 58
4.2.6 ข้อผิดพลาด 59
4.2.7 แสดงอาจารย์ที่ปรึกษา 61
4.2.8 แสดงผู้จัดทำ 61
4.3 ตัวอย่างการคำนวณ 62
บทที่ 5 สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ 80
5.1 สรุปผลการดำเนินงาน 80
5.2 ข้อเสนอแนะ 80
5.3 แนวทางการพัฒนาต่อ 81
ภาคผนวก 83
เอกสารคำรับรองเล่มปัญหาพิเศษ 108

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

2.1 ระบบสมการมีผลเฉลยเดียว 9

2.2 ระบบสมการมีผลเฉลยเป็นอนันต์ 10

2.3 ระบบสมการไม่มีผลเฉลย 10

2.4 กราฟของ $x_1 - 2x_2 = 3$ และ $-x_1 + 3x_2 = 5$ 11

2.5 กราฟของ $x - 5y = -4$ และ $2x - 10y = -10$ 12

2.6 กราฟของ $x + 2y = 5$ และ $3x + 6y = 15$ 13

2.7 กราฟแสดงผลเฉลย $N_t = N_0 e^{rt}$ 19

2.8 กราฟแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ 20

2.9 กราฟแสดงผลเฉลยของ $N = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}$ 21

2.10 แสดงหน้าต่าง Start Page 35

2.11 แสดงหน้าต่าง Solution Explorer 36

2.12 แสดงหน้าต่าง Properties 36

2.13 แสดงหน้าต่าง Common Control 37

2.14 แสดงหน้าต่าง Containers 37

2.15 แสดงหน้าต่าง Menus & Toolbars 38

2.16 แสดงหน้าต่าง Data 38

2.17 แสดงหน้าต่าง Components 39

2.18 แสดงหน้าต่าง Printing 39

2.19 แสดงหน้าต่าง Dialogs 40

2.20 แสดงแถบเครื่องมือ Standard Toolbar 40

2.21 แสดง Menu Bar 41

2.22 คำสั่ง for 42

2.23 คำสั่ง while 42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

2.24 คำสั่งทดสอบเงื่อนไข 43
2.25 คำสั่งทดสอบเงื่อนไข 43
2.26 คำสั่งวาดกราฟสองมิติ 43
2.27 คำสั่งวาดกราฟสามมิติ 44
2.28 แนวคิดในการใช้งานร่วมกันระหว่างโปรแกรม Visual Basic และ SCILAB 44
2.29 การประกาศตัวแปรแบบ FileSystemObject 45
2.30 รูปแบบการเรียกใช้งาน FileSystemObject 45
2.31 รูปแบบ FileSystemObject 46
2.32 รูปแบบ CreateTextFile 46
2.33 รูปแบบ TextStream 46
2.34 รูปแบบ Close 47
2.35 รูปแบบ ReadLine 47
2.36 รูปแบบ WriteLine 47
2.37 รูปแบบ Shell 47
2.38 รูปคำสั่ง fprintf 48
2.39 รูปแบบคำสั่ง xs2gif 48
4.1 หน้าแรกของโปรแกรม 53
4.2 หน้าหลักโปรแกรม 54
4.3 สมการกำลังสอง 55
4.4 สมการกำลังสาม 56
4.5 สมการกำลังสี่ 57
4.6 สมการกำลังห้า 58
4.7 คู่มือการใช้งาน 58
4.8 ข้อผิดพลาดที่เป็นตัวเลข 59
4.9 ข้อผิดพลาดที่เป็นตัวแปร 59
4.10 ข้อผิดพลาดสัมประสิทธิ์ 60
4.11 ข้อผิดพลาดจำนวนเชิงซ้อน 60

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

4.12 อาจารย์ที่ปรึกษา 61
4.13 ผู้จัดทำ 61
4.14 จำนวนตัวแปรสมการกำลังสอง 62
4.15 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสอง 62
4.16 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสอง 63
4.17 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลสมการกำลังสอง 64
4.18 ประเภทของจุดสมดุลของสมการกำลังสอง 64
4.19 แสดงกราฟสมการกำลังสองจากจุดสมดุล (a1,b) 65
4.20 แสดงกราฟสมการกำลังสองจากจุดสมดุล (a2,b) 65
4.21 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังสาม 66
4.22 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสาม 66
4.23 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสาม 67
4.24 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังสาม 68
4.25 ประเภทของจุดสมดุลของสมการกำลังสาม 68
4.26 แสดงกราฟของสมการกำลังสามจากจุดสมดุล (a,b1,c) 69
4.27 แสดงกราฟของสมการกำลังสามจากจุดสมดุล (a,b2,c) 69
4.28 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังสี่ 70
4.29 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสี่ 70
4.30 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสี่ 71
4.31 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังสี่ 72
4.32 ประเภทของจุดของสมดุลสมการกำลังสี่ 72
4.33 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a1,b,c1,d) 73
4.34 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a1,b,c2,d) 73
4.35 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a2,b,c1,d) 74
4.36 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a2,b,c2,d) 74
4.37 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังห้า 75
4.38 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังห้า 75
4.39 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังห้า 76

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

4.40 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังห้า 77
4.41 ประเภทของจุดสมดุลของสมการกำลังห้า 77
4.42 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b1,c,d1,e) 78
4.43 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b1,c,d2.e) 78
4.44 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b2,c,d1,e) 79
4.45 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b2,c,d2,e) 79

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิชาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น ทางการแพทย์ ด้านการบริหารธุรกิจ เพื่อเป็นตัวเลือกในการตัดสินใจ เช่น การลดต้นทุนสินค้า การส่งสินค้าให้ทันเวลา รวมไปถึงการหาผลกระทบที่เป็นไปได้ของธุรกิจ เป็นต้น และเพื่อการศึกษาแบบจำลองต่างๆที่เกิดขึ้นจากสถานการณ์จริงได้อีกด้วย ซึ่งจากการศึกษาในวิชาดังกล่าวทำให้ทราบสมการที่จะสามารถนำมาคำนวณในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ มี 2 แบบ คือ แบบจำลองระบบสมการเชิงเส้นและแบบจำลองระบบสมการไม่เชิงเส้น การที่จะได้คำตอบของปัญหานั้นมีวิธีการคำนวณค่อนข้างยุ่งยากทำให้เวลาที่เราจะหาคำตอบของปัญหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แต่ละครั้งใช้เวลานานในการหาคำตอบ ทำให้เราเกิดความคิดที่ว่า ถ้ามีโปรแกรมสำหรับช่วยคำนวณอาจทำให้ประหยัดเวลาในการทำมากขึ้น และน่าจะมีโอกาสคำนวณผิดพลาดน้อยกว่าการคำนวณด้วยมือ หลังจากการสืบค้นข้อมูลทำให้เราทราบได้ว่าโปรแกรมในการช่วยคำนวณได้มีผู้เริ่มทำมาแล้วบ้าง แต่โดยส่วนมากจะเป็นการคำนวณของระบบสมการเชิงเส้น แต่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่ได้มีเพียงเชิงเส้นเท่านั้น ยังมีแบบไม่เชิงเส้นด้วย เราจึงเริ่มทำการพัฒนาโปรแกรมการคำนวณสำหรับไม่เชิงเส้นขึ้นมา เพื่อใช้ในการแก้หาผลเฉลยได้ถูกต้องและรวดเร็วมากขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาและค้นคว้าการหาความเสถียรภาพไม่เชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์
2. เพื่อช่วยในการหาคำตอบของปัญหาโดยใช้โปรแกรมในการคำนวณ
3. เพื่อศึกษาและวิเคราะห์คำตอบของโปรแกรมเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปร

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1. ปัญหาพิเศษนี้สามารถหาความเสถียรภาพไม่เชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์ได้เท่านั้น
2. สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นได้เท่านั้น
3. สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการที่ไม่ใช่ฟังก์ชันอดิศัย
4. ปัญหาพิเศษนี้สามารถหาค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น
5. ปัญหาพิเศษนี้สามารถใช้ในรูปแบบที่เป็นกำลัง 2-5 เท่านั้น

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาสมการที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
3. ศึกษาโปรแกรมที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมการหาผลเฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. วางแผนและออกแบบรูปแบบของโปรแกรม
5. สร้างโปรแกรมตามที่ได้วางแผนไว้
6. ทดสอบโปรแกรม
7. ปรับปรุงโปรแกรม

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถนำโปรแกรมเพื่อหาความเสถียรภาพไม่เชิงเส้นของจุดสมดุลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ชนิดต่อเนื่องไปใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาได้ถูกต้องและรวดเร็วมากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

กิจกรรมการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2561					ปี 2562				
	สิงหาคม	กันยายน	ตุลาคม	พฤศจิกายน	ธันวาคม	มกราคม	กุมภาพันธ์	มีนาคม	เมษายน	พฤษภาคม
วางแผนการวิจัย										
บทที่ 1 บทนำ										
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง										
บทที่ 3 การออกแบบระบบของโปรแกรมและขั้นตอนการดำเนินงาน										
บทที่ 4 การใช้งานโปรแกรม										
บทที่ 5 สรุปผลการดำเนินงานแต่ละขั้นตอน										
ทำเล่มหน้าปก										
ศึกษาและนำเสนอ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ ดัดแปลง เผยแพร่ หรือแสวงหาผลประโยชน์ทางการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ไม่ว่าจะเป็นการใช้งานในรูปแบบใดๆ ก็ตาม

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations)

บทนิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน ตัวแปรอิสระ ตัวแปรตาม และอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระนั้นๆ

บทนิยาม 2.2 ถ้าตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น อนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการก็จะเป็นอนุพันธ์สามัญ เราเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation)**

ถ้าตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการอนุพันธ์ย่อย เราเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation)**

ตัวอย่างที่ 2.1

สมการเชิงอนุพันธ์

1. $\frac{dy}{dx} = 2xy$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $\frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{dy}{dx} + x^2y = e^{3x}$

ตัวอย่างที่ 2.2

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. $3\frac{d^5y}{dx^2} - x^2\frac{d^4y}{dx^4} + e^y\frac{dy}{dx} = -7$

2. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2u+x^3-xy$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial u}{\partial t}-u^2$

บทนิยามที่ 2.3 **อันดับ (order)** ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการ

ระดับขั้น (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการ โดยพิจารณาหลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่างๆ ในสมการมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างที่ 2.3

1. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$ อันดับ 3 ระดับ 1

2. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial u}{\partial t}-\sqrt{u}$ อันดับ 2 ระดับ 2

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}=x^3y+\cos x$ อันดับ 2 ระดับ 1

บทนิยามที่ 2.4 สมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการเชิงเส้น (Linear Equation) ถ้า

1) ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2) ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3) ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นว่า สมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equation)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.4

สมการเชิงเส้น

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}=x^3y+\cos x$

2. $\frac{dy}{dx}=xy$

3. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=u$

4. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$

สมการไม่เชิงเส้น

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}=x^2y+\cos x$

2. $\sqrt{\frac{dy}{dx}}=xy$

3. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=e^u$

4. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$

บทนิยามที่ 2.5 ผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ ฟังก์ชัน (ไม่ว่าจะนิยามโดยชัดแจ้งหรือโดยปริยาย (explicit or implicit)) ที่ปราศจากอนุพันธ์และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ เราเรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงว่า **ผลเฉลยทั่วไป** และเรียกผลเฉลยซึ่งกำหนดค่าคงตัวนั้นให้มีค่าที่แน่นอนว่า **ผลเฉลยเฉพาะ**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.5 $x\frac{dy}{dx}+y=0$

$xy=c$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

$xy=1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดีกรีหนึ่ง

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ หรือ } M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

2.1.1 สมการแยกตัวแปรได้

สมการแยกตัวแปรได้ คือ สมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$F(x)dx+G(y)dy=0$$

การหาผลเฉลยของสมการสามารถแยกตัวแปรได้ ทำได้โดยการอินทิเกรตทีละพจน์ กล่าวคือ

จาก

$$F(x)dx+G(y)dy=0$$

เราจะได้ว่า

$$\int F(x)dx+\int G(y)dy=c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 2.6 $5(1-y^2)dx-2xydy=0$

<u>วิธีทำ</u> จาก $5(1-y^2)dx=2xydy$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $\frac{5}{x}dx-\frac{2y}{1-y^2}dy=0$

เพราะฉะนั้น $\int\frac{5}{x}dx-\frac{2y}{1-y^2}dy=c_1$

$$5\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{1-y^2}d(1-y^2)=c_1$$

เพราะฉะนั้น $5ln|x|+ln|1-y^2|=c_2$ ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^5(1-y^2)=c$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบสมการเชิงเส้น

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งสามารถนำไปแก้ปัญหาได้หลายอย่างไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และอื่นๆ อีกมากมาย ดังนั้น การหาผลเฉลยจึงมีความจำเป็น จึงต้องศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีอยู่หลากหลายวิธี และสามารถเลือกวิธีในการหาผลเฉลยเพื่อให้เหมาะกับปัญหาในแต่ละปัญหา

2.1.2 สมการเชิงเส้น

บทนิยามที่ 2.6 สมการเชิงเส้น (Linear Equations) คือ สมการที่แต่ละพจน์มีเพียงค่าคงตัว หรือเป็นการคูณระหว่างค่าคงตัวกับตัวแปรยกกำลังหนึ่ง ซึ่งจะมีดีกรีของพหุนามเท่ากับ 0 หรือ 1 และไม่ใช่ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง สมการเหล่านี้จะเรียกว่า **สมการเชิงเส้น**

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงเส้นในตัวแปร x และ y คือ $y=mx+c$ โดยที่ m คือค่าคงตัวแสดงความชันของเส้นตรงและ c แสดงจุดที่เส้นตรงตัดแกน y ที่จุด $(0,c)$ หรือสามารถเขียนอยู่ในอีกรูปแบบคือ รูปแบบมาตรฐาน $Ax+By+c=0$

ตัวอย่างที่ 2.7 สมการที่เป็นสมการเชิงเส้นและสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น

1. $x_1-4x_2+5x_3=7$ เป็นสมการเชิงเส้น
2. $y=-\frac{3}{2}+5z-9$ เป็นสมการเชิงเส้น
3. $\sqrt{x_1}+2x_3-x_2=9$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเนื่องจาก x_1 ยกกำลัง $\frac{1}{2}$
4. $xy=3z$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเนื่องจากมีการคูณกันของตัวแปร x และ y
5. $x_1-x_2-3x_3=\frac{5}{9}x_4-11$ เป็นสมการเชิงเส้น
6. $13\cos x=3y$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเนื่องจากมี $\cos x$

รูปแบบของระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และตัวแปรไม่ทราบค่า n ตัว

จาก
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

a_{ij} เมื่อ $i=1,2,...,m$ และ $j=1,2,...,n$ คือ สัมประสิทธิ์ (Coefficient) ของระบบสมการเชิงเส้นสมการที่ (1)

b_i เมื่อ $i=1,2,...,m$ คือค่าคงตัว (Constant)

x_i เมื่อ $i=1,2,...,n$ คือตัวแปรไม่ทราบค่าของระบบสมการเชิงเส้น (1)

รากหรือผลเฉลยหรือคำตอบ (Solution) ของระบบสมการเชิงเส้น (1) หมายถึงจำนวนจริง n จำนวน ที่แทนค่าลงไปในค่า $x_1,x_2,...,x_n$ แล้วทำให้ระบบสมการเชิงเส้น (1) เป็นจริง

ระบบสมการเชิงเส้นหาผลเฉลยได้ เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้นแบบสอดคล้อง** (Consistent)

ระบบสมการเชิงเส้นหาผลเฉลยไม่ได้ เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้นแบบไม่สอดคล้อง** (Inconsistent)

ระบบสมการเชิงเส้นมีผลเฉลยอยู่ 3 แบบ คือ

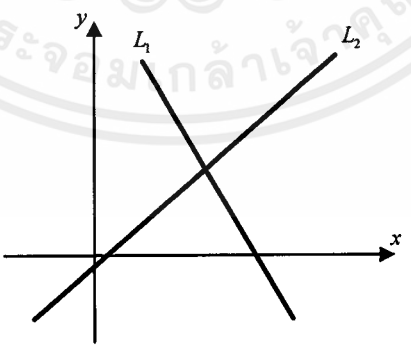
1. มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว (Unique Solution)
2. มีผลเฉลยมากมายไม่จำกัด (Infinite Solution)
3. ไม่มีผลเฉลย (No Solution)

ยกตัวอย่างการพิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการและมี 2 ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ต่อไปนี้

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

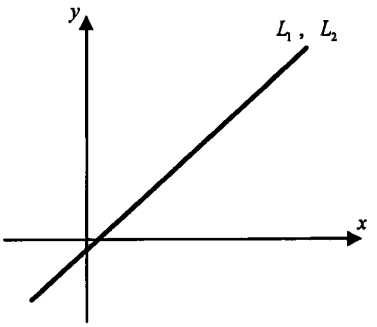
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

กราฟของสมการ 2 สมการนี้แทนด้วย L_1 และ L_2 ตามลำดับ ผลเฉลยของระบบสมการนี้คือ (x,y) ที่เป็นจุดตัดของสมการทั้งสองสมการ กราฟที่เป็นไปได้มี 3 แบบคือ

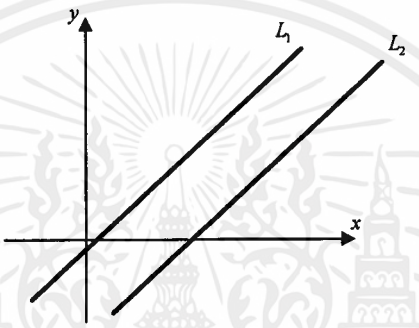


รูปที่ 2.1 ระบบสมการมีผลเฉลยเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2 ระบบสมการมีผลเฉลยเป็นอนันต์



รูปที่ 2.3 ระบบสมการไม่มีผลเฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $x_1 - 2x_2 = 3$

$-x_1 + 3x_2 = 5$

<u>วิธีทำ</u> $x_1 - 2x_2 = 3$ ---------- (2)

$-x_1 + 3x_2 = 5$ ---------- (3)

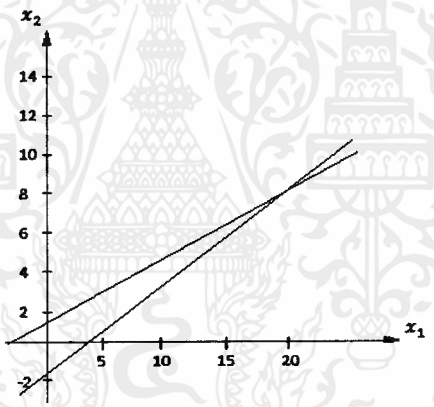
นำ (2)+(3) $x_2 = 8$

แทนใน (2) $x_1 - 2(8) = 3$

$x_1 = 19$

$(x_1, x_2) = (19, 8)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

หรือ ระบบสมการเชิงเส้นมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว



รูปที่ 2.4 กราฟของ $x_1 - 2x_2 = 3$ และ $-x_1 + 3x_2 = 5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $x-5y = -4$

$2x-10y = -10$

<u>วิธีทำ</u> $x-5y = -4$ ---------- (4)

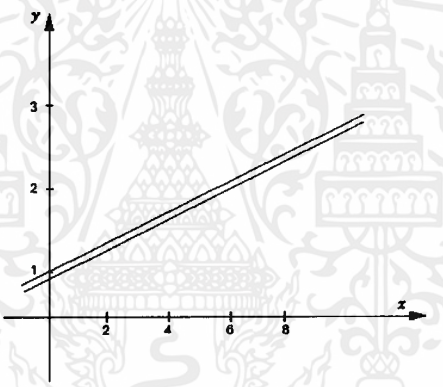
$2x-10y = -10$ ---------- (5)

นำ $2 \div (5)$ $x-5y = -5$ ---------- (6)

นำ (4) - (6) $0 = 1$ ไม่จริง

ดังนั้นไม่มีค่า x และ y ตัวใดที่ทำให้สมการเป็นจริง

หรือระบบสมการเชิงเส้นไม่มีผลเฉลย



รูปที่ 2.5 กราฟของ $x-5y = -4$ และ $2x-10y = -10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.10 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $x+2y=5$

$$3x+6y=15$$

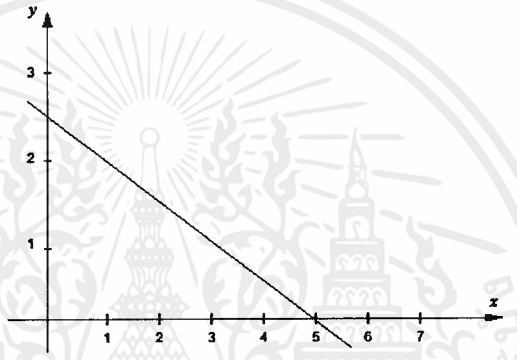
<u>วิธีทำ</u> $x+2y=5$ ---------- (7)

$3x+6y=15$ ---------- (8)

จาก $3\div(8)$ $x+2y=5$ ---------- (9)

จะเห็นได้ว่า สมการที่ (7) และ (9) เป็นสมการเดียวกัน

ดังนั้นระบบสมการมีผลเฉลยเป็นอนันต์



รูปที่ 2.6 กราฟของ $x+2y=5$ และ $3x+6y=15$

2.1.3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

จาก
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้น ที่มี m สมการ และตัวแปรไม่ทราบค่า n ตัว สามารถเขียนได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{A} \times \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}}^{B} \qquad (10)$$

สามารถเขียนเป็นรูปเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ โดยที่ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix)

และเรียก $$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \qquad (11)$$

ว่าเป็น **เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)** ของระบบสมการเชิงเส้น

2.1.3.1 การหาผลเฉลยโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

อธิบายถึงการหาผลเฉลยจากระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ที่เป็นระบบสมการที่มี n สมการ และ n ตัวแปร

ทฤษฎีบทที่ 2.1 กำหนดให้ A มีมิติ n ซึ่งหาตัวผกผันได้ และ B มีมิติ $n \times 1$ใดๆ ของระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีเพียงผลเฉลยเดียวคือ $X = A^{-1}B$

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $2x - 3y = -11$

$$-5x + 8y = 7$$

<u>วิธีทำ</u> สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

จะต้องหา $X = A^{-1}B$

หา $\det A = [16 - 15] = 1$

จาก $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$ หรือ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2\times 2}$

ได้ $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $X = A^{-1}B$

จะได้ $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -67 \\ -41 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = -67$ และ $y = -41$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

2.1.3.2 การหาผลเฉลยโดยใช้กฎคราเมอร์

อธิบายถึงการหาผลเฉลยจากระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ที่เป็นระบบสมการที่มี n สมการ และ n ตัวแปรอีกแบบ ที่นำตัวกำหนดมาช่วยในการหาผลเฉลยด้วย

ทฤษฎีบทที่ 2.2 กำหนดให้ มีมิติ n ซึ่งหาตัวผกผันได้ และ B มีมิติ $n \times 1$ ใดๆ ของระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีเพียงผลเฉลยเดียวคือ $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ สำหรับทุก $i = 1,2,...,n$ เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์ A โดยการแทนที่หลักที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วย เมทริกซ์ B

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $3x - 7y = 9$

$5x + y = 11$

<u>วิธีทำ</u> สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det A = 3 - (-35) = 38$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}}{38}$$

$$= \frac{86}{38} = \frac{43}{19}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}}{38}$$

$$= \frac{-12}{38} = -\frac{6}{19}$$

ดังนั้น $x = \frac{43}{19}$ และ $y = -\frac{6}{19}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = -3$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$$

<u>วิธีทำ</u> สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det A = \left[(-16+1+2)-(4-4+2)\right] = -15$

ดังนั้น $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-15}$

$$x_1 = \frac{(0-2-6)-(-8+0-6)}{-15}$$

$$= \frac{6}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{-15}$$

$$= \frac{(12+0-2)-(-3+4+0)}{-15}$$

$$= \frac{9}{-15} = -\frac{3}{5}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-15}$$

$$= \frac{(16+3+0)-(0-12+2)}{-15}$$

$$= \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น $x_1 = -\frac{2}{5}, x_2 = -\frac{3}{5}$ และ $x_3 = \frac{1}{5}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาผลเฉลยของ $\frac{5}{x^2} + \frac{2}{y^2} - \frac{1}{z^2} = 4$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{y^2} = 1$$

$$\frac{3}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3$$

<u>วิธีทำ</u> สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det A = \left[(-10+0-3)-(0+0+2)\right] = -15$

ดังนั้น $$\frac{1}{x^2} = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-15}$$

$$= \frac{(-8+0-3)-(6+0+2)}{-15}$$

$$= \frac{-19}{-15} = \frac{19}{15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{1}{y^2} = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-15}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{(5+0-3)-(0+0+4)}{-15}$$

$$= \frac{-2}{-15} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-15}$$

$$= \frac{(-30+0+12)-(0+15+6)}{-15}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{-39}{-15} = \frac{39}{15}$$

จาก $\frac{1}{x^2}=\frac{19}{15}$, $\frac{1}{y^2}=\frac{2}{15}$ และ $\frac{1}{z^2}=\frac{39}{15}$

ดังนั้น $x=\pm\sqrt{\frac{15}{19}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$ และ $z=\pm\sqrt{\frac{15}{39}}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

2.2 ระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง (Dynamical System Model)

เป็นแบบจำลองที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของเหตุการณ์จัดแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

2.2.1 ระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง (Continuous Dynamical System Model)

เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าสังเกตเทียบกับเวลาที่เกิดขึ้นต่อเนื่อง เป็นแบบจำลองอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dN}{dt} = f(\mathrm{N,t})$$

เมื่อ $\frac{dN}{dt}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เมื่อเทียบกับ t ซึ่งเป็นอนุพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่องมี 2 ประเภท คือ

2.2.1.1 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่องแบบไม่จำกัด

คือ จำนวนของข้อมูลจะแปรผันอย่างต่อเนื่องกับเวลา โดย N แทนจำนวนของข้อมูล ณ เวลา t ใช้สมการเชิงอนุพันธ์แทนอัตราการเปลี่ยนแปลง จะได้รูปแบบทั่วไปดังนี้

$\frac{dN}{dt}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N ณ เวลา t

$$\therefore \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \text{ และ } N>0$$

เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อ 1 หน่วย ที่เวลา t สามารถเขียนสมการอยู่ในรูปของ

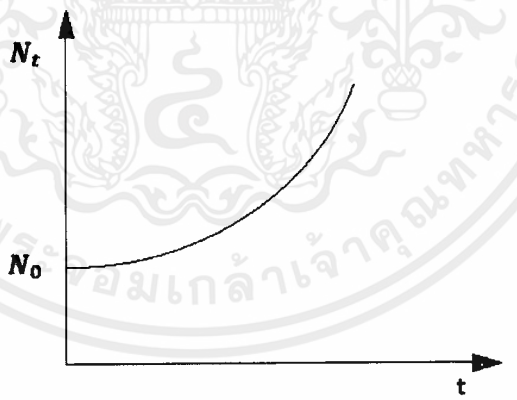
$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}=r \text{ เมื่อ } r \text{ เป็นค่าคงที่}$$

ดังนั้น

$$\frac{dN}{dt}=rN$$

สมการนี้มี solution คือ

$$N_t=N_0e^{rt}$$



รูปที่ 2.7 กราฟแสดงผลเฉลย $N_t=N_0e^{rt}$

จะเห็นได้ว่า N เริ่มต้น ณ เวลาที่ $t=0$ เท่ากับ N_0 ซึ่งเวลาเพิ่มขึ้น N จะเพิ่มขึ้นมีลักษณะเป็น exponential

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.1.2 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่องแบบจำกัด

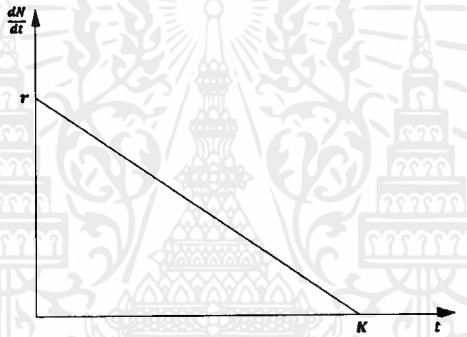
เป็นแบบจำลองที่อัตราการเปลี่ยนแปลงเริ่มต้นสามารถเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว แต่มีข้อจำกัดค่าความสามารถในการรับรอง (carrying capacity) ซึ่งแทนด้วย K ถ้า N คือ จำนวนข้อมูล ณ เวลา t จะได้รูปแบบทั่วไปคือ

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

หรือ

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) \qquad (12)$$

จะได้กราฟดังนี้



รูปที่ 2.8 กราฟแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$

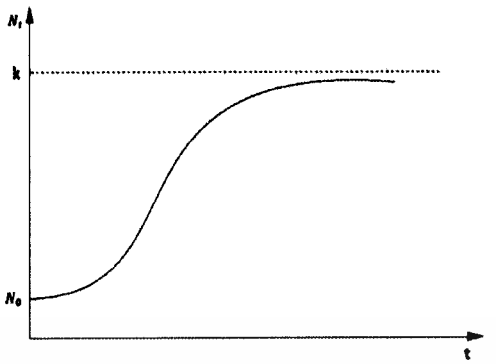
จากสมการ (12) เป็นสมการอันดับหนึ่งและสามารถแยกตัวแปรได้ถ้า $0 < N_0 < K$ และวิธีหาผลเฉลยของสมการ (12) จะมีเงื่อนไข $N = N_0$ และ $t = 0$ นั่นคือ

$$N = \frac{K}{1+\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-rt}}$$

โดยที่ $N_0 > 0$ แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงเริ่มต้นที่ $t = 0$ เราจะพิจารณาว่ามีข้อมูลเพียงพอที่จะกำหนดค่าคงที่ r และ K จากวิธีหาคำตอบจากข้างต้นที่กล่าวมา เราสามารถทำนาย N ณ เวลาที่ t โดยให้ค่าเริ่มต้นเป็น N_0 เมื่อ t มากขึ้น N เข้าใกล้ค่า K และอัตราการเพิ่มขึ้นของ N เข้าใกล้ค่า c

ได้กราฟดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.9 กราฟแสดงผลเฉลยของ $N=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{N_0}-1\right)e^{-rt}}$

2.2.1.3 การหาจุดสมดุลของระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง

พิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)\\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)\\
\frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)
\end{aligned} \qquad (13)$$

เมื่อ $n\geq 0$ แล้ว $(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)$ จะเป็นจุดสมดุลของสมการ (13) ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)&=0\\
f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)&=0\\
f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)&=0\\
&\vdots\\
f_n(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)&=0
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.17 จงหาจุดสมดุลจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 5x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

วิธีทำ จะได้ว่า $2x_1 + 5x_2 = 0$ ---------- (14)

$x_1 + x_2 = 0$ ---------- (15)

นำ $2 \times (15)$ จะได้ $2x_1 + 2x_2 = 0$ ---------- (16)

นำ (14) – (16) จะได้ $3x_2 = 0$

ดังนั้น $x_2 = 0$

นำ $x_2 = 0$ แทนลงใน (15) จะได้ว่า $x_1 = 0$

$\therefore$ จุดสมดุลคือ $(0,0)$

ตัวอย่าง 2.18 จงหาจุดสมดุลจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1^2 - 1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2$$

วิธีทำ จะได้ว่า $2x_1^2 - 1 = 0$ ---------- (17)

$3x_1 + x_2 = 0$ ---------- (18)

จาก (17) จะได้ว่า $2x_1^2 = 1$

นั่นคือ $x_1^2 = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

นำค่า $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ แทนใน (18) จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + x_2 = 0 \qquad\qquad 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + x_2 = 0$$

$$x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad\qquad x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

∴ จุดสมดุลคือ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ และ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

2.2.1.4 การหาความเสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง

พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \\
\frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{19}$$

หลังจากหาจุดสมดุลของ (19) ทำให้ได้จุดสมดุล คือ $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, \ldots, x_n^*)$ เมื่อ $n \geq 0$ การหาความเสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. หาจุดสมดุล $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, \ldots, x_n^*)$ จาก

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. หาเมทริกซ์จาโคเบียน (jacobian matrix) จาก

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_4}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \frac{\partial f_n}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

3. แทนค่า $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, ..., x_n^*)$ ในเมทริกซ์จาโคเบียน ซึ่งคือ

$$J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_4}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \frac{\partial f_n}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, ..., x_n^*)$$

4. หาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue ; λ)
   จาก $det(J^* - \lambda I) = 0$ เมื่อ I = เมทริกซ์เอกลักษณ์
5. ดูเครื่องหมายของค่าลักษณะเฉพาะ
   5.1 ถ้าค่าลักษณะเฉพาะ λ ทั้งหมดเป็นเครื่องหมายลบ แล้วจะได้ว่าจุดสมดุลจุดนั้นมีความเสถียรภาพ (stable equilibrium point)
   5.2 ถ้าค่าลักษณะเฉพาะ λ ทั้งหมดเป็นเครื่องหมายต่างกัน แล้วจะได้ว่าจุดสมดุลจุดนั้นเป็นจุดอานม้า (saddle equilibrium point)
   5.3 ถ้าค่าลักษณะเฉพาะ λ ทั้งหมดเป็นเครื่องหมายบวก แล้วจะได้ว่าจุดสมดุลจุดนั้นไม่มีความเสถียรภาพ (unstable equilibrium point)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาความเสถียรภาพของจุดสมดุลแต่ละจุดของระบบสมการแบบจำลองต่อไปนี้

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1^2 + x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_2 - 1$$

วิธีทำ

1. หาจุดสมดุล

$$-x_1^2 + x_2 = 0 \qquad \text{---------- (20)}$$

$$3x_2 = 1 \qquad \text{---------- (21)}$$

จาก (21) จะได้ $x_2 = \frac{1}{3}$

นำค่า $x_2 = \frac{1}{3}$ แทนใน (20) จะได้

$$-x_1^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$-x_1^2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น $x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0.5774$

$\therefore$ จุดสมดุลคือ $(0.5774, 0.3333)$ และ $(-0.5774, 0.3333)$

2. หาเมทริกซ์จาโคเบียน (jacobian matrix)

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. แทนค่าในเมทริกซ์จาโคเบียน (jacobian matrix)

$$J^*(0.5774, 0.3333) = \begin{pmatrix} -2(0.5774) & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{pmatrix} -1.1548 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{---------- (22)}$$

$$J^*(-0.5774, 0.3333) = \begin{pmatrix} -2(-0.5774) & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1548 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{---------- (23)}$$

4. หาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue ; λ) จาก $det(J^* - \lambda I) = 0$

จาก (22) ; $det(J(0.5774, 0.3333) - \lambda I) = 0$

$$det\left(\begin{pmatrix} -1.1548 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{pmatrix} -1.1548 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} -1.1548 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1.1548 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 1.8452\lambda - 3.4644 = 0$$

หาค่า λ โดยใช้สูตร $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

จะได้ $$\lambda = \frac{-(-1.8452) \pm \sqrt{(-1.8452)^2 - 4(1)(-3.4644)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{1.8452 \pm 4.1548}{2}$$

นั่นคือ $$\lambda_1 = \frac{1.8452 + 4.1548}{2}$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{1.8452 - 4.1548}{2}$$

$$\lambda_2 = -1.1548$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (23) ; $$det(J(-0.5774,0.3333)-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{pmatrix}1.1548 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0$$

$$det\left(\begin{pmatrix}1.1548 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)=0$$

$$det\begin{pmatrix}1.1548-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$(1.1548-\lambda)(3-\lambda)=0$$

$$\lambda^2+(-4.1548\lambda)+3.4644=0$$

หาค่า λ โดยใช้สูตร $\lambda=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

จะได้ $$\lambda=\frac{-(-4.1548)\pm\sqrt{(-4.1548)^2-4(1)(3.4644)}}{2(1)}$$

$$\lambda=\frac{4.1548\pm1.8452}{2}$$

นั่นคือ $$\lambda_3=\frac{4.1548+1.8452}{2}$$

$$\lambda_3=3$$

$$\lambda_4=\frac{4.1548-1.8452}{2}$$

$$\lambda_4=1.1548$$

5. ดูเครื่องหมายของค่าลักษณะเฉพาะ λ

จะเห็นว่า λ_1 และ λ_2 มีเครื่องหมายต่างกันซึ่ง λ_1 มีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วน λ_2 มีเครื่องหมายเป็นลบ แสดงว่า (0.5774,0.3333) เป็นจุดสมดุลอานม้า (saddle equilibrium point)

ส่วน λ_3 และ λ_4 มีเครื่องหมายเหมือนกันซึ่งมีเครื่องหมายเป็นบวก แสดงว่า (–0.5774,0.3333) เป็นจุดสมดุลไม่เสถียรภาพ (unstable equilibrium point)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.20 จงหาความเสถียรภาพของจุดสมดุลแต่ละจุดของระบบสมการไม่เชิงเส้นแบบจำลองต่อไปนี้

$$\frac{da}{dt} = 2a^4 + 25b^3 + c^2 + 5d - 6$$

$$\frac{db}{dt} = 51a^4 + 2b^3 + 32c^2 + 3d - 21$$

$$\frac{dc}{dt} = a^4 + 5b^3 + 2c^2 + 3d - 2$$

$$\frac{dd}{dt} = a^4 + 3b^3 + 5c^2 + 5d - 3$$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

1. หาจุดสมดุลของระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 2 & 25 & 1 & 5 \\ 51 & 2 & 32 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^4 \\ b^3 \\ c^2 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ใช้กฎของคราเมอร์ (Cramers Rule) ในการหาค่า a^4, b^3, c^2, d ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 25 & 1 & 5 \\ 51 & 2 & 32 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad detA = 3131$$

$$a^4 = \frac{det \begin{bmatrix} 6 & 25 & 1 & 5 \\ 21 & 2 & 32 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}}{detA}$$

$$a^4 = \frac{127}{3131}$$

$a_1 = 0.4488$

$a_2 = -0.4488$

$$b^3 = \frac{det \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 5 \\ 51 & 21 & 32 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}}{detA}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$b^3 = \frac{757}{3131}$$

$$b = 0.6230$$

$$c^2 = \frac{det\begin{bmatrix} 2 & 25 & 6 & 5 \\ 51 & 2 & 21 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}}{detA}$$

$$c^2 = \frac{1847}{3131}$$

$$c_1 = 0.7681$$

$$c_2 = -0.7681$$

$$d = \frac{det\begin{bmatrix} 2 & 25 & 1 & 6 \\ 51 & 2 & 32 & 21 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}}{detA}$$

$$d = \frac{-448}{3131}$$

$$d = -0.1431$$

∴ จุดสมดุล คือ

$$(a_1, b, c_1, d) = (0.4488, 0.6230, 0.7681, -0.1431)$$
$$(a_1, b, c_2, d) = (0.4488, 0.6230, -0.7681, -0.1431)$$
$$(a_2, b, c_1, d) = (-0.4488, 0.6230, 0.7681, -0.1431)$$
$$(a_2, b, c_2, d) = (-0.4488, 0.6230, -0.7681, -0.1431)$$

2. หาเมทริกซ์จาโคเบียน (jacobian martix)

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} & \frac{\partial f_1}{\partial c} & \frac{\partial f_1}{\partial d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_2}{\partial c} & \frac{\partial f_2}{\partial d} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a} & \frac{\partial f_3}{\partial b} & \frac{\partial f_3}{\partial c} & \frac{\partial f_3}{\partial d} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a} & \frac{\partial f_4}{\partial b} & \frac{\partial f_4}{\partial c} & \frac{\partial f_4}{\partial d} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. แทนค่าในเมทริกซ์จาโคเบียน ได้ดังนี้

$$J^* = \begin{bmatrix} 8a^3 & 75b^2 & 2c & 5 \\ 204a^3 & 6b^2 & 64c & 3 \\ 4a^3 & 15b^2 & 4c & 3 \\ 4a^3 & 9b^2 & 10c & 5 \end{bmatrix}$$

$$J_1^* = \begin{bmatrix} 8(0.4488)^3 & 75(0.6230)^2 & 2(0.7681) & 5 \\ 204(0.4488)^3 & 6(0.6230)^2 & 64(0.7681) & 3 \\ 4(0.4488)^3 & 15(0.6230)^2 & 4(0.7681) & 3 \\ 4(0.4488)^3 & 9(0.6230)^2 & 10(0.7681) & 5 \end{bmatrix}$$

$$J_1^* = \begin{bmatrix} 0.7232 & 29.1097 & 1.5362 & 5 \\ 18.4412 & 2.3288 & 1.5362 & 3 \\ 0.3616 & 5.8219 & 3.0724 & 3 \\ 0.3616 & 3.4932 & 7.6810 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{---------- (24)}$$

$$J_2^* = \begin{bmatrix} 8(0.4488)^3 & 75(0.6230)^2 & 2(-0.7681) & 5 \\ 204(0.4488)^3 & 6(0.6230)^2 & 64(-0.7681) & 3 \\ 4(0.4488)^3 & 15(0.6230)^2 & 4(-0.7681) & 3 \\ 4(0.4488)^3 & 9(0.6230)^2 & 10(-0.7681) & 5 \end{bmatrix}$$

$$J_2^* = \begin{bmatrix} 0.7232 & 29.1097 & -1.5362 & 5 \\ 18.4412 & 2.3288 & -1.5362 & 3 \\ 0.3616 & 5.8219 & -3.0724 & 3 \\ 0.3616 & 3.4932 & -7.6810 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{---------- (25)}$$

$$J_3^* = \begin{bmatrix} 8(-0.4488)^3 & 75(0.6230)^2 & 2(0.7681) & 5 \\ 204(-0.4488)^3 & 6(0.6230)^2 & 64(0.7681) & 3 \\ 4(-0.4488)^3 & 15(0.6230)^2 & 4(0.7681) & 3 \\ 4(-0.4488)^3 & 9(0.6230)^2 & 10(0.7681) & 5 \end{bmatrix}$$

$$J_3^* = \begin{bmatrix} -0.7232 & 29.1097 & 1.5362 & 5 \\ -18.4412 & 2.3288 & 1.5362 & 3 \\ -0.3616 & 5.8219 & 3.0724 & 3 \\ -0.3616 & 3.4932 & 7.6810 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{---------- (26)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J_4^* = \begin{bmatrix} 8(-0.4488)^3 & 75(0.6230)^2 & 2(-0.7681) & 5 \\ 204(-0.4488)^3 & 6(0.6230)^2 & 64(-0.7681) & 3 \\ 4(-0.4488)^3 & 15(0.6230)^2 & 4(-0.7681) & 3 \\ 4(-0.4488)^3 & 9(0.6230)^2 & 10(-0.7681) & 5 \end{bmatrix}$$

$$J_4^* = \begin{bmatrix} -0.7232 & 29.1097 & -1.5362 & 5 \\ -18.4412 & 2.3288 & -1.5362 & 3 \\ -0.3616 & 5.8219 & -3.0724 & 3 \\ -0.3616 & 3.4932 & -7.6810 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{---------- (27)}$$

4. หาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue ; λ) จาก $det(J^* - \lambda I) = 0$ เมื่อ $I =$ เมทริกซ์เอกลักษณ์

จาก (24) ; $det(J(0.4488, 0.6230, 0.7681, -0.1431) - \lambda I) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0.7232 & 29.1097 & 1.5362 & 5 \\ 18.4412 & 2.3288 & 1.5362 & 3 \\ 0.3616 & 5.8219 & 3.0724 & 3 \\ 0.3616 & 3.4932 & 7.6810 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{bmatrix} 0.7232 - \lambda & 29.1097 & 1.5362 & 5 \\ 18.4412 & 2.3288 - \lambda & 1.5362 & 3 \\ 0.3616 & 5.8219 & 3.0724 - \lambda & 3 \\ 0.3616 & 3.4932 & 7.6810 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 26.1948$
$\lambda_2 = 6.9564$
$\lambda_3 = -0.3709$
$\lambda_4 = -21.6559$

จาก (25) ; $det(J(0.4488, 0.6230, -0.7681, -0.1431) - \lambda I) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$det\left(\begin{bmatrix} 0.7232 & 29.1097 & -1.5362 & 5 \\ 18.4412 & 2.3288 & -1.5362 & 3 \\ 0.3616 & 5.8219 & -3.0724 & 3 \\ 0.3616 & 3.4932 & -7.6810 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{bmatrix} 0.7232 - \lambda & 29.1097 & -1.5362 & 5 \\ 18.4412 & 2.3288 - \lambda & -1.5362 & 3 \\ 0.3616 & 5.8219 & -3.0724 - \lambda & 3 \\ 0.3616 & 3.4932 & -7.6810 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_5 = 24.7558$

$\lambda_6 = -21.5201$

$\lambda_7 = 0.8719 - 1.4097i$

$\lambda_8 = 0.8719 + 1.4097i$

จาก (26) ; $det(J(-0.4488, 0.6230, 0.7681, -0.1431) - \lambda I) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} -0.7232 & 29.1097 & 1.5362 & 5 \\ -18.4412 & 2.3288 & 1.5362 & 3 \\ -0.3616 & 5.8219 & 3.0724 & 3 \\ -0.3616 & 3.4932 & 7.6810 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{bmatrix} -0.7232 - \lambda & 29.1097 & 1.5362 & 5 \\ -18.4412 & 2.3288 - \lambda & 1.5362 & 3 \\ -0.3616 & 5.8219 & 3.0724 - \lambda & 3 \\ -0.3616 & 3.4932 & 7.6810 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_9 = 7.9346$

$\lambda_{10} = -0.3615$

$\lambda_{11} = 1.0524 - 22.5649i$

$\lambda_{12} = 1.0524 + 22.5649i$

จาก (27) ; $det(J(-0.4488, 0.6230, 0.7681, -0.1431) - \lambda I) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} -0.7232 & 29.1097 & -1.5362 & 5 \\ -18.4412 & 2.3288 & -1.5362 & 3 \\ -0.3616 & 5.8219 & -3.0724 & 3 \\ -0.3616 & 3.4932 & -7.6810 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$det\begin{bmatrix} -0.7232-\lambda & 29.1097 & -1.5362 & 5 \\ -18.4412 & 2.3288-\lambda & -1.5362 & 3 \\ -0.3616 & 5.8219 & -3.0724-\lambda & 3 \\ -0.3616 & 3.4932 & -7.6810 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_{13} = 1.0223 - 23.2126i$
$\lambda_{14} = 1.0223 + 23.2126i$
$\lambda_{15} = 0.7443 + 1.4687i$
$\lambda_{16} = 0.7443 - 1.4687i$

5. ดูเครื่องหมายของค่าลักษณะเฉพาะ λ

จะเห็นว่า $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4 มีเครื่องหมายต่างกันซึ่ง λ_1 และ λ_2 มีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วน λ_3 และ λ_4 มีเครื่องหมายลบ แสดงว่าจุดสมดุล $(0.4488, 0.6230, 0.7681, -0.1431)$ เป็นจุดสมดุลอานม้า (saddle equilibrium point)

จะเห็นว่า $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ และ λ_8 มีเครื่องหมายต่างกันซึ่ง λ_5, λ_7 และ λ_8 มีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วน λ_6 มีเครื่องหมายลบ แสดงว่าจุดสมดุล $(0.4488, 0.6230, -0.7681, -0.1431)$ เป็นจุดสมดุลอานม้า (saddle equilibrium point)

จะเห็นว่า $\lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}$ และ λ_{12} มีเครื่องหมายต่างกันซึ่ง λ_9, λ_{11} และ λ_{12} มีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วน λ_{10} มีเครื่องหมายลบ แสดงว่าจุดสมดุล $(-0.4488, 0.6230, 0.7681, -0.1431)$ เป็นจุดสมดุลอานม้า (saddle equilibrium point)

จะเห็นว่า $\lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}$ และ λ_{16} มีเครื่องหมายเหมือนกันซึ่ง $\lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}$ และ λ_{16} มีเครื่องหมายเป็นบวก แสดงว่าจุดสมดุล $(-0.4488, 0.6230, -0.7681, -0.1431)$ เป็นจุดสมดุลไม่เสถียรภาพ (unstable equilibrium point)

2.2.2 ระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Dynamical System Model)

เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าสังเกตเทียบกับเวลาที่เกิดขึ้นอย่างไม่ต่อเนื่อง เป็นแบบจำลองที่มีรูปทั่วไปคือ

$$N_{t+1} = rN_t + b \qquad \text{เมื่อ } r \text{ และ } t \text{ เป็นค่าคงที่}$$

แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่องมี 2 ประเภท คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2.1 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่องแบบไม่จำกัด

คือ การเปลี่ยนแปลงที่จะพิจารณา N_t ณ เวลา t เมื่อผลต่างของ $N_{t+1} - N_t$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้น ณ เวลา t ถึง $t+1$

ดังนั้น $$\frac{1}{N_t}(N_{t+1} - N_t) = r$$

เป็นอัตราของการเปลี่ยนแปลงต่อ 1 หน่วย ณ เวลา t ถึง $t+1$ และให้ r เป็นค่าคงที่ จะได้สมการที่อยู่ในรูปของ

$$\frac{1}{N_t}(N_{t+1} - N_t) = r \quad \text{เมื่อ } r \text{ เป็นค่าคงที่}$$

จะได้ว่า $$N_{t+1} = N_t + rN_t$$

ดังนั้น $$N_{t+1} = N_t + r(1+r)$$

2.2.2.2 แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่องแบบจำกัด

เนื่องจากข้อสมมติฐานของแบบจำลองประเภทนี้คล้ายกันกับแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่องแบบจำกัดในหัวข้อก่อนหน้านี้ จะได้ว่า

$$\frac{1}{N_t}(N_{t+1} - N_r) = r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)$$

ดังนั้น $$N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)$$

เมื่อ k คือ ค่าความสามารถในการรองรับ (carrying capacity)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 พื้นฐานและทฤษฎีทางคอมพิวเตอร์

2.3.1 โปรแกรม Visual Basic 2010 Express

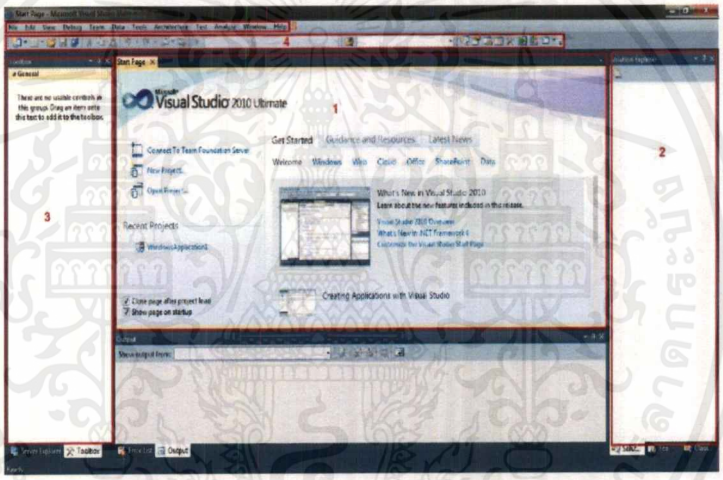
2.3.1.1 ส่วนประกอบของโปรแกรม

1. Start Page เป็นหน้าต่างที่แสดงขึ้นมาตลอด ตอนที่เราเปิดโปรแกรมขึ้นมา หน้าต่างนี้จะเป็นเหมือน Intro ของโปรแกรม จะประกอบด้วย

New Project ไว้สร้างโปรเจคใหม่ในการเขียนโปรแกรม

Open Project เปิดโปรเจค ที่เราบันทึกเอาไว้ กลับมาแก้ไขใหม่ได้

Recent Project จะแสดงรายชื่อโปรเจคที่เคยเปิดมาล่าสุด จำนวนหนึ่ง สามารถทำให้เราเปิดโปรเจคได้รวดเร็ว



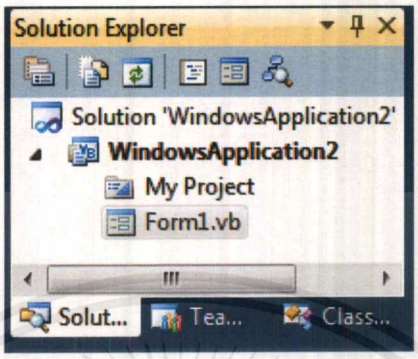
รูปที่ 2.10 แสดงหน้าต่าง Start Page

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. Solution Explorer และ Properties

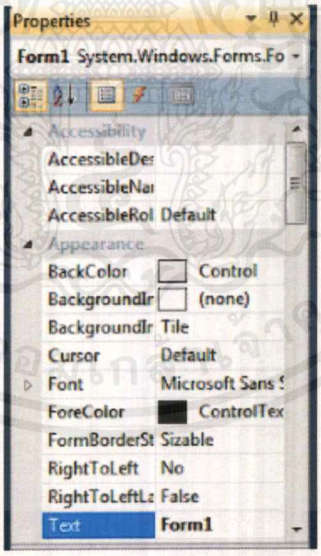
Solution Explorer หน้าต่างแสดงโปเจคของเราว่ามีอะไรบ้าง



รูปที่ 2.11 แสดงหน้าต่าง Solution Explorer

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

Properties หน้าต่าง Properties นี้ จะแสดงคุณสมบัติของ Object ที่เราเลือกไว้



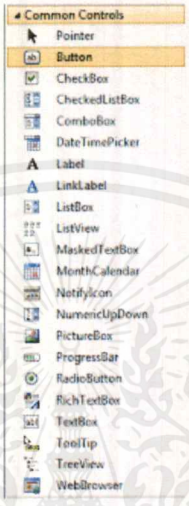
รูปที่ 2.12 แสดงหน้าต่าง Properties

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. ToolBox เป็นหน้าต่างที่รวมเครื่องมือต่าง ๆไว้สร้าง Application ของเรา ไว้ออกแบบหน้าจอได้อย่างง่ายๆ โดยเพียงคลิกลาก คอนโทรล (Control) มาวางบน ฟอร์ม (Form) ก็จะได้อ็อบเจ็กต์ (Object) บนฟอร์มนั้น ซึ่ง มีอยู่หลายกลุ่มคอนโทรล ดังนี้

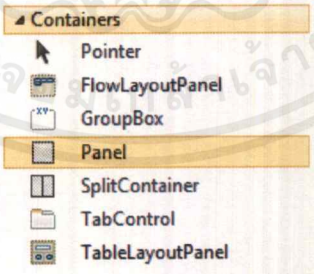
Common Control คอนโทรลพื้นฐานต่าง ๆ เช่น CheckBox, Label, ListBox ฯลฯ



รูปที่ 2.13 แสดงหน้าต่าง Common Control

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

Containers คอนโทรลที่ไว้จัดกลุ่มให้กลับคอนโทรลอื่น ๆ โดยบรรจุคอนโทรลนั้นไว้ภายในตัวเดียวกัน เช่น GroupBox, Panel ฯลฯ

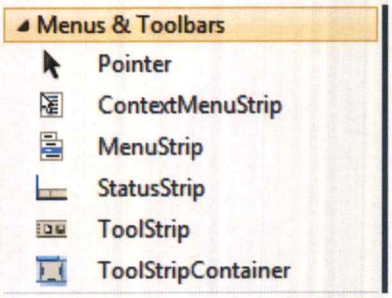


รูปที่ 2.14 แสดงหน้าต่าง Containers

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

Menus & Toolbars เป็นคอนโทรลที่ช่วยสร้าง เมนู และ ทูลบาร์

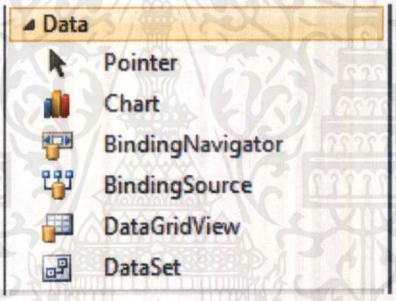
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.15 แสดงหน้าต่าง Menus & Toolbars

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

Data คอนโทรลที่ไว้ใช้งานกับฐานข้อมูล

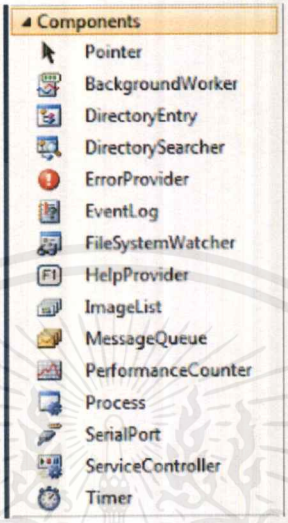


รูปที่ 2.16 แสดงหน้าต่าง Data

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

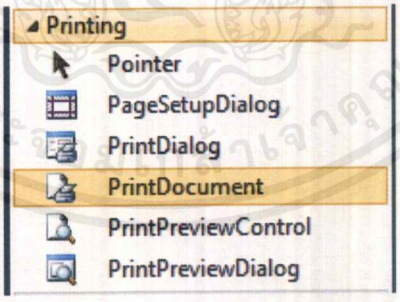
Components เป็นคอนโทรลที่ไม่แสดงรูปร่างออกมาทางฟอร์ม แต่จัดเตรียมทำงานให้กับโปรแกรม เช่น Timmer, Process ฯลฯ



รูปที่ 2.17 แสดงหน้าต่าง Components

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

Printing คอนโทรลที่เกี่ยวกับการพิมพ์เอกสารออกทาง Printer

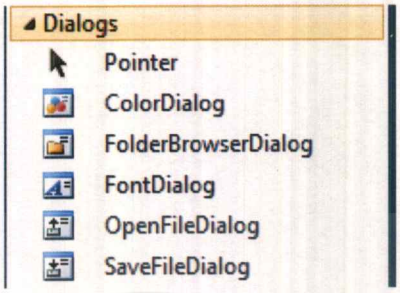


รูปที่ 2.18 แสดงหน้าต่าง Printing

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Dialogs คอนโทรลที่ใช้แสดง Dialogs พื้นฐานชนิดต่าง ๆ เช่น Dialogs สำหรับเปิดไฟล์ และ Dialogs สำหรับเลือกสี เป็นต้น



รูปที่ 2.19 แสดงหน้าต่าง Dialogs

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

4. ทูลบาร์หลัก (Standard Toolbar)

เป็นแถบเครื่องมือที่รวบรวมปุ่มต่างๆเอาไว้ ซึ่งปุ่มเหล่านี้เราจะเรียกใช้คำสั่งที่ใช้บ่อย เพื่อความสะดวกในการทำงาน เช่น ปุ่มแรกจะเทียบเท่ากับการสร้างโปรเจคใหม่ (New Project) ในเมนูไฟล์ เป็นต้น

รูปที่ 2.20 แสดงแถบเครื่องมือ Standard Toolbar

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

5.เมนูบาร์ (Menu Bar)

เป็นส่วนที่รวบรวมคำสั่งทุกอย่างในการทำงานของ Visual Studio โดยแบ่งเป็นเมนูคำสั่งตามไอ-เท็มต่างๆ ดังนี้

File คำสั่งที่ใช้สร้างโปรเจคใหม่ เปิดโปรเจค ปิดโปรเจค เป็นต้น

Edit คำสั่งที่ใช้แก้ไข ตัด คัดลอก วาง ย้อนกลับ เป็นต้น

View คำสั่งที่ใช้แสดงเครื่องมือต่าง ๆ ของ Visual Studio

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Properties คำสั่งที่ใช้จัดการเกี่ยวกับโปรเจค แก้ไขคุณสมบัติต่าง ๆ ของ อ็อบเจคต์

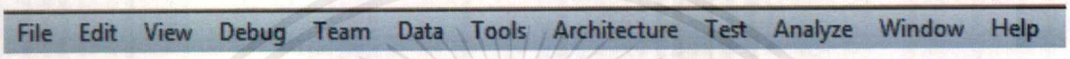
Build คำสั่งที่ใช้คอมไพล์โปรเจค เป็นไฟล์ *.EXE

Debug คำสั่งที่ช่วยในการรันและตรวจสอบหาข้อผิดพลาดของโปรแกรม

Data คำสั่งที่ใช้ติดต่อกับฐานข้อมูล

Format คำสั่งที่ใช้จัดตำแหน่งของอ็อบเจคต์

Tool คำสั่งที่ใช้เรียกเครื่องมือส่วนเสริม



รูปที่ 2.21 แสดง Menu Bar

(ที่มา: https://visualgramming.blogspot.com/2013/11/visual-basic-2010_6.html)

2.3.2 การเขียนโปรแกรมด้วย SCILAB

2.3.2.1 คำสั่งวนซ้ำ

ในการเขียนโปรแกรม บางครั้งมีความจำเป็นต้องต้องคำนวณชุดคำสั่งบางชุดซ้ำหลายครั้ง ซึ่งในกรณีนี้ การใช้คำสั่งวนซ้ำจึงมีความจำเป็นมาก โปรแกรม SCILAB ได้เตรียมคำสั่งสำหรับการวนซ้ำไว้ 2 รูปแบบคือ คำสั่ง for และคำสั่ง while ซึ่งมีหลักการใช้งานดังนี้

1.คำสั่ง for

คำสั่ง for เหมาะสำหรับการใช้งานที่ต้องการให้โปรแกรมทำซ้ำชุดคำสั่งเดิมที่อยู่ภายในลูป (loop) เป็นจำนวนรอบตามที่กำหนดไว้ในนิพจน์ (expression) ซึ่งมีรูปแบบการใช้งานดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
for  variable  =  expression
     instruction_1;
          ⋮
     instruction_n;
end
```

รูปที่ 2.22 คำสั่ง for

2. คำสั่ง while

คำสั่ง while มีลักษณะการทำงานคล้ายกับคำสั่ง for เพียงแต่คำสั่ง while จะมีการทดสอบเงื่อนไขที่ผู้เขียนโปรแกรมกำหนดไว้ในนิพจน์ทุกรอบของการวนซ้ำ กล่าวคือถ้าผลการทดสอบให้ค่าตรรกะเป็นค่า 1 (เป็นจริง) โปรแกรมก็จะทำซ้ำชุดคำสั่งภายในลูปนั้นต่ออีกหนึ่งรอบ แต่ถ้าผลการทดสอบให้ค่าตรรกะเป็นค่า 0 (เป็นเท็จ) โปรแกรมก็จะยกเลิกการทำงานชุดคำสั่งภายในลูปนั้น ทันที คำสั่ง while มีรูปแบบการใช้งานดังนี้

```
while  expression
       instruction_1;
            ⋮
       instruction_n;
end
```

รูปที่ 2.23 คำสั่ง while

2.3.2.2 คำสั่งทดสอบเงื่อนไข

คำสั่งทดสอบเงื่อนไขมีความจำเป็นมากสำหรับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ซับซ้อนโดยทั่วไป คำสั่งทดสอบเงื่อนไขที่นิยมใช้คือ คำสั่ง if ซึ่งมีหลักการใช้งานดังนี้

กล่าวคือถ้าผลการทดสอบเงื่อนไขในนิพจน์เป็นจริง โปรแกรม SCILAB จะทำคำสั่งทั้งหมดที่อยู่ระหว่างคำว่า then และ else แต่ถ้าผลการทดสอบเป็นเท็จ โปรแกรม SCILAB จะทำคำสั่ง ทั้งหมดที่อยู่ระหว่างคำว่า else และ end

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
if  expression  then
    instructions_set1;
else
    instructions_set2;
end
```

รูปที่ 2.24 คำสั่งทดสอบเงื่อนไข

ในการใช้งานที่มีการตัดสินใจที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ผู้ใช้ก็ยังคงสามารถใช้งานคำสั่ง if ร่วมกับ elseif ได้ โดยมีรูปแบบการใช้งานดังนี้

```
if  expression_1  then
        instructions_set1;
elseif  expression_2  then
        instructions_set2;
else
        instructions_set3;
end
```

รูปที่ 2.25 คำสั่งทดสอบเงื่อนไข

2.3.2.3 การวาดกราฟสองมิติ

คำสั่งพื้นฐานสำหรับการวาดกราฟสองมิติบนระบบพิกัดฉาก x-y คือคำสั่ง plot ซึ่งมีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
plot(x, y)
```

รูปที่ 2.26 คำสั่งวาดกราฟสองมิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.2.4 การวาดกราฟสามมิติ

สมการคณิตศาสตร์แบบสามตัวแปรใด ๆ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของกราฟสามมิติได้ เพื่อใช้แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งหลาย

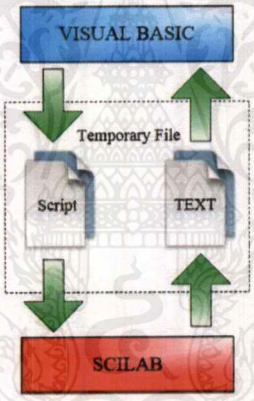
```
plot3d(x, y, z)
```

รูปที่ 2.27 คำสั่งวาดกราฟสามมิติ

2.3.3 การใช้งานโปรแกรม Visual Basic ร่วมกับ SCILAB

2.3.3.1 FileSystemObject

เป็นอ็อบเจกต์หลักที่ใช้สร้างหรือลบข้อมูล และจัดการการทำงานของ ไดร์ฟ โฟลเดอร์ ไฟล์ และไฟล์ข้อมูล ได้โดยตรง



รูปที่ 2.28 แนวคิดในการใช้งานร่วมกันระหว่างโปรแกรม Visual Basic และ SCILAB

2.3.3.2 ขั้นตอนการเรียกใช้งานไลบรารี Microsoft Scripting Runtime

1. เปิดโปรแกรม Visual Basic 2010 Express แล้วสร้างโปรเจคใหม่ขึ้นมาใช้งาน โดยเลือกที่ New Project...

2.จากนั้นเลือก Visual Basic Windows Forms Application และกดปุ่ม OK เพื่อสร้าง ฟอร์ม (Form) ขึ้นมาใช้งาน

3.การเรียก FileSystemObject มาใช้งาน ต้องบอกให้โปรแกรม Visual Basic 2010 ให้ทราบก่อน โดยการเลือกเมนู Project Add Reference...

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.ที่หน้าต่าง Add Reference ให้ไปที่แถบ COM และเลือก Microsoft Scripting Runtime และคลิกปุ่ม OK ก็ถือว่าเสร็จขั้นตอนการเรียกใช้งาน Microsoft Scripting Runtime

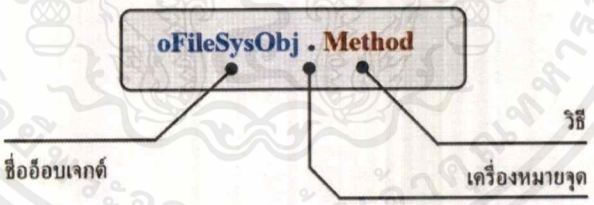
2.3.3.3 รูปแบบการใช้งาน FileSystemObject

วิธีการใช้งานของ FileSystemObject จะมีรูปแบบที่เกี่ยวกับอ็อบเจกต์ Drive, Folder, File และ Text Stream โดยในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการใช้งานของอ็อบเจกต์ File และ Text Stream เท่านั้น เพราะจะนำมาใช้ในการแลกเปลี่ยนข้อมูลกับโปรแกรม SCILAB โดยวิธีการใช้งานมีรูปแบบดังนี้

1.รูปแบบการประกาศตัวแปรแบบ FileSystemObject

รูปที่ 2.29 การประกาศตัวแปรแบบ FileSystemObject

2.รูปแบบการเรียกใช้งาน FileSystemObject



รูปที่ 2.30 รูปแบบการเรียกใช้งาน FileSystemObject

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.4 ฟังก์ชันที่เกี่ยวของโปรแกรม Visual Basic 2010

1. FileSystemObject เป็นการประกาศตัวแปรที่ใช้อ้างอิง FileSystemObject มีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
Public fso As New Scripting.FileSystemObject
```

รูปที่ 2.31 รูปแบบ FileSystemObject

ซึ่งเป็นการกำหนดให้ fso เป็นอ็อบเจกต์ FileSystemObject โดยจะต้องมีการใส่พารามิเตอร์ New เข้าไปในคำสั่งด้วย (ตัวแปรที่เป็นอ็อบเจกต์ของ FileSystemObject ต้องใส่นิพจน์ New เสมอ)

2. CreateTextFile ใช้สร้างไฟล์ในระบบปฏิบัติการวินโดวส์ ซึ่งมีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
oFileSysObj.CreateTextFile (Filename [, Overwrite[, Unicode]])
```

รูปที่ 2.32 รูปแบบ CreateTextFile

โดย oFileSysObj คืออ็อบเจกต์ที่เรียกใช้งาน, Filename คือชื่อไฟล์ที่มีประเภทข้อมูลเป็นแบบ String, Overwrite คือตัวเลือกที่บอกว่าสามารถเขียนทับไฟล์ที่มีชื่อซ้ำกันได้โดยมีประเภทข้อมูลเป็นแบบบูลีน (Boolean: True หรือ False), และ Unicode คือตัวเลือกที่บอกว่าไฟล์ที่สร้าง จะเก็บข้อมูลแบบ Unicode หรือ ASCII โดยมีประเภทข้อมูลแบบบูลีน

3. TextStream เป็นการประกาศตัวแปรที่ใช้อ้างอิง TextStream มีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
Public w_file As Scripting.TextStream
```

รูปที่ 2.33 รูปแบบ TextStream

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. Close ใช้ยกเลิกการเชื่อมต่อกับอ็อบเจกต์ TextStream มีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
oTextStreamObj.Close
```

รูปที่ 2.34 รูปแบบ Close

5. ReadLine ใช้อ่านข้อมูลทีละหนึ่งบรรทัดจากไฟล์ข้อมูล มีรูปแบบการเรียกใช้งาน

```
oTextStreamObj.ReadLine
```

รูปที่ 2.35 รูปแบบ ReadLine

6. WriteLine ใช้เขียนข้อมูลลงไฟล์ข้อมูลทีละหนึ่งบรรทัด (เมื่อเขียนจบ จะขึ้นบรรทัดใหม่ให้) มีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
oTextStreamObj.WriteLine(String)
```

รูปที่ 2.36 รูปแบบ WriteLine

7. Shell เป็นฟังก์ชันที่ใช้เรียกโปรแกรมประยุกต์ขึ้นมาทำงาน มีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
Shell(PathName, [Window Style])
```

รูปที่ 2.37 รูปแบบ Shell

โดย PathName คือที่อยู่ของโปรแกรมประยุกต์ที่ต้องการ และ Window Style คือค่าสถานะในการเรียกโปรแกรมนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.5 ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องของโปรแกรม SCILAB

1. คำสั่ง fprintf เป็นคำสั่งที่ทำหน้าที่พิมพ์ค่าของตัวแปรลงไปเก็บไว้ในไฟล์ แทนที่จะแสดงผลลัพธ์ออกมาที่หน้าต่าง คำสั่ง รูปแบบการใช้งานของคำสั่งนี้คือ

```
fprintf(fd, format, value_1, ..., value_n)
```

รูปที่ 2.38 รูปคำสั่ง fprintf

2. คำสั่ง xs2gif เป็นคำสั่งที่ใช้บันทึกรูปกราฟที่วาดขึ้นด้วยโปรแกรม SCILAB ให้เป็นไฟล์รูปภาพที่มีนามสกุลเป็น แบบ .gif โดยมีรูปแบบการเรียกใช้งานดังนี้

```
xs2gif(win_num, filename)
```

รูปที่ 2.39 รูปแบบคำสั่ง xs2gif

เมื่อ win_num คือตัวเลขจำนวนเต็มบวกที่ใช้อ้างถึงหมายเลขของหน้าต่างกราฟ และ filename คือชื่อไฟล์ (ที่มีนามสกุล .gif) ที่ต้องการบันทึกรูปกราฟที่ปรากฏในหน้าต่างกราฟหมายเลข win_n

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ธีรพันธุ์ เหล็กเพชร เพ็ญนภา กรโกษา และ อัจฉรา น้ำใจดี ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับโปรแกรมหาความเสถียรภาพเชิงเส้นของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่อง เพื่อช่วยในการคำนวณหาจุดสมดุล ค่าลักษณะเฉพาะ บอกประเภทของความเสถียรภาพรวมถึงการแสดงกราฟความเสถียรภาพของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร. [Online]

อัมราพร บุญประทะทอง การแก้ปัญหาด้วนวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง - คุตตา งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่ต้องการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ ที่มีรูปแบบของปัญหาเป็นสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ ซึ่งการแก้ปัญหานั้นต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น.[Online]

อภิชัย สุยะพันธ์ การวิเคราะห์เสถียรภาพสัญญาณขนาดใหญ่ของระบบไฟฟ้ากำลังเอซี เป็นดีซีที่มีโหลดกำลังไฟฟ้าคงตัว การวิเคราะห์เสถียรภาพจะเริ่มต้นด้วย วิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพสัญญาณขนาดเล็กผ่าน แบบจำลองที่ทำให้เป็นเชิงเส้น และอาศัยทฤษฎี บทค่าเจาะจง หลังจากนั้น จะใช้วิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพสัญญาณขนาดใหญ่ ด้วยวิธีการวิเคราะห์ ระนาบเฟส ที่อาศัยการสร้างการโคจรของ คำตอบสมการอนุพันธ์ลงบนระนาบของตัวแปรสถานะที่ ทรงอิทธิพล มาวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ และนอกจากนั้นแล้วจะใช้การวิเคราะห์เสถียรภาพด้วยวิธีการโดยตรงของเลียปูนอฟที่อาศัยการคำนวณหาฟังก์ชันเลียปูนอฟด้วยวิธีการที่นำเสนอโดย ทาคากิและซูจิโน เพื่อประมาณขอบเขตของการมีเสถียรภาพแบบเชิงเส้นกำกับ.[Online]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
การออกแบบระบบและขั้นตอนการดำเนินงาน

3.1 การออกแบบระบบ

1. ศึกษาหลักการทางคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้ในการเขียนโปรแกรม
2. ศึกษาโปรแกรมหลาย ๆ โปรแกรม และเลือกมา 1 โปรแกรมเพื่อนำมาใช้ในระบบงาน
3. ออกแบบระบบงาน
4. พัฒนาระบบ
5. ทดสอบและปรับปรุงโปรแกรมให้มีความสมบูรณ์
6. ประเมินความสมบูรณ์ของระบบงานและปัญหาที่เกิดขึ้น

3.2 ระบบงาน

การทำงานของระบบนั้นแบ่งเป็น 3 ส่วน โดยมีการทำงานเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.2.1 ส่วนนำข้อมูลเข้า (Input) เป็นการป้อนค่าสัมประสิทธิ์ที่ต้องการหา มีการตรวจสอบการป้อนสมการว่าถูกต้องหรือไม่ ถ้ามีข้อผิดพลาดจะแสดงให้ทราบ และทำการป้อนค่าสัมประสิทธิ์เข้าไปใหม่

3.2.2 ส่วนวิเคราะห์การประมวลผล (Process and analysis) เป็นการนำสมการที่ป้อนมาทำการคำนวณเพื่อหาจุดสมดุลและหาความเสถียรภาพของสมการและเขียนกราฟให้ได้ค่าตามที่ต้องการ

3.2.3 ส่วนข้อมูลออก (Output) เป็นการนำข้อมูลที่ได้จากการประมวลผลมาแสดงผลที่จอภาพ

3.3 แผนงานและการพัฒนาระบบ

1. ศึกษาวิธีการหาจุดสมดุลและความเสถียรภาพของระบบสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นแบบต่อเนื่องและนำมาออกแบบโดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ นำมาเขียนในรูปแบบฟังก์ชันในภาษา Visual Basic
2. ออกแบบ flow chart ของระบบงาน
3. กำหนด Input และ Output ของระบบงาน
4. ออกแบบ user interface
5. ออกแบบหน้าจอการทำงาน
6. นำความรู้เรื่องการเขียนกราฟมาเขียนเป็นโปรแกรมแสดงกราฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

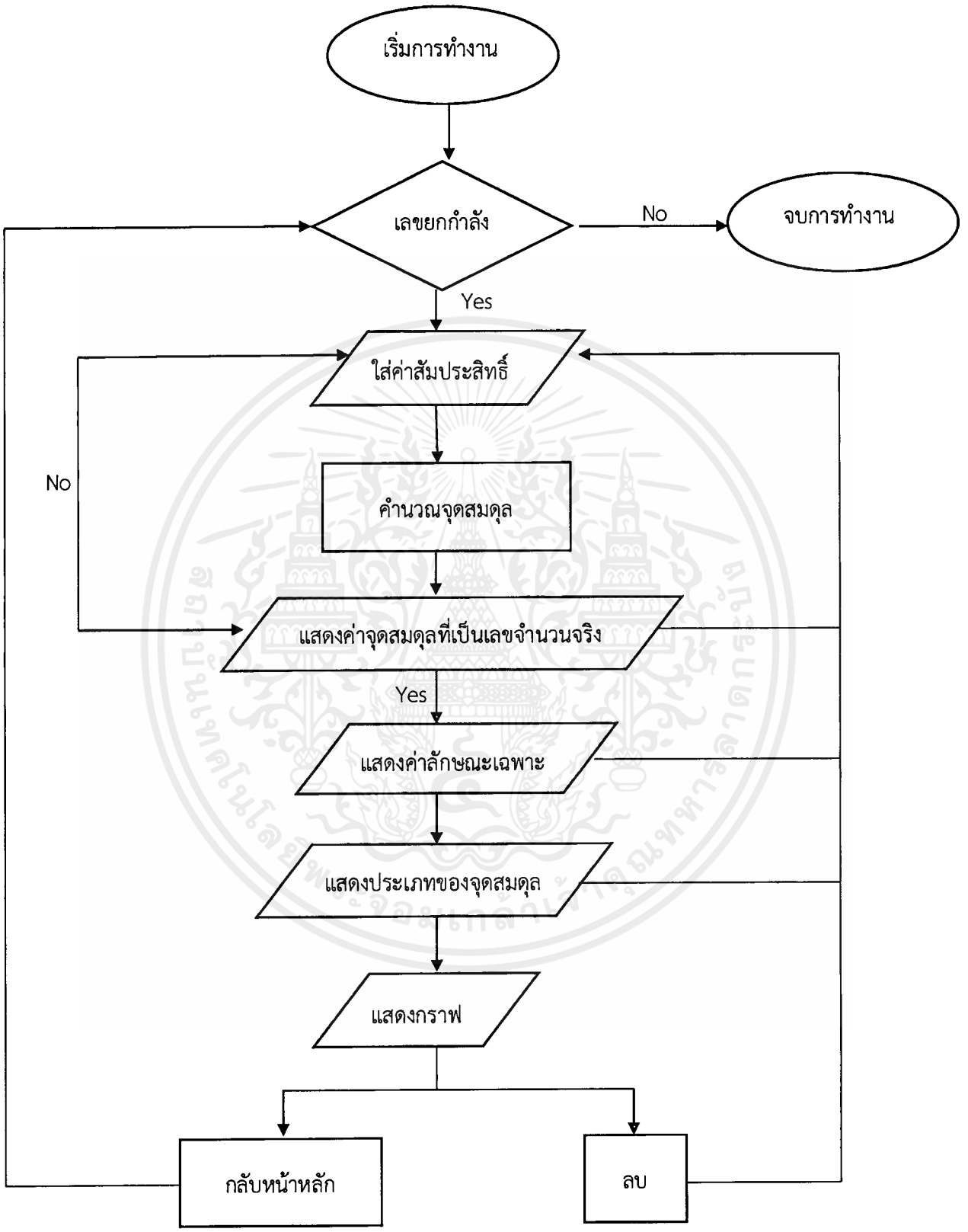
7. ทดสอบระบบงานที่ออกแบบไว้ โดยใช้ข้อมูลที่ได้สมมตินำมาป้อนลงในโปรแกรมและทำการแสดงข้อมูลที่ได้จากการประมวลผลและภาพกราฟออกมาทางจอภาพ แก้ไขโปรแกรมตามข้อบกพร่องที่แสดงออกมาทางจอภาพ

8. จัดทำเอกสารประกอบการใช้งาน

3.4 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

1. โปรแกรมจะให้เลือกเลขยกกำลังที่ต้องการ ถ้าไม่เลือกใส่เลขยกกำลังให้ปิดโปรแกรม
2. ป้อนค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรต่าง ๆที่ใช้ในการคำนวณ
3. ประมวลผลการทำงานของโปรแกรม ทำการอ่านค่าที่ป้อนเข้ามาและนำมาหาจุดสมดุล ค่าลักษณะเฉพาะ และเขียนกราฟ ถ้าหากจุดสมดุลเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะมีการแสดงว่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนและสามารถกลับไปใส่ค่าสัมประสิทธิ์ได้อีกครั้ง
4. แสดงจุดสมดุล ค่าลักษณะเฉพาะ และแสดงกราฟที่เลขยกกำลังเป็น 2,3,4 และ 5
5. ออกจากโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
การใช้งานโปรแกรม

4.1 หน้าแรกของโปรแกรม

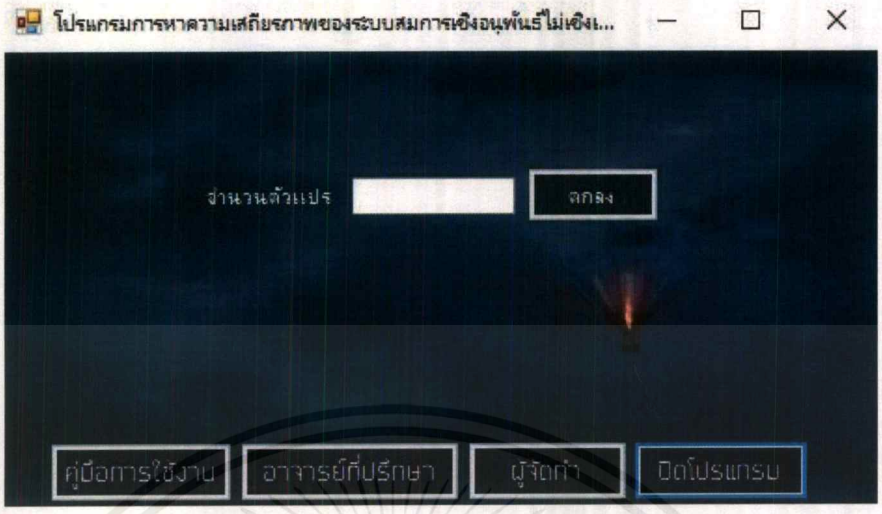
เมื่อเปิดโปรแกรมขึ้นมา หน้าแรกของโปรแกรมจะแสดงชื่อของโปรแกรม

รูปที่ 4.1 หน้าแรกของโปรแกรม

4.2 หน้าหลักโปรแกรม

ให้ใส่ตัวเลขที่เป็นจำนวนตัวแปรที่ต้องการ นั่นคือ ตัวเลข 2 3 4 และ 5 และสามารถเลือกกดปุ่มแสดงคู่มือการใช้ ผู้จัดทำ เลือกปิดโปรแกรม และ อาจารย์ที่ปรึกษา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 หน้าหลักโปรแกรม

4.2.1 กำลังสอง

หลังจากกดเข้าไปในกำลังสอง โปรแกรมจะแสดงสมการกำลังสอง สองสมการ สองตัวแปร ให้กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวแปรลงไป จากนั้นกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล

หลักจากกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล โปรแกรมจะแสดงค่าจุดสมดุล และค่าลักษณะเฉพาะ รวมถึงการบอกประเภทของความเสถียรภาพ

กดปุ่มแสดงกราฟ จะปรากฏหน้าต่างกราฟแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล

ถ้าต้องการเริ่มทำใหม่ให้กดปุ่ม ลบ แต่ถ้าต้องการกลับหน้าหลักให้กดปุ่ม กลับหน้าหลัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.3 สมการกำลังสอง

4.2.2 กำลังสาม

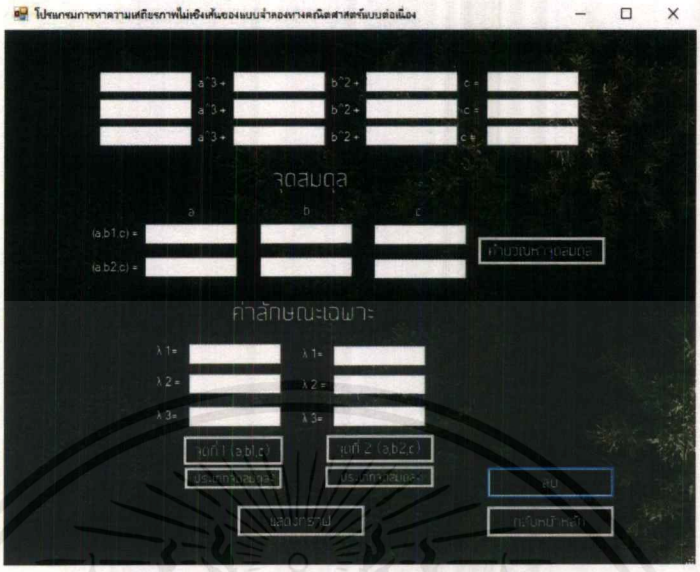
หลังจากกดเข้าไปในกำลังสาม โปรแกรมจะแสดงสมการกำลังสาม สามสมการ สามตัวแปร ให้กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวแปรลงไป จากนั้นกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล

หลักจากกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล โปรแกรมจะแสดงค่าจุดสมดุล และค่าลักษณะเฉพาะ รวมถึงการบอกประเภทของความเสถียรภาพ

กดปุ่มแสดงกราฟ จะปรากฏหน้าต่างกราฟแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล

ถ้าต้องการเริ่มทำใหม่ให้กดปุ่ม ลบ แต่ถ้าต้องการกลับหน้าหลักให้กดปุ่ม กลับหน้าหลัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 สมการกำลังสาม

4.2.3 กำลังสี่

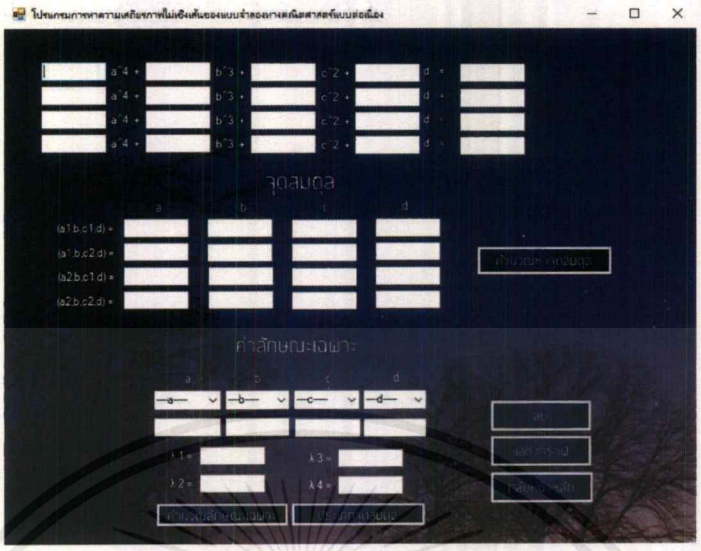
หลังจากกดเข้าไปในกำลังสี่ โปรแกรมจะแสดงสมการกำลังสี่ สี่สมการ สี่ตัวแปร ให้กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวแปรลงไป จากนั้นกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล

หลักจากกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล โปรแกรมจะแสดงค่าจุดสมดุล และค่าลักษณะเฉพาะ รวมถึงการบอกประเภทของความเสถียรภาพ

กดปุ่มแสดงกราฟ จะปรากฏหน้าต่างกราฟแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล

ถ้าต้องการเริ่มทำใหม่ให้กดปุ่ม ลบ แต่ถ้าต้องการกลับหน้าหลักให้กดปุ่ม กลับหน้าหลัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 สมการกำลังสี่

4.2.4 กำลังห้า

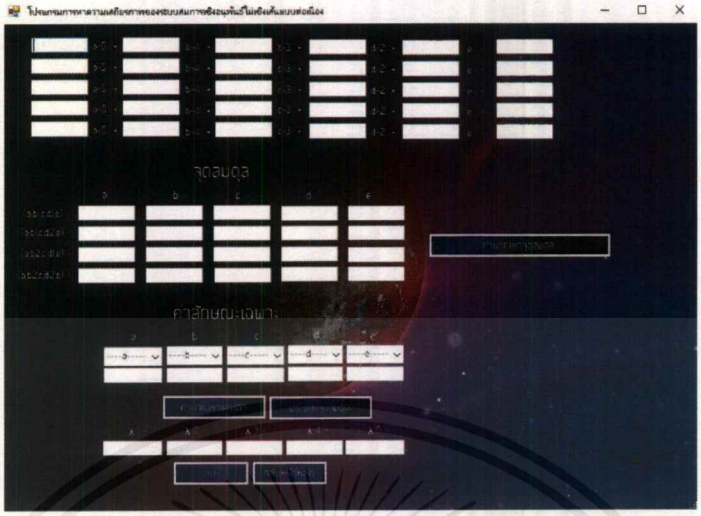
หลังจากกดเข้าไปในกำลังห้า โปรแกรมจะแสดงสมการกำลังห้า ห้าสมการ ห้าตัวแปร ให้กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวแปรลงไป จากนั้นกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล

หลักจากกดปุ่ม คำนวณหาจุดสมดุล โปรแกรมจะแสดงค่าจุดสมดุล และค่าลักษณะเฉพาะรวมถึงรวมถึงการบอกประเภทของความเสถียรภาพ

กดปุ่มแสดงกราฟ จะปรากฏหน้าต่างกราฟแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล

ถ้าต้องการเริ่มทำใหม่ให้กดปุ่ม ลบ แต่ถ้าต้องการกลับหน้าหลักให้กดปุ่ม กลับหน้าหลัก

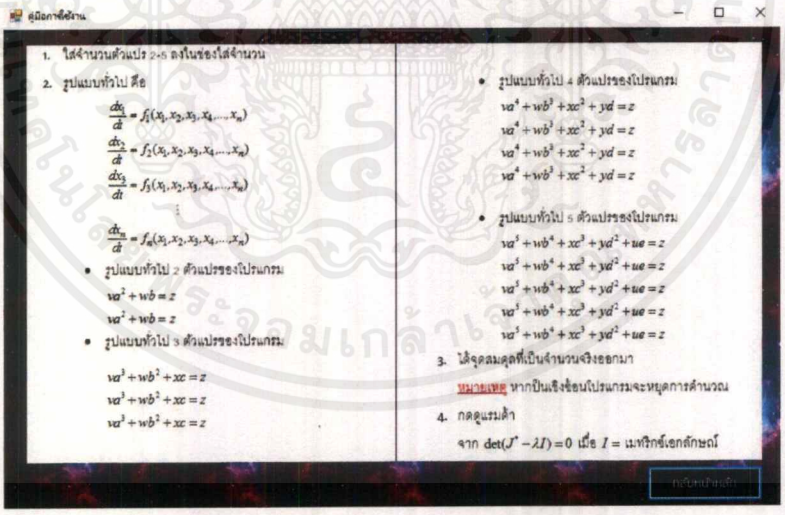
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 สมการกำลังห้า

4.2.5 แสดงคู่มือการใช้งาน

โดยจะแสดงขั้นตอนการทำงานต่างๆของโปรแกรม รวมถึงรูปแบบทั่วไปของสมการที่ใช้ในการคำนวณ

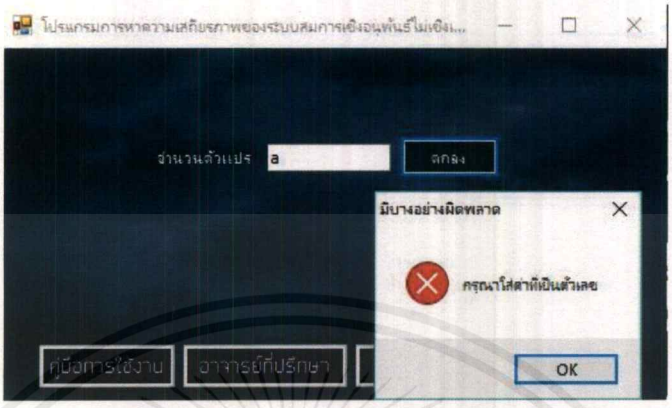


รูปที่ 4.7 คู่มือการใช้งาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

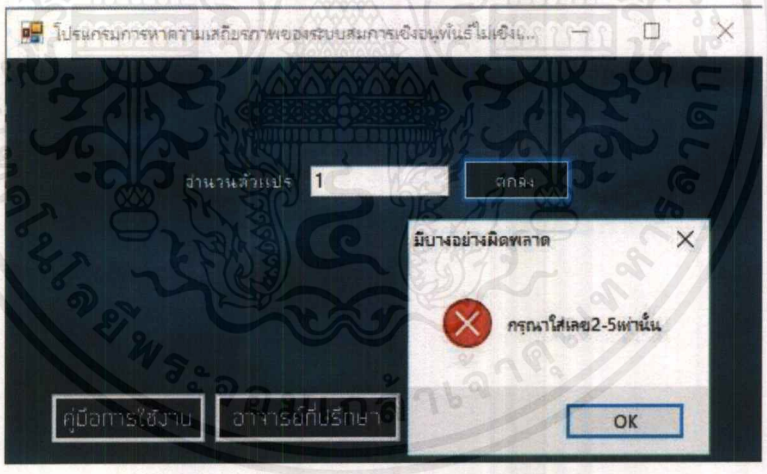
4.2.6 ข้อผิดพลาด

ใส่ค่าเฉพาะตัวเลขเท่านั้น



รูปที่ 4.8 ข้อผิดพลาดที่เป็นตัวเลข

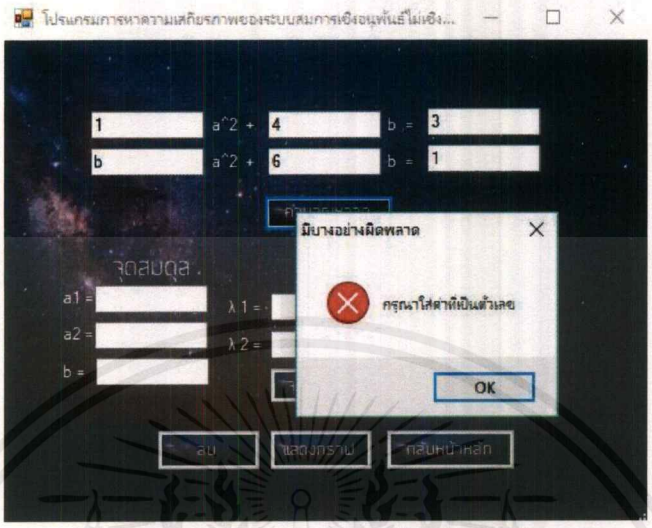
จำนวนตัวแปรต้องเป็นตัวแปรกำลัง 2,3,4 และ 5



รูปที่ 4.9 ข้อผิดพลาดที่เป็นตัวแปร

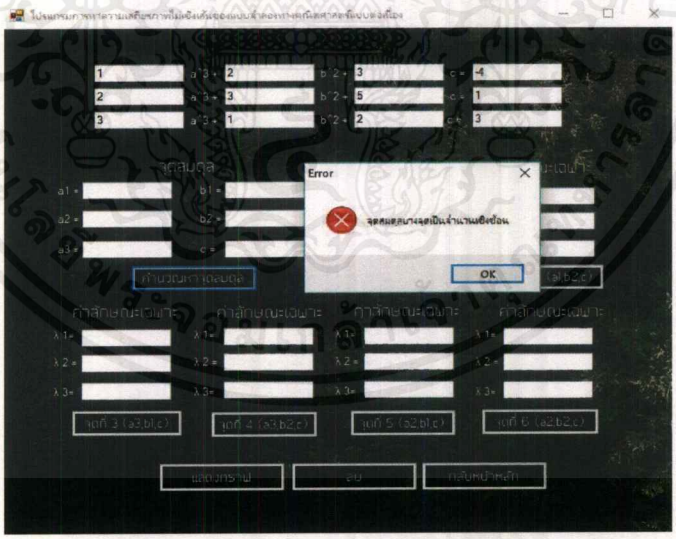
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าสัมประสิทธิ์ต้องเป็นตัวเลขเท่านั้น ไม่สามารถกรอกเป็นตัวแปรได้



รูปที่ 4.10 ข้อผิดพลาดสัมประสิทธิ์

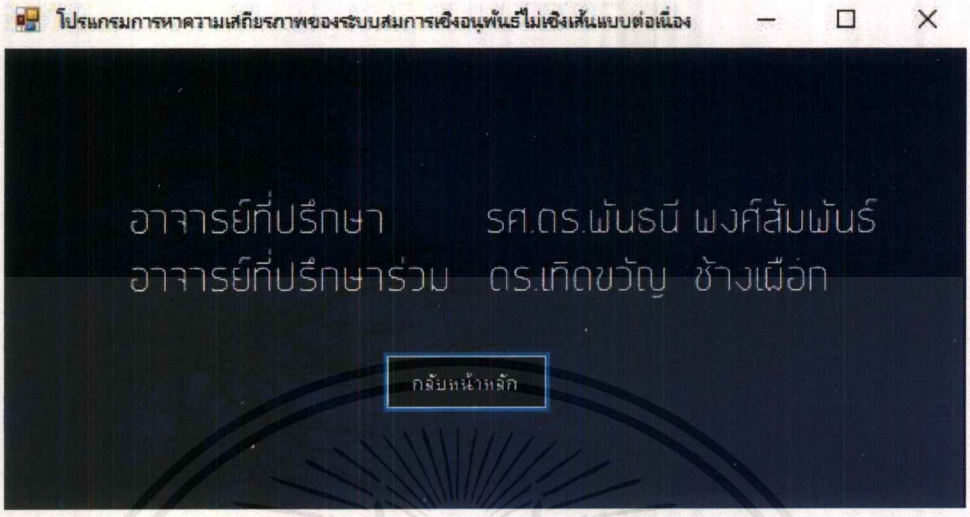
จุดสมดุลบางจุดเป็นจำนวนเชิงซ้อน



รูปที่ 4.11 ข้อผิดพลาดจำนวนเชิงซ้อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.7 แสดงอาจารย์ที่ปรึกษา



รูปที่ 4.12 อาจารย์ที่ปรึกษา

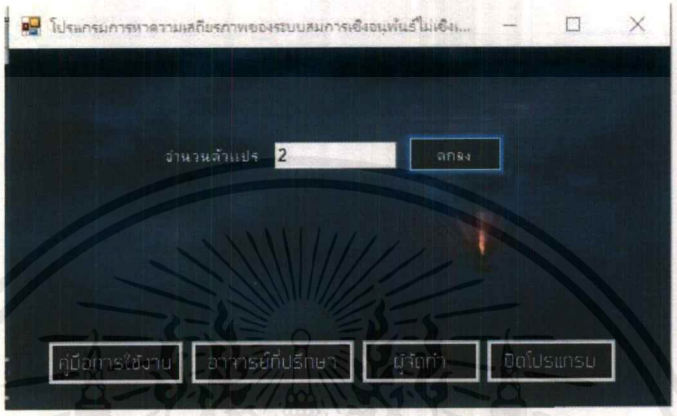
4.2.8 แสดงผู้จัดทำ

รูปที่ 4.13 ผู้จัดทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 ตัวอย่างการคำนวณ

เมื่อใส่จำนวนตัวแปร คือ 2 และคลิกคำว่า ตกลง ดังรูปที่ 4.14 จำนวนตัวแปรสมการกำลังสอง จะปรากฏหน้าต่างกรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.15 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรสมการกำลังสอง

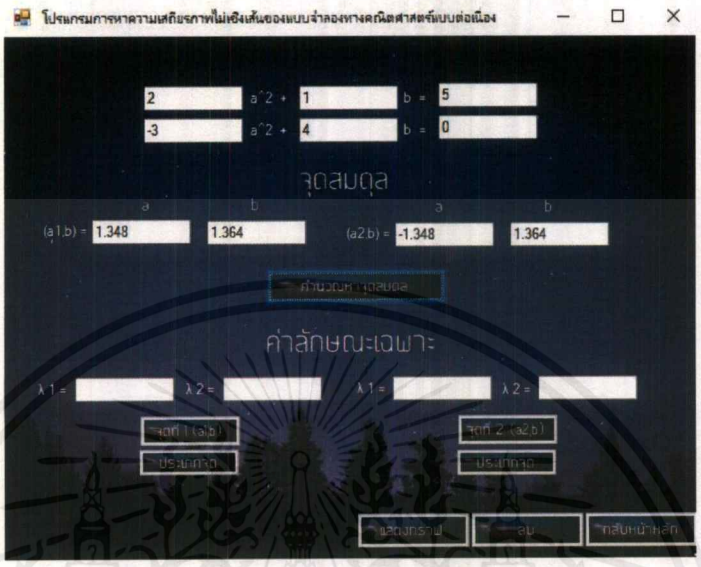


รูปที่ 4.14 จำนวนตัวแปรสมการกำลังสอง

รูปที่ 4.15 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อคลิกที่ปุ่มคำนวณหาจุดสมดุลจะปรากฏค่าของตัวแปรแต่ละตัวขึ้นมาดังรูปที่ 4.16 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสอง

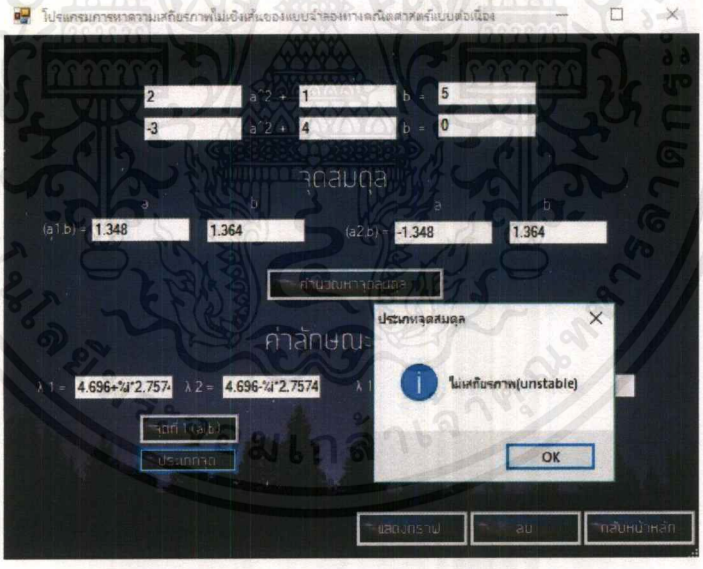


รูปที่ 4.16 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสอง

หลังจากนั้นคลิกปุ่มค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลจะปรากฏค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.17 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

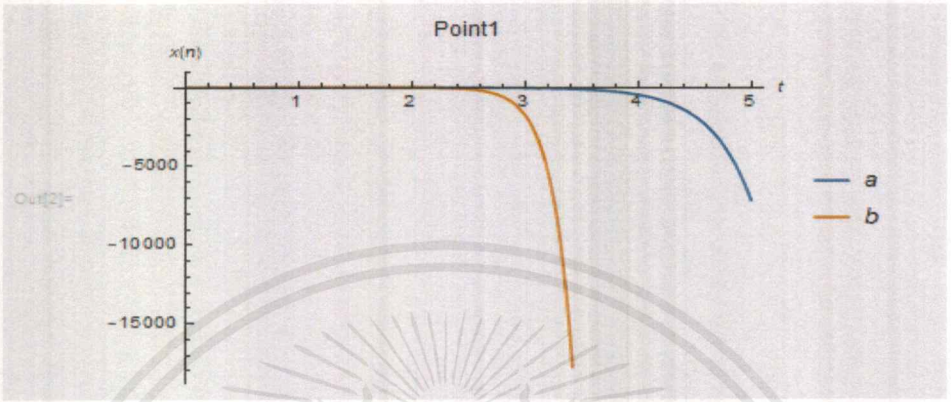
รูปที่ 4.17 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลสมการกำลังสอง



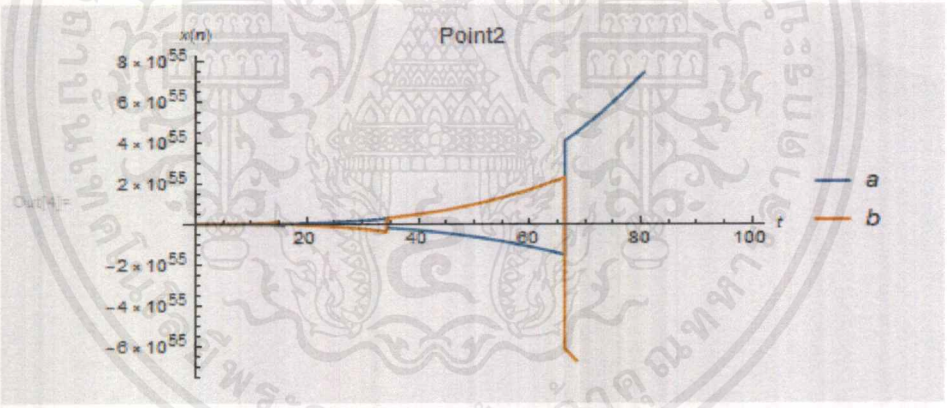
รูปที่ 4.18 ประเภทของจุดสมดุลของสมการกำลังสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อคลิกที่ปุ่มแสดงกราฟปรากฏหน้าต่างแสดงกราฟ ดังรูปที่ 4.19 และ 4.20 แสดงกราฟสมการกำลังสองจากจุดสมดุล (a1,b) และจุดสมดุล (a2,b)



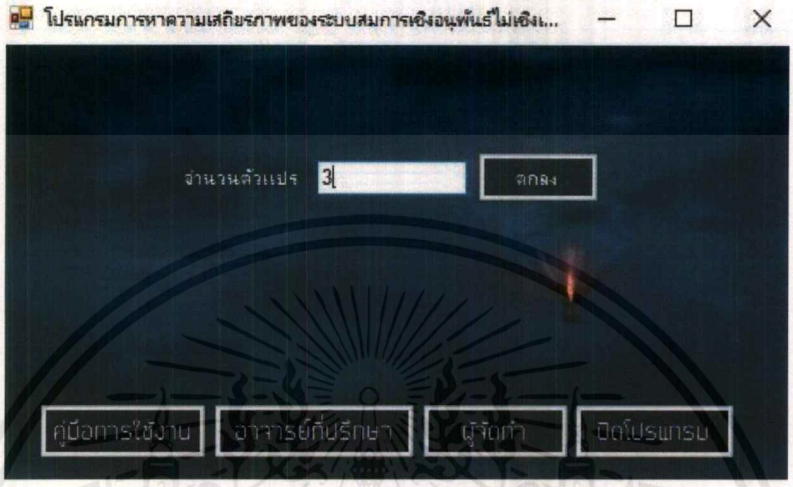
รูปที่ 4.19 แสดงกราฟสมการกำลังสองจากจุดสมดุล (a1,b)



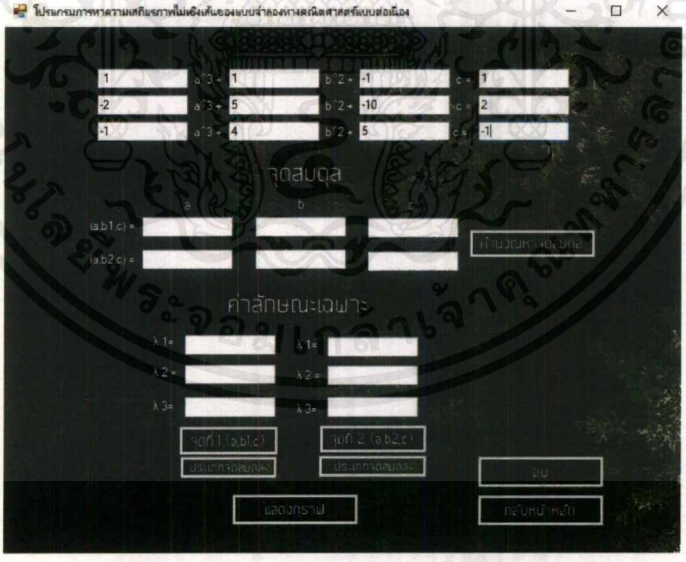
รูปที่ 4.20 แสดงกราฟสมการกำลังสองจากจุดสมดุล (a2,b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อใส่จำนวณตัวแปร คือ 3 และคลิกคำว่า ตกลง ดังรูปที่ 4.21 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังสาม จะปรากฏหน้าต่างกรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.22 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสาม



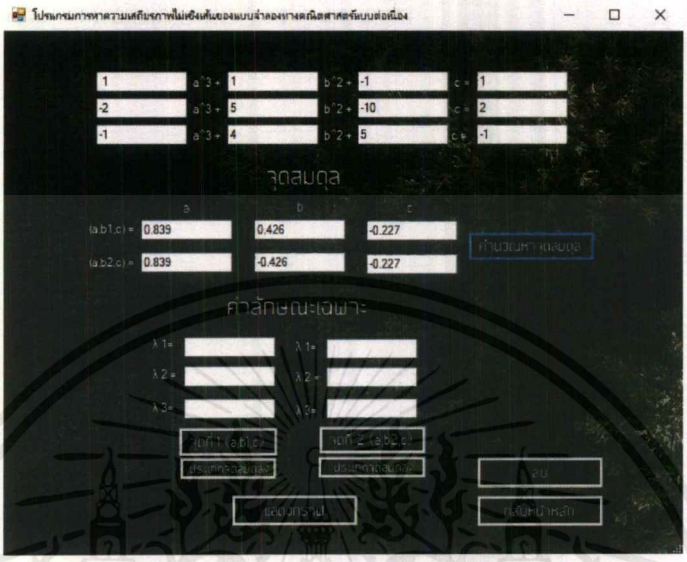
รูปที่ 4.21 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังสาม



รูปที่ 4.22 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

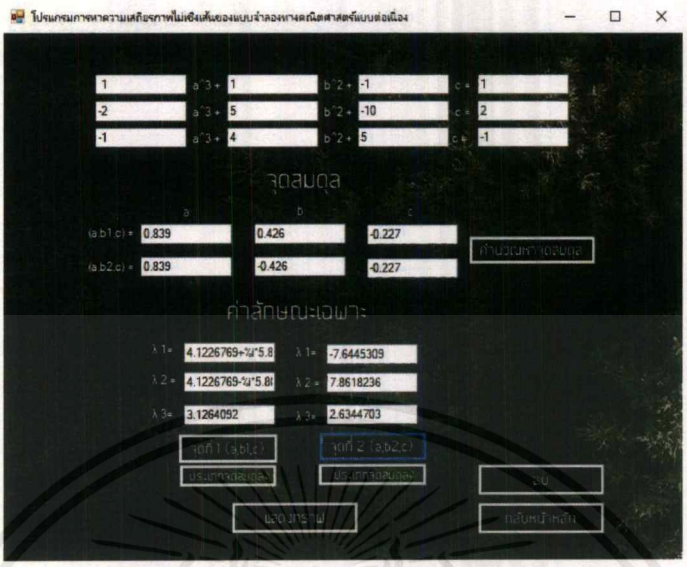
เมื่อคลิกที่ปุ่มคำนวณหาจุดสมดุลจะปรากฏค่าของตัวแปรแต่ละตัวขึ้นมาดังรูปที่ 4.23 คำนวณหาจุดของสมดุลสมการกำลังสาม



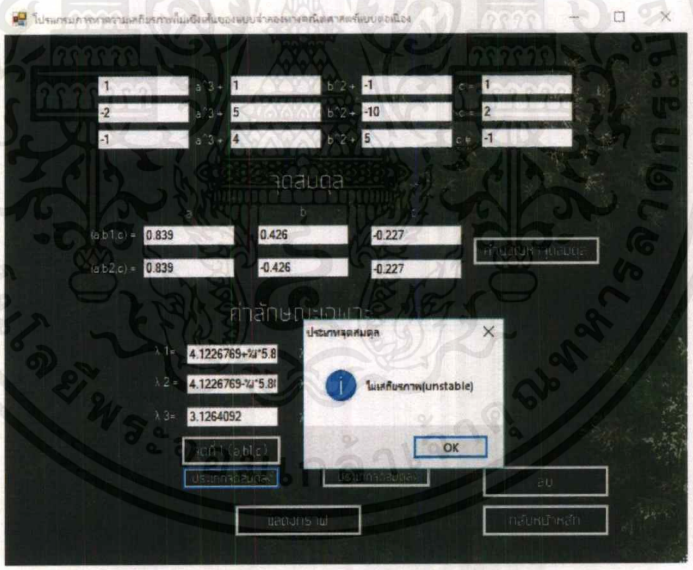
รูปที่ 4.23 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสาม

หลังจากนั้นคลิกปุ่มค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลจะปรากฏค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.24 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังสาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



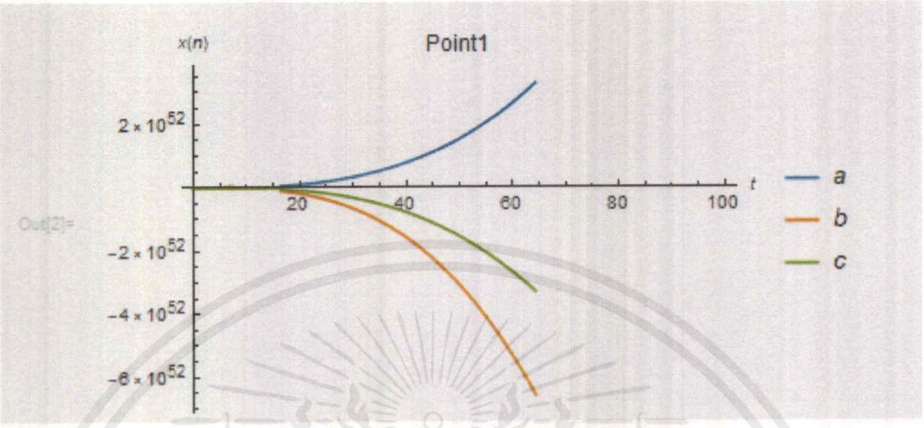
รูปที่ 4.24 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังสาม



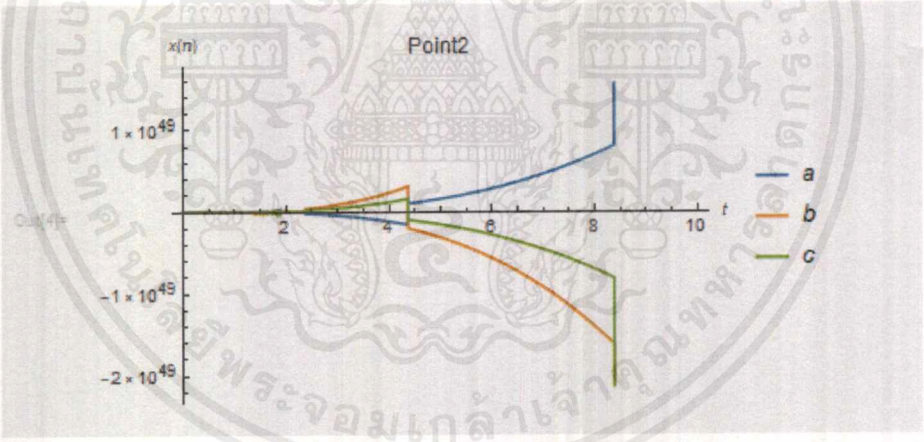
รูปที่ 4.25 ประเภทของจุดสมดุลของสมการกำลังสาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อคลิกที่ปุ่มแสดงกราฟปรากฏหน้าต่างแสดงกราฟ ดังรูปที่ 4.26 และ 4.27 แสดงกราฟของสมการกำลังสามจากจุดสมดุล (a,b1,c) และ จุดสมดุล (a,b2,c)



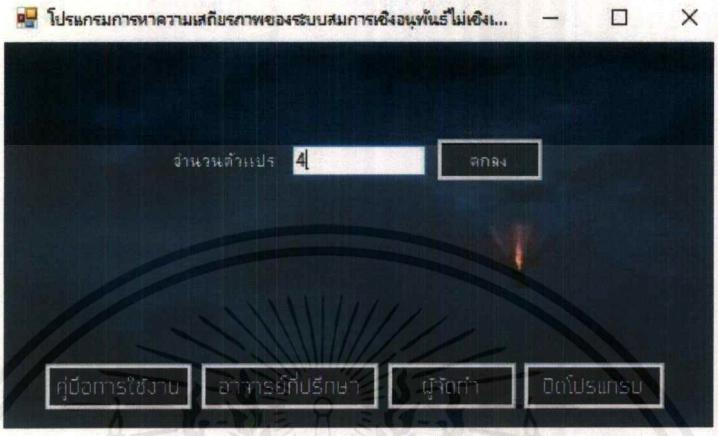
รูปที่ 4.26 แสดงกราฟของสมการกำลังสามจากจุดสมดุล (a,b1,c)



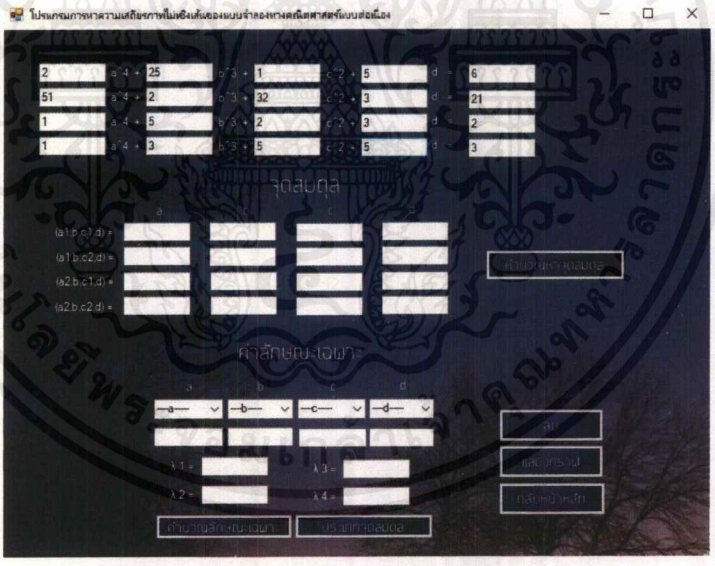
รูปที่ 4.27 แสดงกราฟของสมการกำลังสามจากจุดสมดุล (a,b2,c)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อใส่จำนวนตัวแปร คือ 4 และคลิกคำว่า ตกลง ดังรูปที่ 4.28 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังสี่ จะปรากฏหน้าต่างกรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.29 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสี่



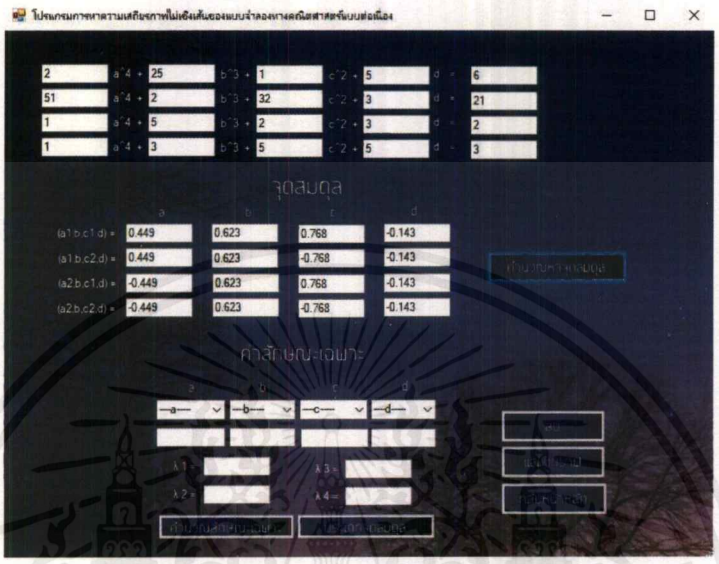
รูปที่ 4.28 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังสี่



รูปที่ 4.29 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังสี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

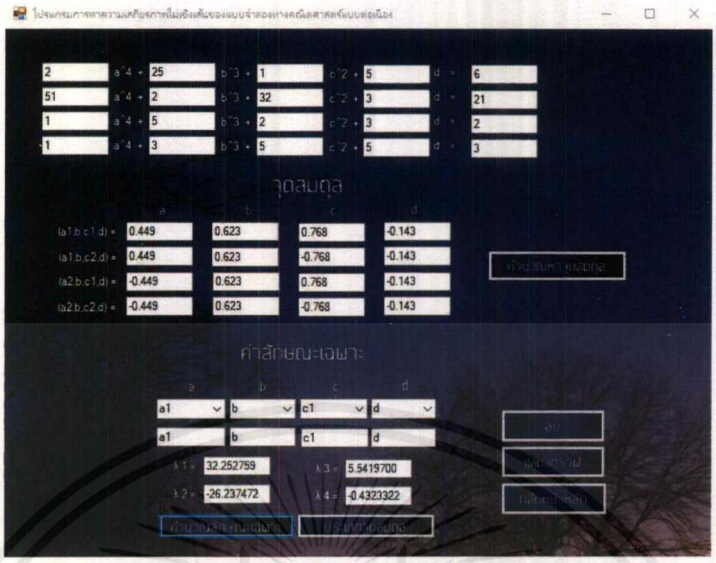
เมื่อคลิกที่ปุ่มคำนวณหาจุดสมดุลจะปรากฏค่าของตัวแปรแต่ละตัวขึ้นมาดังรูปที่ 4.30 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสี่



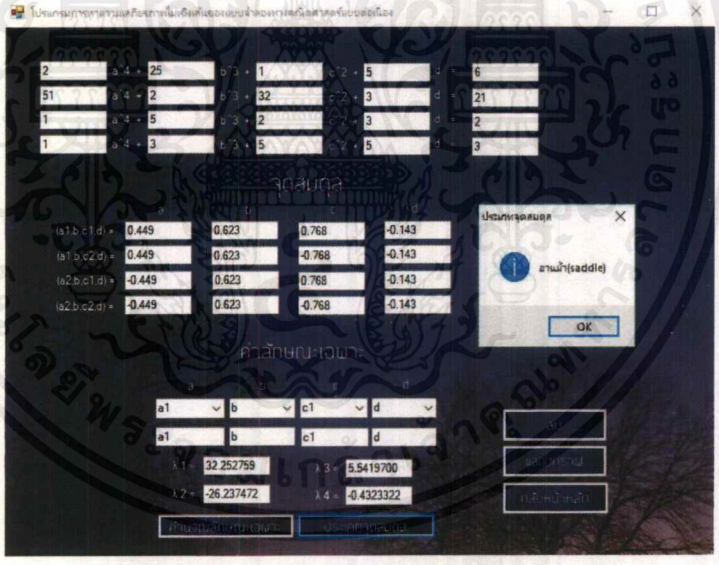
รูปที่ 4.30 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังสี่

หลังจากนั้นคลิกปุ่มค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลจะปรากฏค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.31 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังสี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



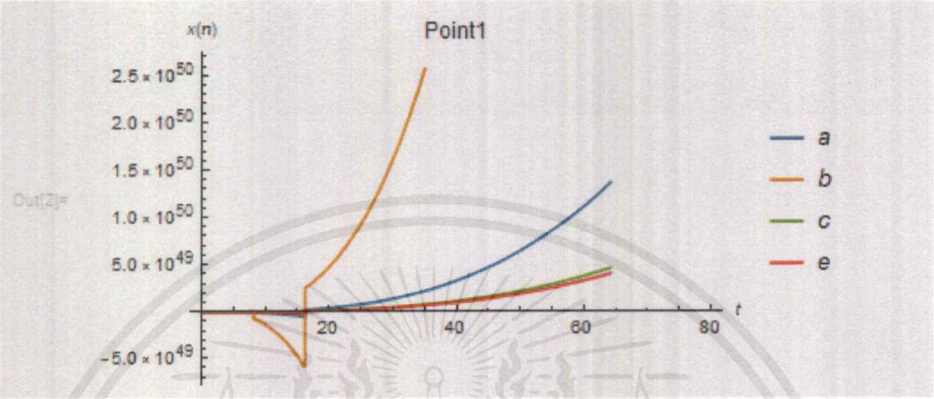
รูปที่ 4.31 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังสี่



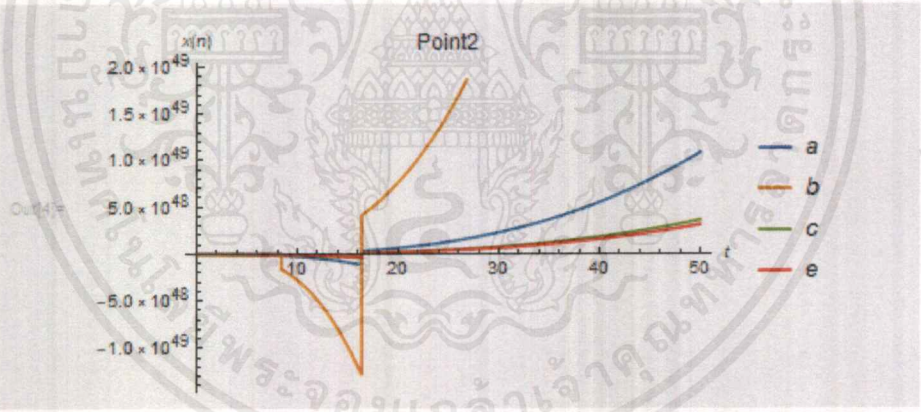
รูปที่ 4.32 ประเภทของจุดของสมดุลสมการกำลังสี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อคลิกที่ปุ่มแสดงกราฟปรากฏหน้าต่างแสดงกราฟ ดังรูปที่ 4.33, 4.34, 4.35 และ 4.36 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a1,b,c1,d), (a1,b,c2,d), (a2,b,c1,d) และ (a2,b,c2,d) ตามลำดับ

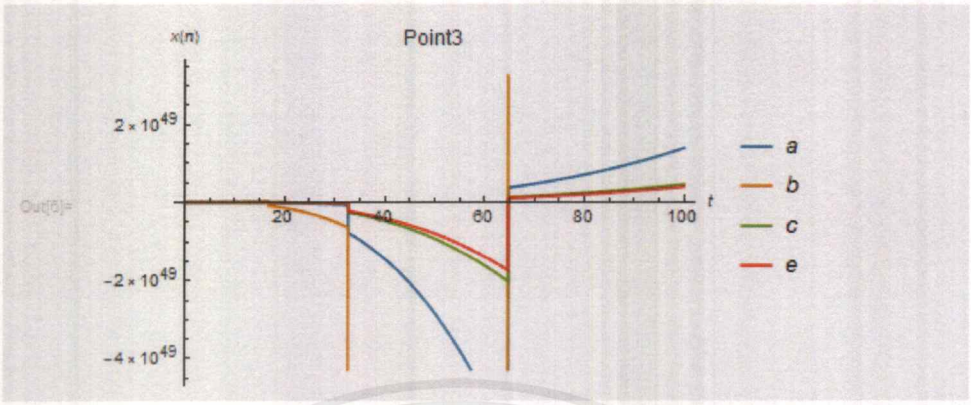


รูปที่ 4.33 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a1,b,c1,d)

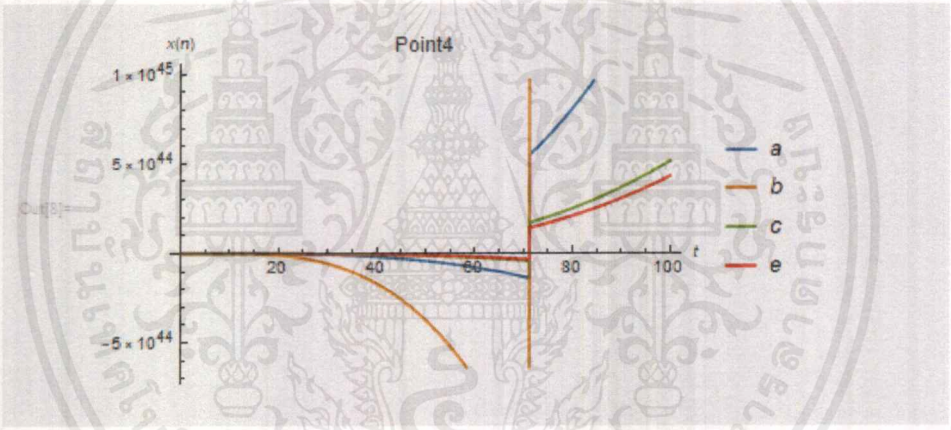


รูปที่ 4.34 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a1,b,c2,d)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



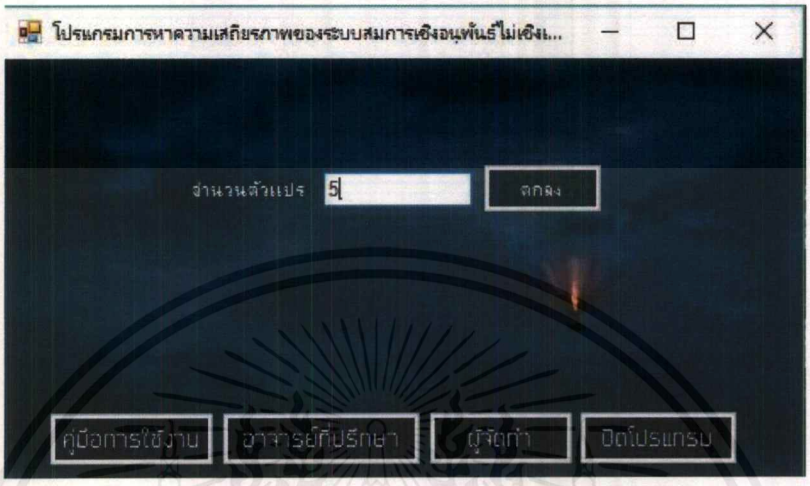
รูปที่ 4.35 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a2,b,c1,d)



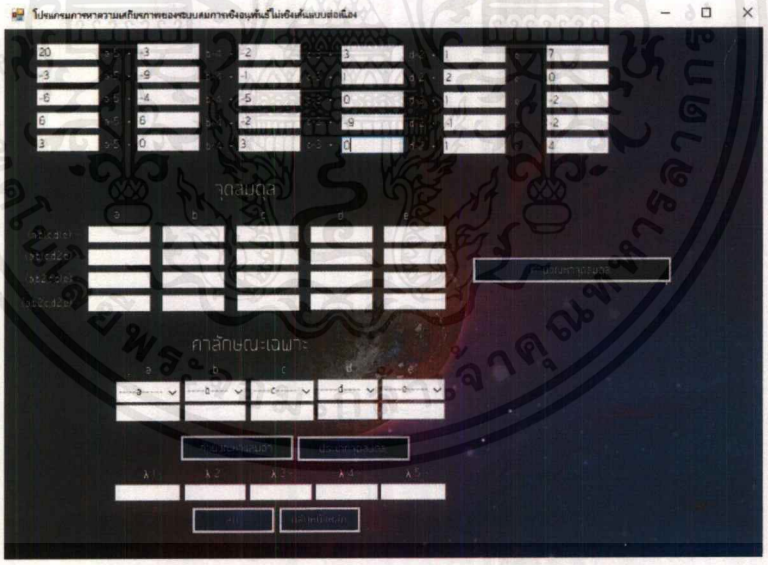
รูปที่ 4.36 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล(a2,b,c2,d)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อใส่จำนวณตัวแปร คือ 5 และคลิกคำว่า ตกลง ดังรูปที่ 4.37 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังห้า จะปรากฏหน้าต่างกรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.38 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังห้า



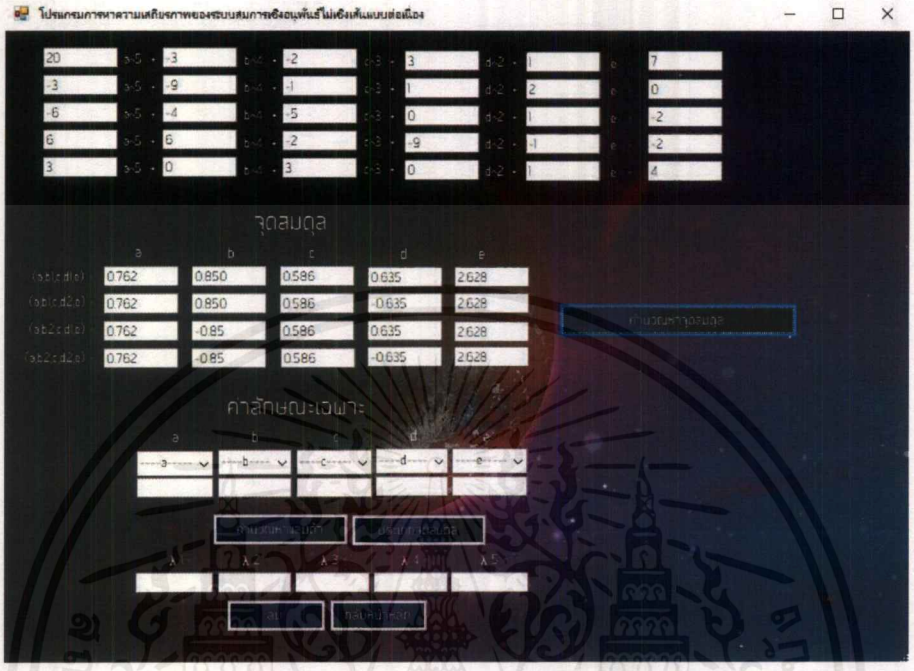
รูปที่ 4.37 จำนวนตัวแปรของสมการกำลังห้า



รูปที่ 4.38 กรอกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการกำลังห้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

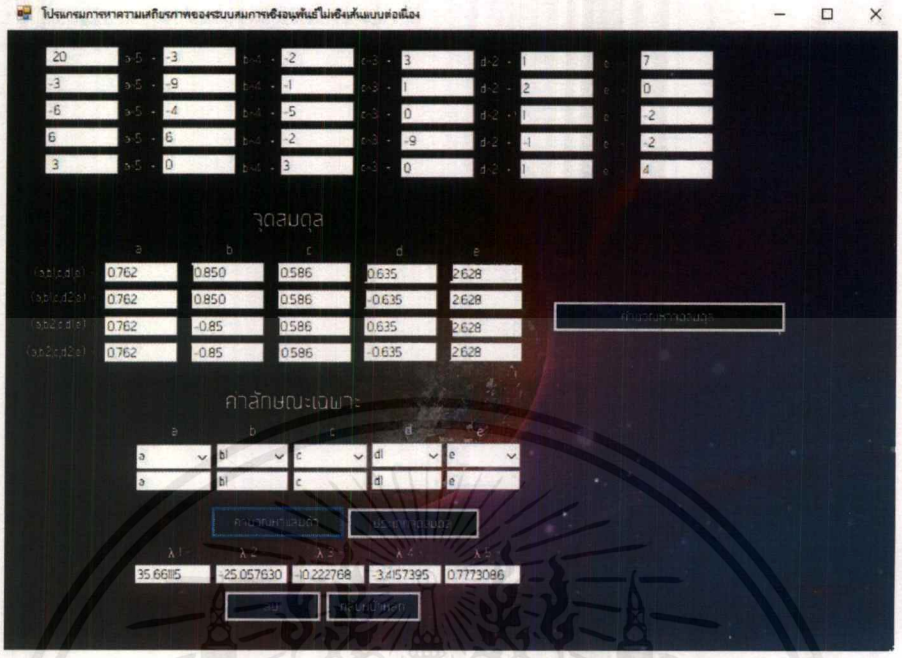
เมื่อคลิกที่ปุ่มคำนวณหาจุดสมดุลจะปรากฏค่าของตัวแปรแต่ละตัวขึ้นมาดังรูปที่ 4.39 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังห้า



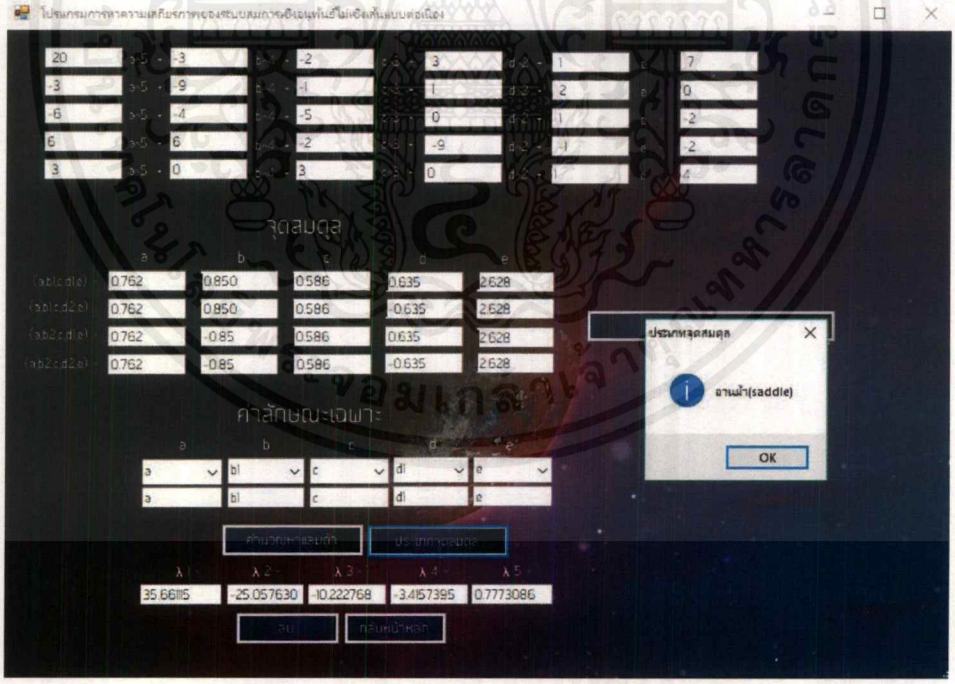
รูปที่ 4.39 คำนวณหาจุดสมดุลของสมการกำลังห้า

หลังจากนั้นคลิกปุ่มค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลจะปรากฏค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลแต่ละตัว ดังรูปที่ 4.40 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังห้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



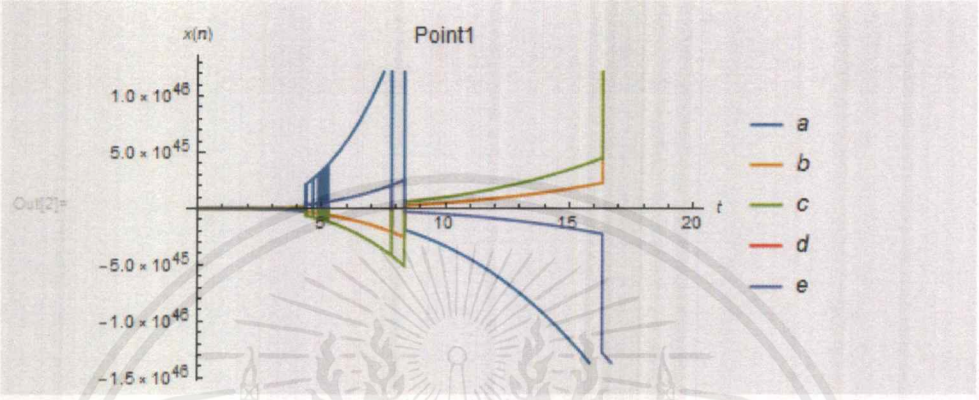
รูปที่ 4.40 แสดงค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลของสมการกำลังห้า



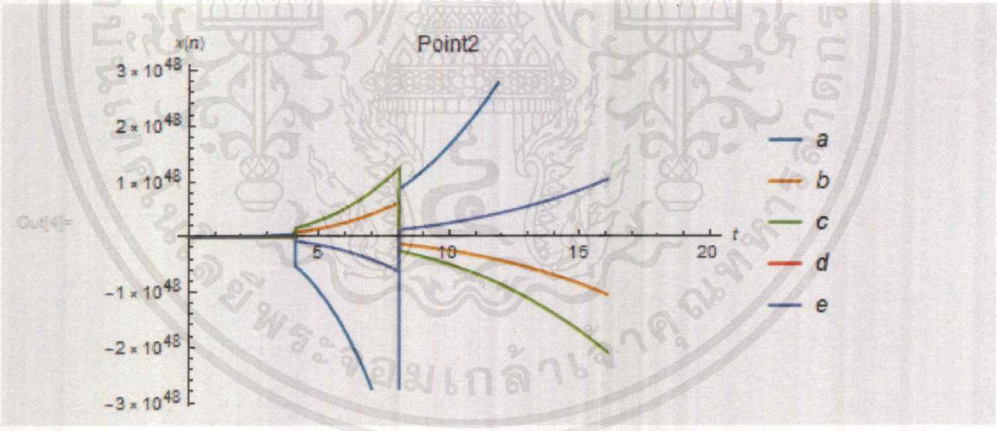
รูปที่ 4.41 ประเภทของจุดสมดุลของสมการกำลังห้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อคลิกที่ปุ่มแสดงกราฟปรากฏหน้าต่างแสดงกราฟ ดังรูปที่ 4.42, 4.43, 4.44 และ 4.45 แสดงกราฟของสมการกำลังห้าจากจุดสมดุล (a,b1,c,d1,e), (a,b1,c,d2.e), (a,b2,c,d1,e) และ (a,b2,c,d2,e) ตามลำดับ

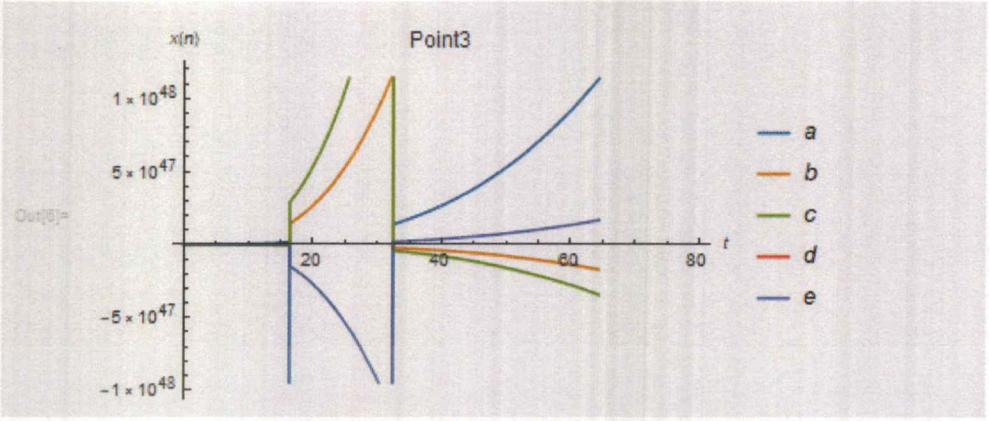


รูปที่ 4.42 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b1,c,d1,e)

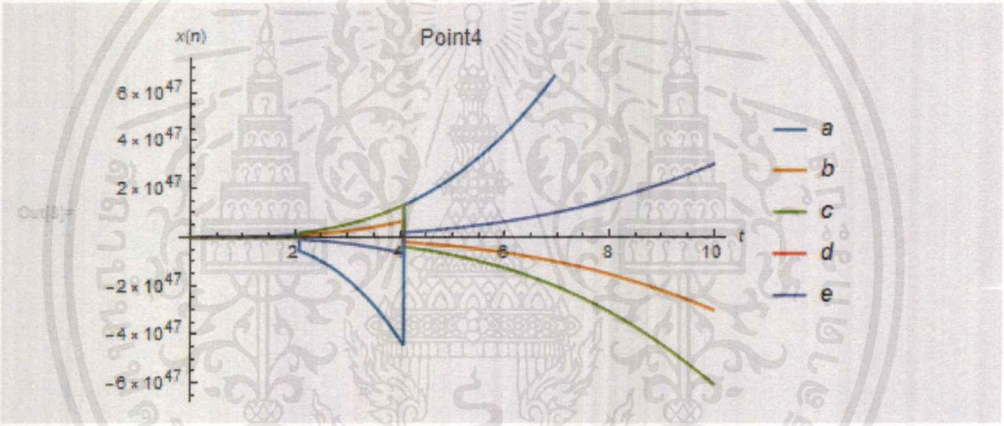


รูปที่ 4.43 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b1,c,d2.e)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.44 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b2,c,d1,e)



รูปที่ 4.45 แสดงกราฟของสมการกำลังสี่จากจุดสมดุล (a,b2,c,d2,e)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะของปัญหาพิเศษนี้ แบ่งเนื้อหาออกเป็น 3 ส่วน คือ ส่วนสรุปผลการดำเนินงาน ส่วนของข้อเสนอแนะ และส่วนของแนวทางการพัฒนาต่อ ซึ่งมีลายละเอียดของแต่ละส่วนต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

5.1.1 ได้ศึกษาทฤษฎีบทแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในการหาความเสถียรภาพไม่เชิงเส้นของจุดสมดุลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่อง

5.1.2 ได้พัฒนาทักษณะการเขียนโปรแกรม Microsoft Visual basic

5.1.3 ได้ศึกษาการคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วย scilab

จุดเด่นของโปรแกรม มีดังนี้

1. ช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณหาจุดสมดุลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่อง
2. สามารถหาความเสถียรภาพไม่เชิงเส้นของจุดสมดุล แล้วแสดงกราฟของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่องได้
3. โปรแกรมสามารถนำมาใช้ได้จริง

จุดที่สามารถปรับปรุงแก้ไขของโปรแกรม มีดังนี้

1. ปรับปรุงรูปแบบโปรแกรมให้สวยงามน่าใช้งานยิ่งขึ้น
2. ใช้เวลาในการคำนวณค่าแรมด้ามากเกินไป
3. รูปกราฟไม่สามารถส่งกลับมายัง Microsoft Visual basic ได้ และใช้เวลาในการคำนวณมากเกินไป

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 สำหรับผู้ใช้โปรแกรม ควรศึกษาและทำความเข้าใจ ในส่วนของสมการรูปทั่วไปและระบบแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงทางคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่อง ก่อนการใช้โปรแกรมในการคำนวณ

5.2.2 ควรมีการนำโปรแกรมไปทดลองใช้ประกอบการเรียนการสอนในห้องเรียน เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจการบวนการคำนวณหาความเสถียรภาพไม่เชิงเส้นของจุดสมดุลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่อง

5.2.3 โปรแกรมนี้มาสามารถนำไปศึกษา และพัฒนาเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในงานวิชาการด้านอื่นๆได้ต่อไปในอนาคต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3 แนวทางการพัฒนาต่อ

5.3.1 พัฒนาโปรแกรมให้สามารถใช้ตรีโกณมิติและฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ในการคำนวณได้

5.3.2 พัฒนาโปรแกรมให้สามารถใช้คำนวณหาจุดสมดุลและความเสถียรภาพของระบบสมการที่มากกว่า 5 ตัวแปร

5.3.3 พัฒนาโปรแกรมให้สามารถใช้ได้ออนไลน์ และโทรศัพท์มือถือได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] ธีรพันธุ์ เหล็กเพชร, เพ็ญนภา กรโกษา และอัจฉรา น้ำใจดี. 2559. "โปรแกรมการหาความเสถียรภาพเชิงเส้นของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่อง." ปัญหาพิเศษปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต(คณิตศาสตร์ประยุกต์. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[2] ปิยะ โควินท์ทวิวัฒน์ และจิรันดร บู๊ฮวด. **หนังสือการพัฒนาสื่อการสอนโดยใช้โปรแกรม Scilab.** [ออนไลน์]. เข้าถึงได้ที่ http://home.npru.ac.th/piya/webscilab/file/Scilab_Book2.pdf?fbclid=IwAR32ND7fF_XrY-fHwqdPfciPMux24UejUOmkpbnTPHoH25oV-5p19Cs0LJw

[3] Bob Pirtle and Stacy Green. **Mathematical Modeling.**

[4] Michael Richmond. 2007. **Simple Plotting in Scilab**. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้ที่ : http://spiff.rit.edu/classes/phys317/lectures/plot/plot.html

[5] The open source platform for numerical computation for Thai people Nakhon Pathom Rajabhat University. **การแก้สมการพหุนามที่มีตัวแปรเดียว**. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้ที่: http://home.npru.ac.th/piya/webscilab/g3.php.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

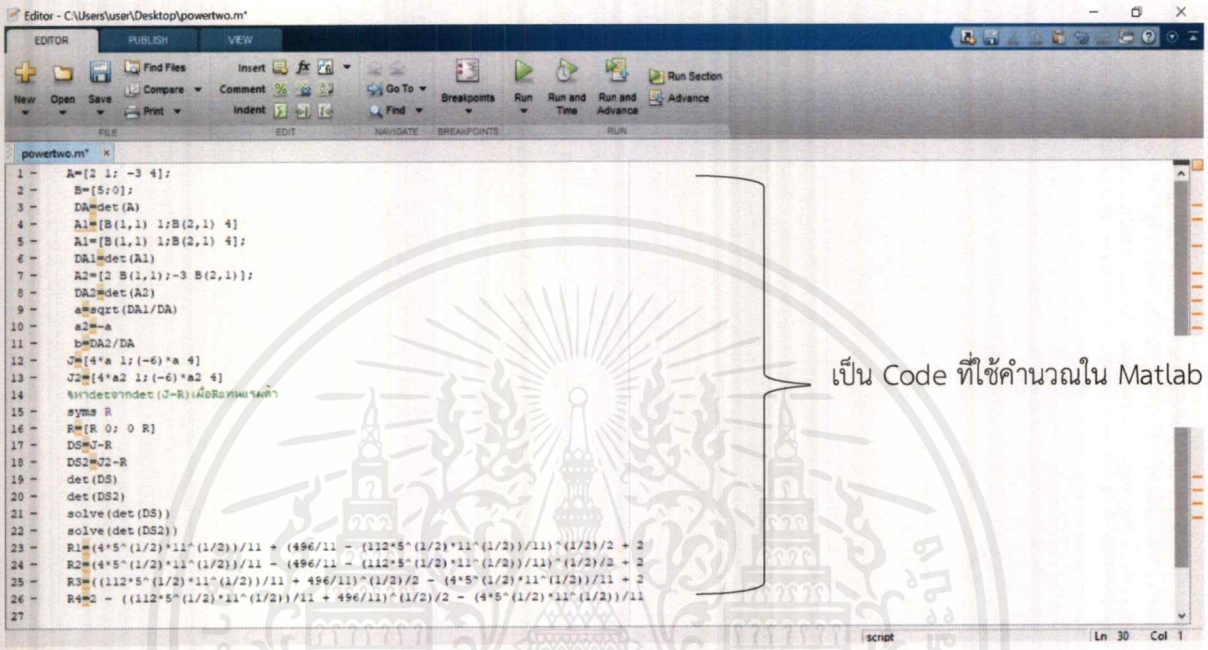
ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

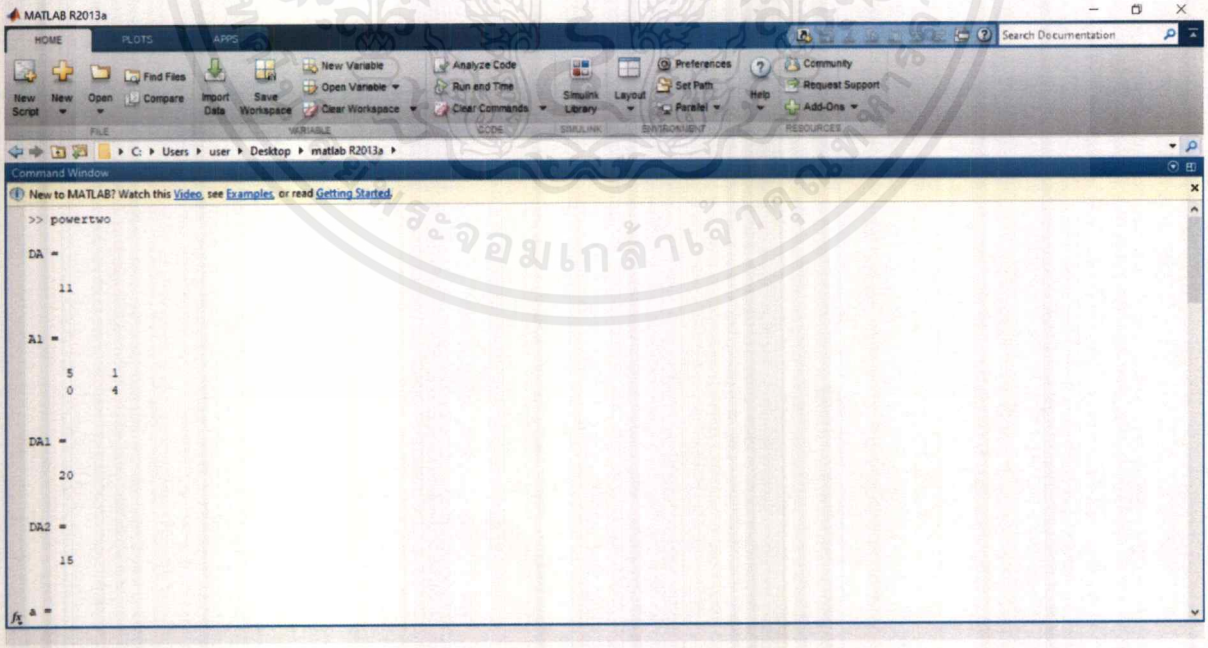
วิธีการคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB เพื่อตรวจหาความถูกต้องของสมการ

สมการกำลัง 2

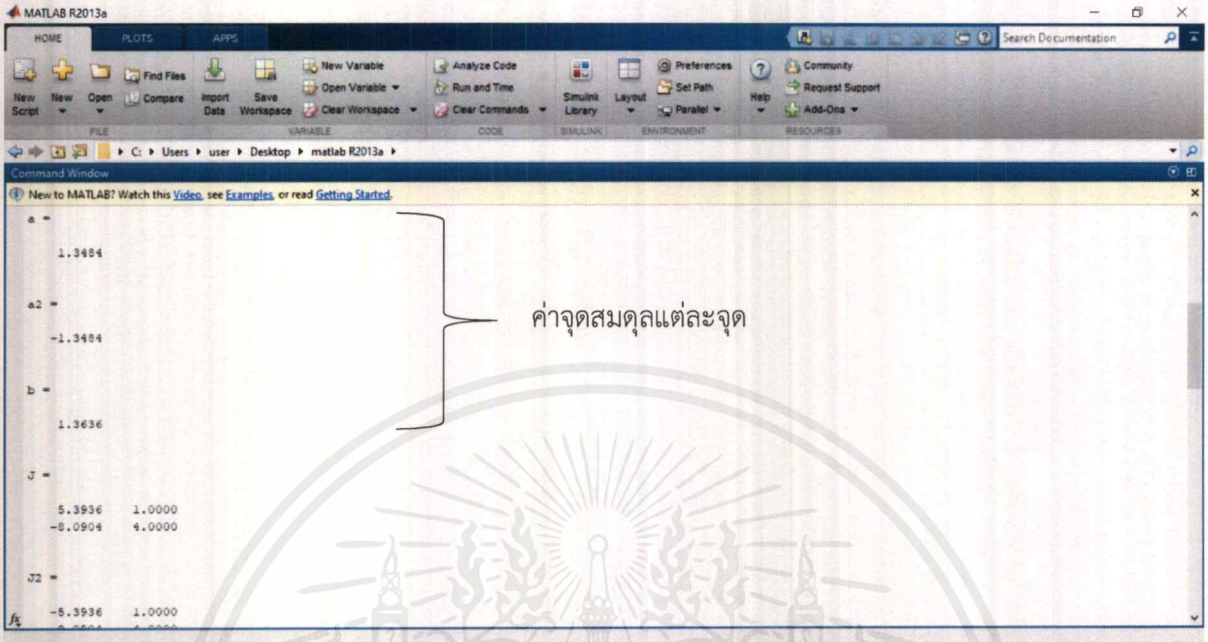
- Input code in MATLAB



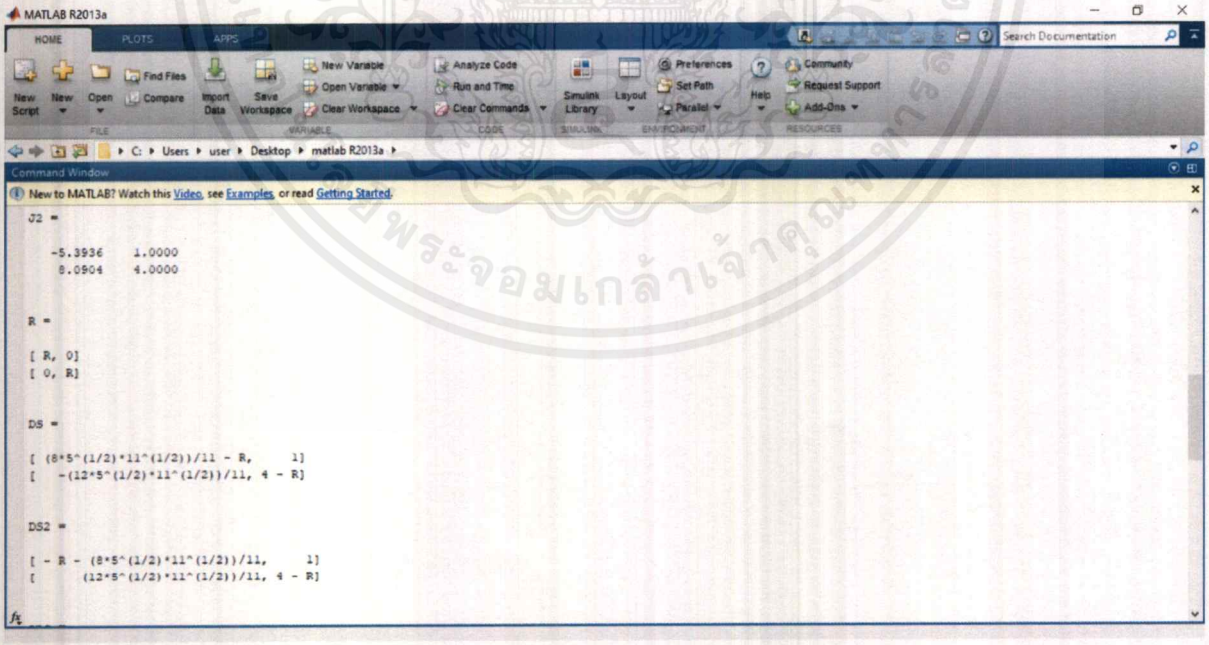
- Output



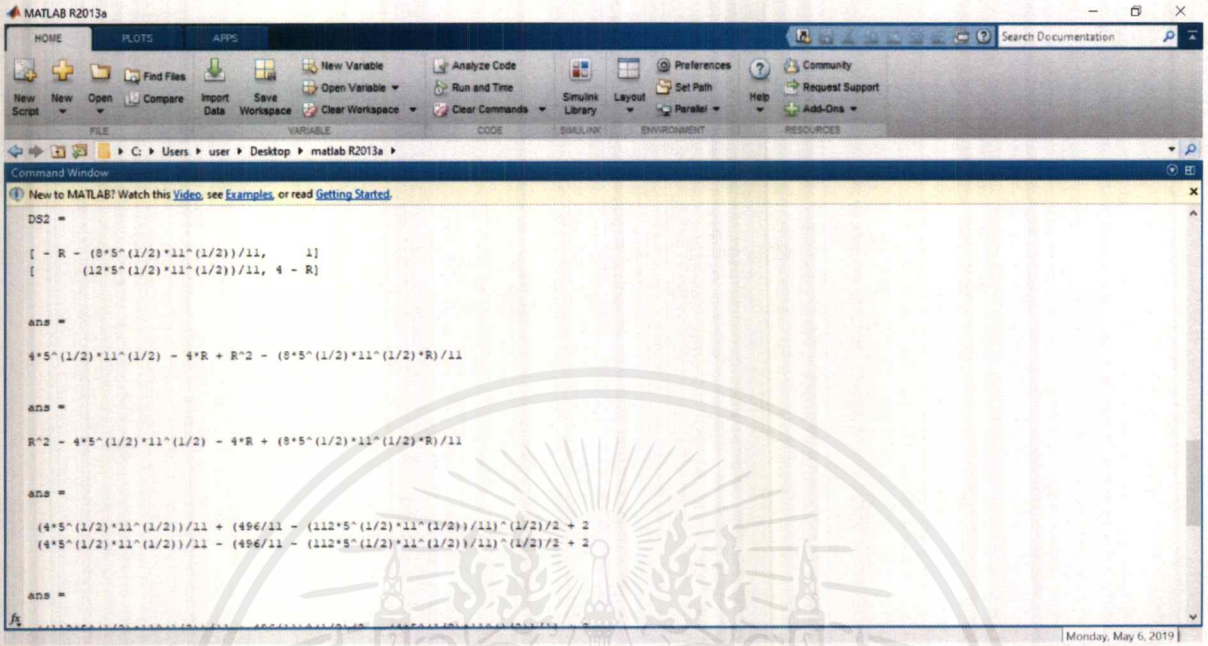
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

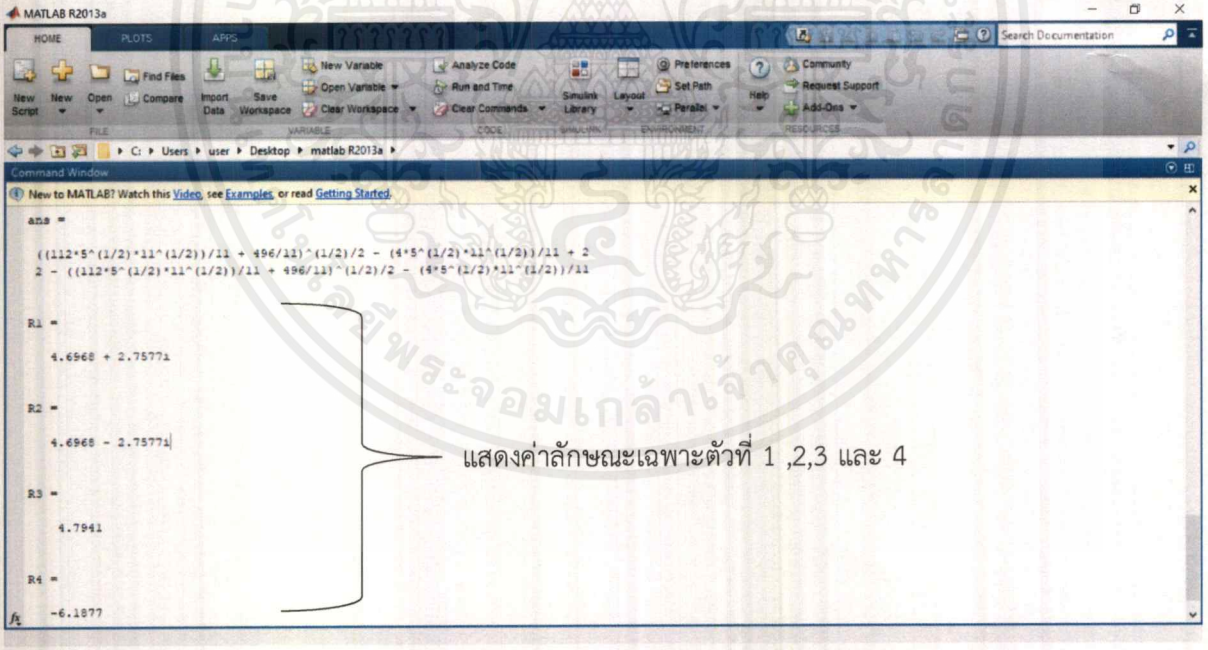


สามารถตรวจสอบความถูกต้องของจุดสมดุลที่ได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.16



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



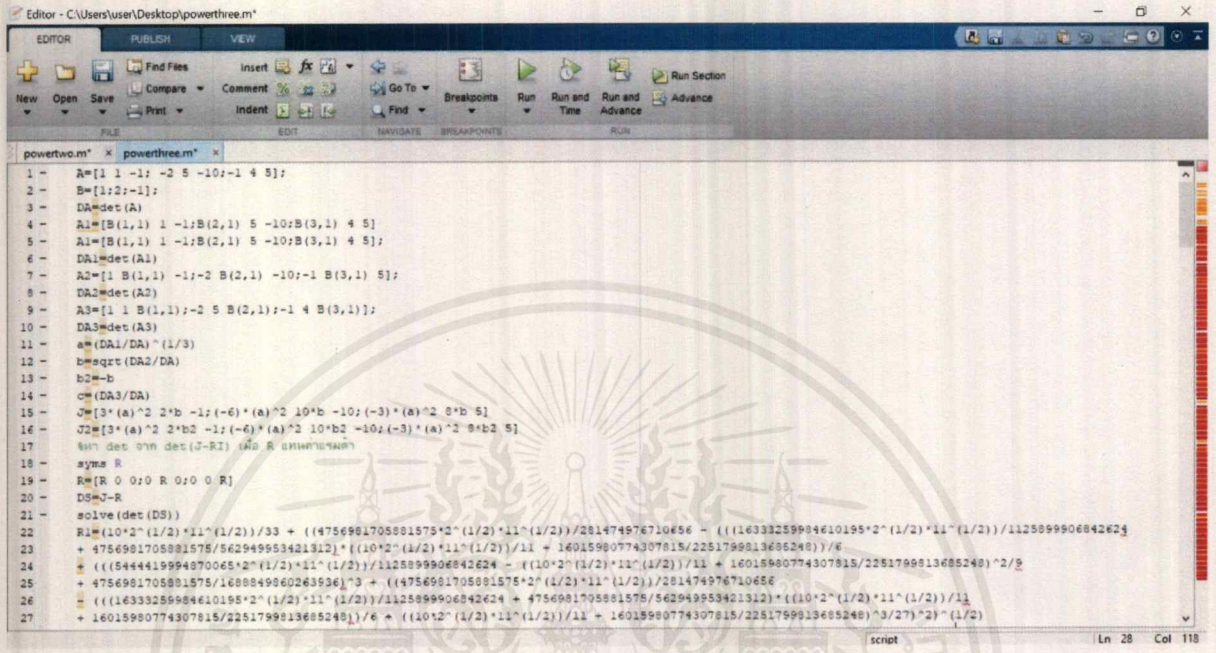


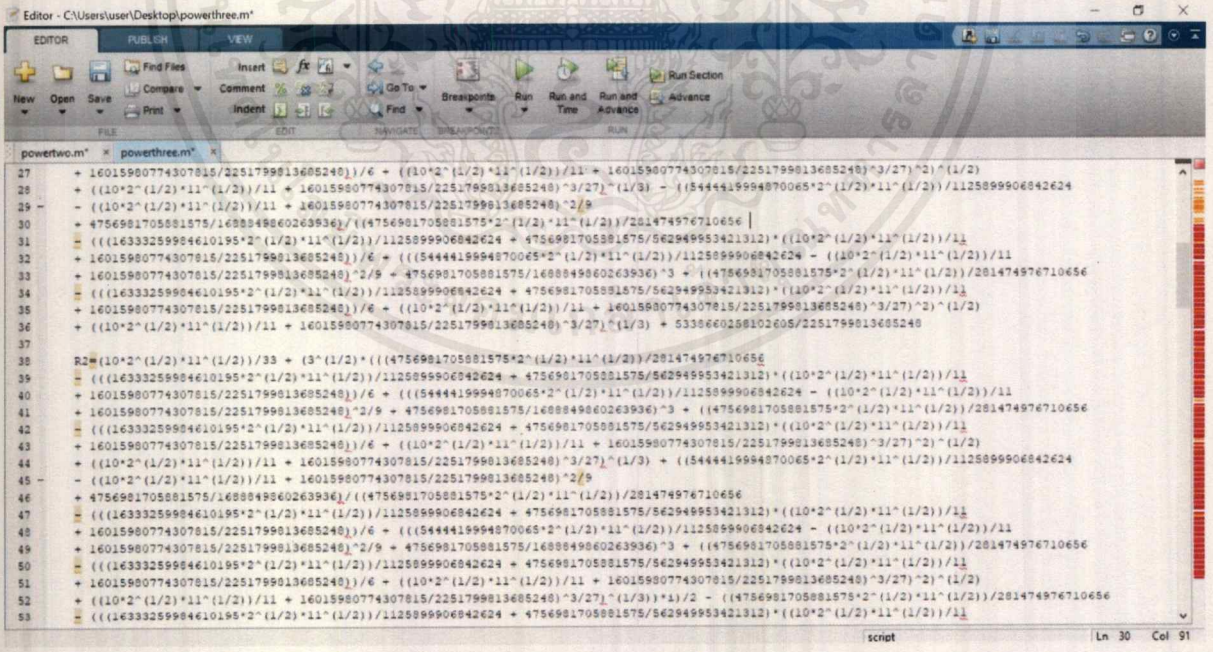
สามารถตรวจสอบความถูกต้องของค่าลักษณะเฉพาะที่ได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

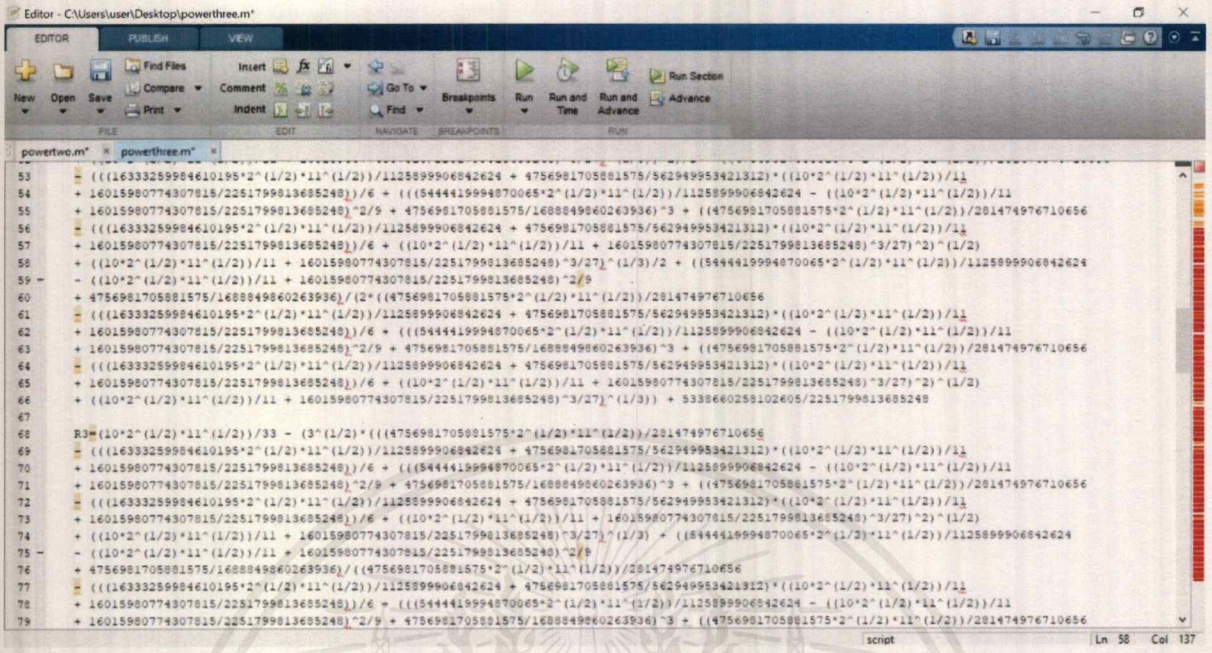
สมการกำลัง 3

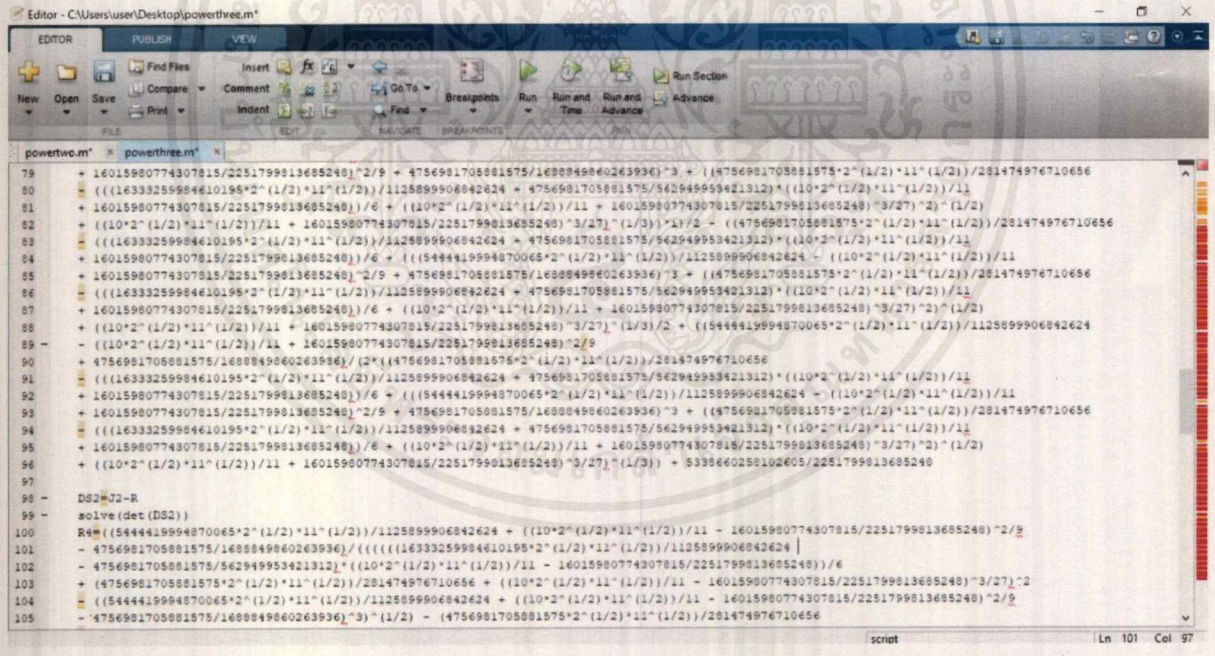
- Input code in MATLAB



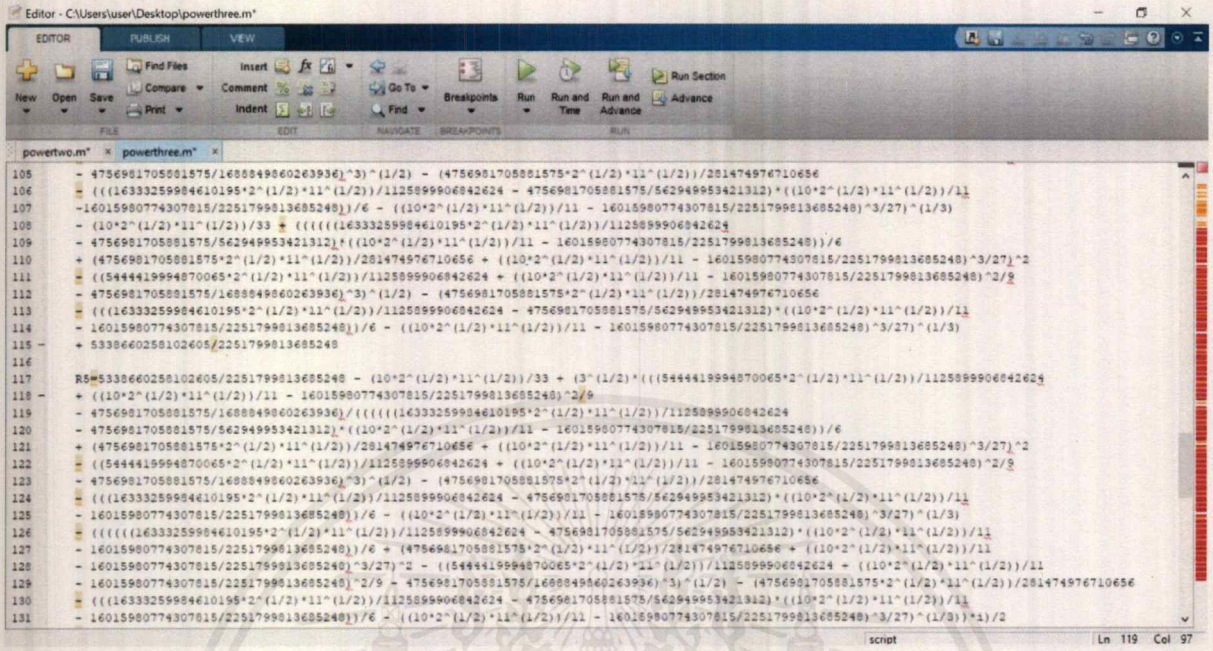


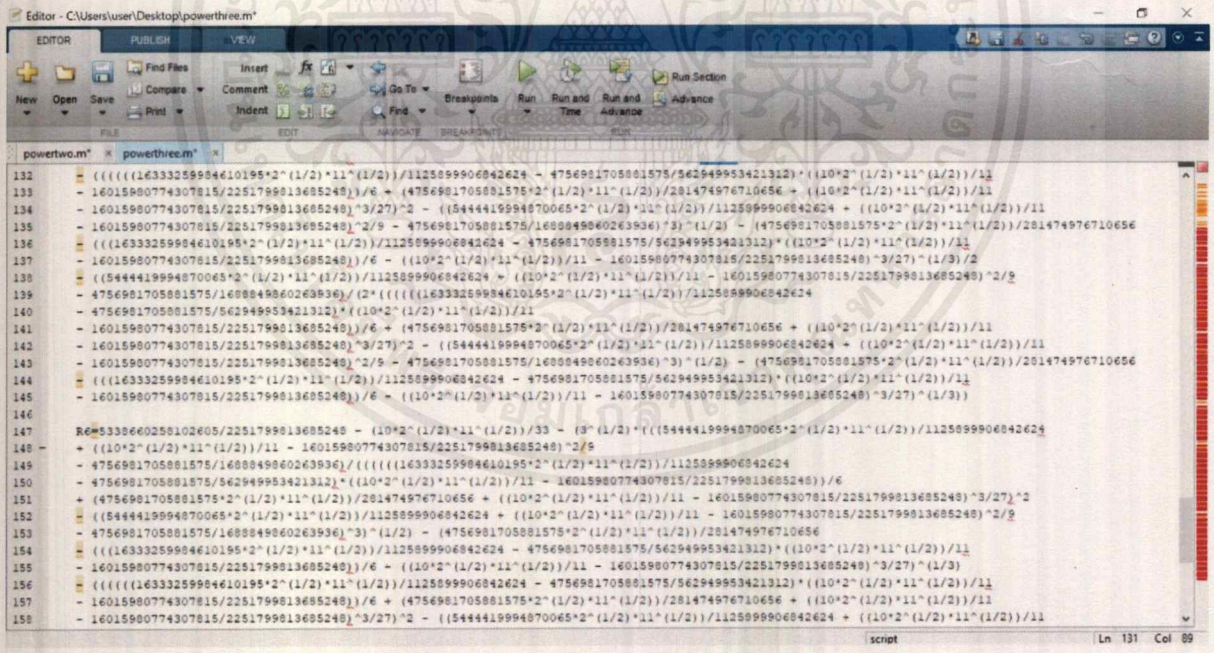
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



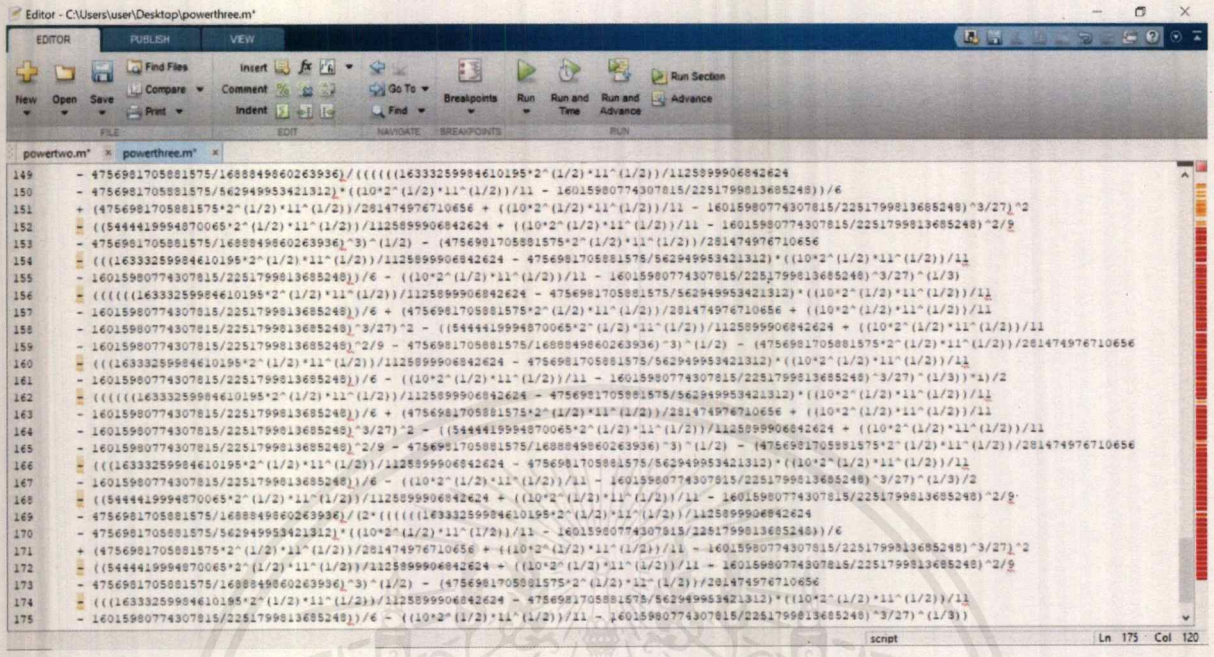


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

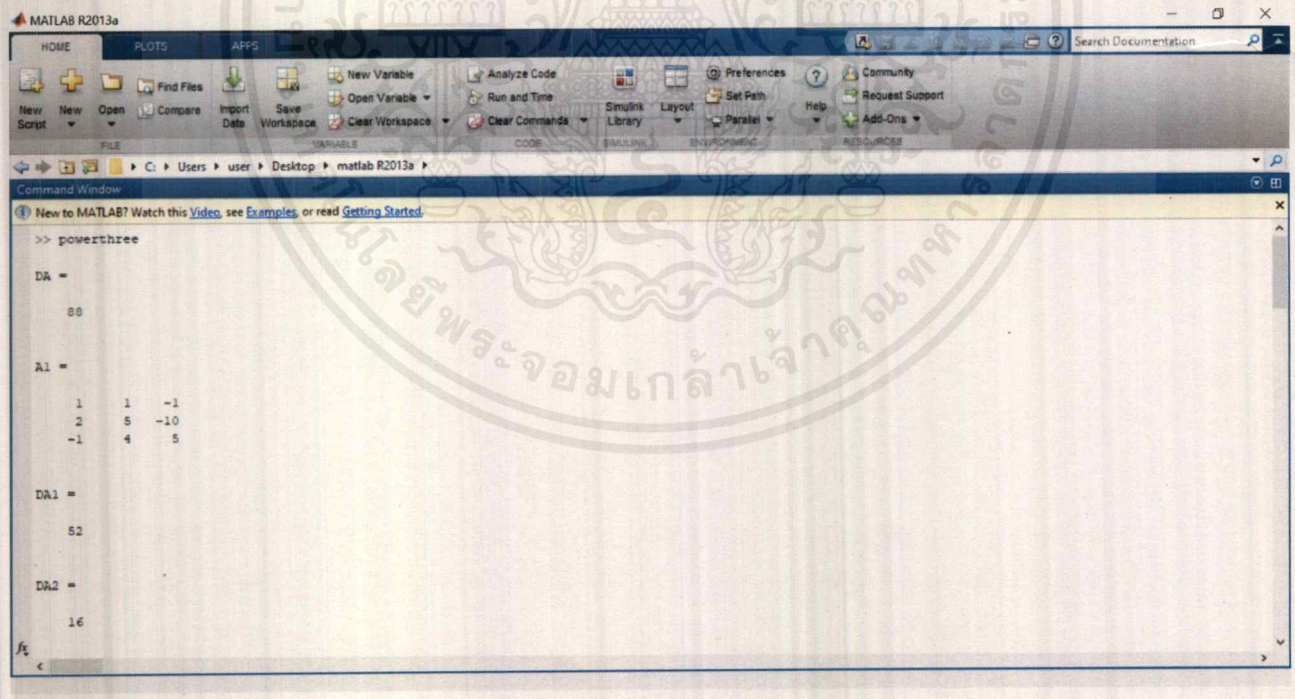




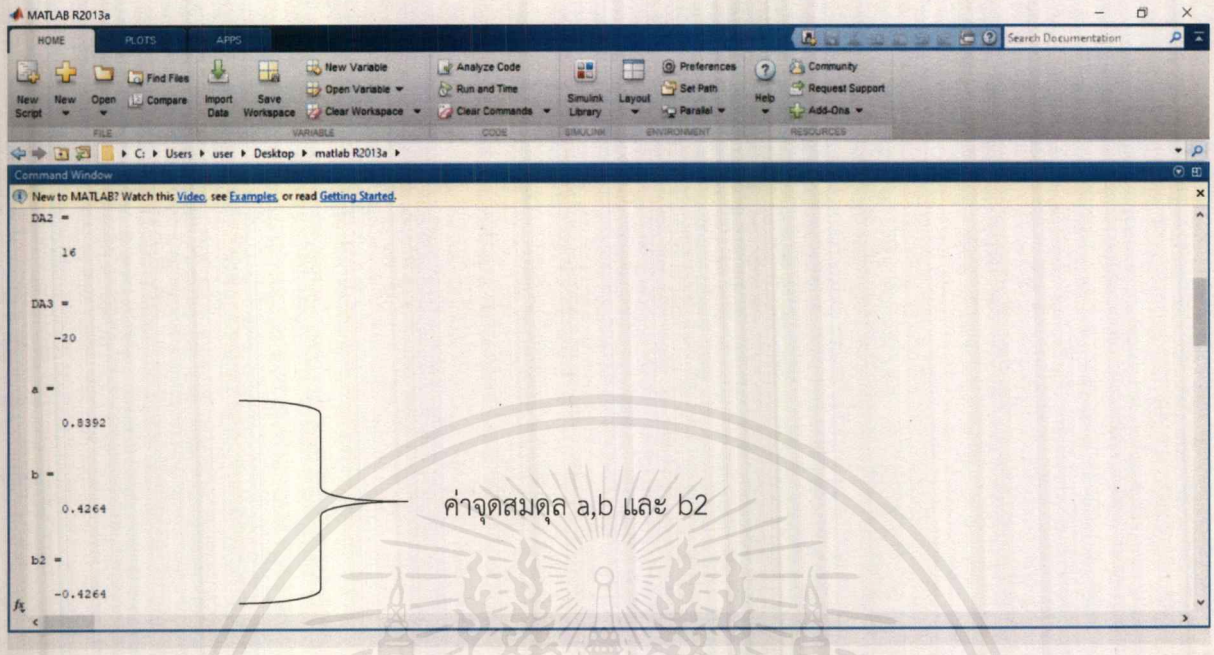
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



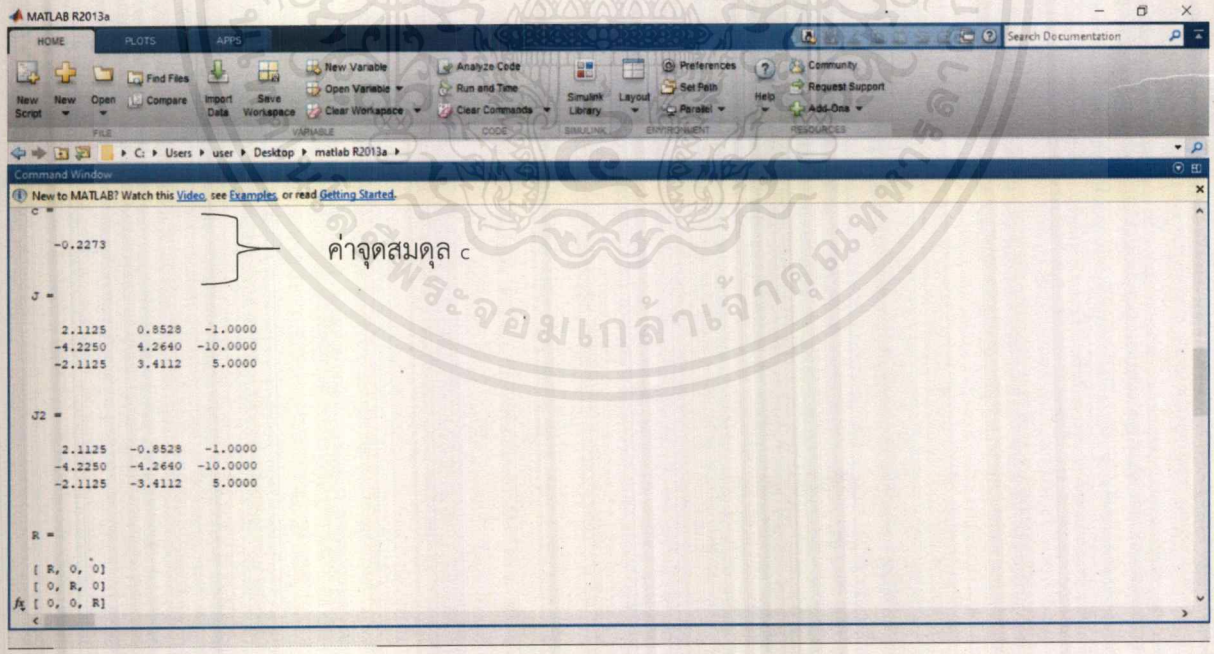
- Output



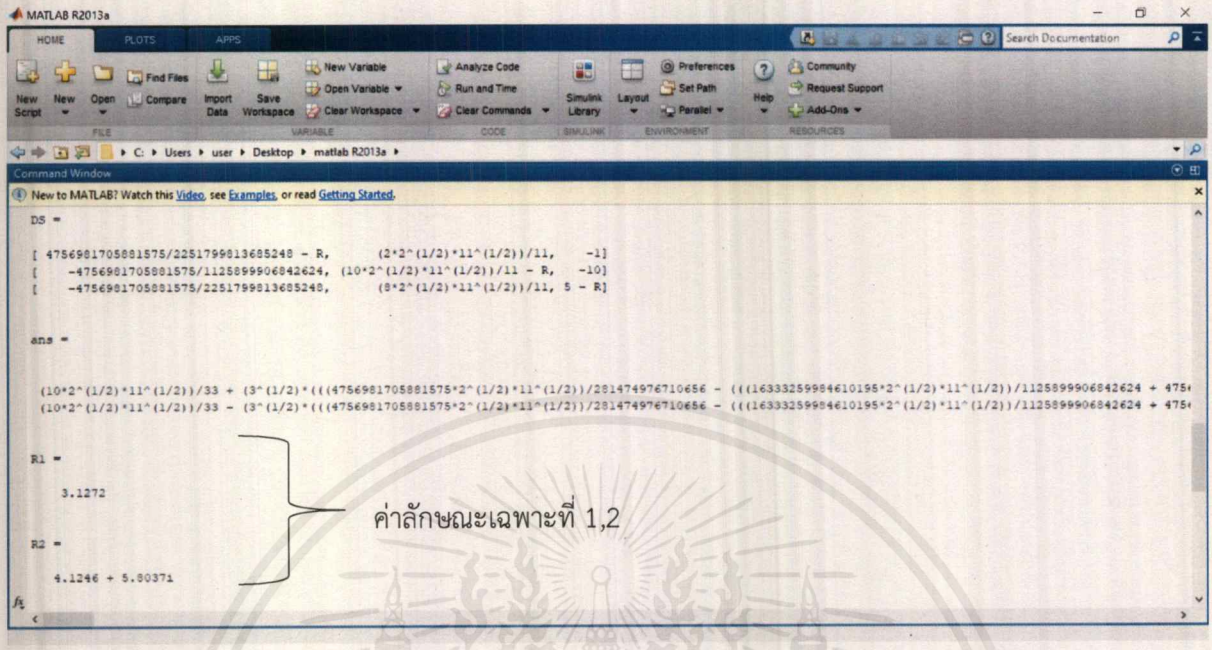
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

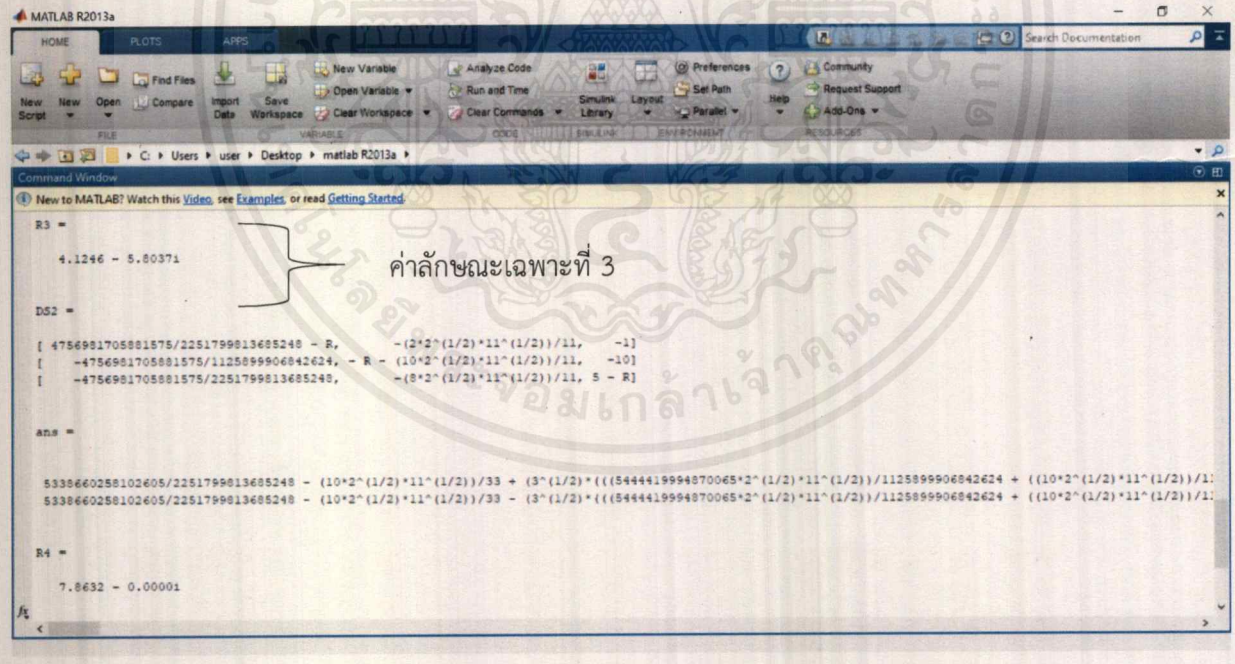


สามารถตรวจสอบความถูกต้องของจุดสมดุลที่ได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.23

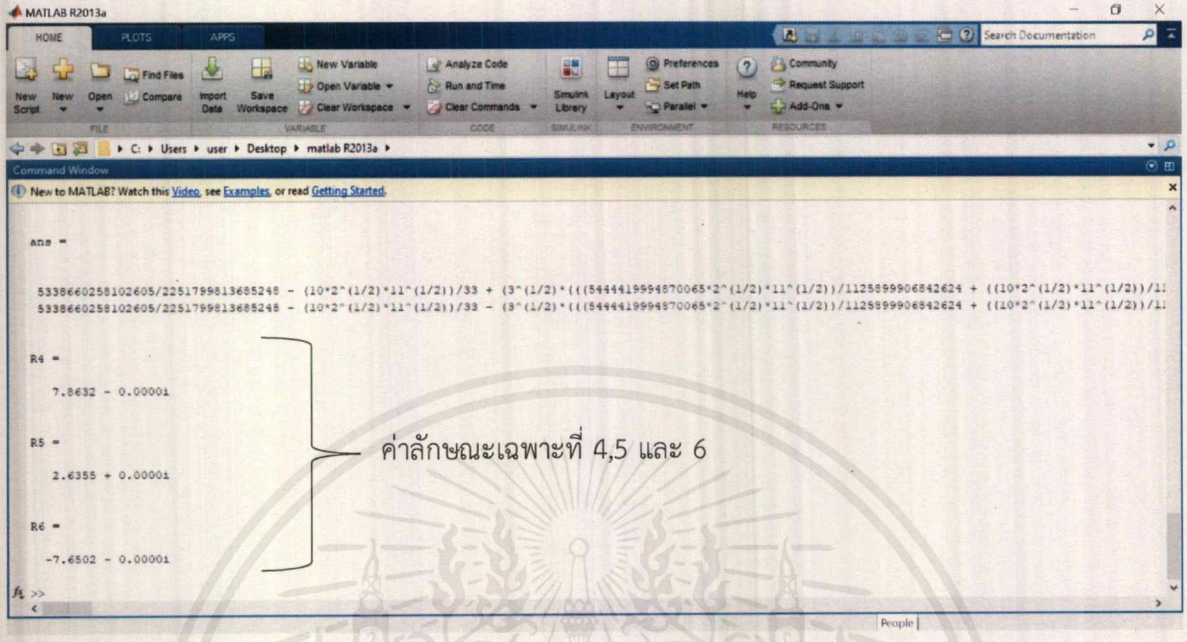


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้





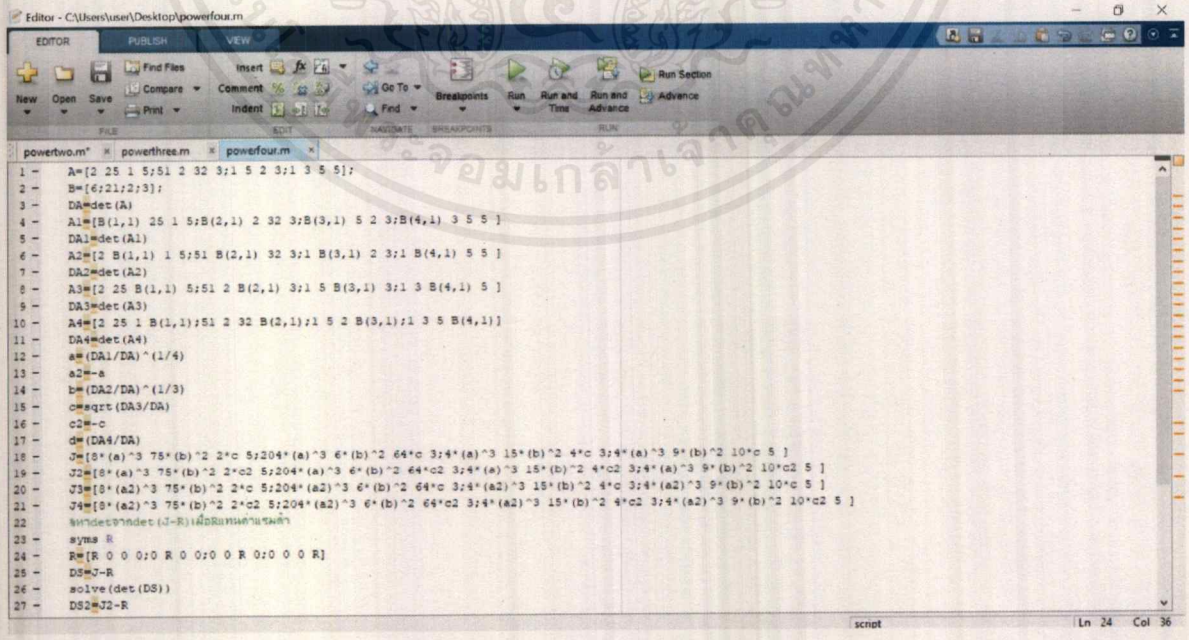
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



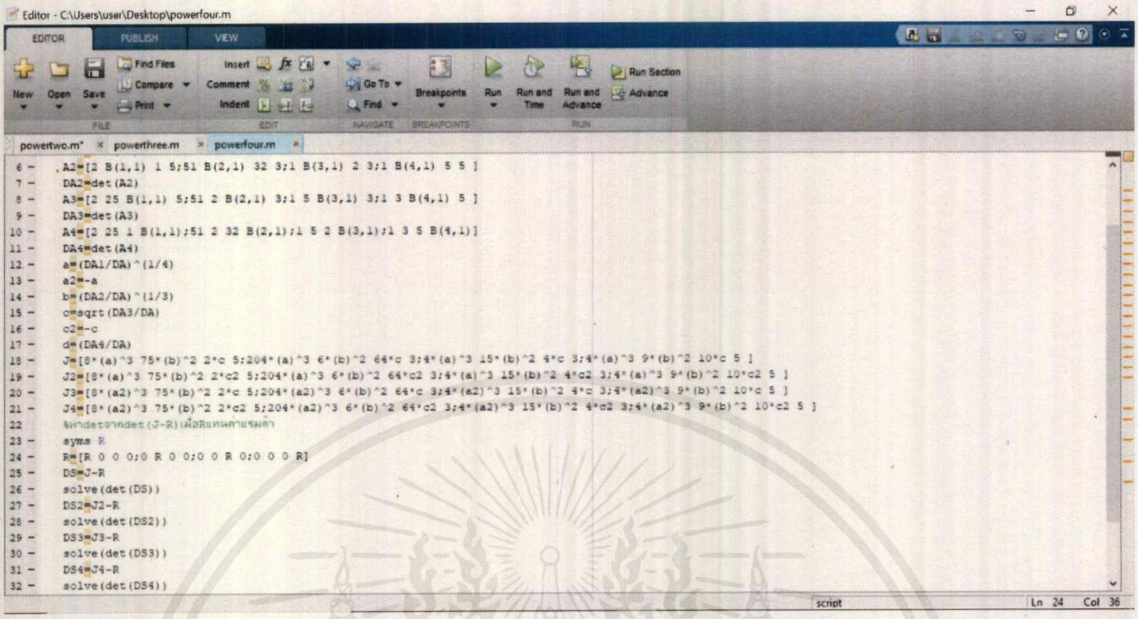
สามารถตรวจสอบความถูกต้องของค่าลักษณะเฉพาะได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.24

สมการกำลัง 4

- Input code in MATLAB

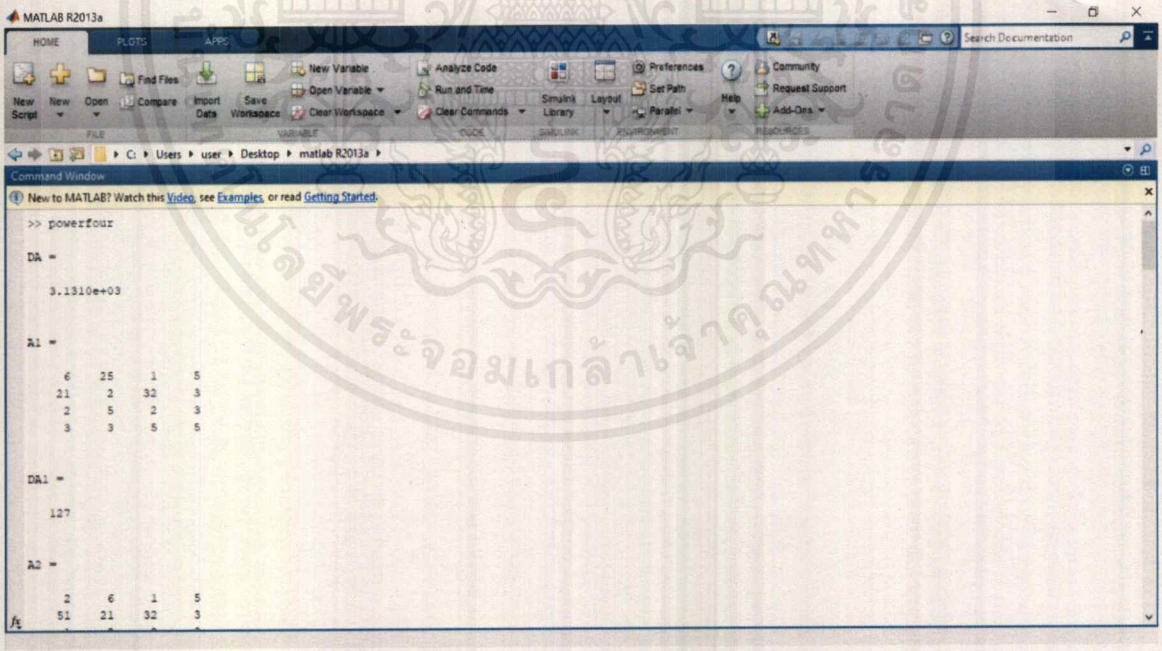


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



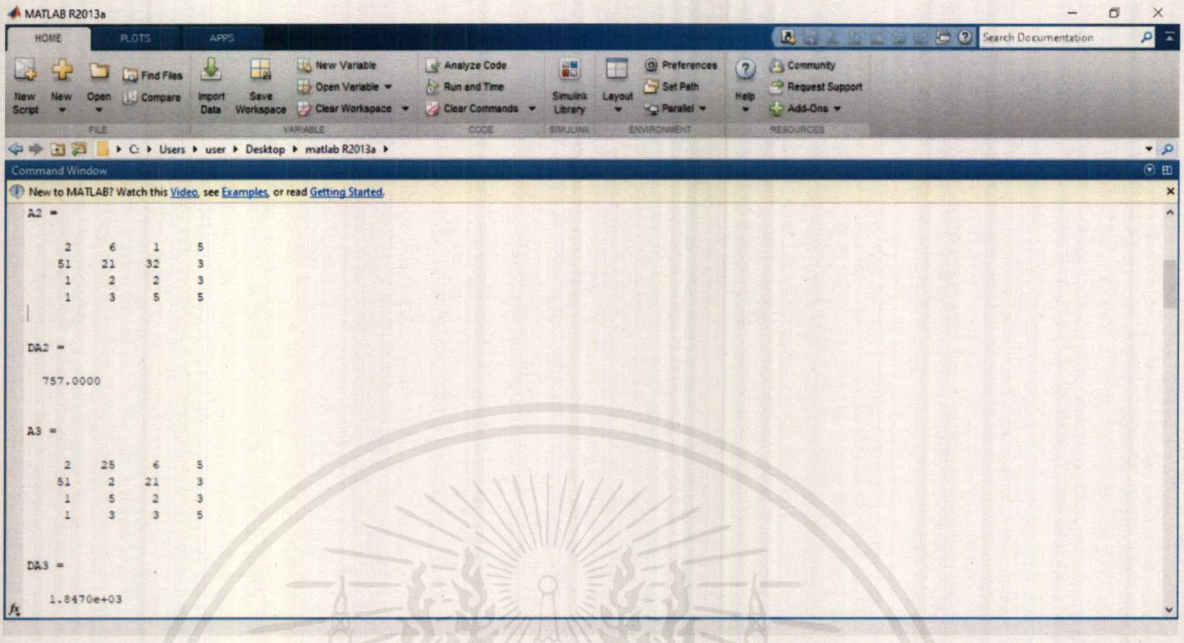
```
Editor - C:\Users\user\Desktop\powerfour.m
EDITOR  PUBLISH  VIEW
powertwo.m*  powerthree.m  powerfour.m

 6 -  A2=[2 B(1,1) 1 5;51 B(2,1) 32 3;1 B(3,1) 2 3;1 B(4,1) 5 5 ]
 7 -  DA2=det(A2)
 8 -  A3=[2 25 B(1,1) 5;51 2 B(2,1) 3;1 5 B(3,1) 3;1 3 B(4,1) 5 ]
 9 -  DA3=det(A3)
10 -  A4=[2 25 1 B(1,1);51 2 32 B(2,1);1 5 2 B(3,1);1 3 5 B(4,1)]
11 -  DA4=det(A4)
12 -  a=(DA1/DA)^(1/4)
13 -  a2=-a
14 -  b=(DA2/DA)^(1/3)
15 -  c=sqrt(DA3/DA)
16 -  c2=-c
17 -  d=(DA4/DA)
18 -  J=[8*(a)^3 75*(b)^2 2*c 5;204*(a)^3 6*(b)^2 64*c 3;4*(a)^3 15*(b)^2 4*c 3;4*(a)^3 9*(b)^2 10*c 5 ]
19 -  J2=[8*(a)^3 75*(b)^2 2*c2 5;204*(a)^3 6*(b)^2 64*c2 3;4*(a)^3 15*(b)^2 4*c2 3;4*(a)^3 9*(b)^2 10*c2 5 ]
20 -  J3=[8*(a2)^3 75*(b)^2 2*c 5;204*(a2)^3 6*(b)^2 64*c 3;4*(a2)^3 15*(b)^2 4*c 3;4*(a2)^3 9*(b)^2 10*c 5 ]
21 -  J4=[8*(a2)^3 75*(b)^2 2*c2 5;204*(a2)^3 6*(b)^2 64*c2 3;4*(a2)^3 15*(b)^2 4*c2 3;4*(a2)^3 9*(b)^2 10*c2 5 ]
22    %หาdetจากdet(J-R)(ผู้ชิดหาคำตอบที่ถูก)
23 -  syms R
24 -  R=[R 0 0 0;0 R 0 0;0 0 R 0;0 0 0 R]
25 -  DS=J-R
26 -  solve(det(DS))
27 -  DS2=J2-R
28 -  solve(det(DS2))
29 -  DS3=J3-R
30 -  solve(det(DS3))
31 -  DS4=J4-R
32 -  solve(det(DS4))

script  Ln 24  Col 36
```

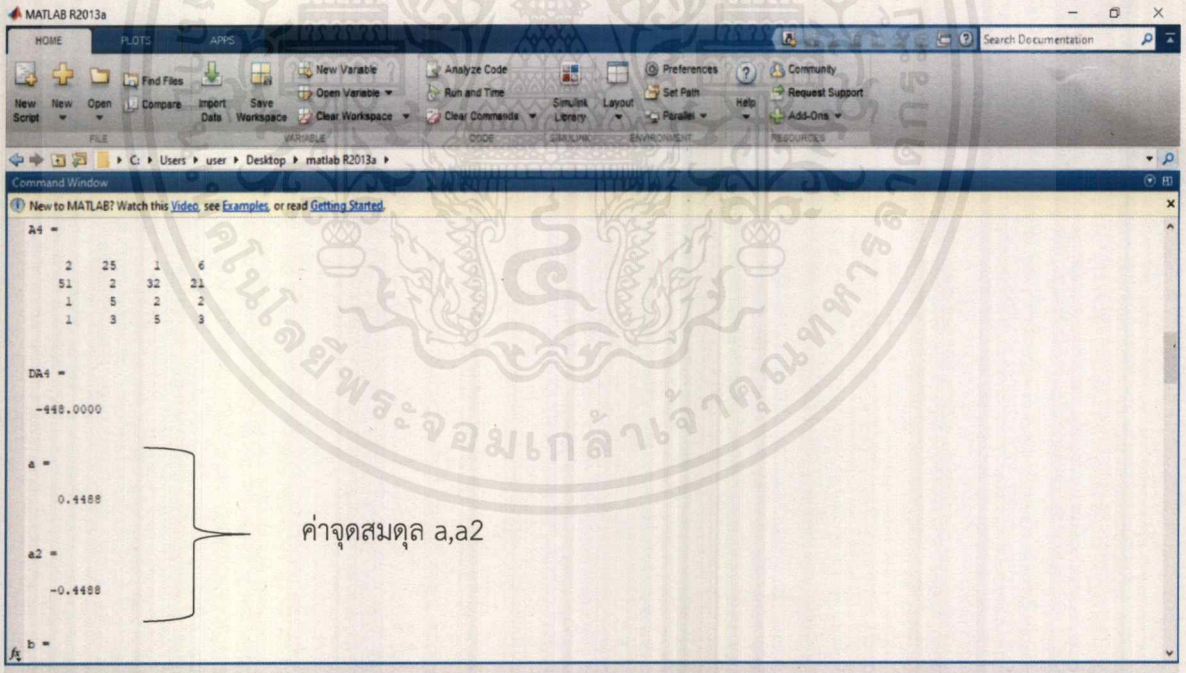
- Output



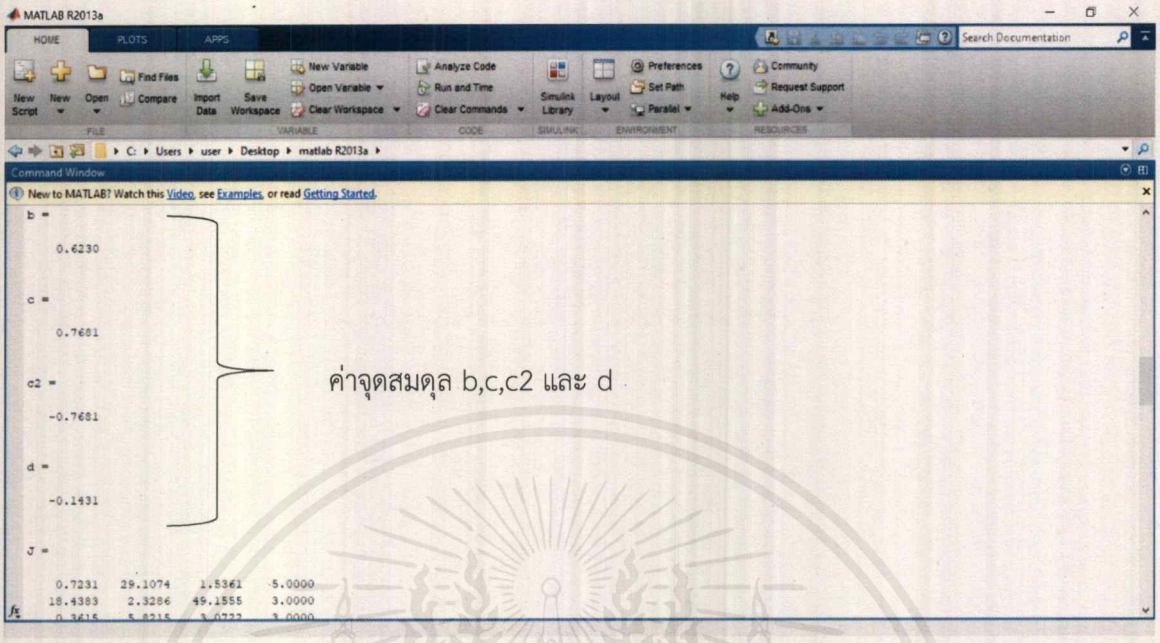
```
MATLAB R2013a
HOME  PLOTS  APPS
C: ▸ Users ▸ user ▸ Desktop ▸ matlab R2013a ▸
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started.

>> powerfour

DA =

   3.1310e+03


A1 =

     6    25     1     5
    21     2    32     3
     2     5     2     3
     3     3     5     5


DA1 =

   127


A2 =

     2     6     1     5
    51    21    32     3
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

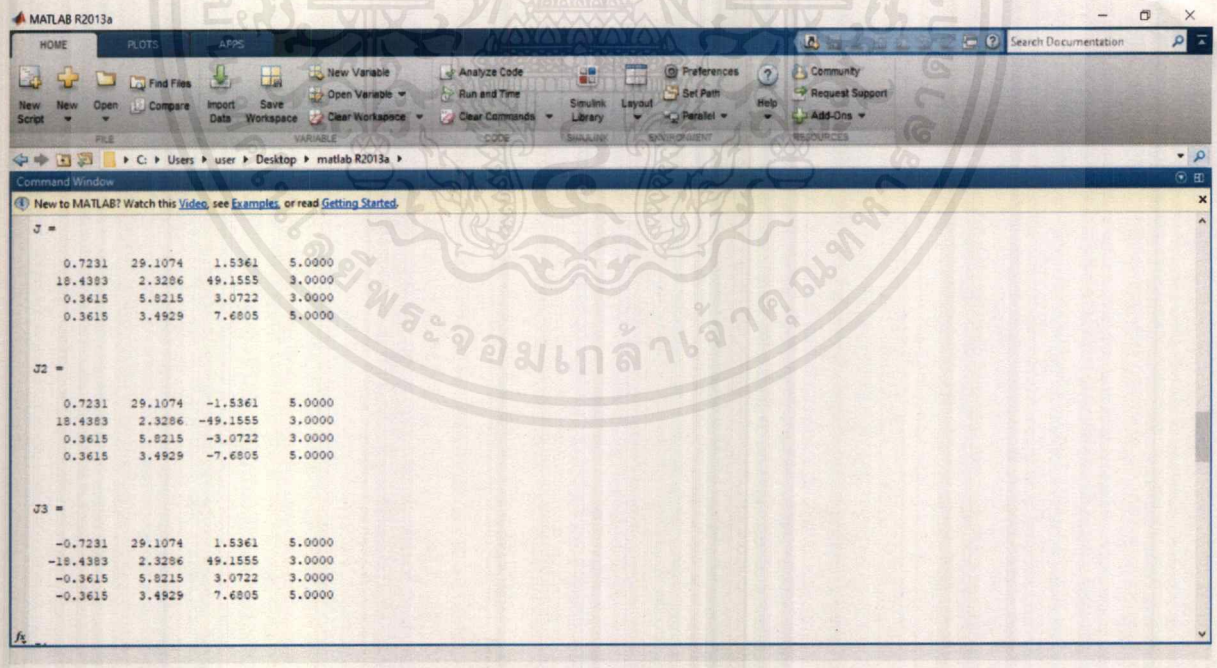




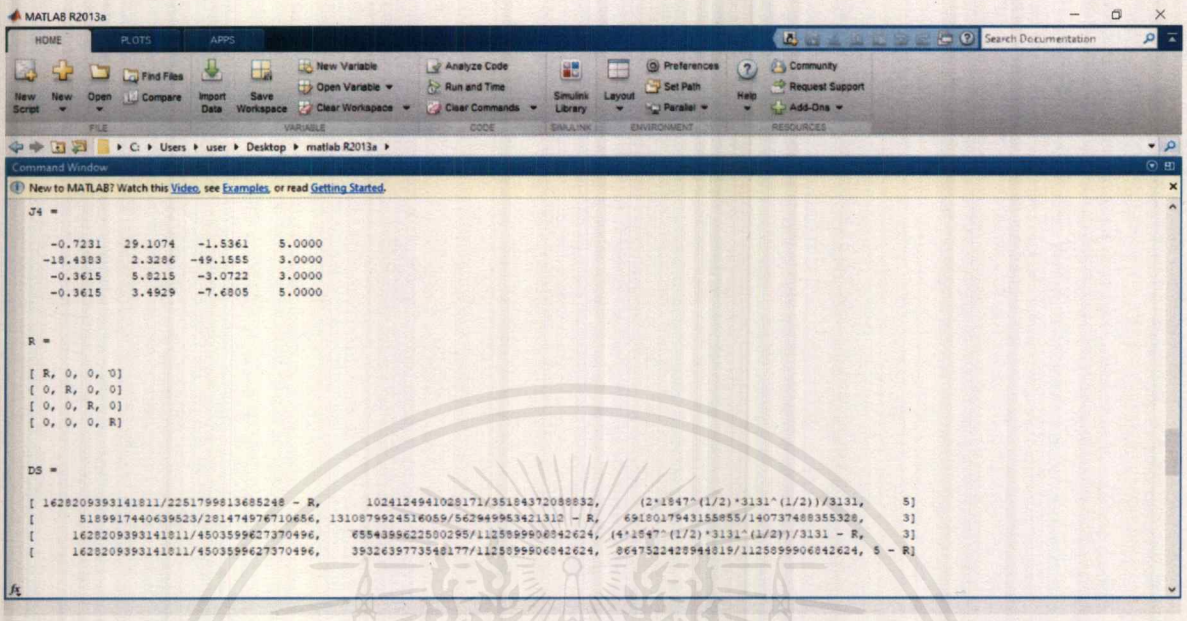
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

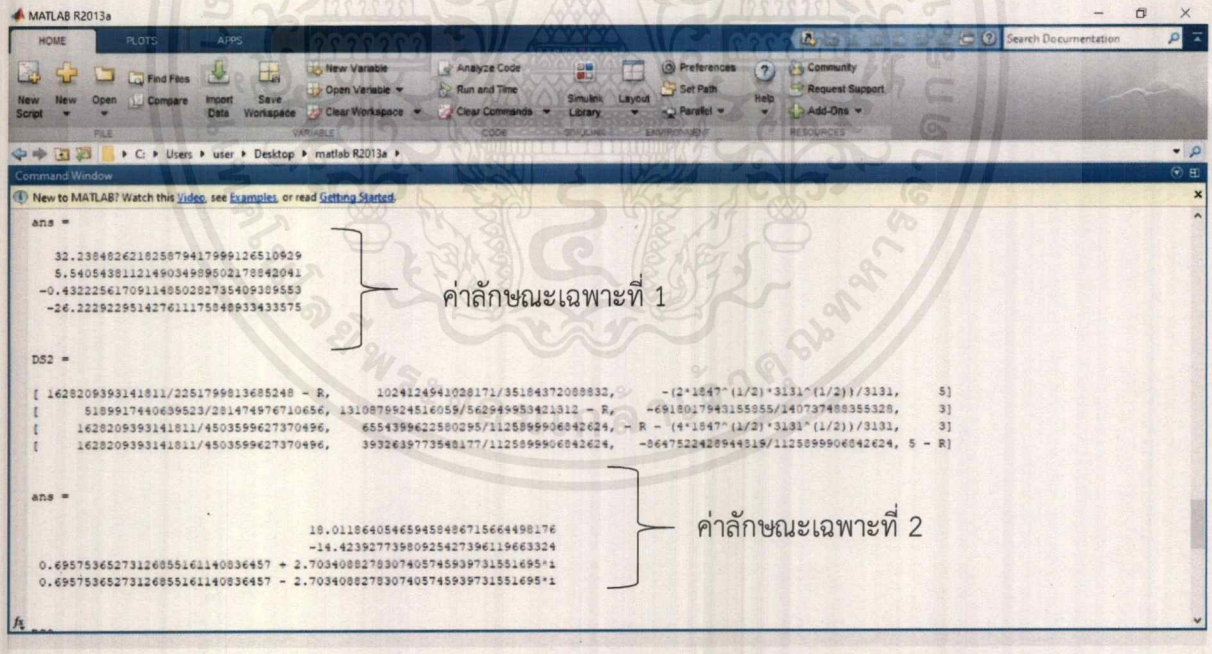


สามารถตรวจสอบความถูกต้องของจุดสมดุลที่ได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.30

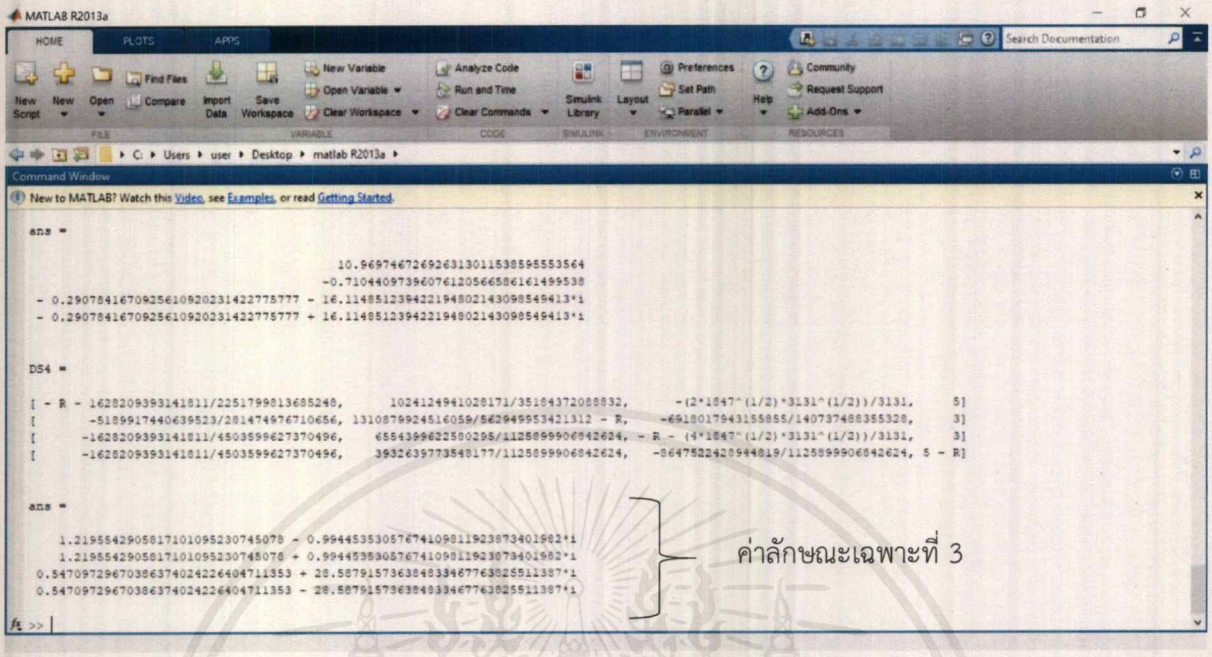


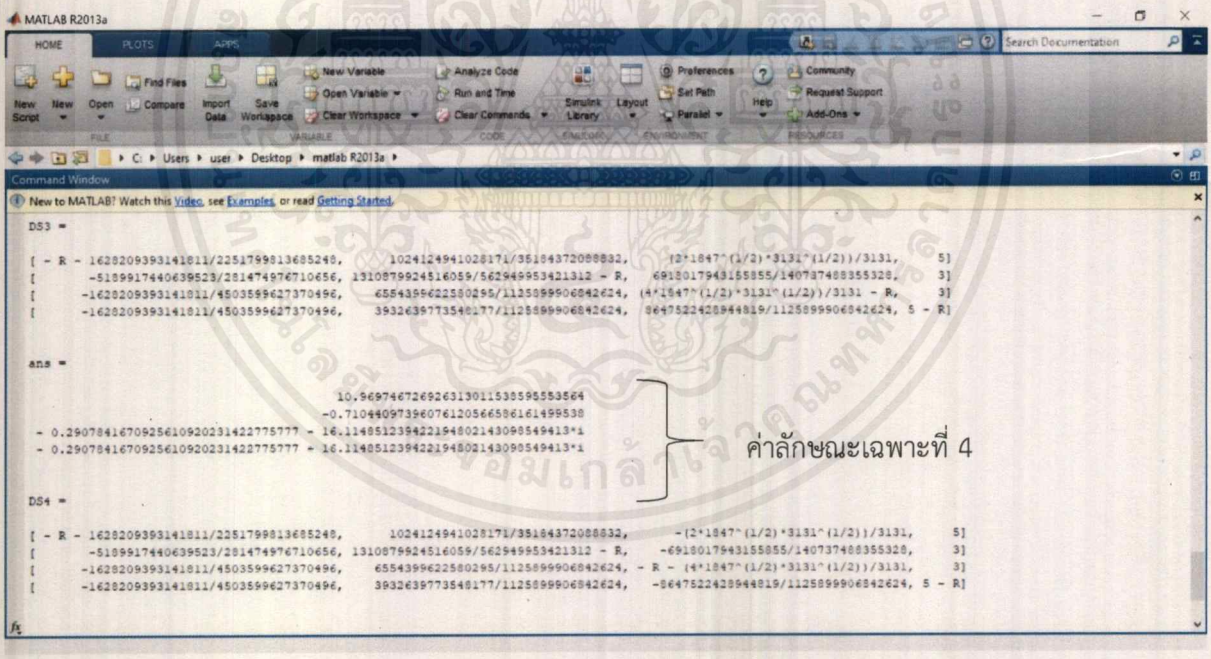
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้





เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



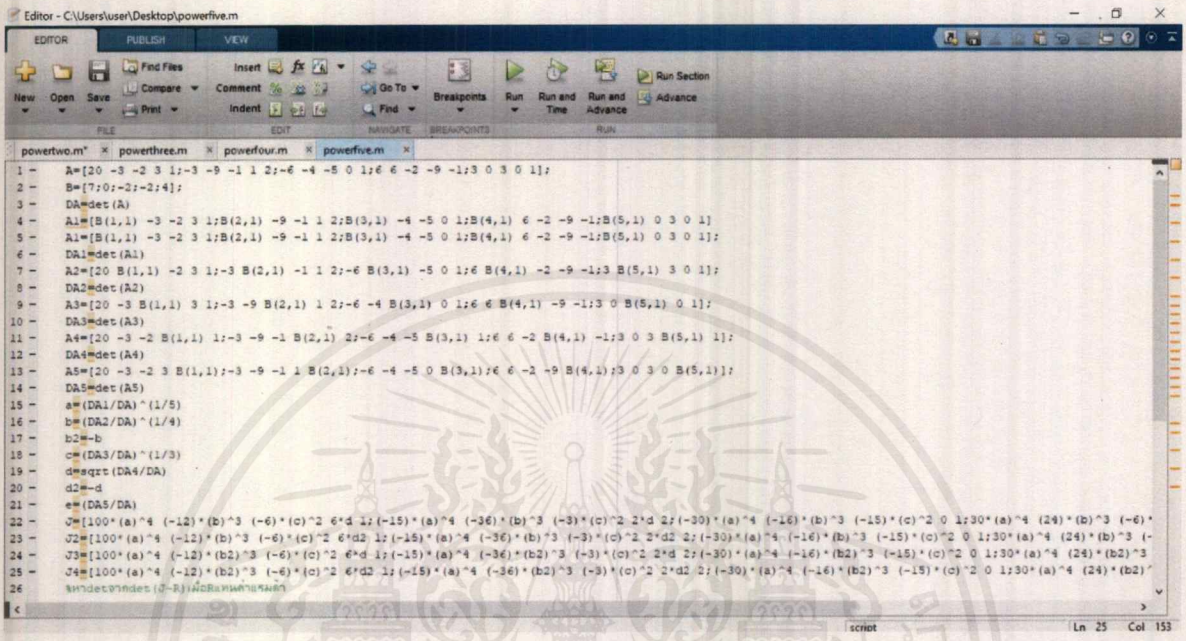


สามารถตรวจสอบความถูกต้องของค่าลักษณะเฉพาะได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.31

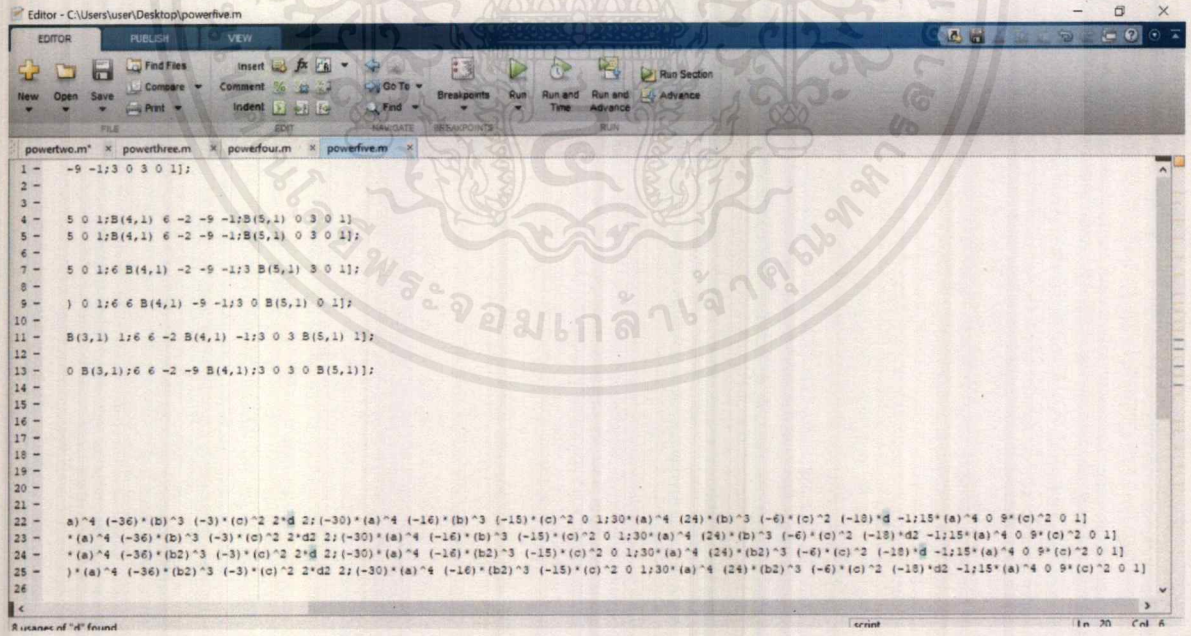
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการกำลัง 5

- Input code in MATLAB

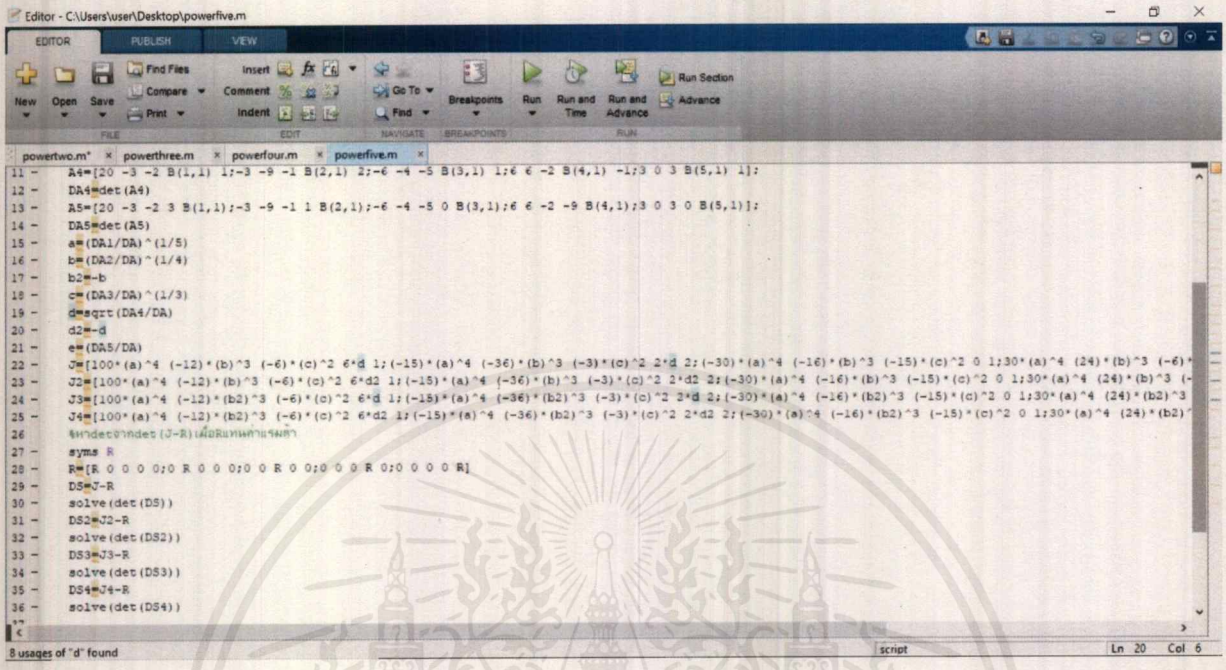


```
A=[20 -3 -2 3 1;-3 -9 -1 1 2;-6 -4 -5 0 1;6 6 -2 -9 -1;3 0 3 0 1];
B=[7;0;-2;-2;4];
DA=det(A)
A1=[B(1,1) -3 -2 3 1;B(2,1) -9 -1 1 2;B(3,1) -4 -5 0 1;B(4,1) 6 -2 -9 -1;B(5,1) 0 3 0 1]
A1=[B(1,1) -3 -2 3 1;B(2,1) -9 -1 1 2;B(3,1) -4 -5 0 1;B(4,1) 6 -2 -9 -1;B(5,1) 0 3 0 1];
DA1=det(A1)
A2=[20 B(1,1) -2 3 1;-3 B(2,1) -1 1 2;-6 B(3,1) -5 0 1;6 B(4,1) -2 -9 -1;3 B(5,1) 3 0 1];
DA2=det(A2)
A3=[20 -3 B(1,1) 3 1;-3 -9 B(2,1) 1 2;-6 -4 B(3,1) 0 1;6 6 B(4,1) -9 -1;3 0 B(5,1) 0 1];
DA3=det(A3)
A4=[20 -3 -2 B(1,1) 1;-3 -9 -1 B(2,1) 2;-6 -4 -5 B(3,1) 1;6 6 -2 B(4,1) -1;3 0 3 B(5,1) 1];
DA4=det(A4)
A5=[20 -3 -2 3 B(1,1);-3 -9 -1 1 B(2,1);-6 -4 -5 0 B(3,1);6 6 -2 -9 B(4,1);3 0 3 0 B(5,1)];
DA5=det(A5)
a=(DA1/DA)^(1/5)
b=(DA2/DA)^(1/4)
b2=-b
c=(DA3/DA)^(1/3)
d=sqrt(DA4/DA)
d2=-d
e=(DA5/DA)
J=[100*(a)^4 (-12)*(b)^3 (-6)*(c)^2 6*d 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b)^3 (-3)*(c)^2 2*d 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b)^3 (-6)*
J2=[100*(a)^4 (-12)*(b)^3 (-6)*(c)^2 6*d2 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b)^3 (-3)*(c)^2 2*d2 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b)^3 (-
J3=[100*(a)^4 (-12)*(b2)^3 (-6)*(c)^2 6*d 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b2)^3 (-3)*(c)^2 2*d 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b2)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b2)^3
J4=[100*(a)^4 (-12)*(b2)^3 (-6)*(c)^2 6*d2 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b2)^3 (-3)*(c)^2 2*d2 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b2)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b2)^
หาdetจากdet(J-R)แล้วRหาค่ารูทออก
```



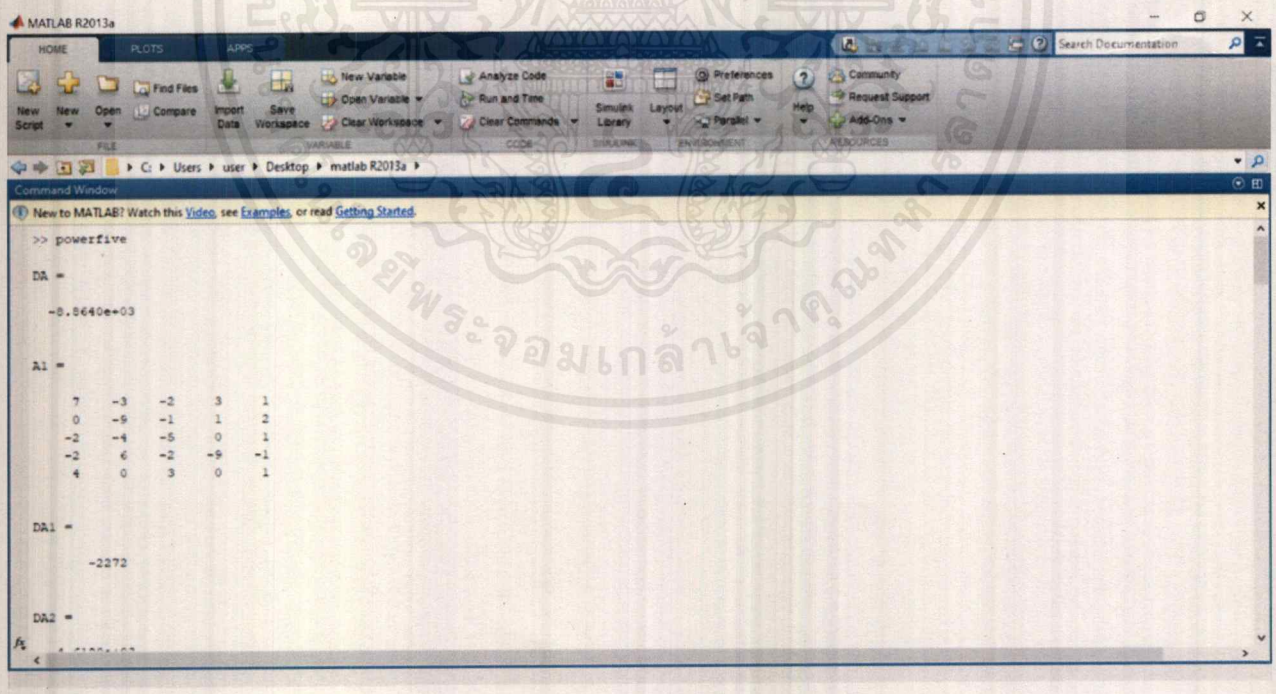
```
-9 -1;3 0 3 0 1];


5 0 1;B(4,1) 6 -2 -9 -1;B(5,1) 0 3 0 1]
5 0 1;B(4,1) 6 -2 -9 -1;B(5,1) 0 3 0 1];

5 0 1;6 B(4,1) -2 -9 -1;3 B(5,1) 3 0 1];

) 0 1;6 6 B(4,1) -9 -1;3 0 B(5,1) 0 1];

B(3,1) 1;6 6 -2 B(4,1) -1;3 0 3 B(5,1) 1];

0 B(3,1);6 6 -2 -9 B(4,1);3 0 3 0 B(5,1)];









a)^4 (-36)*(b)^3 (-3)*(c)^2 2*d 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b)^3 (-6)*(c)^2 (-18)*d -1;15*(a)^4 0 9*(c)^2 0 1]
*(a)^4 (-36)*(b)^3 (-3)*(c)^2 2*d2 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b)^3 (-6)*(c)^2 (-18)*d2 -1;15*(a)^4 0 9*(c)^2 0 1]
*(a)^4 (-36)*(b2)^3 (-3)*(c)^2 2*d 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b2)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b2)^3 (-6)*(c)^2 (-18)*d -1;15*(a)^4 0 9*(c)^2 0 1]
)*(a)^4 (-36)*(b2)^3 (-3)*(c)^2 2*d2 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b2)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b2)^3 (-6)*(c)^2 (-18)*d2 -1;15*(a)^4 0 9*(c)^2 0 1]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



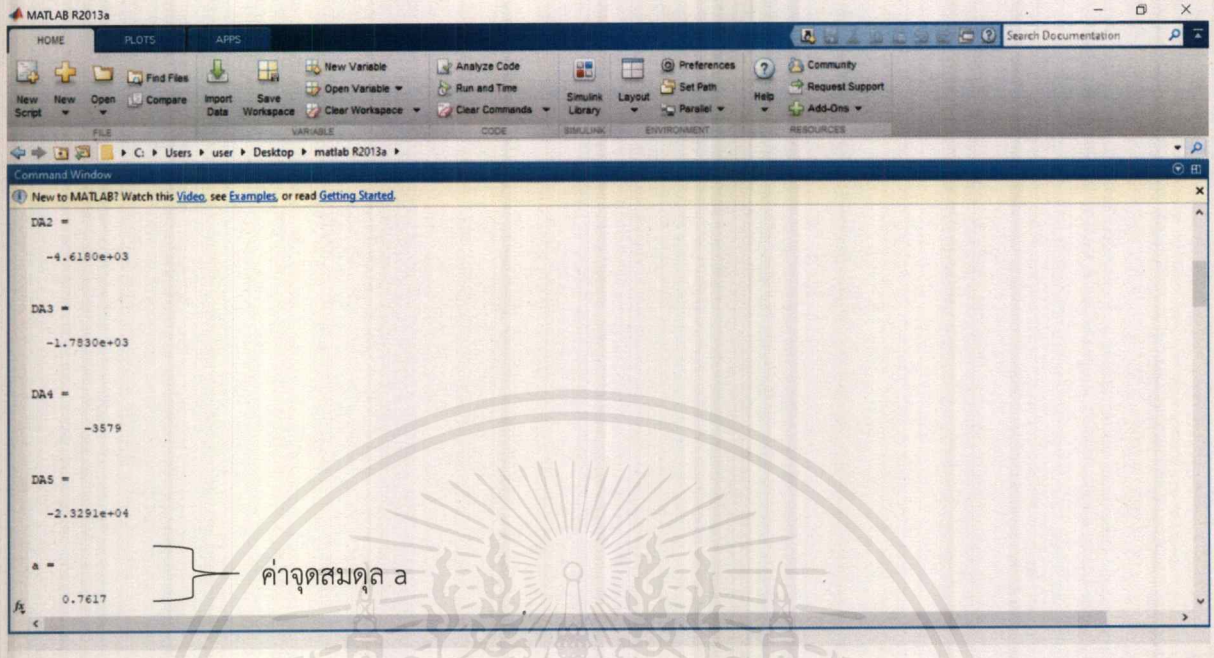
```
A4=[20 -3 -2 B(1,1) 1;-3 -9 -1 B(2,1) 2;-6 -4 -5 B(3,1) 1;6 6 -2 B(4,1) -1;3 0 3 B(5,1) 1];
DA4=det(A4)
A5=[20 -3 -2 3 B(1,1);-3 -9 -1 1 B(2,1);-6 -4 -5 0 B(3,1);6 6 -2 -9 B(4,1);3 0 3 0 B(5,1)];
DA5=det(A5)
a=(DA1/DA)^(1/5)
b=(DA2/DA)^(1/4)
b2=-b
c=(DA3/DA)^(1/3)
d=sqrt(DA4/DA)
d2=-d
e=(DA5/DA)
J=[100*(a)^4 (-12)*(b)^3 (-6)*(c)^2 6*d 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b)^3 (-3)*(c)^2 2*d 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b)^3 (-6)*
J2=[100*(a)^4 (-12)*(b)^3 (-6)*(c)^2 6*d2 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b)^3 (-3)*(c)^2 2*d2 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b)^3 (-
J3=[100*(a)^4 (-12)*(b2)^3 (-6)*(c)^2 6*d 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b2)^3 (-3)*(c)^2 2*d 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b2)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b2)^3
J4=[100*(a)^4 (-12)*(b2)^3 (-6)*(c)^2 6*d2 1;(-15)*(a)^4 (-36)*(b2)^3 (-3)*(c)^2 2*d2 2;(-30)*(a)^4 (-16)*(b2)^3 (-15)*(c)^2 0 1;30*(a)^4 (24)*(b2)^
หาdetจากdet(J-R)เมื่อRแทนค่าเรขคำ
syms R
R=[R 0 0 0 0;0 R 0 0 0;0 0 R 0 0;0 0 0 R 0;0 0 0 0 R]
DS=J-R
solve(det(DS))
DS2=J2-R
solve(det(DS2))
DS3=J3-R
solve(det(DS3))
DS4=J4-R
solve(det(DS4))
```

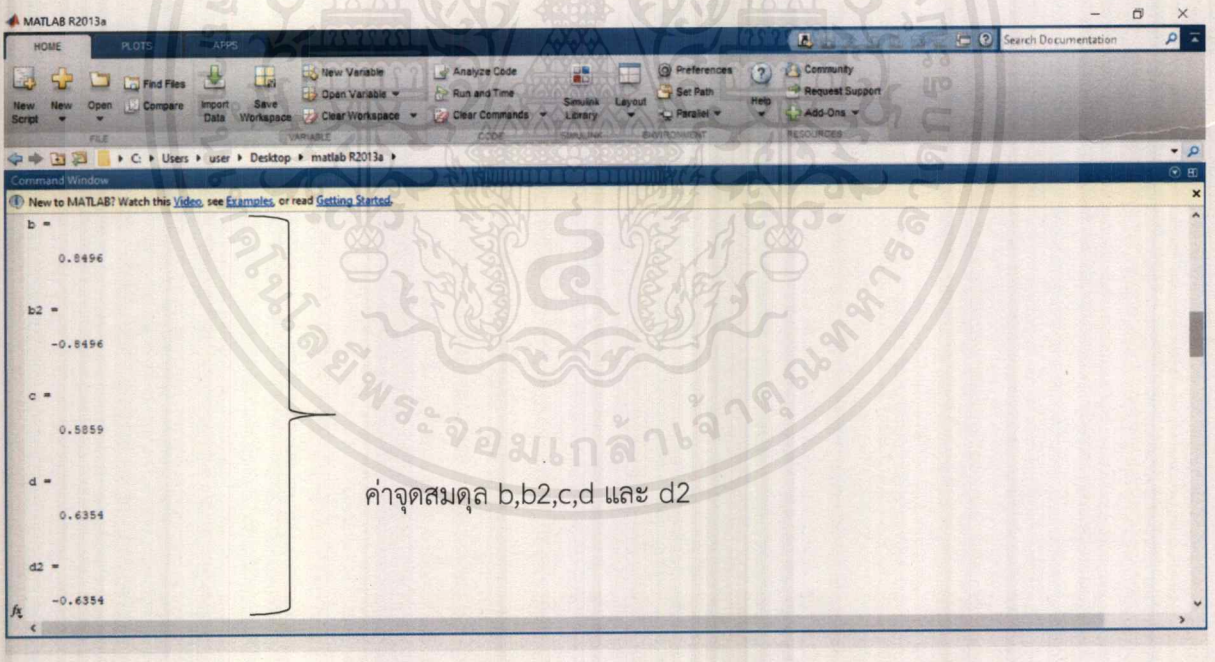
- Output



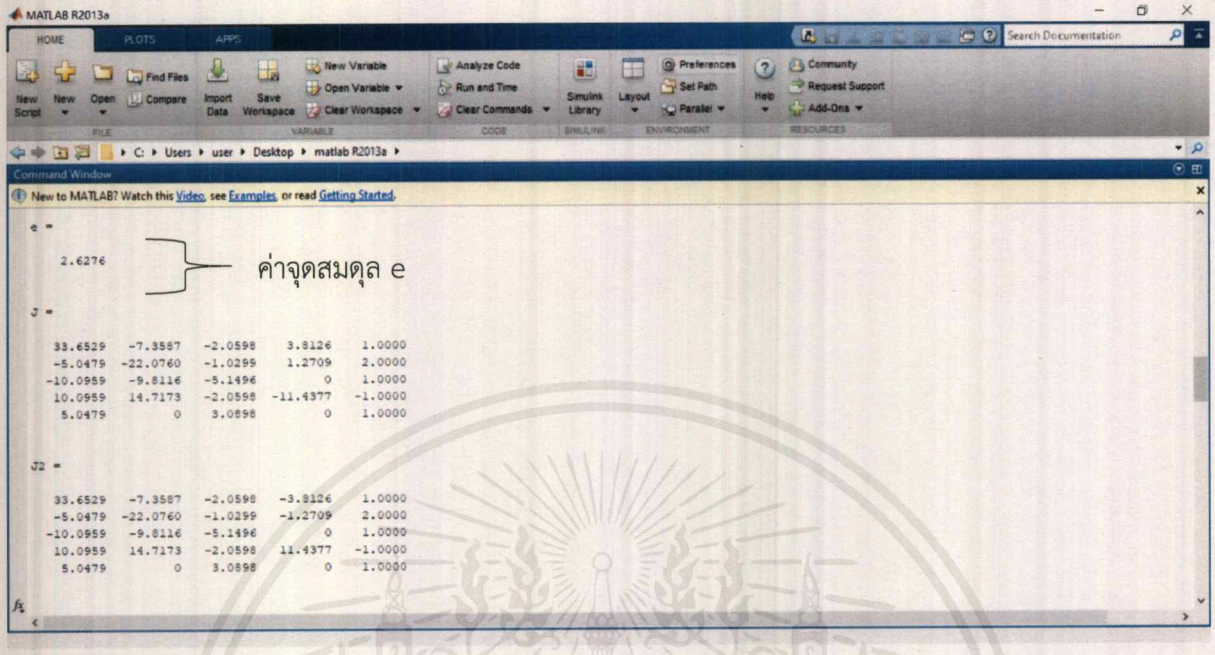
```
>> powerfive

DA =

  -8.8640e+03


A1 =

     7    -3    -2     3     1
     0    -9    -1     1     2
    -2    -4    -5     0     1
    -2     6    -2    -9    -1
     4     0     3     0     1


DA1 =

       -2272


DA2 =
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

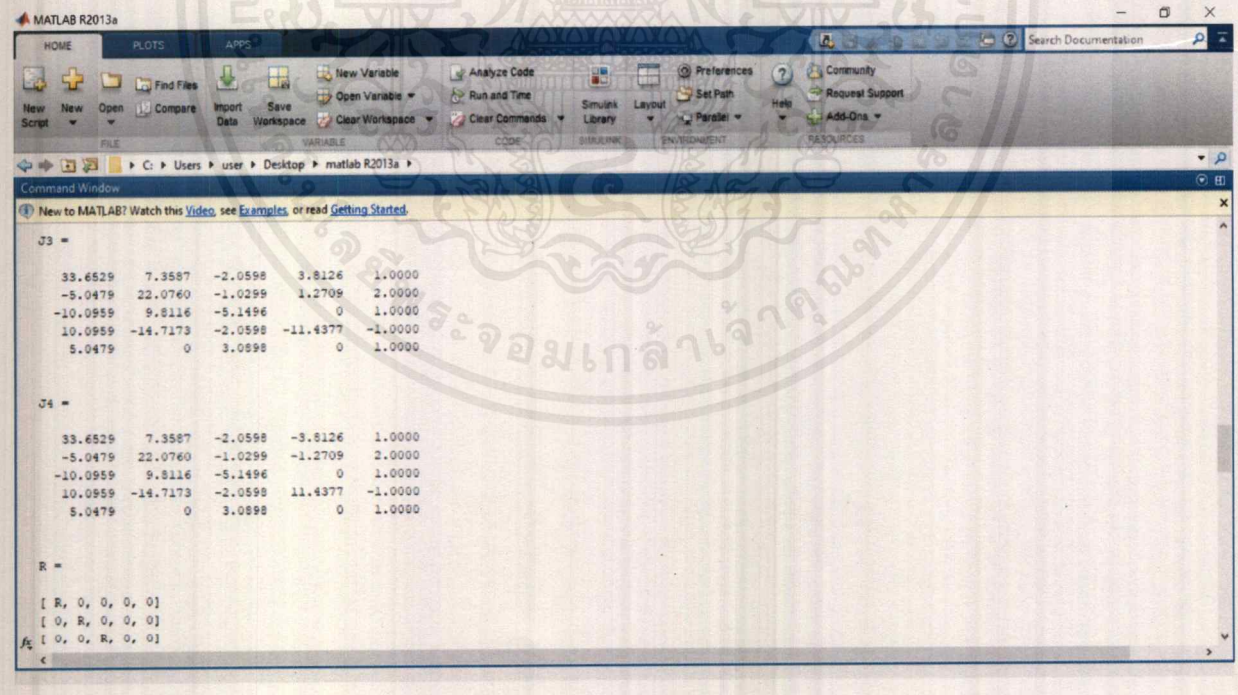




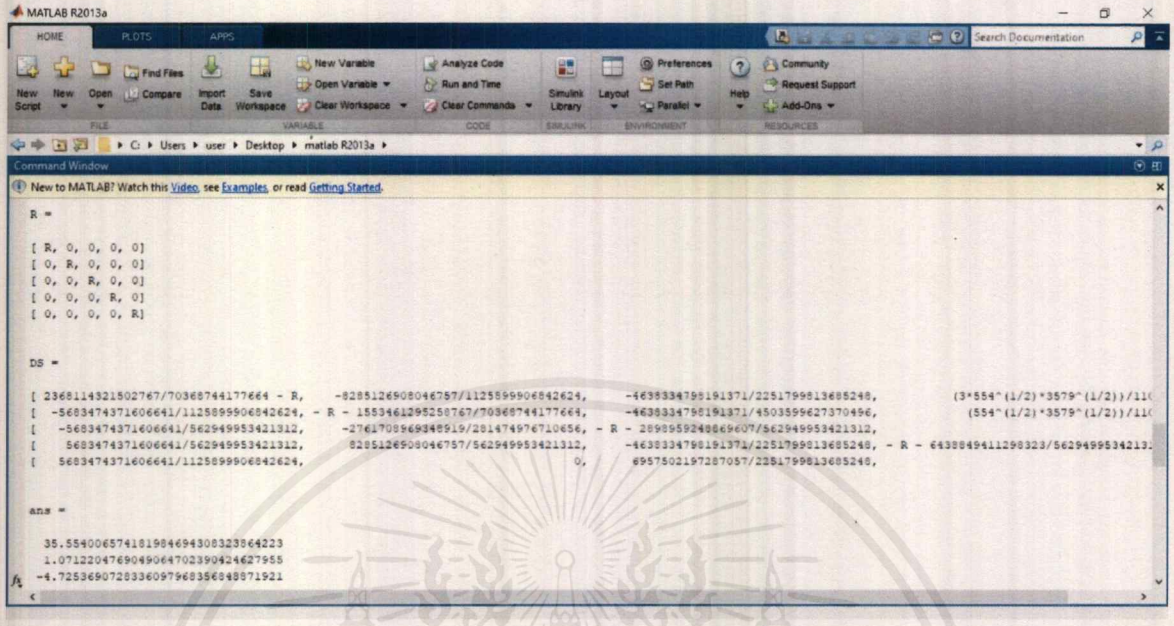
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

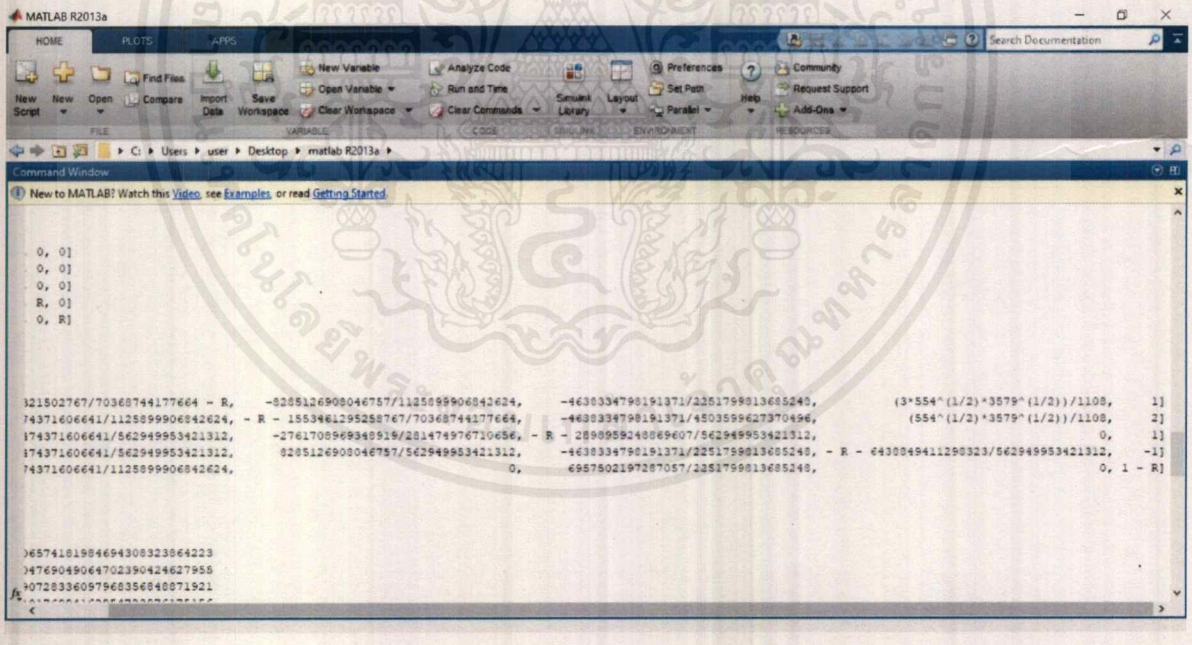


สามารถตรวจสอบความถูกต้องของจุดสมดุลที่ได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.39

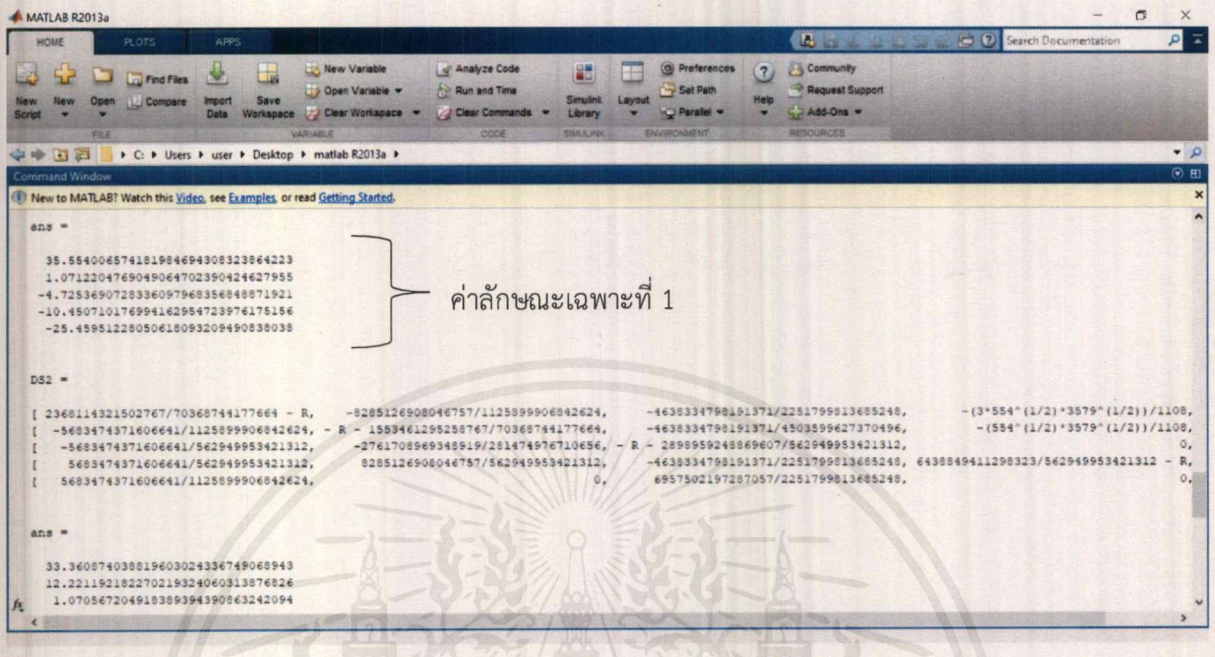


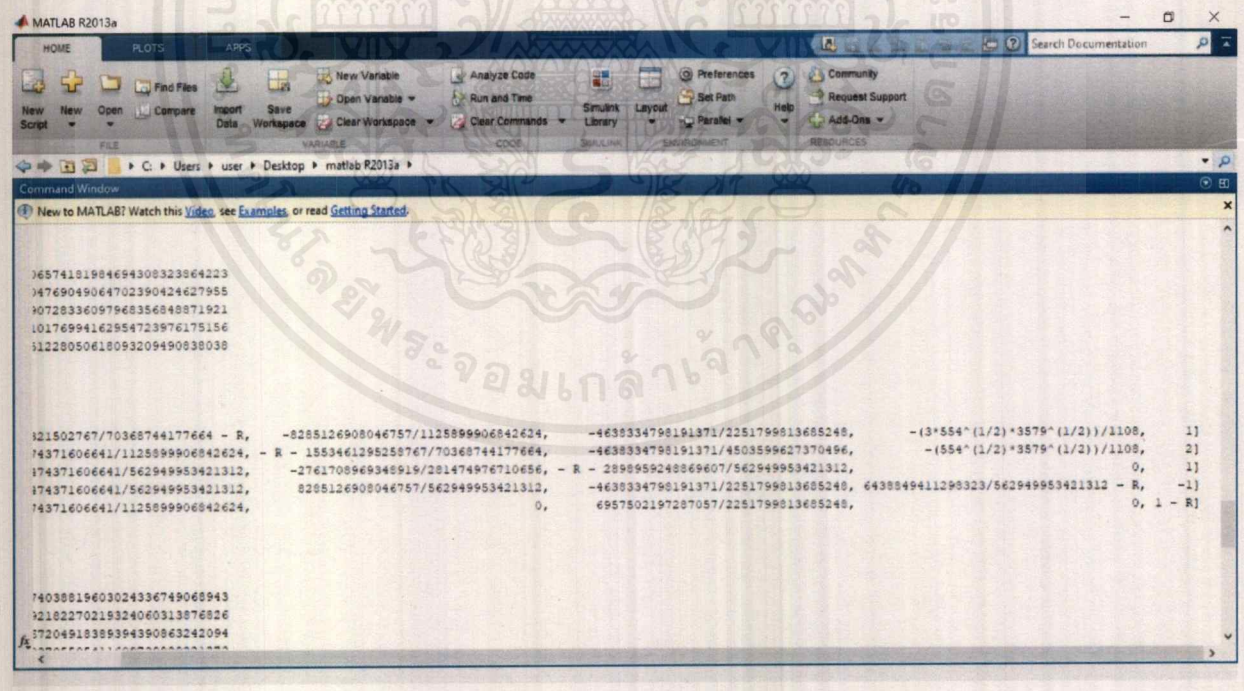
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



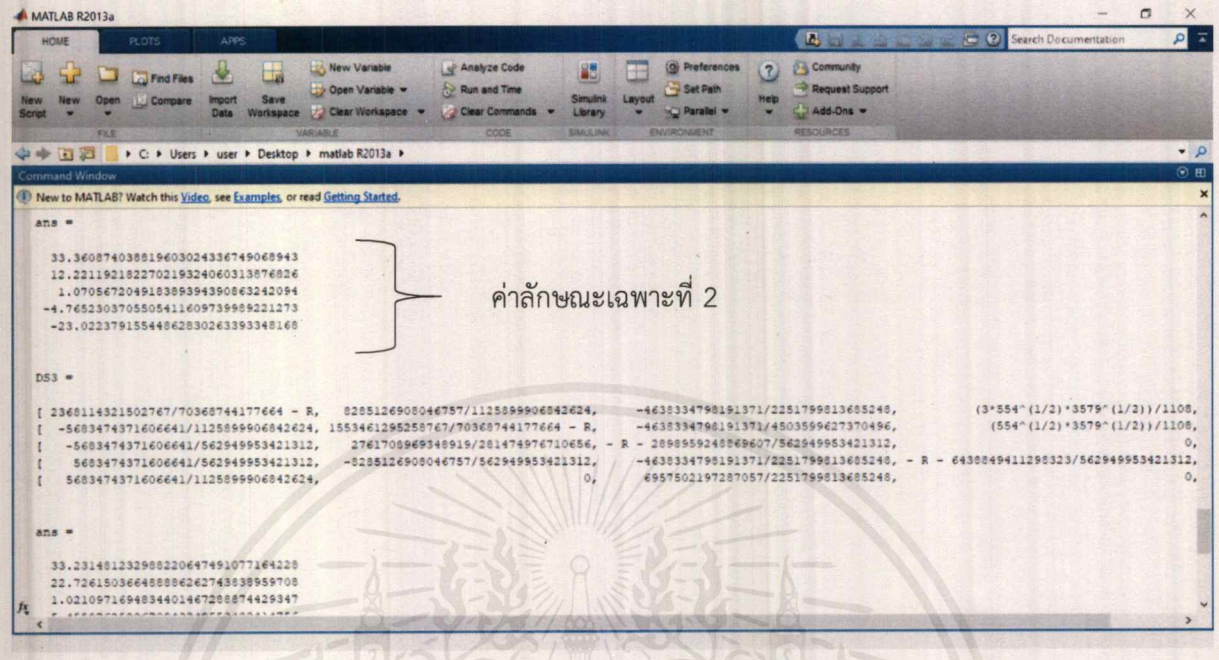


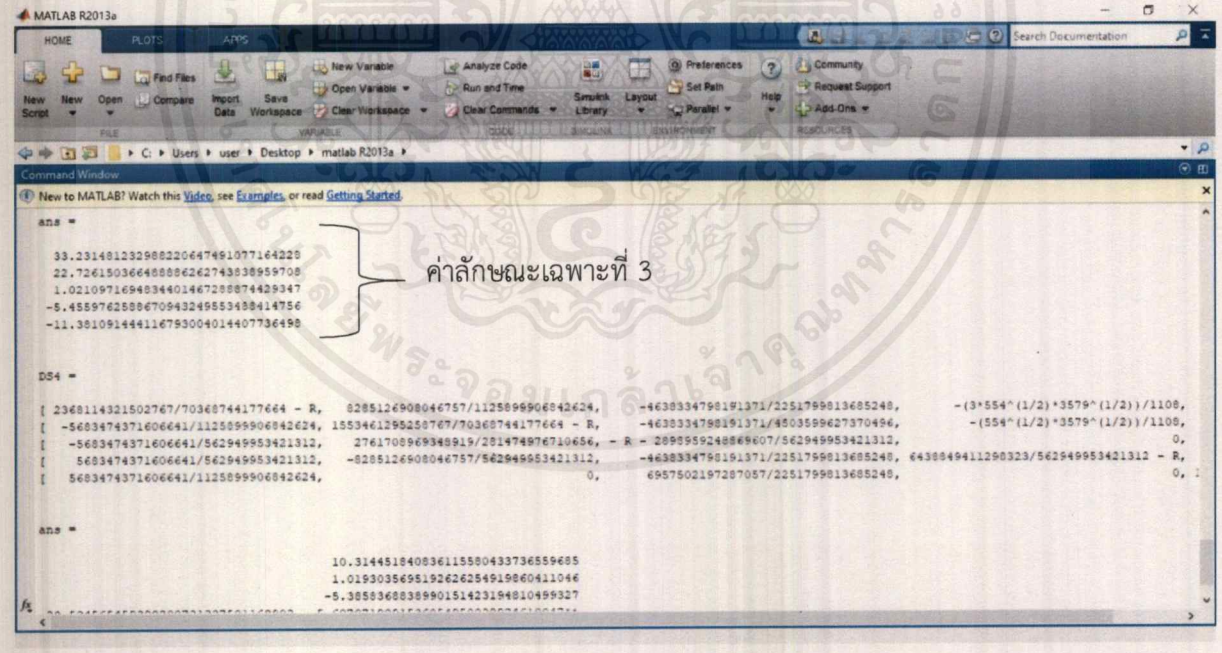
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



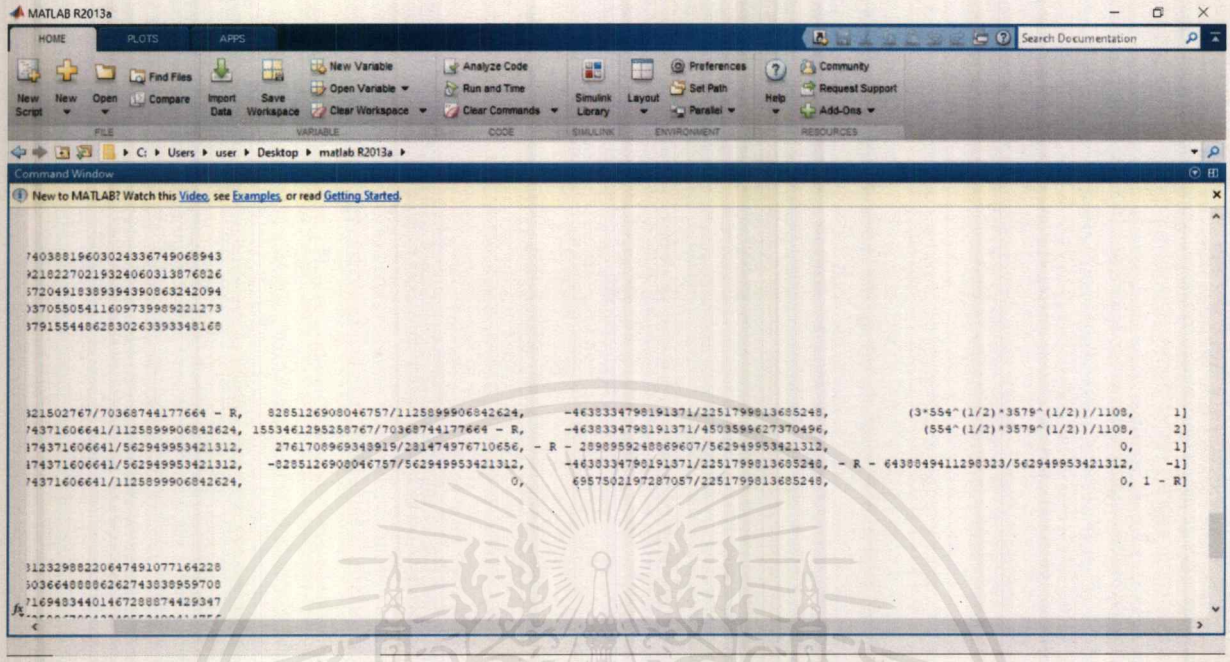


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

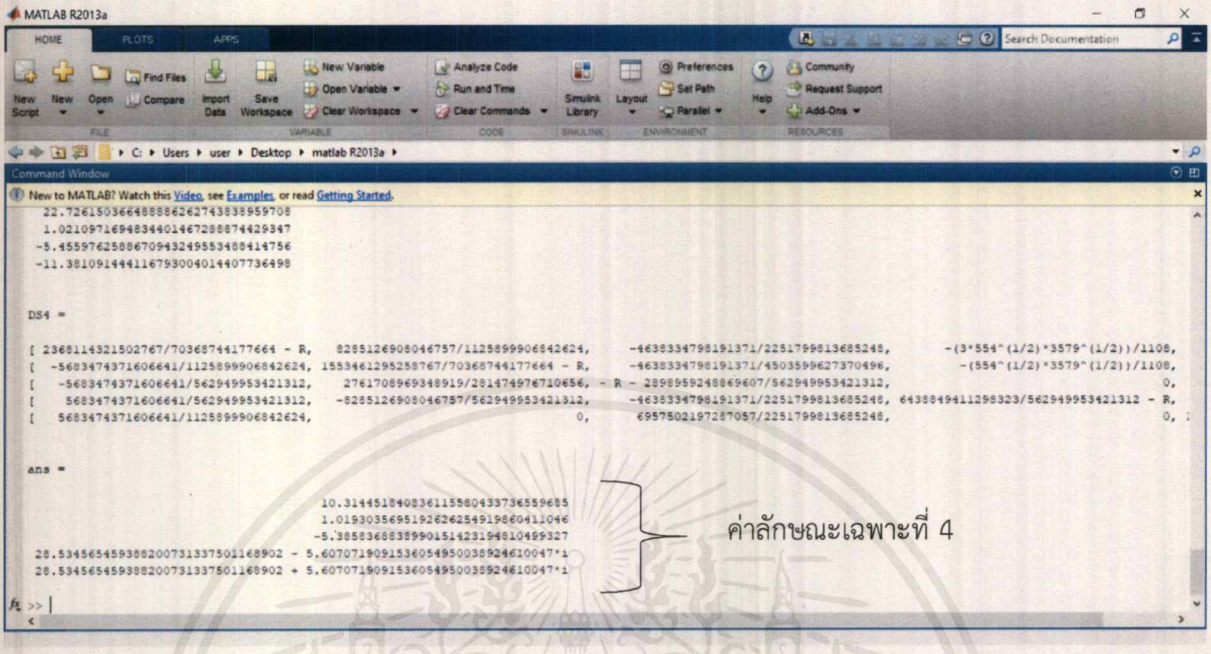




เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



สามารถตรวจสอบความถูกต้องของค่าลักษณะเฉพาะได้จากโปรแกรม ในรูปที่ 4.40

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารคำรับรองเล่มปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้